УДК 621.313.33:519.876.5

Толочко О.І., Розкаряка П. І.

АНАЛІЗ НЕДОЛІКІВ ЗАСОБІВ ДОСЛІДЖЕННЯ ДИСКРЕТНИХ СИСТЕМ В СЕРЕДОВИЩІ ПАКЕТА MATLAB

Проаналізовано недоліки засобів дослідження дискретних систем в пакеті MATLAB. Розроблено удосконалені Simulink-моделі дискретних інтеграторів. Запропоновано рекомендації щодо використання моделі екстраполятора першого порядку і методику підвищення точності дискретної апроксимації аналогових передавальних функцій методом узгодження нулів-полюсів.

Вступ. В останній час спеціалісти в області автоматичного керування електромеханічними об'єктами все частіше використовують для синтезу та аналізу систем пакет *MATLAB* з його поширеннями *Simulink* і *Control Toolbox*.

Прагнення авторів цього програмного продукту до розширення його можливостей та підвищення універсальності привело до того, що при реконструкції деяких *Simulink*-блоків та *m*-функцій під час розробки нових *MATLAB*-версій вони стали занадто складними і в деяких режимах, або при деяких параметрах можуть працювати неадекватно.

Мета роботи. Метою роботи є виявлення слабких місць в інструментах моделювання та аналізу дискретних систем в середовищі пакету *MATLAB* і розробка рекомендацій щодо подолання виявлених недоліків.

Матеріал і результати досліджень.

Одним з основним блоків бібліотеки *Discrete* програми структурного моделювання *Simulink* є *Discrete-Time Integrator*. Він може, за вибором користувача, застосовувати один із трьох методів чисельного інтегрування (*Integrator method*): *Forward Euler*, *Backward Euler* і *Trapeziodal*.

Один крок чисельного інтегрування (ЧІ) переліченими методами описується різницевими рівняннями

$$y_{FE}(nT) = y_{FE}(nT-T) + Tu(nT-T)\,, \tag{1}$$

$$y_{BE}(nT) = y_{BE}(nT-T) + Tu(nT)\,, \tag{2}$$

$$y_{T}(nT) = y_{T}(nT-T) + T\frac{u(nT-T)+u(nT)}{2}\,, \tag{3}$$

яким відповідають дискретні передавальні функції

$$W_{FE}(z) = \frac{y_{FE}(z)}{u(z)} = T\frac{z^{-1}}{1-z^{-1}} = T\frac{1}{z-1}\,, \tag{4}$$

$$W_{BE}(z) = \frac{y_{BE}(z)}{u(z)} = T\frac{1}{1-z^{-1}} = T\frac{z}{z-1}\,, \tag{5}$$

$$W_{T}(z) = \frac{y_{T}(z)}{u(z)} = T\frac{1+z^{-1}}{2(1-z^{-1})} = T\frac{z+1}{2(z-1)}\,. \tag{6}$$

Застосування різних методів ЧІ можна продемонструвати за допомогою деталізованої моделі, зображеної на рис. 1, і перехідних функцій, приведених на рис. 2.

Як видно з рис. 2, основу цифрового інтегратора складає ланка запізнювання на період дискретності *Unit Delay*, замкнена додатним зворотним зв'язком. Блок *Zero-Order Hold* (*Екстраполятор Нульового Порядку*) узгоджує між собою вихідні сигнали аналогових та дискретних блоків. Один від одного інтегратори з різними алгоритмами ЧІ відрізняються точкою знімання вихідного сигналу. Вибір методу ЧІ здійснюється присвоюванням параметру k блоку *Constant* одного з цілочисельних значень (1, 2, 3), яке визначає номер входу блоку *Multiport Switch*, що з'єднується з його виходом.

До версії *MATLAB*-4*x* мав три дискретних інтегратора: звичайний, з обмеженням вихідного сигналу (*Limited*) та зі скиданням вихідного сигналу при виконанні заданої умови у початковий стан (*Reset*). У більш пізніх версіях ці три блоки об'єднані в один, режими роботи якого визначаються у вікні введення параметрів, показаному на рис. 3.

Ускладнення алгоритму роботи дискретного інтегратора призвело до деяких похибок в його роботі. Зокрема, при встановленні на вході цього блоку ланки *Constant* (*Константа*) або ланки *Step* (*Сходинка*) з нульовим значенням параметру *Step time* перехідні функції інтегратора не змінюються при зміні методу чисельного інтегрування і мають вигляд рис. 2, *а*. Так само веде себе дискретний інтегратор і при використанні його порту стану для розв'язання алгебраїчного контуру. Отже, в таких випадках краще використовувати не бібліотечний блок , а створити його власноруч за схемою рис. 1. Для обмеження вихідних сигналів дискретних інтеграторів у моделі рис. 1 треба блок *Unit Delay* замінити блоком запізнювання з обмеженням вихідного сигналу, який можна створити за допомогою моделі рис. 4, а на виходах блоків *Zero-Order Hold* та *Gain1* установити ланки *Saturation* (*Обмеження Координат*) з тими ж самими рівнями обмеження, що задані в блоках *Constant* і *Constant1* моделі рис. 4.

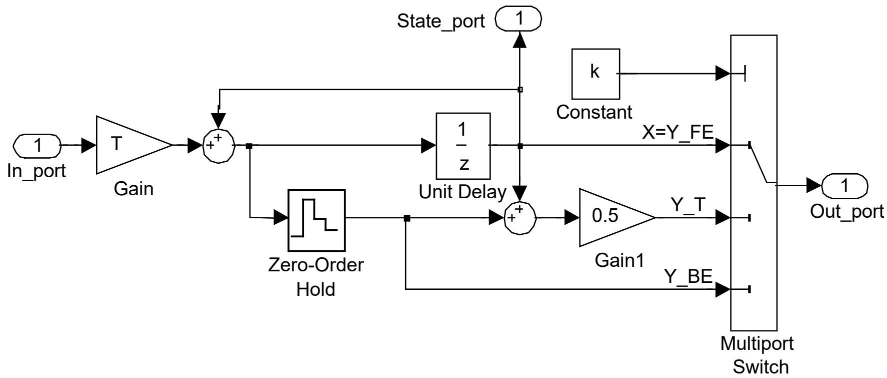
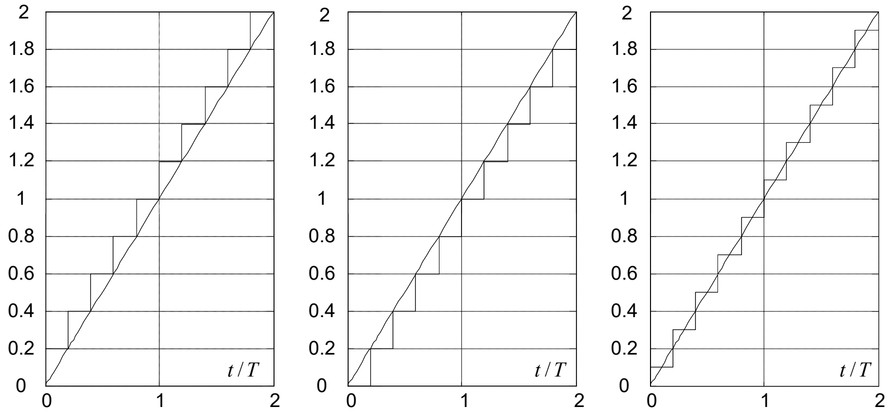


Рис. 1. Розгорнута модель дискретного інтегратора з різними алгоритмами чисельного інтегрування



а) *б*) *в*)

Рис. 2. Перехідні функції дискретних інтеграторів з різними методами чисельного інтегрування: *а*) *Backward Euler*, *б*) *Forward Euler*, *в*) *Trapeziodal*

Рис. 3 – Вікно визначення параметрів блоку *Discrete-Time Integrator*

У перемикачах *Switch* і *Switch1* моделі рис. 4 значення u_T параметру *Threshold* повинно задовольняти умові $0 < u_T < 1$. Зазвичай приймають середнє значення указаного діапазону, тобто $u_T = 0.5$.

Зупинимося ще на одній проблемі ЧІ, що виникає при моделюванні задавальних пристроїв для систем програмного керування електромеханічними об‘єктами. Такі пристрої формують сигнали завдання на швидкість та положення механізмів з урахуванням обмежень на прискорення, швидкість та, іноді, на ривок. Відповідно до цього на різних відрізках часу доводиться інтегрувати постійні сигнали та сигнали, що змінюються за лінійним та параболічним законами.

При дискретизації аналогових алгоритмів функціонування задавальних пристроїв виникає задача забезпечення рівності аналогових і відповідних цифрових сигналів у дискретні моменти часу, щоб запобігти накопичення похибок при ЧІ. Це досягається зміною методів інтегрування при зміні характеру вхідного сигналу. Так при інтегруванні постійних сигналів треба застосовувати метод прямокутників (*Forward Euler*), при інтегруванні лінійних сигналів – метод трапецій (*Trapeziodal*), а при інтегруванні параболічних сигналів – метод Сімпсона. Але застосування методу Сімпсона блоком *Discrete-Time Integrator* не передбачено.

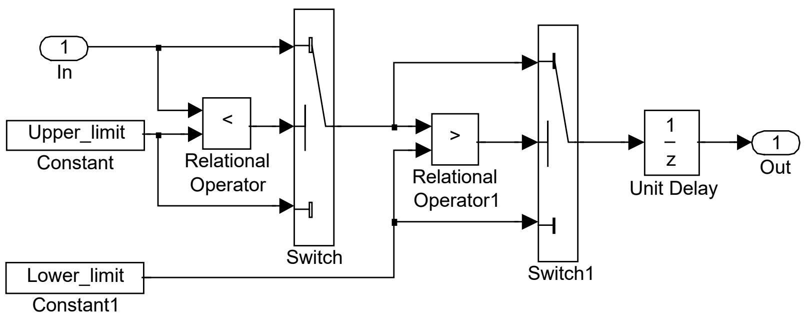


Рис. 4. Модель блоку запізнення на період дискретності з обмеженням вихідного сигналу

Для створення дискретного інтегратора, який інтегрує методом Сімпсона, скористаємося формулою обчислення площі параболічної трапеції [1], тобто геометричної фігури, обмеженої параболою, що проходить через три точки з координатами (t_i, u_i), (t_{i+1}, u_{i+1}) та (t_{i+2}, u_{i+2}), і прямими $t = t_i$, $t = t_{i+2}$ та $u = 0$:

$$\Delta S_i = \frac{T}{3}(u_i + 4u_{i+1} + u_{i+2}), \quad (7)$$

де

$$T = t_{i+1} - t_i = t_{i+2} - t_{i+1} \quad (8)$$

Із (7) випливає формула одного кроку ЧІ методом Сімпсона

$$y_S(nT) = y_S(nT - 2T) + \\ + \frac{T}{3}\big(u(nT - 2T) + 4u(nT - 2T) + u(nT)\big), \quad (9)$$

звідкіля знаходимо передавальну функцію інтегратора:

$$W_S(z) = \frac{y_S(z)}{u(z)} = T\frac{1 + 4z^{-1} + z^{-2}}{3(1 - z^{-2})} = T\frac{z^2 + 4z + 1}{3(z^2 - 1)}. \quad (10)$$

Для обмеження вихідного сигналу такого інтегратора можна запропонувати деталізовану структурну модель, зображену на рис. 5, в якій блоки *Limited Unit Delay* являють собою замасковані підсистеми зі структурою, поданою на рис. 4.

Співвідношення рівнів обмеження вихідних сигналів блоків *Limited Unit Delay*, *Limited Unit Delay1* і *Saturation* в цій моделі мають вигляд:

$$y_{Del\,\text{Обм}} = y_{Sat\,\text{Обм}}/8;\ y_{Del1\,\text{Обм}} = y_{Sat\,\text{Обм}}/2. \quad (11)$$

Розроблений дискретний інтегратор можна використовувати не тільки при моделюванні, але й при програмній реалізації цифрових елементів систем керування для підвищення точності чисельного інтегрування і поліпшення статичних та динамічних властивостей керованих систем електроприводу.

Розглянемо принцип дії ще одного блоку бібліотеки *Discrete* – екстраполятору першого порядку (*First-Order Hold*).

В пакеті *MATLAB* 4.*x* блок *First-Order Hold* (*FOH*) мав структурну схему, зображену на рис. 6, *а*. Він вимірював вхідний сигнал у дискретні моменти часу і формував вихідний сигнал у вигляді ламаної лінії, яка складалась з відрізків прямих, що з'єднують між собою 2 сусідні обмірювані точки входу з запізнюванням на період дискретності.

Починаючи з *MATLAB* 5.*x*, структуру блоку *FOH* було змінено у відповідності з рис. 6, *б*, що, на наш погляд, виявилось не дуже вдалим рішенням. Про це свідчать подані на рис. 7 графіки перетворення вхідної синусоїди екстраполяторами нульового і першого порядків з наведеними на рис. 6 структурними схемами.

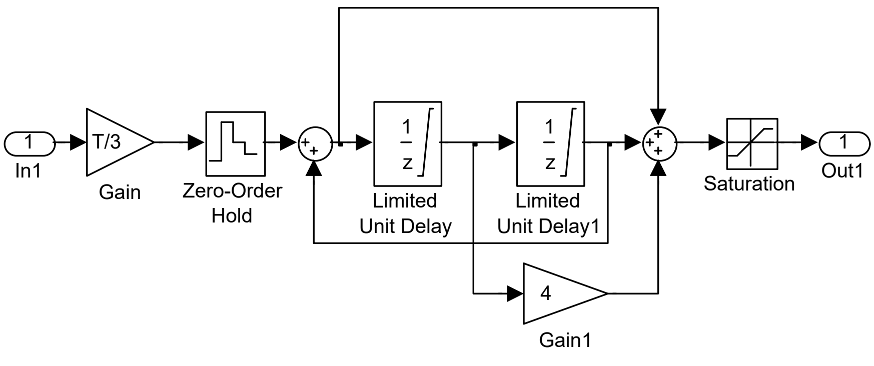
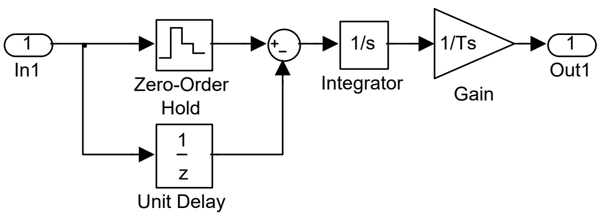
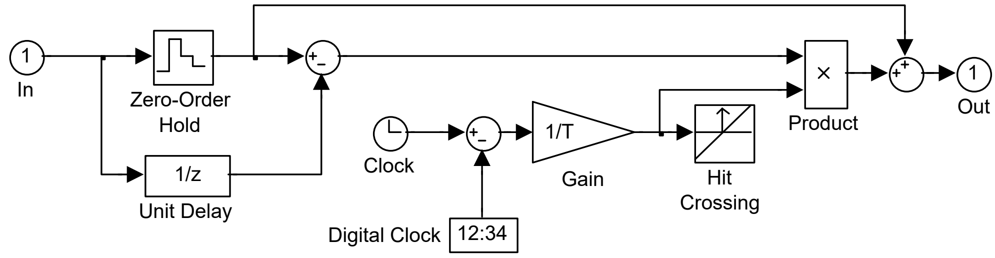


Рис. 5. Деталізована структурна модель дискретного інтегратора, що працює за алгоритмом Сімпсона,з обмеженням вихідного сигналу



а)



б)

Рис. 6. Модель екстраполятора першого порядку в пакеті *MATLAB*:
а) версій до 4.*x*; *б*) версій, починаючи з 5.*x*

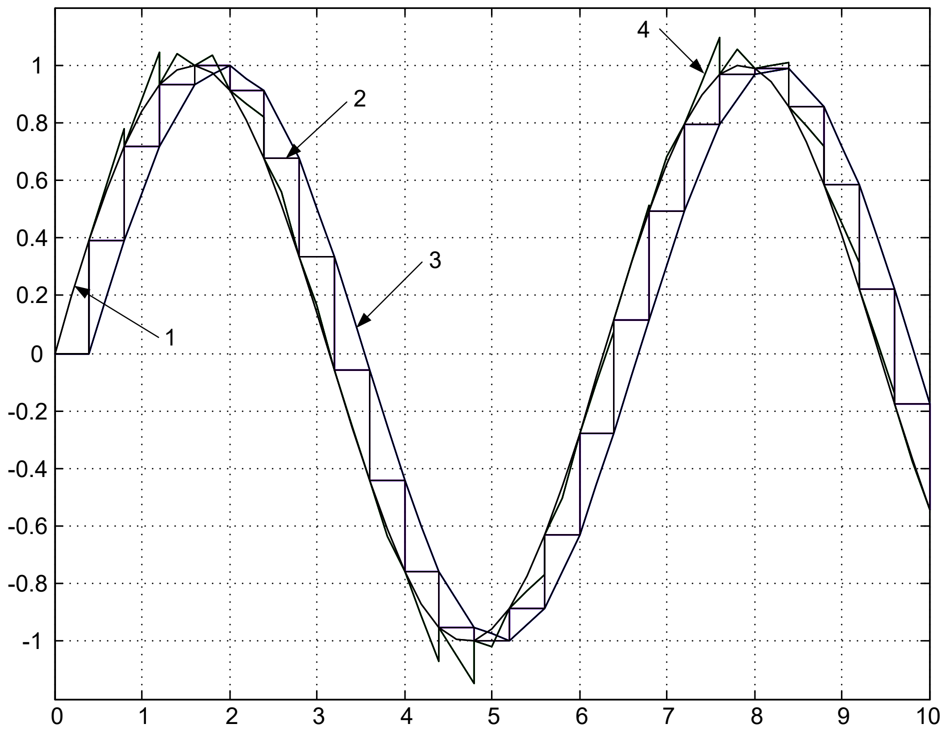


Рис. 7. Вхідний синусоїдальний сигнал (1) та результати перетворення його екстраполяторами нульового порядку (2) та екстраполяторами першого порядку, побудованими за схемами рис. 6, *а* (3) та рис. 6, *б* (4)

Розглянемо ще одну задачу, яка виникає під час синтезу дискретних пристроїв керування неперервними системами. Це задача дискретної апроксимації аналогових передавальних функцій.

Синтез дискретних пристроїв керування неперервними системами виконують одним з наступних шляхів:

- на основі неперервного об‘єкта регулювання синтезують неперервні пристрої керування, а потім перетворюють їх у дискретну форму;
- будують дискретні моделі об‘єкта регулювання і на їх основі синтезують дискретні пристрої керування.

Отже, в обох випадках треба вміти знаходити дискретні апроксимації аналогових передавальних функцій. Поставлену задачу можна виконати наступними засобами:

1) за допомогою *Z*-перетворення;
2) заміною оператора аналогового інтегрування 1/*s* одним з операторів цифрового інтегрування, наприклад, (4)-(6) або (10);
3) заміною нулів та полюсів на *s*-площині відповідними нулями та полюсами на *Z*-площині.

З перелічених засобів перший являється точним, а другий та третій – приблизними.

Для утворення дискретних моделей неперервних систем в *MATLAB* передбачена функція

SysD = c2d (SysC, T, ’Метод’),

яка утворює дискретну модель SysD неперервної системи SysC з періодом дискретності T одним із методів, що перераховані у табл. 1.

Таблиця 1

Метод	Опис методу
zoh	*Z*-перетворення з екстраполятором нульового порядку
foh	*Z*-перетворення з екстраполятором першого порядку
tustin	Білінійна апроксимація Тастіна
matched	Метод узгодження нулів та полюсів

Випробування функції c2d показало, що апроксимацію методом matched вона виконує з великою похибкою.

Наприклад, перетворення аналогового інтегратора $1/s$ при $T=1$ функцією

DI = c2d (tf(1,[1 0]), 1, ’ matched’)

дає результат

```
Transfer function:
1.052
--------
 z - 1
Sampling time: 1,
```

який викликає здивування наявністю у чисельнику коефіцієнта, що не дорівнює 1.

Метод узгодження нулів та полюсів є одним із типових методів дискретизації передавальних функцій спостерігачів стану та систем модального керування. Тому розглянемо його детальніше.

При використанні цього методу спочатку знаходять полюси p_i ($i=1,2,...,n$), нулі z_j ($j=1,2,...,m$) та коефіцієнт K неперервного об‘єкта, які визначають його передавальну функцію у вигляді

$$W(s)=K\frac{(s-z_1)(s-z_2)...(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)...(s-p_n)}; \qquad (12)$$

потім розраховують відповідні дискретні полюси

$$p_{di}=\exp(Tp_i)$$

та дискретні системні нулі

$$z_{dsi}=\exp(Tz_i),\ i=1,2,...,m, \qquad (13)$$

і, якщо $m<n-1$, доповнюють дискретну передавальну функцію нулями квантування [2]

$$z_{dkj}=-1,\ j=m+1,\ m+2,\ ...,\ n-1. \qquad (14)$$

Коефіцієнт K_d дискретного об‘єкта можна розрахувати за формулою

$$K_d=k\prod_{i=1}^{n}(1-z_i)\bigg/\prod_{l=1}^{n-1}(1-z_{zl}), \qquad (15)$$

де

$$k=K\prod_{i=1}^{n}(-p_i)\bigg/\prod_{j=1}^{m}(-p_{zj}). \qquad (16)$$

В формулі (16) з добутків треба виключити нульові аналогові полюси і нулі, а в формулі (15) – відповідні їм одиничні дискретні полюси і нулі.

Аналіз операторів функції c2d показав, що при наявності в неперервному об‘єкті нульових полюсів та (або) нулів формули (15) та (16) в ній замінено формулами

$$K_d=k\prod_{i=1}^{n}(e^{\varepsilon T}-z_i)\bigg/\prod_{l=1}^{n-1}(e^{\varepsilon T}-z_{zl}), \qquad (17)$$

$$k=K\prod_{i=1}^{n}(\varepsilon-p_i)\bigg/\prod_{j=1}^{m}(\varepsilon-p_{zj}), \qquad (18)$$

де $\varepsilon=0.1$, що знижує точність перетворення.

Описаний недолік можна ліквідувати, якщо у функції *c2d.m*, що знаходиться у директорії *matlab/toolbox/control/control/@zpk*, програмний фрагмент

```
sm = 0;
 while any(abs([z;p]-sm)<sqrt(eps)),
 sm = sm + 0.1/Ts;
 end
 zm = exp(sm*Ts);
 dcc = Gain(i)*prod(sm-z)/prod(sm-p);
 kd = dcc*prod(zm-pd)/prod(zm-zd);
```

замінити фрагментом

```
p1=p; z1=z;
iz=find(p==0); p1(iz)=[];
izz=find(z==0); z1(izz)=[];
pd1=pd; zd1=zd; pd1(iz)=[]; zd1(izz)=[];
k = Gain(1)*real(prod(-z1)/prod(-p1));
kd = k*real(prod(1-pd1)/prod(1-zd1));
```

Висновки

1. Блок *Discrete-Time Integrator* моделюючої програми *Simulink* в деяких режимах виконує чисельне інтегрування не заданим методом, а методом *Forward Euler*. Позбавитися цього недоліку можна застосуванням запропонованої в роботі моделі рис.1.
2. Підвищити точність чисельного інтегрування можна за допомогою дискретного інтегратора, що працює за методом Сімпсона, і має передавальну функцію (10).
3. Для обмеження вихідних сигналів дискретних інтеграторів їх передавальні функції необхідно деталізувати та замінити блоки запізнювання на період дискретності такими ж блоками з обмеженням, виконаними за структурою рис. 2.
4. Лінійний дискретний інтегратор, що реалізує метод Сімпсона, доцільно застосовувати при програмній реалізації задавальних пристроїв у разі необхідності інтегрування параболічних сигналів.
5. Чисельне інтегрування методом Сімпсона з обмеженням вихідного сигналу за схемою рис. 5 доцільно використовувати при програмній реалізації інтегральної частини регуляторів.

6. Для екстраполяції вихідних сигналів дискретних блоків степеневими поліномами першого порядку варто застосовувати не блок , який має структуру рис. 6, *б*, а модель, зображену на рис. 6, *а*. Це допоможе запобігти розривів в екстрапольованому сигналі.
7. Точність перетворення неперервної передавальної функції, яка отримує у своєму складі нульові полюси та/або нулі, у дискретну методом узгодження нулів та полюсів функцією c2d поширення *Control Toolbox* пакета *MATLAB* є незадовільною. Підвищити її можна внесенням у вихідний текст цієї функції запропонованих змін.

ЛІТЕРАТУРА

1. Крушевский А.В. и др. Вычислительная техника в инженерных и экономических расчетах. – М.: Наука, 1970. – 664 с.
2. Проектирование систем управления / Г.К. Гудвин, С.Ф. Гребе, М.Э. Сальгадо. – М.: Бином. Лаборатория знаний, 2004. – 911 с.

Поступила в редакцию

Проанализированы недостатки способов исследования дискретных систем в пакете MATLAB. Разработаны усовершенствованные Simulink-модели дискретных интеграторов. Предложены рекомендации по использованию модели экстраполятора первого порядка и методику повышения точности дискретной аппроксимации аналоговых передаточных функций методом согласования нулей-полюсов.

Imperfections of investigation methods of discrete systems in the MATLAB have been analyzed. Improved Simulink-models of discrete integrators were developed. Recommendations to using model of first-order hold were offered. The procedure of precision rising of discrete approximation of analog transfer functions by the method zero-pole coordination was offered too.