

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

Навчально-науковий Фізико-технічний інститут

Кафедра прикладної фізики

«До захисту допущено»

Завідувач кафедри

_____ Г.Є. Монастирський
(підпис) (ініціали, прізвище)

“ 17 ” червня 2022 р.

Дипломна робота

на здобуття ступеня бакалавра

зі спеціальності (спеціалізації) 105 «Прикладна фізика та наноматеріали»
(код та назва спеціальності)

на тему: Використання ідеології квантового комп'ютингу для розв'язку фізичних задач

Виконав: студент 4 курсу, групи ФФ-81
(шифр групи)

Печонкін Ілля Олексійович
(прізвище, ім'я, по батькові) (підпис)

Керівник: завідувач кафедри прикладної фізики, д.ф.-м.н, Монастирський Г.Є.
(посада, науковий ступінь, вчене звання, прізвище та ініціали) (підпис)

Рецензент с.н.с., к.ф.-м.н., Левицький С.М.
(посада, науковий ступінь, вчене звання, прізвище та ініціали) (підпис)

Засвідчую, що у цій дипломній роботі
немає запозичень з праць інших
авторів без відповідних посилань.
Студент _____
(підпис)

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
Навчально-науковий Фізико-технічний інститут
Кафедра прикладної фізики

Рівень вищої освіти – перший (бакалаврський)

Спеціальність – 105 «Прикладна фізика та наноматеріали»

Освітньо-професійна програма «Прикладна фізика»

Завідувач кафедри

_____ Г.Є. Монастирський
(підпис) (ініціали, прізвище)

“ _____ ” _____ 2022 р.

ЗАВДАННЯ

на дипломний проєкт студенту

Печонкіну Іллі Олексійовичу

1. Тема проєкту «Використання ідеології квантового комп'ютингу для розв'язку фізичних задач», керівник проєкту: завідувач кафедри прикладної фізики, доктор фізико-математичних наук, Монастирський Г.Є., затвержені наказом по університету від «___» _____ 20__ р. № _____
2. Термін подання студентом проєкту _____
3. Вихідні дані до проєкту: література до обраної теми, результати роботи компаній квантового комп'ютингу.
4. Зміст пояснювальної записки: висвітлення ключових ідеї функціонування квантового комп'ютеру та його принципових обмежень, розгляд реальних імплементацій квантового комп'ютера та їх технологічних проблем, наведення парадигм квантового комп'ютеру та відповідних їм алгоритмів.
5. Перелік графічного матеріалу (із зазначенням обов'язкових креслеників, плакатів, презентацій тощо): презентація, схеми утворення кубітів різних імплементацій

6. Консультанти розділів проєкту

Розділ	Прізвище, ініціали та посада консультанта	Підпис, дата	
		завдання видав	завдання прийняв

7. Дата видачі завдання 24.11.2021

Календарний план

№ з/п	Назва етапів виконання дипломного проєкту	Термін виконання етапів проєкту	Примітка
1	Літературний огляд	12.2020-01.2021	
2	Постановка задачі та написання першого розділу	01.2022-02.2022	
3	Постановка задачі та написання другого розділу	04.2022-05.2022	
4	Постановка задачі та написання першої частини третього розділу	05.2022-06.2022	
5	Виступ на конференції	15.06.2022	
6	Написання другої частини третього розділу	06.2022	
7	Перевірка дипломної роботи на плагіат	18.06.2022	
8	Рецензування роботи	20.06.2022	
9	Захист дипломної роботи	22.06.2022	

Студент

Печонкін І.О.

Керівник

Монастирський Г.Є.

РЕФЕРАТ

Пояснювальна записка дипломної роботи за обсягом становить 44 сторінки тексту, містить 18 ілюстрацій та 27 формул. Для дослідження було використано 51 бібліографічне найменування.

Метою роботи є дослідження ідеології квантового комп'ютингу, зокрема фізичної імплементації квантового комп'ютеру, алгоритмів та задач, які вони можуть вирішити.

У роботі висвітлено ключові ідеї функціонування квантового комп'ютеру та його принципові обмеження, які визначають характер задач, що можуть бути ним розв'язані. Окрім того, розглянуто реальні імплементації квантового комп'ютера та технологічні проблеми, що обмежують їх створення. Проаналізовано приклади втілення квантового комп'ютеру провідних компаній цієї галузі таких, як Google, Intel, D-Wave тощо. Наведено парадигми квантового комп'ютеру, а також алгоритми квантового комп'ютингу. Окрему увагу приділено умовній класифікації алгоритмів за їх основним підходом, як квантове блукання, квантове перетворення Фур'є, амплітудне підсилення.

Доповненням цієї роботи в майбутньому може бути розгляд конкретних задач, що можуть бути розв'язані за допомогою цих підходів. А результати дослідження можуть бути корисними для створення проекту для запуску на реальному квантовому комп'ютері компаній, які надають таку можливість.

Ключові слова: *квантова фізика, квантовий комп'ютер, кубіт, час когерентності, квантовий комп'ютинг, парадигма.*

SUMMARY

The diploma's explanatory note consists of 44 pages and contains 18 illustrations and 27 formulas. In the problem modern state analysis, overall 51 references were used.

The purpose of this work is to study the ideology of quantum computing, including the physical implementation of the quantum computer, algorithms, and problems they can solve.

The paper highlights the key ideas of the quantum computer and its fundamental limitations, which determine the nature of the problems, that can be solved. In addition, the real implementations of the quantum computer and the technological problems that limit their creation are considered. Examples of quantum computer implementations of leading companies in this field, such as Google, Intel, D-Wave, etc., are analyzed. Quantum computer paradigms as well as quantum computing algorithms are presented. Particular attention is paid to the conditional classification of algorithms according to their main approaches, such as quantum wandering, quantum Fourier transform, and amplitude amplification.

This work may be complemented in the future by considering specific problems that can be addressed through these approaches. The results of the study can be useful in creating a project to run on real quantum computer companies that provide such an opportunity.

Keywords: *quantum physics, quantum computer, qubit, coherence time, quantum computing, paradigm.*

ЗМІСТ

ВСТУП.....	7
РОЗДІЛ 1. КЛЮЧОВІ ІДЕЇ ФУНКЦІОНУВАННЯ КВАНТОВОГО КОМП'ЮТЕРА, ЙОГО ПРИНЦИПОВІ ПЕРЕВАГИ І ПРИНЦИПОВІ ОБМЕЖЕННЯ	8
1.1 Кубіти, квантовий регістр та їх представлення.....	8
1.2 Проблеми квантових комп'ютерів, їх декогеренція та похибки обчислення	13
РОЗДІЛ 2. РЕАЛЬНІ ФІЗИЧНІ ІМПЛЕМЕНТАЦІЇ СИСТЕМ КВАНТОВОЇ ІНФОРМАЦІЇ.....	16
2.1 Кубіти на кремнієвих квантових точках.....	16
2.2 Створення кубітів на основі нітроген-вакансій в діамантах	21
2.3 Створення кубітів на іонних пастках	24
2.4 Кубіти на основі надпровідних резонаторів.....	29
РОЗДІЛ 3. ПАРАДИГМИ ТА АЛГОРИТМИ КВАНТОВОГО ПРОГРАМУВАННЯ .	33
3.1 Парадигма дискретних квантових вентилів	34
3.2 Парадигма квантового відпалу	38
3.3 Алгоритми квантового комп'ютингу.....	39
ОБГОВОРЕННЯ ТА ВИСНОВКИ	43
СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ	46

ВСТУП

Виклики, що стоять перед фізикою можна умовно розбити на два класи. Це такі, що, можливо, і не мають розв'язку через заборону, або наше незнання фізичних або математичних законів (стріла часу, теорія мультивсесвіту, механізм Хіггса тощо). Інші ж, що принципово могли б бути розв'язаними (наприклад, опис динаміки молекул газу), потребують сотні і тисячі років часу, якщо обчислення проводити нинішніми комп'ютерами фон Нейманівської архітектури.

Водночас, ще в 1981 році Річард Фейнман у своїй лекції «Моделювання фізики на комп'ютерах» («Simulating Physics with Computers») [1] запропонував створення такого пристрою, який зміг би використовувати такий самий підхід як і класичний комп'ютер (біти, логічні оператори), але виконував усе набагато швидше завдяки паралелізації – розгляду багатьох можливих рішень одночасно. Забезпечити її можна з таких міркувань: інформація в комп'ютерах зашифрована в бітах, які в класичному випадку приймають два значення 0 або 1. В квантовому комп'ютері завдяки спеціальним квантовим системам можна створити такий елемент, який набуває різні стани, які можна інтерпретувати як 0, 1 або навіть проміжне значення, тобто суперпозицію 0 та 1. На принципі використання кубітів (квантових бітів) і працює квантовий комп'ютер.

Приваблива ідея природного розпаралелювання обчислень завдяки квантовій природі кубіту спричинила цілий бум експериментальних і теоретичних досліджень на початку 2000-х років. Було запропоновано цілий спектр можливих реалізацій кубітів, способів їх заплутування тощо. На сьогоднішній день із всього цього масиву залишилося лише декілька імплементацій, які можуть мати практичне застосування. Тому, метою роботи було огляд проблем фізичної імплементації квантового комп'ютера, існуючих практичних реалізацій і можливостей застосування алгоритмів квантових обчислень для розв'язку фізичних задач.

РОЗДІЛ 1

КЛЮЧОВІ ІДЕЇ ФУНКЦІОНУВАННЯ КВАНТОВОГО КОМП'ЮТЕРА, ЙОГО ПРИНЦИПОВІ ПЕРЕВАГИ І ПРИНЦИПОВІ ОБМЕЖЕННЯ

1.1 Кубіти, квантовий регістр та їх представлення

У класичному комп'ютері для зберігання інформації використовуються елементарні двійкові розряди — біти. Фізична реалізація біта ґрунтується на принципі рівня потенціалу напруги, що може бути вище (1) або нижче (0) певного рівня.

У квантовому комп'ютері інформація також подається за допомогою двійкових елементів. Як такі елементи описуються в квантовій механіці за допомогою двовимірного комплексного простору. Для опису таких систем використовують позначення Дірака, де першому стану відповідає квантовомеханічний вектор стану $|0\rangle$, а другому — інший вектор $|1\rangle$.

Подібною квантовою системою із двома станами може бути спін електрона, який має дві можливі конфігурації — «спін вгору» і «спін вниз». Також можуть бути використані енергетичні рівні атомів або молекул, або напрямок струму в кільцевому надпровіднику. Детально можливі імплементації квантового комп'ютера розглянуто в наступному розділі.

Такий елемент для представлення інформації в квантовому комп'ютері називається кубіт. Його важливою властивістю є можливість накладання декількох станів, або їх суперпозиція. Це означає, що стан кубіта може бути представлений довільним вектором $|\psi\rangle$ у двовимірному комплексному просторі:

$$|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle \quad (1.1)$$

тут числа a та b можуть бути комплексними, на які накладається умова нормування:

$$|a|^2 + |b|^2 = 1 \quad (1.2)$$

Математично ці числа дорівнюють ймовірності отримання першого чи другого значення при вимірювання кубіта:

$$\begin{aligned} P(0) &= |a|^2 = |\langle 0|\psi\rangle|^2 \\ P(1) &= |b|^2 = |\langle 1|\psi\rangle|^2 \end{aligned} \quad (1.3)$$

Однак не можна інтерпретувати кубіт як такий, що завжди знаходиться із певною ймовірністю виключно у одному стані, і ні в якому іншому: така поведінка відповідає класичному ймовірнісному бітові і може бути змодельована на класичному комп'ютері, що випадково генерує результат 0 або 1 . Такий класичний ймовірнісний біт підкоряється законам статистичної фізики, тому його стан є некогерентною сумішшю двох відповідних станів.

У свою чергу, стан кубіта є когерентною суперпозицією двох відповідних станів [2]:

$$P(\psi) = \|\psi\rangle\|^2 = |a|^2 + |b|^2 + 2\operatorname{Re}(a^*b\langle 0|1\rangle) \quad (1.4)$$

Використовуючи позначення Дірака, вводять таку математичну конструкцію як сфера Блоха для опису чистих станів регістрів, тобто виду:

$$|\psi\rangle = \sum_i c_i |i\rangle \quad (1.5)$$

Найчастіше сферу Блоха використовують для двобітних регістрів (для більшої кількості апарат менш наочний). Тож для випадку двох бітів, ця конструкція є одиничною тривимірною сферою, точки на якій визначаються фактично лише двома координатами. Північний та південний полюси відповідають базисними станам $|0\rangle$ та $|1\rangle$, взагалі будь-які протилежні точки на сфері відповідають взаємно ортогональним векторам.

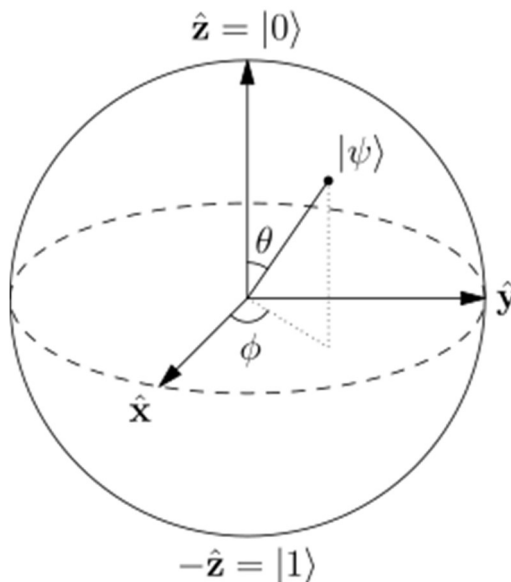


Рис. 1.1 – Схематичне зображення сфери Блоха для одного кубіту. [3]

Точки на поверхні сфери відповідають чистим станам квантової системи, в той час як точки всередині сфери визначають мішані стани.

Таким чином довільний вектор $|\psi\rangle$ чистого стану дворівневої квантової системи є суперпозицією двох базисних векторів $|0\rangle$ та $|1\rangle$ з комплексними коефіцієнтами. Оскільки фізичний зміст має лише відносна фаза між відповідними компонентами, то не обмежуючи загальності перший коефіцієнт (перед $|0\rangle$) можна обрати дійсним та невід'ємним. Окрім того з умови рівності повної ймовірності одиниці повинно виконуватись:

$$\langle\psi|\psi\rangle = \|\psi\|^2 = 1 \quad (1.6)$$

Виходячи з цих принципів, довільний вектор можна записати:

$$|\psi\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|0\rangle + e^{i\varphi}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|1\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|0\rangle + (\cos\varphi + i\sin\varphi)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|1\rangle \quad (1.7)$$

$$0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

А виходячи з аналогії зі сферичною системою координат ці ж параметри описують вектор на сфері Блоха:

$$\vec{a} = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\varphi) \quad (1.8)$$

Окрім того сферу Блоха можна використовувати для опису мішаних станів (які не знаходяться на поверхні). Для таких станів зручно вводити матрицю

густини ρ , яку можна розкласти за одиничною матрицею та набором матриць Паулі:

$$\rho = \frac{1}{2}(I + \vec{a}\vec{\sigma}) \quad (1.9)$$

тут \vec{a} вектор Блоха квантової системи, що визначає точку всередині сфери. Таким чином сфера Блоха вміщує в собі усі можливі стани: чисті – на поверхні сфери та мішані всередині. [4]

Як і у випадку класичних бітів, кубіти також можна об'єднувати у реєстр. Базисом цього простору є всі можливі комбінації тензорних добутків однокубітових базисних векторів. Довільний стан квантового реєстра матиме вигляд суперпозиції всіх його базисних векторів:

$$|\psi_N\rangle = \sum_{i_1, \dots, i_N} c_{i_1 \dots i_N} (|i_1\rangle \otimes |i_2\rangle \otimes \dots \otimes |i_N\rangle) \quad (1.10)$$

Однією з властивостей квантового реєстра є те, що його стан може бути описаним як сумою незалежних кубітів, так і комбінацією тензорних добутків кубітів. Наприклад, стани Белла:

$$|\Psi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle \otimes |1\rangle \pm |1\rangle \otimes |0\rangle) \quad (1.11)$$

є прикладом станів з тензорних добутків кубітів, такі стани називаються заплутаними. Заплутаність станів означає, що при вимірюванні характеристики однієї частинки (стану одного кубіту), характеристика іншої частинки (стан другого кубіту) визначається однозначним чином. Стани Белла є прикладом водночас і найпростішої, і найміцнішої квантової заплутаності. Тобто при вимірюванні стану першого кубіту можна отримати з однаковою ймовірністю стан 0 або 1, однак, отримавши для першого стан 0 (стан 1), точно відомо, що другий має стан 1 (стан 0).

Саме квантова заплутаність та квантова суперпозиція дозволяє квантовим комп'ютерам розпаралелювати задачу, тобто обробляти усі можливі варіанти одночасно, що робить квантові комп'ютери експоненціально потужнішими за класичні.

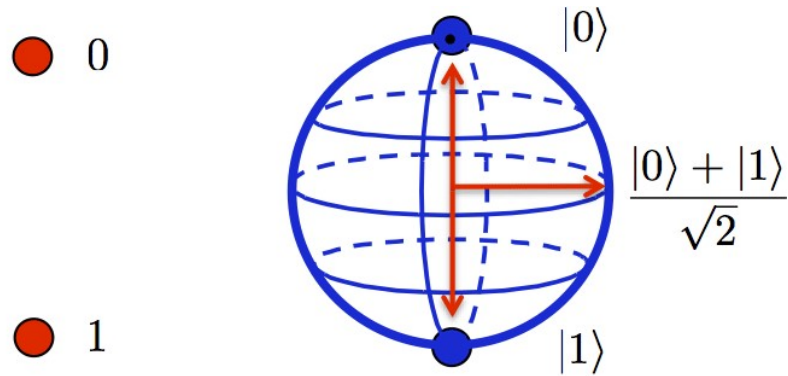


Рис. 1.2 – Порівняння класичного біта (зліва) та кубіта (справа). [5]

Дійсно, у класичному випадку N -векторний реєстр описується N бітами, в той час як квантовий комп'ютер, використовуючи N кубітів, описує 2^N -векторний реєстр, саме стільки потрібно комплексних коефіцієнтів для його визначення.

Отже, для квантових обчислень використовують кубіти, які спочатку потрібно ініціалізувати, тобто знати їх початковий стан. Далі для обчислень квантовий комп'ютер виконує операції над кубітами, які відповідають діям квантових логічних операторів. Відповідно до того, які дії відбуваються з кубітами, виділяють різні парадигми квантових обчислень: квантові вентиля, квантовий відпал, квантова симуляція тощо. Види та властивості різних квантових підходів буде розглянута в подальших розділах. Після обчислень відбувається зчитування та аналіз результату. Однак, отримати однозначний результат неможливо, оскільки квантові обчислення за своєю природою дають ймовірнісний результат, отже похибка природньо існує. До того ж існує проблема ініціалізації кубітів, бо будь яке зчитування результату, зокрема для того, щоб дізнатись початкові значення, переводить систему в один з її власних станів та унеможливорює подальші обчислення. Таким чином, окрім етапу обчислень та вибору парадигм існують проблеми, які потрібно вирішити. [6]

1.2 Проблеми квантових комп'ютерів, їх декогеренція та похибки обчислення

Фізична імплементація квантових комп'ютерів вимагає від дослідників розв'язання низки задач пов'язаних з:

- чутливістю когерентних станів до оточення;
- накопиченням похибок при обрахунках;
- складнощами пов'язані з ініціалізацією початкових станів кубітів;
- створенням багатокубітних систем.

Основні технологічні проблеми можна об'єднати у три великі групи: декогеренція системи, похибки обчислень та архітектура процесора. Розглянемо кожну більш детально.

Кубіти в заплутаному стані дуже нестабільні, будь-який зовнішній вплив може зруйнувати цей зв'язок. Зміна температури, тиску, фотон, що пролетів повз системи, дестабілізують її. Для вирішення цієї проблеми використовують спеціальні саркофаги, з максимальною ізоляцією від усіх можливих зовнішніх чинників. Деякі імплементації, наприклад, на кремнієвих квантових точках або на надпровідних ланцюгах, вимагають наднизьких температур порядку 0.01 K та теплової ізоляції. [7]

Максимальний час життя квантової системи з декількох заплутаних кубітів, протягом яких вона зберігає свої квантові властивості та може бути використана для обчислень, називається часом декогеренції. Наразі час декогеренції кращих квантових рішень складає десятки мілісекунд [8]. Основна проблема полягає в тому, що після проходження часу декогеренції система почне видавати замість ймовірнісного розподілу рішень – ймовірнісний білий шум.

Окрім того, що квантові процеси мають ймовірнісну природу, вони мають низку похибок, що виникають при обчисленнях: це похибки декогеренції, похибки операцій обчислення та похибки зчитування результату. Похибки декогерентності виникають одразу при заплутуванні кубітів та початку

обчислень. Чим більше заплутаних кубітів використано, тим складніша система, та простіше її зруйнувати. [9]

Похибки обчислень полягають в тому, що будь-які операції над кубітами можуть з деякою ймовірністю закінчитись помилкою. Ускладнюється це тим, що стандартні методи корекції похибок для квантового випадку не можливі внаслідок теореми про заборону клонування. Ця теорема забороняє створення точної копії довільного невідомого квантового стану, а отже класичні методи корекції (дублювання, усереднення) неможливі [10]. Хоча й для уникнення похибок в квантових обчисленнях були розроблені методи їх квантової корекції (з декількох звичайних кубітів роблять один логічний кубіт з меншим рівнем похибки), ці методи стикаються з іншою проблемою – кількістю кубітів. Наприклад, для процесора зі 100 кубітами, тільки 20 з них можуть бути використані для обчислень, інші – для корекції похибок. [6]

При проектуванні архітектури квантового процесора теоретично оперують схемами з десятками заплутаних кубітів. В дійсності ж усі квантові чіпи (процесори) побудовані так, що можуть безперешкодно заплутуватися лише зі своїми сусідами, у інших ситуаціях потрібно задіювати додаткові кубіти, що збільшує рівень похибок, окрім того зв'язати усі кубіти потрібно за час декогеренції.

З апаратної точки зору, також додається проблема того, що спочатку усі програми для процесора пишуться на емуляторі, які потім потрібно переписати для конкретної архітектури. Тобто спочатку на звичайному комп'ютері розробляється комплекс програмних та апаратних засобів для копіювання функцій та властивостей цільової архітектури з метою відображення її поведінки.

При тестуванні системи квантових обчислень визначають її точність (fidelity), яка вимірюється у відсотках. Загалом точність виражає степінь заплутаності кубітів, зокрема ймовірність того, що два стани будуть заплутаними. Наприклад, при точності 98,5% відомо, що після прикладеної операції з ймовірністю 98,5% стани будуть заплутаними, але з ймовірністю 1,5%

відбудеться помилка та стани не будуть заплутаними. При послідовній дії операцій точність перемножується, тобто при дії трьох операцій з точністю 98,5%, точність результуючих станів зменшується до 95,6%. Отже, виникає потреба оптимізації алгоритму, щодо зменшення кількості операцій над кубітами, для високої точності результату.

Таким чином, найбільшою проблемою є декогеренція системи, бо, наприклад, за 200 нс потрібно встигнути: ініціалізувати початкові стани кубітів, виконати обчислення, провести корекцію похибок та зчитати кінцевий результат.

[11]

РОЗДІЛ 2

РЕАЛЬНІ ФІЗИЧНІ ІМПЛЕМЕНТАЦІЇ СИСТЕМ КВАНТОВОЇ ІНФОРМАЦІЇ

Власне, з точки зору квантової фізики, будь-яка дворівнева система може бути кандидатом на роль кубіта. З точки зору технології кубіти повинні мати низку властивостей: значний час когерентності для стабільного функціонування, можливість масштабування, можливість ініціалізації початкових станів та зчитування результатів без порушення ізольованості системи тощо. [9]

2.1 Кубіти на кремнієвих квантових точках

Однією з перспективних імплементаций є побудова квантового комп'ютера на основі кремнієвих квантових точок. В сенсі квантового комп'ютингу, квантові точки це спеціально створені наносистеми, які можуть утримувати електрони (або дірки).

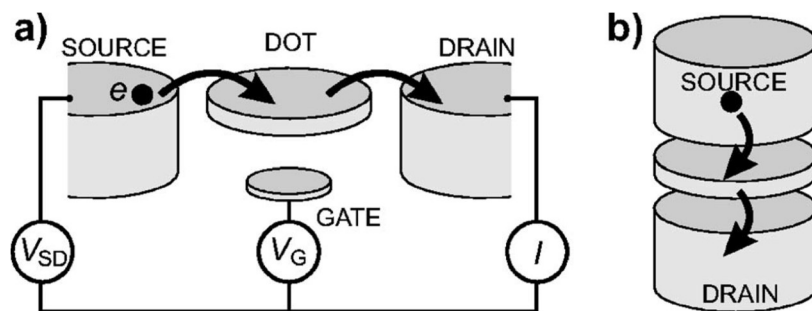


Рис. 2.1 Схематичний малюнок функціонування квантової точки. [12]

Згідно Рис. 2.1 квантова точка з'єднана через тунельні бар'єри з резервуаром, з яким вона може обмінюватися електронами. Квантова точка додатково з'єднана з одним чи двома керуючими електродами, які використовуються для юстування електростатичного потенціалу точки.

Електронні властивості квантової точки залежать від двох ефектів. По-перше, Кулонівське відштовхування призводить більших енергетичних затрат при додаванні електрона до точки, тобто кулонівська енергія навіть одного

електрона $e^2/2C$ значно більша ніж енергія kT та енергетична відстань між рівнями квантової точки. Наприклад, при ємності тунельного переходу в квантову точку 1 фемтофарад (10^{-15} Фарада) температура повинна бути порядку 1 кельвіна. Саме тому додавання чи виведення електрону до резервуару має бути при низьких температур, такий феномен називається Кулонівська блокада [13]. По-друге, обмеження у всіх трьох вимірах призводить до квантових ефектів, які впливають на динаміку електрона. Зокрема через дискретний енергетичний спектр, квантові точки поводять себе як штучні атоми.

Одними з методів отримання квантових точок є вирощування на GaAs [12] та на SiGe [14], [15]. Їх вирощують епітаксійним методом, легуючи кремнієм, таким чином отримуючи вільні електрони.

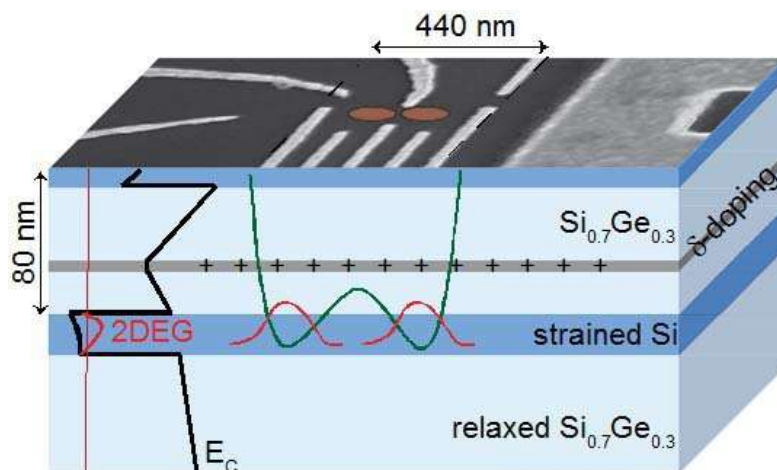


Рис. 2.2 – Схематичний розріз гетероструктури SiGe. В легованому Si утворюється двовимірний шар електронного газу – основа квантової точки. [16]

Електрони накопичуються на стику поверхонь GaAs/AlGaAs, утворюючи двовимірний електронний газ товщиною 10 нм [12]. Подаючи напругу на металеві перемикачі можна керувати цим газом, зокрема при подачі від'ємної напруги створюються області збіднені на електрони. Таким чином, квантові точки опиняються у збіднених областях, але подаючи напругу на керуючі електроди, можна додати (перемістити) електрон у квантову точку (Рис. 2.3).

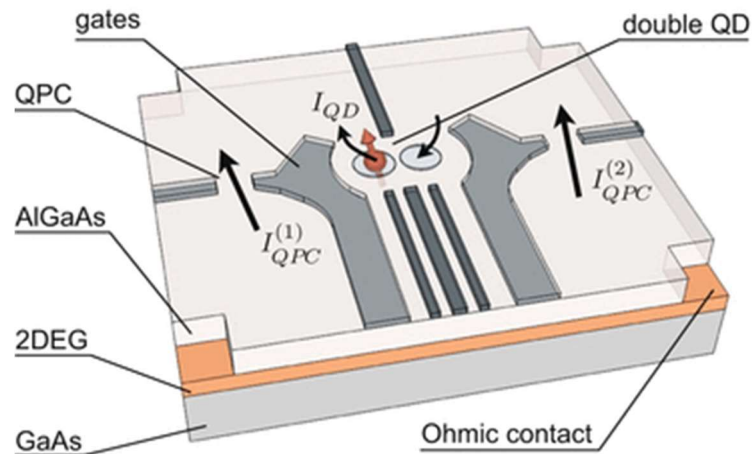


Рис. 2.3 – Схема переміщення електрона в квантовій точці. [17]

Для вимірювання спіну електрона в квантовій точці використовують залежність енергетичних термів від спіну. Попередньо до кожного електрона застосовують зовнішнє магнітне поле, внаслідок чого їх спектр зазнає Зеєманівського розщеплення. Внаслідок заборони Паулі не може бути два електрони з однаковим спіном на одній орбіті, отже електрон повинен перейти на іншу орбіту, що збільшує різницю енергії між електронами. Зрештою Кулонівське відштовхування призводить до збільшення різниці енергії між станами з симетричною та антисиметричною орбітальною хвильовою функцією. Звідси, сумарна хвильова функція електронів антисиметрична, а орбітальна частина залежить від спіну.

Одним з ефективних методів є визначення спіну за допомогою магнітоспектроскопії, який, як вже сказано було раніше, використовує Зеєманівський зсув енергій. При додаванні N -ого електрона у квантову точку, компонента S_z її спіну може збільшитись на $\frac{1}{2}$ (якщо спін орієнтований вгору) або зменшитись на $\frac{1}{2}$ (якщо орієнтований вниз). Така зміна спіну відображається у залежності магнітного поля від електрохімічного потенціалу $\mu(N)$ через Зеєманівський терм [12]:

$$g\mu_B B [S_z(N) - S_z(N-1)] = g\mu_B B [\Delta S_z(N)] \quad (2.1)$$

тут μ_B - магнетон Бора, B – магнітне поле, g – g -фактор, визначає величину гіромагнітного співвідношення. З огляду зміну спіну тільки на значення $\pm 1/2$, можливі наступні значення додаткової енергії магнітного поля:

$$\frac{\partial E_{\text{дод}}}{\partial B} = \begin{cases} 0, & \uparrow\uparrow \text{ або } \downarrow\downarrow \\ +g\mu_B, & \uparrow\downarrow \\ -g\mu_B, & \downarrow\uparrow \end{cases} \quad (2.2)$$

де перша (друга) стрілка позначає спін доданий при $N-2 \rightarrow N-1$ ($N-1 \rightarrow N$) електронному переході. Таким чином обраховуючи додаткову енергію можна визначити спін електрона. Випадок коли зміна спіну відбувається на значення більше ніж $1/2$, означає багаточастинкову взаємодію в точці. Збільшення кількості електронів у точці означає збільшення енергії взаємодії, а отже може призвести до спін-блокади струму. [18]

Іншим потужним методом визначення спіну електрона у квантові точці є спектроскопія збудженого стану. Він ґрунтується на тому факті, що будь-яка одночастинкова орбіталь може бути зайнята щонайбільше двома електронами (внаслідок заборони Паулі). В порівнянні з попереднім методом, тут використовується Зееманівське розщеплення, але без зміни магнітного поля. Отже, при додаванні одного електрона до квантової точки з N електронами, можливі лише два випадки: електрон розміщується або на вільній орбіталі, або на тій, що вже містить електрон. Як буде показано далі, ці випадки відповідають заповненню основного стану електроном відповідно зі спіном вгору та вниз.

Нехай електрон надходить у вільну орбіталь, тоді додавання електрона зі спіном вверх відповідає переходу $GS(N) \rightarrow GS(N+1)$, тут GS (ground state) – основний стан. Натомість додавання електрона зі спіном вниз відповідає переходу $GS(N) \rightarrow ES(N+1)$, який вище на ΔE_z від $GS(N+1)$, тут ES (excited state) – збуджений стан.

Тепер нехай електрон приходить на вже заповнену одним електроном орбіталь. Внаслідок заборони Паулі на орбіталі повинні бути антипаралельні спіни електронів. Тоді якщо квантова точка в основному стані, електрон, що вже

ϵ на орбіталі, має спін вгору, а електрон, що додається, має спін вниз $GS(N) \rightarrow GS(N+1)$. Електрон зі спіном вгору може бути доданий, в тому випадку, якщо перший електрон має спін вниз, тобто коли точка $ES(N)$, на ΔE_z вище від $GS(N)$.

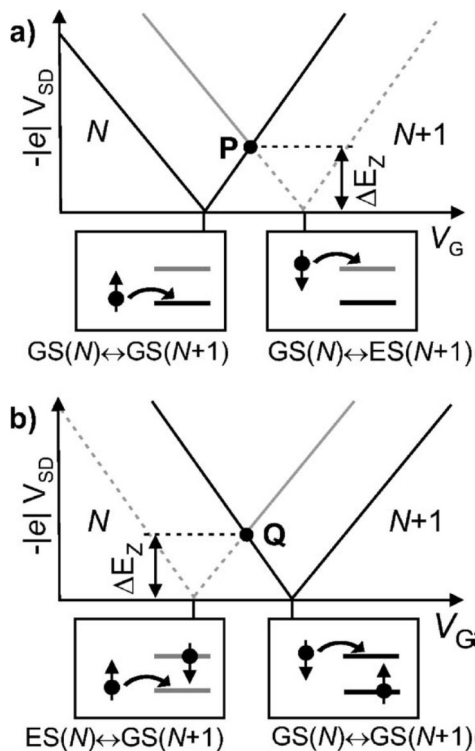


Рис. 2.4 – Схематична енергетична діаграма заповнення квантової точки.

Випадки а) та б) ілюструють заповнення квантової точки відповідно в основному стані зі спіном вгору та в основному стані зі спіном вниз. [12]

Порівнюючи ці два випадки (Рис. 2.4), маємо, якщо лінія спіну системи в збудженому стані обмежується в точці P – N+1-електронній Кулонівській блокаді, тоді електрон, що додається має спін вгору; якщо ж лінія обмежується в точці Q – N-електронній Кулонівській блокаді, тоді електрон, що додається має спін вниз.

Цей метод застосовується незалежно від спіну основного стану, поки додавання одного електрона спричинює зміну спіну на $1/2$. Якщо ж спін системи зміниться на більше значення, тоді має місце спін-блокада струму, а переходу $GS(N) \rightarrow GS(N+1)$ не можна досягти додаванням лише одного електрону. [18]

Перевагами створення кубітів на кремнієвих квантових точках є стабільність системи та відносна легкість виготовлення, оскільки їх створення базується на вже існуючій надпровідниковій індустрії, водночас такі квантові комп'ютери вимагають не тільки посиленої ізоляції, але і підтримки наднизьких температур.

Intel є відомою компанією, що розробляє та виготовляє, квантові процесори на основі кремнієвих квантових точок або, так званих, спінових кубітів. Intel разом з компанією QuTech вдалося перевершити значення робочої температури менш ніж 1 К, презентувавши квантовий комп'ютер на так званих «гарячих» спінових кубітах, які працюють при температурі 4 К [19], а час їх когеренції сягав 65 нс [8]. В 2021 році їм вдалося створити чип [20] в якому задіяно 16 кубітів, точність операцій над якими складала 99,3%. Її також вдалось підвищити до 99,9%, але для меншої кількості кубітів, зокрема для 3.

2.2 Створення кубітів на основі нітроген-вакансій в діамантах

Побудова квантового комп'ютеру вимагає як одночасної ізоляції системи від зовнішнього середовища, так і надійного контролю над нею. Такими оптимальними умовами є вакуум: будь-які збурення екрановані, а контроль над кубітами здійснюється завдяки електромагнітним хвилям. Даний підхід використовують у квантових системах на основі іонних пасток, недоліком якого є спеціальне розміщення кубітів (у певних точках) та наднизький тиск (нижче 10^{-15} бар), що накладає деякі технічні обмеження. На відміну від іонних пасток, тверді тіла з домішками виступають кращими об'єктами для квантового комп'ютеру: квантові об'єкти автоматично зафіксовані в тілі, а кубіти зберігають свої позиції у випадку технічної помилки.

Чистий кристал діаманту є ефективною основою для створення кубітів. Широка заборонена зона, навіть при кімнатній температурі, забезпечує вільну зону провідності, тобто без зовнішнього втручання вільні електрони не зможуть взаємодіяти з кубітами. Сильні ковалентні зв'язки забезпечують високу

температуру Дебая (вище 1800 K), отже фонони також не збурять систему. Низький коефіцієнт дифузії означає, що атоми залишаються на свої місцях навіть при декількох сотнях кельвінів.

Найкращим дефектом для квантових систем є центр нітроген-вакансія. Він складається з атому нітрогену зі спіном 1 (нітроген-14) або $\frac{1}{2}$ (нітроген-15) та сусідньої карбонової вакансії. В негативно заряджених нітроген-вакансіях електрони знаходяться у триплетному стані з розщепленням при нульовому магнітному полі. Найбільшою перевагою є те, що стан з орбітальним квантовим числом $m = 0$ при оптичних маніпуляціях показує поведінку відмінну від стану $m = \pm 1$. Звідси, як ініціалізація, так і зчитування можливі. Наприклад, стан $m = 0$ як стан кубіту може бути визначений як 0, а $m = -1$ як стан кубіту 1.

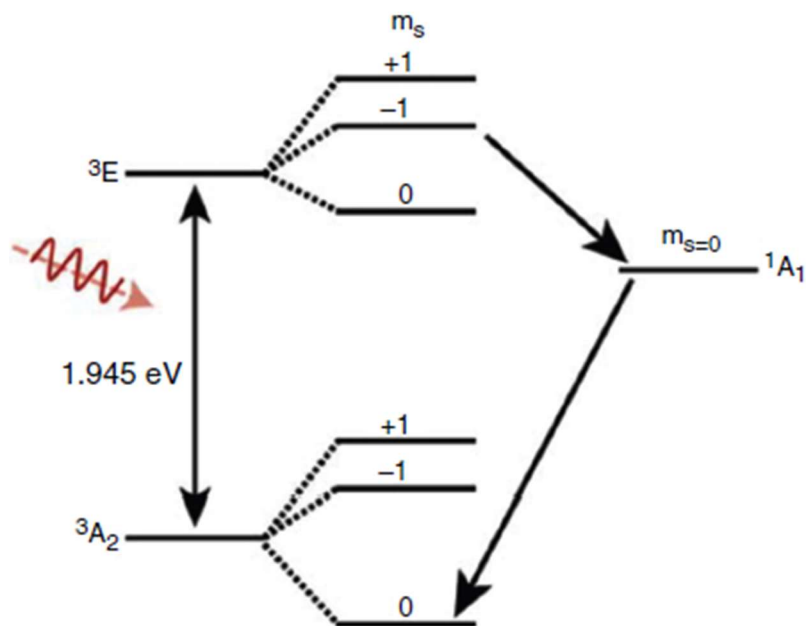


Рис 2.5 – Енергетична схема негативно зарядженого центру нітроген-вакансія.

Основний та збуджений стани є триплетними. [21]

На Рис 2.5 зображена енергетична схема негативно зарядженого центру нітроген-вакансія. Порівнюючи з квантовими точками, такі центри поведуть себе як штучні атоми з властивостями, які можна створити при додаванні іонів або при синтезі діаманту.

Зазвичай у заряджених кольорових центрах (дефектів) основний стан синглетний, а збуджений – триплетний, а поляризація спіну відбувається при заповненні триплетного стану. Для нітроген-вакансій – навпаки: основний стан триплетний, а синглетний є фактично проміжним і досягається через збуджений стан (Рис. 2.5). Таким чином, спінова поляризація досягається через синглетний стан, при чому перехід для $m = \pm 1$, значно сильніший, ніж для $m = 0$. Оскільки перехід від синглетного до триплетного стану відбувається майже однаково при будь-яких m , то вже за декілька циклів збудження спінова поляризація може бути досягнута з ймовірністю 98% [22]. Звідси, спінові стани можна контролювати мікрохвильовими імпульсами, а завдяки пригніченню фотонної взаємодії, час когеренції може досягати декількох мілісекунд при кімнатній температурі.

Для взаємодії та зчитування кубітів використовують два підходи: логічні оператори для зміни стану кубітів, але не зчитування, при цьому система залишається ізольованою та власне зчитування, яке також змінює стан кубіта в сенсі квантово механічних правил. Після цього система вважається неізольованою. За можливості, вимірювання виконують «одноразовим зчитуванням» («single-shot readout») [23]. Насправді, це не одноразове вимірювання, але подальші вимірювання не повинні змінювати результат. Наприклад, можна зчитати ядерний спін нітроген-вакансії декілька разів, не змінюючи стан цього спіну. [23]

Таким чином, легка ініціалізація та зчитування станів, великий час когеренції, невибагливість до зовнішніх умов (можливість роботи при кімнатній температурі) уможливають створення квантових систем обробки інформації на основі нітроген-вакансій у діамантах. Зокрема, компанія «Квантові Діамантні Технології» («Quantum Diamond Technologies») вже імплементувала даний підхід та пропонує пристрої для детектування біомаркерів та для тестування біологічних речовин з часом когеренції більш ніж 2 секунди. [24]

2.3 Створення кубітів на іонних пастках

Іони, тобто атоми, що мають один зайвий електрон, або, яким не вистачає електрону, є ефективною основою для створення кубітів. З використанням електромагнітного поля, десятки іонів можна захопити в пастку в довгий лінійний ланцюжок, яким можна маніпулювати, а за допомогою високоточних лазерів, захоплені іони можуть бути заплутані через двокубітні вентиля (оператори).

Кубіти в процесорі на іонних пастках реалізуються на двох квазістабільних рівнях позитивно заряджених іонів, поміщених у пастку та охолоджених до низьких температур. Кожен кубіт пов'язаний з окремим іоном, положення в просторі якого визначене.

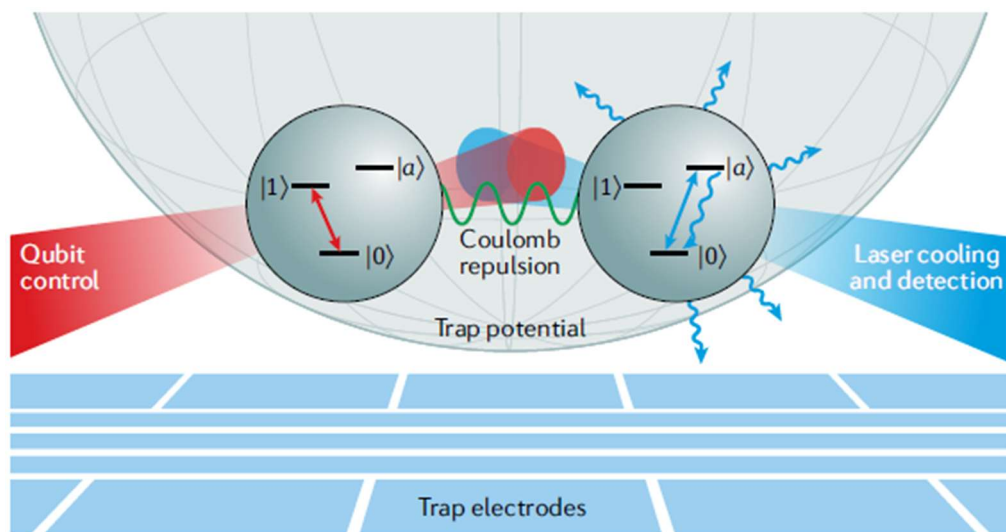


Рис. 2.6. – Квантовий комп'ютинг за допомогою іонних пасток. Іони утримуються у пастці, лазерами здійснюється контроль над кубітами, а разом Кулонівською взаємодією лазери формують квантові операції. Зчитування відбувається шляхом вимірювання індукованої лазером іонної флуоресценції за допомогою допоміжного стану $|a\rangle$. За допомогою цієї ж флуоресценції відбувається охолодження атомів. [25]

Іони зазвичай захоплюються за допомогою двох методів: пастками Пеннінга або пастками Пауля. Пастки Пеннінга є динамічними пастками, які

використовують сильне однорідне аксіальне магнітне поле, що обмежує радіальний рух частинки та квадрупольне електричне поле, що обмежує рух уздовж центральної осі. У пастці Пауля вводять пондеромоторне обмеження (силу), використовуючи псевдопотенціал в двох або трьох вимірах. [26]

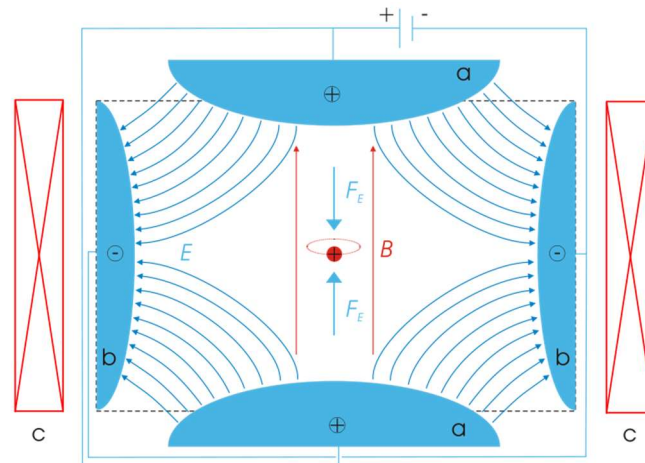


Рис. 2.7 – Схематичне зображення конфігурації полів у пастці Пеннінга. Верхній та нижній електроди насправді єдине кільце. [27]

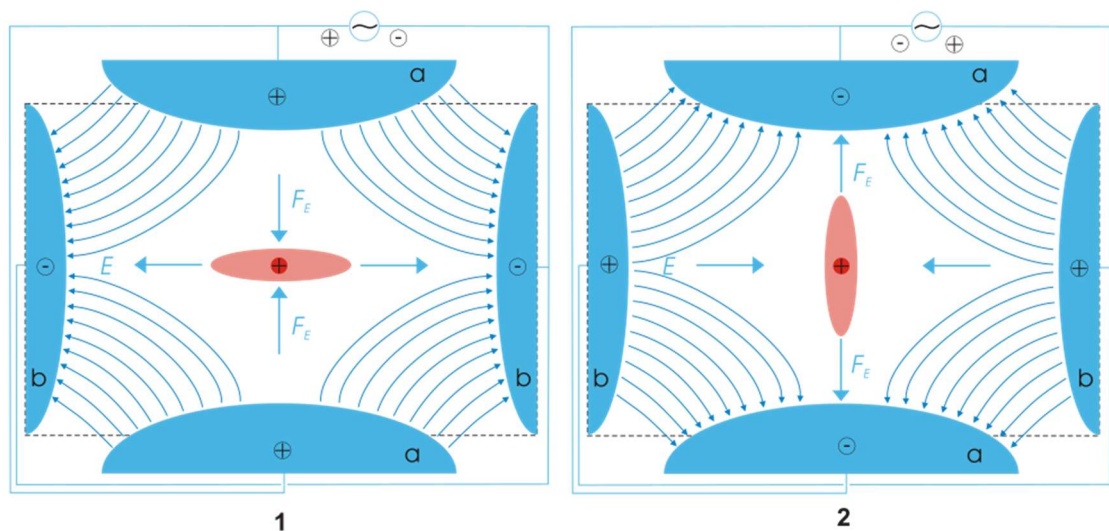


Рис. 2.8 – Схема квадрупольної іонної пастки з позитивно зарядженою частинкою (темно-червона), оточеною хмаркою частинок із тим же зарядом (світло-червоні). Рисунок 1 та 2 показують два стани упродовж циклу змінної напруги. [28]

Квантові оператори в таких процесорах формуються імпульсами лазерного випромінювання певної частоти, скерованими на конкретні кубіти, та коливними рухами іонів. Охолодження ланцюжка іонів проводять на основі методів, створених для нейтральних атомів [29].



Рис. 2.9 – Фотографія IonQ Forte (спереду зліва).

Саме на основі цього підходу компанія ionQ нещодавно створила новий квантовий комп'ютер IonQ Forte. [30] Використання Кулонівської взаємодії і є найбільшою та унікальною перевагою архітектури процесорів IonQ. На відміну від класичних чіпів в яких елементи схеми та з'єднання вбудовані в одному місці перманентно, IonQ пропонують динамічний чіп, в якому можна завантажити будь-яку кількість кубітів та «з'єднати» їх за допомогою лазерних сигналів, забезпечуючи заплутування між ними.

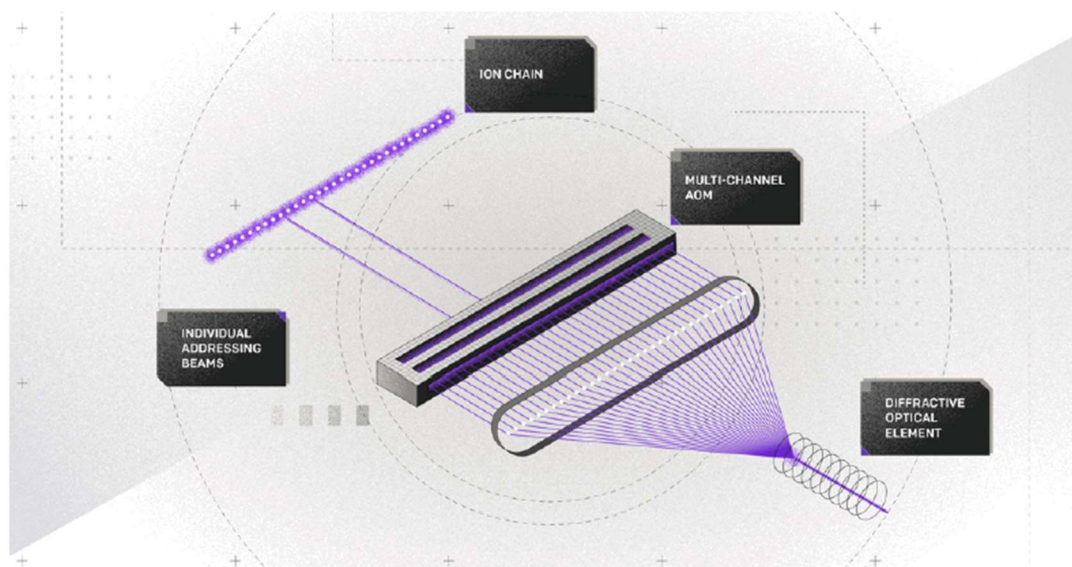


Рис. 2.10 – Архітектура процесора з використанням мультіканального акустико-оптичного модулятора. [30]

Замість використання мультіканального акустико-оптичного модулятора (АОМ) (Рис. 2.10) , як це було в минулих пристроях компанії, цього разу було використано технологію АОД – акустико-оптичного дефлектора (Рис. 2.11), в якому кут відхилення променя контролюється прикладеними радіо-сигналами.

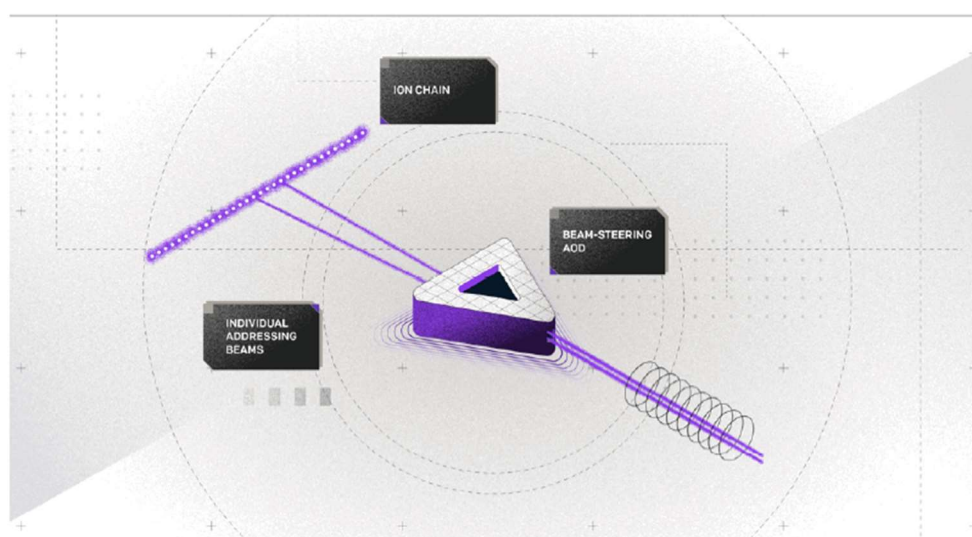


Рис. 2.11 – Архітектура процесора з використанням акустико-оптичного дефлектора. [30]

Перевагою цієї технології полягає в більш ефективному використанні потужності, оскільки вона не витрачається на канали кубітів, які не використовуються (на відміну від АОМ). Окрім того, технологія АОД дозволяє більш точно юстувати лазерний промінь на кожен іон, зокрема зважаючи на варіацію відстані між іонами, яка природньо виникає в довгому іонному ланцюжку.

При адресуванні сигналу, можуть виникнути, так звані перехресні завади («crosstalk») – коли лазерний промінь, адресований до одного кубіту, випадково впливає на сусідній кубіт. Використання АОД технології дозволяє зменшити максимальний залишковий вплив на сусідні кубіти нижче 1,1% від дії на основний кубіт.

Такий квантовий процесор складається з 35 іонів ітербію розташованих у ланцюг, відстань між іонами приблизно 3 мкм. Із них 31 іон використовується як кубіти, окрім того виявилось, що один додатковий іон у центрі робить оптичне юстування на ранніх етапах легше.

Теоретично квантова операція між двома кубітами мала точність 99,96%, тобто з такою ймовірністю результат не міститиме помилки. Ініціалізація станів та зчитування результату для кожного кубіту вкинується з точністю 99,4%.

Для кращого визначення та розуміння природи помилок використовують томографію набору вентилів (Gate Set Tomography) [31]. За допомогою нього було визначено, що для операції сплутування точність складає 99,43%, для усіх інших – лежить між 99,97% та 99,93%. Також з цієї технології можна визначити, який тип похибок робить більш вклад. Це можуть бути когерентні похибки, які виникають через неточність при контролі імпульсів, наприклад, флуктуації потужності лазера або неточна калібровка; або некогерентні похибки, тобто які виникають при фундаментальних фізичних обмеженнях системи, як-то розсіювання фотона, яке може призвести повного руйнування кубіту.

Імплементация квантового комп'ютера на іонних пастках у пристроях компанії ionQ є досить ефективною, кубіти в їх системах стабільні та мають високу степінь запутаності – 99,96%. З іншого боку, усі дії над кубітами

(операції, охолодження, ініціалізація, зчитування) проводяться за допомогою лазерів, що робить цей спосіб сильно залежним від точності обладнання та юстування системи.

2.4 Кубіти на основі надпровідних резонаторів

Квантові комп'ютери на основі надпровідних резонаторів головним чином використовують трансмони – тип надпровідного зарядового кубіта, розроблений для зниження чутливості до шуму заряду. Трансмон можна отримати загалом на основі надпровідного ланцюга з джозефсонівським контактом, ємністю та індуктивністю. Джозефсонівський ефект – це явище проходження надпровідного струму через тунельний контакт, який складається з двох надпровідників розділених тонким шаром діелектрика або металу.

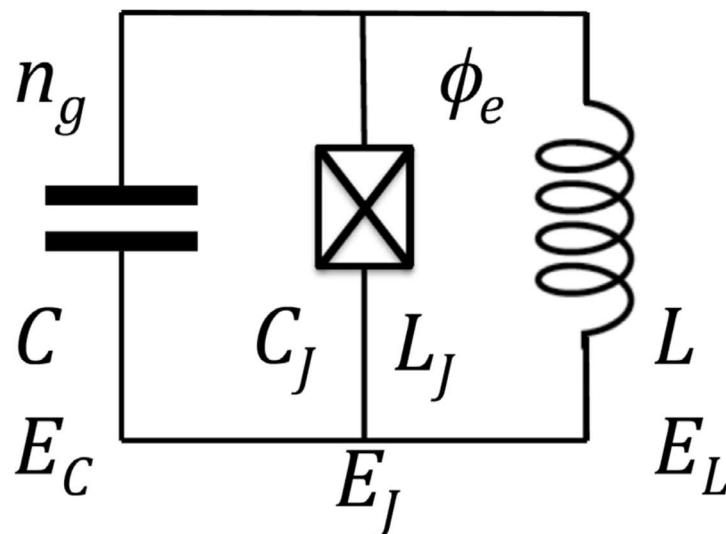


Рис. 2.12 – Еквівалентна схема кубіту на основі джозефсонівського контакту.

Тут індекси C, J та L означають відповідно характеристики на конденсаторі, джозефсонівському контакті та котушці. n_g позначає заряд індукований на

конденсаторі зовнішнім джерелом струму (не показано), ϕ_e - фаза на джозефсонівському контакті контрольована зовнішнім потоком. [32]

На рисунку показано кубіт на надпровідному нелінійному осциляторі. Гамільтоніан гармонічної системи можна записати:

$$\hat{H} = E_C \hat{n}^2 + E_L \frac{\hat{\phi}^2}{2} \quad (2.3)$$

тут \hat{n} - заряд індукований на конденсаторі вимірний у $2e^-$ (Куперівські пари), а $\hat{\phi}$ - різниця фаз на котушці. Ці величини не комутують, $[\hat{\phi}, \hat{n}] = i$, тобто їх значення не можуть бути отримані одночасно. Вважаючи що, $E_C = \frac{(2e)^2}{2C}$, $E_L = \frac{\hbar^2}{4e^2 L}$, відстань між енергетичними рівнями гармонічного осцилятора є $\hbar\omega = \frac{\hbar}{\sqrt{LC}} = \sqrt{2E_L E_C}$.

Для надпровідного високоефективного осцилятора енергетичні рівні вузькі та еквідистантні. Для створення кубіту повинно бути виділено особливу пару рівнів, тобто осцилятор має бути ангармонічним. При додаванні джозефсонівського контакту, гамільтоніан має наступний вигляд:

$$\hat{H} = E_C (\hat{n} - n_g)^2 + E_L \frac{(\hat{\phi} - \phi_e)^2}{2} - E_{J_0} \cos \hat{\phi} \quad (2.4)$$

де n_g - заряд індукований зовнішньою напругою, а ϕ_e - індукована фаза через джозефсонівський контакт.

Для підбору зовнішніх параметрів керування ланцюгом, розв'язують рівняння Шрьодінгера. З урахуванням некомутативності параметрів, вводять $\hat{n} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \phi}$, тоді потенціал системи є [32]:

$$U(\phi) = -E_{J_0} \cos \phi + E_L \frac{(\phi - \phi_e)^2}{2} \quad (2.5)$$

Звідси можливі два випадки: перший при $E_L = 0$ ($L \sim \infty$), потенціал стає чисто косинусоїдальним, енергетичні рівні описуються відношенням $\frac{E_{J_0}}{E_C}$, зокрема при великих значеннях ємності рівні лежать низько, а ланцюг стає нечутливим до флуктуацій заряду; другий при $E_L \approx E_{J_0}$, потенціал тепер не періодичний, але описується параболою модульованою синусоїдою, нижні енергетичні рівні залежать від відношення $\frac{E_L}{E_{J_0}}$ та зовнішнього потоку ϕ .

Саме керування вказаними відношеннями дозволяє створювати різні види кубітів. Такі як: фазові кубіти, кубіти на основі надпровідного квантового інтерферометра, на потрійному джозефсонському контакті, 2Д та 3Д трансмон кубіти тощо. [33]

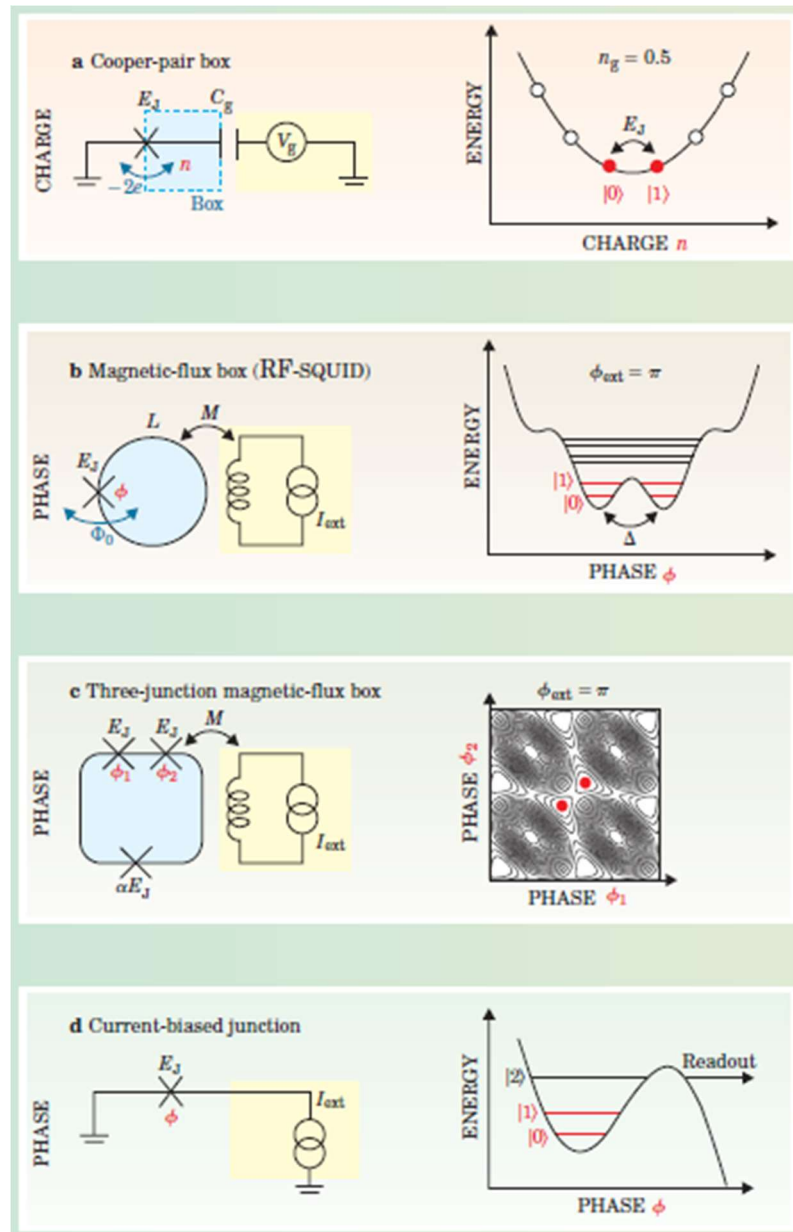


Рис. 2.13 – схеми та енергетичні діаграми різних видів кубітів на основі надпровідних резонаторів: а) на основі «коробки» куперівських пар, б) на основі «коробки» магнітного потоку, с) на основі «коробки» магнітного потоку з потрійним джозефсонівським з'єднанням, d) на основі джозефсонівського з'єднання керованого струмом. Тут «коробка» означає спеціально виділене місце в електричній схемі для формування кубітів. [33]

Прикладом втілення квантового комп'ютеру на надпровідних резонаторах є Sycamore від Google. Вони змогли використати 53 кубіти, точність їх системи сягає 99,8% [34]. А в 2019 році Google змогли досягти квантової переваги над класичним комп'ютером. [35]

РОЗДІЛ 3

ПАРАДИГМИ ТА АЛГОРИТМИ КВАНТОВОГО ПРОГРАМУВАННЯ

Квантове програмування відносно нова дисципліна в порівнянні з початком класичного програмування в 1950-х. Як і класичні, квантові комп'ютери потребують спеціалізації логіки обчислень, в зв'язку з цим імплементация квантового алгоритму на реальному пристрої вимагають визначення декількох рівнів абстракції. При визначенні квантового програмування розуміють декілька різних парадигм, окрім того деякі з них мають низький рівень абстракції, що ускладнює їх вивчення. Зазвичай виділяють 4 парадигми:

а) Модель дискретних кубітів. У цьому узагальненні цифрового програмування, біти замінюються кубітами, а логічні оператори – набором унітарних вентилів, які апроксимують будь-яку унітарну операцію. Класичні цифрові електричні кола використовують рядок бітів та за допомогою логічних операцій отримують біти, в той час квантові кола оперують розподілом ймовірності – квантовими станами. Найбільша кількість квантових пристроїв використовують саме *модель дискретних кубітів*.

б) Модель неперервних кубітів. Тут замість кубітів використовуються так звані кумоди (qumode – квантова мода), які приймають неперервні значення. Концептуально ця парадигма ближча до фізичного сенсу квантової механіки, зокрема квантової оптики. Власне для опису *моделі неперервних кубітів* найчастіше використовують квантову оптику.

в) Адіабатична квантова модель. Пристрої квантового відпалу використовують цю модель. Ця парадигма використовує адіабатичну теорему для знаходження мінімуму оптимізаційної задачі. Особливістю *адіабатичної квантової моделі* є той факт, що вона не має прямого класичного аналогу.

г) Квантові симулятори. Це пристрої, які створюються спеціально для вирішення конкретного типу проблем, наприклад, для розгляду квантової моделі багатьох тіл. Оскільки ця ідея початково ґрунтується не на квантовому програмуванні, тому ця парадигма має низьку степінь узагальненості. Окрім того важливо не сплутувати *квантові симулятори* та симулятори квантових обчислень на класичних комп'ютерах.

Найбільше поширення та найбільшу зацікавленість викликають парадигми дискретних квантових вентилів (далі – квантових вентилів) та квантового відпалу, тому саме вони будуть розглянуті далі. [36]

3.1 Парадигма дискретних квантових вентилів

Як було показано у першому розділі, кубіти є елементами комплексного простору зі станами в якості базисних векторів, тому їх можна зобразити у вигляді векторів, наприклад, для одного та двох кубітів відповідно матимемо:

$$\begin{aligned}
 |a\rangle &= c_0|0\rangle + c_1|1\rangle \Rightarrow \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \end{bmatrix} \\
 |a\rangle &= c_{00}|00\rangle + c_{01}|01\rangle + c_{10}|10\rangle + c_{11}|11\rangle \Rightarrow \begin{bmatrix} c_{00} \\ c_{01} \\ c_{10} \\ c_{11} \end{bmatrix}
 \end{aligned}
 \tag{3.1}$$

Аналогічно до логічних вентилів у класичному комп'ютері, у квантовому комп'ютері для перетворення кубітів використовуються квантові вентиля. Дію вентилів описують унітарною матрицею, на яку множиться відповідний вектор стану, тобто $U|\psi_1\rangle = |\psi_2\rangle$, тут U матриця вентиля. Існує незліченна кількість квантових вентилів, далі буде розглянуто ті, що найбільш часто зустрічаються в літературі.

Найбільш простим є вентиль ідентичності, він має одиничну матрицю та не змінює квантовий стан:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}
 \tag{3.2}$$

Вентилі Паулі X , Y , Z базуються відповідно на матрицях Паулі та діють на один кубіт. Вентилі X , Y , Z відповідають обертанню на 180 градусів навколо відповідних осей на Блохівській сфері.

Вентиль X є квантовим еквівалентом класичного інвертора (вентиля НЕ). Він змінює стан $|0\rangle$ на $|1\rangle$ та $|1\rangle$ на $|0\rangle$. Відповідно вентиль Y змінює стан $|0\rangle$ на $i|1\rangle$ та $|1\rangle$ на $-i|0\rangle$, а вентиль Z – залишає стан $|0\rangle$ незмінним лише змінює стан $|1\rangle$ на $-|1\rangle$. Матриці вентилів є відповідно:

$$X = \sigma_x = \text{NOT} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad Y = \sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \quad Z = \sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

Матриці Паулі є інволютивними, тобто відповідають співвідношенню:

$$I^2 = X^2 = Y^2 = Z^2 = -iXYZ = I \quad (3.4)$$

Квадратний корінь з вентиля НЕ (або вентиля X) діє на один кубіт та змінює стан $|0\rangle$ на $\frac{(1+i)|0\rangle + (1-i)|1\rangle}{2}$ та $|1\rangle$ на $\frac{(1-i)|0\rangle + (1+i)|1\rangle}{2}$. Така зміна станів відповідає обертанню на 90 градусів навколо осі x на Блохівській сфері. [4]

Контрольовані вентилі діють на 2 або більше кубітів, де один або декілька кубітів контролюють деяку операцію. Наприклад, контрольоване НЕ (CNOT) діє на два кубіти та застосовує операцію НЕ на другий кубіт, якщо перший у стані $|1\rangle$, в іншому випадку залишає його незмінним. Даний вентиль може бути репрезентований ермітовою інволютивною матрицею:

$$\text{CNOT} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

Загалом для будь-якого вентиля U можна створити контрольований:

$$\text{CU} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_{00} & u_{01} \\ 0 & 0 & u_{10} & u_{11} \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

Контролювання може бути розширене до будь-якої кількості кубітів (обмеженням є кількість кубітів у системі). Наприклад, вентиль НЕ з подвійний контролем (CCNOT) називають вентиляем Тоффолі.

Вентиль обміну діє на два кубіти та обмінює їх значення, його матриця відповідно:

$$SWAP = \frac{I \otimes I + X \otimes X + Y \otimes Y + Z \otimes Z}{2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

Вентиль фазового зсуву має матрицю:

$$P(\varphi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\varphi} \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

при дії цього вентиля ймовірність отримати той чи інший стан не змінюється, натомість змінюється фаза стану. Це відповідає повороту на φ навколо осі z на Блохівській сфері. Зокрема Z -вентиль є частковим випадком вентиля фазового зсуву при $\varphi = \pi$.

Важливими для заплутування є вентиль Адамара, який діє відповідно матриці:

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

тобто $|0\rangle \rightarrow \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}$ $|1\rangle \rightarrow \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}$ - створює стан суперпозиції. На сфері блоха

це відповідає повороту на 180 градусів навколо осі $(\hat{x} + \hat{z})/\sqrt{2}$. [37]

Для кращого розуміння квантові кола зображують графічно. Спочатку пишуть горизонтальні лінії, які репрезентують кубіт, та горизонтальну вісь зліва направо, що означає час. На цих лініях розміщують операції, які проводяться над кубітами – це вентиля або зчитування. Також за потреби додають класичні біти у вигляді подвійної лінії, наприклад, загалом після зчитування результату на кубіті.

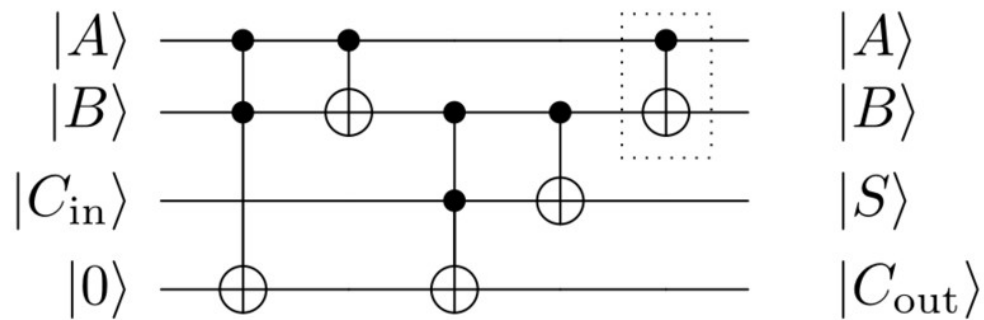


Рис. 3.1 – Приклад квантового кола. На колі втілено суматор запропонований Фейнманом у 1986 році. [38]

Загалом, оскільки усі оператори описуються унітарними матрицями, то і результат дії декількох операторів також підкоряється правилам матричних дій, наприклад, усі оператори, окрім оператора НЕ, є оборотними; дія послідовних операторів є оператором з матрицею, яка дорівнює добутку вхідних матриць починаючи з кінця, тобто якщо спочатку відбувається дія А, а потім В, то їх результат буде $C = BA$; або, наприклад, паралельні дії операторів (тобто дії на різні кубіти) можуть бути записані тензорним добутком цих операторів.

Зрештою після усіх перетворень відбувається вимірювання (зчитування результату). Вимірювання є необоротним, оскільки призводить квантовий стан до одного значення. Вимірювання приходить за правилом Борна: квантовий стан проєктують на один з базисних станів з імовірністю рівною квадрату довжини вектора вздовж цього базисного стану. Ця операція дійсно є стохастично необоротною, оскільки вона ймовірно прирівнює квантовий стан до одного з базисних станів, які в свою чергу є вимірними (не ймовірнісними). Колапсування квантового стану, тобто зменшення суперпозиції власних станів до одного власного стану внаслідок взаємодії з оточенням, називається проблемою вимірювання.

3.2 Парадигма квантового відпалу

Як вже було сказано раніше парадигма квантового відпалу використовується для задач, в яких потрібно знайти глобальний мінімум цільової функції серед можливих мінімумів, використовуючи процес квантових флуктуацій (тут скрізь, не порушуючи загальності, взято мінімум, хоча це може бути і максимум). Квантовий відпал використовується загалом для дискретних задач (комбінаторно-оптимізаційних) з багатьма локальними мінімумами, наприклад, задача комівояжера або знаходження основного стану спінового скла.

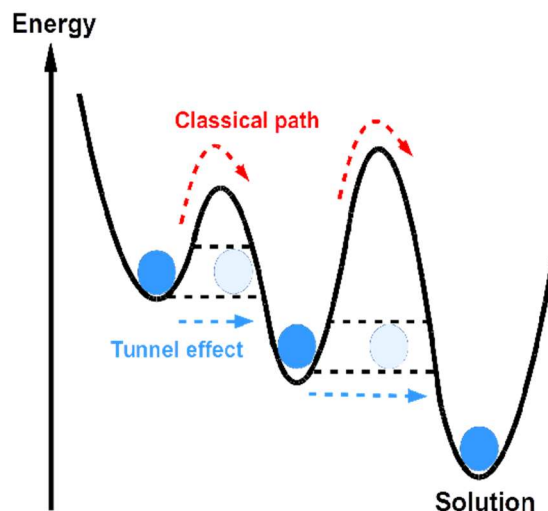


Рис. 3.2 – Схематичний хід розв’язку за квантовим відпалом. [39]

Квантовий відпал починається з квантової суперпозиції усіх можливих станів з однаковою вагою, а до всієї системи прикладається поперечне поле. Далі величина поля починає зменшуватись, а система починає природньо еволюціонувати, що може бути описане нестационарним рівнянням Шрьодінгера. Амплітуда усіх станів продовжує змінюватися завдяки квантовому паралелізму, а внаслідок поперечного поля починає відбуватися тунелювання між станами. Якщо зміна поля буде відбуватися достатньо повільно, то гамільтоніан залишатиметься у основному стані. Коли поле буде зовсім

вимкнене, тоді система досягне основного стану без зовнішнього поля, який і буде відповідати розв'язку оптимізаційної задачі. Експериментальне підтвердження квантового відпалу було зроблено майже одразу після розробки теоретичної бази у 1999 році. [40]

Квантовий відпал може бути порівняний з класичним алгоритмом симуляції відпалу, в якому роль поперечного поля відіграє температура. Як і в симуляції відпалу температура визначає ймовірність переходу до стану з більшою енергією, так і в квантовому відпалі величина поперечного поля визначає квантовомеханічну ймовірність переходу від одного стану до іншого.

Найбільш ефективні імплементації квантового комп'ютера були описані у другому розділі, але їх спільною рисою є те, що вони підходять для парадигми квантових вентилів. Квантові комп'ютери на підході квантового відпалу мають іншу архітектуру, їх імплементацією займається компанія D-Wave, яка зокрема єдина має квантові комп'ютери такого виду. Наприклад, останньою розробкою є квантовий комп'ютер з 2000 кубітів (в 100 разів більше в порівнянні з десятками кубітів у вентиляційній моделі) з часом когеренції близько 50 нс [41]. Кількість використаних кубітів може вразити, але при порівнянні з моделлю квантових вентилів виявляється, що хоча і парадигма вентилів складна для імплементації (кількість використаних кубітів сягає десятків), можливості їх застосування достатньо широкі – не тільки проведення аналогій з класичними алгоритмами, а й створення нових; в той час парадигма квантового відпалу може обмежуватися тільки задачами оптимізаційного характеру.

3.3 Алгоритми квантового комп'ютингу

Як вже було сказано раніше підхід квантового відпалу має вузьке застосування – це задачі оптимізаційного характеру, тобто існує цільова функція, яку треба мінімізувати (або максимізувати). Зокрема цією функцією може бути гамільтоніан системи, для його формування використовують модель Ізінга.

Ця модель складається з дискретних змінних, які можуть мати значення +1 або -1, наприклад, ядерний спіні. Усі вони знаходяться у вершинах графа, який власне репрезентує кристалічну ґратку, окрім того ці спіні можуть взаємодіяти між собою, таким чином ця модель дозволяє враховувати енергетичний вклад і спінів як таких, і їх взаємодії між собою. Таким чином гамільтоніан системи виглядає як:

$$H = -\sum_{\langle ij \rangle} J_{ij} \sigma_i \sigma_j - \sum_i h_i \sigma_i \quad (3.10)$$

тут σ_i дискретні змінні із значенням +1 або -1, h_i коефіцієнт взаємодії змінної із зовнішнім полем, J_{ij} коефіцієнт взаємодії між собою. Перша сума рахується по парам i, j , тобто кожна пара враховується лише один раз, а нотація $\langle ij \rangle$ означає сумування за сусідніми елементами. [42]

Спочатку модель Ізінга була створена для опису феромагнетизму з огляду статистичної фізики: дискретні змінні із значенням ± 1 це спіні, а граф це ґратка на якій вони розташовані. Пізніше ця модель була екстрапольована на інші фізичні задачі, зокрема і для квантового відпалу.

Натомість підхід квантових вентилів має більш широке застосування, внаслідок використання операцій, які можуть бути записані унітарними матрицями. Найчисельнішою групою є алгоритми засновані на квантовому перетворенні Фур'є. Квантове перетворення Фур'є – це квантовий аналог дискретного перетворення Фур'є, виконати його можна за допомогою системи вентилів Адамара та контрольованих вентилів. Власне саме перетворення Адамара є прикладом квантового перетворення Фур'є, оскільки воно розкладає довільний вектор на суперпозицію функцій Уолша (сімейство функцій, які мають значення +1 та -1 на усій області визначення, та утворюють ортогональну систему). [43]

Алгоритм Дойча-Йожи є одним з перших алгоритмів для квантового комп'ютеру. Він розв'язує задачу, яка полягає у визначенні чи є функція двійкового аргументу або константою, або збалансованою. Тут константою вважається функція яка має або значення 1, або значення 0 для будь-якого

аргументу, збалансована функція має значення 1 для половини області визначення, для іншої половини – значення 0. При цьому функція апіорі вважається або збалансованою, або константою.

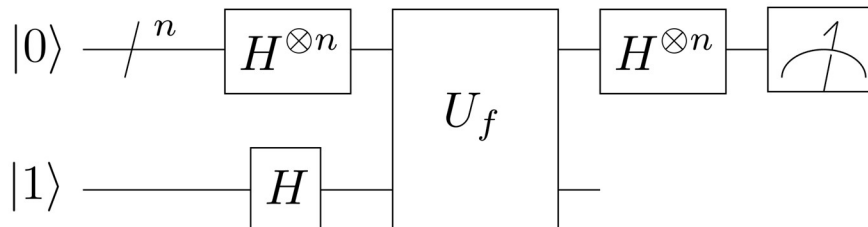


Рис. 3.3 – Алгоритм Дойча-Йожи для функції n змінних. H – оператор Адамара, U_f – оператор досліджуваної функції. Нижній кубіт – допоміжний, для визначення фази.

Першим квантовим алгоритмом, який вирішив задачу ефективніше, ніж найкращий класичний алгоритм є алгоритм Берштейна-Вазірані. Він вирішує задачу «чорного ящика», яка має наступне формулювання. Маємо функцію, що перетворює n -бітне число у один біт (у квантовому випадку замість бітів – кубіти); відомо, що функція має вигляд:

$$f = a \cdot x = a_1 x_1 \oplus a_2 x_2 \oplus \dots \oplus a_{n-1} x_{n-1} \oplus a_n x_n \quad (3.11)$$

а знайти потрібно параметр «чорного ящика» a . Алгоритм Берштейна-Вазірані демонструє різницю між найменшою необхідною кількістю запитів до оракула (до «чорного ящика») квантового та класичного алгоритмів. В той час як класичному розв'язку потрібно $O(n)$ запитів, то квантовому достатньо $O(1)$. [44]

До алгоритмів заснованих на квантовому перетворенні Фур'є також належать: алгоритм Шора – розклад числа на прості множники; алгоритм знаходження прихованої підгрупи, алгоритм оцінки Гаусової суми.

Підхід випадкового блукання має широке застосування в сферах фізики, хімії, економіки, екології тощо, окрім того має квантовий аналог – квантове блукання, та, як і класичний варіант, утворює свою групу алгоритмів. У квантовому блуканні випадковість досягається квантовою суперпозицією станів та колапсом квантового стану при вимірюванні результатів. За допомогою цього

підходу можна вирішити низку різних задач: проблему трикутника – чи є у досліджуваному графі три вершини, що утворюють трикутник [45]; проблема унікальності елемента – перевірка чи є елементи в списку унікальними [46]; перевірка комутативності групи. [47]

Узагальнюючи алгоритм Гровера виділяють групу алгоритмів амплітудного підсилення. Алгоритм Гровера власне є алгоритмом квантового пошуку, який дозволяє за значенням невідомої функції знайти відповідне значення аргументу. На відміну від інших квантових алгоритмів, які забезпечують експоненціальне підвищення ефективності над класичним аналогами, алгоритми амплітудного підсилення забезпечують лише квадратичне, але і цього достатньо, щоб розв'язувати задачі ефективніше ніж класичний комп'ютер. [48]

ОБГОВОРЕННЯ ТА ВИСНОВКИ

В роботі було розглянуто сучасний стан реалізацій ідей квантового комп'ютеру, висвітлено ключові ідеї його функціонування та принципові обмеження, які визначають характер задач, що можуть бути ним розв'язані. Основною перевагою квантового комп'ютера над класичним є використання ефекту заплутаних кубітів, що дозволяє у природній спосіб розпаралелювати задачу, тобто обраховувати багато можливих розв'язків одночасно.

Аналіз показав, що основні проблеми, які виникають при проектуванні квантових комп'ютерів – це чутливість когерентних станів до оточення, накопичення похибок та їх корекція, ініціалізація станів кубітів та створення багатокубітних систем.

Було розглянуто реальні імплементації квантового комп'ютера. Успішне втілення мають квантові процесори на кремнієвих квантових точках, на іонних пастках, на надпровідних резонаторах та на основі нітроген-вакансії у діамантах. Беззаперечною перевагою реалізацій на кремнієвих квантових точках є розвинута індустрія кремнієвих технологій. Успішна реалізація на N-V (нітроген-вакансія) дефектах завдячує феноменальному прогресу у вирощування штучних діамантів макроскопічних розмірів і контрольованої чистоти методами осадження, що досягнуто завдяки тривалим зусиллям компанії de Vries. Водночас реалізації на трансмонах та іонних пастках потребують задіяння значної кількості складних фізичних технологій. Здешевлення останніх очевидно є непростою задачею.

За виключенням компаній D-Wave та Quantum Diamond Technologies, всі реалізації потребують охолодження до наднизьких температур менше 0.01 К. Як значний успіх можна розглядати «гарячі» квантові точки Intel при 4 К, що дозволяє працювати при температурах зрідженого гелію. Попри привабливу можливість функціонування кубітів на N-V вакансіях, що реалізовано компанією Quantum Diamond Technologies, остання стикається із технологічними труднощами, пов'язаними із заплутуванням більш ніж двох кубітів. На відміну

від Quantum Diamond Technologies, компанія D-Wave має значні успіхи у використанні великої кількості кубітів, але імплементована нею парадигма квантового відпалу дозволяє вирішувати лише обмежений клас задач, пов'язаних з оптимізацією. Значно більш перспективнішим виглядає технологія заплутування та ініціалізації кубітів на іонних пастках, реалізована компанією IonQ. Принципово вона дозволяє відносно легко під кожну задачу формувати свій тип архітектури з необхідною кількістю кубітів. Водночас, очевидно, що компанія стикнеться із труднощами масштабування кубітів.

Окрему увагу було приділено розгляду парадигм квантового програмування. З них найбільш широке застосування має парадигма дискретних квантових вентилів, ефективним, але менш вживаним є підхід квантового відпалу. Додатково розглянуто квантові алгоритми для розв'язку задач на основі вказаних парадигм. Надійним для розв'язку оптимізаційних фізичних задач є підхід квантового відпалу, який дозволяє мінімізувати або максимізувати цільову функцію. Для дослідження фізичних систем з невідомими властивостями, але з відомими відгуками на зовнішній вплив, ефективними є алгоритми на основі квантового перетворення Фур'є та на основі амплітудного підсилення, які є ефективними для вирішення проблем оракула або, так званого, «чорного ящика». Зокрема це можуть бути алгоритм Берштейна-Вазірані, алгоритм Гровера або алгоритм квантового пошуку.

Доповненням цієї роботи в майбутньому може бути розгляд конкретних задач, що можуть бути розв'язані за допомогою цих підходів. А також створення проекту для запуску на реальному квантовому комп'ютері компаній, які надають таку можливість. Зокрема це можуть бути такі проекти з відкритим забезпеченням як: проект Cirq від Google [49], проект Qiskit від IBM [50], проект Ocean від D-Wave [51] тощо.

Підсумовуючи можна зробити наступні висновки:

1. Основні виклики фізичної імплементації квантових комп'ютерів – це чутливість когерентних станів кубітів до оточення, накопичення похибок та їх корекція, ініціалізація станів кубітів та створення багатокубітних систем.

2. На сьогоднішній день конкурентоспроможними і найбільш перспективними квантові процесори на кремнієвих квантових точках, на іонних пастках, на надпровідних резонаторах та на основі N-V дефектів у діамантах.

3. Серед чотирьох парадигм квантового програмування в фізичній імплементації на сьогоднішній день доступні парадигми дискретних квантових вентилів та квантового відпалу. Перша є більш універсальною, друга є ефективною при вирішенні задач оптимізації.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Feynman R. Simulating physics with computers / Richard P. Feynman. // International Journal of Theoretical Physics. – 1982. – №21. – С. 467–488.
2. Вакарчук І. О. Квантова механіка / І. О. Вакарчук. – Львів: ЛНУ імені Івана Франка, 2012. – 872 с.
3. Сфера Блоха [Електронний ресурс] – Режим доступу до ресурсу: https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%A1%D1%84%D0%B5%D1%80%D0%B0_%D0%91%D0%BB%D0%BE%D1%85%D0%B0.
4. Nielsen M. Quantum Computation and Quantum Information / M. Nielsen, I. Chuang. – United Kingdom: University Press, Cambridge, 2010. – 704 с.
5. Zahid H. Strengths and Weaknesses of Quantum Computing / Hussain Zahid. // International Journal of Scientific and Engineering Research. – 2016. – №7(9).
6. Devitt S. Quantum Error Correction for Beginners / S. Devitt, W. Munro, K. Nemoto. // Reports on Progress in Physics. – 2013. – №76.
7. Quantum Computing Day 2: Image Recognition with an Adiabatic Quantum Computer [Електронний ресурс]. – 2007. – Режим доступу до ресурсу: <https://www.youtube.com/watch?v=vMvC-wv1ayo>.
8. A Look at Intel's Quantum Computing Efforts [Електронний ресурс] // Quantum computing report. – 2022. – Режим доступу до ресурсу: <https://quantumcomputingreport.com/a-look-at-intels-quantum-computing-efforts/>.
9. DiVincenzo D. The Physical Implementation of Quantum Computation / David DiVincenzo. // Fortschritte der Physik. – 2000. – №48. – С. 771–783.
10. Карлаш Г. Квантові інформаційні системи. Навчальний посібник для спеціальності «Прикладна фізика та наноматеріали» / Г. Карлаш. – Київ: факультет радіофізики, електроніки та комп'ютерних систем Київського національного університету імені Тараса Шевченка, 2018. – 77 с.
11. Как S. The Initialization Problem in Quantum Computing / Subhash Как. // Foundations of Physics. – 1999. – №29. – С. 267–279.

12. Hanson R. Spins in few-electron quantum dots / R. Hanson, L. Kouwenhoven, J. Petta. // *Reviews of modern physics*. – 2007. – №79.
13. H. van Houten. Single Charge Tunneling: Coulomb-Blockade Oscillations in Semiconductor Nanostructures / H. van Houten, C. Beenakker, A. Staring. – Springer New York: NATO Science Series B.
14. Wilson M. Silicon-based quantum dots have a path to scalable quantum computing / Mark Wilson. // *Physics Today*. – 2018. – №71.
15. Kawakami E. Excitation of a Si/SiGe quantum dot using an on-chip microwave antenna / E. Kawakami, P. Scarlino, L. Schreiber. // *Applied Physics Letters*. – 2013. – №103.
16. Schreiber L. Sub-Navigation SiGe Spin-Qubits [Электронный ресурс] / Lars Schreiber. – 2019. – Режим доступа до ресурсу: <https://www.quantuminfo.fysik.rwth-aachen.de/go/id/eyea?lidx=1>.
17. Xu Y. Handbook of Spintronics / Y. Xu, D. Awschalom, J. Nitta., 2020. – 1602 с. – (Springer reference).
18. Weinmann D. Spin Blockades in Linear and Nonlinear Transport through Quantum Dots / D. Weinmann, W. Häusler, B. Kramer. // *Physical review letters*. – 1995. – №74.
19. Intel and QuTech Demonstrate High-Fidelity ‘Hot’ Qubits for Practical Quantum Systems [Электронный ресурс] // Intel Newsroom. – 2020. – Режим доступа до ресурсу: <https://newsroom.intel.com/news/intel-quitech-demonstrate-high-fidelity-hot-qubits-practical-quantum-systems/#gs.368w3s>.
20. Fact Sheet: Intel’s Horse Ridge II Streamlines the Complexity of Quantum Control Systems [Электронный ресурс] // Intel Newsroom. – 2021. – Режим доступа до ресурсу: https://newsroom.intel.com/wp-content/uploads/sites/11/2021/02/Intel-Horse-Ridge-II_Fact-Sheet-650989.pdf.
21. Weber J. Quantum computing with defects / J. Weber, W. Koehl, J. Varley. // *Proceedings of the National Academy of Sciences*. – 2010.
22. Pezzagna S. Quantum computer based on color centers in diamond / S. Pezzagna, J. Meijer. // *Applied Physics Reviews*. – 2021. – №8.

23. Neumann P. Single-Shot Readout of a Single Nuclear Spin / P. Neumann, J. Beck, M. Steiner. // *Science*. – 2010. – №329. – С. 542–544.
24. Glenn D. High-resolution magnetic resonance spectroscopy using a solid-state spin sensor / D. Glenn, D. Bucher, L. Junghyun. // *Nature*. – 2018. – №555. – С. 351–354.
25. Brown K. Materials challenges for trapped-ion quantum computers / K. Brown, J. Chiaverini, J. Sage. // *Nature Reviews Materials*. – 2020.
26. Ugwuishiwu C. Towards Physical Implementation of Quantum Computation / C. Ugwuishiwu, O. Ayegbusi, A. Eneh. // *International Journal of Advanced Trends in Computer Science and Engineering*. – 2020. – №5.
27. Penning trap [Электронный ресурс] – Режим доступа до ресурсу: https://en.wikipedia.org/wiki/Penning_trap.
28. Quadrupole ion trap [Электронный ресурс] – Режим доступа до ресурсу: https://en.wikipedia.org/wiki/Quadrupole_ion_trap.
29. Philips W. Laser cooling and trapping of neutral atoms / William Philips. // *Reviews of Modern Physics*. – 1998. – №70.
30. Unveiling IonQ Forte: The First Software-Configurable Quantum Computer [Электронный ресурс]. – 2022. – Режим доступа до ресурсу: <https://ionq.com/posts/may-17-2022-ionq-forte>.
31. Nielsen E. Gate Set Tomography / E. Nielsen, J. Gamble, K. Rudinger. // *Quantum*. – 2021. – №5.
32. Wendin G. Quantum information processing with superconducting circuits: a review / G. Wendin. // *Reports on Progress in Physics*. – 2017. – №80.
33. You J. Superconducting Circuits and Quantum Information / J. You, F. Nori. // *Physics Today*. – 2005. – №58.
34. Gunnels J. On “Quantum Supremacy” [Электронный ресурс] / J. Gunnels, D. Maslov, J. Gambetta // *IBM Research Blog*. – 2019. – Режим доступа до ресурсу: <https://www.ibm.com/blogs/research/2019/10/on-quantum-supremacy/>.
35. Arute F. Quantum supremacy using a programmable superconducting processor / F. Arute, K. Arya, J. Martinis. // *Nature*. – 2019. – №574.

36. Fingerhuth M. Open source software in quantum computing / M. Fingerhuth, T. Babej, P. Wittek. // PLoS ONE. – 2018. – №13.
37. Willams P. Explorations in Quantum Computing / Philips Willams. – England, United Kingdom: Springer London Ltd, 2011. – 717 с.
38. Feynman R. Quantum mechanical computers / Richard Feynman. // Foundations of Physics. – 1986. – №16. – С. 507–531.
39. Cervera-Lierta A. Quantum Annealing [Электронный ресурс] / Alba Cervera-Lierta. – 2018. – Режим доступа до ресурсу: https://medium.com/@quantum_wa/quantum-annealing-cdb129e96601.
40. Brooke J. Quantum Annealing of a Disordered Magnet / J. Brooke, D. Bitko, T. Rosenbaum. // SCIENCE. – 1999. – №284. – С. 779–781.
41. King A. Coherent quantum annealing in a programmable 2000-qubit Ising chain / A. King, S. Suzuki, J. Raymond. // (Preprint). – 2022.
42. Štelmachovič P. Quantum-information approach to the Ising model: Entanglement in chains of qubits / P. Štelmachovič, V. Bužek. // Physical review A. – 2004. – №70.
43. Jozsa R. Quantum Algorithms and the Fourier Transform / R. Jozsa. // Quantum Coherence and Decoherence. – 1998. – №454. – С. 323–337.
44. Nagata K. A Generalization of the Bernstein-Vazirani Algorithm / K. Nagata, G. Resconi, T. Nakamura. // MedCrave. – 2017.
45. Magniez F. Quantum Algorithms for the Triangle Problem / F. Magniez, M. Santha, M. Szegedy. // SIAM Journal on Computing. – 2007. – №37. – С. 413–424.
46. Ambainis A. Quantum Walk Algorithm for Element Distinctness / A. Ambainis. // SIAM Journal on Computing. – 2007. – №37. – С. 210–239.
47. Montanaro A. Quantum algorithms: an overview / A. Montanaro. // npj Quantum Information. – 2016. – №2.
48. Bernstein D. Grover vs. McEliece / D. Bernstein // International Workshop on Post-Quantum Cryptography / D. Bernstein. – Berlin, Heidelberg: Springer, 2010. – (Lecture Notes in Computer Science). – С. 73–80.

49. Cirq [Электронный ресурс] – Режим доступа до ресурсу: <https://quantumai.google/cirq>.
50. Qiskit [Электронный ресурс] – Режим доступа до ресурсу: <https://qiskit.org/>.
51. D-Wave Ocean Software Documentation [Электронный ресурс] – Режим доступа до ресурсу: <https://docs.ocean.dwavesys.com/en/stable/index.html>.