Міністерство освіти і науки України
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

Механіка суцільних середовищ

Курс лекцій

Навчальний посібник

Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавр
за освітньою програмою " Екоінженерія та природоохоронні технології"
спеціальності G2 "Технології захисту навколишнього середовища"

Укладачі: Н.С. Ремез, Т.В. Гребенюк

Електронне мережеве навчальне видання

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2026

УДК 614.8
Р37

Укладачі: *Ремез Наталя Сергіївна*, д-р техн. наук, проф.
Гребенюк Тетяна Володимирівна, канд. техн. наук, доц

Рецензент *Зайченко С.В.*, д-р техн. наук, проф.
професор кафедри автоматизації електротехнічних та мехатронних комплексів НН ІЕЕ

Відповідальний редактор *Ткачук К.К.,* докт. техн. наук, проф., професор кафедри геоінженерії НН ІЕЕ

Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
(протокол No 7 від 08.05.2026р.)
за поданням вченої ради факультету/навчально-наукового інституту
(протокол No 9 від 29.04.2026р.)

Ремез Н.С.

Р37 Механіка суцільних середовищ. Курс лекцій. [Електронний ресурс]: навч. посіб. для здобувачів ступеня баклавра за освітньою програмою "Екоінженерія та природоохоронні технології" спец. спеціальності G2 "Технології захисту навколишнього середовища" / КПІ ім. Ігоря Сікорського; уклад.: Н.С. Ремез, Т.В. Гребенюк. – Електронні текстові дані (1 файл). – Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2026 – 173 с.

У представленому посібнику викладено основні положення щодо засвоєння теоретичних основ та практичних навичок курсу «Механіка суцільних середовищ». Посібник містить лекційний матеріал та приклади розв’язування типових задач з метою більш якісного опанування теоретичних відомостей.

Навчальний посібник призначено студентам бакалаврату для підготовки до занять з навчальної дисципліни «Механіка суцільних середовищ». У посібнику подано основні теоретичні відомості про розділи: теорія поля, векторні поля, кінематика суцільного середовища, сили, що діють у суцільному середовищі, базові закони МСС, реологія суцільних середовищ із прикладами розв’язання типових задач. Указівки з їхнього розв’язання представлено в максимально простому та доступному вигляді. У кінці кожної теми запропоновано питання для самоперевірки, завдання для самостійної роботи.

Навчальне видання призначене для здобувачів ступеня бакалавра за освітньою програмою "Екоінженерія та природоохоронні технології " спеціальності G2 "Технології захисту навколишнього середовища" та може бути також корисним у навчальному процесі інших закладів вищої освіти під час підготовки бакалаврів.

УДК 614.8

Реєстр. No НП 25/26-328. Обсяг 6 авт. арк.
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
проспект Берестейський, 37, м. Київ, 03056
https://kpi.ua
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру видавців, виготовлювачів
і розповсюджувачів видавничої продукції ДК No 5354 від 25.05.2017 р.

© Н.С. Ремез, Т.В. Гребенюк
© КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2026

ЗМІСТ

ВСТУП 6
ЛЕКЦІЯ 1 8
ПРЕДМЕТ МЕХАНІКИ СУЦІЛЬНИХ СЕРЕДОВИЩ 8
1.1. Загальна схема пізнання в природних науках 8
1.2. Модель МСС. Основні гіпотези 10
1.3. Способи описання руху суцільного середовища 12
1.4. Індивідуальна, локальна і конвективна похідні 14
Ілюстративна задача 15
Запитання для самоперевірки. 16
Задачі для самостійного розв'язання 16
ЛЕКЦІЯ 2 18
ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ПОЛЯ 18
2.1. Векторне поле 18
2.2. Похідна за напрямком. Градієнт 20
2.3. Дивергенція та ротор вектора 22
Ілюстративна задача 25
Запитання для самоперевірки 26
Задачі для самостійного розв'язання 26
ЛЕКЦІЯ 3 27
КЛАСИФІКАЦІЯ ВЕКТОРНИХ ПОЛІВ 27
3.1. Типи полів 27
3.2. Теорема Кельвіна 29
3.3. Кінематичні теореми Гельмгольца 30
Запитання для самоперевірки 32
ЛЕКЦІЯ 4 33
ТЕНЗОР 33
4.1. Загальне поняття тензора 33
4.2. Дії над тензорами 35
4.3. Інваріанти тензора другого рангу 36
4.4. Головні значення і головні напрямки симетричних тензорів другого рангу 37
Ілюстративна задача 38
Запитання для самоперевірки 39
Задачі для самостійного розв'язання 40
ЛЕКЦІЯ 5 42
КІНЕМАТИКА СУЦІЛЬНОГО СЕРЕДОВИЩА 42
5.1. Швидкості в обмежено малій області суцільного середовища 42
5.2. Теорема Гельмгольца 43
5.3. Тензор швидкостей деформації і його властивості 44
5.4. Геометричні співвідношення Коші 49
5.5. Тензор деформацій 50
Ілюстративна задача 51
Запитання для самоперевірки 51
Задачі для самостійного розв'язання 52
ЛЕКЦІЯ 6 54
СИЛИ, ЩО ДІЮТЬ У СУЦІЛЬНОМУ СЕРЕДОВИЩІ 54
6.1. Класифікація сил. Масові, об'ємні і поверхневі сили 54
6.2 Тензор напружень 56
Ілюстративна задача 57
6.3. Рівняння нерозривності для багатокомпонентних сумішей 58
6.4. Рівняння нерозривності у випадку процесів з дифузією 60

6.5. Закон про зміну кількості руху суцільного середовища 61
Запитання для самоконтролю 63
Задачі для самостійного розв'язування 63
ЛЕКЦІЯ 7 65
ОСНОВНІ ЗАКОНИ МСС 65
7.1. Класичний закон про зміну моменту кількості руху 65
7.2. Закон про зміну моменту кількості руху 66
7.3 Закон про зміну кінетичної енергії суцільного середовища 69
7.4. Метод контрольних поверхонь (об'ємів) 71
Ілюстративні задачі 74
Запитання для самоперевірки 75
ЛЕКЦІЯ 8 76
ПОНЯТТЯ ПРО КРИВОЛІНІЙНІ ОРТОГОНАЛЬНІ СИСТЕМИ КООРДИНАТ 76
8.1. Інваріантність тензорів відносно вибору системи координат, метрика простору 76
8.2. Метричні величини криволінійної ортогональної системи координат 77
8.3. Основні диференціальні оператори криволінійної ортогональної системи координат 78
8.4. Компоненти тензорів та рівняння МСС у криволінійній ортогональній системі координат 80
Ілюстративні задачі 82
Запитання для самоперевірки 83
Задачі для самостійного розв'язання 83
ЛЕКЦІЯ 9 84
РЕОЛОГІЯ СУЦІЛЬНИХ СЕРЕДОВИЩ 84
9.1. Предмет реологія 84
9.2. Ідеальна рідина 85
9.3. Рівняння Ейлера 87
9.4. В'язка ньютонівська рідина 89
ЛЕКЦІЯ 10 95
РЕОЛОГІЯ СУЦІЛЬНИХ СЕРЕДОВИЩ 95
10.1. Реологічне рівняння для в'язкої ньютонівської рідини 95
10.2. Рівняння Нав'є-Стокса для нестисливої рідини 95
10.3. Ньютонівські рідини 96
Ілюстративна задача 100
Запитання для самоперевірки 101
Задачі для самостійного розв'язання 101
ЛЕКЦІЯ 11 103
ТЕОРІЯ ЛІНІЙНОГО ПРУЖНОГО ТІЛА 103
11.1. Зв'язок компонентів напружень з компонентами деформацій 103
11.2. Різні вирази узагальненого закону пружності 105
11.3. Закон Гука для октаедричного зсуву 106
11.4. Закон пружної зміни об'єму 108
11.5. Закон пружної зміни форми 109
11.6. Питома потенціальна енергія деформації 112
11.7. Вплив температурного поля на пружне середовище 114
11.8. Закон пружності для анізотропного тіла 115
11.9. Про різні гіпотези наступу граничного пружного або пластичного стану в точках суцільного середовища 117
Запитання для самоперевірки 120
ЛЕКЦІЯ 12 121
ТЕОРІЯ НЕЛІНІЙНОГО ТА ПРУЖНО-ПЛАСТИЧНОГО ТІЛА 121
12.1 Основні передумови нелінійної теорії пружності 121

12.2. Наслідки з основної передумови – фізичні рівняння нелінійної теорії пружності і теорії пластичності ... 126
12.3. Узагальнення законів пружних і пластичних деформацій ... 128
12.4. Частковий випадок – ідеально пластичне тіло ... 130
Запитання для самоперевірки ... 132
ЛЕКЦІЯ 13 ... 133
ЛІНІЙНА І НЕЛІНІЙНА В'ЯЗКО-ПРУЖНЯ І В'ЯЗКО-ПЛАСТИЧНАТЕОРІЯ СЕРЕДОВИЩА ... 133
13.1 Основні поняття в теорії повзучості ... 133
13.2. Класифікація фізичних середовищ і рівнянь, що описують закони їх деформування ... 137
13.3. Зв'язок компонентів напружень з компонентами деформацій для ідеально-в'язкого середовища ... 139
13.4. Зв'язок компонентів напружень з компонентами деформацій і їх швидкостей для лінійного пружно-в'язкого середовища ... 141
Запитання для самоперевірки ... 143
ЛЕКЦІЯ 14 ... 144
ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ В ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ, ПЛАСТИЧНОСТІ І ПОВЗУЧОСТІ ... 144
14.1. Загальні положення ... 144
14.2. Рівняння лінійної теорії пружності і методи їх розв'язання ... 147
14.3. Рішення задач теорії пружності в переміщеннях ... 151
1.4. Рішення задач теорії пружності в напруженнях ... 153
14.5. Вплив температурного поля ... 155
Запитання для самоперевірки ... 156
ЛЕКЦІЯ 15 ... 157
ПЛОСКА ЗАДАЧА ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ... 157
15.1. Частковий випадок - плоский напружений стан ... 157
15.2. Метод сил ... 160
15.3. Частковий випадок - плоска деформація ... 161
15.3. Функція напружень для плоскої задачі ... 163
15.4. Часткові випадки функції напружень ... 165
15.5. Узагальнений плоский напружений стан. Погонні зусилля ... 167
15.6. Граничні умови для функції напружень ... 168
Запитання для самопервірки ... 170
Завдання для самостійного розв'язування ... 171
РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА ... 172

ВСТУП

Атомно-молекулярна будова матерії є достеменно встановленим фактом. При достатньому її збільшенні з'ясовуємо, що певне тіло, наприклад шматок алюмінію, складається з дискретних атомів алюмінію, упакованих у певному повторюваному порядку, який утворює кристалічну решітку. При подальшому збільшені встановимо, що атом, в свою чергу, складається з ядра, утвореного з протонів і нейтронів, навколо якого обертаються електрони. Отже, матерія не є неперервною. У той же час повсякденний досвід показує, що фізичний простір, в якому ми живимо, є неперервним, а математичні закони стверджують, що між двома точками у просторі, відстань між якими може бути як завгодно малою, завжди знайдеться ще одна точка. Отже, зрозуміло, що коли розглядається тіло, яке «займає» певну частину простору , то виявляється, що воно не повністю «заповнює» простір, який воно займає. Проте, якщо вважати справедливою концепцією суцільності матерії, то необхідно проігнорувати дискретну структуру матеріальних тіл і припустити, що субстанція таких тіл розподілена неперервним суцільним чином в частинах простору, де тіла локалізовані. Прийняти *гіпотезу суцільності* означає вважати справедливим припущення, що при нескінченному зменшенні об'єму він зберігатиме фізичні властивості початкового тіла. Відповідно, можна розглядати такі властивості, як густина і швидкість, у будь-якій точці частини простору, зайнятій тілом.

Модель суцільного середовища є надзвичайно важливою для механіки з двох причин. По-перше, вона дуже зручна і надійна при вивченні великих масивних тіл з алюмінію, сталі, бетону тощо, для яких характерні розміри набагато перевищують розміри молекул. По-друге, наше знання механічної поведінки матеріалів практично повністю ґрунтується на експериментальних даних, отриманих для відносно великих (макроскопічних) зразків.

Отже, механікою суцільних середовищ, називають розділ науки, в якому кінематична і механічна поведінка матеріалів і тіл аналізується на основі гіпотези суцільності.

Вся тематика механіки суцільних середовищ розділяється на дві основні частини. В першій основній увага приділяється виведенню фундаментальних рівнянь, які справедливі для всіх суцільних тіл і середовищ. Ці рівняння ґрунтуються на тих універсальних законах фізики, як закони збереження маси, імпульсу, моменту імпульсу, енергії тощо. В другій частині розвиваються так звані визначальні рівняння, що характеризують поведінку певних ідеалізованих матеріалів (напевно, найвідоміші приклади таких матеріалів – це потужне тіло і в'язка рідина). Ці рівняння виступають і як основний механізм, і як предмет дослідження в теоріях пружності, пластичності, в'язко пружності і механіці рідини.

В даному посібнику, як у вступі до предмету, приймаються ще два додаткових припущення, крім гіпотези суспільності. По-перше, матеріал вважається *однорідним,* тобто таким, що має ідентичні властивості в будь-якій своїй точці. По-друге, матеріал вважається ізотропним відносно певних механічних властивостей, тобто ці властивості ідентичні незалежно від в напрямку в даній точці простору.

Посібник задумано як основу для підготовки до лекцій з механіки суцільних середовищ, що вміщує теоретичні відомості, додатковий матеріал і задачі.
Студентам він допоможе краще засвоїти лекції, самостійно навчатись, готуватись до іспитів, практичних і лабораторних занять.

ЛЕКЦІЯ 1

ПРЕДМЕТ МЕХАНІКИ СУЦІЛЬНИХ СЕРЕДОВИЩ

1.1. Загальна схема пізнання в природних науках

Рис. 1.1.

Головне в процесі пізнання – дослідити певне фізичне явище. Суть механіки як науки полягає не тільки в дослідженні явища як такого, а й у побудові відповідних фізичних моделей цього явища. Дійсно, при дослідженні довільного кола явищ надзвичайно важливо встановити основні закони або принципи, за допомогою яких можна пояснити всі відомі явища з досліджуваного кола, а також спрогнозувати нові. Такий підхід до вивчення явищ природи отримав назву ***методу принципів***. В основі методу принципів лежить створення людиною у своїй уяві відповідної моделі, яка складається з образу об’єктів, явищ, ситуацій і зв’язків між ними , а також правил оперування ними.

Основне завдання у зв’язку з цим полягає у тому, щоб створити у нашій уяві таку картину фізичного світу, яка б найповніше відтворювала властивості світу і забезпечувала такі самі співвідношення між елементами моделі, як і між елементами зовнішнього світу. Однак врахувати всі різноманітні зв’язки між

явищами і предметами неможливо навіть теоретично. Тому при створенні моделей беруться до уваги лише суттєві для даного кола явищ властивості і зв'язки. Врахування лише суттєвих факторів зводиться до абстрагування від реальної ситуації і створення моделі в межах прийнятих абстракцій. Поза цими межами модель може стати незастосовною і навіть беззмістовною. Наприклад, необхідно дослідити процес входження космічного корабля з гіперзвуковою швидкістю в густоті шари атмосфери. При цьому спостерігається утворення ударної хвилі. За фронтом ударної хвилі швидкість уже значно менша гіперзвукової, бо на фронті кінетична енергія необоротно перетворюється у теплову (рис. 1.2). При цьому відбуваються ще й інші процеси: дисоціація й іонізація газу.

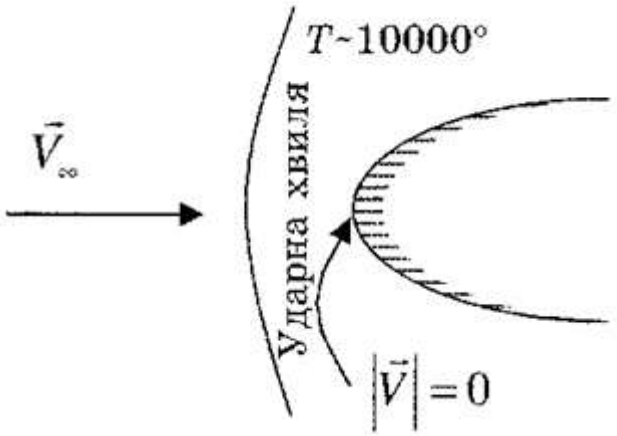


Рис.1.2

Отже, необхідно сформулювати адекватну математичну модель з врахуванням всіх суттєвих процесів, що протикають у даному випадку. Вибір цих суттєвих процесів і факторів є проявом внутрішніх проблем механіки як науки. Часто для нових середовищ і об'єктів необхідно ще встановлювати нові закони природи, описувати ці об'єкти (причому закони ці відрізняються від законів класичної механіки).

Механіка суцільних середовищ (МСС) – досить широка частина механіки, що вивчає рух газоподібних, рідких та твердих деформівних тіл.

В теоретичній механіці вивчають рух матеріальної точки, дискретних систем матеріальних точок і абсолютно твердого тіла. В МСС розглядається рух тіл, які

заповнюють простір неперервно, суцільним чином і відстані між точками яких під час руху змінюється. В МСС розглядаються також поля: електромагнітне, випромінювання, гравітаційне.

В МСС розробляються методи зведення механічних задач до математичних.

1.2. Модель МСС. Основні гіпотези

Тіло **–** сукупність молекул і атомів або інших частинок. Об'єм, який займає тіло, набагато більший за об'єм частинок (речовин). Тобто, по суті, тіла складаються з пустоти, і в той же час з практично малих об'ємах простору, зайнятого тілом, знаходиться велика кількість частинок, що знаходиться в постійному хаотичному русі і взаємодіють між собою.

Додатково необхідно мати на увазі, що складна будова молекул і сили взаємодії між ними не завжди відомі. Слідкувати за кожним рухом елементарної частинки неможливо, та це й не є необхідним для характеризації руху і деформування тіла.

У МСС використовують модель ***континіуму***: матеріальні точки суцільним чином заповнюють частину простору. На відміну від абсолютно твердого тіла відстані між цими точками в процесі руху можуть змінюватись, тобто тіло може деформуватись (змінювати свої об'єм і форму).

Модель наближена і приймається тоді, коли характерний розмір макрооб'єкта L набагато перевищує характерний розмір мікрооб'єкта l: $L>>l$.

Розглянемо деякий об'єм τ, обмежений поверхнею σ (рис. 1.3). В цьому об'ємі τ знаходиться певне число мікрочастинок.

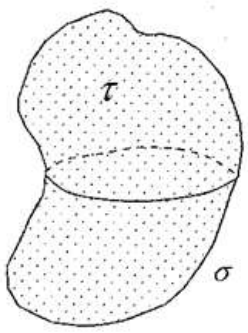


Рис. 1.3

Середню густину і густину в точці визначимо відповідно за формулами

$$\langle\rho\rangle=\frac{\sum_{I=1}^{n} m_I}{\tau}\ \frac{\sum_{I=1}^{n} m_I}{\tau}\ ,\ \langle\rho\rangle=\lim_{\tau\to 0}\frac{\sum_{I=1}^{n} m_I}{\tau},$$

де m_i - маса мікрочастинки, n – їх кількість і об'єм в τ. Густина при $\tau \to 0$ поводиться так, як показано на рис. 1.4.

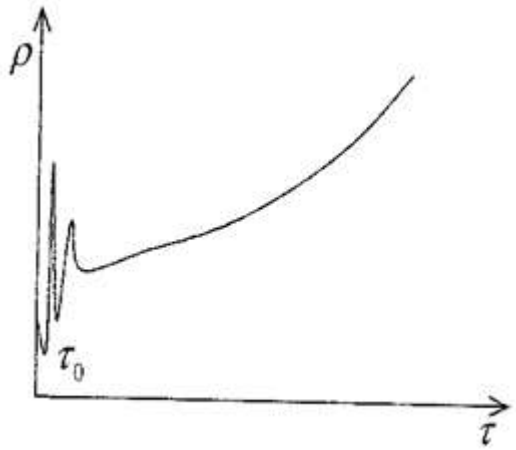


Рис.1.4

Якщо τ стає зрівняним з l^3, то будуть спостерігатися стрибки у залежності ρ від об'єму. Тому малий об'єм стягується не в математичну, а в фізичну точку. Тобто яку б маленьку частку тіла ми не взяли, в ній все одно налічується дуже багато частинок. Отже, густина в точці остаточно визначимо як наступну границю

$$\langle\rho\rangle=\lim_{\substack{I\to 0\\ \tau\to\tau_0}}\frac{\sum_{I=1}^{n} m_I}{\tau},$$

Швидкість суцільного середовища в точці визначають за наступною формулою:

$$\vec{V}=\lim_{\tau\to 0}\frac{\sum_{\tau=1}^{n} m_i V_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}.$$

В МСС для побудови відповідних фізичних моделей використовують наступні гіпотези:

1. ***Гіпотеза суцільності*:** тіла (середовища) заповнюють простір суцільним чином. З цією гіпотезою пов'язана ***гіпотеза неперервності*:** характеристики руху і стану суцільного середовища є неперервними функціями просторових координат і часу. Такий підхід дає можливість використовувати апарат неперервних функцій, диференціальне і інтегральне числення.

2. ***Простір – евклідовий***.

3. ***Час – абсолютний***.

Будемо розглядати рух суцільного і неперервного середовища – континууму – в евклідовому просторі і при цьому користуватись абсолютним часом.

1.3. Способи описання руху суцільного середовища

Існують два способи описання суцільного середовища: спосіб Лагранжа і спосіб Ейлера.

Спосіб Лагранжа

Механічне явище нам відоме і повністю визначене, як що визначений закон руху всіх точок середовища, тобто

$$\vec{r} = \vec{r}\ (t,\ \vec{r}_0)\ ,$$

де $\vec{r}$ - радіус-вектор довільної точки середовища, t час і $\vec{r}_0$ - положення матеріальної точки в деякий фіксований момент часу.

Швидкість $\vec{V}$ і прискорення $\vec{a}$ частки в положенні $\vec{r}_0$ визначають за формулами

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt}\ \Big|_{\vec{r}_0},\ \vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\ \Big|_{\vec{r}_0}.$$

Отже, при лагранжевому способі описання руху розглядається рух індивідуальних точок суцільного середовища. Якщо момент часу t фіксований, то маємо розподіл точок у просторі для даного конкретного моменту часу, якщо ж радіус-вектор $\vec{r}_0$ фіксований, то маємо можливість прослідкувати за рухом конкретної точки. Такий спосіб описання складний, детальний, але дуже часто використовується при формулюванні фізичних законів.

Спосіб Ейлера

Механічне явище нам відоме і повністю визначене, якщо задане поле швидкості

$$\vec{V} = \vec{V}\,(t,\ \vec{r}\,),$$

де t - час, $\vec{r}$ - положення точки простору, в якій нас цікавить швидкість.

При цьому визначається не історія руху індивідуалізованих точок суцільного середовища, а те, що відбувається в різні моменти часу в даних геометричних точках простору. Так, спостерігаючи рух води в річці, можна слідкувати за рухом кожної частки води від витоку до гирла (за Лагранжем) або спостерігати зміну течії води в певних місцях річки (за Ейлером).

Якщо момент часу t фіксований, то визначним є поле швидкості $\vec{V}$ в даний момент часу. Якщо зафіксувати радіус-вектор певної точки простору $\vec{r} = \vec{r}_0$, то маємо змогу спостерігати за зміною швидкості в даній точці.

Знайдемо правила переходу від ейлерових координат до лагранжевих і навпаки.

Нехай задана деяка характеристика в змінних Лагранжа $A=A(t,\ \vec{r}_0)$. Знаючи $\vec{r} = \vec{r}\,(t,\ \vec{r}_0)$, розв'язуємо ці рівняння відносно $\vec{r}_0$ і знаходимо $\vec{r}_0 = \vec{r}_0(t,\ \vec{r}\,)$. Підставимо $\vec{r}_0$ у вираз для A і отримаємо $A=A(t,\vec{r}_0(\vec{r}\,)) = A'\ A'(t,\ \vec{r}\,)$, тобто формулу описання руху тіл у змінних Ейлера. Зазначимо, що відшукання оберненої функції $\vec{r}_0 = \vec{r}_0(t,\ \vec{r}\,)$ є основною задачею при переході від лагранжевого способу описання до ейлерового.

Здійснимо зворотній перехід. Нехай задане поле швидкостей $\vec{V} = \vec{V}(\,t,\ \vec{r}\,)$, де $d\vec{r}/dt = \vec{V}\,(t,\ \vec{r}\,)$. Розв'язуючи останнє диференціальне рівняння, отримаємо $\vec{r} = \vec{r}(t,\vec{C})$, де постійне інтегрування $\vec{C}$, є не що інше, як положення матеріальної точки в деякий фіксований момент часу, тобто $\vec{C} = \vec{r}_0$.

Описання руху суцільного середовища в рамках підходів Лагранжа і Ейлера є повністю еквівалентними.

1.4. Індивідуальна, локальна і конвективна похідні

Нехай рух описується в змінних Лагранжа $\vec{r} = \vec{r}(t, \vec{r}_0)$. Остання формула визначає закон руху. Прискорення знаходиться подвійним диференціюванням по часу

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}.$$

Якщо ж задано рух у змінних Ейлера $\vec{V} = \vec{V}(t, \vec{r})$, то задане поле швидкості. Знайдемо прискорення для цього випадку. Нехай в декартовій прямокутній системі координат *(0xyz)* закон руху має вигляд $\vec{V} = \vec{V}(t, x, y, z)$. Природно перейти до лагранжевих змінних і взяти похідну часу

$$\vec{V} = \vec{V}(t, x(t, x_0, y_0, z_0\ z_0), y(t, x_0\ x_0, y_0, z_0), z(t, x_0, y_0, z_0)),$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} + \frac{dV}{dx} \times \frac{dx}{dt}\Big|_{\vec{r}_0} + \frac{d\vec{V}}{dy} \times \frac{dy}{dt}\Big|_{\vec{r}_0} + \frac{d\vec{V}}{dz} \times \frac{dz}{dt}\Big|_{\vec{r}_0} = \frac{d\vec{V}}{dt} + u\frac{d\vec{V}}{dx} + v\frac{d\vec{V}}{dy} + w\frac{d\vec{V}}{dz},$$

$$u = \frac{dx}{dt}\Big|_{\vec{r}_0},\ v = \frac{dy}{dt}\Big|_{\vec{r}_0},\ w = \frac{dz}{dt}\Big|_{\vec{r}_0},$$

де $\frac{d\vec{V}}{dt}$ - індивідуальна похідна, бо береться при фіксованому $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$.

Правило обчислення індивідуальної похідної в змінних Ейлера має вигляд

$$\frac{d}{dt} = \frac{d}{dt} + \frac{d}{dx}u + \frac{d}{dy}v + \frac{d}{dz}w. \quad \frac{d}{dt} = \frac{d}{dt} + \frac{d}{dx}u + \frac{d}{dy}v + \frac{d}{dz}w.$$

Індивідуальна (повна, субстанціональна) похідна по часу дорівнює сумі ***локальної*** похідної (перший доданок) і ***конвективної похідної*** (другий, третій і четвертий доданки часу) по часу.

Локальна (місцева) похідна характеризує явну залежність змінної від часу в даній точці простору. Якщо поле нестаціонарні то вона відмінна від 0, якщо ж стаціонарне, то локальна похідна дорівнює 0.

В загальному випадку індивідуальна похідна не дорівнює локальній, вони відрізняються на величину, що називається конвективною похідною. В загальному випадку конвективна похідна не дорівнює 0, вона може дорівнювати 0 або при відсутності руху, або поле однорідне (однакове в кожній точці простору).

Знайдемо компоненти прискорення:

$$a_x = \frac{du}{dt} = \frac{du}{dt} + \frac{du}{dx}u + \frac{du}{dy}v + \frac{du}{dz}w,$$

$$a_y = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dt} + \frac{dv}{dx}u + \frac{dv}{dy}v + \frac{dv}{dz}w,$$

$$a_z = \frac{dw}{dt} = \frac{dw}{dt} + \frac{dw}{dx}u + \frac{dw}{dy}v + \frac{dw}{dz}w.$$

Формули справедливі тільки в декартовій системі координат.

У випадку скалярного поля (наприклад, поля температур $T=T(t,\ \vec{r}\,)$) отримуємо:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{dT}{dt} + \frac{dT}{dx}\left(\frac{dx}{dt}\right) + \frac{dT}{dy}\left(\frac{dy}{dt}\right) + \frac{dT}{dz}\left(\frac{dz}{dt}\right),$$

або

$$\frac{dT}{dt} = \frac{dT}{dt} + \frac{dT}{dx}u + \frac{dT}{dy}v + \frac{dT}{dz}w = \frac{dT}{dt} + \frac{dT}{dx_i}v_i, i = 1,2,3.$$

Ілюстративна задача

Задача. Поле швидкостей задане полем $\vec{V} = x_1^2 t\vec{i} + x_2 t^2 \vec{j} + x_1 x_3 t\vec{k}$. Визначити швидкість і прискорення частинки, що знаходиться в момент часу *t=1* в точці *(1;3;2)*.

Розв'язок:

$$\vec{V} = \vec{\imath} + 3\vec{\jmath} + 2\vec{k},$$

$$\vec{a} = x_1^2\vec{i} + 2x_2\vec{j} + x_1x_3\vec{k} + \left(x_1^2 t\frac{d}{dx_1} + x_2t^2\frac{d}{dx_2} + x_1x_3t\frac{d}{dx_3}\right) \times (x_1^2t\vec{i} + x_2t^2\vec{j}$$

$$+ x_1x_3t\vec{k}) = (x_1^2 + 2x_1^3t^2)\vec{i} + (2x_2t + x_2t^4)\vec{j} + (x_1x_3 + 2x_1^2x_3t^2)\vec{k}.$$

Після підстановки значень координат і часу отримуємо $\vec{a} = 3\vec{i} + 9\vec{j} + 6\vec{k}$.

Запитання для самоперевірки.

1. Що є предметом механіки суцільного середовища.
2. Охарактеризувати загальну схему пізнання в природних науках.
3. Визначити модель МСС.
4. Розглянути основні гіпотези.
5. Які існують способи описання руху суцільного середовища.

Задачі для самостійного розв'язання

1. Поле швидкостей задане полем $\vec{V} = 2x^2t\vec{i} + 3yt^2\vec{j} + xzt\vec{k}$. Визначити швидкість і прискорення частинки, що знаходиться в момент часу *t=1* в точці *(*1;4;2*)*.

2. Рух середовища відбувається за законом

$$x_1 = \xi_1\left(1 + \frac{t}{\tau}\right), x_2 = \xi_2\left(1 + 2\frac{t}{\tau}\right), x_3 + \xi_3\left(1 + \frac{t^2}{\tau^2}\right), \tau = const$$

Знайти поля швидкості і прискорення в лагранжевих координатах.

3. Ввести лагранжеві координати і знайти закон руху середовища, якщо він відбувається з полем швидкості:

$$V_1 = \frac{x_t}{t+\tau}, V_2 = \frac{2tx_2}{t^2+\tau^2}, V_3 = \frac{3t^2x_3}{t^3+\tau^3}, \tau = const\rangle 0.$$

4. Знайти поля швидкості і прискорення при ейлеревому описанні, якщо рух середовища відбувається за законом тривісного розтягу тіла:

$$x_1 = a(t)\xi_1, x_2 = b(t)\xi_2, x_3 = c(t)\xi_3.$$

5. Рух середовища відбувається з полем швидкості $V_1 = kx_1,\ V_2 = -kx_2,\ V_3 = 0,\ k = const$ і полем густини $p = p_0 + Ax_2e^{kt},\ p_0, A = const$.

Знайти поля швидкості і прискорення в лагранжевих координатах.

6. Ввести лагранжеві координати і знайти закон руху середовища, якщо він відбувається з полем швидкості:

$$V_1 = \frac{xt}{t+\tau}, V_2 = \frac{4t^2 y}{t^2+\tau^2}, V_3 = \frac{5t^3 x_3}{t^3+\tau^3}, \tau = const\rangle 0.$$

ЛЕКЦІЯ 2

ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ПОЛЯ

2.1. Векторне поле

В системі координат можна виділити деяку область і кожній точці цієї області поставити у відповідність число, наприклад, температуру *T*, або вектор, наприклад, швидкість $\vec{V}$. Сукупність значень тієї чи іншої величини, заданих в кожній точці розглядуваної області, називають ***полем*** цієї величини. Якщо величина скалярна, то і поле називають ***скалярним*** (поле температур, поле густин); якщо розглядувана величина векторна, то поле ***векторне.*** Вектор має три компоненти, тому будь-яке векторне поле рівнозначне трьом полям його проекцій.

Векторна лінія поля –це геометричне місце точок, які мають наступну властивість: у кожній точці цієї лінії дотична до неї колінеарна вектору цього поля.

Рівняння векторної лінії в загальному вигляді:

$$\frac{\delta x}{a_x} = \frac{\delta y}{a_y} = \frac{\delta z}{a_z},$$

де $\delta x, \delta y, \delta z$ - просторові прирости координат. Поняття векторної лінії має зміст лише при фіксованому часі. Якщо поле явно залежить від часу, то його називають нестаціонарним. Векторні лінії нестаціонарного поля можна розглядати тільки у фіксовані моменти часу.

Векторні лінії поля швидкостей називають ***лініями току***, а векторні поля вихорів – ***вихровими лініями.***

Векторні лінії можна спостерігати візуально: рідина з підмішаними порошками, рідина з бульбашками повітря, магнітне поле.

Нехай є деякий об’єкт, що рухається рівномірно і прямолінійно в суцільному середовищі (рис. 2.1). Виберемо систему координат *0xy*, як показано на малюнку. Для вибраної системи координат переміщення об’єкта буде породжувати поле швидкості $\vec{V} = \vec{V}(t, \vec{r})$, причому це поле буде ***нестаціонарним.*** Виберемо систему

$0'x'y'$ $0'x'y'$, пов'язану з об'єктом. У системі відліку поле швидкостей буде ***стаціонарним*** $\vec{V} = \vec{V}(\vec{r})$.

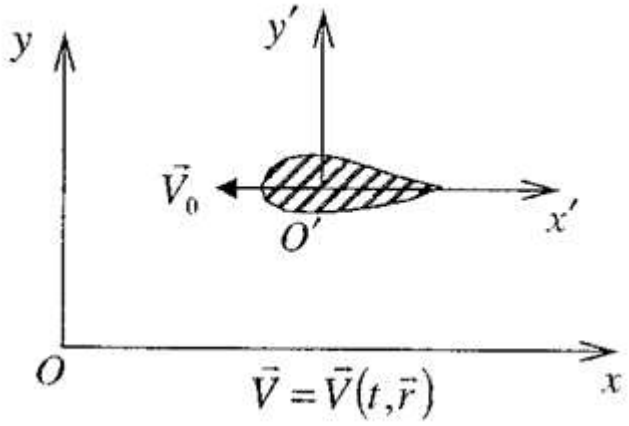


Рис.2.1

Поглянемо на лінії току зору стаціонарності і не стаціонарності поля. Позначимо $\delta(\bullet)$- приріст певної фізичної величини в просторі, а $d(\bullet)$- приріст цієї величини в часі (наприклад, для радіус-вектора $\vec{r}$ ці прирости позначимо наступним чином $\delta\vec{r}$ і $d\vec{r}$).

Запишемо рівняння ліній току

$$\frac{\delta x}{u(t,x,y,z)} = \frac{\delta y}{v(t,x,y,z)} = \frac{\delta z}{w(t,x,y,z)}.$$

Представимо в аналогічній формі рівняння траєкторій частинок

$$\frac{dx}{u(t,x,y,z)} = \frac{dy}{v(t,x,y,z)} = \frac{dz}{w(t,x,y,z)} = dt.$$

Лінії току в загальному випадку не співпадають з траєкторіями частинок. Але якщо поле швидкостей стаціонарне, то лінії току і траєкторії руху частинок рідини співпадають.

Аналогічний висновок справедливий і для вихрових ліній. Розв'язок задачі Коші для рівнянь єдиний, якщо праві частини і їх похідні по координатах неперервні.

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{v(t,x,y,z)}{u(t,x,y,z)} \text{ і } \frac{\delta z}{\delta x} = \frac{w(t,x,y,z)}{u(t,x,y,z)},$$

Таким чином, через кожну точку можна провести єдину лінію току **(*теорема про одиничність лінії току).***

Але якщо будь-яка компонентна швидкість дорівнює нулю або нескінченності в деякій точці, то в цій точці порушується теорема про єдність лінії току. Ця точка ***особлива*,** або ***критична.*** В таких точках векторні лінії току можуть перетинатись.

Нехай у просторі з суцільним середовищем проведений замкнутий контур, який сам себе не перетинає. Якщо в нього нема особливих точок, то в силу неперервності характеристик векторні лінії утворюють ***векторну поверхню (поверхню току**, або **вихрову поверхню).***

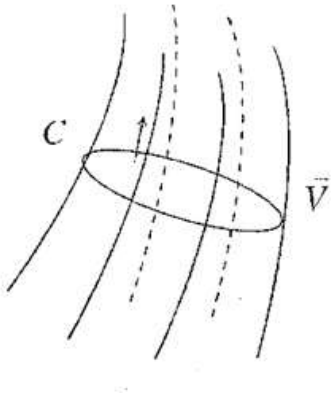


Рис. 2.2

Частину суцільного середовища, яка локалізована векторною поверхнею, називають ***векторною трубкою (трубкою току, вихровою трубкою*)** (рис. 2.2). Аналізуючи трубки току, можна скласти певну картину про рух суцільного середовища.

2.2. Похідна за напрямком. Градієнт

Якщо деяка скалярна функція T задана як функція змінних Ейлера, то в будь-який момент часу можна розглянути поверхні $T=T\ (x,y,z,t\ )=const$, які називають ***поверхнями рівня*,** або ***еквіпотенціальними поверхнями*.** Наприклад, якщо T – це

температури, то поверхні називають ***ізотермічними,*** тобто поверхнями рівної температури.

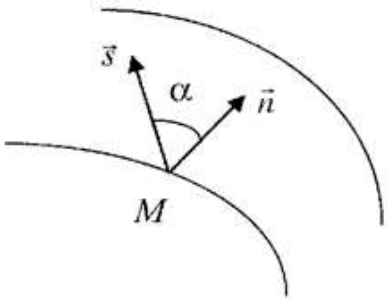


Рис. 2.3

Дослідимо, як змінюється поле T від точки M в напрямку, що визначається вектором $\vec{s}$ (рис.2.3). Величину похідної T за напрямком $\vec{s}$ визначимо наступним чином: $\lim\limits_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta T}{\Delta s}=\frac{dT}{ds}$.

Якщо напрям $\vec{s}$- дотична до поверхні рівня, то $\frac{dT}{ds}=0$. Визначимо величину похідної в напрямку нормалі $\vec{n}$. Оскільки $\Delta n=\Delta s\cdot cos\alpha,\alpha$ - кут між $\vec{n}$ і $\vec{s}$, то $\frac{dT}{ds}=\frac{dT}{dn\cos\alpha}$, де $\frac{dT}{dn}$- похідна в напрямку нормалі $\vec{n}$ до поверхні рівня. Звідки зрозуміло, що величина $\frac{dT}{ds}$ набуває максимального значення при $\alpha=0$, тобто у напрямку нормалі.

Введемо вектор, направлений по нормалі $\vec{n}$ в бік зростання T, рівний по величині $\frac{dT}{dn}$. Такий вектор називають ***градієнтом*** поля T. Позначимо його **grad** T. Тоді **grad** $T=\frac{dT}{dn}\overset{\to 0}{n}$, де $\overset{\to 0}{n}$ - одиничний вектор нормалі $\vec{n}$, що направлений в бік зростання T.

Абсолютна величина градієнта температури **grad** T більша там, де ізотермічні поверхні розташовані густіше.

Із співвідношення $\frac{dT}{ds} = \frac{dT}{dn\cos\alpha}$ випливає, що проекція градієнта **grad** T на будь-який напрямок $\vec{s}$ є похідною за цим напрямком

$$(gradT)_{\vec{s}} = \frac{dT}{ds}.$$

Тоді проекції градієнта на відповідні осі декартової системи координат запишуться у вигляді :

$$(gradT)_x = \frac{dT}{dx},\ (gradT)_y = \frac{dT}{dy},\ (gradT)_z = \frac{dT}{dz}.$$

Сам вектор градієнта в декартовій системі координат з ортами $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ представимо так:

$$gradT = \frac{dT}{dx}\vec{i} + \frac{dT}{dy}\vec{j} + \frac{dT}{dz}\vec{k}.$$

Часто оператор градієнта grad позначають символом $\vec{\nabla}$

$$\vec{\nabla} = \vec{i}\,\frac{d}{dx} + \vec{j}\,\frac{d}{dy} + \vec{k}\,\frac{d}{dz}.$$

Тоді правило взяття індивідуальної похідної в змінних Ейлера має вигляд:

$$\frac{d}{dt} = \frac{d}{dt} + \vec{V}\cdot\vec{\nabla}$$

або для випадків полів швидкості і температури

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d\vec{V}}{d\mathrm{t}} + (\vec{V}\cdot\vec{\nabla})\vec{V},\ \ \frac{dT}{dt} = \frac{dT}{dt} + \vec{V}\cdot\vec{\nabla}T.$$

2.3. Дивергенція та ротор вектора

Нехай у просторі задано векторне поле $\vec{a}(t,\vec{r})$ і задана поверхня σ.

Потоком векторного поля через розглядувану поверхню називають величину

$$П = \int_\sigma \bar{a}\delta\bar{\sigma} = \int_\sigma a\cdot cos\,(\vec{a},\vec{n})\delta\sigma = \int_\sigma a_n\,\delta\sigma,$$

де $\delta\vec{\sigma}$ - вектор, модуль якого $\delta\sigma$, а напрямок співпадає з напрямком зовнішньої нормалі до розглядуваної поверхні.

Особливий випадок – розглядувана поверхня є замкненою. Тоді визначає суму джерел і стоків усередині поверхні.

Дивергенцією векторного поля в точці *M* називають величину

$$\mathrm{div}\vec{a}(M) = \lim_{\tau\to 0}\frac{\Pi}{\tau},$$

де τ - об'єм простору, обмежений поверхнею σ.

Дивергенція характеризує потужність джерел чи стоків векторного поля.

Інші форми запису дивергенції векторного поля:

$$\mathrm{div}\,\vec{a} = \frac{da_x}{dx} + \frac{da_y}{dy} + \frac{da_z}{dz},$$

або

$$\mathrm{div}\,\vec{a} = \vec{\nabla}\cdot\vec{a}\,.$$

Теорема Остроградського – Гаусса: *потік вектора через замкнену поверхню* σ *дорівнює інтегралу по об'єму* τ *, який обмежує ця поверхня, від дивергенції цього вектора*

$$\int_\sigma a_n\,\delta\sigma = \int_\tau \mathrm{div}\vec{a}\,\delta\tau.$$

Нехай у просторі задано векторне поле $\vec{a}(t,\vec{r})$ $\vec{a}(t,\vec{r})$ і задана деяка замкнена крива Г (рис.2.4)

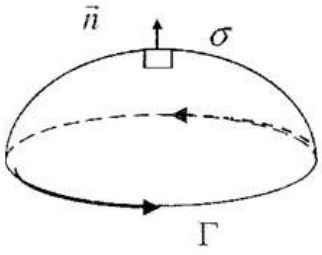


Рис. 2.4

Циркуляцією *векторного поля вздовж розглядуваної кривої називають величину*

$$C_{\Gamma} = \oint_C \vec{a}\,\delta\vec{r} = \int_C a_x dx + a_y dy + a_z dz,$$

де $\delta\vec{r}$ - одиничний вектор, дотичний до кривої.

Циркуляція векторного поля вздовж кривої характеризує обертальну властивість поля вздовж цієї кривої.

Завихренням векторного поля в точці *M* називають границю $\lim\limits_{\sigma \to 1} \dfrac{C_{\Gamma}}{\sigma}$, де σ - площа площадки в середині контуру Г, що обирається згідно з напрямком обходу даного контуру.

Ротором (вихором) *векторного поля в точці M називають вектор, що має наступну властивість: завихрення поля в точці M навколо будь-якого напрямку* $\vec{n}$ *дорівнює проекції вектора ротора на цей напрямок*

$$rot\,\vec{a}(M) = \left(\frac{da_z}{dy} - \frac{da_y}{dz}\right)\vec{i} + \left(\frac{da_x}{dz} - \frac{da_z}{dx}\right)\vec{j} + \left(\frac{da_y}{dx} - \frac{da_x}{dy}\right)\vec{k}.$$

Часто використовуються інші форми запису вихору:

$$rot\,\vec{a} = \begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{d}{dx} & \dfrac{d}{dy} & \dfrac{d}{dz} \\ a_x & a_y & a_z \end{matrix} \quad \text{або } rot\,\vec{a} = \vec{\nabla} \times \vec{a}$$

Для будь-якого неперервного векторного поля має місце наступна теорема.

Теорема Стокса: *потік ротора вектора через поверхню* σ *дорівнює циркуляції вектора по замкненому контуру* Г*, на якій ця поверхня опирається. (рис. 2.4).*

$$\int_Q (rot\vec{A})_n \delta\sigma = \oint_{\Gamma} \vec{A}\,\delta\vec{r}.$$

Ілюстративна задача

Задача. Знайти лінії току і траєкторії, якщо рух середовища відбувається з полем швидкості $v_1 = -\omega x_2, v_2 = -\omega x_1, v_3 = u,$ $v_1 = -\omega x_2, v_2 = -\omega x_1, v_3 = u,\ u, \omega = const.$

Розв'язок. Рівняння ліній току

$$\frac{\delta x_2}{\delta x_1} = \frac{v_2(t,x,y,z)}{v_1(t,x,y,z)} \text{ і } \frac{\delta x_3}{\delta x_1} = \frac{v_3(t,x,y,z)}{v_1(t,x,y,z)}.$$

В нашому випадку маємо

$$\frac{\delta x_2}{\delta x_1} = -\frac{x_1}{x_2} \text{ і } \frac{\delta x_2}{\delta x_1} = \frac{v_2(t,x,y,z)}{v_1(t,x,y,z)}.$$

Звідки отримуємо $x_1^2 + x_2^2 = C^2$ і $\frac{\delta x_3}{\delta x_1} = \frac{u}{\omega\sqrt{C^2 - x_1^2}}$ $\frac{\delta x_3}{\delta x_1} = \frac{u}{\omega\sqrt{C^2 - x_1^2}}$.

Розв'язок останнього рівняння $x_3 = \frac{u}{\omega C}\arccos\frac{x_1}{C}$

Аналогічно можна отримати $x_3 = \frac{u}{\omega C}\arcsin\frac{x_2}{C}$

Лінії току – гвинтові лінії на циліндрах $x_1^2 + x_2^2 = C^2$ з кроком

$2\pi C \div \frac{u}{\omega C} = \frac{2\pi\omega}{u}.$

Траєкторії визначаємо із законів руху середовища

$$\frac{dx_1}{dt} = -\omega x_2,\ \frac{dx_2}{dt} = \omega x_1,\quad \frac{d^2x_2}{dt^2} = \omega\frac{dx_1}{dt} - \omega^2 x_2,$$

Звідки $x_1 = \cos(\omega t + \varphi_0),\ x_1 = \sin(\omega t + \varphi_0),\ x_3 = ut$

Таким чином, задані рівняння описують поступальний рух зі швидкістю *u* вздовж осі x_3 і обертовий з кутовою швидкістю ω навколо цієї осі. Траєкторії руху – гвинтові лінії на циліндрах $x_1^2 + x_2^2 = C^2$.

Запитання для самоперевірки

1. Визначити похідну за напрямком.
2. Як визначається градієнт.
3. Визначити дивергенцію та ротор вектора.

Задачі для самостійного розв'язання

1. Знайти лінії току і траєкторії, якщо рух середовища відбувається з полем швидкості $v_1 = -V\sin\omega t, v_2 = Vcco\omega t, v_3 = 0, V, \omega = const$.

2. Знайти лінії току і траєкторії, якщо рух середовища відбувається з полем швидкості $v_1 = -Ax_2, v_2 = Bx_1, v_3 = 0, A, B = const \rangle 0$.

3. Довести, що лінії току і траєкторії руху співпадають, якщо рух середовища відбувається з полем швидкості

$$v_1 = \frac{x_1}{1+t},\ v_2 = \frac{2x_2}{1+t},\ v_3 = \frac{3x_3}{1+t}.$$

4. Розписати *grad(ab), div*$(a\vec{V})$*, rot grad a, div rot*$\vec{V}$.

ЛЕКЦІЯ 3

КЛАСИФІКАЦІЯ ВЕКТОРНИХ ПОЛІВ

3.1. Типи полів

Скалярне поле $\varphi = \varphi(\vec{r}, t)$ в даний момент часу називають ***однорідним***, якщо в кожній точці простору $grad\,\varphi = 0$, тобто в даний момент часу, поле не змінюється від однієї точки простору до іншої.

Векторне поле $\vec{A} = \vec{A}(\vec{r}, t)$ в даний момент часу називають ***гармонічним*,** якщо воно соленоїдальне і безвихрове.

Векторне поле $\vec{A} = \vec{A}(\vec{r}, t)$ в даний момент часу називають ***солоноїдальним (трубчастим*),** якщо в кожній точці простору виконується співвідношення $div\ \vec{A} = 0$.

Якщо $div\,rot\,\vec{B} = 0$, то у випадку солоноїдальності поля $\vec{A} = \vec{A}(\vec{r}, t)$ його можна представити як поле вихорів $\vec{A} = rot\vec{B}$. Справедливе і зворотне твердження, наприклад, поле кутової швидкості є солоноїдальним, бо $\vec{\omega} = \dfrac{rot\vec{V}}{2}$.

Векторне поле $\vec{A} = \vec{A}(\vec{r}, t)$, в даний момент часу називається ***безвихровим***, якщо в кожній точці простору виконується співвідношення $rot\,\vec{A} = 0$.

Якщо в кожній точці суцільного середовища $rot\vec{V} = 0$, то обертальна складова руху відсутня. Течії, в яких ця умова виконується, називаються ***безвихровими.***

Оскільки $rot\ grad\,\vec{a} = 0$, то у випадку безвихровості поля $\vec{A} = \vec{A}(\vec{r}, t)$ його можна представити як поле градієнтів $\vec{A} = grad\Phi,$ де Φ потенціал поля $\vec{A}$.

Через цю властивість безвихрове поле ще називають ***потенціальним*.**

Тобто будь-яке векторне поле $\vec{A}$ (*x ,y, z, t*), буде ***потенціальним,*** якщо існує деяка скалярна функція Φ(*x, y, z, t),* така, що $\vec{A} = grad\Phi(x, y, z, t)$.

Оскільки за означенням вектор-градієнт визначається як $grad\ \Phi = \vec{A}$, то він є перпендикулярним до поверхонь рівного потенціалу і набуває більших значень там, де поверхні розміщені найгустіше.

Чи завжди можна векторне поле $\vec{A}$ представити у вигляді градієнта деякої скалярної функції $\Phi(x, y, z, t)$, де $A_x = \frac{d\Phi}{dx}$, $A_y = \frac{d\Phi}{dy}$, $A_z = \frac{d\Phi}{dz}$?

Для відповіді на ці питання складемо вираз $A_X dx + A_Y dy + A_Z dz$.

Якщо поле $\vec{A}(x,y,z,t)$ потенціальне, то вираз є повним диференціалом.

Необхідна і достатня умова існування повного диференціалу записується наступним чином:

$$\frac{dA_X}{dy} = \frac{dA_y}{dx}, \quad \frac{dA_X}{dz} = \frac{dAz}{dx}, \quad \frac{dA_y}{dz} = \frac{dAz}{dy}$$

Відзначимо, що потенціальні течії є простішими для вивчення, оскільки визначаються однією скалярною функцією $\Phi(x, y, z, t)$, а не потенціальні трьома $\vec{A}_i$ (x, y, z, t), $i = 1,2,3$.

Розглянемо приклад потенціальної течії з потенціалом $\varphi = -\frac{Q}{4\pi r}$, де $Q=const$, або $Q=Q(t)$, $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Поверхнями рівного потенціалу тут є поверхня $r=const$, тобто це концентричні сфери з центром в початку координат $(0,0,0)$. Оскільки $grad\,\varphi = \vec{V}$, то вектор $\vec{V}$ перпендикулярний сферам.

Вектор $grad\,\varphi$ направлений в бік збільшення потенціалу: при $Q\rangle 0$ вектор швидкості направлений по радіус-вектору $\vec{r}$, при $Q\langle 0$ - проти $\vec{r}$, а його величина визначається за формулою $\vec{V}$ $\vec{V}=(grad\,\varphi)_{\vec{r}} = \frac{d\varphi}{dr} = \frac{Q}{4\pi r^2}$, де дужками $(\cdot)_{\vec{r}}$ позначено проекцію вектора на напрямок $\vec{r}$.

Легко пересвідчитись, що швидкість $\vec{V}$ прямує до 0, якщо $\vec{r}$ прямує до нескінченності, і навпаки, $\vec{V}$ прямує до нескінченності, якщо $\vec{r}$ прямує до 0. Ці точки називають ***критичними точками.***

При $Q\rangle 0$ відбувається витік з початку координат у всіх напрямках, тобто маємо випадок, коли в початку координат розташоване точкове просторове **джерело**, а у безмежно віддаленій точці знаходиться ***стік.***

При $Q\langle 0$ відбувається втікання в початок координат з усіх напрямків, тобто в точці *(0,0,0),* знаходиться точковий просторовий ***стік***, а у безмежно віддаленій точці розташоване ***джерело*.**

Об'єм рідини, що протікає за одиницю часу через поверхню сфери *S* деякого радіусу *r* з центром у початку координат визначається формулою:

$$\int_S \vec{V} dQ = \vec{V} \cdot 4\pi r^2 = Q.$$

Цю величину *Q* називають **потужністю джерела (стоку).** Якщо *Q* не змінюється в часі, то кажуть, що потужність постійна; Якщо *Q* є функцією часу, *Q=Q(t),* то потужність змінна. Якщо деякий момент часу *Q* змінюється в точці витоку чи стоку, то миттєво змінюється поле швидкостей у всьому просторі. Але в дійсності збурення повинні поширюватися з деякою обмеженою швидкістю.

3.2. Теорема Кельвіна

Теорема Кельвіна *формулюється наступним чином: індивідуальна похідна за часом від циркуляції швидкості по замкненому рідкому контуру дорівнює циркуляції прискорення по цьому контуру.*

Зміст теореми виражається формулою:

$$\frac{d}{dt}\oint_C \vec{V}\delta\vec{r} = \oint_C \frac{d\vec{V}}{dt}\delta\vec{r}.$$

Доведення:

$$\frac{d}{dt}\int_A^B \vec{V}\delta\vec{r} = \int_A^B \frac{d\vec{V}}{dt}\delta\vec{r} + \int_A^B \vec{V}\frac{d}{dt}(\delta\vec{r}) = \int_A^B \frac{d\vec{V}}{dt}\delta\vec{r} + \int_A^B \vec{V}\delta\vec{V} = \int_A^B \frac{d\vec{V}}{dt}\delta\vec{r} + \int_A^B \delta\left(\frac{\vec{V}^2}{2}\right).$$

Візьмемо останній інтеграл

$$\int_A^B \delta\left(\frac{\vec{V}^2}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(V_B^2 - V_A^2\right),$$

де AB – деякий розімкнений контур. Зазначимо, що він рідкий, отже, змінний. Якщо вибрати замкнений контур інтегрування, то для нього останній інтеграл дорівнює нулю, оскільки $\left(V_B^2 - V_A^2\right) = 0$, що і приводить до шуканого виразу теореми Кельвіна.

3.3. Кінематичні теореми Гельмгольца

Нехай задане векторне поле $rot\vec{V}$. Розглянемо відрізок вихрової трубки (рис.3.1). В кожній точці поверхні трубки можна провести вектори зовнішніх нормалей. Застосуємо до векторного поля $rot\vec{V}$ теорему Остроградського-Гаусса.

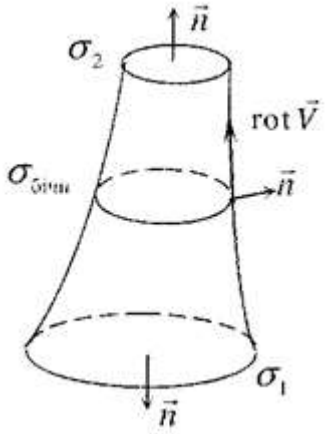


Рис. 3.1

Оскільки $rot\vec{V}$ є векторним полем, то вводячи позначення $\vec{a} = rot\vec{V}$, отримаємо

$$\int_{Q_1}\left(rot\vec{V}\right)_n \delta Q + \int_{Q_2}\left(rot\vec{V}\right)_n \delta Q + \int_{Qббч}\left(rot\vec{V}\right)_n \delta Q = \int_{\tau} div\left(rot\vec{V}\delta\tau\right),$$

Звідси $\int_{Q_1}\left(rot\vec{V}\right)_n \delta Q + \int_{Q_2}\left(rot\vec{V}\right)_n \delta Q = 0$.

Потік вихору швидкості через переріз вихрової трубки не змінюється вздовж цієї трубки. Тому саме цю величину і обирають як інтенсивність, що характеризує вихрову трубку, $i = \int_{Q}\left(rot\vec{V}\right)_n \delta Q = const$.

Перша кінематична теорема Гельмгольца формулюється наступним чином: *інтенсивність вихрової трубки однакова по всій довжині трубки в даний момент часу і є її характеристикою.*

Розглянемо елементарну вихрову трубку малого поперечного перерізу. Для неї з точністю до безмежно малих справедливою є рівність:

$$\omega_1 Q_1 = \omega_2 Q_2,$$

де ω_1 і ω_2 - проекції векторів вихорів на нормалі до поверхонь.

Якщо $Q_2 \to 0,$ то $\omega_2 \to \infty$, тобто в цьому випадку вихрова трубка замикається сама на себе (рис. 3.2).

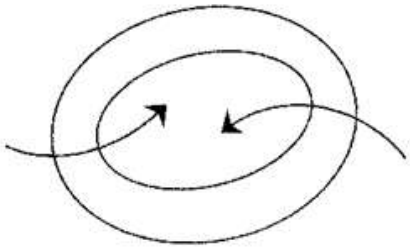


Рис. 3.2

Друга кінематична теорема Гельмгольца**:** *вихрові трубки не можуть починати і закінчуватися всередині середовища.* Проте вихрова трубка може замикатись і на тверду поверхню речовини (рідини) – вільну поверхню (рис. 3.3).

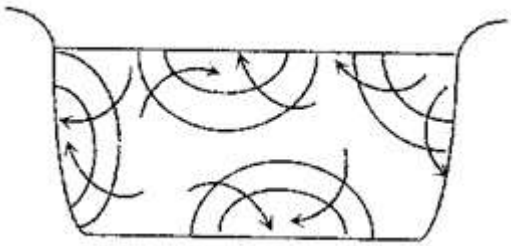


Рис. 3.3

Якщо експериментально виміряти вектор швидкості $\vec{V}(u,v,w)$ і підставити в формулу інтенсивності вихрової трубки, то отримаємо результати з певною похибкою. Щоб її позбутись, як інтенсивність трубки току використовують циркуляцію вектора швидкості $i = \int\limits_{\sigma} \left(rot\vec{V}\right)_n \delta Q = \int\limits_{\sigma} \vec{V}\delta\vec{r}$. Тоді маємо (рис. 3.4).

$$\Gamma_{\sigma_1} = V_t 2\pi R_1 = \Gamma_{\sigma_2} = V_2 2\pi R_2,$$

тому $V_2 = V_1 \frac{R_1}{R_2}$.

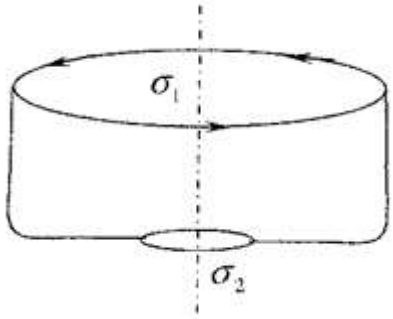


Рис. 3.4

Якщо $R_1 \rangle\rangle R_2$, то отримаємо, що мала дотична швидкість у верхньому перерізі породжує дуже велику дотичну швидкість у нижньому перерізі $V_2 \rangle\rangle V_1$.

Запитання для самоперевірки

1. Типи полів.
2. Теорема Кельвіна.
3. Перша кінематична теорема Гельмгольца.
4. Друга кінематична теорема Гельмгольца.

ЛЕКЦІЯ 4

ТЕНЗОР

4.1. Загальне поняття тензора

Механіка суцільних середовищ оперує величинами, які не залежать від конкретної системи координат, що може бути використана для їх описання.

В той же час ці фізичні величини описуються у найзручніший спосіб шляхом вибору відповідної системи координат. Математично такі величини представляють ***тензорами.***

Як математичний об'єкт тензор існує незалежно від будь-якої системи координат. Проте він може бути визначеним у конкретній системі відліку за допомогою певної множини величин, відомих як ***компоненти тензора.*** Завдання компонент тензора в одній системі координат визначає його компонент у будь-якій довільній системі координат. Дійсно, в математиці закон перетворення компонент тензора при переході від однієї системі координат до іншої використовується власне для означення тензора.

Фізичні закони МСС формулюють за допомогою рівнянь відносно тензорних величин. Оскільки тензорні перетворення лінійні й однорідні, то такі тензорні рівняння залишаються справедливими в іншій довільній системі координат. Ця ***інваріантність*** тензорних рівнянь є однією з основних причин придатності і застосування тензорного підходу в МСС.

Тут і далі будемо мати справу із декартовими тензорами і використовувати як індексну, T_{ij}, так і символьну T, форми запису тензору.

Інваріантний відносно системи координат об'єкт T_{ij} називають тензором другого рангу, або другої валентності.

Ранг – число індексів його компонент. Очевидно, що вектор – тензор першого рангу, скаляр - 0 рангу. Можна ввести тензор будь-якого рангу T_{ijklm}.

Тензори другого рангу називають - ***діадіками,*** третього рангу – ***триадіками,*** четвертого – ***тетрадіками.***

Кількість компонент тензора в тривимірному декартовому просторі 3^n, а в загальному випадку N^n, де n розмірність простору, N - ранг тензора.

Компоненти тензора будь-якого рангу коротко і наочно представляють за допомогою індексних позначень. За правилами індекс-літера може зустрічатись один або два рази. Якщо індекс зустрічається один раз, то він набирає значення 1,2…N. Індекси, що не повторюються, називають ***вільними.*** Якщо повторюється двічі, то мається на увазі, що він приймає значення 1,2…N і всі утворені таким чином члени додаються (сумуються). Індекси сумування називають ***німими,*** бо заміна їх на інші літери, які не задіяні як вільні індекси, нічого не змінює. Якщо індекс повторюється більш ніж двічі, то це не дає змоги використовувати правило сумування.

У тензорів першого рангу наявний тільки один вільний індекс $a_i, a_{ij}b_j$, а у тензорів другого рангу – два D_{ij}.

Прикладом другого рангу є ***символ Кронекера*** $\boldsymbol{\delta_{ij}}$, який визначають наступним чином:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, якщо i = j, \\ 0, якщо i \neq 0. \end{cases}$$

Інший важливий тензор – ***Леві-Чивіти*** $\boldsymbol{\varepsilon_{ijk}}$. Цей тензор ще називають альтернуючим тензором третього рангу, компоненти якого рівні 1, якщо індекси *i,j,k* утворюють парну перестановку з чисел 1,2,3; рівні-1, якщо індекси *i,j,k* утворюють непарну перестановку з 1,2,3, тобто два чи три індекси приймають однакові значення

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1, _якшо_ijk_з'являються_як_послідовність_12312, \\ -1, _якщо_ijk_з'являються_як_послідовність_32132. \\ 0, _якщо_ijk_з'являються_в_іншій_послідовності. \end{cases}$$

За допомогою тензора Леві-Чивіти векторний і мішаний добутки векторів $\vec{a} = \{a_i\}$ і $\vec{b} = \{b_i\}$ можна представити відповідно, $\varepsilon_{ijk}a_j b_k$ і $\varepsilon_{ijk}a_j b_j c_{\text{k}}$.

В загальному випадку всі компоненти тензора рівні. Якщо при якійсь перестановці індексів значення компоненти зберігається (наприклад $T_{ij} = T_{ji}$ $T_{ij} = T_{ji}$), то тензор називають ***симетричним.*** Якщо ж виконується співвідношення $T_{ij} = -T_{ji}$, то такий тензор називають ***антисиметричним.*** Властивості симетрії і анти симетрії тензора інваріантні відносно перетворення координат.

4.2. Дії над тензорами

Сумою тензорів однакових рангів є тензор такого ж рангу з компонентами, що утворені додаванням відповідних компонент (з однаковою будовою індексів): $a_{ij} + b_{ij} = (a_{ij} + b_{ij})$.

Добутком тензора T_{ij} на скаляр λ називають тензор того ж рангу, кожна компонента якого помножена на цей скаляр $\lambda\, T_{ij}$.

Будь який тензор другого рангу T_{ij} можна представити у вигляді суми симетричного і антисиметричного тензорів з компонентами $(T_{ij} + T_{ij})/2$ і з компонентами $(T_{ij} - T_{ij})/2$, відповідно. Таким чином, довільному тензору другого рангу можна поставити у відповідність симетричний і антисиметричний тензор. Ці операції називають, відповідно, симетруванням і альтернуванням.

Симетричний тензор другого рангу завжди можна представити у вигляді суми нульової частини та девіатора. Кульовою частиною симетричного тензору другого рангу є тензор, діагональні компоненти якого дорівнюють $T_{kk}\delta_{ij}/3$, а недіагональні – нульові. Відповідно компоненти девіатора тензора визначаються за формулою $e_{ij}^{(d)} = e_{ij} - \frac{1}{3} e_{kk}\delta_{ij.}$

Тензор називають нульовим (або кажуть, що він дорівнює нулю), якщо всі його компоненти дорівнюють нулю.

Тензорне (зовнішнє) множення. При зовнішньому множені тензора рангу *p* на тензор рангу *q* отримується тензор рангу *p*+*q,* компоненти якого отримують

шляхом множення кожної компоненти першого тензора на кожну компоненту другого $a_{ij} \cdot b_{kl} = c_{ijkl}$.

Згорткою тензора називають операцію прирівнювання двох індексів у компонент даного тензора (при цьому вони стають індексами сумування). В результаті отримується тензор, ранг якого на 2 менший: $\delta_{ij} a_{ijkl} = a_{iikl} = b_{kl}$.

Згорткою тензора другого рангу a_{ij}, називають ***слідом тензора*** і позначають $\mathbf{tr}\, a_{ij}$.

Для отримання **згортки двох тензорів (операція внутрішнього множення)** спочатку тензори перемножують тензорно, а потім виконують згортку по індексах, що належать тензорам-співмножником.

$$a_{ij} \cdot b_{kl} = \delta_{ik} a_{ij} b_{kl} = c_{jl}$$

Згортку можна виконувати і по двох парах індексів $a_{ij} \div b_{kl} = \delta_{ik}\delta_{jl} a_{ij} b_{kl} = a_{ij} b_{ij}$.

Аналогічно скалярним і векторним полям можна ввести також ***тензорне поле –*** область простору, в кожній точці якої задається певний тензор.

Вибір системи координат залежить від дослідника, а не від явища. Закони руху можуть містити координати, але не повинні залежати від вибору системи координат, тобто фізичні закони повинні бути інваріантними відносно вибору системи координат. Ця вимога накладає певні обмеження на вигляд математичного запису цих законів.

4.3. Інваріанти тензора другого рангу

В загальному випадку компонента тензора від вибору системи координат. Поставимо задачу найти такі функції компонента тензора, що не залежать від вибору системи координат. Такі функції компонент тензора називаються ***інваріантами тензора.*** Вони є числами або функціями точок простору. Саме такі функції компонент тензорів повинні, поряд з іншими інваріантними об’єктами, входити в математичний запис фізичних законів, який повинен бути інваріантним

відносно способів описання фізичного явища і, зокрема, не повинен залежати від системи координат.

Вкажемо правила утворення інваріантів.

Візьмемо вектор – тензору I рангу $\vec{A}$. Складемо скалярний добуток в декартовій системі координат $\left(\vec{A},\vec{A}\right)= A_X^2 + A_Y^2 + A_Z^2$. Отриманий вираз є інваріантом (квадратом довжини вектора $\vec{A}$), бо перетворення різноманітних компонент вектора взаємно обернені. У вектора лише один незалежний інваріант – його довжина, всі інші інваріанти є її функціями.

Тепер візьмемо довільний тензор другого рангу *T*. Для тензора другого рангу існує три інваріанти: лінійний, квадратичний і кубічний відносно компонент:

$$I_1 = T_{ij},\ I_2 = \left\lfloor T_{ii}T_{jj} - T_{ij}T_{ij} \right\rfloor,\ I_3 = \det(T_{ij}).$$

4.4. Головні значення і головні напрямки симетричних тензорів другого рангу

В кожній точці простору можна провести осі координат так, що лише три компоненти T_{11}, T_{12}, T_{13} симетричного тензора другого рангу будуть відмінні від 0. Такі осі називають ***головними осями,*** або головними ***напрямами тензора***, а три різні і відмінні від 0 компоненти тензора в головних осях називають його ***головними компонентами***, або ***головними значеннями***. Різниця між коваріантними, контраваріантними і змішаними компонентами в головній системі координат пропадає.

Поставимо задачу відшукати головні напрями і головне значення.

Для довільного симетричного тензора з компонентами T_{ij} і для кожного напряму n_i, (n_i- одиничний вектор, що задає напрям) існує вектор з компонентами $A_i = T_{ij}n_j$. Якщо напрями A_i і n_j співпадають, то $T_{ij} = \lambda$ - ***головні значення тензора*** і напрям n_i - ***головний напрям тензора*** T_{ij}.

$$\mathrm{T_{ij}n_j} = \lambda \mathrm{n_i} \quad \text{або } (T_{ij} - \lambda\delta_{ij})n_j = 0$$

Наведений вище вираз є короткою формою запису трьох рівнянь:

$$(T_{11} - \lambda)n_1 + T_{12}n_2 + T_{13}n_3 = 0,$$

$$T_{21}n_1 + (T_{22} - \lambda)n_2 + T_{23}n_3 = 0,$$

$$T_{31}n_1 + T_{32}n_2 + (T_{33} - \lambda)n_3 = 0.$$

Система рівнянь має тривіальний розв'язок при $n_i = 0$. У випадку, коли $n_i n_i = 1$ $n_i n_i = 1$, система має нульовий розв'язок тоді і тільки тоді, коли її визначник буде дорівнювати 0.

$$\left|\mathrm{T_{ij}} - \lambda\delta_{ij}\right| = 0$$

Звідси отримується рівняння, яке називають ***характеристичним рівнянням*:**

$$\lambda^3 - \mathrm{I}_1\lambda^2 + I_2\lambda - I_3 = 0,$$

де I_1, I_2, I_3 - інваріанти тензора.

Корені характеристичного рівняння $\lambda_{(1)}, \lambda_{(2)}, \lambda_{(3)}$ називають ***головними значеннями тензора.*** У симетричного тензора з дійсними компонентами всі головні значення дійсні.

Тензор у головних осях має вигляд:

$$T = \begin{pmatrix} \lambda_{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{(3)} \end{pmatrix} T' = \begin{pmatrix} \lambda_{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{(3)} \end{pmatrix}.$$

Вимога $n_i n_i = 1$ дає те, що всі ортогональні.

Якщо $\lambda_{(1)} = \lambda_{(2)}$, то є лише головна вісь $\lambda_{(3)}$, якщо $\lambda_{(1)} = \lambda_{(2)} = \lambda_{(3)}$, то будь-який напрям головний. Підставляючи $\lambda_{(1)}$ $\lambda_{(1)}$ в систему, отримуємо розв'язки n_j.

Ілюстративна задача

Задача. Знайти головні значення і головні осі тензора, що має в деякому базисі наступну матрицю компонент:

$$\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} & 0 \\ -\sqrt{3} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Розв'язок: Характеристичне рівняння $(2-\lambda)\left[(\lambda^2-1-3)\right]=0$ або $(\lambda-2)^2\cdot(\lambda+2)=0.$ $(\lambda-2)^2\cdot(\lambda+2)=0.$

$$\lambda=2,\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} & 0 \\ -\sqrt{3} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},\begin{cases} -l-\sqrt{3}m=0 \\ -\sqrt{3}l-3m=0 \\ l^2+m^2+n^2=1 \end{cases}.$$

$$\begin{cases} l=-\sqrt{3}m \\ \\ l^2+m^2+n^2 \end{cases},\lambda=2,\begin{pmatrix} 3 & -\sqrt{3} & 0 \\ -\sqrt{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix},\begin{cases} 3l-\sqrt{3}m=0 \\ 4n=0 \\ l^2+m^2=1 \end{cases},$$

$$\begin{cases} m=\sqrt{3}l \\ n=0, \quad l=\pm\dfrac{1}{2}, m=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \ n=0. \\ 4l^2=1 \end{cases}$$

Головні осі направлені вздовж $e_1+\sqrt{3e_2}$ і вздовж будь-якої пари ортогональних векторів, що лежать у площині векторів $-\sqrt{3e_2}+e_2;e_3$. Трійка головних осей не є єдиною якщо серед головних компонент є одинакові.

Запитання для самоперевірки

1. Ввести загальне поняття тензора.
2. Розглянути дії над тензорами.
3. Який зміст інваріантів тензора другого рангу.
4. Визначити головні значення і головні напрями симетричних тензорів другого рангу.

Задачі для самостійного розв'язання

1. Виписати детально наступні вирази, використовуючи числові значення індексів, а не їх літерні значення $A_{ii}, R_{ij}, B_{iij}, a_i T_{ij}, a_i b_j s_{ij.}$.

2. Використовуючи правило додавання за однаковими індексами, записати в скороченій формі формулу для обчислення індивідуальної похідної при ейлеревому описанні руху.

3. У тривалому просторі обчислити $\delta_{ii}, \delta_{ij}\delta_{ij}, \delta_{ij}\delta_{ik}\delta_{jk}, \delta_{ik}\delta_{jk.}$.

4. Показати, що будь-який тензор другого рангу представляється у вигляді суми симетричного й антисиметричного тензорів. Чи єдине таке представлення?

5. Розкласти тензор на симетричну і антисиметричну частини

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 6 & 7 & 0 \\ 10 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

6. Знайти згортку за двома парами індексів довільних симетричного і антисиметричного тензорів.

7. Розкласти тензор на кульову частину і девіатор. Чому дорівнює слід девіатора?

$$\begin{pmatrix} 12 & 4 & 0 \\ 4 & 9 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

8. Обчислити інваріанти тензора $\begin{pmatrix} 6 & -3 & 0 \\ -3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$.

9. Виразити інваріанта тензора другого рангу через головні значення.

10. Знайти головні значення і головні осі тензора, що має в деякому базисі наступну матрицю компонент

$$\text{а)}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix},\ \text{б)}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} & 0 \\ -\sqrt{3} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

ЛЕКЦІЯ 5

КІНЕМАТИКА СУЦІЛЬНОГО СЕРЕДОВИЩА

5.1. Швидкості в обмежено малій області суцільного середовища

З теоретичної механіки відомо, що довільний рух абсолютно твердого тіла можна розкласти на поступальний рух тіла разом з полюсом і обертовий рух навколо полюса

$$\vec{V}' = \vec{V} + \vec{\omega} x (\vec{r}' - \vec{r}),$$

де $\vec{V}', \vec{V}$ швидкості точок M, M', положення яких відносно деякого початку 0 визначаються радіус-векторами $\vec{r}', \vec{r}$, відповідно; $\vec{\omega} = rot \frac{\vec{V}}{2}$ - кутова швидкість обертання тіла відносно точки M (рис. 5.1)

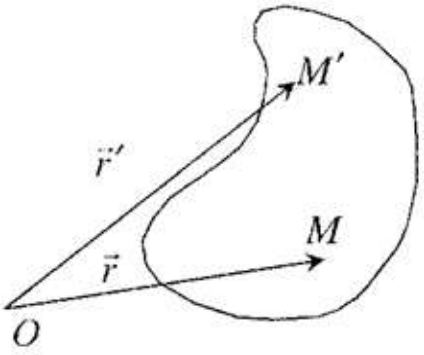


Рис. 5.1

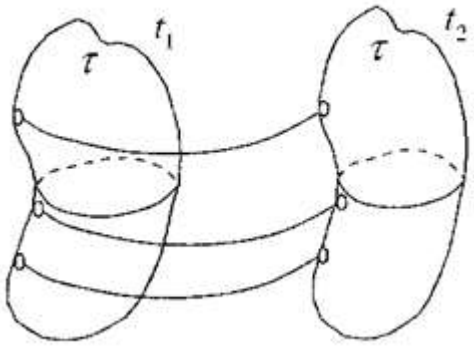


Рис. 5.2

Розглянемо рух елементарного рідкого об'єму суцільного середовища. Поняття «рідкий» вказує на те, що об'єм складається з одних і тих же частинок, тобто ми його розглядаємо в змінних Лагранжа (рис. 5.2).

Вважаємо, що матеріальний об'єкт змінюється в процесі руху, але складається з одних і тих самих частинок.

Нехай в декартовій системі координат вектор швидкості в точці M має компоненти $\vec{V} = \{V_i\} = \{u, v, w\}$, а компоненти швидкості в точці M' позначаються

як $\vec{V}' = \{V_i'\} = \{u', v', w'\}$. Швидкість у точці M' запишемо у вигляді ряду по степенях відстані між M і M':

$$u' = u + \frac{du}{dx}(x' - x) + \frac{du}{dy}(y' - y) + \frac{du}{dz}(z' - z) + 0\left(\left|\vec{r}' - \vec{r}\right|^2\right),$$

$$v' = v + \frac{dv}{dx}(x' - x) + \frac{dv}{dy}(y' - y) + \frac{dv}{dz}(z' - z) + 0\left(\left|\vec{r}' - \vec{r}\right|^2\right)$$

$$v' = v + \frac{dv}{dx}(x' - x) + \frac{dv}{dy}(y' - y) + \frac{dv}{dz}(z' - z) + 0\left(\left|\vec{r}' - \vec{r}\right|^2\right),$$

$$w' = w + \frac{dw}{dx}(x' - x) + \frac{dw}{dy}(y' - y) + \frac{dw}{dz}(z' - z) + 0\left(\left|\vec{r}' - \vec{r}\right|^2\right).$$

Записані вище три співвідношення, еквівалентні одному, сформульованому у векторному вигляді: $\vec{V}' = \vec{V} + D(\vec{r}' - \vec{r})$ або $V_i' = V_i + D_{ij}(r_j' - r_j)$.

Тут $D = \{D_{ij}\}$- тензор другого рангу, який називається ***тензором градієнта швидкості.*** Компоненти тензора градієнтів швидкості визначаються формулою: $D_{ij} = \frac{dV_i}{dx_j}$.

5.2. Теорема Гельмгольца

Розкладаючи тензор градієнта швидкості на його симетричну й антисиметричну частини, отримаємо

$$\frac{dV_i}{dx_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{dV_i}{dx_j} + \frac{dV_j}{dx_i}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{dV_i}{dx_j} + \frac{dV_j}{dx_i}\right), \frac{dV_i}{dx_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{dV_i}{dx_j} + \frac{dV_j}{dx_i}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{dV_i}{dx_j} + \frac{dV_j}{dx_i}\right),$$

або

$$D_{ij} = e_{ij} + \omega_{ij} \text{ чи } D = e + \omega,$$

де

$$e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{dV_i}{dx_j} + \frac{dV_j}{dx_i}\right), \ \omega_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{dV_i}{dx_j} + \frac{dV_j}{dx_i}\right).$$

Тоді

$$\vec{V}' = \vec{V} + \omega(\vec{r}' - \vec{r}) + e(\vec{r}' - \vec{r}).$$

Причому $\omega(\vec{r}' - \vec{r}) = \vec{\omega} x (\vec{r}' - \vec{r})$. Тут, як і раніше, $\vec{\omega}$ - обертова складова для абсолютно твердого тіла. Тензор ω назвемо ***тензором вихорів*.**

Доданок $e(\vec{r}' - \vec{r})$ вказує на деформацію суцільного середовища. Симетричну частину тензора градієнта швидкості, e_{ij}, назвемо ***тензором швидкостей деформації.*** Тобто $e(\vec{r}' - \vec{r})$ - складова , якою відрізняється рух абсолютно твердого тіла і рух рідини.

Теорема Гельмгольца *стверджує***:** *в кожний момент часу рух елементарного рідкого об'єму можна представити як рух, що складається з двох рухів – квазітвердого (поступальний рух з полюсом і миттєве обертання відносно цього полюса) і деформаційного.*

Щоб описати рух суцільного середовища, треба знати поле швидкості $\vec{V}$, поле вихорів швидкості rot$\vec{V}$ поле тензора швидкостей деформації *e.*

5.3. Тензор швидкостей деформації і його властивості

Розглянемо детальніше тензор швидкостей деформації, тобто складову швидкості суцільного середовища, яка є симетричною частиною тензора градієнтів швидкості:

$$e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{dV_i}{dx_j} + \frac{dV_j}{dx_i}\right), \; e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{dV_i}{dx_j} + \frac{dV_j}{dx_i}\right),$$

Внаслідок симетрії справедливим є співвідношення $e_{ij} = e_{ji}$.

Компоненти тензора швидкостей деформації в декартовій системі координат визначають наступним чином:

$$e=\begin{bmatrix} \dfrac{du}{dx} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{du}{dy}+\dfrac{dv}{dx}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{du}{dz}+\dfrac{dw}{dx}\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{du}{dy}+\dfrac{dv}{dx}\right) & \dfrac{dv}{dy} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{dv}{dz}+\dfrac{dw}{dy}\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{du}{dz}+\dfrac{dw}{dx}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{dv}{dz}+\dfrac{dw}{dy}\right) & \dfrac{dw}{dz} \end{bmatrix}.$$

Маємо поле тензора другого рангу. Знаючи в кожній точці цей тензор, ми знаємо, як веде себе деформаційна складова руху.

Розглянемо фізичний зміст компонент тензора *e.*

Визначимо швидкість відносного видовження відрізка суцільного середовища. В результаті руху суцільного середовища відрізок MM_1 MM_1 переходить в $M'M_1'$ (рис. 5.3)

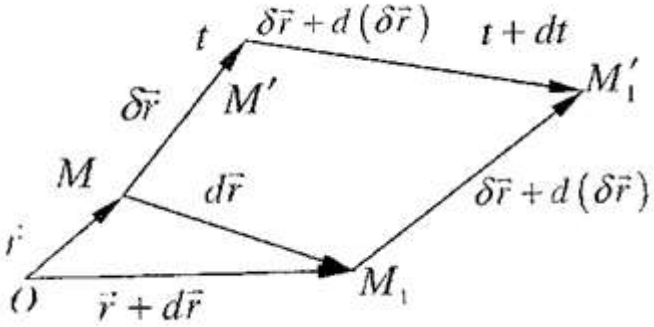


Рис. 5.3

Зміна довжини і напрямку MM_1 обумовлена тим, що різні точки середовища рухаються з різними швидкостями. З геометричної побудови (рис. 5.3) отримуємо $\vec{M}\vec{M}'+\vec{M}'\vec{M}_1=\vec{M}\vec{M}_1+\vec{M}_1\vec{M}_1'$, $\vec{M}\vec{M}'+\vec{M}'\vec{M}_1=\vec{M}\vec{M}_1+\vec{M}_1\vec{M}_1'$, або після підстановки виразів векторів через радіус-вектори відносно деякого початку 0

$$\delta\vec{r}+d\vec{r}+\delta(d\vec{r})=d\vec{r}+\delta\vec{r}+d(\delta\vec{r}),$$

звідси

$$d(\delta\vec{r})=\delta(d\vec{r}).$$

Введемо у розгляд поле швидкості, визначаються миттєву швидкість точки як похідну її радіус-вектора по часу,

$$\vec{\mathrm{V}} = \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

Тоді справедливим є співвідношення:

$$d(\delta\vec{r}) = \delta(\vec{V}dt) = \delta\vec{V} \cdot dt.$$

Швидкість зміни з часом елементарного рідкого відрізка визначиться наступним чином:

$$\frac{d}{dt}(\delta\vec{r}) = \delta\vec{V} = \frac{d\vec{V}}{dx}\delta x + \frac{d\vec{V}}{dy}\delta y + \frac{d\vec{V}}{dz}\delta z.$$

Візьмемо три елементарних рідких відрізки $\delta\vec{r}_1, \delta\vec{r}_2, \delta\vec{r}_3$, $\delta\vec{r}_1', \delta\vec{r}_2', \delta\vec{r}_3'$, направлені вздовж координатних осей (рис. 5.4).

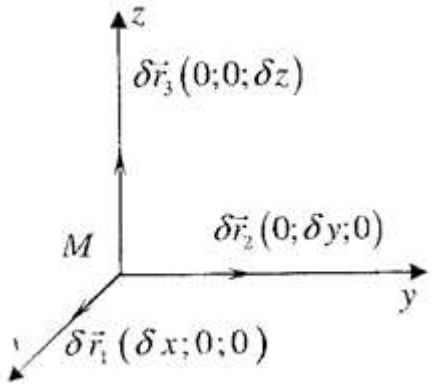


Рис. 5.4

Застосуємо до них отримані результати:

$$\frac{d}{dt}(\delta\vec{r}_1) = \frac{d\vec{V}}{dx}\delta x;\ \frac{d}{dt}(\delta\vec{r}_2) = \frac{d\vec{V}}{dy}\delta y;\ \frac{d}{dt}(\delta\vec{r}_3) = \frac{d\vec{V}}{dz}\delta z.$$

Спроєктуємо ці рівності відповідно на осі *0x, 0y, 0z:*

$$\frac{d}{dt}(\delta x)=\frac{du}{dx}\delta x;\ \frac{d}{dt}(\delta y)=\frac{dv}{dy}\delta y;\ \frac{d}{dt}(\delta z)=\frac{dw}{dz}\delta z.$$

Враховуючи означення компонент тензора швидкостей деформації, отримаємо

$$\frac{du}{dx}=\frac{1}{\delta x}\frac{d}{dt}(\delta x)=e_{xx};\ \frac{dv}{dy}=\frac{1}{\delta y}\frac{d}{dt}(\delta y)=e_{yy};\ \frac{dw}{dz}=\frac{1}{\delta z}\frac{d}{dt}(\delta z)=e_{zz}.$$

Тобто ***діагональні компоненти тензора швидкостей деформації*** чисельно дорівнюють швидкостям відносних видовжень елементарних рідких відрізків, проведених з даної точки в напрямі осей декартової системи координат.

Кути між відповідними рідкими відрізками позначимо γ_{ij} (рис. 5.5).

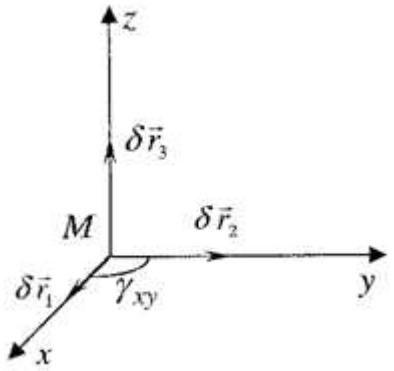


Рис. 5.5

Нехай, наприклад, у початковий момент часу $\gamma_{xy}=\frac{\pi}{2}$. З часом цей кут змінюється. Його косинус можна знайти, використовуючи відомий вираз

$$\cos\gamma_{xy}=\frac{\delta\vec{r}_1\cdot\delta\vec{r}_2}{\delta x\cdot\delta y}.$$

Диференціюючи це співвідношення за часом, отримаємо

$$-\sin\gamma_{xy}\cdot\gamma_{xy}=\frac{1}{\delta_x\delta_y}\left[\frac{d}{dt}(\delta\vec{r}_1)\cdot\delta\vec{r}_2+\frac{d}{dt}(\delta\vec{r}_2)\cdot\delta\vec{r}_1\right].$$

Розглянемо перший доданок у виразі в дужках

$$\frac{d}{dt}(\delta\vec{r}_1)\cdot\delta\vec{r}_2=\frac{d\vec{V}}{dx}dx\cdot\vec{j}\cdot\delta y=\delta x\delta y\cdot\frac{dv}{dx}.$$

Аналогічні міркування справедливі й для другого доданку

$$\frac{d}{dt}(\delta\vec{r}_2)\cdot\delta\vec{r}_1=\delta x\delta y\cdot\frac{du}{dy},$$

тоді $$-\gamma_{xy}=\frac{dv}{dx}+\frac{du}{dy}=2e_{xy}\ .$$

Оскільки в початковий момент часу $\sin\gamma_{xy}=1$ $\sin\gamma_{xy}=1$.

Фізичний зміст γ_{xy} - швидкість скошування кута між елементарними рідкими відрізками в напрямах осей *0x* і *0y* декартової системи координат.

Отже, ***недіагональні компоненти тензора швидкостей деформації*** в точці суцільного середовища дорівнюють половині швидкості скошування кутів між елементарними рідкими відрізками, обраними в даній точці в напрямах осей декартової системи координат:

$$-\gamma_{yz}=\frac{dv}{dz}+\frac{dw}{dy}=2e_{yz},\ -\gamma_{zy}=\frac{dw}{dx}+\frac{du}{dz}=2e_{zx}.$$

В лівих частинах цих виразів знак «-» змінюється на знак «+» , якщо кути зменшуються.

Розглянемо елементарний об'єм $\delta\tau=\delta\vec{r}_1\cdot(\delta\vec{r}_2\cdot\delta\vec{r}_3)$. Визначимо швидкість відносно кубічного розширення наступним чином:

$$\frac{1}{\delta\tau}\frac{d}{dt}(\delta\tau)=\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}=div\vec{V}.$$

Можна показати, що швидкість відносного об'ємного розширення в точці дорівнює сумі діагональних компонент тензора швидкостей деформацій і дорівнює дивергенції швидкості.

5.4. Геометричні співвідношення Коші

При деформації твердого тіла руху в сенсі перенесення маси немає.

Розглянемо тверде тіло, яке займає область τ простору, обмежену поверхнею σ. При деформуванні деякий вектор $\vec{P}$, перейде у вектор $\vec{P}*$, або точка $M(\mathrm{x_i})$ перейде в $M*(x_i+u_j(x_j))$, а точка $N(x_i+\xi_i)$ $N(x_i+\xi_i)$ в $N*(x_i+\xi_1+u_i(x_j+\xi_j))$. Тут, на відміну від попередніх параграфів, через $\vec{u}=\{u_i\}=\{u_1,u_2,u_3\}$ позначений вектор переміщення точки твердого тіла.

Розглядувані вектори мають компоненти, відповідно, $\vec{P}=\{\xi_i\}$,

$$\vec{P}*=\left\{\xi_i+u_i(x_j+\xi_j)-u_i(x_j)\right\}=\frac{du_i(x_j)}{dx_j}\xi_j.\ \vec{P}*=\left\{\xi_i+u_i(x_j+\xi_j)-u_i(x_j)\right\}=\frac{du_i(x_j)}{dx_j}\xi_j.$$

Компоненти $\dfrac{du_i}{dx_j}$ утворюють тензор. Розкладемо його на симетричну й антисиметричну частини

$$\frac{du_i(x_j)}{dx_j}=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{du_i}{dx_j}+\frac{du_j}{dx_i}\right)+\left(\frac{du_i}{dx_j}-\frac{du_j}{dx_i}\right)\right].$$

Побудуємо добуток $\vec{P}\delta\vec{P}=\dfrac{1}{2}\left[\left(\dfrac{du_i}{dx_j}+\dfrac{du_j}{dx_i}\right)+\left(\dfrac{du_i}{dx_j}-\dfrac{du_j}{dx_i}\right)\right]\xi_i\xi_j.$

Розглянемо другий доданок

$$\left(\frac{du_i}{dx_j}-\frac{du_j}{dx_i}\right)\xi_i\xi_j=\left(\frac{du_j}{dx_i}-\frac{du_i}{dx_j}\right)\xi_i\xi_j=-\left(\frac{du_i}{dx_j}-\frac{du_j}{dx_i}\right)\xi_i\xi_j=0,$$

оскільки індекси *i* та *j* можна міняти місцями як німі.

Цей доданок визначає обертання як абсолютно твердого тіла.

Остаточно отримаємо

$$\vec{P}\delta\vec{P}=\varepsilon_{ij}\xi_i\xi_j,$$

де $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{du_i}{dx_j} + \frac{du_j}{dx_i}\right)$.

Ці співвідношення називають ***геометричним співвідношенням Коші,*** які виражають деформації через компоненти переміщення.

5.5. Тензор деформацій

Компоненти ε_{ij} утворюють ***тензор деформацій.*** Встановимо фізичний зміст компонент тензора деформацій.

Розглянемо елементарний відрізок, направлений вздовж координатної осі $0x_1 : \vec{P} = \{P_i\} = \{\xi;0;0\}$, тоді

$$\vec{\mathrm{P}}\delta\vec{\mathrm{P}} = \frac{1}{2}\left(\frac{du_1}{dx_1} + \frac{du_1}{dx_1}\right)\xi^2 = \varepsilon_{11}\xi^2, \text{ або } \frac{\vec{P}\delta\vec{P}}{\left|\vec{P}\right|^2} = \varepsilon_{11},$$

де ε_{11} - відносне видовження вздовж осі $0x_1$.

Діагональні компоненти тензора деформацій у випадку нескінченно малих деформацій дорівнюють відносним видовженням вздовж декартових осей координат.

Сума діагональних елементів тензора деформацій дорівнює ***об'ємному розширенню*** $\theta = \frac{du_i}{dx_i}$.

Встановимо фізичний зміст недіагональних компонент. Розглянемо елементарні вектори, направлені вздовж координатних осей $0x_1$ і $0x_2 - \vec{P}_1(\xi_1;0;0)$ і $\vec{P}_2(0;\eta;0)$. Після деформування $\vec{\mathrm{P}}_1*$ і $\vec{\mathrm{P}}_2*$, відповідно. При цьому початковий прямий кут між ними стане непрямим і дорівнюватиме $\frac{\pi}{2} - \gamma_{12}$. Тоді

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \gamma_{12}\right) = \frac{\vec{P}_1*\vec{P}_2*}{\left|\vec{P}_i*\right\|\vec{P}_j*\right|} = \frac{\xi_1 u_1 + \eta_2 u_2}{\xi_1 \cdot \eta_2} = \frac{u_1}{\eta_2} + \frac{u_2}{\xi_1} = \frac{du_1}{dx_2} + \frac{du_2}{dx_1},$$

звідси $\gamma_{12} = 2\varepsilon_{12}$.

При малих кутах (випадок нескінченно малих деформацій, який ми і розглядаємо) $\gamma_{12} = \gamma_{12}$, тобто ***недіагональні компонента тензора деформацій*** дорівнюють половині зміни кута між напрямками, що до деформування співпадали з координатними осями.

Кульова частина тензора деформацій визначає зміну об'єму, а девіатор – зміну форми.

Ілюстративна задача

Задача. Деформація суцільного середовища відбувається за законом $x_1 = \xi_1 + b(t)\xi_2; x_2 = \xi_2 + b(t)\xi_3;\ x_3 = \xi_3, b(t)$ - є функція часу, причому *b(0)=0.*

Що відбулося в результаті деформації з матеріальними елементами, початково-розміщеними паралельно координатним осям? Знайти тензор деформацій.

Розв'язок:

Відбувається подвійний зсув. Ненульові компоненти тензора деформацій визначаються наступними формулами:

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial(x_1 - \xi_1}{\partial\xi_2} + \frac{\partial(x_2 - \xi_2}{\partial\xi_1}\right) = \frac{b(t)}{2};$$

$$\varepsilon_{23} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial(x_2 - \xi_2}{\partial\xi_3} + \frac{\partial(x_3 - \xi_2}{\partial\xi_2}\right) = \frac{b(t)}{2}.$$

Запитання для самоперевірки

1. Визначити швидкості в обмежено малій області суцільного середовища.
2. Розглянути теорему Гельмгольца.
3. Визначити тензор швидкості деформації і його властивості.

4. Пояснити геометричні співвідношення Коші.

Задачі для самостійного розв'язання

1. В результаті переміщення частинки (ξ_1, ξ_2, ξ_3) (ξ_1, ξ_2, ξ_3) середовища опинились у точках з координатами $x_1 = \xi_1 + a\xi_1$; $x_2 = \xi_2$; $x_3 = \xi_3$, a=*const* відносно просторової декартової системи координат. Що відбулося в результаті деформації з матеріальними елементами, початково розміщеними паралельно й перпендикулярно координатній осі x_1, при $a\rangle 0$ і при $-1\langle a\langle 0$? Обчислити компоненти тензора деформацій. Чому дорівнює відносна зміна об'єму?

2. В результаті переміщення з початкового стану частинки (ξ_1, ξ_2, ξ_3) середовища виявились у точках з координатами $x_1 = \xi_2$, $x_2 = -(1+b)\xi_1$; $x_3 = \xi_3, b = const\rangle 1$ відносно просторової декартової системи координат. Що відбулося в результаті деформації з матеріальними елементами, початково розміщеними паралельно координатним осям? Знайти тензор деформацій.

3. Деформація суцільного середовища відбувається за законом $x_1 = \xi_1 + a(t)\xi_2$; $x_2 = \xi_2$; $x_3 = \xi_3, a(t)$ - функція часу, причому *a(0)=0.* Що відбулося в результаті деформації? Знайти тензор деформацій. Чому дорівнює відносна змінна об'єму?

4. Обчислити компоненти тензора e в просторовій декартовій системі координат і компоненти його девіатора для течій середовища з полями швидкості, що мають у цих координатах компоненти: а) $v_1 = Ax_1$, $v_2 = Bx_2$, $v_3 = 0$, A,B=*const.* б) $v_1 = \alpha t x_1$, $v_2 = v_3 = 0, \alpha = const$ $v_2 = v_3 = 0, \alpha = const$; в) $v_1 = \beta t x_3$, $v_1 = v_2 = 0, \alpha = const$

5. Обчислити компоненти тензора швидкостей деформацій у просторовій декартовій системі координат для течії середовища з полем швидкості, що має в цій системі координат компоненти

$$v_1 = \frac{2x_2}{t};\ v_2 = \frac{2x_1}{t};\ v_3 = 0.$$

Чи відбувається при цьому русі зміна об'єму, який займають індивідуальні частки середовища?

6. В деякій точці середовища, в якій відбувалася мала деформація, тензор малих деформацій в декартовій системі координат має наступну матрицю компонент:

$$\begin{pmatrix} 0{,}01 & 0{,}03 & 0 \\ 0{,}03 & 0{,}01 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}01 \end{pmatrix}.$$

Знайти найбільше і найменше відносне видовження матеріальних елементів у цій точці. Знайти напрями матеріальних елементів, уздовж яких відбувається найбільше і найменше відносні видовження. Обчислити відносну зміну об’єму в цій точці.

ЛЕКЦІЯ 6

СИЛИ, ЩО ДІЮТЬ У СУЦІЛЬНОМУ СЕРЕДОВИЩІ

6.1. Класифікація сил. Масові, об'ємні і поверхневі сили

В теоретичній механіці в основному мають справу з ***зосередженими силами,*** в МСС- в основному з ***розподіленими силами:*** масовими і поверхневими.

Масові (об'ємні) сили – сили, що діють на кожний елемент маси, незалежно від сусідніх елементів. Це, як правило, результат дії на суцільне середовища зовнішніх силових полів (гравітаційного й електромагнітного), сюди ж слід віднести інерційні сили.

Нехай $\delta\tau$ - елементарний об'єм суцільного середовища (рис.6.1), $\Delta\vec{R}$ - головний вектор масових сил, що діють на виділений об'єм, Δm - маса елементарного об'єму. Тоді густина розподілу масових сил у даній точці

$$\vec{F} = \lim_{\Delta m \to 0} \frac{\Delta \vec{R}}{\Delta m}.$$

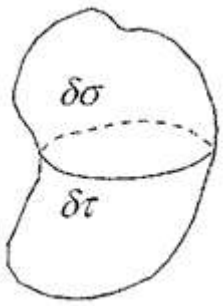


Рис.6.1

Звідси

$$\Delta\vec{R} = p\vec{F}\Delta\tau \text{ і } \vec{R} = \int_{\tau} p\vec{F}\delta\tau.$$

Масові сили утворюють поле $\vec{F} = \vec{F}(t,\vec{r}).$ Для гравітаційного поля $\vec{F} = \vec{g}.$

Доведення:

$$\vec{R} = \int_{\tau} p\vec{g}\delta\tau = p\vec{g}\tau = \vec{G} = m\vec{g}.$$

Іноді розглядають об’ємну густину $\vec{\Phi}\,\vec{\Phi}$ - силу, що приходиться на одиницю об’єму

$$\vec{\Phi} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta \vec{R}}{\Delta V}$$

В МСС основну роль відіграють не масові, а поверхневі сили.

Поверхневі сили – сили взаємодії різних частин (елементів) суцільного середовища. Це сили, які характеризують взаємодію частини тіла, що знаходиться всередині певного об’єму Q, обмеженого поверхнею τ, і частина тіла, яка знаходиться ззовні цієї поверхні (рис.6.2), і так для будь-якої поверхні.

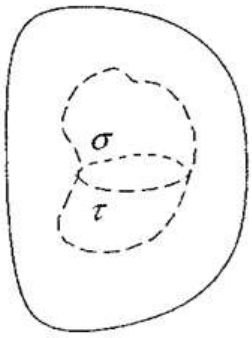


Рис. 6.2

Густина розподілу поверхневих сил в даній точці визначається наступним чином:

$$\vec{P}_n = \lim_{\Delta \sigma \to 0} \frac{\vec{P}}{\sigma}.$$

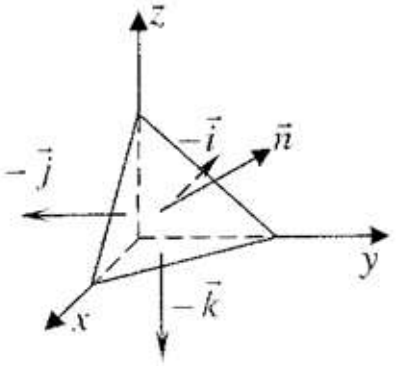
Головний вектор поверхневих сил, що діють на поверхні

$$\vec{P} = \int_{\sigma} \vec{P}_n d\sigma$$

Густина розподілу поверхневих сил $\vec{P}_n = \vec{P}_n(t, \vec{r}, \vec{n})$ поля не утворює, бо залежить від орієнтації площадки і від положення точки.

6.2 Тензор напружень

Розглянемо елементарний рідкий тетраедр (рис. 6.3). Запишемо рівняння руху центра інерції, використовуючи другий закон Ньютона:



$$p\delta\tau\cdot\vec{a}_c = p\vec{F}\delta\tau + \vec{p}_n\delta\sigma_n + \vec{p}_{-i}\delta\sigma_x + \vec{p}_{-j}\delta\sigma_y + \vec{p}_{-k}\delta\sigma_z,$$

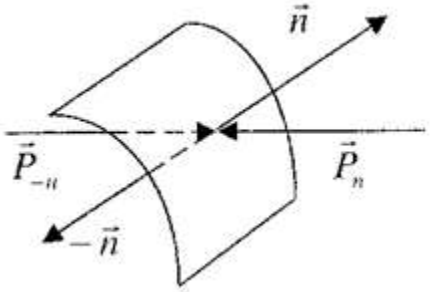
де $\vec{a}_c$ - прискорення центра інерції. В рівняння входять величини різного порядку малості ($\delta\tau$ - третій порядок малості, $\delta\sigma$ - другий порядок малості). Отримаємо

$$\vec{p}_n\delta\sigma_n + \vec{p}_{-i}\delta\sigma_x + \vec{p}_{-j}\delta\sigma_y + \vec{p}_{-k}\delta\sigma_z = 0.$$

Рис. 6.3

За третім законом Ньютоном $\vec{p}_{-n} = -\vec{p}_n$ (рис. 6.4). Тоді рівняння набере вигляду

$$\vec{p}_n\delta\sigma_n - \vec{p}_i\delta\sigma_x - \vec{p}_j\delta\sigma_y - \vec{p}_k\delta\sigma_z = 0.$$



Приймемо позначення $\vec{p}_i = \vec{p}_x, \vec{p}_j = \vec{p}_y, \vec{p}_k = \vec{p}_z$. В цих позначеннях рівняння запишеться так:

$$\vec{p}_n\delta\sigma_n - \vec{p}_x\delta\sigma_x - \vec{p}_y\delta\sigma_y - \vec{p}_z\delta\sigma_z = 0.$$

Враховуючи, що $\delta\sigma_x = n_x\delta\sigma_n$,

$$\delta\sigma_y = n_y\delta\sigma_n,\ \delta\sigma_z = n_z\delta\sigma_n.$$

Рис. 6.4

Де n_x, n_y, n_z- напрямні косинуси нормалі до поверхні (компоненти $\vec{n}(n_x, n_y, n_z)$), отримаємо: $\vec{p}_n = n_x\vec{p}_x + n_y\vec{p}_y + n_z\vec{p}_z$. Отже, наведені вище міркування дозволяють пов'язати густини поверхневих сил на довільній площадці з густинами поверхневих сил на площадках, що мають орієнтацію площин декартової системи координат.

Спроектуємо отриману рівність на осі декартової прямокутної системи координат

$$\vec{p}_{nx} = n_x\vec{p}_{xx} + n_y\vec{p}_{xy} + n_z\vec{p}_{xz}$$
$$\vec{p}_{ny} = n_x\vec{p}_{yx} + n_y\vec{p}_{yy} + n_z\vec{p}_{yz}$$
$$\vec{p}_{nz} = n_x\vec{p}_{zx} + n_y\vec{p}_{zy} + n_z\vec{p}_{zz}.$$

Ці співвідношення можна записати в еквівалентному вигляді $\vec{p}_n = \vec{n}P$,

$$p = \begin{pmatrix} p_{xx} & p_{yx} & p_{zx} \\ p_{xy} & p_{yy} & p_{zy} \\ p_{xz} & p_{yz} & p_{zz} \end{pmatrix}$$

де p тензор другого рангу який природно називати **тензором напружень.** В загальному випадку тензор напружень може залежати від часу і положення матеріальної точки. Тоді $\vec{p}_n = \vec{n}P(t,\vec{r})$ $\vec{p}_n = \vec{n}P(t,\vec{r})$.

Хоча густин розподілу поверхневих сил в кожній точці безліч, тензор напружень у даній точці єдиний. Для характеризації напруженого стану в даній точці треба знайти тензор напружень у цій точці. Тензор напружень утворює поле.

Перший індекс компоненти тензора напружень вказує на орту зовнішньої нормалі до поверхні, на якій розглядаємо розподіл поверхневих сил, другий – визначає вісь, на яку проектується вектор густини поверхневої сили.

Діагональні компоненти тензора напружень дають інформацію про нормальну складову поверхневої сили, а ***недіагональні*** компоненти характеризують дотичні складові поверхневих сил.

Ілюстративна задача

Нехай тензор напружень у точці має вигляд:

$$\begin{pmatrix} 7 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Визначити вектор напруження в цій точці на площадці з одиничним вектором нормалі $\vec{n} = \frac{2}{3}\vec{\imath} - \frac{2}{3}\vec{\jmath} + \frac{1}{3}\vec{k}$. Визначити величину напруження і тангенціальну складову вектора напружень.

Розв'язок:

За означенням, вектор напружень визначається наступним чином: $\vec{p}_n = \vec{n}P$.

Отже, в нашому випадку

$$\begin{pmatrix} 7 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -\frac{10}{3} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Тоді вектор напружень $\vec{p}_n = 4\vec{i} - \frac{10}{3}\vec{j}$, його величина (модуль) $|p_n| = \sqrt{16 + \frac{100}{9}} = \frac{\sqrt{244}}{3}$, а тангенціальна складова $\tau_n = \vec{p}_n\vec{n} = \frac{44}{9}$.

6.3. Рівняння нерозривності для багатокомпонентних сумішей

Суміші, що складаються з декількох компонент (наприклад, суміш водню, кисню і парів води; сплав олова і міді; розчин солі у воді; плазма - суміш вільних електронів і іонів), можна представити як сукупність кількох континуумів, які заповнюють один і той же об'єм. Цей об'єм вважають зайнятим даною сумішшю. Для кожного з таких континуумів можна ввести свою густину і свою швидкість. У випадку, коли в суміші не відбуваються хімічні реакції або іонізація, для кожної з компонент суміші повинен виконуватися закон збереження маси. Тому можна записати скільки рівнянь нерозривності, скільки є складових компонент у суміші:

$$\frac{dm_i}{dt} = 0, \text{ або } \frac{d\rho_i}{dt} + \text{div}\rho_i\vec{V}_i = 0$$

Якщо в суміші відбуваються хімічні реакції чи іонізація, то маси компонент можуть змінюватись. Введемо x_i- зміна маси і-ї компоненти суміші в одиниці часу на одиницю об'єму за рахунок хімічної реакції або іонізації. Тоді рівняння нерозривності для компонент суміші можна записати у вигляді

$$\frac{dm_i}{dt} = x_i \text{ або } \frac{d\rho_i}{dt} + \text{div}\rho_i\vec{V}_i = x_i.$$

Основний закон хімічних реакцій полягає у тому, що загальна маса суміші залишається постійною, і тому

$$\sum_{i=1}^{N} x_i = 0.$$

Тоді для суміші в цілому $\sum_{i=1}^{N} \frac{d\rho_i}{dt} + dav\sum_{i=1}^{N} \rho_i\vec{V}_i = 0$

Можна ввести у розгляд одну густину і одну швидкість суміші в даному об'ємі дорівнює сумі мас компонент в цьому ж об'ємі

$$\sum_{i=1}^{N} m_i = m,$$

звідси

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{\tau} = \frac{m}{\tau},$$

де τ - об'єм суміші.

Тоді густина суміші визначається як $\rho = \sum_{i=1}^{N} \rho_i$.

Якщо швидкість суміші в цілому визначити як швидкість спільного центра мас індивідуальних об'ємів, що відповідають компонентам суміші, то

$$m\vec{V} = \sum_{i=1}^{N} m_i\vec{V}_i \quad \text{звідси} \quad \rho\vec{V} = \sum_{i=1}^{N} \rho_i\vec{V}_i$$

Тобто рівняння нерозривності для багатокомпонентної суміші (реагуючої і не реагуючої), має вигляд, подібний до рівняння нерозривності однорідного тіла:

$$\frac{d\rho}{dt} + div\rho\vec{V} = 0.$$

6.4. Рівняння нерозривності у випадку процесів з дифузією

Може статися, що всі компоненти суміші рухаються з однаковими швидкостями, які співпадають із швидкістю руху суміші в цілому. Такого роду процеси є процесами без дифузії. Якщо швидкості компонент різні, то має місце дифузія; в цьому випадку одні компоненти суміші рухаються відносно інших.

У випадку наявності хімічної взаємодії і дифузії рівняння маємо для компонент суміші

$$\frac{d\rho_i}{dt} + div\rho_i\vec{V} = x_i - div\vec{I}_i \text{, де } \vec{I}_i = \rho(\vec{V}_i - \vec{V})$$

Різниця $(\vec{V}_i - \vec{V})$- швидкість *i*-ї компоненти суміші відносно середовища в цілому $div\vec{I}_i$ характеризують зміну маси *i*-ї компоненти в об'ємі, що рухається зі швидкістю $\vec{V}$, за рахунок того, що цей об'єм, якщо $\vec{V} \neq \vec{V}_i$, не є індивідуальним об'ємом для *i*-ї компоненти. Частинки, що складають *i*-у компоненту, входять в цей об'єм і виходять з нього. Вектори $\vec{I}_i$ називають векторами потоку дифузії.

Закони дифузії в різних випадках можуть бути різними, але в будь-якому випадку виконується умова.

$$\sum_{i=1}^{N} I_i = 0$$

Для суміші в цілому знову виконується рівняння

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho div\vec{V} = 0$$

Отже, рівняння нерозривності має універсальний характер і виконується при рухах будь-якого матеріального середовища, його вигляд не залежить від властивостей середовища. В рівняння нерозривності у випадку стисливого середовища входять чотири невідомі функції: густина і три компоненти швидкості; у випадку стисливого середовища в нього входять лише три невідомі функції -

компоненти швидкості. Для розв'язку задач МСС одного рівняння нерозривності не достатньо.

6.5. Закон про зміну кількості руху суцільного середовища

Закон формулюється наступним чином: індивідуальна похідна за часом від головного вектора кількості руху рідкого об'єму суцільного середовища дорівнює сумі головного вектора поверхневих сил, що діють на цей об'єм:

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\tau(t)}\rho\vec{V}\delta\tau=\int\limits_{\tau(t)}\rho\vec{F}\delta\tau+\int\limits_{\sigma(t)}\vec{\rho}_n\delta\sigma.$$

Виконаємо перетворення

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\tau(t)}\rho\vec{V}\delta\tau=\int\limits_{\tau(t)}\rho\frac{d\vec{V}}{dt}\delta\tau+\int\limits_{\tau(t)}\vec{V}\frac{d}{dt}(\vec{\rho}\delta\tau)=\int\limits_{\tau(t)}\rho\frac{d\vec{V}}{dt}\delta\tau,$$

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\tau(t)}\rho\vec{V}\delta\tau=\int\limits_{\tau(t)}\rho\frac{d\vec{V}}{dt}\delta\tau+\int\limits_{\tau(t)}\vec{V}\frac{d}{dt}(\vec{\rho}\delta\tau)=\int\limits_{\tau(t)}\rho\frac{d\vec{V}}{dt}\delta\tau,\ \text{оскільки}\ \frac{d\rho\delta\tau}{dt}=\frac{d\delta m}{dt}=0.$$

Крім того,

$$\int\limits_{\sigma(t)}\vec{\rho}_n\delta\sigma=\int\limits_{\sigma(t)}(n_x\vec{\rho}_x+n_y\vec{\rho}_y+n_z\vec{\rho}_z)\delta\sigma=\int\limits_{\tau(t)}(\frac{d\vec{\rho}_x}{dx}+\frac{d\vec{\rho}_y}{dy}+\frac{d\vec{\rho}_z}{dz})\delta\tau,\quad\int\limits_{\sigma(t)}n_x\vec{a}\,\delta\sigma=\int\limits_{\tau(t)}\frac{d\vec{a}}{dx}\delta\tau,$$

Тоді

$$\int\limits_{\tau(t)}(\rho\frac{d\vec{V}}{dt}-\rho\vec{F}-\frac{d\vec{\rho}_x}{dx}-\frac{d\vec{\rho}_y}{dy}-\frac{d\vec{\rho}_z}{dz})\delta\tau=0\,.$$

В силу довільності вибору об'єму суцільного середовища інтеграл обертається в нуль.

Отримаємо ***рівняння динаміки в напруженнях***

$$\rho\frac{d\vec{V}}{dt}=\rho\vec{F}+\frac{d\vec{\rho}_x}{dx}+\frac{d\vec{\rho}_y}{dy}+\frac{d\vec{\rho}_z}{dz},$$

Яке в розгорнутому вигляді записується так:

$$\begin{cases} \rho\left(\frac{du}{dt}+u\frac{du}{dx}+v\frac{du}{dy}+w\frac{du}{dz}\right)=\rho F_x+\frac{d\rho_{xx}}{dx}+\frac{d\rho_{yx}}{dy}+\frac{d\rho_{zx}}{dz}, \\ \rho\left(\frac{du}{dt}+u\frac{du}{dx}+v\frac{du}{dy}+w\frac{du}{dz}\right)=\rho F_y+\frac{d\rho_{xy}}{dx}+\frac{d\rho_{yy}}{dy}+\frac{d\rho_{zy}}{dz}, \\ \rho\left(\frac{du}{dt}+u\frac{du}{dx}+v\frac{du}{dy}+w\frac{du}{dz}\right)=\rho F_z+\frac{d\rho_{xz}}{dx}+\frac{d\rho_{yz}}{dy}+\frac{d\rho_{zz}}{dz}. \end{cases}$$

Оскільки

$$\int_{\sigma(t)}\vec{\rho}_n\delta\sigma=\int_{\tau(t)}(\frac{d\vec{\rho}_x}{dx}+\frac{d\vec{\rho}_y}{dy}+\frac{d\vec{\rho}_z}{dz})\delta\tau,$$

то $\lim\limits_{\Delta\tau\to 0}\frac{1}{\Delta\tau}\int_{\sigma(t)}\vec{\rho}_n\delta\sigma=\frac{d\rho_x}{dx}+\frac{d\vec{\rho}_y}{dy}+\frac{d\vec{\rho}_z}{dz}$

або $\lim\limits_{\Delta\tau\to 0}\frac{1}{\Delta\tau}\int_{\sigma(t)}\vec{n}P\delta\sigma=\mathrm{Div}P$

Величину, яка стоїть в правій частині останньої рівності, називають ***дивергенцією тензора другого рангу.***

Маємо

$$\rho\frac{d\vec{V}}{dt}=\rho\vec{F}+DivP$$

Дивергенція другого рангу є вектором

$$(DivP)_i=\rho_{jij}=\sum_{j=1}^{3}\frac{d\rho_{ji}}{dx_j}$$

Тоді рівняння динаміки в напруженнях можна записати в індексній формі

$$\rho\frac{dV_i}{dt}=\rho F_i+\rho_{jij},$$

або

$$\rho\left(\frac{dV_i}{dt}+V_j\frac{dV_i}{dx_j}\right)=\rho F_i+\rho_{jij}$$

Часто пишуть ρ_{ijj} замість ρ_{jij}, що в загальному випадку невірно. Даний запис справедливий, якщо встановимо, що тензор напружень симетричний, тобто, якщо виконуються умови $\rho_{ij} = \rho_{ji}$.

Запитання для самоконтролю

1. Класифікувати сили.
2. Охарактеризувати масові, об‘ємні і поверхневі сили.
3. Визначити тензор напружень.

Задачі для самостійного розв’язування

Задача 1. Нехай тензор напружень у точці має вигляд:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 2 & 6 & 5 \\ -2 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Визначити вектор напруження в цій точці на площадці з одиничним вектором нормалі $\vec{n} = \frac{1}{3}\vec{i} - \frac{2}{3}\vec{j} + \frac{2}{3}\vec{k}$. Визначити величину напруження і тангенціальну складову вектора напружень.

Задача 2. Нехай тензор напружень у точці має вигляд:

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 & -3 \\ 6 & 5 & -4 \\ -3 & -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Визначити вектор напруження в цій точці на площадці з одиничним вектором нормалі $\vec{n} = \frac{2}{5}\vec{i} - \frac{3}{5}\vec{j} + \frac{4}{5}\vec{k}$. Визначити величину напруження і тангенціальну складову вектора напружень.

Задача 3. Нехай тензор напружень у точці має вигляд:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -1 & 6 & 4 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Визначити вектор напруження в цій точці на площадці з одиничним вектором нормалі $\vec{n} = \frac{1}{4}\vec{i} - \frac{2}{4}\vec{j} + \frac{3}{4}\vec{k}$. Визначити величину напруження і тангенціальну складову вектора напружень.

ЛЕКЦІЯ 7

ОСНОВНІ ЗАКОНИ МСС

7.1. Класичний закон про зміну моменту кількості руху

Розглянемо скінчений рідкий об’єм суцільного середовища.

Закон формулюють наступним чином*: індивідуальна похідна за часом від головного вектора моменту кількості руху рідкого об’єму суцільного середовища дорівнює сумі моментів масових і поверхневих сил, що діють на цей об’єм:*

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\tau(t)}\vec{r}\times\rho\vec{V}\delta\tau=\int\limits_{\tau(t)}\vec{r}\times\rho\vec{F}\delta\tau+\int\limits_{\sigma(t)}\vec{r}\times\rho_n\delta\sigma$$

Зробимо перетворення

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\tau(t)}\vec{r}\times\rho\vec{V}\delta\tau=\int\limits_{\tau(t)}\frac{d\vec{r}}{dt}\times\rho\vec{V}\delta\tau+\int\limits_{\sigma(t)}\vec{r}\times\rho\frac{d\vec{V}}{dt}\delta\tau+\int\limits_{\tau(t)}\vec{r}\times\vec{V}\frac{d}{dt}(\rho\delta\tau).$$

Оскільки

$$\frac{dr}{dt}\times\vec{V}=0,\ \ \frac{d\rho\delta\tau}{dt}=\frac{d\delta m}{dt}=0\,.$$

То

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\tau(t)}\vec{r}\times\rho\vec{V}\delta\tau=\int\limits_{\tau(t)}\vec{r}\times\rho\frac{d\vec{V}}{dt}\delta\tau.$$

У свою чергу

$$\int\limits_{\sigma(r)}\vec{r}\times p_n\delta\sigma=\int\limits_{\tau(t)}\left(\frac{d(\vec{r}\times\vec{p}_x)}{dx}+\frac{d(\vec{r}\times\vec{p}_y)}{dy}+\frac{d(\vec{r}\times\vec{p}_z)}{dz}\right)\delta\tau,$$

бо $\vec{p}_n=n_x\vec{p}_x+n_y\vec{p}_y+n_z\vec{p}_z$, далі отримуємо

$$\int\limits_{\sigma(r)}\vec{r}\times p_n\delta\sigma=\int\limits_{\tau(t)}\left[\vec{r}\times\left(\frac{d\vec{p}_x}{dx}+\frac{d\vec{p}_y}{dy}+\frac{d\vec{p}_z}{dz}\right)+\frac{d\vec{r}}{dx}\times\vec{p}_x+\frac{d\vec{r}}{dy}\times\vec{p}_y+\frac{d\vec{r}}{dz}\times\vec{p}_z\right]\delta\tau.$$

Підставивши отримані співвідношення , маємо

$$\int_{\tau(t)} [\vec{r} \times \left(\rho \frac{d\vec{V}}{dt} - \rho\vec{F} - \frac{d\vec{p}_x}{dx} - \frac{d\vec{p}_y}{dy} - \frac{d\vec{p}_z}{dz} \right) - \frac{d\vec{r}}{dx} \times \vec{p}_x - \frac{d\vec{r}}{dy} \times \vec{p}_y - \frac{d\vec{r}}{dz} \times \vec{p}_z] \delta\tau = 0.$$

Використаємо рівняння

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = \rho\vec{F} + \frac{d\vec{p}_x}{dx} + \frac{d\vec{p}_y}{dy} + \frac{d\vec{p}_z}{dz}$$

і умову для обертання попереднього інтеграла в нуль. Тоді в силу довільності вибору об'єму суцільного середовища підінтегральна функція повинна дорівнювати нулю. Внаслідок цього отримаємо

$$\frac{d\vec{r}}{dx} \times \vec{p}_x - \frac{d\vec{r}}{dy} \times \vec{p}_y - \frac{d\vec{r}}{dz} \times \vec{p}_z = 0.$$

Але $\vec{r} = \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z$, $\frac{d\vec{r}}{dx} = \vec{i}$, $\frac{d\vec{r}}{dy} = \vec{j}$, $\frac{d\vec{r}}{dz} = \vec{k}$.

Тоді останнє рівняння можна переписати у вигляді

$$\vec{i} \times \vec{p}_x + \vec{j} \times \vec{p}_y + \vec{k} \times \vec{p}_z = 0.$$

Проектуючи цю рівність на декартовій системі координат отримаємо

$$p_{xy} = p_{yx}, \quad p_{xz} = p_{zx}, \quad p_{yz} = p_{zy}.$$

Ці співвідношення називають ***законом парності дотичних напружень.*** Закон парності дотичних напружень є безпосереднім наслідком закону про зміну моменту кількості руху у випадку відсутності внутрішніх моментів імпульсу і зовнішніх масових і поверхневих моментів.

7.2. Закон про зміну моменту кількості руху

Зауважимо, що симетрія тензора напружень *P* виконується не завжди.

Розглянемо систему, що складається з ядра і електрона, який обертається навколо нього, тобто атом. Електрон обертається по орбіті зі швидкістю, що наближається до швидкості світла, і тому, навіть при малому розмірі атома, система ядро – електрон має значний ***власний момент кількості руху.*** Момент кількості руху за рахунок обертання електрона по орбіті називають ***обертальним моментом кількості руху.*** Крім того, електрон, а також ядро мають власний момент кількості руху – ***спін,*** наявність якого не можна пояснити за допомогою введення відповідного механічного руху.

Таким чином, всі атоми мають власні моменти кількості $\vec{k}$. Але сума цих моментів кількості руху для всіх атомів у силу хаотичності руху в багатьох випадках дорівнює нулю. Однак рух елементарних частинок можна впорядкувати, наклавши, наприклад, магнітне поле, і тоді сума внутрішніх моментів усіх атомів буде відмінна від нуля. В цьому випадку у вираз для моменту кількості руху макроскопічного об'єму суцільного середовища повинна, взагалі кажучи, входити сума власних моментів кількості руху

$$\int_V \vec{k}\rho\delta\tau.$$

Власні моменти імпульсу стали розглядатися в МСС лише останнім часом, коли коло задач у зв'язку з потребами сучасної техніки дуже розширилось. У класичних питаннях МСС внутрішні моменти $\vec{k}$ не враховуються і момент кількості руху об'єму суцільного середовища визначається лише як

$$\int_V \vec{r} \times \vec{V}\rho\delta\tau.$$

Вводячи в розгляд внутрішні моменти $\vec{k}$, треба допустити існування розподілених масових і поверхневих моментів. Тобто вважати, що на кожну частку суцільного середовища діють розподілені масові і поверхневі сили. Але може статися так, що дію зовнішніх матеріальних об'єктів не можна змінити лише цими силами, а треба вводити також масові і поверхневі моменти (наприклад моменти,

що діють на кожний елемент магнітної стрілки у магнітному полі Землі; моменти, що діють на діелектричну частинку з боку зовнішнього електричного поля).

Нехай реальне середовища має складну будову, і в ньому є елементи, що мають витягнуту форму. Характерний розмір мікрочастинок l, а характерний макророзмір L. Тоді якщо $L \rangle\rangle l$, то можемо використовувати модель суцільного середовища. В результаті, наприклад, дії зсувної течії вісь симетрії частинки описує конічну поверхню (рис. 7.1).

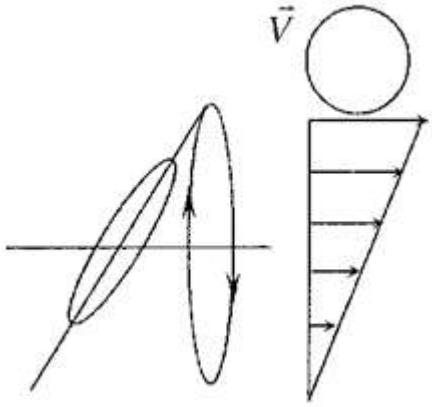


Рис. 7.1

Тобто на дану частку діє момент розподілених сил, що викликає обертання, і сила, яка викликає рух частинки вперед. При цьому частинки будуть мати власний момент кількості руху. Позначимо через $\vec{h}$ і $\vec{Q}_n$ відносні до одиниці маси і поверхні моменти, відповідно, масових і поверхневих пар. Тоді рівняння моментів кількості руху для скінченного індивідуального об'єму суцільного середовища буде

$$\frac{d}{dt}\left(\int_{\tau(t)} \vec{r} \times \rho \vec{V} \delta\tau\right) = \int_{\tau(t)} \vec{r} \times \vec{F} \rho \delta\tau + \int_{\sigma(t)} \vec{r} \times \vec{p}_n \delta\sigma + \int_{\tau(t)} \vec{h} \rho \delta\tau + \int_{\sigma(t)} \vec{Q}_n \delta\sigma$$

$$\frac{d}{dt}\left(\int_{\tau(t)} \vec{r} \times \rho \vec{V} \delta\tau\right) = \int_{\tau(t)} \vec{r} \times \vec{F} \rho \delta\tau + \int_{\sigma(t)} \vec{r} \times \vec{p}_n \delta\sigma + \int_{\tau(t)} \vec{h} \rho \delta\tau + \int_{\sigma(t)} \vec{Q}_n \delta\sigma .$$

Тоді закон про зміну моменту кількості руху сформулюють так: похідна за часом від моменту імпульсу довільного індивідуального об'єму суцільного середовища (з врахуванням власних моментів) дорівнює сумі моментів зовнішніх

масових і поверхневих сил, які діють на цей об'єм, і сумі моментів викликаних зовнішніми по відношенню до об'єму матеріальними об'єктами.

Рівняння моменту імпульсу, як і рівняння імпульсу постулюється для індивідуального об'єму суцільного середовища подібно тому, як для матеріальної точки постулюється другий закон Ньютона, підкреслимо, що останнє рівняння не випливає з рівняння моментів кількості руху механіки системи матеріальних точок, а є самостійним рівнянням. В загальному випадку

$$\frac{d\vec{r}}{dx}\times\vec{p}_x+\frac{d\vec{r}}{dy}\times\vec{p}_y+\frac{d\vec{r}}{dz}\times\vec{p}_z=0.$$

Не виконується і закон парності дотичних напружень не має місця, тобто $p_{ij}\neq p_{ji}$. В класичній механіці суцільного середовища (у випадку відсутності внутрішніх моментів імпульсу і зовнішніх масових і поверхневих моментів) закон парності дотичних напружень залишається справедливим: $p_{ij}=p_{ji}$. Класична механіка розглядає рідину порівняно простої молекулярної будови, тому допущення справедливе.

Раніше ми отримали чотири універсальних рівняння, які описують рух суцільного середовища. Тепер до них додалися три рівняння моментів кількості руху. В класичному випадку ці три додаткових рівняння не містять нових невідомих, а просто зменшують число невідомих компонент тензора напружень до шести.

Однак отримана система рівнянь руху все ще замкнута. Для компонент тензора напружень у ряді випадків можна написати додаткові формули, пов'язані з фізичними особливостями конкретних моделей суцільного середовища, і після цього значно просунутися на шляху отримання замкнутої системи рівнянь.

7.3 Закон про зміну кінетичної енергії суцільного середовища

Використаємо рівняння закону про зміну імпульсу в інтегральній формі

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\tau(t)}\rho\vec{V}\delta\tau=\int\limits_{\tau(t)}\rho\vec{F}\delta\tau+\int\limits_{\sigma(t)}\vec{p}_n\delta\sigma$$

Після перетворень раніше отримали

$$\int_{\tau(t)} (\rho \frac{d\vec{V}}{dt} - \rho\vec{F} - \frac{d\vec{p}_x}{dx} - \frac{d\vec{p}_y}{dy} - \frac{d\vec{p}_z}{dz})\delta\tau = 0.$$

Помножимо останнє рівняння скалярно на швидкість $\vec{V}$

$$\int_{\tau(t)} (\rho \frac{d\vec{V}}{dt}\vec{V} - \rho\vec{F}\vec{V} - \frac{d\vec{p}_x}{dx}\vec{V} - \frac{d\vec{p}_y}{dy}\vec{V} - \frac{d\vec{p}_z}{dz}\vec{V})\delta\tau = 0.$$

Звідси $\int_{\tau(t)} \rho \frac{d\vec{V}}{dt}\vec{V}\delta\tau = \int_{\tau(t)} \rho\vec{F}\vec{V}\delta\tau + \int_{\tau(t)} (\frac{d\vec{p}_x}{dx}\vec{V} + \frac{d\vec{p}_y}{dy}\vec{V} + \frac{d\vec{p}_z}{dz}\vec{V})\delta\tau$.

Оскільки перший інтеграл можна перетворити наступним чином:

$$\int_{\tau(t)} \rho \frac{d\vec{V}}{dt}\vec{V}\delta\tau = \int_{\tau(t)} \rho \frac{d}{dt}\left(\frac{V^2}{2}\right)\delta\tau = \frac{d}{dt}\int_{\tau(t)} \left(\frac{V^2}{2}\right)\rho\delta\tau,$$

а останній інтеграл можна записати

$$\int_{\tau(t)} (\frac{d(\vec{p}_x\vec{V})}{dx} + \frac{d(\vec{p}_y\vec{V})}{dy} + \frac{d(\vec{p}_z\vec{V})}{dz} - \vec{\rho}_x \frac{d\vec{V}}{dx} - \vec{\rho}_y \frac{d\vec{V}}{dy} - \vec{\rho}_z \frac{d\vec{V}}{dz})\delta\tau.$$

Застосувавши до $\int_{\tau(t)} (\frac{d(\vec{p}_x\vec{V})}{dx} + \frac{d(\vec{p}_y\vec{V})}{dy} + \frac{d(\vec{p}_z\vec{V})}{dz})\delta\tau$ теорему Остроградського-Гаусса та позначивши

$$- \vec{\rho}_ч \frac{d\vec{V}}{dx} - \vec{\rho}_y \frac{d\vec{V}}{dy} - \vec{\rho}_z \frac{d\vec{V}}{dz} = N_{in}$$

Отримуємо інтегральну форму закону про зміну кінетичної енергії

$$\frac{d}{dt}\int_{\tau(t)} \rho \frac{V^2}{2}\delta\tau = \int_{\tau(t)} \rho\vec{F}\cdot\vec{V}\delta\tau + \int_{\sigma(t)} \vec{\rho}_n\cdot\vec{V}\delta\sigma + \int_{\tau(t)} N_{in}\delta\tau.$$

Сам закон формулюється наступним чином: індивідуальна похідна за часом від кінетичної енергії виділеного рідкого об'єму дорівнює сумі потужностей масових, поверхневих і внутрішніх сил, де N_{in}- густина розподілу потужностей внутрішніх сил. Це твердження іноді називають ***теоремою живих сил.*** Воно є

наслідком рівняння закону про величину імпульсу і являє собою рівняння балансу механічної енергії.

Достатньо легко можна вивести диференціальну форму закону про зміну кінетичної енергії.

$$\rho \frac{d}{dt}\left(\frac{V^2}{2}\right) = \rho\vec{F}\cdot\vec{V} + div(P\cdot\vec{V}) + N_{in}$$

Розглянемо детальніше N_{in}, маємо

$$N_{in} = -\vec{\rho}_x \frac{d\vec{V}}{dx} - \vec{\rho}_y \frac{d\vec{V}}{dy} - \vec{\rho}_z \frac{d\vec{V}}{dz} = -P\vec{\nabla}\vec{V} = -P\cdot(e+\omega),$$

або $N_{in} = -P\cdot e$.

Оскільки $P\cdot\omega$, тому що один з них симетричний, а другий антисиметричний. Остаточно

$$N_{in} = -P\cdot e = -p_{ij}\cdot e_{ij}.$$

7.4. Метод контрольних поверхонь (об'ємів)

Знайдемо силу, з якою рідина діє на тіло, яке має поверхню σ_0 і знаходиться в ній. Позначимо $\vec{R}$ - головний вектор сил, з яким рідина діє на тіло,

$$\vec{R} = \int_{\sigma(t)} \vec{\rho}_n \delta\sigma,$$

де $\vec{\rho}_n$ - густина розподілу поверхневих сил по поверхні тіла.

Оточимо тіло разом з рідиною ***контрольною поверхнею*** σ (рис.7.2).

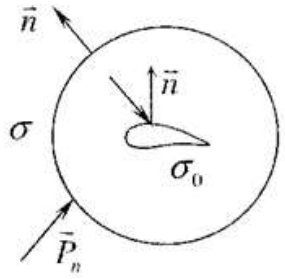


Рис. 7.2

Застосуємо закон про зміну кількості руху до ***контрольного об'єму*** – об'єму, оточеного контрольною поверхнею:

$$\frac{d}{dt}\int_{\tau}\rho\vec{V}\delta\tau=\int_{\tau}\rho\vec{F}\delta\tau+\int_{\sigma}\vec{\rho}_{n}\delta\sigma-\int_{\sigma_0}\vec{\rho}_{n}\delta\sigma_0,$$

де $\int_{\sigma_0}\vec{\rho}_{n}\delta\sigma_0$ і є головним вектором сил, з яким рідина діє на тіло.

В рівняння цей доданок входить із знаком мінус, оскільки його напрямок є протилежним до напрямку зовнішньої нормалі до поверхні $\vec{n}$. Масовою силою, як правило, нехтуємо, тобто $\int_{\tau}\rho\vec{F}\delta\tau=0$. Тоді маємо

$$\vec{R}=\int_{\sigma}\vec{\rho}_{n}\delta\sigma-\frac{d}{dt}\int_{\tau}\rho\vec{V}\delta\tau.$$

Пам'ятаючи, що $\frac{d}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}+\left(\frac{d}{dt}\right)_{конв}$, а в *стаціонарному* випадку $\frac{\partial}{\partial t}=0$, отримуємо для випадку стаціонарних процесів

$$\frac{d}{dt}=\left(\frac{d}{dt}\right)_{конв}.$$

Теорема: конвективна похідна по часу від інтеграла деякої фізичної величини по об'єму дорівнює переносу даної фізичної величини через контрольну поверхню, що обмежує область інтегрування,

$$\left(\frac{d}{dt}\right)_{конв}\int_{\tau}\Phi\delta\tau=\int_{\sigma}\Phi V_{n}\delta\sigma.$$

Доведення**:** розіб'ємо об'єм τ на елементарні трубки *ABCD* і для кожної з них складемо вираз безмежно малої конвективної зміни інтеграла від величини *Ф* по об'єму елементарної трубки, що відбувається за час *dt* в результаті переміщення цього об'єкта з положення *ABCD* в положення *A'B'C'D'* (рис.7.3).

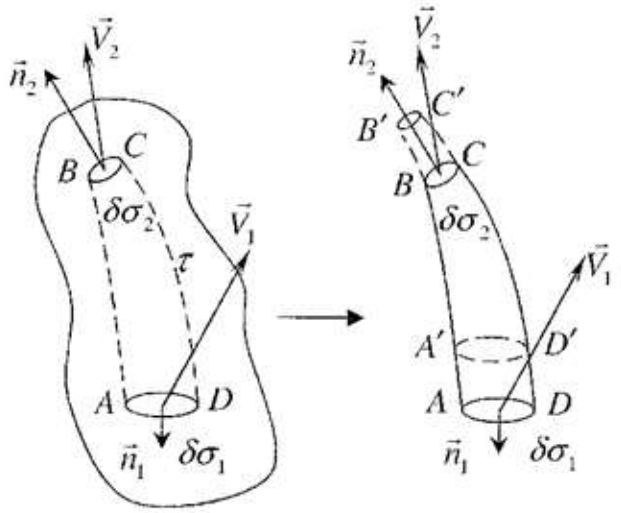


Рис.7.3

Конвективний приріст $\int_{\tau} \Phi\delta\tau$ за час *dt* обумовлений лише зміною положення об'єму інтегрування в координатному полі $\Phi(x_1, x_2, x_3, t)$, «замороженому» в початковий момент часу *t*.

Отже, інтеграл по загальній частині *A'BCD'* нового і старого об'ємів на цей приріс не вплине і може бути викинутий. Тоді

$$d_{конв}\int_{\tau}\Phi\delta\tau = \int_{A'B'C'D'}\Phi\delta\tau - \int_{ABCD}\Phi\delta\tau = \int_{BB'C'C}\Phi\delta\tau - \int_{AA'D'D}\Phi\delta\tau$$

Оскільки розглядувані об'єми є елементарними, то справедливими будуть наступні міркування: об'єм AA'D'D дорівнює $-V_{1n}\delta\sigma_1 dt$, об'єм BB'B'C дорівнює $V_{2n}\delta\sigma_2 dt$, тоді шукана конвективна зміна Φ в об'ємі трубки дорівнює

$$\Phi_1 V_{1n}\delta\sigma_1 dt + \Phi_2 V_{2n}\delta\sigma_2 dt.$$

Тут $\Phi V_n\delta\sigma$ добуток фізичної величини Φ на щосекундну об'ємну витрату $V_n\delta\sigma$ середовища через площадку $\delta\sigma$ є перенесення величини Φ через цю площадку.

Виконуючи додавання цих величин по всіх елементарних трубках, на які розбито об'єм τ, отримаємо інтеграл $\int_{\sigma} \Phi V_n \delta\sigma$, який визначає перенесення величин Φ через контрольну поверхню σ.

Безмежно мала конвективна зміна інтеграла фізичної величини по об'єму за час *dt* становить

$$d_{конв} \int_{\tau} \Phi \delta\tau = \int_{\sigma} \Phi V_n \, \delta\sigma \cdot dt,$$

звідси $\left(\frac{d}{dt}\right)_{конв} \int_{\tau} \Phi \delta\tau = \int_{\sigma} \Phi V_n \delta\sigma.$

Застосовуючи загальні теореми механіки до кінцевих об'ємів суцільного середовища, ми можемо знаходити інтегральні характеристики. Причому це можна робити, не знаючи розв'язок всюди, а знаючи розв'язок лише на контрольних поверхнях ,(не обов'язково поблизу тіла).

Ілюстративні задачі

Задача 1. Рідина рухається по нерухомій викривленій трубці (рис. 7.4). Визначити загальну силу, з якою рідина діє на внутрішні тіла і на поверхню трубки. На вході тиск, густина рідини та площа перерізу трубки рівні, відповідно, ρ_1, ρ_1, S_1; на виході ρ_2, ρ_2, S_2.

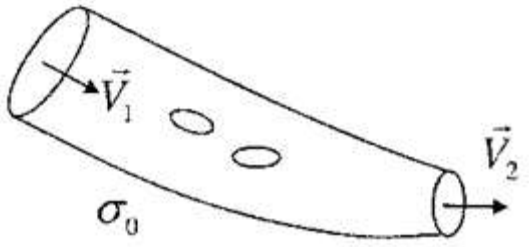


Рис.7.4

*Розв'язок:*Необхідно знайти результуючу силу тиску рідини на поверхню $\sigma_0 + \sigma_1 + \sigma_2$, де σ_0- поверхня трубки, а σ_1, σ_2- поверхні тіл у рідині. За контрольну поверхню візьмемо поверхню, що оточує трубку, а S_1, S_2 є її частинами. Тоді використання методу контрольних поверхонь дає

$$\vec{R} = (\rho_1 + \rho_1 V_1^2) S_1 \frac{\vec{V}_1}{V_1} - (\rho_2 + \rho_2 V_2^2) S_2 \frac{\vec{V}_2}{V_2}$$

Задача 2. Для попередньої задачі визначити результуючий момент, що діє на внутрішні тіла і на поверхню трубки з боку рідини.

Розв'язок:

$$\vec{M} = (\rho_1 + \rho_1 V_1^2) S_1 \frac{\vec{r}_1 \cdot \vec{V}_1}{V_1} - (\rho_2 + \rho_2 V_2^2) S_2 \frac{\vec{r}_2 \cdot \vec{V}_2}{V_2},$$

де $\vec{r}_1, \vec{r}_2$- радіус-вектори центрів тяжіння перерізів S_1, S_2.

Запитання для самоперевірки

1. Визначити закон збереження маси суцільного середовища.
2. Розглянути рівняння нерозривності для багатокомпонентних сумішей.
3. розглянути рівняння нерозривності у випадках процесів з дифузією.

ЛЕКЦІЯ 8

ПОНЯТТЯ ПРО КРИВОЛІНІЙНІ ОРТОГОНАЛЬНІ СИСТЕМИ КООРДИНАТ

8.1. Інваріантність тензорів відносно вибору системи координат, метрика простору

Розглянемо дві довільні в загальному випадку криволінійні системи координат ξ^1,ξ^2,ξ^3 і η^1,η^2,η^3 з відповідністю координат $\xi^i=\xi^i(\eta^1,\eta^2,\eta^3)$. Існує зв'язок приростів $d\xi^i=\frac{\partial\xi^i}{\partial\eta^j}\partial\eta^j=a^i_j\partial\eta^j$ та $d\eta^i=\frac{\partial\eta^i}{\partial\xi^j}d\xi^j=b^i_jd\xi^j$,

Де величини a^i_j утворюють матрицю ***A***, величини b^i_j утворюють матрицю ***B.***

Матриці ***A*** і ***B*** введені для прямого і зворотного переходів, тому їх добуток – одинична матриця.

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E},\ |B|=\frac{1}{|A|}.$$

Система координат ξ^1,ξ^2,ξ^3 задається базисом з векторів $\vec{э}_i$, направлених по дотичних до координатних ліній. В системі координат ξ^1,ξ^2,ξ^3 розглянемо вектор $d\vec{r}=d\xi^1\,\vec{э}_1+d\xi^2\,\vec{э}_2+d\xi^3\,\vec{э}_3=d\xi^i\,\vec{э}_i$, де $d\xi^1,d\xi^2,d\xi^3$ - компоненти $d\vec{r}$, тоді

$$\vec{э}_i=\frac{\partial r}{\partial\xi^i}.$$

Позначимо в системі координат η^1,η^2,η^3 векторний базис $\vec{э}_1,\vec{э}_2,\vec{э}_3$. Тоді маємо $d\vec{r}=d\eta^j\,\vec{э}'_j$. В силу інваріантності відносно вибору системи координат $d\eta^j\,\vec{э}'_j=d\xi^i\,\vec{э}_i$.

Інваріантність вектора відносно вибору системи координат забезпечуються взаємною оберненістю перетворень компонент вектора і векторів базису, тобто $\vec{э}'_j=\vec{э}_i\,a^i_j$ (***коваріантне*** перетворення), $d\eta^i=b^i_jd\xi^j$ (***контраваріантне*** перетворення).

Розглянемо тензор другого рангу $T=T^{ij}\,\vec{э}_i\vec{э}_j$, де T^{ij} - компоненти тензора другого рангу в базисі $\vec{э}_i\vec{э}_j$, $\vec{э}_i\vec{э}_j$ - політдні добутки, які залежать від системи

координат. Інваріантність тензора другого рангу відносно вибору системи координат забезпечується взаємною оберненістю перетворень компонент і поліадних добутків.

Теж поширюється на тензор будь-якого рангу:

$$T = T^{ijklm}\ \vec{э}_i \vec{э}_j \vec{э}_k \vec{э}_l \vec{э}_m = T'^{ijklm}\ \vec{э}'_i \vec{э}'_j \vec{э}'_k \vec{э}'_l \vec{э}'_m .$$

Введемо ***метрику*** простору, тобто вкажемо спосіб визначення довжин у просторі.

Квадрат довжини $d\vec{r}$ у довільній (в загальному випадку криволінійній) системі координат має вигляд:

$$\left|d\vec{r}\right|^2 = (d\vec{r}, d\vec{r}) = d\xi^i\ \vec{э}_i\ d\xi^j\ \vec{э}_j = d\xi^i d\xi^j (\vec{э}_i \vec{э}_j) = d\xi^i d\xi^j g_{ij}, \text{ де } (\vec{э}_i, \vec{э}_j) = g_{ij},$$

Величина g_{ij} називають ***компонентами фундаментального (метричного) тензора простору*** $g = g_{ij}\ \vec{э}^i \vec{э}^j$, ***або метричними коефіцієнтами.*** Метричний тензор є симетричним тензором $g_{ij} = g_{ji}$.

В декартовій ортогональній системі координат для евклідового простору метричний тензор представляється одиничною матрицею, для псевдо евклідового – діагональною матрицею з ненульовими компонентами ± 1.

8.2. Метричні величини криволінійної ортогональної системи координат

Нехай декартова система координат пов'язана з деякою системою криволінійних ортогональних координат співвідношеннями

$$\begin{cases} x = x(q_1, q_2, q_3) \\ y = y(q_1, q_2, q_3) \\ z = z(q_1, q_2, q_3) \end{cases}$$

Положення в просторі індивідуальної частинки задається радіус-вектором $\vec{r} = \vec{r}(x, y, z)$, або $\vec{r} = \vec{r}(q_1, q_2, q_3)$

Одиничні орти, $\vec{k}_i$, криволінійної системи координат визначаються формулами

$$\vec{k}_i = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \div \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}\right|, \text{ де } \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}\right| = H_i = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2}.$$

Тут H_i- коефіцієнт Ламе. Орти $\vec{k}_i$- взаємно ортогональні.

Довжина елементарного відрізка координатної лінії визначається як

$$ds_i = \left|\frac{d\vec{r}}{\partial q_i}\right| dq_i = H_i dq_i,$$

а квадрат довжини відрізка лінії

$$ds^2 = ds_1^2 + ds_2^2 + ds_3^2 = H_1^2 dq_1^2 + H_2^2 dq_2^2 + H_3^2 dq_3^2.$$

Площі елементарних площадок, обмежених координатними поверхнями, знаходяться наступним чином:

$$d\sigma_1 = ds_2 ds_3 = H_2 H_3 dq_2 q_3$$

$$d\sigma_2 = ds_1 ds_3 = H_1 H_3 dq_1 q_3$$

$$d\sigma_3 = ds_1 ds_2 = H_1 H_2 dq_1 q_2$$

Елементарний об’єм визначається формулою:

$$d\tau = ds_1 ds_2 ds_3 = H_1 H_2 H_3 dq_1 dq_2 dq_3.$$

8.3. Основні диференціальні оператори криволінійної ортогональної системи координат

Розглянемо ***градієнт*** скалярної функції

$$(grad\varphi)_{qi} = grad\varphi \cdot \vec{k}_i = \frac{1}{H_i} grad\varphi \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} = \frac{1}{H_i}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial q_i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial q_i} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial q_i}\right) = \frac{1}{H_i}\frac{\partial \varphi}{\partial q_i}$$

В циліндричній системі координат

$$grad\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial \rho}\vec{k}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \varphi}{\partial \theta}\vec{k}_\theta + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\vec{k}_z,$$

бо $H_p = H_z = 1, H_\theta = \rho$

А в сферичній

$$grad\psi = \frac{\partial \psi}{\partial \rho}\vec{k}_\rho + \frac{1}{\rho \sin\varphi}\frac{\partial \psi}{\partial \theta}\vec{k}_\theta + \frac{\partial \psi}{\partial \varphi}\vec{k}_\varphi,$$

бо $H_p = 1, H_\theta = \rho\sin\varphi, H_\varphi = \rho$.

Використовуючи означення

$$div\vec{a} = \lim_{\tau \to 0}\frac{1}{\tau}\int_\sigma a_\rho \delta\sigma,$$

Знайдемо вираз для дивергенції вектора

$$div\vec{a} = \frac{1}{H_1 H_2 H_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}(a_{q_1} H_2 H_3) + \frac{\partial}{\partial q_2}(a_{q_2} H_3 H_1) + \frac{\partial}{\partial q_3}(a_{q_3} H_1 H_2)\right].$$

Формули складових ротора вектора мають вигляд:

$$\mathrm{rot}_{q_1}\vec{a} = \frac{1}{H_2 H_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_2}(a_{q_3} H_3) - \frac{\partial}{\partial q_3}(a_{q_2} H_2)\right],$$

$$\mathrm{rot}_{q_2}\vec{a} = \frac{1}{H_3 H_1}\left[\frac{\partial}{\partial q_3}(a_{q_1} H_1) - \frac{\partial}{\partial q_1}(a_{q_3} H_3)\right],$$

$$\mathrm{rot}_{q_3}\vec{a} = \frac{1}{H_1 H_2}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}(a_{q_2} H_2) - \frac{\partial}{\partial q_2}(a_{q_1} H_1)\right].$$

Оператор Лапласа має вигляд

$$\nabla^2\varphi = \frac{1}{H_1 H_2 H_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{H_2 H_3}{H_1}\frac{\partial \varphi}{\partial q_1}\right) + \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{H_3 H_1}{H_2}\frac{\partial \varphi}{\partial q_2}\right) + \frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{H_1 H_2}{H_3}\frac{\partial \varphi}{\partial q_3}\right)\right].$$

В циліндричній системі координат він наступний

$$\nabla^2\varphi = \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\right)+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\rho\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)\right],$$

або після перетворень

$$\nabla^2\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z}.$$

У сферичній системі координат маємо

$$\nabla^2\psi = \frac{1}{\rho^2\sin\varphi}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2\sin\varphi\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\right)+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\varphi\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\sin\varphi\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\right)\right],$$

Після перетворень маємо

$$\nabla^2\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial\rho^2}+\frac{2}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2\sin^2\varphi}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}+\frac{\cos\varphi}{\rho^2\sin\varphi}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}.$$

8.4. Компоненти тензорів та рівняння МСС у криволінійній ортогональній системі координат

Розглянемо компоненти тензора швидкостей деформації в криволінійних координатах.

Компоненти швидкості в криволінійній ортогональній системі координат записується наступним чином:

$$V_i = H_i\frac{dq_i}{dt}, i = 1,2,3$$

Розглянемо елементарний рідкий відрізок по часу, квадрат довжини якого визначається як

$$\delta s^2 = \sum_{k=1}^{3} H_k^2\,\delta q_k^2$$

Продиференціюємо цей вираз по часу

$$\frac{d}{dt}(\delta s^2) = 2\sum_{k=1}^{3}\left[\ H_k \frac{dH_k}{dt}\delta q_k^2 + H_k^2 \delta q_k \frac{d}{dt}(\delta q_k)\ \right]$$

Розглянемо окремо похідні, що входять до цього виразу:

$$\frac{dH_k}{dt} = \sum_{k=1}^{3}\frac{dH_k}{dq_i}\frac{dq_i}{dt} = \sum_{k=1}^{3}\frac{V_i}{H_i}\frac{dH_k}{dq_i},$$

$$\frac{d}{dt}(\delta q_k) = \delta\left(\frac{V_k}{H_k}\right) = \sum_{k=1}^{3}\frac{d}{dq_i}\left(\frac{V_k}{H_k}\right)\delta q_i.$$

Підставимо знайдені вирази в формулу:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\delta s^2) = \sum_{k=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\left[\frac{V_i}{H_i H_k}\frac{\partial H_k}{\partial q_i}\delta s_k^2 + \frac{H_k}{H_i}\frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{V_k}{H_k}\right)\delta s_i \delta s_k\right].$$

Якщо всі ці викладки повторити в декартовій системі координат, то зрештою отримаємо:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\delta s^2) = \sum_{k=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} e_{ik}\delta s_i \delta s_k,$$

де e_{ik}- компоненти тензора швидкостей деформацій.

Порівняємо ці два вирази і, відповідно, назвемо компонентами тензора швидкостей деформації коефіцієнти при добутку $\delta s_i \delta s_k$, тобто діагональними компонентами будуть

$$e_{11} = \sum_{i=1}^{3}\frac{V_i}{H_i H_1}\frac{\partial H_1}{\partial q_i} + \frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{V_1}{H_1}\right),$$

$$e_{22} = \sum_{i=1}^{3}\frac{V_i}{H_i H_2}\frac{\partial H_2}{\partial q_i} + \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{V_2}{H_2}\right),$$

$$e_{33} = \sum_{i=1}^{3}\frac{V_i}{H_i H_3}\frac{\partial H_3}{\partial q_i} + \frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{V_3}{H_3}\right),$$

а недіагональними компонентами –

$$e_{12} = \frac{H_1}{H_2}\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{V_1}{H_1}\right) + \frac{H_2}{H_1}\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{V_2}{H_2}\right),$$

$$e_{23} = \frac{H_2}{H_3}\frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{V_2}{H_2}\right) + \frac{H_3}{H_2}\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{V_3}{H_3}\right),$$

$$e_{31} = \frac{H_3}{H_1}\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{V_3}{H_3}\right) + \frac{H_1}{H_3}\frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{V_1}{H_1}\right).$$

Рівняння нерозривності в криволінійній системі координат має вигляд:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{H_1 H_2 H_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\rho V_1 H_2 H_3\right) + \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\rho V_2 H_3 H_1\right) + \frac{\partial}{\partial q_3}\left(\rho V_3 H_1 H_2\right)\right] = 0,$$

рівняння динаміки в напруженнях буде

$$\rho\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \rho\sum_{k=1}^{3}\frac{V_k}{H_k}\frac{\partial \vec{V}}{\partial q_k} = \rho\vec{F} + \frac{1}{H_1 H_2 H_3}\times\left[\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\vec{\rho}_1 H_2 H_3\right) + \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\vec{\rho}_2 H_3 H_1\right) + \frac{\partial}{\partial q_3}\left(\vec{\rho}_3 H_1 H_2\right)\right].$$

Слід зазначити, що якщо закони сформульовано у тензорному випадку з самого початку, то їх вигляд не змінюється залежно від системи координат. Наприклад, узагальнений закон Гука, що формулюється в механіці деформівного твердого тіла, і закон Ньютона не змінюються, оскільки початково вони сформульовані як тензорні закони.

Ілюстративні задачі

Задача 1: Виразити базисні вектори $\vec{э}_\varphi, \vec{э}_\theta, \vec{э}_\rho$, сферичної системи координат через орти декартової $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

Розв'язок:

$$\vec{r} = (\rho\cos\theta\sin\varphi)\vec{i} + (\rho\sin\theta\sin\varphi)\vec{j} + (\rho\cos\varphi)\vec{k},$$

$$\vec{э}_\rho = (\cos\theta\sin\varphi)\vec{i} + (\sin\theta\sin\varphi)\vec{j} + (\cos\varphi)\vec{k},$$

$$\vec{э}_\varphi = (\rho\cos\theta\cos\varphi)\vec{i} + (\rho\sin\theta\cos\varphi)\vec{j} + (-\rho\sin\varphi)\vec{k},$$

$$\vec{э}_\theta = (-\rho\sin\theta\sin\varphi)\vec{i} + (\rho\cos\theta\sin\varphi)\vec{j}.$$

Задача 2: Безпосередньо визначити компоненти метричного тензора в сферичній системі координат.

Розв'язок:

$$g_{11} = \vec{э}_\rho \vec{э}_\rho = \cos^2\theta \sin^2 + \sin^2\theta \sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1 \ ,$$

$$g_{12} = \vec{э}_\rho \vec{э}_\theta = -\rho\cos\theta\sin\theta\sin^2\varphi + \rho\sin\theta\cos\theta\sin^2\varphi = 0 ,$$

$$g_{13} = \vec{э}_\rho \vec{э}_\varphi = \rho\sin\varphi\cos\varphi - \rho\cos\varphi\sin\varphi = 0 ,$$

$$g_{22} = \vec{э}_\theta \vec{э}_\theta = (-\rho^2 + \rho^2)\cos\theta\cos\varphi\sin\theta\sin\varphi = 0 ,$$

$$\vec{э}_\varphi \vec{э}_\varphi = \rho^2\cos^2\theta\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\theta\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi = \rho^2 .$$

Метрика простору $(d\rho)^2 + \rho^2\sin^2\varphi(d\theta)^2 + \rho^2(d\varphi)^2$.

Запитання для самоперевірки

1. Розглянути інваріантність тензорів відносно вибору системи координат, метрика простору.
2. Визначити метричні величини криволінійної ортогональної системи координат.
3. Визначити основні диференціальні оператори криволінійної ортогональної системи координат.
4. Охарактеризувати компоненти тензорів та рівняння МСС у криволінійній ортогональній системі координат.

Задачі для самостійного розв'язання

1. Осі декартової системи координат *0x'y'z'* отримані поворотом *0xyz* на кут θ навколо осі *0z*. Отримати коефіцієнти перетворення осей.
2. Виразити базисні вектори $\vec{э}_z, \vec{э}_\theta, \vec{э}_\rho$ циліндричної системи координат через орти декартової $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.
3. Безпосередньо визначити компоненти метричного тензора в циліндричній системі координат.

ЛЕКЦІЯ 9

РЕОЛОГІЯ СУЦІЛЬНИХ СЕРЕДОВИЩ

9.1. Предмет реологія

У переважній кількості випадків, що розглядаються в рамках механіки суцільних середовищ, основних законів механіки недостатньо для побудови математичної моделі реального явища. Всі теореми і результати, які було отримано в попередньому модулі, справедливі для будь-якого суцільного середовища. При цьому не враховувалась поведінка реального матеріалу (рідина, газ, тверде тіло), що є суттєвим моментом для моделювання механічних процесів. Отже, в модель необхідно залучити рівняння, які виражають основні закономірності поведінки, характерні для реальної речовини.

Реологія – розділ механіки, що встановлює механічну поведінку середовищ. Це наука про деформації (течії) реальних матеріалів.

Існують два граничних випадки деформування реальних матеріалів.

Розглянемо перший з них. Дослідимо стержень довжиною l, який внаслідок дії певної системи сил видовжився на Δl. Така зміна стану стержня характеризується відносною деформацією $\Delta l / l.$ Внаслідок такої деформації в зразку виникнуть напруження, які обчислюють за формулою: $\sigma = P / S.$

Загалом, кожному значенню напруження можна поставити у відповідність цілком визначену відносну деформацію. При цьому зв'язок між напруженням і відносною деформацією може мати характер простої пропорційної залежності. Така ситуація спостерігається, як правило, для дуже малих відносних деформацій $\Delta l / l << 1.$

Вважаємо, що деформування відбувається миттєво. Тобто це не процес, який має певну тяглість у часі, а миттєва зміна станів. Деформації такого типу називають ***пружними,*** якщо після зняття навантаження тіло повністю відновлює свою форму.

Якщо при цьому існує лінійна пропорційність між σ і $\Delta l / l$, то кажуть, що для даного матеріалу (тіла) виконується ***закон Гука.***

Характерно, що механічна енергія, яка підводиться до зразка, переходить в енергію потужної деформації, і при розвантаженні зворотній процес відбувається без витрат. Тіла, що мають такі властивості, називають ***лінійно пружними тілами*.**

Другий граничний випадок. Нехай процес деформування протікає в часі, і відносна деформація може необмежено збільшуватися при необмеженому проміжку часу. Таку деформацію називають ***течією*.** При цьому кожному напруженню ставиться у відповідність цілком певна швидкість деформації. Якщо зв'язок між ними має вигляд простої пропорційної залежності, яка називається ***законом Ньютона,*** то такі середовища називають ***ньютонівськими рідинами.***

Течія відбувається з втратами енергії, яка перетворюється в теплову енергію руху мікрочастинок, що передається в просторі від більш нагрітого тіла (частини) до менш нагрітого. Процес необоротного перетворення механічної енергії.

Слід зазначити, що пружна деформація і течія є граничними випадками поведінки середовища. Пружна деформація властива твердим тілам, деформація течії, рідинам, газам і плазмі.

9.2. Ідеальна рідина

Розглянемо детальніше процес течії. Використаємо для цього уявлення про рідину (газ), яке буде відображати тільки найсуттєвіші властивості такого суцільного середовища.

***Ідеальна рідина (газ*) –** середовище, в якому дотичні складові поверхневої сили дорівнюють 0, тобто $\rho_{ij} = 0, i \neq j$ (рис.9.1).

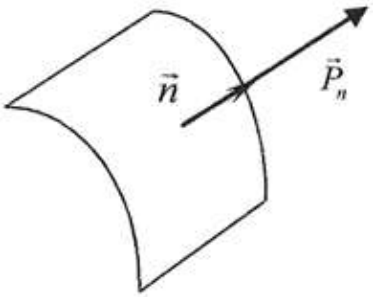


Рис. 9.1

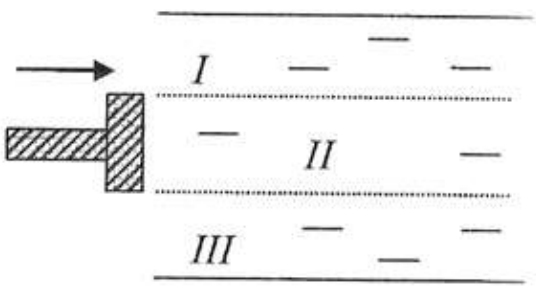


Рис. 9.2

Якщо надати рідині поршнем імпульс сили (рис.9.2) , то при обраній моделі шари 1 і 2, 2 і 3, взаємодіяти один з одним при такому горизонтальному русі не будуть. Тоді шар 2 зсунеться, а 1 і 3 залишаться на місті, тобто порушується гіпотеза суцільності.

Тому модель ідеальної рідини – це модель, в якій ми *кількісно* не враховуємо дотичні складові поверхневих сил через їх малість порівняно з нормальними складовими, але розуміємо, що саме вони *якісно* забезпечують нам суцільність середовища.

Експериментальні дані і загальні фізичні міркування показують, що будь-яке середовище при дуже великих температурах і тисках практично є ідеальною рідиною.

До цього для вектора напружень, що діє на площадці з вектором нормалі $\vec{n} = (n_x, n_y, n_z)$, мали вираз $\vec{\rho}_n = n_x\vec{\rho}_x + n_y\vec{\rho}_y + n_z\vec{\rho}_z$.

У проекціях на осі декартової прямокутної системи координат цей вираз можна записати у вигляді трьох співвідношень:

$$\begin{cases} \rho_{nx} = n_x\rho_{xx} + n_y\rho_{xy} + n_z\rho_{xz}, \\ p_{ny} = n_x\rho_{xy} + n_y\rho_{yy} + n_z\rho_{yz}, \text{ або } \vec{\rho}_n = \vec{n}P. \\ \rho_{nz} = n_x\rho_{zx} + n_y\rho_{zy} + n_z\rho_{zz} \end{cases}$$

Для ідеальної рідини маємо:

$$\begin{cases} \rho_{nx} = n_x\rho_{xx} = n_x\rho_n, \\ p_{ny} = n_y\rho_{yy} = n_y\rho_n, \\ \rho_{nz} = n_y\rho_{zy} = n_z\rho_n \end{cases}$$

де ρ_n - модуль густини розподілу поверхневих сил (нормальних складових).

Звідси $\rho_{xx} = \rho_{yy} = \rho_{zz} = \rho_n$, тобто в даній точці нормальна складова поверхневої сили є величина, незалежна від орієнтації площадки. Прийнято $\rho_n = -\rho$, де ρ - ***гідростатичний тиск.***

Вибір знака диктується бажанням увести тиск як додатну величину.

Під дією зовнішніх сил в рідині та газі можуть виникати внутрішні напруження. Рідини не мають певної форми, практично зберігають свій об'єм, гази не мають ні певної форми, ні фіксованого об'єму. В рідині при стиску сили відштовхування між молекулами можуть бути значними. Тому говорять не про розтягуючи або зсувні напруження, а про стискаючи.

Тензор напружень для ідеальної рідини має вигляд:

$$P = \begin{pmatrix} -\rho & 0 & 0 \\ 0 & -\rho & 0 \\ 0 & 0 & -\rho \end{pmatrix}$$

Тензорна поверхня в цьому випадку буде сферою.

Тоді у векторному вигляді можемо записати $\vec{\rho}_n = -\vec{n}\rho$, і реологічне рівняння набере вигляду $P = -\rho E$, де E - одинична матриця (метричний тензор евклідового простору в декартовій системі координат).

Отже, тензор напружень в ідеальній рідині задається одним числом, а не дев'ятьма чи шістьма значеннями, як це має місце в загальному випадку.

9.3. Рівняння Ейлера

Підставимо реологічне рівняння стану в рівняння динаміки в напруженнях:

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} grad\rho$$

Це рівняння динаміки ідеальної рідини називають рівнянням Ейлера. У проекціях на декартові осі координат рівняння Ейлера запишеться

$$\frac{du}{dt} = F_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial x}, \quad \frac{dv}{dt} = F_y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial y}, \quad \frac{dw}{dt} = F_z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial z},$$

або

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} = F_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial x},$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}=F_y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial y},$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}=F_z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial z}.$$

Виконуємо наступні перетворення :

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}(u^2+v^2+w^2)-\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)v+\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right)w=$$

$$=\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial V^2}{\partial x}+2(\omega_y w-\omega_z v)=\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial V^2}{\partial x}+2(\vec{\omega}\times\vec{V})_x,$$

де $\vec{\omega}$ - вектор вихору.

Аналогічні формули мають місце для проекцій прискорення на осі *y* і *z*. Тому прискорення у векторному вигляді запишеться у формі

$$\frac{d\vec{V}}{dt}=\frac{\partial \vec{V}}{\partial t}+grad\frac{V^2}{2}+2(\vec{\omega}\times\vec{V})=\vec{F}-\frac{1}{\rho}grad\rho$$

Це рівняння називають ***рівнянням руху Ейлера у формі Громеки – Лемба.***

Таке перетворення прискорення можна застосовувати для будь-яких суцільних середовищ, і воно є дуже корисним при вивченні багатьох питань гідромеханіки. В деяких випадках можна додатково вважати, що розглядуваний рух ідеальної рідини є стаціонарним або що рідина є нестисливою. Тоді до системи рівнянь додається умова

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}=0 \text{ або } \frac{d\rho}{dt}=0.$$

Остання умова замикає систему рівнянь, що описує рух ідеальної нестисливої рідини.

Наведемо повністю систему рівнянь для ідеальної нестисливої рідини:

$$\frac{d\vec{V}}{dt}=\vec{F}-\frac{1}{\rho}grad\rho,\ div\vec{V}=0.$$

9.4. В’язка ньютонівська рідина

В’язкою ***рідиною*** називають середовище, в якому компоненти тензора напружень ρ_{ij} залежить від компонент тензора швидкостей деформацій.

Знайдемо реологічне рівняння для в’язкої рідини за допомогою феноменологічного підходу, тобто виходячи з експериментально визначених фактів. В основі цього підходу лежать спостереження і встановлення певного зв’язку між досліджуваними величинами. Взагалі кажучи, в будь-якому дослідженні перший етап завжди експериментальний. Його мета – помітити деякі особливості, закономірності для того об’єкта, який вивчається.

Дослідимо частинний вигляд течії (найпростіший із можливих) з полем швидкості $u = u(y)$, *v=w=0*. Таку течію називають ***шаровою (квазіодномірною) течією.***

Практично вона реалізується в приладах – віскозиметрах. Схему віскозиметра наведено на мал. 28. Досліджуване середовища знаходиться між двома циліндрами. Один циліндр обертається, другий нерухомий. За таких умов лінії току представляють собою концентричні кола. Якщо *h/R<<1,* то рідина в цьому шарі не буде відчувати кривизну цих циліндрів. Епюра швидкості в площині *xy* показана на мал. 29.

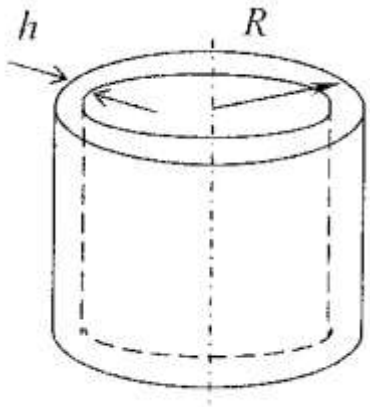


Рис. 28

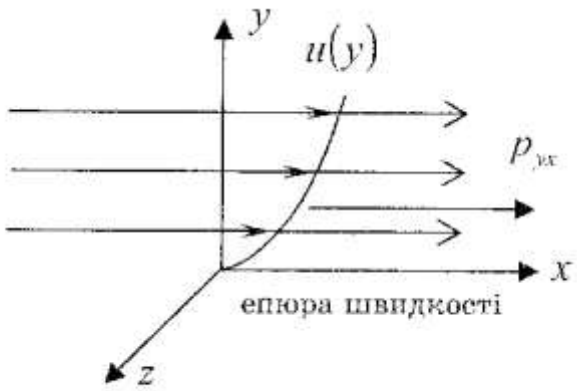


Рис. 29

Оскільки відбувається зсув в одному напрямі, то тензор швидкості деформацій для даного випадку має вигляд:

$$e = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial y} & 0 \\ \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ненульові компоненти дають інформацію про швидкість зсуву.

У процесі експерименту встановлено, що дотичні складові поверхневої сили $\rho_{xy} = \tau$ (напруження тертя) пропорційні величині $\frac{\partial u}{\partial y} = \dot{\gamma}$, γ - зсув, а $\dot{\gamma}$ - швидкість зсуву. Тобто $\rho_{yx} = \tau = \mu_1 \dot{\gamma}$, або $\rho_{yx} = 2\mu_1 e_{yx}$.

Отже, експериментально знайдено закономірність $\tau = \mu_1 \dot{\gamma}$, де μ_1 - деяка фізична стала матеріалу, незалежна ні від напруження, ні від зсуву.

Ця закономірність носить назву ***закону Нав'є – Стокса.*** У такій формі закон виконується при малих швидкостях деформації. Відзначимо, що закон Нав'є – Стокса для повітря, води і деяких інших рідин виявляється застосовним і в тих випадках, коли компоненти тензора швидкостей деформацій немалі.

Розділ МСС, в якому розглядаються рухи суцільного середовища, що підкоряється закону Нав'є – Стокса називають ***теорією руху в'язкої рідини.***

У знаходженні такої закономірності полягає суть експериментального етапу. Але цього виявляється недостатньо, оскільки розглянуто лише частинний випадок окремої течії. Наша задача – виходячи з отриманого співвідношення $\tau = \mu_1 \dot{\gamma}$, вивести зв'язок між **P** і **e** для довільного поля швидкостей.

Наступний етап – етап гіпотез і логіки. В найзагальнішому випадку треба знати тензор напружень і побудувати його залежність від тензора швидкостей деформацій. Тобто якщо відомий закон розподілу швидкостей у просторі *u=u(x,y,z)*, *v=v(x,y,z), w=w(x,y,z),* то треба знайти **P=P(e).**

Це можна зробити, ввівши певні гіпотези і припущення.

Основна гіпотеза: припустимо, що тензор напружень є лінійною функцією тензора швидкостей деформацій, тобто ***P=aE+be.***

Природа коефіцієнтів *a* і *b* поки невідома, отже, вони, в загальному випадку, довільні.

Визначимо, чим може бути коефіцієнт *b.* Поставимо питання: чи може *b* залежати від компонент тензора швидкостей деформацій або тензора напружень? Очевидно, що не може, інакше порушиться лінійний закон даного виразу. Проте *b* може бути скалярною або тензорною функцією. Але ми повинні враховувати і результати, отримані на першому етапі. Тоді якщо середовище має ізотропні властивості, то коефіцієнт *b* являє собою скалярну функцію. Якщо ж середовища анізотропне, то це відображається на коефіцієнт *b,* і *b*- тензорна функція.

Природно припустити, що в нашому випадку низькомолекулярних рідин і газів середовище має ізотропні властивості, отже, *b* – скаляр, і з першого етапу маємо $b = 2\mu_1$.

Визначимо, чим може бути коефіцієнт *a.* Цей коефіцієнт може залежати від компонент ***P*** і ***e.***

Причому закон, який ми хочемо отримати, не повинен залежати від системи відліку, тобто в найзагальнішому випадку **a=a**(I_P, I_e)**,** де I_P, I_e- перші (лінійні) інваріанти тензорів **P** і **e.**

Оскільки лінійний характер залежності повинен зберігатися, то

$\rho_{ij} = a \cdot 3 + 2\mu_1 e_{ii} = 3a + 2\mu_1 div\vec{V}$,

Тоді $a = (\rho_{ij} - 2\mu_1 div\vec{V})/3$, приймаємо

$$a = \frac{P_{ii}}{3} + \lambda_1 div\vec{V} .$$

Пам’ятаємо, що реологічне рівняння стану ідеальної рідини має вигляд:

$$\boldsymbol{P=-pE.}$$

Введемо *другу гіпотезу:* припустимо, що $-\rho_{ii}/3 = \rho$, тобто середнє арифметичне діагональних компонент тензора напружень, взяте з протилежним знаком, за аналогією назване гідростатичним тиском, дійсно є тиском у термодинаміці.

Тоді рівняння набере вигляду

$$P = (-p + \lambda_1 div\vec{V})E + 2\mu_1 e.$$

Чи є це законом? Треба перевірити на практиці, дослідним шляхом.

Отже, знову повертаємось до експериментального етапу. Чи виконується цей закон для реальних середовищ? Якщо так, то за яких умов? Експеремент дає відповідь:це рівняння дає опис дійсної поведінки реальних газів за нормальних умов і низькомолекулярних рідин при їх ламінарній течії з малими швидкостями зсуву. При великих швидкостях зсуву середовище поводиться як тверде тіло, тобто підкоряється закону Гука.

Останнє наведене вище рівняння називають ***узагальненим законом Ньютона.*** Середовища, які слідують цьому закону, називаються **ньютонівськими,** в іншому випадку ***не ньютонівськими*.**

Узагальнений закон Ньютона для ізотропного середовища (властивості у всіх напрямках однакові) в головних осях тензора швидкостей деформацій і тензора напружень запишеться таким чином:

$$p_1 = -p + \lambda_1(e_1 + e_2 + e_3) + 2\mu_1 e_1$$

$$p_2 = -p + \lambda_1(e_1 + e_2 + e_3) + 2\mu_1 e_2$$

$$p_3 = -p + \lambda_1(e_1 + e_2 + e_3) + 2\mu_1 e_3 .$$

В декартовій (неголовній) системі координат узагальнений закон Ньютона має вигляд:

$$p_{ii} = -p + \lambda_1 div\vec{V} + 2\mu_1 \frac{\partial V_i}{\partial x_i} \text{ при } i = j$$

і при $i \neq j$ $p_{ij} = 2\mu_1 e_{ij} = \mu_1\left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i}\right).$

Сильною стороною феноменологічного підходу є його другий етап, коли за допомогою математичного апарату ми можемо будувати дуже загальні закономірності. А слабка сторона в тому, що велике число реологічних функцій і

констант часто не можна визначити з експерименту, тобто ми не можемо поставити достатньо кількість незалежних експериментів.

Ілюстративна задача

Задача. Знайти з рівняння Громенки - Лемба інтеграл рівнянь руху ідеальної однорідної рідини *p=const* у випадку встановленого руху в полі об'ємних потенціальних сил. Розглянути інтеграл вздовж ліній току, вздовж вихрових ліній, у випадку безвихрового руху та у випадку колінеарності $\vec{V}$ та $\vec{\omega}$.

Розв'язок:

Оскільки $\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = 0$, $\vec{\omega} = \frac{1}{2} rot\vec{V}$, $\vec{F} = -grad\Pi$,

то $grad\frac{V^2}{2} + rot\vec{V} \times \vec{V} + grad\Pi + \frac{1}{\rho} gradp = 0$.

Рідина однорідна, отже, $grad\frac{V^2}{2} + rot\vec{V} \times \vec{V} + grad\Pi + grad\frac{p}{\rho} = 0.$

Звідси $grad\left(-\frac{V^2}{2} + \Pi + \frac{p}{\rho} - \right) = -rot\vec{V} \times \vec{V}.$

Інтеграл вздовж ліній току, вздовж вихрових ліній, у випадку безвихрового руху та у випадку колінеарності $\vec{V}$ та $\vec{\omega}$ має вигляд:

$grad\left(-\frac{V^2}{2} + \Pi + \frac{p}{\rho} - \right) = 0$, тобто $\frac{V^2}{2} + \Pi + \frac{p}{\rho} = const$

Цей інтеграл називають ***інтегралом Бернуллі.*** У полі сили тяжіння $F_z = -g = -\frac{\partial \Pi}{\partial z}$, звідси $\Pi = gz.$

Тоді інтеграл Барнаулі $\rho\frac{V^2}{2} + \rho gz + p = const,$ де $\rho gz + p$ - статичний тиск,

$\rho\frac{V^2}{2}$ - динамічний тиск.

Запитання для самоперевірки

1. Визначити предмет реології.
2. Розглянути ідеальну рідину.

3. Визначити рівняння Ейлера.

Задачі для самостійного розв'язання

1. Рідина знаходиться в рівноважному стані $\left(\vec{V}=0\right)$. Записати рівняння Ейлера та Нав'є – Стокса. Як розподілений тиск у випадку відсутності зовнішніх об'ємних сил?

2. Для ідеальної рідини, що перебуває в рівновазі, виконується $\rho\vec{F}=gradp$. Показати, що при рівновазі неоднорідної рідини поле зовнішніх сил задовольняє умові $\vec{F}\cdot rot\vec{F}=0.$

1. Показати, що у випадку потенціальності зовнішніх масових сил поверхні $\rho=const, p=const$ співпадають. І навпаки, якщо $\rho=const$ і $p=const$ співпадають, то $\vec{F}=-grad\Pi$, тобто масові сили потенціальні.

2. Визначити розподіл тиску для рідини, що знаходиться в стані рівноваги у полі сили тяжіння.

3. Посудина з рідиною рухається поступально з постійним горизонтальним прискоренням. Знайти розподіл тиску в рідині.

4. Циліндрична посудина з рідиною рівномірно обертається з кутовою швидкістю $\vec{\omega}$ навколо вертикальної осі симетрії. Знайти розподіл тиску в рідині.

5. Визначити швидкість витікання нестисливої рідини з отвору посудини, розташованого на висоті *h*. Висота рівня рідини в посудині *H.*

ЛЕКЦІЯ 10

РЕОЛОГІЯ СУЦІЛЬНИХ СЕРЕДОВИЩ

10.1. Реологічне рівняння для в'язкої ньютонівської рідини

Нагадаємо, що рівняння руху в'язкої стисливої рідини називають ***рівняннями Нав'є-Стокса.*** Його можна отримати в результаті підстановки узагальненого закону Ньютона у рівняння імпульсів

$$\rho\frac{d\vec{V}}{dt}=\rho\vec{F}+Div\left[\left(-p+\lambda_1 div\vec{V}\right)E+2\mu e\right].$$

Розглянемо останній доданок. Отримуємо, проектуючи на вісь абсцис,

$$2\mu_1\left[\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial}{2\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{2\partial z}\left(\frac{\partial w}{dx}\right)\right]=\mu_1\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+\mu_1\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right),$$

або остаточно

$$2\mu_1(Dive)_x=\mu_1\Delta u+\mu_1\frac{\partial}{\partial x}div\vec{V},$$

де $\Delta=\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$ - оператор Лапласа.

Звідки слідує

$$2\mu_1 Dive=\mu_1\Delta\vec{V}+\mu_1 graddiv\vec{V},$$

Тоді рівняння Нав'є-Стокса

$$\frac{d\vec{V}}{dt}=\vec{F}-\frac{1}{\rho}gradp+\frac{\lambda_1+\mu_1}{\rho}graddiv\vec{V}+\frac{\mu_1}{\rho}\Delta\vec{V}.$$

10.2. Рівняння Нав'є-Стокса для нестисливої рідини

Для в'язкої нестисливої рідини рівняння Нав'є-Стокса спрощуються

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} gradp + \frac{\mu_1}{\rho}\Delta\vec{V}.$$

Це рівняння разом з рівнянням нерозривності $div\vec{V} = 0$ складають повну систему рівнянь руху однорідної в'язкої нестисливої рідини, що підкоряється закону Нав'є-Стокса.

В декартовій ортогональній системі координат повна система рівнянь руху в'язкої нестисливої рідини має вигляд:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} = F_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu_1}{\rho}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right),$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} = F_y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\mu_1}{\rho}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right),$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} = F_z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\mu_1}{\rho}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right).$$

Замість коефіцієнтів λ_1 і μ_1 в теорії руху в теорії руху в'язкої рідини прийнято вводити динамічний коефіцієнт в'язкості μ_1 і математичний коефіцієнт в'язкості μ_1/ρ, а також інший коефіцієнт в'язкості $\lambda_1 + 2\mu_1/3$.

10.3. Ньютонівські рідини

Пружне деформування і в'язка течія, описувані законом Гука і законом Ньютона, лежать в основі класичної механіки суцільних середовищ. Вони дозволяють досліджувати механічну поведінку твердих тіл з відносно простою мікроструктурою, газів при нормальній щільності (нерозріджений газ) і низькомолекулярних рідин при ламінарному режимі течій.

Якщо реальні середовища мають складну мікроструктуру закони їхньої реологічної поведінки можуть істотно відрізнятися від законів класичної механіки.

Крім того, поряд з пружною деформацією і в’язкою течією в таких середовищах можуть проявлятися й інші види деформації, наприклад пластична.

Експерименти з різними рідинами і полями течій показують, що лінійне співвідношення між швидкістю деформації й тензором напружень може залишатися справедливим у широкому діапазоні значень швидкостей деформації. Для води і більшості газів лінійний закон виконується точно при всіх умовах, за виключенням, можливо, найекстремальніших, таких, як в ударній хвилі. Для рідин з складною молекулярною структурою і, зокрема, з лінійними молекулами , а також для деяких емульсій і сумішей лінійність залежності може порушитися при помірних швидкостях деформації; для деяких же рідин типу каучука напруження, очевидно, залежить від істотної деформації, а також від миттєвої швидкості деформування. Мало відомо про те, як слід змінити реологічне рівняння для таких рідин. Інженери-хіміки часто зустрічаються з рідинами, які при звичайних умовах проявляють ньютонівські властивості.

Той факт, що лінійне співвідношення між тензором напружень і тензором швидкостей деформації для багатьох рідин, стає зрозумілим, якщо розглянути молекулярний механізм внутрішнього тертя. Відносний рух рідини в цілому можуть викликати тільки малі зміни статистичних властивостей молекулярного руху, якщо характерний час руху, тобто величина, обернена характерній швидкості деформації, великий порівняно з характерним часом молекулярного руху (який у випадку газу визначається середнім часом між зіткненням молекул. Це і є умови, при виконанні яких можна очікувати, що гіпотези, які використовувались при виведенні узагальненого закону Ньютона, будуть справедливі. Для повітря при нормальних температурі і тиску середній час між зіткненнями складає приблизно 10^{-10} с, так і хоча б для газів очевидно, що значення швидкості деформації, які звичайно зустрічаються на практиці, справді «малі». Для крапельних рідин не можна так проста оцінити характерний час молекулярного руху, однак будь-який час, пов'язаний з молекулярним рухом, надзвичайно малий порівняно з оберненою величиною звичайних значень швидкостей деформації.

Для повітря при нормальних температурі й тиску $\mu = 0{,}00018 г/см \cdot с$, а для води $\mu = 0{,}011 г/см \cdot с$. В жодному з цих випадків μ не змінюється помітно із зміною тиску, але для повітря μ зростає з температурою поблизу її нормальних значень зі швидкістю приблизно 0,3% на $1^{\circ}C$; для води μ складає з температурою зі швидкістю близько 3% на $1^{\circ}C$.

Проведемо класифікацію ньютонівських рідин на підставі експериментальних досліджень квазіодновимерних течій рідини.

Плоска квазіодновимірна течія має поле швидкості:

$$u = u(y), u = w = 0,$$

де u, w, v - компоненти швидкості в декартовій системі координат.

Класифікація не ньютонівської рідини проводяться за кривою течії $\tau = \tau(\dot{\gamma})$, де τ - напруження тертя $\dot{\gamma} = \frac{du}{dy}$ - швидкість зсуву(рис. 10.1).

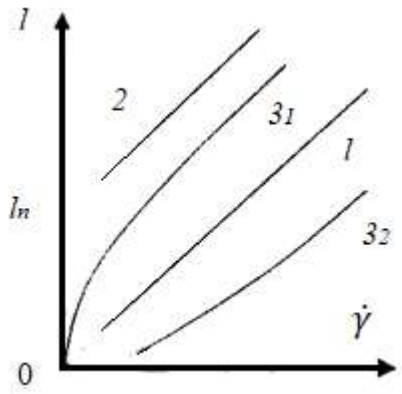


Рис. 10.1

Для ньютонівської рідини виконується закон, відкритий Ньютоном,

$$\tau = \mu\dot{\gamma},$$

де μ - динамічний коефіцієнт в'язкості, що не залежить явно від τ і $\tau = \mu_1 \dot{\gamma}$ (крива 1). Для в'язко-пластичних рідин спостерігається (крива 2):

$$\tau = \tau_0 + \mu_p \dot{\gamma} \text{ при } \tau > \tau_0,\ \dot{\gamma} = 0 \text{ при } \tau \le \tau_0.$$

Ці співвідношення носять назву ***закону Бінгама.*** Тут використанні позначення: τ_0- границя текучості, що характеризує пластичні властивості середовища, μ_ρ- коефіцієнт пластичної в'язкості, τ_0, μ_ρ не залежать явно від τ і $\dot{\gamma}$.

До в'язко-пластичних рідин відносяться фарби, пасти, креми, глинисті розчини, кров.

Елементи мікроструктури в'язко-пластичних рідин утворюють жорстку просторову структуру каркасного типу.

При $\tau > \tau_0$ ця структура «миттєво» руйнується і середовище веде себе як в'язка рідина – тече. При $\tau \le \tau_0$ відбувається «миттєво» відновлення просторової структури середовища.

Два різних варіанти механічної поведінки в'язко-пластичних рідин призводить до появи квазітвердих ділянок у течіях таких середовищ. У цьому можна переконатися, видавлюючи пасту з тюбика. Течія пасти відбувається близько стінок, де $\tau > \tau_0$, у ядрі паста рухається квазітвердим чином ($\tau \le \tau_0$).

Аномально - в'язкі рідини характеризуються нелінійною залежністю $\tau = \tau(\dot{\gamma})$, яку можна підставити у квазіньютонівському вигляді $\tau = \mu_\alpha \dot{\gamma}$, де $\mu_\alpha = \mu_\alpha(\dot{\gamma})$. Можливі варіанти: із збільшенням $\dot{\gamma}$ відбувається зменшення μ_α (характерна для псевдо пластиків - крива 3_1); із збільшенням $\dot{\gamma}$ відбувається збільшення μ_α (характерно для ділатантних рідин – крива 3_2).

До ***псевдо пластиків*** відносяться суспензії з асиметричними зваженими частинками, розчини і розплави полімерів. У ділатантних рідинах велика концентрація зважених твердих частинок. В останніх із збільшенням $\dot{\gamma}$ порушується компактне розміщення твердої фази і несучої рідини не вистачає для змащення.

Можна записати загальний закон $\tau = \mu \dot{\gamma}^{n-1} \dot{\gamma}^{m}$, де *m*– показник ньютонівської рідини. Якщо *m=n=1,* то рідина ньютонівська, при *n<1*

Належить до класу псевдо пластиків, а при *n>1*- до класу ділатантних рідин.

Взагалі кажучи, формально на другому етапі можна побудувати залежність між тензором напружень і тензором швидкостей деформацій, але реологічних функцій може бути дуже багато.

Чи можна записати найбільш довільну залежність (найзагальніший вигляд) для *P*? Прикладом такої залежності є закон для узагальненої рідини Рейнера – Рівліна:

$$P = a_0 E + a_1 e + a_2 (e^2)_{ij} + ...,$$

де $(e^2)_{ij} = e_{ik} e_{kj}$, $(e^3)_{ij} = e_{ik} e_{km} e_{mj}$ тощо.

Використовуємо формулу Келі-Гамільтона:

$$e^u = \beta_0 E + \beta_1 e + \beta_2 e^2,$$

Що дозволяє будь-який степінь тензора другого рангу представити у вигляді поліному другого степеня від цього ж тензора при цьому $\beta_i = \beta_i(1,2,3)$ - функції першого, другого, і третього інваріантів тензора **e**. Тоді можна представити

$$P = -pE + \mu_1 e + \mu_2 e^2$$

де $\mu_i = \mu_i(1,2,3)$. Це і є рівняння узагальненої рідини Рейнера – Рівліна. Тут $\mu_1 e$ - повздовжня в'язкість, $\mu_2 e^2$- поперечна в'язкість.

Ілюстративна задача

Задача. Знайти з рівняння Громенки - Лемба інтеграл рівнянь руху ідеальної однорідної рідини *p=const*у випадку встановленого руху в полі об'ємних потенціальних сил. Розглянути інтеграл вздовж ліній току, вздовж вихрових ліній, у випадку безвихрового руху та у випадку колінеарності $\vec{V}$ та $\vec{\omega}$.

Розв'язок:

Оскільки $\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = 0$, $\vec{\omega} = \frac{1}{2} rot \vec{V}$, $\vec{F} = -grad\Pi$,

то $grad\frac{V^2}{2}+rot\vec{V}\times\vec{V}+grad\Pi+\frac{1}{\rho}gradp=0$.

Рідина однорідна, отже, $grad\frac{V^2}{2}+rot\vec{V}\times\vec{V}+grad\Pi+grad\frac{p}{\rho}=0.$

Звідси $grad\left(-\frac{V^2}{2}+\Pi+\frac{p}{\rho}-\right)=-rot\vec{V}\times\vec{V}.$

Інтеграл вздовж ліній току, вздовж вихрових ліній, у випадку безвихрового руху та у випадку колінеарності $\vec{V}$ та $\vec{\omega}$ має вигляд:

$$grad\left(-\frac{V^2}{2}+\Pi+\frac{p}{\rho}-\right)=0\text{, тобто }\frac{V^2}{2}+\Pi+\frac{p}{\rho}=const$$

Цей інтеграл називають **інтегралом Бернуллі.** У полі сили тяжіння $F_z=-g=-\frac{\partial\Pi}{\partial z}$, звідси $\Pi=gz.$

Тоді інтеграл Барнаулі $\rho\frac{V^2}{2}+\rho gz+p=const,$ де $\rho gz+p$ - статичний тиск,

$\rho\frac{V^2}{2}$ - динамічний тиск.

Запитання для самоперевірки

1. Визначити в’язку ньютонівську рідину.
2. Визначити реологічне рівняння для в’язкої ньютонівської рідини.
3. Визначити рівняння Нав’є-Стокса для нестисливої рідини.

Задачі для самостійного розв’язання

1. Рідина знаходиться в рівноважному стані $\left(\vec{V}=0\right)$. Записати рівняння Ейлера та Нав’є – Стокса. Як розподілений тиск у випадку відсутності зовнішніх об’ємних сил?

2. Для ідеальної рідини, що перебуває в рівновазі, виконується $\rho\vec{F} = gradp$. Показати, що при рівновазі неоднорідної рідини поле зовнішніх сил задовольняє умові $\vec{F} \cdot rot\vec{F} = 0$.

3. Показати, що у випадку потенціальності зовнішніх масових сил поверхні $\rho = const, p = const$ співпадають. І навпаки, якщо $\rho = const$ і $p = const$ співпадають, то $\vec{F} = -gradП$, тобто масові сили потенціальні.

4. Визначити розподіл тиску для рідини, що знаходиться в стані рівноваги у полі сили тяжіння.

5. Посудина з рідиною рухається поступально з постійним горизонтальним прискоренням. Знайти розподіл тиску в рідині.

6. Циліндрична посудина з рідиною рівномірно обертається з кутовою швидкістю $\vec{\omega}$ навколо вертикальної осі симетрії. Знайти розподіл тиску в рідині.

7. Визначити швидкість витікання нестисливої рідини з отвору посудини, розташованого на висоті h. Висота рівня рідини в посудині H.

ЛЕКЦІЯ 11

ТЕОРІЯ ЛІНІЙНОГО ПРУЖНОГО ТІЛА

11.1. Зв’язок компонентів напружень з компонентами деформацій

Для випадку самого найпростішого в реології тіла, а саме для лінійного пружного тіла, зв’язок між компонентами тензорів (і девіатором) напружень і деформацій легко встановити шляхом поширення на загальний випадок просторового напруженого стану в точці відомого з курсу опору матеріалів закону Гука для одноосного розтягання-стискання і чистого зсуву в ідеально пружному тілі. Практична можливість такої екстраполяції виправдовується досвідом для більшості матеріалів, що застосовуються в техніці, при дотриманні наступних умов:

а) одночасне наявність всіх компонентів напружень, а також їх дію порізно не приводять матеріал в пластичний стан, тобто матеріал відчуває пружні деформації;

б) матеріал практично можна вважати ізотропним;

в) деформації дуже малі в порівнянні з розмірами досліджуваного тіла;

г) процес деформації передбачається спочатку ізотермічним.

Наведені умови дозволяють застосовувати принцип незалежності дії сил і елементарні закони (при осьовому розтяганні і зсуві) для обчислення деформацій по будь-якому напрямку всередині розглядуваного паралелепіпеда.

Нехай спочаткує дія одного напруження σ_{X}, тобто лінійний напружений стан. Тоді елементарний паралелепіпед отримає наступне відносне подовження в напрямку осі *x* згідно з першим законом Гука

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E},$$

а в напрямку осей *y, z*, що є поперечними по відношенню до напрямку діючого зусилля, відповідно до закону Пуассона будемо мати

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\mu \frac{\sigma_x}{E},$$

де E - модуль пружності, μ – коефіцієнт Пуасона.

Застосовуючи кругову підстановку, аналогічні вирази можна записати для випадків коли діють окремо напруження σ_y і σ_z.

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E},$$

$$\varepsilon_x = \varepsilon_z = -\mu \frac{\sigma_y}{E},$$

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E},$$

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = -\mu \frac{\sigma_z}{E}$$

У всіх трьох окремо розглянутих випадках дії нормальних напружень відсутня перекіс прямих кутів (кути зсуву) на гранях елементарного паралелепіпеда. Дотичні напруження, навпаки, як відомо, спотворюють форму паралелепіпеда; подовження ребер відсутні; точніше, ці подовження нескінченно малі в порівнянні з деформаціями зсуву.

Сукупність дотичних напружень викликає перекіс граней, паралельних площині *xOy*, і залишає без спотворення інші грані паралелепіпеда. Згідно з законом Гука для чистого зсуву маємо

$$\gamma_{xy} = \frac{T_{xy}}{G},\ \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0,$$

де, як відомо,

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}.$$

Аналогічні вирази будемо мати від дії напружень

$$T_{yz} = T_{zy},\ T_{zx} = T_{xz}.$$

Таким чином, наявність усіх компонентів напружень, визначає наступні складові деформації

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \mu\left(\sigma_y + \sigma_z\right)\right],\ \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z)\right],\ \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}, \qquad (11.1)$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \mu\left(\sigma_y + \sigma_x\right)\right],\ \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G}.$$

У цьому виді закон пружності зазвичай і виражається для ізотропного тіла. Вирази (11.1) можна сформулювати так: компоненти тензора деформації в даній точці тіла знаходяться в лінійній залежності від компонентів тензора напружень тієї ж точки.

11.2. Різні вирази узагальненого закону пружності

В формулах (11.1) складові деформацій виражені через складові напружень. Часто буває необхідно мати зворотні залежності, тобто напруження, що виражені через деформації. Для цього розв’яжемо рівняння відносно напружень і отримаємо

$$\sigma_x = 2G\left[\varepsilon_x + \frac{3\mu}{1-2\mu}\varepsilon_{\text{ср}}\right],\ \tau_{xy} = G\gamma_{xy},$$

$$\sigma_y = 2G\left[\varepsilon_y + \frac{3\mu}{1-2\mu}\varepsilon_{\text{ср}}\right],\ \tau_{yz} = G\gamma_{\text{yz}}, \qquad (11.2)$$

$$\sigma_z = 2G\left[\varepsilon_z + \frac{3\mu}{1-2\mu}\varepsilon_{\text{ср}}\right],\ \tau_{zx} = G\gamma_{zx}.$$

де $\varepsilon_{\text{ср}} = \frac{1}{3}\left(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_x\right)$ - середня деформація.

Рівняння (11.2)можна представити в наступному вигляді

$$\begin{cases} \sigma_x = 2G\varepsilon_x + \lambda\theta; \\ \sigma_y = 2G\varepsilon_y + \lambda\theta; \\ \sigma_z = 2G\varepsilon_z + \lambda\theta. \end{cases} \qquad (11.3)$$

де $\theta = 3\varepsilon_{\text{ср}}$ - відносна об'ємна деформація; $\lambda = \frac{2\mu G}{1-2\mu}$ – стала Ляме.

З виразів (11.2) випливають наступні залежності

$$\sigma_x - \sigma_y = 2G(\varepsilon_x - \varepsilon_y),$$

$$\sigma_y - \sigma_z = 2G(\varepsilon_y - \varepsilon_z), \tag{11.4}$$

$$\sigma_z - \sigma_x = 2G(\varepsilon_z - \varepsilon_x).$$

і

$$\frac{\sigma_x - \sigma_y}{\sigma_y - \sigma_z} = \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{\varepsilon_y - \varepsilon_z},$$

(11.5)

$$\frac{\sigma_y - \sigma_z}{\sigma_z - \sigma_x} = \frac{\varepsilon_y - \varepsilon_z}{\varepsilon_z - \varepsilon_x}.$$

11.3. Закон Гука для октаедричного зсуву

З рівнянь (11.3) та (11.4) можна дістати вирази в головних осях, тобто зв'язок між головними напруженнями та головними деформаціями.

Оскільки на головних площадках дотичних напружень немає, то з шести рівнянь закону Гука залишаться тільки три перші, які наберуть вигляду

$$\sigma_1 = 2G\varepsilon_1 + \lambda\theta,$$

$$\sigma_2 = 2G\varepsilon_2 + \lambda\theta, \tag{11.6}$$

$$\sigma_3 = 2G\varepsilon_3 + \lambda\theta.$$

$$\sigma_1 - \sigma_2 = 2G(\varepsilon_1 - \varepsilon_2),$$

$$\sigma_2 - \sigma_3 = 2G(\varepsilon_2 - \varepsilon_3), \tag{11.7}$$

Саме через різницю головних напружень та головних деформацій можна виразити дотичне октаедричне напруження та октаедричний зсув. Отже маємо

$$T_{\text{окт}} = \frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_2)^2}$$

або

$$\gamma_{\text{окт}} = \frac{2}{3}\sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_2)^2}$$

Підставивши в формулу для $T_{\text{окт}}$ співвідношення (11.7) матимемо

$$T_{\text{окт}} = \frac{2}{3}G\sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_2)^2}$$

Приймаючи до уваги вираз для $\gamma_{\text{окт}}$ отримаємо закон Гука для октаедричного для зсуву

$$T_{\text{окт}} = \gamma_{\text{окт}}. \tag{11.8}$$

Октаедричне дотичне напруження пов’язано з важливою узагальненою величиною, що характеризує напружений стан у довільній точці тіла і називається інтенсивністю напружень σ_i:

$$\sigma_i = \frac{3}{\sqrt{2}}T_{\text{окт}}.$$

(або через компоненти головних напружень):

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \tag{11.9}$$

З урахуванням (11.9) для інтенсивності деформацій ε_i вираз набуває вигляду

$$\varepsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{3}\gamma_{\text{окт}} = \frac{1}{\sqrt{2}(1+\mu)}\gamma_{\text{окт}}$$

Тоді зв'язок між інтенсивністю напружень та інтенсивністю деформацій можна записати як

$$\sigma_i = 2(1+\mu)G\varepsilon_i$$

Враховуючи залежність для модуля пружності при зсуві

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}$$

σ_i=2(1+μ)$G\varepsilon_i$,

остаточно отримаємо ще одну форму запису закону Гука

$$\sigma_i = E\varepsilon_i. \tag{11.10}$$

Отже, інтенсивність напружень та інтенсивність деформацій слід вважати еквівалентами напружень та деформацій при осьовому розтяганні або стисканні.

Наслідок цієї еквівалентності - можливість заміни експерименту щодо визначення модуля пружності при об'ємному напружено- деформованому стані на експеримент при лінійному (одновісному) стані - осьовому розтяганні чи стисканні.

Нагадаємо, що для ізотропного матеріалу маємо лише дві незалежні характеристики: *E* - модуль пружності (модуль Юнга) та коефіцієнт поперечної деформації (коефіцієнт Пуассона). Всі інші характеристики (G, *λ),* які застосовуються в різних формах закону Гука, є похідними.

11.4. Закон пружної зміни об’єму

Складемо ліві частини перших трьох рівнянь в виразах (11.1) і дорівняємо їх сумі правих частин тих же рівнянь. Тоді будемо мати

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y + + \varepsilon_z = \frac{1-2\mu}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z). \tag{11.11}$$

Так як

$$\frac{1}{3}(\varepsilon_x + \varepsilon_y + + \varepsilon_z) = \varepsilon_{\text{ср}},\ \ \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = \sigma_{\text{ср}},$$

складають середні деформацію і напруження, то з (11.11) випливає

$$\sigma_{\text{ср}} = \frac{E}{1-2\mu}\varepsilon_{\text{ср}}. \qquad (11.12)$$

Таким чином сума відносних подовжень по трьом взаємно перпендикулярним напрямам складає об’ємну деформацію, тобто $3\varepsilon_{ср}=\theta$, то (11.12) можна представити також у вигляді

$$\sigma_{\text{ср}} = \frac{E}{3(1-2\mu)}\theta. \qquad (11.13)$$

тобто середнє напруження в точці пропорційно об’ємній деформації в околиці тієї ж точки.

Вирази (11.12) і (11.13) називають **законом пружної зміни об’єму.** Цей закон справедливий і при високих значеннях середнього напруження, що значно перевищують звичайну границю пружності матеріалу (тобто встановлений в лабораторних умовах при випробуванні на осьове розтягання або стискання).

У зв'язку з цим об'ємна деформація, яка обчислюється за виразом

$$\theta = \frac{3(1-2\mu)}{E}\sigma_{\text{ср}}. \qquad (11.14)$$

Практично завжди зникає після зняття причин, що викликали цю деформацію.

11.5. Закон пружної зміни форми

З рівняння (11.2) від лівих і правих частин першого рівняння віднімемо величину $\sigma_{ср}$, причому для правої частини виразимо її через (11.13). Тоді отримаємо

$$\sigma_x - \sigma_{\text{ср}} = 2G\left[\varepsilon_x + \frac{3\mu}{(1-2\mu)}\varepsilon_{\text{ср}}\right] - \frac{E}{(1-2\mu)}\varepsilon_{\text{ср}}.$$

Замінюючи $E=2(1+\mu)/G$, будемо мати

$$\sigma_{\text{x}}-\sigma_{ср}=2G(\varepsilon_x-\varepsilon_{ср}).$$

Аналогічне проведемо з другою та третьою строками, і система (11.2) прийме вигляд

$$\sigma_x - \sigma_{\text{ср}} = 2G(\varepsilon_x - \varepsilon_{\text{ср}}),$$

$$\sigma_y - \sigma_{\text{ср}} = 2G(\varepsilon_y - \varepsilon_{\text{ср}}),$$

$$\sigma_z - \sigma_{\text{ср}} = 2G(\varepsilon_z - \varepsilon_{\text{ср}}), \qquad (11.15)$$

$$\tau_{xy} = 2G\frac{1}{2}\gamma_{xy},$$

$$\tau_{yz} = 2G\frac{1}{2}\gamma_{yz},$$

$$\tau_{zx} = 2G\frac{1}{2}\gamma_{zx}.$$

Вирази (11.15)широко застосовують в теорії пластичності.

Якщо систему напружень $(\sigma_x - \sigma_{\text{ср}}), (\sigma_y - \sigma_{\text{ср}}), (\sigma_z - \sigma_{\text{ср}})$, $\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{yz}$ компонентами напружень, а систему деформацій $(\varepsilon_x - \varepsilon_{\text{ср}})$, $(\varepsilon_y - \varepsilon_{\text{ср}})$, $(\varepsilon_z - \varepsilon_{\text{ср}})$, $\frac{1}{2}\gamma_{xy}$, $\frac{1}{2}\gamma_{yz}$, $\frac{1}{2}\gamma_{zx}$ - компонентами деформації, то узагальнений закон пружності (11.15), який є законом зміни форми, можна сформулювати наступним чином: компоненти напружень і деформацій, що відповідають за зміну форми, пропорційні один одному; перші дорівнюють другим, помноженими на подвійним модуль зсуву.

Систему залежностей (11.15) можна представити в наступному вигляді

$$\begin{Bmatrix} (\sigma_x - \sigma_{\text{ср}}), \tau_{xy}, \tau_{zx} \\ \tau_{xy}, (\sigma_y - \sigma_{\text{ср}}), \tau_{yz} \\ \tau_{zx}, \tau_{yz}, \sigma_z - \sigma_{\text{ср}} \end{Bmatrix} = 2G \begin{Bmatrix} (\varepsilon_{\text{x}} - \varepsilon_{\text{ср}}), \frac{1}{2}\gamma_{\text{xy}}, \frac{1}{2}\gamma_{\text{zx}} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy}, (\varepsilon_{\text{y}} - \varepsilon_{\text{ср}}), \frac{1}{2}\gamma_{\text{yz}} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy}, (\varepsilon_{\text{y}} - \varepsilon_{\text{ср}}), \frac{1}{2}\gamma_{\text{yz}} \end{Bmatrix}. \qquad (11.16)$$

В виразах (11.16) ліві і праві частини рівнянь, які пропорційні один одному, розташовуються відповідно однаково.

Як було встановлено ліва матриця, що складена з компонентів напружень, які впливають на зміну форми називають девіатором напружень $D_н$, а праву матрицю відповідно девіатором деформації $D_{деф}$.

В зв’язку з цим узагальнений закон пружності можна представити у вигляді

$$D_{\text{н}} = 2GD_{\text{деф}}, \tag{11.17}$$

і сформулювати наступним чином: девіатором напружень прямо пропорційний девіатору деформації.

Вирази (11.16) і (11.17) називають **законом зміни форми**.

Використовуючи закон зміни об'єму і поняття про кульові тензори представимо у вигляді

$$T_H^0 = E_0 T_{\text{деф}}^0, \tag{11.18}$$

тобто кульовий тензор напружень пропорційний кульовому тензору деформації.

Коефіцієнт пропорційності (об’ємний модуль пружності) представимо у вигляді

$$E_0 = \frac{E}{1-2\mu}. \tag{11.19}$$

При μ=0,5 коефіцієнт пропорційності перетворюється в нескінченність. З чотирьох пружних сталих E, μ, G, E_O, очевидно, незалежні тільки два.

У зв'язку з наявністю зазначених двох характерних законів деформації пружного тіла, в які входять модулі E_O, G логічно в якості двох основних, тобто незалежних фізичних характеристик пружного тіла, вважати саме E_O, G.

Об'ємний модуль E_o визначає опір матеріалу при зміні об’єму, яке не супроводжується зміною форми (випадок гідростатичного тиску). Модуль зсуву G (інакше модуль пружного формозміни), навпаки, визначає опір матеріалу при зміні його форми, яке не супроводжується зміною об’єму.

Об'ємний модуль E_o визначає опір матеріалу при зміні об’єму, яке не супроводжується зміною форми (випадок гідростатичного тиску). Модуль зсуву G (інакше модуль пружного формозміни), навпаки, визначає опір матеріалу при зміні його форми, яке не супроводжується зміною об’єму.

11.6. Питома потенціальна енергія деформації

Під дією зовнішніх сил пружне тіло відчуває деформацію, при якій сили здійснюють роботу. Ця робота перетворюється в потенціальну енергію і в подальшому при знятті зовнішніх сил витрачається на відновлення початкової (тобто недеформованої) форми тіла.

Енергію, що накопичується при деформації в одиничному об’ємі матеріалу, виділеному в околиці даної точки, називають питомою потенціальною енергією або пружним потенціалом в околиці даної точки.

Для підрахунку пружного потенціалу необхідно скласти суму добутків з компонентів напружень (компонентів тензора напружень) на відповідні їм компоненти деформації (компоненти тензора деформації). Половинне значення такої суми і складе шукану питому енергію, що позначається u.

Половинне, а не повне значення береться тому, що напруження, а також і деформації не можуть виникнути раптово, а збільшуються в зв'язку зі збільшенням деформації як залежні від останніх (характерно для статичного процесу).

Уявімо собі близько заданої точки кубик з одиничним об’ємом і одиничною площею кожної його грані. Пружна сила, яка припадає на кожну грань, кількісно дорівнює напруженню, що діє на цій грані. Так, в разі одновісного розтяганню вздовж осі x ця сила дорівнює σ_x на одній грані; така ж сила (якщо знехтувати можливим приростом у величині σ_x), але протилежно спрямована, є на другій грані паралельній першій.

Система двох протилежно спрямованих сил (узагальнена сила) здійснює роботу, яка залежить, як відомо, від зміни відстані між точками прикладання цих сил, тобто від деформації подовження кубика (на узагальненому переміщенні). Так як в пружному тілі залежність між напруженням і деформацією лінійна, то робота внутрішніх сил виразиться як половина добутку узагальненої сили на узагальнене переміщення.

Деформація подовження ребра з початковою довжиною в одиницю кількісно дорівнює відносному подовженню того ж ребра. Таким чином, при одновісному

розтяганні – стисканні питома енергія дорівнює $\frac{1}{2}\sigma_x\varepsilon_x$.

Аналогічний вираз має робота і для інших складових напружень, в тому числі і у випадку зсуву.

Таким чином, у загальному випадку просторового напруженого стану для пружного потенціалу будемо мати

$$2u = \sigma_x\varepsilon_x + \sigma_y\varepsilon_y + \sigma_z\varepsilon_z + \tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{yz}\gamma_{yz} + \tau_{zx}\gamma_{zx}. \qquad (11.20)$$

На підставі (11.1) вираз (11.20) набуває вигляду

$$E(2u) = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - 2\mu\left(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x\right) +$$

$$+2(1+\mu)(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2). \qquad (11.21)$$

При деформуванні змінюється як об’єм тіла так і його форма, тому повна потенціальна енергія деформації складається з двох складових

$$u = u_o + u_\phi \qquad (11.22)$$

де u_o - енергія, що витрачається на зміну об’єму у даній точці, u_ϕ енергія, що витрачається на зміну форми у даній точці (питома енергія формозміни).

При визначенні u_o розглянемо ті компоненти напружень, які залежать від об’ємної деформації в точці. Таким чином, будемо мати

$$u_0 = 3\left(\frac{1}{2}\sigma_{\text{ср}}\varepsilon_{\text{ср}}\right), \qquad (11.23)$$

або на підставі (11.12)

$$u_0 = \frac{2}{3}\frac{1-2\mu}{E}\sigma_{\text{ср}}^2.$$

Питому енергію формозміни визначимо шляхом віднімання з повної енергії (11.21) енергії, що витрачається на зміну об’єму тіла

$$u_\phi = u - u_o,$$

або після перетворень будемо мати

$$u_{\text{ф}} = \frac{1}{4G}\left[\left(\sigma_x - \sigma_{\text{ср}}\right)^2 + \left(\sigma_y - \sigma_{\text{ср}}\right)^2 + \left(\sigma_z - \sigma_{\text{ср}}\right)^2 + 2(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2\right]. \quad (11.25)$$

При отриманні формули (11.25) були застосовані залежності (11.15).

Формула (11.25) після заміни $\sigma_{ср}$ компонентами запишеться у вигляді

$$u_{\text{ф}} = \frac{1}{12G}\left[\left(\sigma_x - \sigma_y\right)^2 + \left(\sigma_y - \sigma_z\right)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2\right]. \quad (11.26)$$

Для питомої енергії зміни об’єму і питомої енергії зміни форми можна прийняти наступні вирази:

$$u_0 = \frac{3(1-2\mu)}{2E}\sigma_{\text{окт}}^2,$$

$$u_{\text{ф}} = \frac{3(1+\mu)}{2E}\tau_{\text{окт}}^2. \quad (11.27)$$

11.7. Вплив температурного поля на пружне середовище

Якщо елементарний паралелепіпед, підвержений тільки тепловому впливу, то його деформацію можна охарактеризувати наступними компонентами:

$$\varepsilon_x' = \varepsilon_y' = \varepsilon_z' = \alpha T; \qquad \gamma_{xy} = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0,$$

де α– коефіцієнт лінійного температурного розширення; T – температура.

Припустимо, що розглядається температурне поле не дуже високе, щоб могли змінитися пружні характеристики матеріалу (зокрема - модуль пружності).

При одночасній наявності компонентів напружень і теплового ефекту, компоненти деформації приймуть вид

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \mu\left(\sigma_y + \sigma_z\right)\right] + aT;$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z)\right] + aT;$$

(11.28)

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \mu\left(\sigma_y + \sigma_x\right)\right] + aT;$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G},\ \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}, \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}.$$

Закон Гука в формі Ляме матиме вигляд

$$\begin{aligned} \sigma_x &= 2G\varepsilon_x + \lambda\theta - \frac{E}{1-2\mu}aT, \\ \sigma_y &= 2G\varepsilon_y + \lambda\theta - \frac{E}{1-2\mu}aT, \\ \sigma_z &= 2G\varepsilon_z + \lambda\theta - \frac{E}{1-2\mu}aT. \end{aligned} \tag{11.29}$$

$$T_{xy} = G\gamma_{xy};\ \ T_{yz} = G\gamma_{yz};\ \ \ T_{zx} = G\gamma_{zx}.$$

11.8. Закон пружності для анізотропного тіла

Як відомо, в ізотропному тілі в кожній його точці пружні і механічні властивості однакові для всіх напрямків. Однак в окремих випадках (для тіл переважно волокнистої структури - дерева, пластмаси і ін.) ці властивості можуть бути іншими. Наприклад, для фанери, текстоліту і деяких інших авіаційних матеріалів для основних напрямків - уздовж волокон і поперек волокон - модулі відносяться як 2:1.

До штучних анізотропних матеріалів належать композиційні матеріали, що утворюються об'єднанням високоміцних волокон (скло, метал, вуглець тощо) за допомогою зв'язуючого (смола, метал). Буває, що анізотропний матеріал утворюють за допомогою порожнин (пор) — анізотропно-пористі матеріали.

Якщо припустити самий загальний випадок анізотропії, коли будь-які елементи пружної симетрії відсутні, то залежність деформацій від напружень має вигляд

$$\varepsilon_x = a_{11}\sigma_x + a_{12}\sigma_y + a_{13}\sigma_z + a_{14}T_{xy} + a_{15}T_{yz} + a_{16}T_{zx};\ ;$$
$$\varepsilon_y = a_{21}\sigma_x + a_{22}\sigma_y + a_{23}\sigma_z + a_{24}T_{xy} + a_{25}T_{yz} + a_{26}T_{zx};$$

…….…….. (11.30)

$$\gamma_{xy} = a_{41}\sigma_x + a_{42}\sigma_y + a_{43}\sigma_z + a_{24}T_{xy} + a_{45}T_{yz} + a_{46}T_{zx}.$$

Тут a_{11},a_{12}…..- пружні сталі (коефіцієнти деформації). При цьому$a_{12}=a_{21}$, $a_{13}=a_{31}$, …..$a_{56}=a_{65}$.

Тому залишається 21 коефіцієнт деформації, що не дорівнюють один одному, проте абсолютно незалежних параметрів буде менше: не 21, а тільки 18.

Можна довести, що якщо в кожній точці тіла є так звана площина пружної симетрії, що володіє тим властивістю, що будь-які два напрямки, симетричні відносно цій площині, є еквівалентними відносно пружних властивостей (в однорідному тілі всі ці площини, проведені через будь-які точки, паралельні), то число незалежних пружних сталих скорочується до 13. Якщо через точку однорідного тіла проходять три взаємно перпендикулярні площини пружної симетрії, то число незалежних пружних постійних скорочується до дев'яти (ортогонально-ізотропне тіло,або ортотропне). Таким тілом може бути листовий матеріал (композит), що має волокна (пори) в двох взаємно перпендикулярних напрямах *Cx′, Cy′* (рис. 11.1). В цих ортогональних напрямах властивості матеріалу визначаються властивостями волокон, а в напрямі *Cz′*—властивостями зв'язуючого.

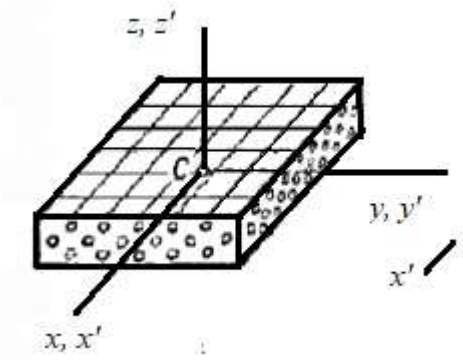


Рис.11.1

Якщо через кожну точку тіла проходить площина, в якій всі напрямки є пружно-еквівалентними (площина ізотропії), то число різних пружних сталих зводиться до п'яти (трансверсально-ізотропне тіло).

У разі повної симетрії, тобто у разі ізотропного тіла, коли будь-яка площина є площину пружної симетрії і будь-який напрямок - головний, кількість незалежних пружних сталих скорочується до двох.

11.9. Про різні гіпотези наступу граничного пружного або пластичного стану в точках суцільного середовища

В курсі опору матеріалів досить докладно розглянуті різні так звані теорії міцності. Завдання останніх, як відомо, полягає втому, щоб на підставі стандартних експериментальних даних про руйнування конкретного матеріалу при будь-якої найпростішої деформації (зазвичай за еталон для порівняння беруть дані, отримані при випробуванні на осьове розтягання) встановити умови, за яких можливе руйнування того ж матеріалу при заданій складної деформації, тобто які необхідні для цього співвідношення і значення компонентів тензора напружень у порівнянні з відомим і єдиним, головним і відмінним від нуля компонентом напруження при руйнуванні в разі простого розтягання.

Наведемо відомості з теорій міцності, які характеризують наступ граничного пружного стану в точці лінійно пружного тіла і, як правило, широко використовуються в сучасній теорії пружності і пластичності.

Сформулюємо так звану третю (Кулон, Гест, Сен-Венан) і п'яту (Губер, Мізес, Рош, Ейхінгер) теорії міцності стосовно не до моменту руйнування, а до моменту настання граничного пружного стану в точці тіла.

Так, за формулюванням Кулона і Геста, можна припустити, що граничний пружний стан в даній точці суцільного середовища в загальному випадку напруженого стану в цій точці настане тоді, коли найбільші дотичні напруження досягнуть значення, що відповідає граничному пружному стану для того ж матеріалу при простому розтяганні.

Позначаючи σ_{el} границю пружності матеріалу при простому розтяганні і маючи на увазі, що коли головне напруження при простому розтяганні досягне значення σ_{el} , то в цю мить найбільше дотичне напруження набуває значення

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_{el}}{2}. \tag{11.31}$$

У разі складного напруженого стану в точці найбільше дотичне напруження в ній виражається через головні напруження виразом

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}. \tag{11.32}$$

Тому сформульовану вище гіпотезу про настання граничного пружного стану в точці при складному напруженому стані (прирівнюючи праві частини (11.31) і (11.32) представляємо у вигляді

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{\sigma_{el}}{2},$$

або

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_{el}. \tag{11.33}$$

За формулюванням Роша та інших, можна припустити, що граничний пружний стан в даній точці суцільного середовища в загальному випадку напруженого стану в цій точці настане тоді, коли в цьому випадку дотичне октаедричні напруження досягне значення дотичного октаедричного напруження, відповідному граничному пружному стану для того ж матеріалу при простому розтяганні.

Дотичне октаедричні напруження в загальному випадку напруженого стану в точці, яке виражається через головні напруження

$$\tau_{\text{окт}} = \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}. \tag{11.34}$$

в разі граничного пружного стану при простому осьовому розтяганні або стисканні становить (вважаючи у формулі (11.34) $\sigma_1 = \sigma_3 = 0,\ \ \sigma_1 = \sigma_{el}$)

$$\tau_{\text{окт}} = \frac{\sqrt{2}}{3}\sigma_{el}. \qquad (11.35)$$

Сформульована вище друга гіпотеза після порівнювання правих частин (11.34) і (11.35) має вигляд

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2} = \sigma_{el}\ . \qquad (11.36)$$

Найбільш широко, особливо в теорії пластичності, застосовують умову (11.36), тобто теорію Губера - Мізеса.

У разі якщо матеріал є ідеально пластичним або близьким до нього, тобто для того матеріалу індикаторна діаграма при простому розтягуванні має вигляд, показаний на рис.11.2 (границі пружності σ_{el} і текучості σ_{y} збігаються), то умови (11.33) і (11.36) можна одночасно тлумачити і як умови настання граничного пружного стану і як умови настання пластичного стану.

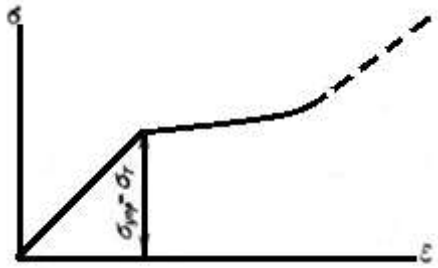


Рис.11.2

Отже, в залежності від того, яка з двох наведених вище теорій ближче відповідає кожному конкретному випадку (матеріал, режим роботи та ін.), застосовують фізичні рівняння (11.33) або (11.36).

Вище викладені деякі відомості з загального курсу опору матеріалів, що відносяться до механічних теорій міцності ізотропного тіла і широко використовуються в задачах теорії пружності і пластичності.

Звичайно, в разі анізотропного тіла і в загальному випадку матеріалу з неоднаковими границями міцності на розтягання і стискання і самостійною

границею міцності на зсув (котрий для нових композитних матеріалів, таких, як стекло-пластики і інші, виявляється залежним від знака дотичних напружень), умови настання граничного пружного стану або початку пластичних деформацій повинні бути інші - більш складні.

Запитання для самоперевірки

1. Які передумови повинні виконуватися для екстраполяції закону Гука при простому розтяганні на випадок просторового напруженого стану?
2. Який вигляд має узагальнений закон Гука?
3. Запишіть закон Гука у вигляді залежностей напружень від деформацій.
4. Запишіть закон зміни об’єму тіла.
5. Запишіть закон зміни форми тіла.
6. Запишіть вираз повної питомої енергії деформації.
7. Запишіть вираз питомої енергії деформації зміни об’єму.
8. Запишіть вираз питомої енергії деформації, що пов’язана з зміною форми тіла.
9. Який вигляд має закон пружності для анізотропного тіла?
10. Запишіть закон Гука у випадку врахування температурного поля.
11. Запишіть вирази теорій міцності Кулона-Геста і Губера-Мізеса.

ЛЕКЦІЯ 12

ТЕОРІЯ НЕЛІНІЙНОГО ТА ПРУЖНО-ПЛАСТИЧНОГО ТІЛА

12.1 Основні передумови нелінійної теорії пружності

Нехай для заданого нелінійного пружного тіла відома індикаторна діаграма розтягання - стискання (рис. 12.1). Коефіцієнт поперечного звуження приймемо рівним 1/2, тобто будемо вважати, що матеріал в процесі деформування не змінює об'єму, але змінює форму.

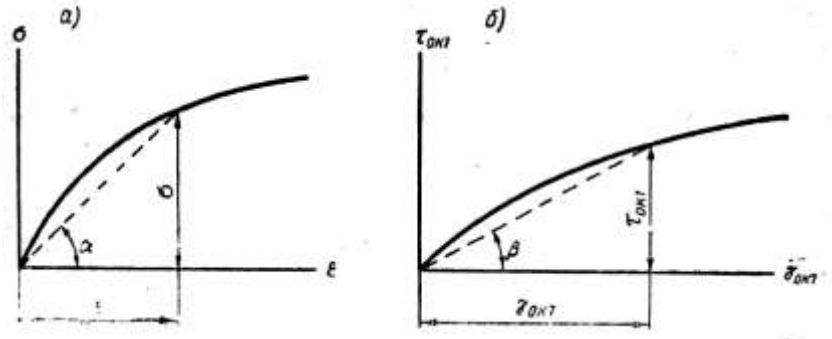


Рис. 12.1

Так як при осьовому розтяганні стержня нормальне напруження в поперечному перерізі σ, відносне подовження стержня, октаедричні напруження $\tau_{окт}$ і октаедричний зсув $\gamma_{окт}$ знаходяться в залежності

$$T_{окт} = \frac{\sqrt{2}}{3}\sigma,$$

$$\gamma_{окт} = \sqrt{2}\varepsilon, \tag{12.1}$$

тоді діаграму розтягання (рис.12.1, а) легко перебудувати в діаграму октаедричних зсувів, яка приведена на рис. 12.1, б.

Якщо по рис. 12.1, а

$$\sigma = E'\epsilon, \tag{12.2}$$

де $E' = tg\alpha$ – сікучий модуль деформації першого роду, який залежить від степені деформації, тобто $E' = f(\epsilon)$,то аналогічно по рис.12.1, б будемо мати

$$\tau_{\text{окт}} = G'\gamma_{\text{окт}}, \tag{12.3}$$

де $G' = \tan\beta$ – сікучий модуль деформації другого роду, який залежить від величини октаедричниого зсуву, що набуло тіло до моменту напруженого стану, тобто

$$G' = \varphi(\gamma_{\text{окт}}). \tag{12.4}$$

Використовуючи для контролю відношення (12.1) – (12.4) (для нестискаємого матеріалу), отримаємо

$$G' = \frac{1}{3}E'. \tag{12.5}$$

Розглянемо залежність між напруженнями і деформаціями навколо заданої точки для нелінійного пружного тіла в загальному випадку напруженого стану в точці.

Приймемо таке припущення (гіпотезу): *при складному напруженому стані в точці заданого нелінійного пружного тіла залежність октаедричного дотичного напруження для цієї точки від октаедричного зсуву виражається так само, як залежність аналогічних напружень і деформацій при простому розтяганні того ж тіла.*

Таким чином, закон у формі (12.3) і залежність січення модуля зсуву від октаедричного зсуву за виразом (12.4) є спільними як при простому розтяганні матеріалу, так і при складному напруженому стані того ж матеріалу.

Використовуючи поняття інтенсивності (узагальненого) напруження і інтенсивності (узагальненої) деформації вираз (12.3) можна представити у вигляді

$$\frac{\sqrt{2}}{3}\sigma_i = G'\sqrt{2}\varepsilon_i$$

або на підставі виразу (12.5)

$$\sigma_i = E'\epsilon_i, \tag{12.6}$$

що по формі аналогічно виразу (12.2).

На рис. 12.2 показана характерна діаграма розтягання для м'якої сталі (залежность σ і ε). Та ж діаграма приймається і при складному у напруженому стані елемента тієї ж сталі, але в якості зв'язку беруться інтенсивність напруження σ_i, від інтенсивності деформації ε_i.

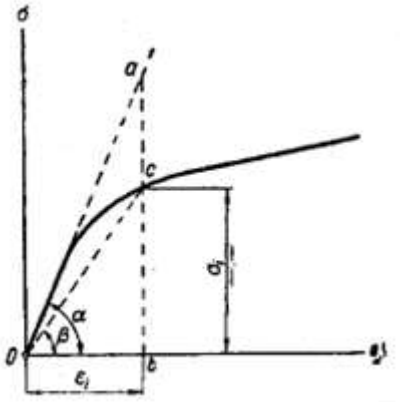


Рис. 12.2

Таким чином, основну передумову нелінійної теорії пружності, а також і основну гіпотезу теорії пластичності, але тільки при простому навантаженні можна сформулювати так: *при складному напруженому стані залежність між інтенсивністю напруження і інтенсивністю деформації для кожної точки тіла приймається такою ж, як залежність напруження з подовженням при простому розтяганні того ж тіла.*

Отже, приймаємо для $E=\Phi(\varepsilon_i)$ як функції інтенсивності деформації такий же вираз, які для $E=f(\varepsilon)$, тобто для сікучого модуля деформації першого роду (функція звичайного подовження при простому розтяганні).

Таким чином, якщо, наприклад, для будь-якого матеріалу при випробуванні його на просте розтягання – стискання експериментально встановлена степенна залежність

$$\sigma = A(\frac{\varepsilon}{B})^m$$

де A та B - постійні величини, то приймається, що в разі складного напруженого,

стану того ж тіла для кожної його точки закон деформації можна представити у вигляді

$$\sigma_i = A(\frac{\varepsilon_i}{B})^m .$$

Таким чином, якщо при випробуванні на просте розтягання – стискання експериментально встановлений закон

$$\sigma = (\frac{A}{B\varepsilon^n})\varepsilon,$$

то у разі складного напруженого стану того ж тіла існує залежність

$$\sigma = (A_i/B_i\varepsilon^n)\varepsilon_i,$$

або, що все одно, для сікучого модуля приймається

$$E = A_i/B\varepsilon^{n.i}$$

Якщо результати випробування на просте розтягання за межею пружності для якогось матеріалу, оброблені у вигляді

$$\sigma = E(1/\omega)\varepsilon,$$

де E — звичайний модуль пружності матеріалу, а ω — аналітична функція відносного подовження (відмінна від нуля тільки за межею пружності), тобто $\omega = \psi(\varepsilon_i)$, то у випадку складного напруженого стану для того ж матеріалу приймається закон деформації у вигляді

$$\sigma_i = E(\frac{1}{\omega})\varepsilon_i, \qquad (12.7)$$

де $\omega = \psi(\varepsilon_i)$ – функція інтенсивності деформації, подібна до такої ж функції при простому розтягу і відмінна від нуля тільки в області пластичних деформацій.

Вираз закону деформації у формі (12.7) знаходить широке застосування при вирішенні пружно-пластичних задач. Зокрема, якщо діаграму розтягання -

стискання матеріалу можна з достатньою точністю апроксимувати двома похилими прямими, показаними на рис. 12.3,

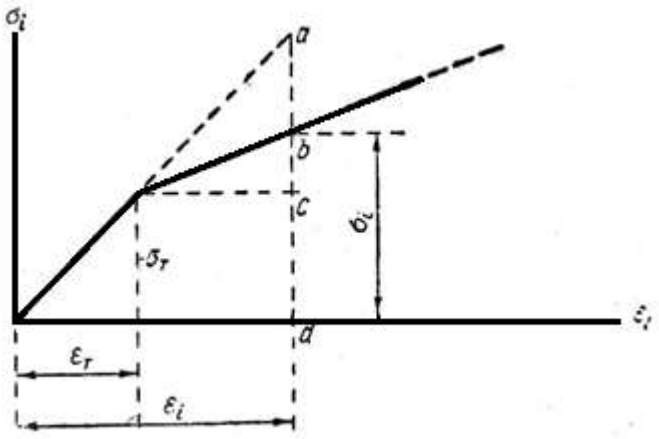


Рис. 12.3

то

$$\sigma_i = ad - ac + bc = \varepsilon_i tg\alpha = (\varepsilon_i - \varepsilon_T)tg\alpha = (\varepsilon_i - \varepsilon_T)tg\beta$$

Позначаючи тангенс кута нахилу першої ділянки діаграми $tg\alpha = E$ (звичайний модуль пружності) і другої ділянки ", отримуємо $tg\beta = E''$, отримаємо

$$\sigma_i = E\left[1 - \left(1 - \frac{\varepsilon_T}{\varepsilon_i}\right)\left(1 - \frac{E''}{E}\right)\right]\varepsilon_i$$

Співставляючи цей вираз з рівнянням (12.7), отримаємо

$$\omega = \left[\left(1 - \frac{\varepsilon_T}{\varepsilon_i}\right)\left(1 - \frac{E''}{E}\right)\right].$$

Цей вираз іноді записується у вигляді

$$\omega = \lambda\left[\left(1 - \frac{\varepsilon_T}{\varepsilon_i}\right)\right],$$

де $\lambda = \left(1 - \frac{E''}{E}\right)$ - параметр розміцнення.

Виняткова важливість закону (12.7) для механіки пружних і пластичних деформацій, а отже, і важливість понять інтенсивності напружень та інтенсивності

деформації полягають перш за все в тому, що за допомогою цього закону будь-який складний об'ємний напружений стан незалежно від того, чи має розглянута область пружні або непружні деформації, якби зводиться до простого розтягання або стискання стержня.

Дійсно, так як вид $\Phi(\varepsilon_i)$ залежить тільки від матеріалу тіла, то не потрібно проводити спеціальні досліди зі складним напруженим станом, якщо є діаграма $\Phi(\varepsilon)$ для одновісного розтягання.

12.2. Наслідки з основної передумови – фізичні рівняння нелінійної теорії пружності і теорії пластичності

Як відомо, в результаті перетворень формул узагальненого закону Гука отримані лінійні залежності між октаедричними напруженням і зсувом в околиці тієї ж точки. Можна також, прийнявши за початкове положення. Залежність $\tau_{окт}$ і $\gamma_{окт}$ в результаті формальних перетворень вивести відомі шість залежностей узагальненого закону Гука.

Для нелінійного пружного тіла прийнята залежність між октаедричними напруженнями і деформаціями, за формою аналогічна залежності для лінійно пружного тіла. Ці залежності відрізняються змінним модулем в виразах (12.3) або (12.6). Тому для нелінійного пружного тіла (при навантаженні і розвантаженні) і для теорії пластичності (але при простому навантаженні) можна встановити залежності між окремими компонентами напружень і компонентами деформації, за формою аналогічні відомим в теорії пружності виразами і іншим, але з заміною постійного модуля зсуву G на змінний G' (або аналогічно з заміною модуля пружності E на змінний модуль E').

Використовуючи вираз (12.6) і залежність між модулями отримуємо рівняння для нелінійного пружного тіла (справедливі при навантаженні і розвантаженні) і рівняння для пластичного тіла, але тільки при активному процесі деформації і при так званому простому навантаженні

$$\sigma_x - \sigma_{cp} = \frac{2\sigma_i}{3\varepsilon_i}\left(\varepsilon_x - \varepsilon_{cp}\right),$$

$$\sigma_y - \sigma_{cp} = \frac{2\sigma_i}{3\varepsilon_i}\left(\varepsilon_y - \varepsilon_{cp}\right), \qquad (12.8)$$

$$\sigma_z - \sigma_{cp} = \frac{2\sigma_i}{3\varepsilon_i}\left(\varepsilon_z - \varepsilon_{cp}\right),$$

$$\tau_{xy} = \frac{2\sigma_i}{3\varepsilon_i}\gamma_{xy}, \quad \tau_{yz} = \frac{2\sigma_i}{3\varepsilon_i}\gamma_{yz}, \quad \tau_{zx} = \frac{2\sigma_i}{3\varepsilon_i}\gamma_{zx}$$

де

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_{cp})^2 + (\sigma_y - \sigma_{cp})^2 + (\sigma_z - \sigma_{cp})^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)}$$

$$\varepsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 + \frac{3}{2}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)}$$

Фізичний сенс законів (12.8), (12.6) можна витлумачити так: для кожної точки тіла, що деформується напруження по різних напрямках (площадках) є лінійними функціями відповідних компонентів деформації. Зокрема, площадкам з найбільшими зсувами відповідають найбільші дотичні напруження, пропорційні цим зсувам. Напрямки головних подовжень збігаються з напрямками головних нормальних напружень (що підтверджуються експериментально).

При пружній деформації коефіцієнт пропорційності (модуль пружності) постійний для всіх точок пружної області тіла, тоді як при пластичної деформації цей коефіцієнт (модуль деформації) змінюється від точки до точки і зменшується тим сильніше, чим більше деформація в новій розглянутій точці в порівнянні з раніше обстеженої.

Так як об'ємна деформація при пластичної деформації практично дорівнює нулю, то в перших трьох рівняннях (8) доданок ε_{cp} часто виключають.

При плоскому напруженому пружно-пластичному стані рівняння теорії пластичності іноді зручно виразити у формі, аналогічній виразу з теорії пружності, тобто

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E'}\left[\sigma_x - \mu'\left(\sigma_y + \sigma_z\right)\right],$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E'}\left[\sigma_y - \mu'\left(\sigma_z + \sigma_x\right)\right],$$

де для області пластичних деформацій допустимо прийняти $\mu' = 1/2$. З останніх рівнянь отримуємо формули для напружень, виражені через деформації:

$$\sigma_x = \frac{4}{3}E'\left[\varepsilon_x + \frac{1}{2}\varepsilon_y\right],$$

$$\sigma_н = \frac{4}{3}E'\left[\varepsilon_y + \frac{1}{2}\varepsilon_x\right]. \qquad (12.9)$$

12.3. Узагальнення законів пружних і пластичних деформацій

Як це випливає з зіставлення, рівняння (12.8) для визначення пластичних деформацій для нелінійно-пружного тіла і рівняння, що справедливі для лінійно-пружного тіла, можна узагальнити. Якщо використовувати поняття про девіатором напружень і деформації, то закони пружних і пластичних деформацій можна сформулювати наступним чином:

Перший основний закон – закон зміни об'єму. При пружних і пластичних, при активних і пасивних деформаціях твердого тіла відносна зміна об’єму елементу цього тіла (або кульовому тензору деформації) прямо пропорційна середньому напруженню (або кульовому тензору напружень), причому модуль об'ємної деформації залишається постійною величиною як в межах, так і за межами пружності:

$$\sigma_{ср} = \frac{E}{1-2\mu}\varepsilon_{ср}. \qquad (12.10)$$

де E — модуль пружності і μ - коефіцієнт Пуассона, які приймаються постійними незалежно від величини деформації.

Другий основний закон — закон зміни форми при активній деформації.

При пружних і пластичних деформаціях, що відповідають випадку простого навантаження для кожної точки тіла, девіатор напружень прямо пропорційний девіатору деформації, тобто

$$D_н = 2G'D_{деф}, \tag{12.11}$$

де G' – модуль деформації другого роду, що має для кожної точки ізотропного тіла в загальному випадку напруженого стану певне значення, залежне від величини узагальненого напруження для цієї точки. У скалярній формі закон (12.11) записують відповідно (12.8).

Третій основний закон — закон зв'язку узагальненого напруження з узагальненою деформацією при активному навантаженні. Узагальнене напруження, що виникає у тілі при будь активної деформації (пружної або пластичній), для кожного матеріалу є певна функція узагальненої деформації:

$$\sigma_i = \Phi(\epsilon_i). \tag{12.12}$$

Вид функції Φ залежить тільки від матеріалу тіла і не залежить від того, при яких складових (при простому — одновісному або складному — об'ємному напружених станах) інтенсивність деформації досягає цього значення. Величина інтенсивності напруження залежить тільки від величини досягнутої інтенсивності деформації і, звичайно, від фізичних властивостей даного матеріалу.

Залежність $\sigma_і$ від $\varepsilon_і$ визначають дослідним шляхом і найбільш просто з дослідів на чисте розтягання.

Отже, третій закон встановлює єдність природи деформації ізотропних тіл у складних і простих випадках напружених станів у межах і за межами пружності.

Четвертий основний закон — закон пасивної деформації. При простому (повному або частковому) розвантаженні тіла, яке перебуває в момент початку пасивної деформації в пластичному стані, в усі наступні моменти девіатор напружень залежить від девіатора деформації, що відповідає моменту початку розвантаження, і від девіатора деформації, підрахованого в припущенні

навантаження ненапруженого та лінійно - деформівного тіла фіктивними силами. Значення фіктивних сил дорівнюють перевищення початкових значень сил (що відповідають моменту початку розвантаження) над фактичним їх значенням у розглянутий момент.

Цей закон можна представити так:

$$D_н = 2G'D_{деф} - 2GD'', \tag{12.13}$$

де $D_{деф}$ – девіатор деформації, відповідний моменту початку розвантаження; D'' – пружний девіатор деформації, підрахований в припущенні ідеально пружного тіла від зазначених вище фіктивних сил; $D_н$ – девіатор напружень (залишкових), що відповідає розглядуваному моменту навантаження; G' – загальний модуль зсуву однаковий для усіх точок ізотропного матеріалу.

Наведені тут основні закони не є незалежними один від одного, і число незалежних законів пов'язано з тим, які причини і допущення явно або неявно прийняті.

12.4. Частковий випадок – ідеально пластичне тіло

Якщо діаграма розтягання - стискання і зсуву матеріалу має ясно виражену і притому великої протяжності площадку текучості (рис. 12.4), то узагальнений закон деформації (12.7), що відповідає явищу текучості при розтяганні – стисканні, набуде вигляду

$$\sigma_i = \sigma_T, \tag{12.14}$$

що представляє відому умову пластичності по Губеру – Мізесу. Ліву частину виразу (12.14) називають ***зведеним напруженням по енергетичній теорії міцності (теорії формозміни).***

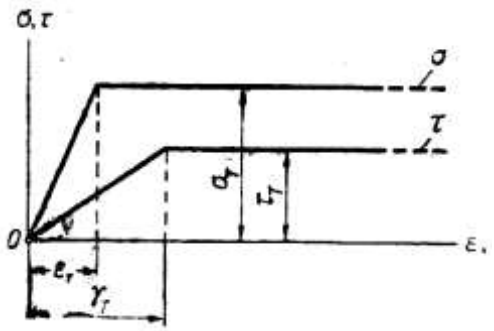


Рис. 12.4

Найбільш прості теорії пластичності засновані на уявленні про умови пластичності, яка затверджує, що ***при пластичному стані речовини зведене напруження в будь-якій точці залишається постійним***. Так як зведене напруження, що визначається формулою (12.14), будучи зведеним в квадрат і поділене на подвійний модуль пружності, являє собою питому енергію формозміни (ту частину потенційної енергії елементарного одиничного об'єму, яка витрачається тільки на зміну форми), умову (12.14) можна сформулювати і так: при пластичному стані речовини питома енергія формозміни для будь-якої точки залишається постійною.

Найбільш прості рівняння в теорії пластичності можна отримати, якщо виходити з теорії найбільших дотичних напружень (третьої теорії міцності), що базується на тих дослідах, в яких встановлено, що при пластичному стані речовини максимальне дотичне напруження в будь-якій точці залишається постійним. Ця умова, через головні напруження, має вигляд

$$\sigma_1=\sigma_3-\sigma_T. \qquad (12.15)$$

Для плоского напруженого стану, користуючись компонентами напружень, будемо мати

$$\sqrt{(\sigma_x-\sigma_y)^2+4T_{xy}^2}=\sigma_T.$$

Умова сталості дотичного напруження (умова Сен-Венана) в загальному

випадку задовільно характеризує стан текучості матеріалу і узгоджується з так званими лініями Людерса - Чернова.

Умову (12.14) можна виразити через головні напруження, якщо в виразі для σ_i прийняти $\tau_{xy}=\tau_{yz}=\tau_z=0$, а $\sigma_x,\sigma_y,\sigma_z$ – відповідно , що дорівнюють головним напруженням $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3$. Таким чином будемо мати

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{(\sigma_1-\sigma_2)^2-(\sigma_1-\sigma_2)^2-(\sigma_1-\sigma_2)^2}=\sigma_T. \qquad (12.16)$$

Для випадку, коли $\sigma_{1=}\sigma_2$ або $\sigma_{2=}\sigma_3$ умова (12.16) набуває простішого вигляду.

Запитання для самоперевірки

1. Розглянути основні передумови нелінійної теорії пружності.
2. Визначити наслідки з основної передумови – фізичні рівняння нелінійної теорії пружності і теорії пластичності.
3. Розглянути узагальнення законів пружних і пластичних деформацій.
4. Розглянути частковий випадок – ідеально пластичне тіло.

ЛЕКЦІЯ 13

ЛІНІЙНА І НЕЛІНІЙНА В'ЯЗКО-ПРУЖНЯ І В'ЯЗКО-ПЛАСТИЧНАТЕОРІЯ СЕРЕДОВИЩА

13.1 Основні поняття в теорії повзучості

Як відомо, при визначенні пружних, а також малих пружно- пластичних деформацій поняття часу як незалежна змінна виключається із законів деформування. Так, в теорії пружності деформація однозначно визначається діючими в даний момент силами незалежно від історії всіх попередніх навантажень.

В теорії пластичності необхідно знати напружений і деформований стани, придбані тілом від попереднього навантаження. Але і в цьому випадку знайдена нова деформація приймається в майбутньому що зберігається без зміни, якщо не відбудеться зміни в самому навантаженні.

Однак пластична деформація твердого тіла за своєю природою, взагалі кажучи, є станом руху, і тому явище текучості повинно було б досліджуватися як деякий рух безперервного середовища. Зміни в часі деформацій, а отже, і напружень в одних випадках виявляються протягом порівняно невеликого відрізка часу, наприклад протягом декількох місяців або років (випадок падіння напружень в натягнутому болті або струні, що зберігають постійну деформацію, тобто так зване явище релаксації, або випадок зростаючих у часі прогинів сильно напруженого перекриття під дією постійного незмінного в часі навантаження, тобто явище повзучості).

Природу таких явищ, як релаксація (падіння напружень при незмінній деформації), повзучість (зростання деформацій при постійних навантаженнях), не можна пояснити з точки зору ідеально пружного тіла або ідеально пластичного. Частково ці явища можна пояснити, як що виходити з уявлення про пружно-в'язких або в'язко-пластичних тілах, розуміючи під останніми такі тіла, в яких при деформації виникають напруження, які залежать не тільки від деформацій, але також і від швидкостей розвитку цих деформацій. У цьому випадку будь-яке реальне тіло уподібнюється конгломерату, що складається з твердих (пружного або

пластичного) елементів і напіврідкого, рідкого або газоподібного речовин, яким заповнені проміжки між твердими елементами.

Яскравим прикладом останнього є ґрунт, в якому волога заповнює простір між твердими частинками піску і глини.

Аналогічний процес спостерігається в бетонах і розчинах, де навіть чисто пружні деформації обумовлюються не тільки деформацією твердих зерен, але і розтяжністю поверхневих плівок рідини в капілярних порах між зернами.

Для подальшого викладу приймемо деякі додаткові визначення, поняття і позначення.

Залежно від тривалості спостереження процесу деформації більшості реальних тіл спочатку проявляються або їх властивість пружності (оборотність процесу), або їх властивість текучості (незворотність процесу). Іншими словами, ступінь прояву тих чи інших властивостей залежить від тривалості спостереження, або точніше, від відношення часу спостереження до так званого часу релаксації.

Умовимося називати часом релаксації для даного матеріалу такий час, протягом якого напруження (або зовнішні сили)в матеріалі, що виникли від заздалегідь створеної і надалі незмінною в часі деформації, слабшають в e=2,718 рази.

Для матеріалу земної кори час релаксації вимірюється тисячоліттями, для скла (при звичайних температурах)— століттями, для води — 10-11сек.

Ось чому сили, що діють на зовнішню оболонку Землі протягом геологічних періодів часу (десятки або сотні тисяч років), безсумнівно, викличуть течію. Материкові маси, що складають оболонку Землі, знаходяться в стані повільної в'язкої течії.

Для води такий відрізок часу, як 1 сек, вважається настільки великим, що при спостереженні течії водив цей проміжок часу практично не виявляється її здатності чинити пружний опір зсуву. Навпаки, протягом проміжку часу, меншу порівняно з 10 - 11 сек, вода веде себе як пружне тіло, що здатне чинити опір зсуву.

На додаток до понять про тензори і девіатори напружень та деформацій введемо поняття про тензори і девіатори швидкостей напружень і швидкостей

деформацій. Якщо позначимо точкою операцію диференціювання по часу і, отже, швидкості напружень і деформацій, то запис тензорів і девіатором швидкостей напрузі і деформацій набуде вигляд, як звичайний тензорі девіатор, але кожен компонент буде мати точку, яка вказує на диференціювання в часі.

Так, девіатор швидкостей напружень має вигляд

$$\dot{D}_H = \frac{\partial D_H}{\partial t}\begin{bmatrix} (\dot{\sigma}_x - \dot{\sigma}_{cp}) & \dot{T}_{yx} & \dot{T}_{xz} \\ \dot{T}_{yx} & (\dot{\sigma}_y - \dot{\sigma}_{cp}) & \dot{T}_{yz} \\ \dot{T}_{zx} & \dot{T}_{zy} & (\dot{\sigma}_z - \dot{\sigma}_{cp}) \end{bmatrix}. \qquad (13.1)$$

І девіатор швидкостей деформацій

$$\dot{D}_{\text{деф}} = \frac{\partial D_{\text{дуф}}}{\partial t}\begin{bmatrix} (\dot{\varepsilon}_x - \dot{\varepsilon}_{cp}) & \frac{1}{2}\dot{\gamma}_{yx} & \frac{1}{2}\dot{\gamma}_{xz} \\ \frac{1}{2}\dot{\gamma}_{yx} & (\dot{\varepsilon}_y - \dot{\varepsilon}_{cp}) & \frac{1}{2}\dot{\gamma}_{yz} \\ \frac{1}{2}\dot{\gamma}_{zx} & \frac{1}{2}\dot{\gamma}_{zy} & (\dot{\varepsilon}_z - \dot{\varepsilon}_{cp}) \end{bmatrix}. \qquad (13.2)$$

Також є доцільним оперувати поняттями інтенсивність швидкості напружень,а також інтенсивність швидкості деформації, які мають такі умовні вирази:

$$\dot{\sigma}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 - (\sigma_1 - \sigma_2)^2 - (\sigma_1 - \sigma_2)^2}\,, \qquad (13.3)$$

$$\dot{\varepsilon}_1 = \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 - (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 - (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2}\,. \qquad (13.4)$$

Для вивчення повзучості металів зазвичай проводять досліди на розтяганню стержнів при постійній температурі і фіксованому навантаженні або напруженні. Типові результати тривалих випробувань стержня при постійному навантаженні приведені на рис.13.1 так звана крива повзучості).

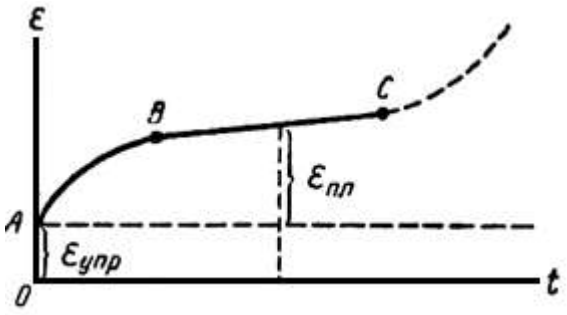


Рис. 13.1

При навантаженні стержень отримує початкову деформацію ε_o, яка в залежності від навантаження може бути пружною або пружно-пластичної . Потім йде ділянка АВ, що характеризує зростання деформації в часі, але з поступово збігаючою швидкістю повзучості (дотична до різних точок кривої АВ при наближенні до точки В займає більш пологий напрямок). Відрізок часу ОВ називають періодом несталої повзучості, і зазвичай цей період відносно невеликий. На ділянці ВС швидкість деформації практично постійна. Це так званий період сталої повзучості, зазвичай вельми великий і закінчується або крихким зламом в момент часу, що відповідає точці С, або в'язкому руйнуванню внаслідок утворення шийки.

Відповідно до двома характерними ділянками кривої повзучості надалі будемо розрізняти дві теорії,а саме теорію несталої повзучості і теорію усталеною повзучості.

У разі якщо час витримування випробуваного зразка під постійним навантаженням обмежити і в якийсь момент часу його розвантажити, то діаграма повзучості металу матиме вигляд, показаний на рис. 13.2.

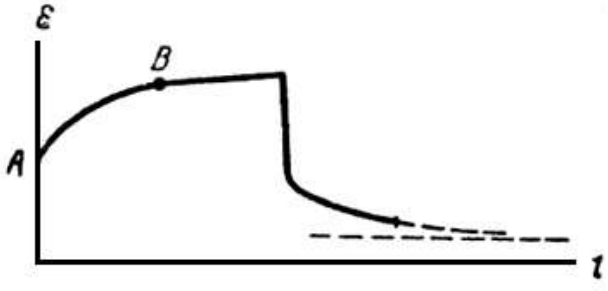


Рис. 13.2

Явище поступового зростання деформацій після прикладання навантаження і зменшення після зняття її в опорі матеріалів називається післядією, яку в залежності до яких напружень доведено тіло поділяють на пружну і недружню післядію. Це явище будемо називати повзучістю.

Здібність матеріалу змінювати свій напружено-деформований стан в часі іноді називають в'язкістю, яка в частковому випадку трансформується в релаксацію напружень або в повзучість деформацій. Це явище також будемо називати повзучістю.

13.2. Класифікація фізичних середовищ і рівнянь, що описують закони їх деформування

Точний опис законів деформації більшості конкретних тіл природи дуже складно. Тому в інженерній практиці, як вже зазначалося вище, беруть різні спрощення, допущення, нехтують другорядними факторами. Так виникає поняття про ідеально пружне тіло в двох його різновидах – лінійно-пружне і нелінійно-пружне, поняття про пружно-пластичне тіло, про ідеально пластичне тіло (без зміцнення).

Розглянемо ще ті випадки, коли вплив часу на напружено- деформований стан істотний. Найпростішим прикладом такого тіла є в'язка рідина, розрахункова модель якої була запропонована Ньютоном, і називається тому ньютоновою в'язкою рідиною. Для такої рідини опір її течією залежить від відносних швидкостей руху її частинок. Так, дотичне напруження в точках в'язкої рідини слід зіставляти ні з величиною відносних зсувів γ, а з і швидкістю зміни цих зсувів $\gamma^{\cdot}$. Ньютон запропонував приймати залежність межі $\gamma^{\cdot}$ саму найпростішу - лінійну, тобто

$$\tau = \eta\dot{\gamma}, \tag{13.5}$$

де $\dot{\gamma} = \dfrac{\partial\gamma}{\partial t}$, η; – коефіцієнт в'язкості, який аналогічний модулю зсуву для пружного тіла.

Тіло (середа), для якого застосовні умови (13.5) і аналогічні йому лінійні

співвідношення, назвемо лінійно-в'язким середовищем або ідеально в'язким тілом.

В реології широко застосовують зображення на моделях тих чи інших абстрактних тіл. Так, зокрема, ідеально в'язке тіло можна представити у вигляді амортизатора, на приклад у вигляді пробірки, наповненій дуже в'язким мастилом, в якій вільно переміщається поршень (рис.13.4).

Якщо тіло при його деформації створює опір (напруження), що залежать від величини і швидкостей цих деформацій і здатні зникнути при зникненні деформацій,то таке тіло називається пружно-в'язким. В залежності від того, які рівняння характеризують компоненти тензорів напружень, деформацій і швидкостей деформацій (лінійні або нелінійні), розрізняються лінійне пружно-в'язке тіло і нелінійне пружно-в'язке тіло.

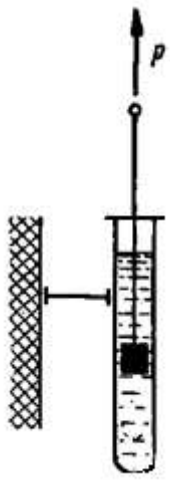


Рис. 13.4

У відповідності з назвою того чи іншого із зазначених вище тіл аналогічно називають рівняння, що описують деформації цих тіл. Рівняння, або умови, що описують деформації тіл, розділимо на три групи:

а)лінійні рівняння, в яких залежність між напруженнями, деформаціями, їх швидкостями найпростіша – лінійна;

б)нелінійні рівняння, які мають нелінійну залежність;

в) умови текучості, які використовують замість рівнянь (13.5) у тих випадках, коли речовина в розглянутій точці знаходиться в граничному стані відповідно напруженню в цій точці.

Умовимося замість терміна «тіло» застосовувати термін «середовище», так як одночасна наявність такого комплексу властивостей, як релаксація напружень, повзучість деформацій та інші, природно віднести до складного по конституції тіла, яким є середовище.

13.3. Зв'язок компонентів напружень з компонентами деформацій для ідеально-в’язкого середовища

Як вже відомо, для ідеально в'язкої рідини, для найпростішого, тобто ламінарного руху, Ньютон запропонував залежність для дотичного напруження (закон опору) у вигляді (13.5).

Очевидно, що для одноосного напруженого стану в такому ж ідеально в'язкому середовищ і можна прийняти залежність у вигляді

$$\sigma = \varsigma\dot{\varepsilon}, \tag{13.6}$$

де ς– коефіцієнт, аналогічний модулю E для ідеально пружного середовища. Цей коефіцієнт іноді називають лінійної в'язкістю рідини.

Очевидно, що цей коефіцієнт знаходиться в залежності з коефіцієнтом в'язкості η, аналогічної залежності між E і G, тобто

$$\eta = \frac{\varsigma}{2(1+\mu^*)}, \tag{13.7}$$

де μ*– коефіцієнт поперечної деформації, що залежить від швидкості деформації.

Так як об'ємна деформація ньютонової в'язкої рідини не залежить від швидкостей деформації (залежить тільки від гідростатичного тиску), тобто не володіє об'ємною в'язкістю, то коефіцієнт μ приймаємо рівним половині і тому

$$\varsigma = 3\eta. \tag{13.8}$$

Так як для лінійно-напруженого стану в ідеально в'язкої рідини вихідний закон (13.6) ідентичний за формою звичайного закону Гука в разі ідеально пружного тіла при простому розтяганні, то, очевидно, в загальному випадку

залежність між компонентами тензора напружень і компонентами тензора швидкостей деформації виражається у формі, аналогічної (лекція 9), але з заміною деформації на швидкість деформації і модуля зсуву на в'язкість.

Таким чином, отримуємо наступні співвідношення:

$$\dot{\sigma}_x - \dot{\sigma}_{cp} = 2\eta\left(\dot{\varepsilon}_x - \dot{\varepsilon}_{cp}\right);$$
$$\dot{\sigma}_y - \dot{\sigma}_{cp} = 2\eta\left(\dot{\varepsilon}_y - \dot{\varepsilon}_{cp}\right);$$
$$\dot{\sigma}_z - \dot{\sigma}_{cp} = 2\eta\left(\dot{\varepsilon}_z - \dot{\varepsilon}_{cp}\right);$$

$$\dot{T}_{xy} = \eta\dot{\gamma}_{xy}$$

$$\dot{T}_{yz} = \eta\dot{\gamma}_{yz}, \qquad (13.9)$$
$$\dot{T}_{zx} = \eta\dot{\gamma}_{zx}.$$

Можна ввести умовне поняття про інтенсивність швидкості деформації, яку наведемо у вигляді

$$\dot{\epsilon}_i = \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{(\dot{\epsilon}_x - \dot{\epsilon}_y)^2 + (\dot{\epsilon}_y - \dot{\epsilon}_z)^2 + (\dot{\epsilon}_z - \dot{\epsilon}_x)^2 + \frac{3}{2}(\dot{\gamma}_{xy}^2 + \dot{\gamma}_{yz}^2 + \dot{\gamma}_{zx}^2)}. \qquad (13.10)$$

і аналогічно будемо мати

$$\sigma_i = \varsigma\epsilon_i,$$

де $\varsigma = 3\eta$ тоді будемо мати

$$\sigma_i = 3\eta\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{\boldsymbol{i}}, \qquad (13.11)$$

Якщо ввести позначення

$$\frac{1}{\sigma_i}T_H = \bar{T}_H, \qquad (13.12)$$

тоді

$$\frac{2}{3\dot{\varepsilon}_i}\dot{T}_{\text{деф}} = \dot{\bar{T}}_{\text{деф}}, \qquad (13.13)$$

де T_H – направляючий тензор напружень; $\dot{T}_{\text{деф}}$ – направляючий тензор швидкостей деформацій, то рівняння (13.9) можна представити у вигляді

$$\bar{T}_H = \dot{\bar{T}}_{\text{деф}}, \qquad 13.14)$$

Рівняння показує, що в ідеально в'язкому тілі направляючі тензори напружень і швидкостей деформації збігаються.

13.4. Зв'язок компонентів напружень з компонентами деформацій і їх швидкостей для лінійного пружно-в'язкого середовища

Великий інтерес для інженера представляють тіла, що поєднують в собі властивості пружних тіл і в'язких рідин. Для такого тіла при лінійному напруженому стані і лінійному законі деформації слід, можливо, прийняти залежність між напруженням, деформацією і швидкістю деформації у вигляді

$$\sigma = E\epsilon + \varsigma\dot{\varepsilon}. \qquad (13.15)$$

Для рівняння (13.15) можна зобразити модель, показану на рис. 13.5

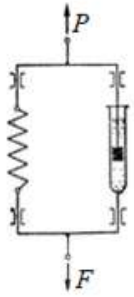


Рис 13.5

Дійсно, для визначення руху перекладин, до яких прикладаються сили, потрібно подолати опір пружини, залежний від її деформації, і опір амортизатора, залежний від швидкості розбіжності перекладин.

Звичайно, в'язко-пружні властивості тіл можна розглядати і не вдаючись до механічних моделей, які вводяться лише для більш наочного подання комбінації гуковської і ньютонівської складових.

Слід також мати на увазі, що якщо фізичне явище можна представити якоюсь однією механічною моделлю, то його також можна представити нескінченним числом інших моделей.

Дослідження цього рівняння показує, що деформація в будь-який момент часу визначається процесом зміни напруження за час від t=0 до розглянутого моменту. Це властивість тіл називають спадковістю, і тому розглянуте тут тіло можна вважати середовищем, що володіє властивістю спадковості, але не здатним до релаксації,так як при ε=*const* згідно (13.15) і σ=*const*.

Переходячи від одновісного напруженого стану до загального випадку об'ємного напруженого стану і застосовуючи закон додавання окремих дій можна, очевидно, наступним чином виразити залежність між напруженнями і деформаціями в такому тілі:

$$T_H = 2GT_{деф} + \frac{2}{3}\eta\dot{T}_{деф}. \qquad (13.16)$$

Умова (13.16) в проекції на осі представляється шістьма рівняннями. Так, перше з шести рівнянь деформації має вигляд

$$\sigma_x - \sigma_{ср} = 2G(\varepsilon_x - \varepsilon_{ср})^2 + \frac{2}{3}\eta(\dot{\varepsilon}_x - \dot{\varepsilon}_{ср}),$$

і останнє

$$T_{zx} = G\gamma_{zx} + \frac{1}{3}\eta\dot{\gamma}_{zx}.$$

Якщо прийняти більш загальний випадок пружно-в'язкого тіла, тобто тіла, здатного до релаксації (здатність зміни напружень навіть при постійній деформації), то замість (13.15) слід при лінійному напруженому стані прийняти

$$\sigma + n\sigma = E\dot{\epsilon} + \varsigma\dot{\epsilon}. \qquad (13.17)$$

Рівнянню (13.17) відповідає модель, показана на рис.13.6. Окремим випадком цієї моделі є модель так званого тіла Максвелла (рис.13.7), стосовно якої закон деформації можна виразити у вигляді

$$\sigma + n\sigma \doteq \varsigma\dot{\epsilon}$$

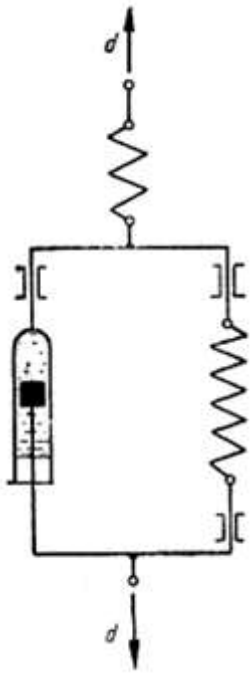


Рис.13.6

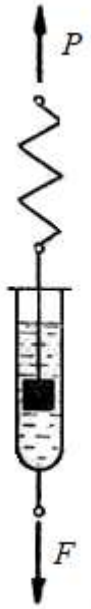


Рис.13.7

Запитання для самоперевірки

1. Основні поняття в теорії повзучості.
2. Класифікація фізичних середовищ і рівнянь, що описують закони їх деформування.
3. Зв'язок компонентів напружень з компонентами деформацій для ідеально-в’язкого середовища.
4. Зв'язок компонентів напружень з компонентами деформацій і їх швидкостей для лінійного пружно-в’язкого середовища.
5. Про зв'язок напружень і деформацій для нелінійного пружно-вязкого середовища.
6. Узагальнення на складний напружений стан.

ЛЕКЦІЯ 14

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ В ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ, ПЛАСТИЧНОСТІ І ПОВЗУЧОСТІ

14.1. Загальні положення

Теорія пружності і пластичності розглядає тіло будь-якої конфігурації і в загальному випадку - тіло трьох вимірів.

Зазвичай тіло задається рівнянням своєї початковими (до деформації) зовнішньою і внутрішньою поверхнями (граничними поверхнями)

$$\Phi(x,y,z)= 0$$

і законом розподілу по поверхнях тіла зовнішнього навантаження, частіше рівнянням її компонентів, т. е. матрицею-стовпцем:

$$p_{xv}=\Phi_1(x,y,z),$$

$$p_{yv}=\Phi_2(x,y,z),$$

$$p_{zv}=\Phi_3(x,y,z),$$

де x, y, z – координати точок, що лежать на поверхнях заданого тіла; v – нормаль до поверхні, проведена в даній точці.

Направляючі косинуси цієї нормалі по відношенню до координатних осей є відомими функціями координат тих же точок (x, y, z) , тобто

$$\cos(xv)=\varphi_1(x,y,z);$$

$$\cos(yv)=\varphi_2(x,y,z);$$

$$\cos(zv)=\varphi_3(x,y,z);$$

при цьому для кожної точки поверхні очевидно співвідношення

$$\cos^2(xv)+\cos^2(yv)+\cos^2(zv)=1.$$

Втім, навантаження можуть бути задані також змінними в часі (динамічні сили)

$$p_{xv}=\Phi_1(x,y,z,t)$$

Сили можна задати також прикладеними і всередині тіла; такі об'ємні сили, наприклад – сили тяжіння, інерційні навантаження і ін. Проекції об'ємних сил на координатні осі, віднесені до одиниці маси близько розглянутої точки (x,y,z), в стані рівноваги тіла задають і позначають так:

$$X=\psi_1(x,y,z);$$

$$Y=\psi_2(x,y,z);$$

$$Z=\psi_3(x,y,z).$$

У всіх наведених виразах мається на увазі ортогональна прямолінійна система координат. Зауважимо, однак, що в деяких задачах доречніше застосовувати інші системи відліку (полярні, циліндричні, сферичні, біполярні, тощо).

Фізичні властивості тіла в класичній теорії пружності задаються відомими з курсу опору матеріалів двома пружними характеристиками: модулями поздовжньої або поперечної пружності і коефіцієнтом поперечного розширення, постійними для всіх точок ізотропного тіла. Втім, у разі неоднорідного або анізотропного тіла пружні характеристики, що змінюються при переході від однієї точки і осі до іншої, можуть бути функціями координат точки або залежати від напрямку, в якому розглядаються деформації.

У теорії пластичності також покладаються відомими деякі величини, що характеризують пластичні властивості розглядуваного тіла (границя текучості та ін.).

В теорії повзучості покладаються відомими з досліду з даним конкретним матеріалом додаткові характеристики, що відображають здатність матеріалу до тривалих його «переживанням» під навантаженням.

Шуканими у всіх наведених гілках механіки деформованого тіла є переважно компоненти зміщення і компоненти напружень для будь-якої точки заданого тіла, тобто

$$u=f_1(x,y,z),$$

$$\sigma_x=f_4(x,y,z),$$

$$\tau_{xy}=f_7(x,y,z).$$

Таким чином, в кожній точці є 15 компонентів: три компоненти зміщення, шість компонентів напруження, шість компонентів деформації. З загальної задачі, очевидно, потрібно мати 15 рівнянь, які можна застосувати до кожної точки в середині тіла.

Для вирішення рівняння (граничні умови) – для будь-якої точки, розташованої біля зовнішньої і внутрішньої поверхні тіла (граничні точки). Саме цей комплекс рівнянь має теорія пружності).

У деяких спеціальних (динамічних) задачах теорії пружності і особливо в теорії пластичності та повзучості визначають також і складові швидкостей напруження, деформації і переміщення. У такому випадку кількість вихідних рівнянь повинно бути більше 15.

В окремих випадках вихідними даними в задачі можуть бути не статичні, а кінематичні граничні умови, тобто задається переміщення зовнішньої поверхні тіла (відомі складові *u, v, w* на контурі тіла). В такому випадку складові поверхневих сил *pxv, pyv, pzv* здійснюють задане переміщення граничної поверхні, є невідомими.

Можливі випадки, коли задаються змішані граничні умови (тобто задані частина поверхневих навантажень і частина переміщення граничної поверхні).

У всіх трьох наведених випадках є так звана пряма (основна) задача теорії пружності, але в різних варіантах завдання граничних умов.

Зворотною постановкою задачі теорії пружності (зворотною задачею) називають таку, коли по деяким відомим функцій (функцій напружень або деформацій, або зсувів), справедливим для усієї області тіла, знаходять те навантаження на поверхні тіла і взагалі умови на поверхні, яким відповідають задані або відомі функції.

Ця зворотна задача виявляється відносно простий, але так само, які пряма задача, вона може мати кілька варіантів (вихідними можуть бути функції для

напруження всередині тіла або функції для переміщення тих же точок або змішані умови).

Спільність постановки задачі теорії пружності і пластичності дозволяє широко використовувати цю науку в найрізноманітніших областях інженерної практики.

Застосовуючи поняття про тензорах напружень і деформації, пряму задачу теорії пружності (а це відноситься і до теорії пластичності та повзучості) можна сформулювати так: по заданим умовам на поверхні тіла (задані поверхневі сили або переміщення граничної поверхні тіла) визначити тензори напружень і деформацій у будь-якій точці тіла (тензорне поле напружень і деформацій) і поле переміщень граничних та внутрішніх точок.

Відповідно зворотну задачу можна сформулювати так: по заданому тензорному поля напружень або деформацій або по заданому полю зміщень з'ясувати умови на поверхні тіла (статичній кінематичні).

14.2. Рівняння лінійної теорії пружності і методи їх розв'язання

У попередніх лекціях отримані всі рівняння, які справедливі для будь-якого суцільного середовища. Наведемо ще раз всі три групи рівнянь (статичні, геометричні фізичні),що застосовуються в лінійної теорії пружності.

Статичні (або динамічні) рівняння

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}+\rho X=\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\\
&\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z}+\rho Y=\rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\\
&\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y}+\frac{\partial \sigma_z}{\partial z}+\rho Z=\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}
\end{aligned} \qquad (14.1)$$

Геометричні рівняння

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x};\ \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x};$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y};\ \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}; \tag{14.2}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z};\ \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}.$$

Фізичні рівняння

$$\sigma_x = 2G\varepsilon_x + \lambda\theta,\ T_{xy} = G\gamma_{xy};$$

$$\sigma_y = 2G\varepsilon_y + \lambda\theta,\ T_{yz} = G\gamma_{yz}; \tag{14.3}$$

$$\sigma_{zx} = 2G\varepsilon_z + \lambda\theta,\ T_{zx} = G\gamma_{zx}.$$

У наведених 15 рівняннях невідомими є: шість компонентів напружень σ_x, σ_y, σ_z, τ_{xy}, τ_{yz}, τ_{zx}, шість компонентів деформації ε_x, ε_y, ε_z, γ_{xy}, γ_{yz}, γ_{zx}, і три компонента переміщень u, v, w, тобто всього 15 невідомих. Таким чином, з математичної точки зору цю задачу можна вирішити, і її рішення зводиться до знаходження 15 функцій, що задовольняють 15 рівнянь (14.1), (14.2), (14.3), а також умовами на контурі (обмежимося випадком заданих статичних граничних умов):

$$p_{xv} = \sigma_x \cos(xv) + T_{xy} \cos(yv) + T_{xz} \cos(zv);$$

$$p_{yv} = T_{yx} \cos(xv) + \sigma_y \cos(yv) + T_{yz} \cos(zv); \tag{14.4}$$

$$p_{zy} = T_{zx} \cos(xv) + T_y \cos(yv) + \sigma_z \cos(zv);$$

При прямому вирішенні задачі, коли використовують всі 15 рівнянь (14.1), (14.2), (14.3), не потрібні рівняння нерозривності деформацій.

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y};$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z}, \qquad (14.5)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial y}.$$

Рівняння (14.5) випливають з (14.2) і тому їх використовують в якості контрольних рівнянь.

Рішення наведених вище трьох груп рівнянь (14.1), (14.2), (14.3) можна вести різними шляхами в залежності від того, що перш за все необхідно визначити. У зв'язку з цим можна відзначити три основні напрями.

1. Прийняти за основні невідомі переміщення точок пружного тіла; тоді отримаємо три невідомі функції:

$$u=f_1(x,y,z), v=f_2(x,y,z), w=f_3(x,y,z) \qquad (14.6)$$

Для того щоб провести рішення (14.6), очевидно, необхідно в фізичні рівняння (14.3) підставити геометричні співвідношення (14.2), тобто виразити напруження через переміщення і потім отримані для них вирази підставити в три рівняння рівноваги, в результаті чого матимемо три рівняння

$$\psi_1(u,v,w)=0, \psi_2(u,v,w)=0, \psi_3(u,v,w)=0 \qquad (14.7)$$

Назвемо рішення (14.6) методом переміщень.

2. Прийняти за невідомі напруження. Тоді отримаємо шість невідомих функцій:

$$\sigma_x=\Phi_1(x,y,z), \sigma_x=\Phi_2(x,y,z), \sigma_x=\Phi_3(x,y,z),$$
$$T_{xy} = \Phi_4(x,y,z),\ T_{xz} = \Phi_4(x,y,z), T_{yz} = \Phi_4(x,y,z). \qquad (14.8)$$

Так як напруження з рівнянь рівноваги безпосередньо не визначаються, треба застосувати рівняння деформацій.

Використовуючи, наприклад, рівняння нерозривності деформацій (14.5), при допомоги (14.2) і (14.1) можна отримати рівняння у формі

$$F_1(\sigma_x,\ T_{zx})=0, \qquad F_\sigma(\sigma_x,\ T_{zx})=0 \tag{14.9}$$

подальше рішення яких призводить до виразів типу (14.8).

Такий метод називається методом сил.

– Очевидно, можливий змішаний метод, коли за основні невідомі прийняті деякі з переміщень і деякі з напружень.

Отже, для вибору основних невідомих в теорії пружності є три зазначених методів. Для їх математичного рішення можна вказати також кілька напрямків.

– Точне рішення прямої задачі, тобто безпосереднє інтегрування рівнянь (14.7) і (14.9).

Основні труднощі при розв'язанні прямої задачі теорії пружності полягають звичайно в точному задоволенні рішення (14.6) або (14.8) граничним умовам. Ці труднощі знімаються при вирішенні оберненої задачі.

– Рішення оберненої задачі є, як вже зазначалося вище, порівняно простим (так як пов'язано лише з диференціюванням функцій). Наприклад, задаються переміщеннями як функції координат точки (x, y, z) і розшукують на підставі умов (14.2) деформації, а за допомогою (14.3) напруження; знання ж останніх дає можливість за допомогою (14.4) встановити поверхневі умови, тобто ті зовнішні навантаження, яким відповідають задані переміщення.

Маючи кілька розв'язків обернених задач, кожна з яких відповідає певним граничним умовам, можна шляхом комбінування таких рішень отримати рішення і для деяких прямих задач.

– Напівзворотній спосіб Сен-Венана, згідно з яким задається частина зовнішніх сил і частина переміщень і розшукуються інші чинники умови задоволення відповідним рівнянням, що наведені вище.

Для полегшення вирішення деяких рівнянь теорії пружності доцільний спосіб послідовних наближень.

Одним з ефективних різновидів такого способу виявляється використання в деяких задачах спочатку тих рішень, які доставляються будь-яким елементарним рішенням, наприклад, знайденим в курсі опору матеріалів. Підстановка цих рішень в рівняння теорії пружності призводить до деяких невідповідностей (протиріч), аналіз яких дозволяє коригувати попереднє рішення і знайти задовільний для практики наближене рішення (більш суворе, ніж вихідне елементарне рішення).

Спосіб послідовних наближень можна використовувати і в методі сил, і в методі переміщень. Цей наближений спосіб має деякі спільні риси з наведеним вище полузворотним способом Сен-Венана.

14.3. Рішення задач теорії пружності в переміщеннях

Для рішення задачі теорії пружності в переміщеннях необхідно усі невідомі в рівняннях (14.1), (14.2) виразити через три переміщення *u,v,w*, які приймемо за основні невідомі.

З рівнянь (14.3) за допомогою рівнянь (14.2) отримаємо

$$\sigma_x = 2G\frac{\partial u}{\partial x} + \lambda\theta;$$

$$T_{xy} = G\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right); \qquad (14.10)$$

$$T_{xz} = G\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right),$$

де $\theta = 3\varepsilon_{ср.}$

Диференціюємо рівняння (14.10) і отримаємо

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} = G\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \lambda\frac{\partial \theta}{\partial x};$$

$$\frac{\partial T_{xy}}{\partial y} = G\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}\right);$$

$$\frac{\partial T_{xz}}{\partial z} = G\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial x}\right).$$

Внесемо ці вирази в перше рівняння виразів (14.1) і отримаємо

$$\lambda\frac{\partial\theta}{\partial x}+G\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial x}+\frac{\partial^2 w}{\partial z\partial x}\right)+G\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+\rho X=\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \qquad (14.11)$$

Вираз в першій дужці, можна сформулювати так:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial x}+\frac{\partial^2 w}{\partial z\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial x}\right)=$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z\right)=\frac{\partial\theta}{\partial x}.$$

Введемо для стислості позначення гармонійної операції:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\nabla^2 u. \qquad (14.12)$$

Вираз (14.12) називають також лапласовим оператором другого порядку над функцією $u=f(x,y,z)$. Тоді рівняння (14.11) набуде вигляду

$$(\lambda+G)\frac{\partial\theta}{\partial x}+G\nabla^2 u+X\rho=\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \qquad (14.13)$$

Роблячи в (14.13) кругову підстановку (x, y, z) і (u,v,w) отримаємо наступну систему основних рівнянь методу переміщень

$$(\lambda+G)\frac{\partial\theta}{\partial x}+G\nabla^2 u+X\rho=\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

$$(\lambda+G)\frac{\partial\theta}{\partial y}+G\nabla^2 v+X\rho=\rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \qquad \ldots(14.14)$$

$$(\lambda+G)\frac{\partial\theta}{\partial z}+G\nabla^2 w+X\rho=\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}.$$

Рівняння (14.14) називають рівняннями Ляме. Вони є синтезом статичної, геометричної і фізичної сторін задачі.

Поверхневі умови (14.4) також можна перетворити, висловивши напруження через переміщення. Підставивши в рівняння (14.4) замість напружень вирази (14.10) будемо мати

$$p_{xv} = \lambda\theta\cos vx + G\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos(vx) + \frac{\partial u}{\partial y}\cos(vy) + \frac{\partial u}{\partial z}\cos(vz)\right) +$$

$$+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos(vx) + \frac{\partial v}{\partial x}\cos(vy) + \frac{\partial w}{\partial x}\cos(vz)\right),$$

$$p_{yv} = \lambda\theta\cos vy + G\left(\frac{\partial v}{\partial x}\cos(vx) + \frac{\partial v}{\partial y}\cos(vy) + \frac{\partial v}{\partial z}\cos(vz)\right) +$$

$$+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\cos(vx) + \frac{\partial v}{\partial y}\cos(vy) + \frac{\partial w}{\partial y}\cos(vz)\right), \qquad (14.15)$$

$$p_{zv} = \lambda\theta\cos vz + G\left(\frac{\partial w}{\partial x}\cos(vx) + \frac{\partial w}{\partial y}\cos(vy) + \frac{\partial w}{\partial z}\cos(vz)\right) +$$

$$+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\cos(vx) + \frac{\partial v}{\partial z}\cos(vy) + \frac{\partial w}{\partial z}\cos(vz)\right).$$

Рівняння (14.14) сумісно з умовами на поверхні (14.15) дозволяють безпосередньо розв’язати задачу теорії пружності в переміщеннях.

1.4. Рішення задач теорії пружності в напруженнях

При рішенні задачі в напруженнях усі невідомі треба виразити через напруження.

Трьох рівнянь рівноваги (14.1) в цьому випадку недостатньо і тому треба використати рівняння нерозривності деформацій (14.5).

В ці рівняння входять деформації ε_x, ε_y, ε_z, γ_{xy}, γ_{yz}, γ_{zx}, і тому їх треба виразити через напруження за допомогою рівнянь (14.3).

Виконавши цю підстановку і застосовуючи одночасно рівняння рівноваги (14.1), рівняння нерозривності деформацій приведемо до наступного вигляду

$$(1+\mu)\nabla^2\sigma_x + 2\frac{\partial^2\sigma I}{\partial x^2} = 0;$$
$$(1+\mu)\nabla^2\sigma_y + 2\frac{\partial^2\sigma I}{\partial y^2} = 0;$$
$$(1+\mu)\nabla^2\sigma_z + 2\frac{\partial^2\sigma I}{\partial z^2} = 0;$$
$$(1+\mu)\nabla^2\tau_{xy} + 2\frac{\partial^2\sigma I}{\partial x\partial y} = 0; \qquad (14.16)$$
$$(1+\mu)\nabla^2\tau_{yz} + 2\frac{\partial^2\sigma I}{\partial y\partial z} = 0;$$
$$(1+\mu)\nabla^2\tau_{zx} + 2\frac{\partial^2\sigma I}{\partial z\partial x} = 0,$$

де

$$\sigma I = 3\sigma_{\text{ср}} = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z,$$

$$\nabla^2\sigma_x = \frac{\partial^2\sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\sigma_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\sigma_z}{\partial z^2},$$

Таким чином, для рішення задачі необхідно проінтегрувати дев'ять рівнянь (14.1), (14.16), а довільні функції, що входять в загальні рішення цих рівнянь визначити з умов на поверхні:

$$p_{xv} = \sigma_x \cos(v,x) + \tau_{xy}\cos(v,y) + \tau_{xz}\cos(v,z),$$
$$p_{yv} = \tau_{xy} \cos(v,x) + \sigma_y\cos(v,y) + \tau_{yz}\cos(v,z),$$
$$p_{yv} = \tau_{zx} \cos(v,x) + \tau_{zy}\cos(v,y) + \sigma_z\cos(v,z).$$

При вирішенні задач теорії пружності в напруженнях або в переміщеннях може виникнути питання проте, чи є отримане в результаті рішення однозначним? Чи не можуть заданим на поверхні пружного тіла силам відповідати в середині тіла не одна, а кілька систем напружень? Або: заданим зсувам або напруженням всередині тіла не можуть відповідати різні контурні умови?

Якщо виключити випадок початкових напружень в тілі, то отримуємо, що відповідь на зазначені вище питання з позицій класичної теорії пружності повинен бути дана тільки негативним. Для природно ненапруженого тіла (тобто коли при

відсутності зовнішніх сил в тілі немає напружень) рішення теорії пружності однозначні.

14.5. Вплив температурного поля

Якщо розглядуване пружне тіло, крім дії зовнішнього навантаження(або незалежно від нього), піддається термічному впливу і притому нерівномірному по об'єму тіла, то напруження і деформації в тілі будуть відрізнятися від напружень і деформацій, коли тіло підвернене тільки навантаженню, так як наявність температурного поля викликає появу в тілі додаткових термічних напружень.

Якщо елементарний паралелепіпед, підвержений тільки тепловому впливу, то його деформацію можна охарактеризувати наступними компонентами:

$$\varepsilon_x' = \varepsilon' = \varepsilon_z' = \alpha T; \quad \gamma_{xy} = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0,$$

де α– коефіцієнт лінійного температурного розширення; T – температура.

Припустимо, що розглядається температурне поле не дуже високе, щоб могли змінитися пружні характеристики матеріалу (зокрема - модуль пружності).

При одночасній наявності компонентів напружень і теплового ефекту, компоненти деформації приймуть вид

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)\right] + aT;$$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z)\right] + aT; \qquad (14.17)$$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \mu(\sigma_y + \sigma_x)\right] + aT;$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}; \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}; \quad \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}.$$

Закон Гука в формі Ляме матиме вигляд

$$\sigma_x = 2G\varepsilon_x + \lambda\theta - \frac{E}{1-2\mu}aT;$$

$$\sigma_y = 2G\varepsilon_y + \lambda\theta - \frac{E}{1-2\mu}aT;$$

$$\sigma_z = 2G\varepsilon_z + \lambda\theta - \frac{E}{1-2\mu}aT;$$

$$T_{xy} = G\gamma_{xy};\ T_{yz} = G\gamma_{yz};\ \ T_{zx} = G\gamma_{zx}.$$

Запитання для самоперевірки

1. Які параметри задаються при постановці задач теорії пружності?
2. Якими параметри характеризують фізичні властивості тіла в класичній теорії пружності?
3. Які компоненти є шуканими в механіці деформуємого тіла?
4. Який набір рівнянь треба мати для розв’язання задач теорії пружності?
5. За якими методами визначаються шукані невідомі в механіці деформує мого тіла?
6. Яким чином проводиться рішення задачі теорії пружності в переміщеннях?
7. Яким чином проводиться рішення задачі теорії пружності в переміщеннях?
8. Яким чином проводиться рішення задачі теорії пружності в напруженнях?

ЛЕКЦІЯ 15

ПЛОСКА ЗАДАЧА ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ

15.1. Частковий випадок - плоский напружений стан

Рівняння теорії пружності значно спрощуються, якщо усі напруження, що входять в рівняння, виявляються паралельними одній площині, наприклад, в разі тонкої пластинки (брус, стрижень),на яку діють сили прикладені до її контуру і рівномірно розподілені по її товщині (рис.15.1).

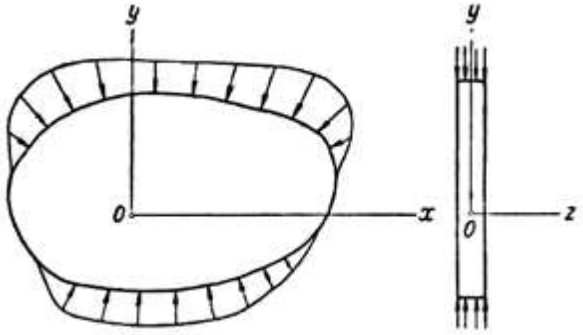


Рис.15.1

В цьому випадку складові напружень σ_z, τ_{xz}, τ_{yz} дорівнюють нулю на обох плоских поверхнях пластинки, і можна вважати, що вони відсутні і по всій товщині пластинки, тобто, розподіл напружень є плоским.

Природно припустити, що інші три компонента напружень $\sigma_x,\sigma_y,\tau_{xy}$ не залежать від координати z, тобто залишаються постійними по всій товщині пластинки.

Тензор напружень для плоского напруженого стану в скороченому вигляді запишеться

$$T_H = \begin{pmatrix} \sigma_x & T_{xy} \\ T_{yx} & \sigma_y \end{pmatrix}$$

Відповідно тензор деформації можна виразиṭи у вигляді

$$T_{\text{деф}} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y \end{pmatrix}$$

Повний вираз тензора деформації повинен бути наступним

$$T_{деф} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

так як в напрямку координати *z* деформація подовження ε_z, а отже, і переміщення *w*. Ці компоненти можна легко визначити. Так, з третього рядка узагальненого закону Гука.

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}(\sigma_z - \mu(\varepsilon_x + \varepsilon_y))$$

випливає, що

$$\varepsilon_z = \frac{-\mu}{E}(\varepsilon_x + \varepsilon_y)$$

Для переміщення *w* можна записати, що

$$w = \epsilon_z \cdot z.$$

Приймемо, що об'ємною силою, як зазвичай, є тільки сила тяжіння, тобто

$$Z=X=0;\ Y=-q$$

де *q* – щільність матеріалу.

Рівняння рівноваги приймають вигляд

$$\frac{\sigma_x}{x} + \frac{\tau_{xy}}{y} = 0,$$

$$\frac{\tau_{yx}}{y} + \frac{\sigma_y}{y} - q = 0. \tag{15.1}$$

Умови на контурі

$$p_{xv} = \sigma_x \cos(v, x) + \tau_{xy} \cos(v, y),$$

$$p_{xv} = \tau_{xy} \cos(v, x) + \sigma_y \cos(v, y). \tag{15.2}$$

Геометричні рівняння

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \ \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \ \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \tag{15.3}$$

Фізичні рівняння

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \mu\sigma_y), \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}(\sigma_y - \mu\sigma_x), \\ \gamma_{xy} &= \frac{1}{G}\tau_{xy} = \frac{2(1+\mu)}{E}\tau_{xy}, \\ \varepsilon_z &= -\frac{\mu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) \end{aligned} \tag{15.4}$$

З рівнянь сумісності деформацій залишається одне

$$\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}. \tag{15.5}$$

Вирази (15.1), (15.3), (15.4), що містять вісім рівнянь, мають вісім невідомих і тому їх можна вирішити за методом сил, за методом переміщень або, нарешті, за змішаним методом. Для методу сил (три невідомих) необхідно з (15.3) виключити переміщення *u* і *v*, і тоді отримаємо (15.5), потім, замінюючи в (15.5) деформації через сили по (15.4), отримуємо додаткове рівняння до двох статичних рівнянь (15.1). У підсумку маємо три рівняння з невідомими σ_x, σ_y, τ_{xy}. Ці рівняння

розглядаються в методі сил.

Для методу переміщень (дві невідомі) необхідно в двох статичних рівняннях (15.1) провести заміни, тобто виключити сили. В результаті отримаємо два рівняння з невідомими *u* та *v*.

15.2. Метод сил

Рівняння нерозривності (15.5), яке виражене за допомогою (15.4) через напруження, представимо в наступному вигляді

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\sigma_x - \mu\sigma_y\right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\sigma_y - \mu\sigma_x\right) = 2(1+\mu)\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} \qquad (15.6)$$

Рівняння (15.6) спільно з рівняннями рівноваги (15.1) становить систему трьох рівнянь з трьома невідомими.

Якщо об'ємної силою є тільки вага тіла X=0, Y=-q, то за допомогою рівнянь рівноваги (15.1) вираз (15.6) приймає більш простий вигляд. Так, диференціюючи перше з рівнянь (15.1) по x і друге по y і потім складаючи їх, знайдемо

$$\frac{^2\tau_{xy}}{xy} = -\frac{^2\sigma_x}{x^2} - \frac{^2\sigma_y}{y^2} \qquad (15.7)$$

При підстановці (15.7) в (15.5) отримаємо рівняння сумісності виду, яке виражене тільки через нормальні напруження (рівняння Леві)

$$\frac{2}{x^2}\left(\sigma_x + \sigma_y\right) + \frac{2}{y^2}\left(\sigma_x + \sigma_y\right) = 0. \qquad (15.8)$$

Отже, для плоского напруженого стану, коли об'ємної силою є сила тяжіння, сукупність основних рівнянь теорії пружності можна привести до наступних трьох рівнянь:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0$$
$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} - q = 0 \qquad (15.9)$$
$$\nabla^2 (\sigma_x + \sigma_y) = 0$$

де для скорочення позначена операція

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

15.3. Частковий випадок - плоска деформація

Якщо при будь-якому напруженому стані тіла переміщення всіх точок можуть відбуватися тільки в двох напрямках, тобто тільки в одній площині, то таку деформацію називають плоскою. Прикладом може служити тіло, поміщене між двома абсолютно твердими плитами (рис. 15.2), відстань між якими залишається незмінним, і стискається силами, паралельними площинам плит.

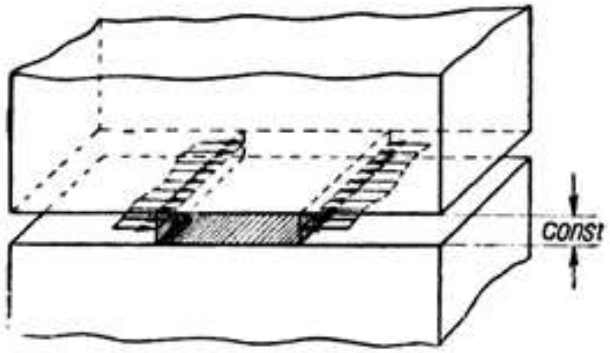


Рис. 15.2

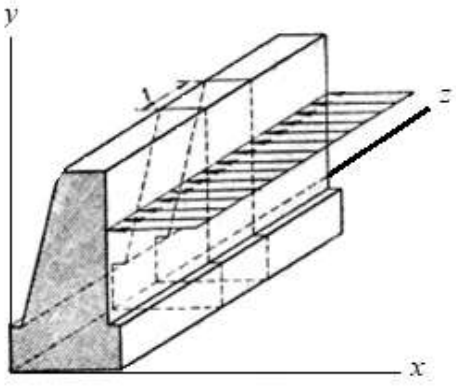


Рис. 15.3

В таких же умовах фактично виявляється і тіло, розміри якого в одному напрямку, наприклад в напрямку осі *z*, дуже великі. Якщо таке довге призматичне тіло навантажено силами, які не змінюються по довжині тіла і перпендикулярні до цього напрямку (або слабо змінюються), то частина його, що знаходиться на значній відстані від кінців, підвергається плоскій деформації. Переміщення всіх точок деформованого тіла в такому випадку відбувається в площинах,

перпендикулярних до довжини тіла (рис.15.3), тобто

$$\epsilon_z = 0, \gamma_{xz} = 0, \gamma_{yz} = 0, \tau_{xz} = 0, \tau_{yz} = 0.$$

Тоді тензор деформації точно представимо у вигляді скороченої матриці:

$$T_{деф} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y \end{pmatrix}$$

Відповідно тензор напружень можна виразити у вигляді

$$T_H = \begin{pmatrix} \sigma_x & T_{xy} \\ T_{yx} & \sigma_y \\ & \end{pmatrix}$$

Однак принципово повне його вираз має бути наступним:

$$T_H = \begin{pmatrix} \sigma_x & T_{xy} & 0 \\ T_{yx} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{pmatrix}$$

Якщо при плоскому напруженому стані є компонент ε_z, але відсутній компонент σ_z , то при плоскій деформації, навпаки, присутнє σ_z і відсутня ε_z. Застосовуючи до даного випадку узагальнений закон Гука

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)\right]$$

і вважаючи ε_z=0, отримаємо

$$\sigma_z = \mu(\sigma_x + \sigma_y) \qquad (15.10)$$

Рівняння рівноваги мають вигляд (15.1). Також залишаються без зміни і геометричні рівняння(15.3).

Фізичні рівняння завдяки ε_z, яка визначається за виразом (15.10), приймають для відносних подовжень інший вигляд:

$$\begin{cases} \epsilon_x = \frac{1-\mu^2}{E}\sigma_x - \frac{\mu(1+\mu)}{E}\sigma_y \\ \epsilon_y = \frac{1-\mu^2}{E}\sigma_y - \frac{\mu(1+\mu)}{E}\sigma_x \end{cases}. \qquad (15.11)$$

При цьому для зсуву зберігається вираз

$$\gamma_{xy} = \frac{2(1+\mu)}{E}\tau_{xy} \text{ або } \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G},$$

$$(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2})(\sigma_x + \sigma_y) = -\frac{\rho}{1-\mu}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right). \qquad (15.12)$$

Рівняння (15.8), якщо провести розрахунки, приймає вигляд, коли об'ємної силою є вага тіла, мають вигляд (15.9). До цих рівнянь приєднують умови на контурі (15.2). Але для подальшого полегшення задачі замість визначення трьох функцій σ_x, σ_y, τ_{xy} достатньо визначити одну так звану функцію напружень, за допомогою, якої далі вже не шляхом інтегрування, а диференціювання визначають всі потрібні функції.

Справді, уявімо собі, що є така функція φ. При постійних об'ємних силах вираз (15.10) приймає вигляд (15.8), тобто воно нічим не відрізняється від рівняння, виведеного для випадку плоского напруженого стану.

Відзначимо наступний факт. При постійних об'ємних силах рівняння, встановлюють розподіл напружень в плоскій задачі (15.9), не містять пружних постійних матеріалу. З цієї причини і представляється можливим широко використовувати в практиці моделювання і, зокрема, переносити результати дослідження напружень, виконані оптичним способом з прозорим матеріалом (целулоїд та ін.), за допомогою поляризованого світла на інші матеріали (сталь і ін.).

15.3. Функція напружень для плоскої задачі

Отже, рішення плоскої задачі в напруженнях, тобто задачі у двох вимірах, зводиться до інтегрування трьох рівнянь, які для випадку координат *x, y, z* за допомогою якої напруження визначаються наступним чином:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2},$$
$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \qquad (15.13)$$
$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + qx$$

Легко перевірити, що така функція існує, так як, якщо підставити (15.13) у рівняння рівноваги (15.11), то отримаємо тотожності. Дійсно

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x \partial y^2} - \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x \partial y^2} = 0$$
$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} - q = \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^2 \partial y} - \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3 \partial y} + q - q = 0$$

Тобто рівняння задовольняються тотожно.

Для визначення виду самої функції φ підставимо (15.13) в рівняння (15.8), звідки отримаємо, що функція напруження (інакше, розподільча функція) повинна задовольняти рівнянню

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0. \qquad (15.14)$$

У випадку плоскої задачі

$$\nabla^4 \varphi = \nabla^2 \nabla^2 \varphi = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \varphi \right].$$

Таким чином, рішення плоскої задачі у випадку, коли об'ємної силою є вага тіла, зводиться до знаходженню рішення бігармонічного рівняння (15.4), яке задовольняє і умовам на контурі.

Застосовувати функцію напружень, інакше силову функцію, звану також функцією Ері, вельми корисно при вирішенні задачі зворотним або напівзворотнім способом. Дійсно, якщо задатися якою-небудь системою напруг (σ_x,σ_y,τ_{xy}) і знайти їм відповідні зовнішні навантаження (поверхневі умови), то спочатку треба

перевірити, чи може взагалі існувати задана система напружень (чи задовольняються при цьому рівняння рівноваги і нерозривності). Задаючись ж функцією напруги, що задовольняє тільки одному рівнянню (15.14),зарані відомо, що всі рівняння рівноваги і нерозривності задовольняються автоматично.

15.4. Часткові випадки функції напружень

Розглянемо прямокутну пластинку довжиною l і висотою h. Ця пластинка знаходиться в плоскому напруженому стані (навантаження в площині xy).

Візьмемо в якості прикладу функцією напружень у вигляді полінома п'ятого ступеня, наприклад,

$$\varphi = \frac{ax^5}{5\cdot 4} + \frac{bx^4 y}{4\cdot 3} + \frac{cx^3 y^3}{3\cdot 2} + \frac{dx^2 y^3}{2\cdot 3} + \frac{exy^4}{3\cdot 4} + \frac{fy^5}{4\cdot 5}. \qquad (15.15)$$

Підставивши (15.15) в рівняння нерозривності (15.14), отримуємо, що це рівняння задовольняється, якщо

$$e = -(-3a + 2c);$$

$$f = -\tfrac{1}{3}(b + 2d).$$

Відповідні компоненти напружень (власна вага виключається) мають вигляд

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{cx^3}{3} + x^2 yd - (2c + 3d)xy^2 + \tfrac{1}{3}(b + 2d)y^3, \qquad (15.16)$$

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = ax^3 + x^2 yd + cxy^2 + \frac{d}{3}y^3, \qquad (15.17)$$

$$\tau_{xy} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = -\frac{bx^3}{3} - x^2 yc - dxy^2 + \tfrac{1}{3}(2cb + 3a)y^3. \qquad (15.18)$$

Тут коефіцієнти a,b,c,d довільні, і, підбираючи їх, отримаємо рішення для різних умов навантаження пластинки . Так, якщо всі коефіцієнти, за винятком d, прийняти рівними нулю, то знайдемо

$$\sigma_x = (x^2 y - \frac{2}{3} y^3)d, \quad \sigma_y = \frac{1}{3} y^3 d, \quad \tau_{xy} = -dxy^2. \tag{15.19}$$

Такий закон розподілу напружень відповідає зовнішнім впливам, прикладеним до пластинки і показаним на рис.44, тобто нормальні зусилля рівномірно розподілені по поздовжніх сторонах пластинки (рис.44,а).

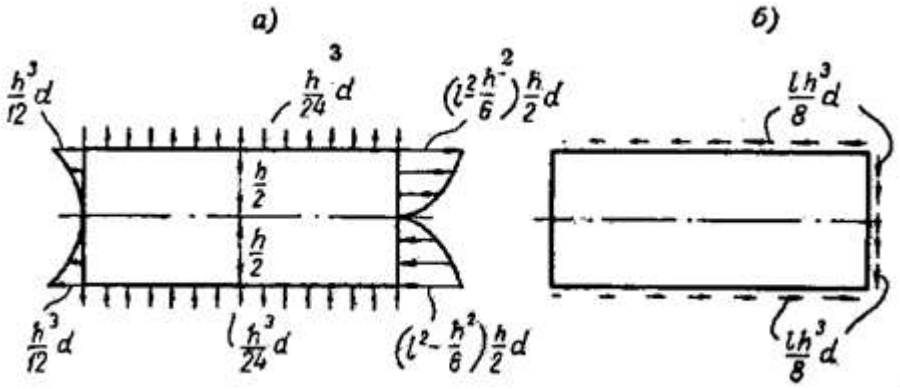


Рис.15.4

По стороні x=l нормальні зусилля складаються з двох частин: однієї, що відповідає лінійному закону, іншої — що змінюється за законом кубічної параболи.

Дотичні зусилля пропорційні абсцисі x на поздовжніх сторонах пластинки і змінюються за параболічному закону на стороні x=l. Розподіл цих напружень показано на рис.15.4, б.

Якщо у виразах (15.16), (15.17) і (15.18), відмінним від нуля, прийняти коефіцієнт a, то відповідно напруження приймуть вигляд

$$\sigma_x = -3axy^2;$$

$$\sigma_y = ax^3;$$

$$\tau_{xy} = ay^3.$$

Такий закон розподілу напружень, очевидно, відповідає контурним умов, показаним на рис. 15.5.

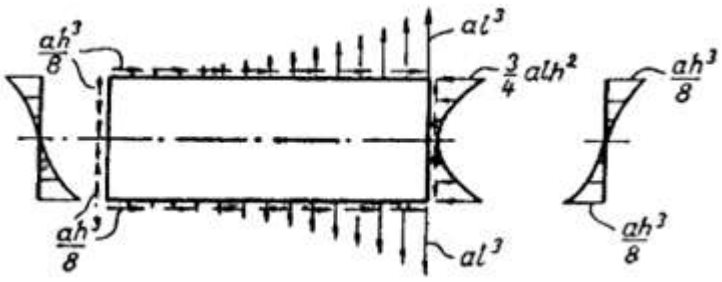


Рис. 15.5

15.5. Узагальнений плоский напружений стан. Погонні зусилля

Вище передбачалося, що сили, які прикладені на контурі пластинки, рівномірно розподілені по її товщині, яка передбачається тонкої. Звідси випливало припущень що компоненти напружень $\sigma_x,\sigma_y,\tau_{xy}$ не залежать від координати z, тобто вони розподіляються по товщині пластинки рівномірно. Компоненти $\sigma_x,\sigma_y,\tau_{xy}$ приймалися відсутніми.

Практично зазвичай зустрічається пластинка кінцевої товщини, хоча і малої, але не зникаюче малою, як це слід було б мати на увазі для строгості викладок і в наступних висновках.

При кінцевій товщині пластинки, навіть за умови рівномірного розподілу зовнішніх сил по її зовнішньому контуру компоненти $\sigma_x,\sigma_y,\tau_{xy}$ можуть по товщині пластинки змінюватися, хоча і незначно, але симетрично щодо серединної площини пластинки. Інші складові $\sigma_x,\sigma_y,\tau_{xy}$ можуть з'явитися, хоча і будуть зникаюче малі.

Введемо в поняття погонні зусилля, під якими розуміємо наступні інтеграли від напружень, взяті по всій товщині пластинки;

$$N_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x dz;\ N_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y dz;\ N_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} dz; \qquad (15.20)$$

Від цих погонних зусиль перейдемо до середніх по товщині пластинки напруженням, а саме

$$(\sigma_x)_{cp} = \frac{N_x}{h} = \frac{1}{h}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x dz,$$

$$\sigma_y = \frac{N_y}{h},\ \tau_{xy} = \frac{N_{xt}}{h}$$

Якщо при складанні диференціальних рівнянь рівноваги (15.1) мислено вирізати з пластинки нескінченно малий елемент з розмірами граней *dx, dy* і *h* (тобто один з розмірів прийняти кінцевим і рівним товщині пластинки),то очевидно, замість(15.1) отримаємо рівняння

$$\begin{aligned} &\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} = 0 \\ &\frac{\partial N_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial N_y}{\partial y} - q = 0 \end{aligned} \tag{15.21}$$

Якщо ж в рівняннях (15.1) під σ_z, τ_{xz}, τ_{yz} розуміти сааме середні значення напружень по товщині пластинки, тобто згідно (15.20), то рівняння (15.3) і все що випливають із нього (15.8) і інші рівняння зберігають свою силу.

Так рівняння Леві має вигляд

$$\nabla^2\left(N_x + N_y\right) = 0. \tag{15.22}$$

Розглянутий випадок із введеними припущеннями прийнято називати узагальненим плоским напруженим станом.

15.6. Граничні умови для функції напружень

Як вже зазначалося, розв'язання плоскої задачі теорії пружності зводиться до розв'язання бігармонічного рівняння (15.14). З усіх можливих інтегралів цього рівняння дійсним розв'язком є той, що задовольняє умовам на контурі.

Висловимо ці умови через ту ж функцію напружень. Використовуючи залежності (15.4) і (15.13), маємо:

$$p_{xv} = -\frac{^2\varphi}{y^2} l - \left(\frac{^2\varphi}{xy} - q\right) m,$$

$$p_{xv} = \left(\frac{^2\varphi}{y^2} - q\right) l + \frac{^2\varphi}{x^2} m. \tag{15.23}$$

Якщо об'ємних сил немає (тобто $q = 0$), то умови на поверхні можна представити коротше, вводячи поняття про похідну функції по дузі контуру поперечного перерізу. Дійсно (рис.15.6)

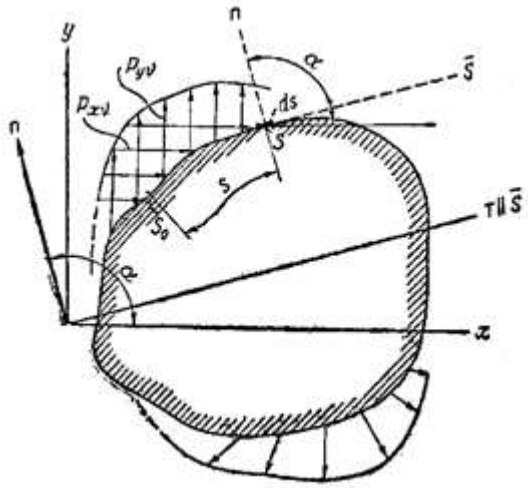


Рис.15.6

$$l = \cos(x, v) = \cos\alpha = -\frac{dy}{ds}$$

$$m = \cos(y, v) = \sin\alpha = \frac{dx}{ds}$$

Внесемо ці вирази в (15.23)і отримаємо

$$p_{xv} = -\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial s} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x \partial y}\frac{\partial x}{\partial s} = -\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)$$

$$p_{vv} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x \partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) \tag{15.24}$$

Рівності (15.24) дозволяють висловити у формі, що відрізняється великою наочністю і зручністю (так звана стрижнева аналогія). Так, множачи (15.24) на *ds* і

інтегруючи по s уздовж контуру(рис.15.7), починаючи від довільної точки s_0, прийнятої за початок дуг, маємо

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = A - \int_0^s p_{xv} ds = X^{(s)},$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = B + \int_0^s p_{yv} ds = Y^{(s)},$$

Тут A і B – сталі інтегрування, які виражають значення похідних $\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}$ в точці s_0 контуру; $X(s), Y(s)$ -сили, що прикладені до частини s_{0s} стержня.

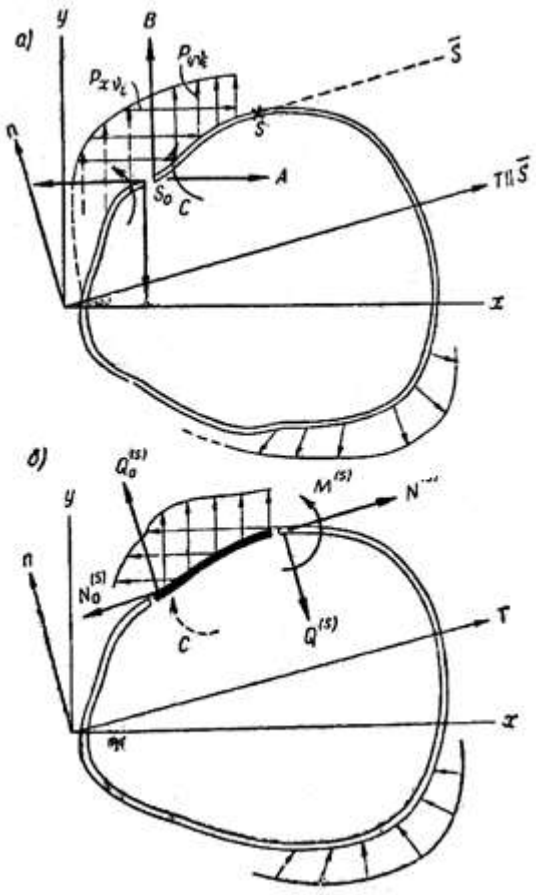


Рис.15.7

Запитання для самоперевірки

1. Визначити плоску задачу теорії пружності.
2. Охарактеризувати частковий випадок - плоский напружений стан.
3. Розглянути метод сил.

4. Охарактеризувати частковий випадок - плоска деформація.
5. Охарактеризувати функцію напружень для плоскої задачі.
6. Охарактеризувати часткові випадки функції напружень.
7. Визначити Узагальнений плоский напружений стан.
8. Визначити погонні зусилля.
9. Визначити граничні умови для функції напружень.

Завдання для самостійного розв'язування

Задача 1.

Прямокутна смуга з вузьким поперечним перетином, оперта по кінцях, згинається рівномірно розподіленим навантаженням (рис. 15.8). Потрібно визначити напруги в смузі методами теорії пружності.

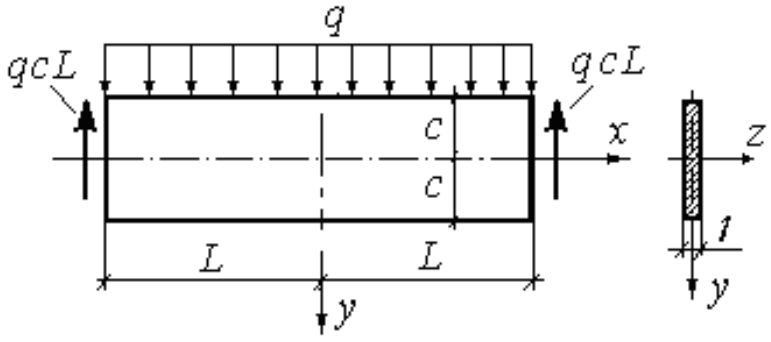


Рис. 15.8

Завдача 2. Потрібно визначити напруги в смузі методами теорії пружності, якщо L= 2м, h=0,04 м, q=500 кг/с^2.

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Ремез Н. С. Конспект лекцій кредитного модулю «Механіка суцільного середовища» / уклад. Н. С. Ремез ; Нац. техн. ун-т України «КПІ». Київ: НТУУ «КПІ», 2014. 63 с.

2. Ремез Н. С., Крючков А. І., Євтєєва Л. І. Механіка довкілля. Тензорне числення. Збірник задач [Електронний ресурс] : навч. посіб. для здобувачів ступеня бакалавра за освітньою програмою «Інженерна екологія та ресурсозбереження» ; КПІ ім. Ігоря Сікорського. Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2019. 72 с.

3. Назаренко І. І., Ручинський М. М., Міщук Є. О. Теорія пружності в прикладній механіці : навч. посіб. Київ : ФОП Ямчинський О. В., 2024. 167 с.

4. Карвацький А. Я., Чемерис А. О. Механіка суцільних середовищ [Електронний ресурс] : конспект лекцій : навч. посіб. для здобувачів ступеня магістра ; КПІ ім. Ігоря Сікорського. 2-ге вид., переробл. та доп. Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2024. 214 с.

5. Теліпко Л. П. Механіка суцільного середовища : конспект лекцій для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня зі спеціальності 132 «Матеріалознавство». Кам’янське : ДДТУ, 2020. 117 с.

6. Тітов В. А., Злочевська Н. К. Теорія пластичної деформації-2. Математичні основи пластичної деформації [Електронний ресурс] : конспект лекцій : навч. посіб. для студ. спец. 131 «Прикладна механіка» ; КПІ ім. Ігоря Сікорського. Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2022. 75 с.

7. Ремез Н. С. Визначення питомої витрати фільтрації і побудова кривої дисперсії дорожного насипу з середньозернистого ґрунту на горизонтальному водоупорі [Електронний ресурс] : метод. вказівки до розрахунк. роботи з дисципліни «Механіка суцільного середовища» / уклад. Н. С. Ремез ; Нац. техн. ун-т України «КПІ». Київ : НТУУ «КПІ», 2012. 12 с.

8. Ремез Н. С. Взаємодія вибухових хвиль з ґрунтами і елементами техноурбосистем [Електронний ресурс] : монографія ; КПІ ім. Ігоря Сікорського. Київ : Центр учбової літератури, 2019. 334 с.

9. Ремез Н. С., Кисельов В. Б., Дичко А. О., Мінаєва Ю. Ю. Чисельні методи розв’язання технічних задач. Одеса : Видавничий дім «Гельветика», 2022. 202 с.