МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ «КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ ІМЕНІ ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

СПЕЦІАЛЬНА ТЕОРІЯ ВІДНОСНОСТІ.

ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ ТА ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ.

Навчальний посібник

Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського

як навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра за

за освітніми програмами конструювання та дизайн машин НН ММІ

спеціальність 131 «Прикладна механіка»

Укладач: К.Ю. Печерська

Електронне мережеве навчальне видання

КИЇВ

КПІ ІМ. ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО

2023

УДК XXX.XX (XXX)

Укладачі: Печерська Катерина Юріївна, канд. фіз.-мат. наук.

Рецензент *Решетняк С.О.*, д.ф.-м.н., проф.,

зав. кафедри ЗФ ФМФ КПІ ім. Ігоря Сікорського

Відповідальний *Котовський В.Й.*, д.т.н., проф

редактор.

Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського

(протокол № 2 від 26.10.2023 р.)

за поданням Вченої ради фізико-математичного факультету

(протокол № 16 від 25.10.2023 р)

Спеціальна теорія відносності. Теоретичні відомості та приклади розв'язання задач [Електронний ресурс] : навч. посіб. для здобувачів ступеня бакалавраї за освіт. Програмами конструювання та дизайн машин, *НН ММІ* спец. 131 Прикладна механіка / КПІ ім. Ігоря Сікорського ; уклад.: К.Ю. Печерська – Електрон. текст. дані (1 файл). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2024. – 40 с.

Посібник містить теоретичні відомості та приклади розв'язування задач, з теми «Спеціальна теорія відносності» дисципліни «Загальна фізика. Частина 1. Метою посібника є полегшення і покращення самостійної роботи студентів, як в очному, так і в дистанційному режиму навчання, а також в умовах воєнного стану. Особливу увагу приділено виводу і отриманню робочих формул, та розгорнутому та детальному огляду такої специфічної теми. Навчальний посібник призначений для здобувачів ступеня бакалавра за спеціальністю 131«Прикладна механіка»

УДК XXX.XX (XXX)

Реєстр. № НП XX/XX-XXX. Обсяг X,X авт. арк.Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»проспект Берестейський, 37, м. Київ, 03056 https://kpi.uaСвідоцтво про внесення до Державного реєстру видавців, виготовлювачів і розповсюджувачів видавничої продукції ДК № 5354 від 25.05.2017 р.

Зміст

Вступ

Предметом ньютонівської механіки є вивчення руху будь-яких матеріальних тіл з великими масами (в порівнянні з масою атома), що відбувається зі швидкостями, малими в порівнянні зі швидкістю світла в вакуумі. ЇЇ основою є три закони динаміки, сформульовані І. Ньютоном у 1687р. Доцільність ньютонівської механіки в області малих швидкостей та великих мас незаперечна. Однак ньютонівська механіка не в змозі описати явища, в яких беруть участь тіла, котрі рухаються з дуже великими швидкостями. Для пояснення таких процесів знадобився інший науковий підхід.

Переосмислення А. Ейнштейном ньютонівських уявлень про простір і час дав йому змогу створити загальну теорію відносності, котра враховує властивості об'єднаного поняття „простір-час" за наявності полів тяжіння, котру називають також теорією тяжіння. Теорію, яка враховує властивості „простору-часу" без врахування полів тяжіння, називають окремою або спеціальною теорією відносності. Механіку великих мас і великих швидкостей, тобто механіку великих мас, що враховує вимоги спеціальної теорії відносності, називають класичною релятивістською механікою. Релятивістська механіка (як і загальна теорія відносності) не привела до заперечення ньютонівської механіки, а лише поглибила і розширила її. Рівняння релятивістської механіки у випадку швидкостей, дуже малих у порівнянні зі швидкістю світла у вакуумі, переходять у рівняння ньютонівської механіки.

У відповідності з програмою курсу загальної фізики та Сілабусами студентам пропонується для вивчення приблизно такий перелік питань зі спеціальної теорії відносності:

1. Постулати Ейнштейна. Спеціальна теорія відносності.
2. Перетворення Лоренца.

3. Висновки з перетворень Лоренца:

а) довжина тіл у різних інерціальних системах відліку;

б) тривалість процесів у різних інерціальних системах відліку;

в) одночасність подій у різних інерціальних системах відліку.

4. Інтервал між двома подіями.

5. Перетворення і додавання швидкостей.

6. Релятивістське рівняння для маси та імпульсу.

7. Релятивістське рівняння для енергії. Взаємозв’язок маси та енергії.

8. Частинка з нульовою масою спокою.

9. Перетворення енергії та імпульсу.

10. Релятивістський ефект Доплера.

Вивчаючи основні положення спеціальної теорії відносності, варто чітко уявляти, що вона не відкидає основні положення ньютонівської механіки. Навпаки, розробляючи теорію відносності, А. Ейнштейн поширив механічний принцип Г.Галілея на всі фізичні закони природи.

1. Постулати Ейнштейна. Спеціальна теорія відносності

Відповідно до принципу відносності Галілея всі закони ньютонівської механіки однакові в усіх інерціальних системах відліку, тобто у всіх системах відліку, котрі одна відносно одної або перебувають у спокої, або ж рухаються рівномірно і прямолінійно. Незмінність виду рівняння при заміні в ньому координат і часу однієї системи відліку на координати і час іншої системи відліку називають інваріантністю рівняння. Тому механічний принцип відносності можна сформулювати таким чином: усі закони ньютонівської механіки інваріантні щодо перетворень Галілея:

$$x=x'+\upsilon t;\; y=y';\; z=z';\; t=t'. \qquad (1.1)$$

Механічний принцип відносності свідчить про те, що в межах класичної нерелятивістської механіки всі інерціальні системи відліку рівноправні, і немає абсолютної системи відліку, відносно якої механічний рух можна було б вважати абсолютним.

Спроби поширити принципи відносності Галілея на світлові явища, описувані електромагнітною теорією Максвелла, показали, що перетворення Галілея не зберігають інваріантними закони електромагнітної теорії світла. У зв'язку з цим перед фізиками логічно відкривалися три можливості вважати, що:

1. Принцип відносності Галілея поширюється лише на механіку, а в електродинаміці існує абсолютна система відліку. Її пов'язували з так званим всепроникнуючим ефіром .

2. Принцип відносності Галілея є універсальним. Система рівнянь Максвелла, не відповідаючи вимогам цьому принципу, невірна.

3. Принцип відносності Галілея має універсальний характер, система рівнянь Максвелла вірна, перетворення Галілея не універсальні.

Вибір між цими трьома можливостями необхідно було зробити на підставі експериментальних даних. Однак дослідним шляхом абсолютну систему відліку (тобто ефір) виявлено не було; система рівнянь Максвелла виявилась вірною. Це означає, що перетворення Галілея варто визнати не універсальними, а рівняння механіки потрібно замінити так, щоб вони відповідали вимогам нових умов переходу від однієї інерціальної системи відліку до іншої.

Проаналізувавши досить велику кількість дослідних даних, Ейнштейн вибрав два найбільш беззаперечні положення (так звані постулати) і побудував на них свою теорію відносності. Ці постулати називають принципом відносності Ейнштейна та принципом сталості світла.

Принцип відносності Ейнштейна є поширенням механічного принципу Галілея на усі фізичні явища. Згідно з цим принципом всі закони природи однакові в усіх інерціальних системах відліку, тобто рівняння, котрі виражають закони природи, інваріантні щодо перетворень координат і часу, що відповідають переходу від однієї інерціальної системи відліку до іншої. Звідси випливає, що за допомогою будь-яких дослідів, проведених у замкненій системі тіл, неможливо виявити, чи ця система перебуває у спокої, чи рухається рівномірно і прямолінійно відносно будь-якої інерціальної системи відліку.

Принцип сталості швидкості стверджує, що швидкість світла у вакуумі не залежить від швидкості руху приймача та джерела світла і однакова в усіх напрямках. Згідно з першим постулатом вона повинна бути однаковою в усіх інерціальних системах відліку, тобто являє собою універсальну сталу. За сучасними даними, ця швидкість c= $2{,}99792458 \cdot 10^8$ м/с $\approx 3 \cdot 10^8$ м/с. Обидва постулати Ейнштейна підтверджуються багатьма експериментами, які не входять до числа тих, на підставі котрих вони були сформульовані.

З постулатів Ейнштейна випливає ряд важливих висновків щодо простору і часу. Так, твердження ньютонівської механіки про взаємну незалежність простору і часу призводить до висновку, що час, як самостійний, незалежний, абсолютний, в усіх інерціальних системах відліку плине однаково. Отже, дві події, одночасні в будь-якій одній системі відліку, мали б бути одночасними в усіх інших інерціальних системах відліку. Однак, це суперечило б принципу сталості світла. Покажемо це на такому прикладі. Розглянемо дві інерціальні системи відліку K і K' (рис 1.1), одна з яких (K) умовно перебуває у спокої, а друга (K') рухається зі швидкістю $\vec{\upsilon}_0$ відносно K.

Закріпимо джерело світла в точці O' і зафіксуємо точки A і B в системі K' так, щоб

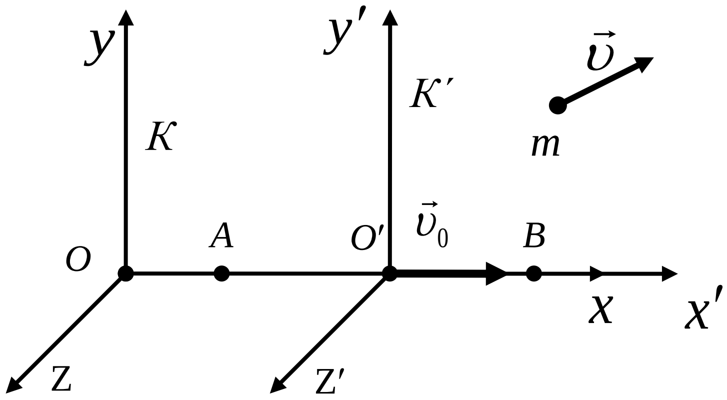


Рис.1.1

дотримувалась умова $AO' = O'B$. Для спостерігача, зв'язаного з системою K', світловий сигнал досягає точок *A* і *B* одночасно.

Для спостерігача, зв'язаного з системою K, світловий сигнал йде назустріч точці *A* і наздоганяє точку *B***,** і тому досягає цих точок неодночасно. Отже, дві події, одно-часні в одній інерціаль-ній системі відліку, є неодночасними в іншій інерціальній системі від-ліку. Таким чином, час у різних інерціальних системах відліку плине неоднаково.

Перетворення Галілея (1.1) відповідають умові, що в момент часу $t = 0$ системи відліку K і K' суміщені. На підставі цих перетворень обчислюємо закон додавання швидкостей в нерелятивістській механіці:

$$\upsilon_x = \upsilon'_x + \upsilon_0\,;\ \upsilon_y = \upsilon'_y\ ;\ \upsilon_z = \upsilon'_z\,.$$

Цей закон суперечить принципу сталості швидкості світла. Справді, якщо відносно системи K' світловий сигнал поширюється зі швидкістю $\upsilon_x = c$, то відносно системи K швидкістьцього сигналу повинна бути $\upsilon_x = c + \upsilon_в$, тобто більшою від *c*.

Оскільки постулати Ейнштейна підтверджуються експериментально, то з наведених вище (а також не розглянутих тут) прикладів можна зробити висновок, що час у різних інерціальних системах плине неоднаково, поняття простору і часу нерозривно зв'язані, тобто всі характеристики тіл, процесів і явищ варто розглядати як просторово-часові, а перетворення Галілея не універсальні. Всі ці особливості враховує спеціальна теорія відносності, розроблена Ейнштейном у 1905р.

2. Перетворення Лоренца

У спеціальній теорії відносності для переходу від однієї інерціальної системи відліку до іншої використовуються перетворення, отримані нідерландським фізиком Х. Лоренцом у 1904 році. Підхід для їх отримання може бути таким.

Розглянемо будь-яке явище в інерціальних системах відліку K і K' (рис. 1.1). Не має значення, яку з них можна вважати рухомою, а яку нерухомою. На рис. 1.1 приймаємо, що на початку відліку часу ($t=0$) системи K і K' суміщені, а з плином часу система K' рухається відносно K зі швидкістю $\overrightarrow{\upsilon_0}$ так, що координатні осі x і x' за напрямком співпадають, осі y і y', а також осі z і z' попарно паралельні між собою.

Передбачене явище в системі K характеризується значеннями координат і часу x, z, y, t, а в системі K' – значеннями координат і часу x', y', z', t'. Знайдемо формули, які зв'язують не штриховані значення зі штрихованими. Із однорідності простору та часу випливає, що ці формули повинні бути лінійними.

За вибраного взаємного розташування систем K і K' (рис. 1.1) площина y'=0 співпадає з площиною y=0, а площина z'=0 співпадає з площиною z=0. Отже координати y і y' повинні перетворюватися на нуль одночасно, незалежно від значень інших координат та часу. Це можливо за умови, що

$$y = \alpha y',$$

де α – стала величина. Оскільки всі інерціальні системи відліку рівноправні, то

$$y' = \alpha y,$$

за тієї ж сталої α. Перемноживши ці рівняння, знаходимо, що $\alpha^2=1$, або $\alpha = \pm 1$. Для однакових напрямлених осей слід прийняти $\alpha = +1$. За цієї умови

$$y=y' \text{ або } y'=y. \qquad (2.1)$$

Таким же чином можна довести, що

$$z = z' \text{ або } z'=z . \qquad (2.2)$$

З рівнянь (2.1) та (2.2) випливає, що значення y і z не залежать від x' і t', тобто x' і t' не залежать від y і z. Це означає, що x і t є лінійними функціями x' і t'. На підставі рис. 1.1 знаходимо, що точка O має координату $x=0$ в системі K' і $x' = -\upsilon_0 t'$ в системі K'. Отже, рівняння $x' + \upsilon_0 t'$ повинно приймати значення нуль одночасно з координатою x (якщо $x' + \upsilon_0 t'=0$, то $x' = -\upsilon_0 t'$). При цьому лінійне перетворення мусить мати вигляд

$$x=\gamma(x' + \upsilon_0 t'), \qquad (2.3)$$

де γ – стала величина.

Точка O' має координату $x'=0$ в системі K' і $x=\upsilon_0 t$ в системі K. Отже співвідношення $x-\upsilon_0 t$ повинно приймати значення нуль одночасно з координатою x' (якщо $x-\upsilon_0 t = 0$, то $x=\upsilon_0 t$). Цій умові повинно відповідати рівняння

$$x' = \gamma(x-\upsilon_0 t). \tag{2.4}$$

Оскільки системи K і K' рівноправні, то стала величина γ – одна й та сама у рівняннях (2.3) та (2.4).

Використаємо принцип сталості швидкості c. Нехай у момент часу $t=t'=0$ в точках $O=O'$ випромінюється світловий сигнал в напрямку осей x та x', котрий утворює спалах на екрані. Це явище (спалах) характеризується в системі K координатою x і часом t, а в системі K' – координатою x' і часом t'. Тоді

$$x = ct, \quad x'=ct'.$$

Підставивши ці значення в рівняння (2.3) та (2.4), отримаємо

$$ct=\gamma\left(ct'+\upsilon_0 t'\right)=\gamma\left(c+\upsilon_0\right)t',$$

$$ct'=\gamma\left(ct-\upsilon_0 t\right)=\gamma\left(c-\upsilon_0\right)t.$$

Перемноживши ці рівняння, отримуємо:

$$c^2=\gamma^2(c^2-\upsilon_0^{\,2}),$$

звідки

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\upsilon_0^2/c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \tag{2.5}$$

$$\beta = \frac{\upsilon_0}{c}. \tag{2.6}$$

На підставі рівнянь (4), (5) та (7) отримуємо:

$$x = \frac{x' + \upsilon_0 t'}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad x' = \frac{x - \upsilon_0 t}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{2.7}$$

В системі рівнянь (2.7) замінимо $x = ct$, $x' = c\,t'$ (звідси $t' = \frac{x'}{c}$) і знайдемо:

$$t = \frac{t' + \left(\upsilon_0/c^2\right)x'}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad t' = \frac{t - \left(\upsilon_0/c^2\right)x}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{2.8}$$

Запишемо рівняння (2.1), (2.2), (2.7) та (2.8) сукупно, розподіливши їх на дві групи :

$$x = \frac{x' + \upsilon_0 t'}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad y = y', \; z = z', \; t = \frac{t' + \left(\upsilon_0/c^2\right)x'}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{2.9}$$

$$x' = \frac{x - \upsilon_0 t}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad y' = y, \; z' = z, \quad t' = \frac{t - \left(\upsilon_0/c^2\right)x}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{2.10}$$

Ці рівняння називають перетвореннями Лоренца. Рівняння (2.9) використовують при переході від системи K' (рухомої) до системи K

(нерухомої), рівняння (2.10) – при переході від системи K (нерухомої) до системи K' (рухомої).

У перетвореннях Лоренца змішано координати і час. У цьому проявляється взаємний зв'язок простору і часу.

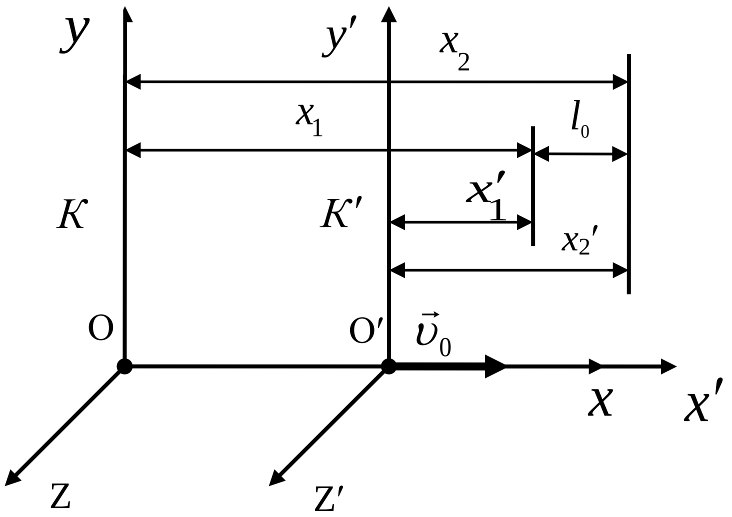


Рис. 2.1

Перетворенням Лоренца можна надати симетричний вигляд, якщо записати їх для величин однакової розмірності :

$$x = \frac{x' + \beta(ct')}{\sqrt{1-\beta^2}},\ y = y',\ z = z',\ (ct) = \frac{(ct') + \beta x'}{\sqrt{1-\beta^2}}. \qquad (2.11)$$

$$x' = \frac{x - \beta(ct)}{\sqrt{1-\beta^2}},\ y' = y,\ z' = z,\ (ct') = \frac{(ct) - \beta x}{\sqrt{1-\beta^2}}. \qquad (2.12)$$

При швидкостях, набагато менших швидкості світла $(\upsilon_0 << c)$, перетворення Лоренца не відрізняються від перетворень Галілея.

При $\upsilon_0 > c$ величини $x,\ t,\ x',\ t'$ в рівняннях (2.9) та (2.10) стають уявними. Це вказує на те, що рух зі швидкістю $\upsilon_0 > c$ неможливий. При $\upsilon_0 = c$ у рівняннях для x і t знаменник перетворюється на нуль, а x і t – на нескінченність, тобто можливий рух лише зі швидкістю $\upsilon_0 < c$.

Якщо система K' рухається відносно K зі швидкістю $\overrightarrow{\upsilon_0} = const$ в довільному напрямку, то враховуючи рівноправність усіх інерціальних систем, можна систему K' (або K) повернути так, щоб отримати взаємне розташування їх відповідно до рис 1.1. Змінивши певним чином початкові умови певного дослідження, можна використати перетворення Лоренца (2.9) та (2.10).

3. Висновки з перетворень Лоренца

На підставі перетворень Лоренца можна отримати ряд незвичайних з погляду нерелятивістської механіки висновків. Розглянемо основні з них.

3.1. Довжина тіл у різних інерціальних системах відліку.

Нехай стержень рухається разом із системою K'. Довжина його в цій системі $l_0 = x_2' - x_1'$ (рис. 3.1). Відносно системи K він рухається зі швидкістю $\overrightarrow{\upsilon_0}$. У системі K його довжина $l = x_2 - x_1$, де x_2 і x_1 – координати точок осі OX з якими співпадають кінці стержня в один і той самий момент часу $t_1 = t_2 = t$ за годинником у системі K. Використавши перше рівняння системи (2.10), знаходимо:

$$l_0 = x_2' - x_1' = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{l}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Довжина тіла в системі K:

$$l = l_0\sqrt{1-\beta^2} \qquad (3.1)$$

Якщо стержень нерухомий у системі K', то його довжина у цій системі буде l_0, а довжина в системі K' буде визначатися тією самою формулою (3.1). Таким чином, розміри тіла в напрямку його руху, розглянуті в системі відліку, відносно якої це тіло рухається зі швидкістю $\overrightarrow{\upsilon_0} = const$, зменшуються в $\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}$ разів.

На підставі системи (2.9) отримуємо, що $y_2' - y_1' = y_2 - y_1$, $z_2' - z_1' = z_2 - z_1$. Це означає, що розміри тіла у напрямку, перпендикулярному напрямку руху, не залежать від швидкості його руху й однакові у всіх інерціальних системах відліку. Зазначене тут скорочення було передбачено ще в 1892 р. Фітцджеральдом і, незалежно від нього, Лоренцом. Тому його називають лоренцовим (або фітцджеральдовим).

При розгляді лоренцового скорочення варто чітко уявляти, що ніякого реального скорочення розмірів тіла внаслідок його руху відбуватися не може. Це випливає з принципу рівноправності всіх інерціальних систем відліку, покладеного в основу спеціальної теорії відносності. Уявне «скорочення» розмірів тіла – це наслідок різних умов виміру довжини в різних системах відліку. Спотворення зорового сприйняття рухомих предметів зумовлено різними проміжками часу, впродовж яких світло надходить до очей від різних точок предмета.

3.2. Тривалість процесів у різних інерціальних системах відліку.

Розглянемо певний процес, котрий протікає в одній і тій самій точці, нерухомій відносно системи K' (наприклад, точка з координатою x_1' на рис. 3.1.) Тривалість цього процесу за годинниками систем K та K' відповідно дорівнює різницям миттєвостей початку і кінця процесу:

$$\Delta t = \tau = t_2 - t_1, \Delta t' = \tau_0 = t_2' - t_1'.$$

На підставі системи (2.9) маємо:

$$\tau = \frac{t_2' + \left(\upsilon_0 \big/ c^2 \right) x_2'}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{t_1' + \left(\upsilon_0 \big/ c^2 \right) x_1'}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\tau_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$$ (оскільки $x_2' = x_1'$). Звідси:

$$\tau_0 = \tau \sqrt{1 - \upsilon_0^2 \big/ c^2} \,. \qquad (3.2)$$

Таким чином, тривалість процесу, котрий відбувається в певній точці простору, мінімальна в тій системі відліку, відносно якої ця точка нерухома. τ_0 – це проміжок часу, визначений за годинником, котрий рухається з тілом. Його називають власним часом цього тіла. Цей результат можна сформулювати так: годинники, котрі рухаються відносно інерціальної системи відліку, йдуть повільніше нерухомих годинників.

Релятивістський ефект уповільнення плину часу підтверджується дослідами з мюонами – нестабільними елементарними частинками. Вони народжуються в космічному випромінювані на висоті 20-30 км над поверхнею Землі. Власний час їх існування (виміряний у системі, відносно якої вони нерухомі) $\tau_0 = 2{,}2 \cdot 10^{-6} c$. Шлях, який вони начебто могли б пролетіти, мав би бути $\upsilon \cdot \tau_0 = 0{,}998 \cdot c \cdot \tau_0 = 658{,}7 м$. Однак їх поява спостерігається і на поверхні Землі, де вони не народжуються. Враховуючи, що їх шлях $S = \upsilon \cdot \tau = \dfrac{\upsilon \tau_0}{\sqrt{1-\upsilon^2 / c^2}} = 10{,}4 км.$ $l = l_0 \sqrt{1 - \upsilon^2 \big/ c^2} = 1890 м;$ $l < S.$ Досягнення мюонами поверхні Землі цілком ймовірне.

Подібно лоренцовому скороченню, релятивістський ефект часу зумовлений різними умовами порівняння часу, а один і той самий годинник у всіх інерціальних системах відліку має однакові властивості, тобто однаковий хід.

3.3. Одночасність подій у різних інерціальних системах відліку.

Нехай у системі K в точках з координатами x_1 та x_2 в один і той самий момент часу ($t_1 = t_2 = t$) відбуваються дві події. Згідно з першою та четвертою формулами системи (2.10) в системі K' цим точкам відповідають координати:

$$x_1' = \frac{x_1 - \upsilon_0 t}{\sqrt{1-\beta^2}},\ x_2' = \frac{x_2 - \upsilon_0 t}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

і моменти часу

$$t_1' = \frac{t - \left(\upsilon_0 / c^2 \right) x_1}{\sqrt{1-\beta^2}},\ t_2' = \frac{t - \left(\upsilon_0 / c^2 \right) x_2}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

З цих співвідношень видно, що при $x_1 = x_2$ виконуються рівності $x_1' = x_2'$ і $t_1' = t_2'$. Якщо $x_1 \neq x_2$, то, незважаючи на рівність $t_1 = t_2$, отримуємо, що $x_1' \neq x_2'$ і $t_1 \neq t_2'$, тобто якщо в системі K дві одночасні події суміщені в просторі, то в системі K' ці події суміщені і в просторі і в часі. Якщо в системі K дві одночасні події не суміщені в просторі, то в системі K' вони не суміщені ні в просторі, ні в часі. В системі K' розбіжність подій у часі $\Delta t' = t_2' - t_1'$ залежить від швидкості $\overrightarrow{\upsilon_0}$, тобто в різних інерціальних системах відліку буде різною. Знак різниці $\Delta t = \dfrac{\upsilon_0 \left(x_1 - x_2 \right)}{c^2 \sqrt{1-\beta^2}}$ залежить від значень координат x_1 та x_2. Це означає, що в одних системах відліку подія 1 буде передувати події 2, в інших системах відліку, навпаки, подія 2 буде передувати події 1. Це можливо лише для подій, між якими немає причинно-наслідкового зв'язку, наприклад, постріл з лука і потрапляння стріли в мішень.

4. Інтервал між двома подіями.

У загальному випадку дві події в обраній системі відліку відбуваються в різних точках і в різні моменти часу. Це означає, що кожній події відповідають чотири просторово-часові координати *x, y, z, t,* на яких можна побудувати уявний чотиривимірний простір. У цьому просторі точку з координатами *x, y, z, t* називають світовою точкою. Будь-якій частинці в чотиривимірному просторі відповідає так звана світова лінія. Так, для нерухомої точки світова лінія має вигляд прямої лінії, паралельної до осі *t* (рис 4.1).

Нехай події 1 в системі K відповідає світова точка з координатами x_1, y_1, z_1, t_1, а в події 2 – точка з координатами x_2, y_2, z_2, t_2. Величину

$$S_{12} = \sqrt{c^2\left(t_2 - t_1\right)^2 - \left(x_2 - x_1\right)^2 - \left(y_2 - y_1\right)^2 - \left(z_2 - z_1\right)^2} = \sqrt{c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2}\,. \qquad (4.1)$$

називають інтервалом між цими подіями. У формулі (4.1) величина $\sqrt{\left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2 + \left(z_2 - z_1\right)^2} = l_{12}$ – відстань між подіями, а $t_{12} = t_2 - t_1$.

Рівняння (4.1) перепишемо в вигляді

$$\Delta S_{12}^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2\,. \qquad (4.2)$$

Для тих самих подій в системі K' можна записати :

$$\Delta S_{12}'^{2} = c^2 \Delta t'^2 - \Delta x'^2 - \Delta y'^2 - \Delta z'^2 . \qquad (4.3)$$

На підставі системи рівнянь (2.10) знаходимо, що

$$\Delta x' = \frac{\Delta x - \upsilon_0 \Delta t}{\sqrt{1-\beta^2}} \ ; \ \Delta y' = \Delta y \, ; \ \Delta z' = \Delta z \ ; \ \Delta t' = \frac{\Delta t - \left(\upsilon_0 / c^2 \right) \Delta x}{\sqrt{1-\beta^2}} . \qquad (4.4)$$

Із цих співвідношень видно, що окремо взяті просторові і окремо взяті часові складові інтервалу між двома подіями в різних інерціальних системах відліку не інваріантні щодо перетворень Лоренца. Підстановка значень (4.4) в (4.3) призводить до рівності:

$$\Delta S'^2 = \Delta S^2 . \qquad (4.5)$$

Рівність (4.5) свідчить про інваріантність інтервалу щодо перетворень Лоренца.

Нехай подія 1 полягає у випромінюванні світлового сигналу в світовій точці з координатами $x_1,\ y_1,\ z_1,\ t_1$, а подія 2 – у прийомі цього сигналу в світовій точці з координатами $x_2,\ y_2,\ z_2,\ t_2$. Тоді $l_{12}^2 = c^2 t_{12}^2$ і $S_{12} = 0$. Такий інтервал називають нульовим або світлоподібним. Світлоподібними інтервалами пов’язані між собою події, що полягають у послідовному проходженні світлової хвилі через різні точки простору. Для цих подій характерним є причинно-наслідковий зв’язок. Оскільки рівність $S_{12} = 0$ можлива при $l_{12} = 0$ і $t_{12} = 0$, а рівність $S_{12}' = 0$ можлива при $l_{12}' = 0$ і $t_{12}' = 0$, то очевидно, що збіг подій, пов’язаних між собою світлоподібним інтервалом, є абсолютним.

Події, для яких $l_{12} > ct_{12}$, не можуть бути причинно зв'язаними, тому що швидкість υ будь-яких взаємодій не може бути більшою від швидкості світла c. При $l_{12} > ct_{12}$ інтервал – уявний. Уявні інтервали називають просторовоподібними. Події, розділені такими інтервалами, ні в якій системі не можуть бути суміщеними в просторі, але для них можна підібрати таку систему K', в якій вони можуть бути суміщені в часі. Продемонструємо це. На підставі рівняння (4.1) знаходимо: $S_{12}^2 = c^2 t_{12}'^2 - l_{12}'^2$, а на підставі рівняння (4.5) знаходимо: якщо $S_{12} < 0$, то й $S_{12}' < 0$. Для уявного інтервалу можна підібрати таку систему відліку K', в якій $t_{12}' = 0$. Тоді в цій системі $S_{12} = il_{12}'$. Аналогічно, при $t_{12} = 0$ інтервал $S_{12}' = il_{12}$. Якщо прийняти $l_{12} = 0$, або $l_{12}' = 0$, то за цих умов інтервал буде не уявним, а світлоподібним. Відповідно до рівняння $S_{12} = il_{12}'$ уявний інтервал називають просторовоподібним.

Знайдемо умови суміщення в часі подій, зв'язаних уявним інтервалом. Якщо $t_{12}' = 0$, то $t_1' = t_2'$. Скориставшись рівнянням системи (2.10), знаходимо, що $t_1 - \left(\upsilon_0 / c^2\right) x_1 = t_2 - \left(\upsilon_0 / c^2\right) x_2$. Умова суміщення названих подій у часі забезпечується виконанням рівняння:

$$\upsilon_0 = c^2 \frac{t_2 - t_1}{x_2 - x_1}. \qquad (4.6)$$

Події, для яких $l_{12} < c \cdot t_{12}$, можуть бути причинно зв'язаними. Для них інтервал $S_{12} > 0$, тобто дійсний. Дійсні інтервали називають часово–подібними (або часоподібними). На підставі рівнянь (4.1) та (4.5) виявляємо, що за $l_{12}' = 0$ інтервал буде дійсним. При $l_{12}' = 0$, згідно з системою рівнянь (2.10), $x_2' = x_1'$, тобто можна підібрати таку систему відліку K', в якій події, пов'язані дійсним інтервалом, будуть суміщені в просторі.

Умова суміщення таких подій в просторі забезпечується виконанням рівняння:

$$\upsilon_0 = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}, \tag{4.7}$$

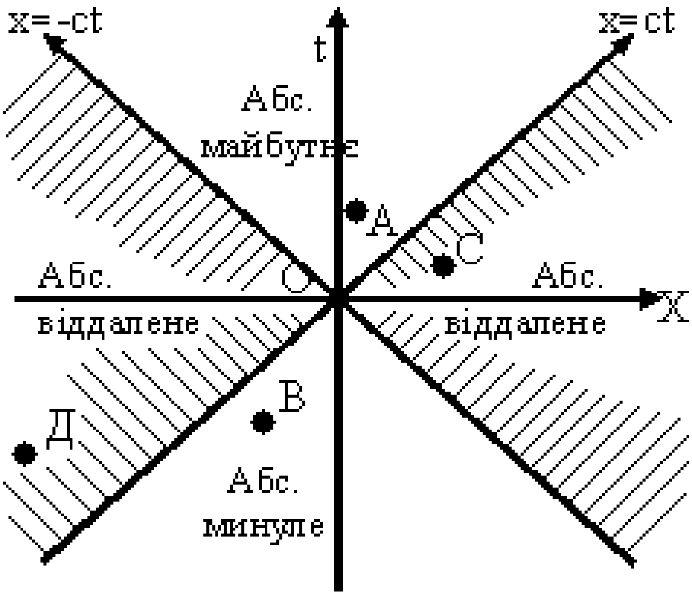


Рис. 4.

що знаходимо аналогічно попередньому – рівняння (4.6). Якщо прийняти, що $t'_{12} = 0$, то інтервал S'_{12} не буде часоподібним. Це означає, що події, пов'язані між собою дійсним інтервалом, не можуть відбуватись одночасно. Із (4.1) та (4.5) випливає, що дійсний 1інтервал між двома подіями, суміщеними в просторі в системі K', зводиться до часового інтервалу. Тому дійсні інтервали називають часоподібними.

Уявимо геометрично взаємне роз-ташування подій, пов'язаних вище згаданими інтервалами. Оберемо світову точку О за початок відліку координат і часу розглянутих подій. На рис.4.1 показані лише осі x і t обраного чотиривимірного простору.

Рух частинки зі швидкістю c в тривимірному просторі зображується прямими $x = \pm ct$. Ці прямі відповідають подіям, пов'язаним між собою світлоподібним інтервалом. Оскільки швидкість υ руху частинок не може бути більшою від швидкості c, то світові лінії всіх частинок, котрі, рухаючись, проходять через світову точку O, будуть лежати в межах не заштрихованого конуса, який називають світловим конусом, тому що його твірні лінії є лініями світлових сигналів. Для будь-якої світової точки A в області "абсолютне майбутнє" і світової точки B в області „абсолютне минуле" інтервали між подіями O та A і подіями B та O є часоподібними, причому подія B передує події O, а подія O передує події A.

Кожна з подій C чи Д в областях "абсолютне віддалення" пов'язана з подією O просторовоподібними інтервалами. Тут події O і C, O і Д в різних інерціальних системах відліку можуть мінятися місцями.

Повернемося до поняття власного часу τ_0, як часу, відрахованого годинником, котрий рухається разом з тілом. На підставі рівняння (3.2) маємо:

$$\tau_0 = \tau\sqrt{1-\upsilon_0^2/c^2}\,.$$

Шляхом незначних перетворень отримаємо:

$$\Delta\tau_0 = \frac{1}{c}\sqrt{c^2\Delta\tau^2 - \upsilon_0^2\Delta\tau^2} = \frac{1}{c}\sqrt{c^2\Delta\tau^2 - \Delta l^2} = \frac{1}{c}\Delta S\,, \qquad (4.8)$$

де $\Delta l = \upsilon_0 \cdot \Delta\tau$ – шлях, який проходить тіло за проміжок часу τ_0.

Оскільки швидкість c світла у вакуумі та інтервал ΔS між подіями однакові у всіх інерціальних системах відліку, то на підставі (4.8) можна зробити висновок, що власний час τ_0 також однаковий у всіх інерціальних системах відліку.

5. Перетворення і додавання швидкостей

Розглянемо рух матеріальної точки зі швидкістю $\vec{\upsilon}$ у довільному напрямку (рис. 1.1). Складові швидкості цієї точки уздовж координатних осей *x*, *y*, *z* в системі K дорівнюють:

$$\upsilon_x = \frac{dx}{dt};\ \upsilon_y = \frac{dy}{dt};\ \upsilon_z = \frac{dz}{dt}. \qquad (5.1)$$

Скориставшись перетвореннями Лоренца (2.9), отримаємо:

$$dx = \frac{dx' + \upsilon_0 dt'}{\sqrt{1-\beta^2}};\ \begin{matrix} dy = dy' \\ dz = dz' \end{matrix};\ dt = \frac{dt' + \left(\upsilon_0 / c^2 \right) dx'_0}{\sqrt{1-\beta^2}}. \qquad (5.2)$$

На підставі (5.1) та (5.2) після незначних математичних перетворень знаходимо:

$$\upsilon_x = \frac{\upsilon'_x + \upsilon_0}{1 + \frac{\upsilon_0}{c^2}\upsilon'_x};\ \upsilon_y = \frac{\upsilon'_y\sqrt{1-\beta^2}}{1 + \frac{\upsilon_0}{c^2}\upsilon'_x};\ \upsilon_z = \frac{\upsilon'_z\sqrt{1-\beta^2}}{1 + \frac{\upsilon_0}{c^2}\upsilon'_x}. \qquad (5.3)$$

Шляхом аналогічних математичних перетворень (котрі пропонуємо студентам провести самостійно) на підставі системи (2.10) можна отримати складові швидкості матеріальної точки уздовж координатних осей x', y', z' в системі K':

$$\upsilon'_x = \frac{\upsilon_x - \upsilon_0}{1 - \frac{\upsilon_0}{c^2}\upsilon_x};\ \upsilon'_y = \frac{\upsilon_y\sqrt{1-\beta^2}}{1 - \frac{\upsilon_0}{c^2}\upsilon_x};\ \upsilon'_z = \frac{\upsilon_z\sqrt{1-\beta^2}}{1 - \frac{\upsilon_0}{c^2}\upsilon_x}. \qquad (5.4)$$

Системи рівнянь (5.3) та (5.4) є умовами перетворень швидкостей при переході від однієї інерціальної системи відліку до іншої.

6. Релятивістське рівняння для маси та імпульсу.

Рівняння ньютонівської механіки, інваріантні відносно перетворень Галілея, не інваріантні відносно перетворення Лоренца. Це зумовлено тим, що з погляду ньютонівської механіки інертність тіла, мірою якої при поступальному русі є маса, не залежить від швидкості руху тіла. Такий підхід прийнятний лише за малих швидкостей руху тіл. За великих швидкостей маса тіла залежить від швидкості руху. Аналітичну форму цієї залежності можна отримати шляхом таких міркувань.

Математична форма другого закону Ньютона в нерелятивістській механіці має вигляд:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(m_0\vec{\upsilon}\right), \tag{6.1}$$

де $\vec{F}$ – трикомпонентний вектор сили, котра діє на тіло; $\vec{p} = m_0\vec{\upsilon}$ – імпульс тіла; m_0 – так звана маса спокою, яка не залежить від швидкості руху, тобто інваріантна маса тіла; t – час, інваріантний відносно перетворень Галілея, але неінваріантний відносно перетворень Лоренца.

Для того, щоб рівняння (6.1) відповідало вимогам принципу відносності Ейнштейна, тобто мало однакову форму запису в усіх інерціальних системах відліку, в ньому необхідно час dt замінити власним часом $d\tau_0$, який є інваріантним щодо перетворень Лоренца. Тоді на підставі (6.1), врахувавши (3.2), знаходимо, що

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{d\tau_0} = \frac{dm_0\vec{\upsilon}}{dt\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}} = \frac{d}{dt}(m\vec{\upsilon}), \tag{6.2}$$

Де

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}, \tag{6.3}$$

і є релятивістське рівняння для маси, котре характеризує кількісну залежність маси тіла від швидкості υ його руху.

Аналогічну залежність отримав Ейнштейн шляхом більш строгих і поглиблених міркувань.

Якщо в рівняннях ньютонівської механіки масу m_0 замінити масою m згідно з (6.3), то вони стануть однаковими в усіх інерціальних системах відліку і за великих швидкостей руху.

Так, релятивістське рівняння для імпульсу матиме форму:

$$\vec{p} = m\vec{\upsilon} = \frac{m_0\vec{\upsilon}}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}. \tag{6.4}$$

7. Релятивістське рівняння для енергії. Взаємозв'язок маси та енергії.

Відповідно до закону збереження енергії виконана над системою робота δA викликає кількісно рівну їй зміну енергії dW системи:

$$dW = \delta A = \left(\vec{F}, d\vec{S}\right) = \left(\vec{F}, \vec{\upsilon} dt\right). \tag{7.1}$$

Враховуючи (6.1) та (6.2), отримаємо:

$$dW = \left(\vec{\upsilon}, d\left(\frac{m_0\vec{\upsilon}}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}\right)\right) = \frac{m_0 d\left(\upsilon^2\right)}{2\left(1-\upsilon^2/c^2\right)^{3/2}} = \frac{m_0 c^2 d\left(\upsilon^2/c^2\right)}{2\left(1-\upsilon^2/c^2\right)^{3/2}} = d\,\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}. \tag{7.2}$$

Проінтегрувавши (7.2), знаходимо

$$W = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}} + const, \tag{7.3}$$

(усі математичні перетворення пропонуємо студентам виконати самостійно).

Ейнштейн довів, що рівняння (7.3) буде інваріантним щодо перетворень Лоренца за умови, якщо стала інтегрування дорівнює нулю. Таким чином релятивістське рівняння для енергії набирає вигляду:

$$W = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}} = mc^2. \tag{7.4}$$

Енергія спокою (коли $\upsilon = 0$):

$$W_0 = m_0 c^2 . \tag{7.5}$$

Це внутрішня енергія тіла. Вона не містить його потенціальну енергію у зовнішніх потенціальних полях.

Кінетичну енергію (енергію руху) тіла знайдемо як різницю між повною енергією та енергією спокою:

$$W_k = W - W_0 = mc^2 - m_0 c^2 = m_0 c^2 \left(1 \Big/ \sqrt{1 - \upsilon^2 / c^2} - 1 \right). \tag{7.6}$$

При $\upsilon << c$ можна прийняти, що $1 \Big/ \sqrt{1 - \upsilon^2 / c^2} = 1 + \dfrac{\upsilon^2}{2c^2}$, і релятивістська формула кінетичної енергії переходить у нерелятивістську $W_k = m_0 \upsilon^2 / 2$.

Виключивши з рівняння (6.4) (у скалярній формі) та (7.4) швидкість, знайдемо зв'язок між енергією та імпульсом тіла:

$$W = \sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4} = \sqrt{p^2 c^2 + W_0^2} . \tag{7.7}$$

На підставі тих самих рівнянь (6.4) та (7.4) отримуємо:

$$\vec{p} = \frac{W}{c^2} \cdot \vec{\upsilon} . \tag{7.8}$$

Співставивши формули (3.2) та (7.4), виразимо енергію тіла через власний час τ_0 :

$$W = m_0 c^2 \frac{\tau}{\tau_0} = m_0 c^2 \frac{dt}{d\tau_0} . \tag{7.9}$$

З рівняння (7.4) випливає, що енергія тіла та його релятивістська маса завжди пропорційні одна одній. Будь-яка зміна енергії ΔW тіла (за винятком зміни потенціальної енергії у зовнішньому силовому полі) викликає зміну маси Δm і навпаки, будь-яка зміна релятивістської маси Δm супроводжується зміною енергії ΔW тіла:

$$\Delta W = c^2 \Delta m . \qquad (7.10)$$

Це твердження називають законом взаємозв'язку релятивістської маси та енергії. Підтвердження цього закону досить наочно спостерігається під час дослідження процесів розпаду важких ядер, синтезу легких ядер у більш важкі, взаємного перетворення елементарних частинок.

8. Частинка з нульовою масою спокою.

На підставі формули (7.7) знаходимо, що енергія частинки з нульовою масою спокою ($m_0 = 0$) описується формулою:

$$W = c \cdot p . \qquad (8.1)$$

Ця формула узгоджується з (7.8) лише за умови, що її швидкість $\upsilon = c$. Це означає, що частинка з нульовою масою спокою завжди рухається зі швидкістю світла c. Такою частинкою є світлова "частинка", яку називають фотоном.

Згідно з квантовою теорією енергія фотона залежить від частот ω електромагнітних коливань:

$$W = \hbar\omega , \qquad (8.2)$$

де $\hbar = h/2\pi$; h – стала Планка.

На підставі співвідношень (8.1) та (8.2) знаходимо імпульс фотона:

$$p = \frac{W}{c} = \frac{\hbar\omega}{c}. \qquad (8.3)$$

Наявність імпульсу у фотоні була підтверджена Лебедєвим у 1960 р. Під час експериментального вимірювання тиску світла.

Згідно з формулами (7.4) та (8.2) фотон у гравітаційному полі повинен поводитись як частинка з гравітаційною масою:

$$m_g = \frac{\hbar\omega}{c^2}. \qquad (8.4)$$

Наприклад, рухаючись поблизу земної поверхні вертикально вгору, фотон повинен витрачати частину своєї енергії ΔW на виконання роботи:

$$\Delta A = m_g g l = \frac{\hbar\omega}{c^2} \cdot gl, \qquad (8.5)$$

де l – пройдений фотоном шлях, g – прискорення вільного падіння у гравітаційному полі Землі.

Початкова енергія фотона $\hbar\omega$ повинна змінитися на величину $\Delta(\hbar\omega) = \hbar\Delta\omega = \Delta A = \hbar\omega gl/c^2$. Звідси знайдемо очікуване відносне зменшення частоти фотона

$$\Delta\omega/\omega = gl/c^2. \qquad (8.6)$$

Оскільки частота світлових коливань зворотно пропорційна довжині світлової хвилі λ ($\omega = 2\pi c/\lambda$), то зменшення частоти $\Delta\omega$ фотона рівнозначне зміщенню фотона в довгохвильову (червону) область спектра. Тому ефект зменшення частоти світла при віддалені його від тіл з великою масою називають гравітаційним червоним зміщенням.

9. Перетворення енергії та імпульсу.

Опираючись на формулу (7.7), знаходимо:

$$W^2/c^2 - p^2 = m_0^2 c^2 . \tag{9.1}$$

Оскільки маса тіла m_0 інваріантна, то й ліва частина рівняння (9.1) також інваріантна. Самі ж величини W і $\vec{p}$ не інваріантні, оскільки залежать від швидкості $\vec{\upsilon}$, яка не інваріантна. І тому варто знайти перетворення для енергії та імпульсу.

Для спрощення викладок розглянемо рух частинки в напрямку осі x. Якщо в системі K' швидкість частинки υ_x', то, згідно з (5.3),

$$\upsilon_x = \frac{\upsilon_x' + \upsilon_0}{1 + \frac{\upsilon_0}{c^2}\upsilon_x'} . \tag{9.2}$$

Згідно з (7.4) енергія цієї мікрочастинки

$$W = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon_x^2}{c^2}}} . \tag{9.3}$$

Спочатку знайдемо величину $1-{\upsilon_x^2}/{c^2}$, враховуючи (9.2)

$$1-\frac{\upsilon_x^2}{c^2}=\frac{c^2\left(1+\frac{\upsilon_0}{c^2}\upsilon_x\right)^2-\left(\upsilon_x'+\upsilon_0\right)^2}{c^2\left(1+\frac{\upsilon_0}{c^2}\upsilon_x'\right)^2}=\frac{\left(1-{\upsilon_x'^2}/{c^2}\right)\left(1-{\upsilon_0^2}/{c^2}\right)}{c^2\left(1+\frac{\upsilon_0}{c^2}\upsilon_x'\right)^2}. \tag{9.4}$$

На підставі (9.3) та (9.4) отримуємо:

$W=\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\upsilon_x'^2/c^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\upsilon_0^2/c^2}}+\frac{m_0\upsilon_x'}{\sqrt{1-\upsilon_x'^2/c^2}}\cdot\frac{\upsilon_0}{\sqrt{1-\upsilon_0^2/c^2}}$, тобто

$$W=\frac{W'+p_x'\upsilon_0}{\sqrt{1-\upsilon_0^2/c^2}}, \tag{9.5}$$

де $p_x'=\dfrac{m_0\upsilon_x'}{\sqrt{1-{\upsilon_x'^2}/{c^2}}}$ – складова імпульсу частинки в напрямку x'.

Розглянувши рух частинки в довільному напрямку, враховуючи (7.4), (5.3) і теорему Піфагора для тривимірного простору $\upsilon^2=\upsilon_x^2+\upsilon_y^2+\upsilon_z^2$, отримаємо для перетворення енергії ту саму формулу (9.5). Це означає, що за вибраної нами орієнтації осей систем K і K' у перетворенні енергії (формула (9.5)) бере участь лише компонента імпульсу по осі x.

Знайдемо формули перетворення компонент імпульсу. Спочатку розглянемо рух частинки в напрямку x. Тоді буде лише одна складова імпульсу:

$$p_x=\frac{m_0\upsilon_x}{\sqrt{1-{\upsilon_x^2}/{c^2}}}. \tag{9.6}$$

Враховуючи (5.3) та (9.4), отримаємо:

$$p_x = \frac{p'_x + \left(\upsilon_0 / c^2 \right) W'}{\sqrt{1 - \upsilon_0^2 / c^2}}, \tag{9.7}$$

де $W' = \dfrac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \upsilon_x'^2 / c^2}}$ – енергія частинки у системі K'.

Якщо частинка рухається в системі K' в напрямку y' зі швидкістю υ'_x або в напрямку z' зі швидкістю υ'_z, то її імпульс в системі K буде:

$$p_y = \frac{m_0 \upsilon_y}{\sqrt{1 - \left(\upsilon_y^2 + \upsilon_0^2 \right) / c^2}} \quad \text{і} \quad p_z = \frac{m_0 \upsilon_z}{\sqrt{1 - \left(\upsilon_z^2 + \upsilon_0^2 \right) / c^2}}. \tag{9.8}$$

Згідно з системою рівнянь (5.3) складові швидкості

$$\upsilon_y = \upsilon'_y \sqrt{1 - \upsilon_0^2 / c^2}; \qquad \upsilon_z = \upsilon'_z \sqrt{1 - \upsilon_0^2 / c^2}. \tag{9.9}$$

Після незначних математичних перетворень (які пропонуємо студентам виконати самостійно) на підставі систем (9.8) та (9.9) знайдемо:

$$p_y = p_{y'}; \quad p_z = p_{z'}. \tag{9.10}$$

Якщо частинка рухається в довільному напрямку зі швидкістю $\vec{\upsilon}$ відносно вибраної системи відліку (наприклад, K), то її енергія та координатні компоненти імпульсу описуються рівняннями:

$$W = m_0 c^2 \frac{dt}{dt}; \; p_x = m_0 \frac{dx}{d\tau}; \; p_y = m_0 \frac{dy}{d\tau}; \; p_z = m_0 \frac{dz}{d\tau}. \qquad (9.11)$$

Тут $d\tau = dt\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}$; τ – власний час частинки. Оскільки m_0 і τ – інваріанти, то, враховуючи перетворення Лоренца (2.9), можна дійти висновку, що p_x перетворюється подібно *x*; p_y – подібно *y*; p_z – подібно *z*; *W* – подібно *t*.

10. Релятивістський ефект Доплера .

Акустичний ефект Доплера зумовлюється швидкостями руху приймача та джерела відносно пружного середовища, у якому поширюється пружна хвиля.

Ефект Доплера також спостерігається для світлових хвиль. Однак для поширення електромагнітних хвиль (до яких належать і світлові хвилі) якесь особливе середовище не потрібне, вони можуть поширюватися й у вакуумі. Тому ефект Доплера для світлових хвиль обумовлюється лише відносною швидкістю джерела та приймача.

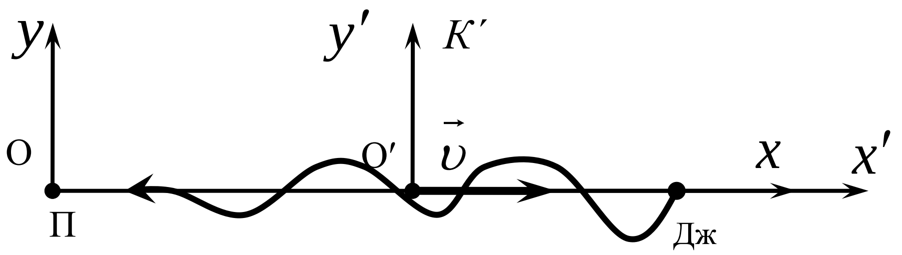


Рис 10.1

Закріпимо приймач світла П на початку координат системи K, а джерело Дж – у довільно вибраній точці на осі $o'x'$ в системі K' (рис. 10.1). Розглянемо поперечну світлову хвилю, котра поширюється ліворуч від джерела. Рівняння цієї хвилі у системі K' матиме вигляд:

$$E(x',t') = A'\cos\left(\omega'\left(t' + \frac{x'}{c}\right) + \alpha'\right), \qquad (10.1)$$

а в системі K

$$E\left(x,t\right) = A\cos\left(\omega\left(t + \frac{x}{c}\right) + \alpha\right), \qquad (10.2)$$

де E – напруженість електричного поля.

Скориставшись перетвореннями Лоренца (2.10), рівняння хвилі в системі K' можна отримати з рівняння (10.1):

$$E\left(x,t\right) = A'\cos\left(\omega'\left(\frac{t - \left(\upsilon/c^2\right)x}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}} + \frac{x - \upsilon t}{c\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}\right) + \alpha'\right).$$

Після незначних перетворень отримаємо:

$$E\left(x,t\right) = A'\cos\left(\omega'\frac{1-\upsilon/c}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}\left(t + \frac{x}{c}\right) + \alpha'\right]. \qquad (10.3)$$

Рівняння (10.2) і (10.3) описують одну і ту саму хвилю в системі K, тому, прирівнявши праві частини цих рівнянь (з огляду на те, що відповідно до перетворень Лоренца при $x' = 0$ і $t' = 0$ значення x і t теж дорівнюють нулю), знайдемо таке співвідношення:

$$\omega = \omega' \frac{1-\upsilon/c}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}} = \omega' \sqrt{\frac{1-\upsilon/c}{1+\upsilon/c}} . \qquad (10.4)$$

Переходячи від колової частоти ω до звичайної ν, отримаємо:

$$\nu = \nu_0 \sqrt{\frac{1-\upsilon/c}{1+\upsilon/c}} , \qquad (10.5)$$

де ν_0 – дійсна частота, яку випромінює джерело світла; ν – частота , яку сприймає приймач. Рівняння (10.4) та (10.5) описують так званий подовжній ефект Доплера.

Крім подовжнього, для світлових хвиль існує також поперечний ефект Доплера. Він спостерігається у тому випадку, коли вектор відносної швидкості $\vec{\upsilon}$ спрямований перпендикулярно прямій, що з'єднує джерело та приймач світлових хвиль.

У цьому випадку співвідношення частот ν і ν_0 відповідно в системах K та K' має вигляд:

$$\nu = \nu_0 \sqrt{1-\upsilon_0{}^2/c^2} \qquad (10.6)$$

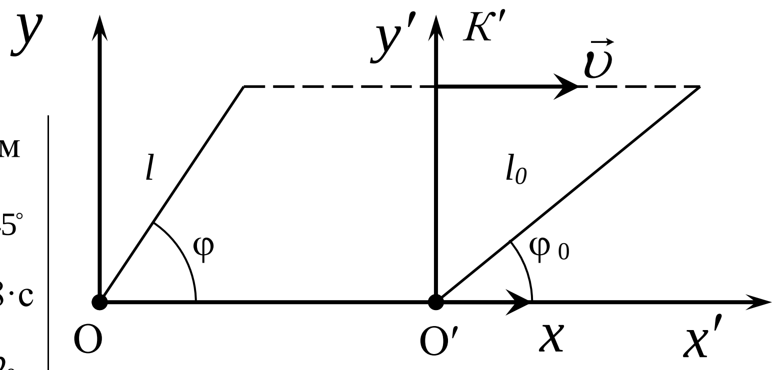
Приклади розв'язання задач

1. З якою швидкістю рухається частинка, якщо її релятивістська маса втричі більша від маси спокою?

Розв'язок:

$m = 3m_0$	На підставі (6,3) знаходимо, що 3=1/$\sqrt{1-\upsilon_0^2/c^2}$;
υ-?	υ= c$\frac{2}{3}\sqrt{2}$=0,943 с=2,83·10^8($\frac{м}{с}$)

2. У рухомій системі відліку K' розташовано стержень довжиною l_0=1м під кутом $\varphi_0 = 45^\circ$. Яку довжину l стержня та під яким кутом φ «зафіксує» спостерігач у K-системі, якщо υ=0,8·c.



l_0=1м $\varphi_0 = 45^\circ$ υ=0,8·с $\varphi > \varphi_0$
φ -? l-?

Розв'язок:

У системі K l=$\sqrt{l_x^{\,2} + l_y^{\,2}}$, де згідно з (3.1)

l_x=$l_{0x}\sqrt{1-\beta^2}$; l_y=l_{0y}.

Тоді

$$l=l_0\sqrt{\cos^2\varphi(1-\beta^2}) + \sin^2\varphi_0 = 0{,}825 \text{ м};$$

$$\varphi = arctg(ly/lx) = arctg\frac{l_{0y}}{l_{0x}\sqrt{1-\beta^2}} = arctg1{,}67 = 59^\circ .$$

3. Знайти релятивістську масу m електрона, який пройшов прискорюючу різницю потенціалів U=1 МВ.

$\|e\|=1.6\cdot10^{-19}$ Кл $U=10^6$ В $m_0=9.1\cdot10^{-31}$кг	Розв'язок:
m-?	

Енергія електрона буде: $W=mc^2=eU+m_0c^2$.

Тоді $m=$

$$\frac{|e|U+m_0c^2}{c^2}=m0\frac{|e|U}{c2}=26,9\cdot10^{-31}(кг)=2.95m_0=2,685\cdot10^{-31}\text{ кг.}$$

4. Власний час мюона τ_0=2 мкс. Від точки народження до точки розпаду у лабораторній системі відліку він пролетів відстань l = 6 км. Яку швидкість мав мюон?

Розв'язок:

$\tau_0=2\cdot10^{-6}$с $l=6\cdot10^3$ м	$l=\upsilon\cdot\tau$, де $\tau=\frac{\tau_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$ (див.(3.2)).
υ - ?	Тоді $l=\frac{\upsilon\tau_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$; $\upsilon^2=\frac{l^2}{\upsilon^2/c^2+\tau_0^2}$; $\upsilon=\frac{l}{\sqrt{(\upsilon/c)^2+\tau_0^2}}=$

= 2,985$\cdot$ 10^8 м/с = 0,995 с.

5. Яку швидкість має релятивістська частинка, кінетична енергія якої 500 МеВ, а імпульс 865 МеВ/с, де c – швидкість світла у вакуумі?

Розв'язок:

W_k=500 МеВ p=865 МеВ/с	$W_k=W-W_0=mc^2-m_0c^2$ (1) $p=m\upsilon$ (2)
υ - ?	$m_0=m\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}$ (3)

Із (1), (2) та (3) знаходимо:

$$W_k = \frac{pc^2}{\upsilon}(1 - \sqrt{1 - \upsilon^2 / c^2}\,; \qquad \upsilon = \frac{2W_k pc^2}{W_k^2 + p^2c^2} = 0{,}87 \cdot c; \qquad \upsilon = 2{,}6 \cdot 10^8$$

м/с.

6. Релятивістська маса протона в 1,5 разу більша від маси спокою. Знайти повну та кінетичну енергію протона.

Розв’язок:

$m / m_0 = 1{,}5$	$W = mc^2 = 1{,}5\, m_0 c^2 = 1{,}5 \cdot 938$ МеВ=1407 МеВ=0,225 нДж
W -? W_k -?	$W_k = W - W_0 = 0{,}5 W_0 = 469$ МеВ=0,075 нДж.

7. Яку швидкість має електрон, якщо його кінетична енергія дорівнює 1,53 МеВ?

Розв’язок:

$W_k = 1{,}53$ МеВ	$W_0 = 0{,}51$ МеВ; $W = W_k + W_0 = 4W_0$
υ -?	

$$W = \frac{Wo}{\sqrt{1-\beta^2}}; \quad \beta = \frac{\upsilon}{c} = \frac{\sqrt{15}}{4}; \ \upsilon = c\frac{\sqrt{15}}{4} = 0{,}968\, c = 2{,}9 \cdot 10^8 \text{ м/с.}$$

8. Фотонна ракета рухається відносно Землі зі швидкістю 0,6 *c* (*c* – швидкість світла у вакуумі). У скільки разів сповільниться плин часу в ракеті з точки зору земного спостерігача?

Розв'язок:

υ=0,6 c
τ/τ_0-?

Згідно з (3.2) $\tau_0 = \tau\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}$

$$\tau/\tau_0 = 1/\sqrt{1-\upsilon^2/c^2} = 1/\sqrt{1-0,36} = 1,25$$

9. Повна енергія тіла збільшилася на ΔW=1 Дж. Як при цьому змінилася маса тіла?

Розв'язок:

ΔW=1 Дж
Δm-?

Згідно з (7.10) знаходимо, що

$$\Delta m = \Delta W/c^2 = 1/9\cdot10^{16} = 0,11\cdot10^{-16}\,кг = 11\cdot10^{-15}\text{ г}=11\text{фг}$$

10. Джерело випромінює світло з довжиною хвилі λ_0=720 нм. Яку довжину хвилі «фіксуватиме» приймач, котрий рухається відносно джерела зі швидкістю υ=0,1 c (c – швидкість світла у вакуумі)?

Розв'язок:

λ_0=720нм υ=0,1c
λ-?

Згідно з (10.6) $\upsilon = \upsilon_0\sqrt{1-\upsilon_2{}^2/c^2}$ і $\lambda_0 = \dfrac{c}{\upsilon_0}$; $\lambda = \dfrac{c}{\upsilon}$ знаходимо, що

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} = \frac{720}{0,995} = 723,6\text{ нм.}$$

Література

1. Теоретична механіка. Навчальний посібник / Укл.: П.К. Штанько, В.Г. Шевченко, О.С. Омельченко, Л.Ф.Дзюба, В.Р. Пасіка, О.М. Поляков / За ред. Штанька П.К. – Запоріжжя: НУ «ЗП», ТОВ «Видавництво «Статус»», 2021. – 463 с.

3.Спеціальна теорія відносності. Конспект лекцій Приклади розв’язання задач / Горбатюк В.А., Печерська Т.В. Київ: НТУУ "КПІ" Фізико-Математичний Факультет, 2008. — 28с.

2. Механіка: навчально-методичний посібник для самостійної роботи з дисципліни "Фізика" : для студентів технічних спеціальностей / С.Д. Гапоченко; Міністерство освіти і науки України, Національний технічний університет "ХПІ". - Харків : ТОВ "В Справі", 2021. - 115 с.

3. Фізика / Мороз І.О., Іваній В.С., Холодов Р.І.; Інститут прикладної фізики.- Суми: «МакДен», 2011.-335 с.

4. Лекції з механіки: навчальний посібник для студентів фізичних спеціальностей університетів / В. М. Дубовик, В. М. Сухов. – Х.: ХНУ імені В. Н. Каразіна, 2019. – 312 с.

5. Кучерук І.М., Горбачук І.Т., Луцик П.П. Загальний курс фізики. Т.1. – К.: Техніка. – 1999.

3. Збірник задач з фізики : навчальний посібник / І.Є. Лопатинський, І.Р. Зачек, С.О. Юр'єв, О.Б. Біленька [та 14 інших]; Міністерство освіти і науки України, Національний університет "Львівська політехніка". - Львів : Видавництво Львівської політехніки, 2021. - 242 с.

5. Задачі з загальної фізики. Механіка : навчальний посібник / І.В. Венгер, Є.Ф. Венгер, Л.Ю. Мельничук, О.В. Мельничук ; за загальною редакцією Л.Ю. Мельничук; Міністерство освіти і науки України, Ніжинський державний університет імені Миколи Гоголя. - Київ : Академперіодика, 2018. - 745 с.