

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»



ВИЩА МАТЕМАТИКА

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ

ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

Практикум

*Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра
за технічними спеціальностями*

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2020

Вища математика: Диференціальне числення функцій багатьох змінних: Практикум [Електронний ресурс] : навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра за технічними спеціальностями / КПІ ім. Ігоря Сікорського ; уклад. : Є.В. Массалітіна, О.О. Кільчинський. – Електронні текстові дані (1 файл: 1,303 Кбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2020. – 35 с.

Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського (протокол №8 від 09.04.2020 р.) за поданням Вченої ради фізико-математичного факультету (протокол № 2 від 25.02.2020 р.)

Електронне мережне навчальне видання

ВИЩА МАТЕМАТИКА

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ

ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

Практикум

Укладачі: *Массалітіна Євгенія Вікторівна, канд. фіз.-мат. наук, доц.,
Кільчинський Олександр Олександрович, канд. фіз.-мат. наук, доц.*

Відповідальний редактор: *Дудкін Микола Євгенович, доктор фіз.-мат. наук, проф.*

Рецензент: *Диховичний Олександр Олександрович, канд. фіз.-мат. наук, доц.
кафедри МА та ТІ НТУУ «КПІ ім. Ігоря Сікорського»*

Практикум з розділу «Диференціальне числення функцій багатьох змінних» дисципліни «Вища математика» для студентів технічних спеціальностей містить 30 варіантів, кожен варіант складається з 9 завдань (15 задач).

Самостійне виконання цих завдань забезпечує свідоме оволодіння навчальним матеріалом, який передбачено навчальною програмою з вищої математики технічних спеціальностей.

Практикум може бути рекомендований в якості індивідуальної роботи за темою «Диференціальне числення функцій багатьох змінних».

© КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2020

Диференціальне числення функцій багатьох змінних

ВСТУП

Практикум з розділу «Диференціальне числення функцій багатьох змінних» дисципліни «Вища математика» для студентів технічних спеціальностей, містить систематизовану добірку задач, без вміння розв'язувати які неможлива підготовка сучасного інженера.

Практикум допоможе студентам опрацювати тему «Диференціальне числення функцій багатьох змінних», виробити уміння та практичні навички розв'язування основних задач. Це, в свою чергу, забезпечить успішне засвоєння матеріалу, передбаченого навчальною програмою з вищої математики для технічних спеціальностей НТУУ «КПІ ім. Ігоря Сікорського».

Даний практикум містить 30 варіантів, кожен варіант складається з 9 завдань (15 задач).

Практикум може бути рекомендований для використання викладачами вищої математики в якості завдань до індивідуальної роботи за темою «Диференціальне числення функцій багатьох змінних».

Диференціальне числення функцій багатьох змінних

Варіант №1

Завдання 1. Знайти область визначення функцій та зобразити її на площині:

а) $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 1} + \ln(4 - x^2 - y^2)$;

б) $z = \sqrt{y \sin 2x}$.

Завдання 2. Знайти диференціали першого та другого порядку від функцій:

а) $z = \sin y^x$;

б) $z = \operatorname{ctg} \frac{y}{y-x}$.

Завдання 3. Перевірити, що задані функції задовольняють заданим співвідношенням:

а) $z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x \partial y} - \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2} = 0$;

б) $z = x \ln(x + x^2 + y^2) - x^2 - y^2, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{1}{x + x^2 + y^2}$.

Завдання 4. За допомогою повного диференціала знайти наближене значення функції $z = \ln(\sqrt{x} - y)$ в точці $M_0(3,98; 1,04)$.

Завдання 5. Знайти похідні від функцій, заданих неявно:

а) $x^2 + y^2 = \cos \frac{y}{x}$;

б) $y e^{zx} - y^2 x + x^2 z = 2$.

Завдання 6. Знайти похідні складених функцій:

а) $z = (1 + \sqrt{x}) \ln(y + 1)$, де $x = \operatorname{tg} t$, $y = \frac{1}{4} t^4$;

б) $z = \operatorname{arctg} \frac{x}{y^2}$, де $y = e^{x^3+x}$;

в) $z = e^{x^2 y} \sqrt{1-y}$, де $x = u^2 \sin v$, $y = v^2 \cos u$.

Завдання 7. Скласти рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні $2x^2 - y^2 + z^2 - 4x + 6z + 8 = 0$ в точці $M_0(2; 1; -1)$.

Завдання 8. Дослідити на екстремум функцію двох змінних $z = 3x^2 y + y^3 - 12x - 15y + 3$.

Завдання 9. Знайти найменше та найбільше значення функції $z = 3x^2 - 12y + 6xy + 5$ в замкненій області $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$.

Диференціальне числення функцій багатьох змінних

Варіант №2

Завдання 1. Знайти область визначення функцій та зобразити її на площині:

а) $z = \sqrt{(y-2)\operatorname{tg} x}$;

б) $z = \sqrt{25 - x^2 - y^2} + \sqrt{16 - y^2}$.

Завдання 2. Знайти диференціали першого та другого порядку від функцій:

а) $z = \cos x^y$;

б) $z = \ln(\sqrt{xy} - 1)$.

Завдання 3. Перевірити, що задані функції задовольняють заданим співвідношенням:

а) $z = x^3 - 3axy^3, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$;

б) $u = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$.

Завдання 4. За допомогою повного диференціала знайти наближене значення функції

$z = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x} - 1\right)$ в точці $M_0(1,04; 1,98)$.

Завдання 5. Знайти похідні від функцій, заданих неявно:

а) $y^2 + x - 1 = \cos(xy^2 + y)$;

б) $x^2 + y^2 + z^2 = yx^2 + e^{xyz}$.

Завдання 6. Знайти похідні складених функцій:

а) $z = y^2 \operatorname{ctg} x$, де $x = e^t \sin t$, $y = e^t \cos t$; б) $z = \frac{e^x - e^y}{x^4}$, де $y = x^3 \ln x$;

в) $z = \operatorname{arctg} xy$, де $x = \ln(u^2 + v^2)$, $y = u^2 v$.

Завдання 7. Скласти рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні $y + \ln \frac{x}{z} - z = 0$

в точці $M_0(1; 1; 1)$.

Завдання 8. Дослідити на екстремум функцію двох змінних $z = 2x^4 + y^4 - x^2 - 2y^2$.

Завдання 9. Знайти найменше та найбільше значення функції $z = x^2 + y^2 + x + y - xy$ у трикутнику, обмеженому прямими $x = 0$, $y = 0$, $x + y = -3$.

Диференціальне числення функцій багатьох змінних

Варіант №3

Завдання 1. Знайти область визначення функцій та зобразити її на площині:

$$\text{а) } z = 2^{\frac{1}{x^2+y^2-1}} + \arcsin \frac{x^2+y^2}{16};$$

$$\text{б) } z = \ln(x-3) + \ln \operatorname{ctg} y.$$

Завдання 2. Знайти диференціали першого та другого порядку від функцій:

$$\text{а) } z = \cos(e^x + e^y);$$

$$\text{б) } z = \operatorname{ctg} x^3 y.$$

Завдання 3. Перевірити, що задані функції задовольняють заданим співвідношенням:

$$\text{а) } u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \frac{1}{u} = \frac{\partial^2(\ln u)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(\ln u)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2(\ln u)}{\partial z^2};$$

$$\text{б) } z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x} = \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}.$$

Завдання 4. За допомогою повного диференціала знайти наближене значення функції

$$z = x + y - \sqrt{x^2 + y^2} \text{ в точці } M_0(3, 01; 3, 98).$$

Завдання 5. Знайти похідні від функцій, заданих неявно:

$$\text{а) } y^2 e^x + x \ln y = 2;$$

$$\text{б) } xy^2 + x \operatorname{arccotg} z = yz.$$

Завдання 6. Знайти похідні складених функцій:

$$\text{а) } z = \arcsin \frac{x}{y}, \text{ де } x = \sin t, \quad y = \cos t; \quad \text{б) } z = \ln(x^2 + xy + y^2), \text{ де } y = \frac{1}{2}x^2 + x;$$

$$\text{в) } z = 2y + \frac{x}{y^2}, \text{ де } x = v \cos u, \quad y = u\sqrt{v}.$$

Завдання 7. Скласти рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні

$$e^{xyz} + \sqrt{x^2 + y^2} - z^3 - 6 = 0 \text{ в точці } M_0(4; 3; 0).$$

Завдання 8. Дослідити на екстремум функцію двох змінних $z = 8x^3 + 3y^2 + 12xy - 7$.

Завдання 9. Знайти найменше та найбільше значення функції $z = 2xy - 2x + 4y$ в

замкненій області $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 3, \quad 0 \leq y \leq 3\}$.

Диференціальне числення функцій багатьох змінних

Вариант №4

Завдання 1. Знайти область визначення функцій та зобразити її на площині:

$$\text{a) } z = \ln x - \ln \sin y; \quad \text{б) } z = \sqrt{\frac{x^2 + 2x + y^2}{x^2 - 2x + y^2}} + \frac{1}{x}.$$

Завдання 2. Знайти диференціали першого та другого порядку від функцій:

$$\text{a) } z = \sin(x^2 + y^2); \quad \text{б) } z = x \ln \frac{y}{x}.$$

Завдання 3. Перевірити, що задані функції задовольняють заданим співвідношенням:

$$\begin{aligned} \text{a) } z &= \ln(e^x + e^y), & \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)^2; \\ \text{б) } z &= e^x (x \cos y - y \sin y), & \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= 0. \end{aligned}$$

Завдання 4. За допомогою повного диференціала знайти наближене значення функції $z = x^2 e^y$ в точці $M_0(1, 94; 0, 12)$.

Завдання 5. Знайти похідні від функцій, заданих неявно:

$$\text{a) } x^2 + y + 2 = \sin(x^2 y + y); \quad \text{б) } y^2 e^z + z e^x = 2x^2 + y.$$

Завдання 6. Знайти похідні складених функцій:

а) $z = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$, де $x = e^{2t+1}$, $y = \ln(2t+1)$; б) $z = e^x \ln(x^2 + y^2)$, де $y = x + \frac{1}{2}x^2$;

в) $z = x^y + y^x$, де $x = u^2 - v^2$, $y = u^2 + v^2$.

Завдання 7. Скласти рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні $2x^2 - y^2 + z^2 - 6x + 2y + 6 = 0$ в точці $M_0(1; -1; 1)$.

Завдання 8. Дослідити на екстремум функцію двох змінних

$$z = x^3 + 3xy^2 - 39x - 36y + 26.$$

Завдання 9. Знайти найменше та найбільше значення функції $z = xy(4 - x - y)$ у трикутнику, обмеженому прямими $x = 1$, $y = 0$, $x + y = 6$.

Диференціальне числення функцій багатьох змінних

Варіант №5

Завдання 1. Знайти область визначення функцій та зобразити її на площині:

а) $z = e^{\frac{y+3}{x}} + \arcsin \frac{x+y}{4};$

б) $z = \sin(x + y^2) + \frac{x}{\sqrt{36 - 4x^2 - 9y^2}}.$

Завдання 2. Знайти диференціали першого та другого порядку від функцій:

а) $z = \cos(x - y^3);$

б) $z = \operatorname{arctg} x^2 y.$

Завдання 3. Перевірити, що задані функції задовольняють заданим співвідношенням:

а) $z = \ln \frac{x^2 - y^2}{xy}, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} - \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} - \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = 2 \left(\frac{1}{y^3} - \frac{1}{x^3} \right);$

б) $z = e^{x+3y} + e^{x-3y}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 9 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0.$

Завдання 4. За допомогою повного диференціала знайти наближене значення функції

$z = \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{y^2 - 1}}$ в точці $M_0(0,98; 2,02).$

Завдання 5. Знайти похідні від функцій, заданих неявно:

а) $y^{\sin x} = \cos(x + y);$

б) $y e^z - xz = z \ln(x + y).$

Завдання 6. Знайти похідні складених функцій:

а) $z = x^2 \operatorname{tg} y,$ де $x = t^2 + \sqrt{t}, \quad y = \frac{1}{\sqrt{t}};$

б) $z = \arcsin(x^2 + y^2),$ де $y = 4^{x^2};$

в) $z = e^{\sqrt{x} + \sqrt{y}},$ де $x = \ln(u^2 + v^2), \quad y = v \ln u.$

Завдання 7. Скласти рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні $x^2 + y^2 - 4xy + 3x - z - 15 = 0$ в точці $M_0(-1; 3; 4).$

Завдання 8. Дослідити на екстремум функцію двох змінних $z = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2.$

Завдання 9. Знайти найменше та найбільше значення функції $z = x^3 + 3y^2 + 6xy + 30$ в замкненій області $D = \{(x, y) : -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}.$

Диференціальне числення функцій багатьох змінних

Варіант №6

Завдання 1. Знайти область визначення функцій та зобразити її на площині:

а) $z = \arccos \frac{x}{5} + \sqrt{xy}$;

б) $z = \frac{x+y}{\sqrt{16-x^2-4y^2}} + e^{\frac{x+2}{y}}$.

Завдання 2. Знайти диференціали першого та другого порядку від функцій:

а) $z = \sin \frac{y}{x^3}$;

б) $z = \arcsin(x+y)$.

Завдання 3. Перевірити, що задані функції задовольняють заданим співвідношенням:

а) $z = \cos^3(x+4y) + \sin^3(x-4y)$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 16 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$;

б) $z = x^y$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

Завдання 4. За допомогою повного диференціала знайти наближене значення функції $z = e^{y^2 x}$ в точці $M_0(1, 0, 2; -0, 96)$.

Завдання 5. Знайти похідні від функцій, заданих неявно:

а) $y e^x + e^{x^2+y^2} = 1$;

б) $y \operatorname{arctg} z + x^2 = xyz$.

Завдання 6. Знайти похідні складених функцій:

а) $z = x^3 \ln y$, де $x = e^{\sqrt{t}}$, $y = e^{t^2}$;

б) $z = \arcsin x^2 y$, де $y = \sqrt{\sin x}$;

в) $z = x^y + y^2$, де $x = \ln(u+v^2)$, $y = e^{uv}$.

Завдання 7. Скласти рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні $2x^2 - 3y^2 + xy + 3x - z + 1 = 0$ в точці $M_0(1; -1; 2)$.

Завдання 8. Дослідити на екстремум функцію двох змінних $z = x^4 + y^4 - 36xy$.

Завдання 9. Знайти найменше та найбільше значення функції $z = x^2 - 2y + 3$ у трикутнику, обмеженому прямими $x = 0$, $y = 0$, $y = x + 1$.

Диференціальне числення функцій багатьох змінних

Варіант №7

Завдання 1. Знайти область визначення функцій та зобразити її на площині:

а) $z = \frac{\sqrt{4x - y^2}}{x^2 + y^2 - 9}$;

б) $z = \frac{\cos(3x + 1)}{\ln(x^2 y)}$.

Завдання 2. Знайти диференціали першого та другого порядку від функцій:

а) $z = \cos \frac{x + y}{x - y}$;

б) $z = \operatorname{ctg} x^3 y^4$.

Завдання 3. Перевірити, що задані функції задовольняють заданим співвідношенням:

а) $z = \ln \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$;

б) $z = \sin(x - ay) + \cos(x + ay), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

Завдання 4. За допомогою повного диференціала знайти наближене значення функції

$z = \operatorname{arctg} \left(\frac{x}{y} - 1 \right)$ в точці $M_0(1,97; 1,02)$.

Завдання 5. Знайти похідні від функцій, заданих неявно:

а) $\frac{y^2}{x} = \operatorname{ctg}(y^2 + x)$;

б) $yz^2 + x^2 y^2 = y e^{x+z} + 1$.

Завдання 6. Знайти похідні складених функцій:

а) $z = \sin xy^2$, де $x = \ln^3 t$, $y = t^3 + 3$; б) $z = \ln(e^x + e^y)$, де $y = e^{x^3} + \frac{1}{3}x^3$;

в) $z = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{x}{y}}$, де $x = u \operatorname{ctg} v$, $y = v \operatorname{tg} u$.

Завдання 7. Скласти рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні

$\sqrt{x^2 + y^2} - xy - z = 0$ в точці $M_0(-3; 4; 17)$.

Завдання 8. Дослідити на екстремум функцію двох змінних $z = 2x^3 + 2y^3 - 36xy + 1$.

Завдання 9. Знайти найменше та найбільше значення функції $z = 3 - x^2 - y^2 + 4x - 6y$ в

замкненій області $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 2\}$.

Диференціальне числення функцій багатьох змінних

Варіант №8

Завдання 1. Знайти область визначення функцій та зобразити її на площині:

а) $z = \sqrt{\frac{x}{x+y}} + e^{xy}$;

б) $z = \arccos \frac{x^2 + y^2}{16} + \sqrt{xy}$.

Завдання 2. Знайти диференціали першого та другого порядку від функцій:

а) $z = y \cos x + x \sin y$;

б) $z = x^{\operatorname{tg} y}$.

Завдання 3. Перевірити, що задані функції задовольняють заданим співвідношенням:

а) $u = \frac{1}{z-x} + \frac{1}{x-y} + \frac{1}{y-z}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right);$

б) $z = \sqrt{y} \sin \frac{x}{y}, \quad z = 2y \frac{\partial z}{\partial y} + 2x \frac{\partial z}{\partial x}.$

Завдання 4. За допомогою повного диференціала знайти наближене значення функції $z = \ln(x^3 + y^3)$ в точці $M_0(0,09; 0,99)$.

Завдання 5. Знайти похідні від функцій, заданих неявно:

а) $y^2 e^x + e^{y^2} - 2x = 1$;

б) $\ln(yz + x^2) = x e^z + y$.

Завдання 6. Знайти похідні складених функцій:

а) $z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$, де $x = \sin t$, $y = \cos t$; б) $z = \ln(e^x + e^y)$, де $y = \sin^2 x$;

в) $z = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$, де $x = u \cos v$, $y = v \sin u$.

Завдання 7. Скласти рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні $\ln \sqrt{x^2 + y^2} - z = 0$ в точці $M_0(0;1;0)$.

Завдання 8. Дослідити на екстремум функцію двох змінних $z = x^2 - 2xy^2 + y^4 - y^5$.

Завдання 9. Знайти найменше та найбільше значення функції $z = x^2 - y^2$ у трикутнику, обмеженому прямими $x = 1$, $y = 0$, $y = 2x - 3$.

Диференціальне числення функцій багатьох змінних

Варіант №9

Завдання 1. Знайти область визначення функцій та зобразити її на площині:

$$\text{а) } z = \frac{2}{\sqrt{2x+y}} + \frac{4e^{x^2}}{\sqrt{x-4y}};$$

$$\text{б) } z = \cos(x^2 + y^2) + \arcsin \frac{x}{y}.$$

Завдання 2. Знайти диференціали першого та другого порядку від функцій:

$$\text{а) } z = 3^{\sin xy};$$

$$\text{б) } z = \sin(y - x^3).$$

Завдання 3. Перевірити, що задані функції задовольняють заданим співвідношенням:

$$\text{а) } z = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 z}{\partial y^2};$$

$$\text{б) } z = \ln \operatorname{tg}(x+y), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 0.$$

Завдання 4. За допомогою повного диференціала знайти наближене значення функції

$$z = \ln(\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{y} - 1) \text{ в точці } M_0(1,06; 0,96).$$

Завдання 5. Знайти похідні від функцій, заданих неявно:

$$\text{а) } y + x(e^x + e^y) + x^3 = e^y;$$

$$\text{б) } y^2 + z^2 = 1 - y \cos(x^2 + z^2).$$

Завдання 6. Знайти похідні складених функцій:

$$\text{а) } z = \sqrt{y} + x^y, \text{ де } x = \sqrt{t^2 - 1}, \quad y = \sqrt{t^2 + 1}; \quad \text{б) } z = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}, \text{ де } y = \cos^2 2x;$$

$$\text{в) } z = \frac{y}{x^2}(x+1)^2, \text{ де } x = \frac{u}{v^2}, \quad y = v^2 - u^2.$$

Завдання 7. Скласти рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні

$$4y^2 - z^2 + 4xy - xz + 3z - 9 = 0 \text{ в точці } M_0(1; -2; 1).$$

Завдання 8. Дослідити на екстремум функцію двох змінних $z = xy^2(1 - x - y)$.

Завдання 9. Знайти найменше та найбільше значення функції $z = 2x^3 + y^3 - 6xy + 2$ в

замкненій області $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 3, \quad 2 \leq y \leq 5\}$.

Диференціальне числення функцій багатьох змінних

Варіант №10

Завдання 1. Знайти область визначення функцій та зобразити її на площині:

а) $z = \frac{2y}{16 - x^2 - 4y^2} + \sin(y^2 - 5x);$

б) $z = \frac{2 \sin x}{\sqrt{x - y}} + \frac{4}{\sqrt{4x + y}}.$

Завдання 2. Знайти диференціали першого та другого порядку від функцій:

а) $z = e^{x^3 - \sqrt{y}};$

б) $z = \cos \frac{y}{x + y}.$

Завдання 3. Перевірити, що задані функції задовольняють заданим співвідношенням:

а) $z = \ln(x^2 + xy + y^2), \quad x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 2;$

б) $z = \sin^3(x + e^y), \quad \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$

Завдання 4. За допомогою повного диференціала знайти наближене значення функції

$z = x\sqrt{y} + \frac{y}{\sqrt[3]{x}}$ в точці $M_0(-1, 03; 3, 97).$

Завдання 5. Знайти похідні від функцій, заданих неявно:

а) $x^4 y^2 + \ln^2(x + y) - x = 1;$

б) $e^{yz} - 2xz = y^2 + xy + 1.$

Завдання 6. Знайти похідні складених функцій:

а) $z = \frac{x^3}{y^2},$ де $x = \log_3 t, \quad y = \frac{1}{t^3};$

б) $z = e^{\operatorname{tg}(x^2 + y)},$ де $y = \ln^2(x + 1);$

в) $z = 5^{x^2 - y^4},$ де $x = \sin^2 uv, \quad y = \operatorname{ctg} \frac{u}{v}.$

Завдання 7. Скласти рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні $\sin \frac{x}{y} - z = 0$ в точці $M_0(\pi; 1; 0).$

Завдання 8. Дослідити на екстремум функцію двох змінних $z = xy^2 - x^2y^2 - xy^3.$

Завдання 9. Знайти найменше та найбільше значення функції $z = x^2 + y^2$ у трикутнику, обмеженому прямими $x = 0, \quad y = 1, \quad 2y = 6 - 3x.$

Диференціальне числення функцій багатьох змінних

Варіант №11

Завдання 1. Знайти область визначення функцій та зобразити її на площині:

$$a) z = \frac{\sqrt{4x - y^2}}{\ln(1 - x^2 - y^2)};$$

$$б) z = \sqrt{y \sin x}.$$

Завдання 2. Знайти диференціали першого та другого порядку від функцій:

$$a) z = e^{-\sqrt{x^2 + y^3}};$$

$$б) z = \arccos xy^2.$$

Завдання 3. Перевірити, що задані функції задовольняють заданим співвідношенням:

$$a) z = \frac{x^2 y^2}{x + y}, \quad x \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + y \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2 \frac{\partial z}{\partial x};$$

$$б) z = e^x (\cos y + x \sin y), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 0.$$

Завдання 4. За допомогою повного диференціала знайти наближене значення функції

$$z = \left(\arctg \frac{y}{x} \right)^2 \text{ в точці } M_0(0,99; 1,01).$$

Завдання 5. Знайти похідні від функцій, заданих неявно:

$$a) \sin(x + y) = xy + x^2 + y^2;$$

$$б) \ln(y^2 + xz) = \arctg \frac{x}{z}.$$

Завдання 6. Знайти похідні складених функцій:

$$a) z = (1 + \sqrt{x}) \ln(y + 1), \text{ де } x = \operatorname{tg} t, \quad y = \frac{1}{4} t^4; \quad б) z = \arctg \frac{x}{y^2}, \text{ де } y = e^{x^3 + x};$$

$$в) z = e^{x^2 y} \sqrt{1 - y}, \text{ де } x = u^2 \sin v, \quad y = v^2 \cos u.$$

Завдання 7. Скласти рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні $2x^2 - y^2 + 2z^2 + xz + xy - 3 = 0$ в точці $M_0(1; 2; 1)$.

Завдання 8. Дослідити на екстремум функцію двох змінних $z = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$.

Завдання 9. Знайти найменше та найбільше значення функції

$$z = 2x^2 + y^2 - 8x + 2y + 10 \quad \text{в} \quad \text{замкненій} \quad \text{області}$$

$$D = \{(x, y) : 1 \leq x \leq 3, \quad -2 \leq y \leq 2\}.$$

Диференціальне числення функцій багатьох змінних

Варіант №12

Завдання 1. Знайти область визначення функцій та зобразити її на площині:

а) $z = \frac{2}{\sin \pi(x+y)}$;

б) $z = \sqrt{\frac{x^2 + 6y + y^2}{x^2 - 6y + y^2}} - \frac{4}{y}$.

Завдання 2. Знайти диференціали першого та другого порядку від функцій:

а) $z = \operatorname{ctg}(x^2 + y^3)$;

б) $z = \arccos \sqrt{xy}$.

Завдання 3. Перевірити, що задані функції задовольняють заданим співвідношенням:

а) $z = y e^{x^2 - y^2}$, $\frac{1}{x} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}$;

б) $z = x 2^{x+y} + y \sin(x+y)$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

Завдання 4. За допомогою повного диференціала знайти наближене значення функції

$z = \cos^2 \pi x + \sin^3 \frac{\pi y}{2}$ в точці $M_0(1,06; -0,94)$.

Завдання 5. Знайти похідні від функцій, заданих неявно:

а) $y^x = x^y$;

б) $x^2 z^2 + y^2 x^2 + y^2 z^2 = e^{x+z}$.

Завдання 6. Знайти похідні складених функцій:

а) $z = e^{\sqrt{\frac{x}{y}}}$, де $x = \operatorname{ctg} t^2$, $y = \operatorname{tg} t$;

б) $z = \arccos \frac{x^3}{y}$, де $y = \log_3^2 x$;

в) $z = \ln(\sqrt{xy} - y^2)$, де $x = v^2 - \sqrt{u}$, $y = v \operatorname{arctg} u$.

Завдання 7. Скласти рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні

$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = x + y + z - 4$ в точці $M_0(2; 3; 6)$.

Завдання 8. Дослідити на екстремум функцію двох змінних $z = x^3 + 3y^2 + 6xy + 43$.

Завдання 9. Знайти найменше та найбільше значення функції $z = x^2 - y^2$ у трикутнику, обмеженому прямими $y = x$, $y = -x$, $x = 2$.

Диференціальне числення функцій багатьох змінних

Варіант №13

Завдання 1. Знайти область визначення функцій та зобразити її на площині:

а) $z = \frac{x+y}{\sqrt{9-x^2-y^2}} + e^{\frac{4}{x+y}};$

б) $z = \arccos \frac{x+y}{5} + 2^{\frac{x+1}{y}}.$

Завдання 2. Знайти диференціали першого та другого порядку від функцій:

а) $z = 5^{y^2-\sqrt{x}};$

б) $z = \arcsin(y-x^2).$

Завдання 3. Перевірити, що задані функції задовольняють заданим співвідношенням:

а) $z = ye^x + xe^y, \quad x \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} + y \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3};$

б) $z = y\sqrt{\frac{y}{x}}, \quad x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$

Завдання 4. За допомогою повного диференціала знайти наближене значення функції

$z = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$ в точці $M_0(2,97;4,98).$

Завдання 5. Знайти похідні від функцій, заданих неявно:

а) $x = y \ln x - e^{xy} + 1;$

б) $\cos^2 x = y - \cos^2 xz - \cos^2 yz.$

Завдання 6. Знайти похідні складених функцій:

а) $z = \arcsin \frac{y}{x},$ де $x = \frac{1}{3} \ln^3 t, \quad y = \frac{1}{3} t^3;$

б) $z = \ln^3(x+y^3),$ де $y = \operatorname{tg} x;$

в) $z = e^{y^2\sqrt{x+1}},$ де $x = u \operatorname{tg} v, \quad y = v e^u.$

Завдання 7. Скласти рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні

$x^3 + y^3 + z^3 + xyz - 6 = 0$ в точці $M_0(1;2;-1).$

Завдання 8. Дослідити на екстремум функцію двох змінних $z = x^2y - x^3y - x^2y^2.$

Завдання 9. Знайти найменше та найбільше значення функції $z = x^2 + y^2 - 3xy + 5$ в замкненій області $D = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 3\}.$

Диференціальне числення функцій багатьох змінних

Варіант №14

Завдання 1. Знайти область визначення функцій та зобразити її на площині:

а) $z = \sqrt{\frac{x^2 + 8y + y^2}{x^2 - 8y + y^2}} - \frac{1}{x + y};$

б) $z = \sqrt{xy} + \arcsin \frac{x}{3}.$

Завдання 2. Знайти диференціали першого та другого порядку від функцій:

а) $z = y^{\sin x};$

б) $z = \arctg(x^2 + y^3).$

Завдання 3. Перевірити, що задані функції задовольняють заданим співвідношенням:

а) $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \frac{1}{u} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right);$

б) $u = e^{xy} \sin z, \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} = \frac{\partial^3 u}{\partial y \partial z \partial x}.$

Завдання 4. За допомогою повного диференціала знайти наближене значення функції

$z = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$ в точці $M_0(0,01; 0,99).$

Завдання 5. Знайти похідні від функцій, заданих неявно:

а) $y^{\sin x} = \cos(x + y);$

б) $\ln(xz + y^2) = \operatorname{tg}(x + yz).$

Завдання 6. Знайти похідні складених функцій:

а) $z = y \arctg xy, \quad \text{де } x = t^3, \quad y = e^t + 3;$

б) $z = \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{xy}}, \quad \text{де } y = x \operatorname{tg} x;$

в) $z = e^{xy} \sqrt{x}, \quad \text{де } x = u \sin v, \quad y = \ln u.$

Завдання 7. Скласти рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні $e^z - z + xy = 4$ в точці $M_0(2;1;0).$

Завдання 8. Дослідити на екстремум функцію двох змінних $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y.$

Завдання 9. Знайти найменше та найбільше значення функції $z = xy(6 - x - y)$ у трикутнику, обмеженому прямими $x = 1, \quad y = 2, \quad y = 12 - x.$

Диференціальне числення функцій багатьох змінних

Варіант №15

Завдання 1. Знайти область визначення функцій та зобразити її на площині:

а) $z = \ln(9 - x^2 - y^2) + \sqrt{x^2 + y^2 - 4}$;

б) $z = \sqrt{x \sin 2y}$.

Завдання 2. Знайти диференціали першого та другого порядку від функцій:

а) $z = e^{2x^2 - y^3}$;

б) $z = \operatorname{arccotg} \frac{y}{x}$.

Завдання 3. Перевірити, що задані функції задовольняють заданим співвідношенням:

а) $z = x e^{\frac{y}{x}}$, $x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$;

б) $z = \arcsin \frac{x}{x+y}$, $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 0$.

Завдання 4. За допомогою повного диференціала знайти наближене значення функції

$z = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ в точці $M_0(2, 0.1; 1, 0.3)$.

Завдання 5. Знайти похідні від функцій, заданих неявно:

а) $y^3 + x^3 = \sin xy$;

б) $y^3 + z^2 + x^2 \ln z = \frac{y}{x}$.

Завдання 6. Знайти похідні складених функцій:

а) $z = x^3 \ln y$, де $x = \sin^2 t$, $y = t^4$;

б) $z = \operatorname{arccotg} xy$, де $y = \log_2^2 x$;

в) $z = e^{y^3 - \sqrt{x}}$, де $x = v \cos u$, $y = u \sin v$.

Завдання 7. Скласти рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні $e^{xy} + 3xz^2 - 2x^2y + 5x - y + z = 7$ в точці $M_0(0; 0; 1)$.

Завдання 8. Дослідити на екстремум функцію двох змінних $z = 2x^3 + 2y^3 - 2xy + 12$.

Завдання 9. Знайти найменше та найбільше значення функції

$z = x^2 + y^2 - xy - x - 4y + 1$ в замкненій області $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 3\}$.

Диференціальне числення функцій багатьох змінних

Варіант №16

Завдання 1. Знайти область визначення функцій та зобразити її на площині:

а) $u = \sqrt{4 - y^2} + \sqrt{9 - x^2}$;

б) $z = \sqrt{(x - 1) \operatorname{tg} y}$.

Завдання 2. Знайти диференціали першого та другого порядку від функцій:

а) $z = y^{\cos x}$;

б) $z = \operatorname{arccotg}(y^2 + x^3)$.

Завдання 3. Перевірити, що задані функції задовольняють заданим співвідношенням:

а) $z = \frac{y}{x}, \quad x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$;

б) $z = \ln(x^2 + (y + 1)^2), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

Завдання 4. За допомогою повного диференціала знайти наближене значення функції $z = y^2 e^x$ в точці $M_0(0, 12; 1, 94)$.

Завдання 5. Знайти похідні від функцій, заданих неявно:

а) $x + y \operatorname{arctg} x = xy^2$;

б) $x^2 + y^2 = x(y + z) + e^{xyz}$.

Завдання 6. Знайти похідні складених функцій:

а) $z = x^2 \operatorname{tg} y$, де $x = e^t \sin t$, $y = e^t \cos t$; б) $z = \frac{e^x + e^y}{x^3}$, де $y = x^2 \ln x$;

в) $z = \operatorname{arctg} xy$, де $x = uv^2$, $y = \ln(u^2 + v^2)$.

Завдання 7. Скласти рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні $x^3 + y^3 + z^3 - xy - xz - yz = 0$ в точці $M_0(1; 1; 1)$.

Завдання 8. Дослідити на екстремум функцію двох змінних $z = x^4 + y^4 - 2x^2 - 2y^2 + 4xy$.

Завдання 9. Знайти найменше та найбільше значення функції $z = y^2 - 2x + 3$ у трикутнику, обмеженому прямими $x = 0$, $y = 0$, $x = y + 1$.

Диференціальне числення функцій багатьох змінних

Варіант №17

Завдання 1. Знайти область визначення функцій та зобразити її на площині:

а) $z = \arccos \frac{x^2 + y^2}{25} + e^{\sqrt{xy}};$

б) $z = \ln \operatorname{tg} y + \ln(x + 4).$

Завдання 2. Знайти диференціали першого та другого порядку від функцій:

а) $z = 7^{x^2 - \sqrt{y}};$

б) $z = \operatorname{arctg} x^3 y.$

Завдання 3. Перевірити, що задані функції задовольняють заданим співвідношенням:

а) $z = \frac{1}{y}(\sin^2(ax + y) + \cos^2(ax - y)), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{a^2}{y^2} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left(y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right);$

б) $z = \frac{y}{y^2 - a^2 x^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$

Завдання 4. За допомогою повного диференціала знайти наближене значення функції

$z = \operatorname{arctg} \frac{y}{\sqrt{x^2 - 1}}$ в точці $M_0(2, 01; 0, 99).$

Завдання 5. Знайти похідні від функцій, заданих неявно:

а) $\cos xy = x^2 + y^2 - 1;$

б) $y^2 \ln z - z^2 \ln(x + y) = 5.$

Завдання 6. Знайти похідні складених функцій:

а) $z = -\arccos \frac{x}{y},$ де $x = \sin t, \quad y = \cos t;$ б) $z = \ln(x^2 + y^2 - xy),$ де $y = x^2 + x;$

в) $z = \frac{y}{x^2} + 2x,$ де $x = u\sqrt{v}, \quad y = v \sin u.$

Завдання 7. Скласти рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні $x^2 + y^2 - 3z^2 + xy + 2z = 0$ в точці $M_0(1; 0; 1).$

Завдання 8. Дослідити на екстремум функцію двох змінних $z = 2x^3 + 2y^3 - 36xy + 1.$

Завдання 9. Знайти найменше та найбільше значення функції $z = x^2 + y^2 + 6x - 8y + 7$ в замкненій області $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 2, \quad 0 \leq y \leq 3\}.$

Диференціальне числення функцій багатьох змінних

Варіант №18

Завдання 1. Знайти область визначення функцій та зобразити її на площині:

а) $z = \sqrt{\frac{x^2 - 8x + y^2}{x^2 + 8x + y^2}} + \frac{1}{y - 2};$

б) $z = \sin(x + y^2) + \frac{x}{\sqrt{25 - x^2 - 25y^2}}.$

Завдання 2. Знайти диференціали першого та другого порядку від функцій:

а) $z = e^{2y^2 - x^3};$

б) $z = \arcsin \sqrt{xy}.$

Завдання 3. Перевірити, що задані функції задовольняють заданим співвідношенням:

а) $z = \frac{1}{y}(\operatorname{tg}(x + y) + \ln(y - x)), \quad y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(y^2 \frac{\partial z}{\partial y} \right);$

б) $z = \cos xy + \sqrt{xy} \sin \frac{y}{x}, \quad x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$

Завдання 4. За допомогою повного диференціала знайти наближене значення функції

$z = \sqrt{x^2 + y^2}$ в точці $M_0(4,05; 2,97).$

Завдання 5. Знайти похідні від функцій, заданих неявно:

а) $\ln(x^2 + y^2) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x};$

б) $y^2 x - z^2 e^{-x} - e^z = 4.$

Завдання 6. Знайти похідні складених функцій:

а) $z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x},$ де $x = \ln(3t + 1), \quad y = e^{3t+1};$ б) $z = 2^x \ln(x^2 + y^2),$ де $y = \frac{1}{2}x^2 - x;$

в) $z = y^x + x^y,$ де $x = u^2 + v^2, \quad y = u^2 - v^2.$

Завдання 7. Скласти рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні

$x^2 + y^2 - z^2 + 2yz + y - 2z - 2 = 0$ в точці $M_0(1;1;1).$

Завдання 8. Дослідити на екстремум функцію двох змінних $z = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2.$

Завдання 9. Знайти найменше та найбільше значення функції $z = y^2 - x^2$ у трикутнику,

обмеженому прямими $x = 0, \quad y = 1, \quad x = 2y - 3.$

Диференціальне числення функцій багатьох змінних

Варіант №19

Завдання 1. Знайти область визначення функцій та зобразити її на площині:

а) $z = e^{\frac{4}{x+y}} + \arcsin \frac{x+y}{5};$

б) $z = \ln x - \ln \cos y.$

Завдання 2. Знайти диференціали першого та другого порядку від функцій:

а) $z = \operatorname{tg}(x^3 + y^2);$

б) $z = \arccos(x - y^2).$

Завдання 3. Перевірити, що задані функції задовольняють заданим співвідношенням:

а) $z = 2 \ln \frac{1}{\sqrt{x^2 - y^2}}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2};$

б) $u = \sin^2(x - \alpha y), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}.$

Завдання 4. За допомогою повного диференціала знайти наближене значення функції $z = e^{x^2 y}$ в точці $M_0(-0,95; 1,06).$

Завдання 5. Знайти похідні від функцій, заданих неявно:

а) $x e^y + y^2 \ln(x - y) = 2y;$

б) $x^2(y - 2z) = \sin(y + zx).$

Завдання 6. Знайти похідні складених функцій:

а) $z = \cos(1 - x^2 - y^2), \quad \text{де } x = t^2, \quad y = \frac{\log_2 t}{t};$

б) $z = \ln(x^4 + y^4), \quad \text{де } y = x - x^3;$

в) $z = y \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, \quad \text{де } x = v \operatorname{ctg} u, \quad y = u \operatorname{tg} v.$

Завдання 7. Скласти рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні $(x - y)^2 - x + 2y - z = 0$ в точці $M_0(1; 1; 1).$

Завдання 8. Дослідити на екстремум функцію двох змінних $z = x^2 y^2 - 2x y^2 - 6x^2 y + 12x y.$

Завдання 9. Знайти найменше та найбільше значення функції $z = 2x^2 - 8x + y^2 + 2y + 11$ в замкненій області $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 1\}.$

Диференціальне числення функцій багатьох змінних

Варіант №20

Завдання 1. Знайти область визначення функцій та зобразити її на площині:

а) $z = \frac{\sin(x+2)}{\ln(xy^2)}$;

б) $z = \frac{\sqrt{4y-x^2}}{x^2+y^2-16}$.

Завдання 2. Знайти диференціали першого та другого порядку від функцій:

а) $z = x \cos y + y \sin x$;

б) $z = \arcsin x^2 y$.

Завдання 3. Перевірити, що задані функції задовольняють заданим співвідношенням:

а) $u = \frac{1}{x-y} + \frac{1}{y-z} + \frac{1}{z-x}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} \right) = 0$;

б) $z = \sqrt{x} \sin \frac{y}{x}$, $2x \frac{\partial z}{\partial x} + 2y \frac{\partial z}{\partial y} = z$.

Завдання 4. За допомогою повного диференціала знайти наближене значення функції $z = xy \ln(x+y)$ в точці $M_0(1, 01; 0, 03)$.

Завдання 5. Знайти похідні від функцій, заданих неявно:

а) $\arctg \frac{x}{y} = \ln(x^2 + y^2)$;

б) $y^2 x^2 - z e^{-y} = 2 - e^{-z}$.

Завдання 6. Знайти похідні складених функцій:

а) $z = y^3 \ln x$, де $x = e^{t^3}$, $y = e^{\sqrt{t}}$;

б) $z = \arccos xy^2$, де $y = \sqrt{\cos x}$;

в) $z = y^x + x^4$, де $x = e^{uv}$, $y = \ln(u^2 + v)$.

Завдання 7. Скласти рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні $z - e^{x \cos y} = 0$ в точці $M_0(1; 0; e)$.

Завдання 8. Дослідити на екстремум функцію двох змінних $z = x^3 + y^3 - 15xy$.

Завдання 9. Знайти найменше та найбільше значення функції $z = xy^2$ у трикутнику, обмеженому прямими $x = 0$, $y = 0$, $x = 1 - 2y$.

Диференціальне числення функцій багатьох змінних

Варіант №21

Завдання 1. Знайти область визначення функцій та зобразити її на площині:

а) $z = \frac{1}{x^2 + y^2 - 1} + \arcsin \frac{x^2 + y^2}{9};$

б) $z = e^{x^2+y} + \sqrt{\frac{4x}{x+y}}.$

Завдання 2. Знайти диференціали першого та другого порядку від функцій:

а) $z = e^{y^3 - \sqrt{x}};$

б) $z = \sin \frac{x}{x+y}.$

Завдання 3. Перевірити, що задані функції задовольняють заданим співвідношенням:

а) $z = \arcsin \frac{y}{x+y}, \quad y \frac{\partial z}{\partial y} = -x \frac{\partial z}{\partial x};$

б) $z = y e^{\frac{x}{y}}, \quad x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}.$

Завдання 4. За допомогою повного диференціала знайти наближене значення функції $z = xy^3 - 3x^2y^2 + 2y^4$ в точці $M_0(3,05; 3,99)$.

Завдання 5. Знайти похідні від функцій, заданих неявно:

а) $x + y = \cos(x^2y + y^2);$

б) $y^2 \operatorname{arctg} z^2 = z^2 + x^2.$

Завдання 6. Знайти похідні складених функцій:

а) $z = \cos x^2y$, де $x = t^4 + 4$, $y = \ln^4 t$; б) $z = x \ln(e^x + e^y)$, де $y = \frac{1}{2}x^2 + e^{x^2};$

в) $z = \operatorname{arccctg} \sqrt{\frac{y}{x}},$ де $x = v \operatorname{tg} u$, $y = u \operatorname{ctg} v.$

Завдання 7. Скласти рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні $x^3 - 3xy + y^3 - z = 0$ в точці $M_0(1;1;-1)$.

Завдання 8. Дослідити на екстремум функцію двох змінних $z = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2.$

Завдання 9. Знайти найменше та найбільше значення функції $z = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$ в замкненій області $D = \{(x,y): 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 4\}.$

Диференціальне числення функцій багатьох змінних

Варіант №22

Завдання 1. Знайти область визначення функцій та зобразити її на площині:

а) $z = \arcsin \frac{y}{x} + \frac{1}{x^2 + y^2 - 4}$;

б) $z = \frac{e^{y^2}}{\sqrt{y - 4x}} - \frac{3}{\sqrt{2y + x}}$.

Завдання 2. Знайти диференціали першого та другого порядку від функцій:

а) $z = 4^{\cos xy}$;

б) $z = \cos(x - y^3)$.

Завдання 3. Перевірити, що задані функції задовольняють заданим співвідношенням:

а) $z = \frac{1}{x}(\ln(x - y) + \operatorname{tg}(x + y))$, $\frac{\partial}{\partial x} \left(x^2 \frac{\partial z}{\partial x} \right) = x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$;

б) $z = \frac{y}{x}$, $x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

Завдання 4. За допомогою повного диференціала знайти наближене значення функції

$z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = 0$ в точці $M_0 \left(1; 1; \frac{\pi}{4} \right)$.

Завдання 5. Знайти похідні від функцій, заданих неявно:

а) $y e^x + x e^y = x + y$;

б) $\sin^2 xz + \sin^2 yz + \sin^2 y = 1$.

Завдання 6. Знайти похідні складених функцій:

а) $z = y^x + \sqrt{x}$, де $x = \sqrt{t^2 + 1}$, $y = \sqrt{t^2 - 1}$; б) $z = -\operatorname{arctg} \frac{y}{x}$, де $y = \sin^3 3x$;

в) $z = \frac{x}{y^2}(y + 1)^2$, де $x = u^2 + v^2$, $y = \frac{v^2}{u}$.

Завдання 7. Скласти рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні

$x^2 + y^2 + z^2 + 6z - 4x + 8 = 0$ в точці $M_0(2; 1; -1)$.

Завдання 8. Дослідити на екстремум функцію двох змінних $z = 3x^2 - x^3 + 3y^2 + 4y$.

Завдання 9. Знайти найменше та найбільше значення функції $z = x^2 + y^2$ у трикутнику, обмеженому прямими $x = 1$, $y = 0$, $2x = 6 - 3y$.

Диференціальне числення функцій багатьох змінних

Варіант №23

Завдання 1. Знайти область визначення функцій та зобразити її на площині:

а) $z = \frac{e^{x^2}}{\sqrt{x+y}} + \frac{4}{\sqrt{x-y}};$

б) $z = \frac{2y}{25 - 25x^2 - y^2} + \sin(5y^2 - x).$

Завдання 2. Знайти диференціали першого та другого порядку від функцій:

а) $z = x \cos y + y \sin x + 5;$

б) $z = x^{\operatorname{tg} y}.$

Завдання 3. Перевірити, що задані функції задовольняють заданим співвідношенням:

а) $z = \frac{1}{x}(\cos^2(3y-x) + \sin^2(3y+x)), \quad \frac{9}{x^2} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2};$

б) $z = \sqrt{xy} \sin \frac{x}{y} + \cos xy, \quad y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$

Завдання 4. За допомогою повного диференціала знайти наближене значення функції $z = y^x + y$ в точці $M_0(2,99; 3,98)$.

Завдання 5. Знайти похідні від функцій, заданих неявно:

а) $\operatorname{ctg}(x+y) = \frac{y}{x};$

б) $x^2y - 2xz = z \ln(y+z).$

Завдання 6. Знайти похідні складених функцій:

а) $z = e^{x+y^2}, \quad \text{де } x = \sin^2 t, \quad y = t^3 + 3;$

б) $z = -\arccos \frac{x}{y}, \quad \text{де } y = \sqrt{1-x^2};$

в) $z = \operatorname{tg} xy, \quad \text{де } x = \ln(u^2 - v^2), \quad y = \frac{u^2}{v^2}.$

Завдання 7. Скласти рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні $x^2 + y^2 + z^2 - xy + 3z - 7 = 0$ в точці $M_0(1;2;1)$.

Завдання 8. Дослідити на екстремум функцію двох змінних $z = 3x^2y + y^3 - 18x - 30y$.

Завдання 9. Знайти найменше та найбільше значення функції $z = x^2 + y^2 - 4x + 6y + 22$ в замкненій області $D = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1\}.$

Диференціальне числення функцій багатьох змінних

Варіант №24

Завдання 1. Знайти область визначення функцій та зобразити її на площині:

а) $z = \sqrt{x \sin y} + \frac{1}{x-4}$;

б) $z = \frac{\sqrt{y-x^2}}{\ln(1-x^2-y^2)}$.

Завдання 2. Знайти диференціали першого та другого порядку від функцій:

а) $z = \sin \frac{x-y}{x+y}$;

б) $z = \operatorname{tg} x^4 y^3$.

Завдання 3. Перевірити, що задані функції задовольняють заданим співвідношенням:

а) $z = \ln(y^2 + xy + x^2)$, $x \frac{\partial z}{\partial x} = 2 - y \frac{\partial z}{\partial y}$;

б) $z = \frac{y^2 x^2}{y+x}$, $y \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - 2 \frac{\partial z}{\partial x} = -x \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

Завдання 4. За допомогою повного диференціала знайти наближене значення функції

$z = \frac{x}{\sqrt[3]{y}} + y\sqrt{x}$ в точці $M_0(3,98; -1,06)$.

Завдання 5. Знайти похідні від функцій, заданих неявно:

а) $y e^{x^2} + x e^{y^2} = x$;

б) $\operatorname{arctg} xz = \ln(xz + y^2)$.

Завдання 6. Знайти похідні складених функцій:

а) $z = y^2 \operatorname{ctg} x$, де $x = \frac{1}{\sqrt{t}}$, $y = \sqrt{t} + t^2$;

б) $z = \arccos(x^2 + y^2)$, де $y = e^{x^4}$;

в) $z = 4^{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$, де $x = u \ln v$, $y = \ln(v^2 - u^2)$.

Завдання 7. Скласти рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні $z - x - \ln \frac{y}{z} = 0$

в точці $M_0(1; 1; 1)$.

Завдання 8. Дослідити на екстремум функцію двох змінних $z = 2x^3 + y^2 + 6xy + 5$.

Завдання 9. Знайти найменше та найбільше значення функції $z = xy^2(4 - x - y)$ у трикутнику, обмеженому прямими $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 6$.

Диференціальне числення функцій багатьох змінних

Варіант №25

Завдання 1. Знайти область визначення функцій та зобразити її на площині:

а) $z = \sqrt{(y-4)\cos x}$;

б) $z = \log_2 \frac{xy}{2} + \sqrt{16 - x^2 - y^2}$.

Завдання 2. Знайти диференціали першого та другого порядку від функцій:

а) $z = \cos \frac{x}{y^3}$;

б) $z = \arccos(x+y)$.

Завдання 3. Перевірити, що задані функції задовольняють заданим співвідношенням:

а) $z = \sin^3(y + e^x)$, $\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 0$;

б) $z = \frac{x}{x^2 - 9y^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 9 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$.

Завдання 4. За допомогою повного диференціала знайти наближене значення функції

$z = \sqrt[3]{x^2 + y^2}$ в точці $M_0(1,02; 0,05)$.

Завдання 5. Знайти похідні від функцій, заданих неявно:

а) $x^2 y^2 + 2 = \ln^2(x+y)$;

б) $x + e^y + e^z = xyz$.

Завдання 6. Знайти похідні складених функцій:

а) $z = \frac{y^2}{x^3}$, де $x = \frac{1}{t^4}$, $y = \log_4 t$;

б) $z = 2^{\operatorname{ctg}(x+y^2)}$, де $y = \sqrt{\ln(x^2 + 1)}$;

в) $z = e^{x^3+y^5}$, де $x = \operatorname{tg} \frac{v}{u}$, $y = \cos^2 uv$.

Завдання 7. Скласти рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні

$x^2 - 4y^2 + z^2 = -2xy$ в точці $M_0(-2; 1; 2)$.

Завдання 8. Дослідити на екстремум функцію двох змінних $z = x^4 + y^4 - 2x^2$.

Завдання 9. Знайти найменше та найбільше значення функції $z = 17 - x^2 - y^2 + 4x - 6y$

в замкненій області $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 1\}$.

Диференціальне числення функцій багатьох змінних

Варіант №26

Завдання 1. Знайти область визначення функцій та зобразити її на площині:

а) $z = \frac{1}{9 - x^2 - y^2} + \sqrt{x^2 + y^2 - 4}$;

б) $z = \sqrt{\sin \pi(x^2 + y^2)}$.

Завдання 2. Знайти диференціали першого та другого порядку від функцій:

а) $z = \sin(y - x^3)$;

б) $z = \operatorname{arctg} xy^2$.

Завдання 3. Перевірити, що задані функції задовольняють заданим співвідношенням:

а) $u = e^{xyz}$, $2x \frac{\partial u}{\partial x} + xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} - u$;

б) $z = y \ln x$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

Завдання 4. За допомогою повного диференціала знайти наближене значення функції

$z = 2^{\frac{y}{x}}$ в точці $M_0(1,99; 2,01)$.

Завдання 5. Знайти похідні від функцій, заданих неявно:

а) $y^2 \ln x + x^2 \ln y = xy$;

б) $\cos^2 xz + \cos^2 yz + \cos^2 y = 1$.

Завдання 6. Знайти похідні складених функцій:

а) $z = \sin(x^2 + y^2 - 1)$, де $x = \frac{\ln t}{t}$, $y = t^3$;

б) $z = \ln(x^3 + y^3)$, де $y = x^2 + x$;

в) $z = x \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$, де $x = u \operatorname{tg} v$, $y = v \operatorname{ctg} u$.

Завдання 7. Скласти рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні

$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - 1 = x + y + z$ в точці $M_0(3; 6; 2)$.

Завдання 8. Дослідити на екстремум функцію двох змінних $z = 3(x^2 + y^2) - x^3 + 4y$.

Завдання 9. Знайти найменше та найбільше значення функції $z = y^2 - x^2$ у трикутнику, обмеженому прямими $y = -x$, $y = x$, $x = 1$.

Диференціальне числення функцій багатьох змінних

Варіант №27

Завдання 1. Знайти область визначення функцій та зобразити її на площині:

а) $z = \sqrt{y - 2\sqrt{x}} + 4;$

б) $z = \frac{1}{xy} + \sqrt{(x-2)\cos y}.$

Завдання 2. Знайти диференціали першого та другого порядку від функцій:

а) $z = \cos(x^2 + y^2);$

б) $z = y \log_2 \frac{x}{y}.$

Завдання 3. Перевірити, що задані функції задовольняють заданим співвідношенням:

а) $z = e^{y+\cos^2 x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} - \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0;$

б) $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 = 1.$

Завдання 4. За допомогою повного диференціала знайти наближене значення функції

$z = \sqrt{x^2 + y^2}$ в точці $M_0(6,03; 8,04).$

Завдання 5. Знайти похідні від функцій, заданих неявно:

а) $(y+x)e^{xy} = xy;$

б) $x^2 + z^2 + x \sin(y^2 + z^2) = 1.$

Завдання 6. Знайти похідні складених функцій:

а) $z = \operatorname{arctg} \frac{x}{y},$ де $x = \cos t, \quad y = \sin t;$

б) $z = \ln(e^x - e^y),$ де $y = \cos^2 x;$

в) $z = \frac{x}{y} + \frac{y}{x},$ де $x = v \sin u, \quad y = u \cos v.$

Завдання 7. Скласти рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні $\operatorname{arctg} \frac{x}{y} - z = 0$

в точці $M_0\left(1; 1; \frac{\pi}{4}\right).$

Завдання 8. Дослідити на екстремум функцію двох змінних $z = xy - x^2y - xy^2.$

Завдання 9. Знайти найменше та найбільше значення функції $z = 9 - x^2 - y^2 - 6x + 8y$ в замкненій області $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 4\}.$

Диференціальне числення функцій багатьох змінних

Варіант №28

Завдання 1. Знайти область визначення функцій та зобразити її на площині:

а) $z = 2^{\frac{1}{xy}} + \sqrt{\frac{x^2 + 4y + y^2}{x^2 - 4y + y^2}};$

б) $z = \operatorname{ctg} \pi(x + y).$

Завдання 2. Знайти диференціали першого та другого порядку від функцій:

а) $z = \sin(e^x + e^y);$

б) $z = \operatorname{tg} y^3 x.$

Завдання 3. Перевірити, що задані функції задовольняють заданим співвідношенням:

а) $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}};$

б) $z = \sin^2 x + e^{2y} + (x - y)e^{2y}, \quad (x - y) \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial z}{\partial y}.$

Завдання 4. За допомогою повного диференціала знайти наближене значення функції

$z = \ln(\sqrt{y} - x)$ в точці $M_0(1, 04; 3, 98).$

Завдання 5. Знайти похідні від функцій, заданих неявно:

а) $y^3 \ln x - x^3 \ln y = x + y;$

б) $\cos \frac{x + y}{z} = xy^2 z + 1.$

Завдання 6. Знайти похідні складених функцій:

а) $z = 4^{x^2 + y^2},$ де $x = \operatorname{tg} \sqrt{t}, \quad y = \operatorname{ctg} t;$

б) $z = \arcsin \frac{y}{x^2},$ де $y = \ln^3 x;$

в) $z = \frac{e^{xy}}{\sqrt{x + y}},$ де $x = u \cos v, \quad y = v \sin u.$

Завдання 7. Скласти рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні

$x^2 + y^2 + z^2 - xy - 1 = 0$ в точці $M_0(1; 1; 2).$

Завдання 8. Дослідити на екстремум функцію двох змінних $z = 3x^3 + y^3 - 3y^2 - x - 1.$

Завдання 9. Знайти найменше та найбільше значення функції $z = x^2 + y^2 - xy - x - y$

у трикутнику, обмеженому прямими $x = 0, \quad y = 0, \quad y = 3 - x.$

Диференціальне числення функцій багатьох змінних

Варіант №29

Завдання 1. Знайти область визначення функцій та зобразити її на площині:

а) $z = \sqrt{(x+2)\cos y} - 5;$

б) $z = \sqrt{25 - x^2 - y^2} + \log_4 \frac{xy}{4}.$

Завдання 2. Знайти диференціали першого та другого порядку від функцій:

а) $z = \cos y^x;$

б) $z = \log_5(\sqrt{xy} - 1).$

Завдання 3. Перевірити, що задані функції задовольняють заданим співвідношенням:

а) $z = e^{x-ay} + e^{x+ay}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2};$

б) $z = \ln \frac{y^2 - x^2}{xy}, \quad 2\left(\frac{1}{x^3} - \frac{1}{y^3}\right) = \frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x} - \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2} + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} - \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}.$

Завдання 4. За допомогою повного диференціала знайти наближене значення функції $z = x^y + x$ в точці $M_0(3,98; 2,99)$.

Завдання 5. Знайти похідні від функцій, заданих неявно:

а) $y \ln x - e^{xy} + x^3 = 4;$

б) $\sin^2 x = 1 - \sin^2 xz - \sin^2 yz.$

Завдання 6. Знайти похідні складених функцій:

а) $z = \arccos \frac{x}{y}, \quad \text{де } x = \frac{1}{4}t^4, \quad y = \frac{1}{4}\ln^4 t;$

б) $z = \ln^2(x^2 + y), \quad \text{де } y = \operatorname{ctg} x;$

в) $z = e^{x^2\sqrt{y+2}}, \quad \text{де } x = ve^u, \quad y = u \operatorname{ctg} v.$

Завдання 7. Скласти рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні

$\frac{y}{x} + \cos \frac{x}{y} - z = 0$ в точці $M_0\left(\pi; 2; \frac{\pi}{2}\right).$

Завдання 8. Дослідити на екстремум функцію двох змінних $z = xy(1 - x - y).$

Завдання 9. Знайти найменше та найбільше значення функції

$z = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 4x + 2y + 10$

в

замкненій

області

$D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 2, \quad 0 \leq y \leq 2\}.$

Диференціальне числення функцій багатьох змінних

Варіант №30

Завдання 1. Знайти область визначення функцій та зобразити її на площині:

а) $z = \sqrt{\cos \frac{\pi(x^2 + y^2)}{2}};$

б) $z = \sqrt{(x-3)\sin y} + \frac{3}{y-3}.$

Завдання 2. Знайти диференціали першого та другого порядку від функцій:

а) $z = \sin x^y;$

б) $z = \operatorname{tg} \frac{x}{x-y}.$

Завдання 3. Перевірити, що задані функції задовольняють заданим співвідношенням:

а) $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \frac{\partial^2(\ln u)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(\ln u)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2(\ln u)}{\partial z^2} = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2};$

б) $z = y^3 - 3axy^3, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$

Завдання 4. За допомогою повного диференціала знайти наближене значення функції

$z = \sin^3 \frac{\pi x}{2} + \cos^2 \pi y$ в точці $M_0(-0,98; 1,03).$

Завдання 5. Знайти похідні від функцій, заданих неявно:

а) $x^2 + y^2 + 1 = \sin \frac{x}{y};$

б) $xz^2 + y^2 \operatorname{arctg} z = x^2 + 1.$

Завдання 6. Знайти похідні складених функцій:

а) $z = (1 + y^2) \ln x,$ де $x = t^3,$ $y = e^{t^3};$

б) $z = e^{xy} \sqrt{1-x^2},$ де $y = x \sin^3 x;$

в) $z = x \arcsin(x^2 + y),$ де $x = u^3 + v^2,$ $y = u^3 v.$

Завдання 7. Скласти рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні

$x^3 + y^3 + z^3 - xy - xz - yz = 0$ в точці $M_0(1; 1; 1).$

Завдання 8. Дослідити на екстремум функцію двох змінних $z = 8x^3 + 4y^2 + 12xy - 7.$

Завдання 9. Знайти найменше та найбільше значення функції $z = x^2 y(4 - x - y)$ у трикутнику, обмеженому прямими $x = 0,$ $y = 0,$ $y = 6 - x.$

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Фихтенгольц Г. М. Основы математического анализа: В 2 т. – М.: Наука, 1985. – Т. 1 – 440 с.; Т. 2 – 463 с.
2. Данко П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах [Текст]: учебное пособие для вузов в 2-х ч. Ч. II / Павел Ефимович Данко, Александр Георгиевич Попов, Татьяна Яковлевна Кожевникова. – Изд. 5-е, исп. – М.: Высш. шк., 1996. – 416 с.: ил.; 21 см. – Библиогр.: с. 416 . – 10000 экз. – ISBN 5–06–003071–7 (ч. II). – ISBN 5–06–003072.
3. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисление для вузов [Текст]: учебник для вузов . Том I - II. – М. Наука, 1972, 1978.
4. Письменный Д. Т. Конспект лекций по высшей математике [Текст]: Тридцать пять лекций. 2 часть / Дмитрий Письменный; [вступ. ст. автора] – М. : Рольф, 2002. – 256 с.: ил; 21 см. – 10000 экз. – ISBN 5–7836–0312–0.
5. Каплан И. А. Практические занятия по высшей математике. [Текст]: учебник для вузов / Ч. 1-5. – Харьков, Издательство Харьковского университета, 1967–1972.
6. Справочное пособие по математическому анализу. Ч. II. Ряды. Функции нескольких переменных, кратные и криволинейные интегралы. Ляшко И. И., Боярчук А. К., Гай Я. Г., Головач Г. П. – Киев, Вища школа, 1979.

Диференціальне числення функцій багатьох змінних

ЗМІСТ

ВСТУП	3
Варіант №1	4
Варіант №2	5
Варіант №3	6
Варіант №4	7
Варіант №5	8
Варіант №6	9
Варіант №7	10
Варіант №8	11
Варіант №9	12
Варіант №10	13
Варіант №11	14
Варіант №12	15
Варіант №13	16
Варіант №14	17
Варіант №15	18
Варіант №16	19
Варіант №17	20
Варіант №18	21
Варіант №19	22
Варіант №20	23
Варіант №21	24
Варіант №22	25
Варіант №23	26
Варіант №24	27
Варіант №25	28
Варіант №26	29
Варіант №27	30
Варіант №28	31
Варіант №29	32
Варіант №30	33
РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА	34