

УДК 629.735

Я.Ф. Каюк

**ЗАДАЧА ПРО МОДЕЛЮВАННЯ РАКЕТИ
БАЛКОЮ ІЗ ЗМІННИМИ ЗВЕДЕНИМИ ХА-
РАКТЕРИСТИКАМИ****Вступ**

Ракети — складні поліагрегатні механічні системи, які здійснюють польоти у неоднорідному повітряному середовищі. Дослідження міцності, коливальних процесів, керованості і стійкості цих систем потребує застосування різних розділів сучасної механіки, термодинаміки і програмних обчислювальних комплексів. Зрозуміло, що серед цих проблем існують такі, що можуть бути розв'язані на основі використання більш простих модельних уявлень про ракету як деяку механічну систему. Тут все залежить від постановки і змісту досліджуваної проблеми.

Так, наприклад, коли розглядаються задачі навігаційного типу, то ракету моделюють абсолютно твердим тілом заданої форми і змінної маси, що здійснює рух під дією реактивної тяги, аеродинамічних сил, сил керування і деяких сил інерційної природи.

Коли ж ставиться задача дослідити міцність ракети під дією статичних і динамічних навантажень, то виділяють найнебезпечніший вузол, конструктивний елемент; його в уяві окреслюють (“вирізають”) і розраховують вже на основі методів механіки твердого деформованого тіла.

Часто виникає і така проблема: в неоднорідних шарах атмосфери, при наявності певних режимів руху повітряних потоків завжди мають місце згинальні переміщення ракети. Вони можуть “переростати” в згинальні коливання різних типів під дією відповідних зовнішніх сил. Ці коливальні режими є небажаними, оскільки вони змінюють конфігурацію ракети, а це в остаточному підсумку змінює кути атаки по довжині ракети, величину аеродинамічних сил, впливає на поздовжню і поперечну стійкість тощо. При розв'язуванні цих задач ракету моделюють деформованою балкою з певними зведеними характеристиками [1, 2].

У даній статті такій важливій проблемі також приділяється значна увага на основі вико-

ристання нових модельних підходів, що дають можливість отримувати не тільки лінійні, а й різні варіанти *нелінійних* рівнянь руху ракети-балки. На основі встановлених співвідношень можна формулювати різні варіанти рівнянь для дослідження стійкості, керованості розглядуваної системи тощо.

Може виникнути спротив щодо заміни складної механічної системи більш простою — пружно-деформованою балкою.

Обґрунтування згаданого підходу можна навести різні, серед яких назовемо такі. В першу чергу все залежить від того, яка ставиться мета досліджень. Якщо нам потрібно в остаточному підсумку отримати характеристики інтегральної природи (максимальні прогини, перші частоти згинальних коливань, параметри стійкості тощо), то такий вибір моделювання цілком виправданий, і якраз цим питанням тут приділяється основна увага.

Заміна досить складної механічної системи більш простішою широко використовується в механіці. Цікавим прикладом є дослідження О.М. Крилова [3], в яких задача про вібрацію судна зводиться до задачі про коливальні процеси в балках з вільними кінцями і на пружній основі.

Задачу про згинальні коливання в колінних валах (складних механічних просторових системах) було в свій час замінено задачею про коливальні процеси в циліндричних стержнях [4]. С.П. Тимошенко вказав метод [5], на основі якого задачу про стійкість стиснутих *ферменних* відкритих поясів жорсткості можна зводити до задачі про стійкість балки під дією певного поздовжнього навантаження. Є й інші приклади.

Проблеми дослідження задач динаміки ракет на основі балкових моделей присвячено ряд наукових досліджень [1, 2]. Як тут, так і в інших публікаціях пропонується, на наш погляд, спрощений підхід при моделюванні ракет відповідними балками з певними зведеними механічними характеристиками.

Постановка задачі

У даній статті пропонується новий підхід при моделюванні видовжених ракет пружними балками із зведеними механічними характеристиками, який сприятиме побудові нових математичних моделей деформування ракет.

Формулювання основних припущень

Для того щоб значно наблизити за рядом показників балкову модель ракети до реальної системи, потрібно сформулювати деякі припущення.

1. Вважаємо, що розглядається ракета як *достатньо видовжена* механічна система з певним розподілом по поверхні системи стабілізаторів, рулів типу пластин певної форми. Моделюємо цю ракету балкою з таким самим зовнішнім профілем і розмірами, але при *відсутності* стабілізаторів і рулів. Їх дію замінюємо певними силами і масами, що *локально* зосереджуються на поверхні по певних лініях і малих областях. Це завжди можна зробити, використовуючи апарат узагальнених сингулярних функцій [6].

2. Припускаємо, що внутрішнє начиння ракети розміщено (скомпоновано) так, що матиме місце матеріальна і геометрична симетрія відносно двох взаємно перпендикулярних площин, лінія перетину яких проходить по геометричній осі балки.

3. Балка береться змінного поперечного перерізу $S(x)$; графік функцій $S(x)$ завжди можна встановити, використовуючи креслення самої ракети або її моделі; величина x — координата по осі балки.

4. Задаємо наперед закон розподілу мас в елементах товщини dx , які вважаються в ракеті нормальними до осі перерізами x , $x + dx$. Закон їх розподілу завжди можна також встановити, проводячи відповідні обчислення і використовуючи технічне креслення. Масу в елементі dx позначаємо m_6 і розраховуємо на одиницю довжини осі ракети.

5. Припускаємо, що величини типу m_6 в недеформованому і деформованих станах ракети є функціями незалежних змінних x, t , тобто

$$m_6 = m_6(x, t).$$

Отже, на основі наведених вище припущень ракета моделюється балкою з розподіленою неперервно по довжині змінною в часі масою $m_6(x, t)$, змінним поперечним перерізом $S(x)$ і жорсткостями на розтяг, згин і кручення, при цьому один із кінців балки вільний, а до другого прикладена сила тяги T .

Під дією тяги, аеродинамічних сил, сил керування та інших зусиль балка здійснює рух

у просторі, заповненому повітрям із певними фізичними властивостями.

Нарешті, в першому наближенні слід припускати, що розглядувані вище елементи товщини як в недеформованому (конфігурація C_0), так і в деформованому стані (конфігурація C_t) перпендикулярні до осі балки.

Вибір систем координат і деякі необхідні кінематичні залежності

За інерціальну систему координат (СК) вибираємо *стартову* СК $O_{\text{ст}}x_{\text{ст}}y_{\text{ст}}z_{\text{ст}}$, вісь $O_{\text{ст}}y_{\text{ст}}$ направляємо вгору по осі ракети, вісь $O_{\text{ст}}x_{\text{ст}}$ розміщуємо у площині стрільби, $O_{\text{ст}}z_{\text{ст}}$ направляємо в той бік, де інерціальна СК була б правою, а орти цієї СК позначаємо $i_{\text{ст}}, j_{\text{ст}}, k_{\text{ст}}$.

Вважаємо, що до певного моменту часу польоту $t = t_0$ в ракеті нема пружних переміщень (конфігурація C_0 , рис. 1).

У даному стані вводимо означення зв'язаної і локальної систем координат. Початок зв'язаної СК вибираємо в центрі мас ракети (конфігурація C , рис. 1); вісь Cx^3 — направляємо по осі ракети; Cy^3 — у площині симетрії — по напрямку лінії дії підйомної сили; Cz^3 — направляємо в той бік, де СК $Cx^3y^3z^3$ була б правою. Орти зв'язаної СК позначаємо i^3, j^3, k^3 (див. рис. 1).

У момент старту видно, що $Cy_{\text{ст}} = Cx^3$, $Cx_{\text{ст}} = Cy^3$, $Cz_{\text{ст}} = Cz^3$.

У конфігурації C_0 в точці M — геометричному центрі елемента dx — вводимо локальну СК з ортами i, j, k (див. рис. 1); $i^3 = i, j^3 = j, k^3 = k$ в C_0 .

Нехай, починаючи з моменту часу $t \geq t_0$, у балці (ракеті) виникають пружні переміщення (статичний згин, згинальні коливання тощо); система переходить у стан C_t (див. рис. 1).

Всім величинам, які належать до C_t , приписуємо зірочку “*”.

Вважаємо, що в C_t у балці виникають *мали* деформації і квадрати кутів повороту елементів типу dx (порівняно з одиницею).

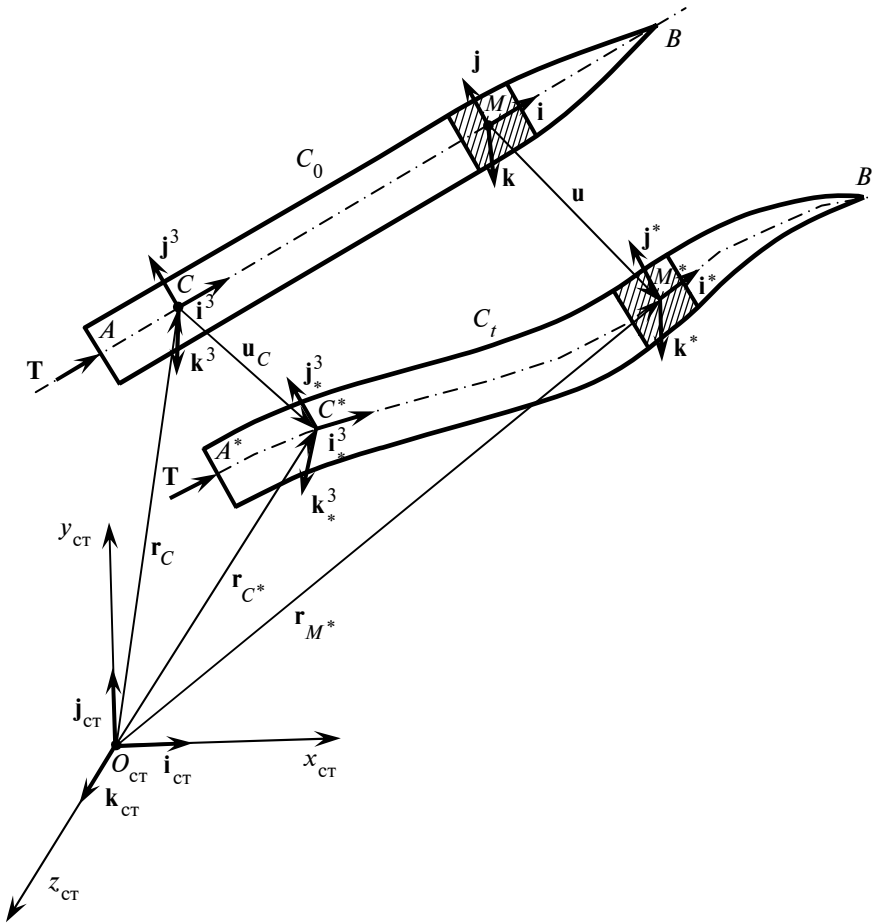


Рис. 1. Досліджувана механічна система

На рис. 1 введено такі позначення: $\mathbf{r}_C = \mathbf{r}_C(t)$ – закон руху центра мас ракети як абсолютно твердого тіла; $\mathbf{u}_M = \mathbf{u}_M(x, t)$ – вектор переміщення довільної точки M осі балки; $\mathbf{u}_C = \mathbf{u}_M|_{x=0}$ – вектор переміщення точки C в результаті накладання переміщень $\mathbf{u}_a = \mathbf{u}_a(t)$ балки як абсолютно твердого тіла і переміщень $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, t)$ в результаті деформування. Таким чином, маємо закон руху довільної точки M в результаті накладання вказаних переміщень:

$$\mathbf{u}_M(x, t) = \mathbf{u}_a(t) + \mathbf{u}(x, t), \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_M^* &= \mathbf{r}_M^*(x, t) = \mathbf{r}_C(t) + \boldsymbol{\rho} + \mathbf{u}_M = \\ &= \mathbf{r}_C(t) + x\mathbf{i} + \mathbf{u}_a(t) + \mathbf{u}(x, t) \end{aligned} \quad (2)$$

аналогічно отримаємо закон руху точки C :

$$\mathbf{r}_C^* = \mathbf{r}_M^*(x, t)|_{x=0}.$$

Припускаємо, що системи відліку з ортами $(\mathbf{i}^3, \mathbf{j}^3, \mathbf{k}^3)$, $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ можуть в уяві переноситись у момент часу $t > t_0$ в точки C^* і M^* паралельно самі собі, без зміни орієнтації. Тоді при $t > t_0$ вектор переміщення точки M будемо записувати так:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= u(x, t)\mathbf{i} + w(x, t)\mathbf{j} + \\ &+ v(x, t)\mathbf{k}, \end{aligned} \quad (3)$$

де $u(x, t)$ – поздовжнє переміщення осі балки; $w(x, t)$, $v(x, t)$ – прогини її у двох взаємно перпендикулярних площинах симетрії, які проходять через пари ортів $(\mathbf{i}, \mathbf{j})$, $(\mathbf{i}, \mathbf{k})$ (див. рис. 1).

Елемент dx у процесі руху здійснює не тільки поступальні, а й кутові переміщення. Кутову швидкість обертального руху позначаємо Ω :

$$\Omega = \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega}_d, \quad (4)$$

де $\boldsymbol{\omega}$ – кутова швидкість обертання елемента dx як абсолютно твердого тіла; $\boldsymbol{\omega}_d$ – кутова швидкість повороту елемента внаслідок деформування (згину та кручення) балки.

Для подальших досліджень необхідно встановити в явному вигляді формули для обчислення векторів швидкості $\mathbf{v}_M$, прискорення $\frac{\partial \mathbf{v}_M}{\partial t}$ і $\boldsymbol{\omega}_d$ через компоненти вектора $\mathbf{u}$ та його похідних по координаті x і часу t .

Насамперед, використовуємо формули (1), (2) і (4). Тоді матимемо

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_M &= \mathbf{v}_C + \Omega \times \boldsymbol{\rho} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \\ &= \mathbf{v}_C + (\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega}_d) \times \boldsymbol{\rho} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}_M}{\partial t} = \frac{d\mathbf{v}_M}{dt} + \Omega \times \boldsymbol{\rho} + \Omega \times (\Omega \times \boldsymbol{\rho}) + \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} =$$

$$= \frac{d\mathbf{v}_C}{dt} + (\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega}_d) \times \boldsymbol{\rho} + (\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega}_d) \times [(\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega}_d) \times \boldsymbol{\rho}] + \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}. \quad (6)$$

Встановимо формули для обчислення компонент вектора $\boldsymbol{\omega}_d$. В уяві перенесемо в розглядуваний момент часу t базис $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ паралельно самому собі в точку M^* . Тоді базис $(\mathbf{i}^*, \mathbf{j}^*, \mathbf{k}^*)$ займе певну орієнтацію щодо базису $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$. Цю орієнтацію можна трактувати як результат повороту навколо точки M^* базису $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ з кутовою швидкістю $\boldsymbol{\omega}_d$.

Покладаємо

$$\boldsymbol{\omega}_d = \omega_{1d} \mathbf{i} + \omega_{2d} \mathbf{j} + \omega_{3d} \mathbf{k}. \quad (7)$$

Мають місце відомі формули Пуассона

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{i}^*}{\partial t} &= \boldsymbol{\omega}_d \times \mathbf{i}^*, \quad \frac{\partial \mathbf{j}^*}{\partial t} = \boldsymbol{\omega}_d \times \mathbf{j}^*, \\ \frac{\partial \mathbf{k}^*}{\partial t} &= \boldsymbol{\omega}_d \times \mathbf{k}^*. \end{aligned} \quad (8)$$

З іншого боку, вектор $\boldsymbol{\omega}_d$ можна розкласти по компонентах у базисі $(\mathbf{i}^*, \mathbf{j}^*, \mathbf{k}^*)$, який для малих деформацій і квадратів кутів повороту вважається ортонормованим. Маємо

$$\boldsymbol{\omega}_d = \omega_{1d}^* \mathbf{i}^* + \omega_{2d}^* \mathbf{j}^* + \omega_{3d}^* \mathbf{k}^*. \quad (9)$$

Підставимо (9) у формули (8). Тоді маємо

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{i}^*}{\partial t} &= \omega_{3d}^* \mathbf{j}^* - \omega_{2d}^* \mathbf{k}^*, \\ \frac{\partial \mathbf{j}^*}{\partial t} &= \omega_{1d}^* \mathbf{k}^* - \omega_{3d}^* \mathbf{i}^*, \\ \frac{\partial \mathbf{k}^*}{\partial t} &= \omega_{2d}^* \mathbf{i}^* - \omega_{1d}^* \mathbf{j}^*. \end{aligned} \quad (10)$$

З цих формул легко встановити такі співвідношення:

$$\begin{aligned} 2\omega_{1d}^* &= \mathbf{k}^* \cdot \frac{\partial \mathbf{j}^*}{\partial t} - \mathbf{j}^* \cdot \frac{\partial \mathbf{k}^*}{\partial t}, \\ 2\omega_{2d}^* &= \mathbf{i}^* \cdot \frac{\partial \mathbf{k}^*}{\partial t} - \mathbf{k}^* \cdot \frac{\partial \mathbf{i}^*}{\partial t}, \\ 2\omega_{3d}^* &= \mathbf{j}^* \cdot \frac{\partial \mathbf{i}^*}{\partial t} - \mathbf{i}^* \cdot \frac{\partial \mathbf{j}^*}{\partial t}. \end{aligned} \quad (11)$$

На основі цих формул можна обчислити величини ω_{sd} ($s = 1, 3$), якщо скласти *таблицю напрямних косинусів* між базисами $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ і $(\mathbf{i}^*, \mathbf{j}^*, \mathbf{k}^*)$.

Насамперед, використовуючи формули (2) і (3), одержуємо

$$\begin{aligned} \mathbf{i}^* &\cong \frac{d\mathbf{r}_M^*}{dx} = \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) \mathbf{i} + \frac{\partial w}{\partial x} \mathbf{j} + \frac{\partial v}{\partial x} \mathbf{k} = \\ &= (1 + \alpha_{11}) \mathbf{i} + \alpha_{12} \mathbf{j} + \alpha_{13} \mathbf{k}, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\text{де } \alpha_{11} = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \alpha_{12} = \frac{\partial w}{\partial x}; \quad \alpha_{13} = \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Згідно із вказаними припущеннями маємо

$$|\mathbf{i}^*| \cong 1.$$

Покладаємо

$$\begin{aligned} \mathbf{j}^* &= \alpha_{21} \mathbf{i} + (1 + \alpha_{22}) \mathbf{j} + \alpha_{23} \mathbf{k}, \\ \mathbf{k}^* &= \alpha_{31} \mathbf{i} + \alpha_{32} \mathbf{j} + (1 + \alpha_{33}) \mathbf{k}, \end{aligned} \quad (13)$$

де $\alpha_{rs} = \alpha_{rs}(x, t)$ — функції, які потрібно визначити.

Вказані функції знаходимо з таких наближених співвідношень:

$$\begin{aligned} \mathbf{i}^* \cdot \mathbf{j}^* &\cong 0, \quad \mathbf{i}^* \cdot \mathbf{k}^* \cong 0, \quad \mathbf{j}^* \cdot \mathbf{k}^* \cong 0, \\ \mathbf{j}^* \cdot \mathbf{j}^* &\cong 1, \quad \mathbf{k}^* \cdot \mathbf{k}^* \cong 1. \end{aligned} \quad (14)$$

Звідси отримуємо такі системи *нелінійних* алгебричних рівнянь:

$$\begin{aligned} (1 + \alpha_{11})\alpha_{21} + (1 + \alpha_{22})\alpha_{12} + \alpha_{13}\alpha_{23} &\cong 0, \\ (1 + \alpha_{11})\alpha_{31} + \alpha_{12}\alpha_{32} + (1 + \alpha_{33})\alpha_{13} &\cong 0, \\ \alpha_{31}\alpha_{21} + (1 + \alpha_{22})\alpha_{32} + \alpha_{23}(1 + \alpha_{33}) &\cong 0, \\ \alpha_{21}^2 + (1 + \alpha_{22})^2 + \alpha_{23}^2 &\cong 1, \\ \alpha_{31}^2 + \alpha_{32}^2 + (1 + \alpha_{33})^2 &\cong 1. \end{aligned} \quad (15)$$

Знаходимо лише *частинні* розв'язки цих рівнянь, покладаючи в основу фізичні міркування і прийняту вище ступінь точності обчислень.

З перших трьох рівнянь легко бачити, що

$$\alpha_{21} = -\alpha_{12} = -\frac{\partial w}{\partial x}; \quad \alpha_{31} = -\alpha_{13} = -\frac{\partial v}{\partial x}; \quad \alpha_{32} = -\alpha_{23}.$$

Значить, можна *попередньо* скласти таку таблицю напрямних косинусів:

	i	j	k
i*	$1 + \frac{\partial u}{\partial x}$	$\frac{\partial w}{\partial x}$	$\frac{\partial v}{\partial x}$
j*	$-\frac{\partial w}{\partial x}$	$1 + \alpha_{22}$	α_{23}
k*	$-\frac{\partial v}{\partial x}$	$-\alpha_{23}$	$1 + \alpha_{33}$

З двох останніх рівнянь системи (15) має-
мо

$$1 + \alpha_{22} = \sqrt{1 - \alpha_{21}^2 - \alpha_{23}^2},$$

$$1 + \alpha_{33} = \sqrt{1 - \alpha_{31}^2 - \alpha_{32}^2},$$

звідки випливає, що $\alpha_{22} \cong 0$, $\alpha_{33} \cong 0$.

Для встановлення геометричного змісту кута α_{23} повернемося до рис. 2, який орієнтовно зображує взаємне розміщення ортів у точці M^* .

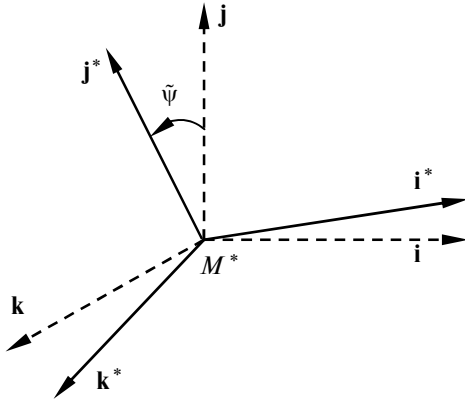


Рис. 2. Взаємна орієнтація ортів

Тоді під величиною $\tilde{\psi}$ будемо розуміти кут між проекцією вектора $\mathbf{j}^*$ на площину, що проходить через орти $\mathbf{k}, \mathbf{j}$, і вектором $\mathbf{j}$. З рис. 2 видно, що $\alpha_{23} = \cos(\mathbf{j}^*, \mathbf{k}) \cong \cos\left(\frac{\pi}{2} - \tilde{\psi}\right) = \sin \tilde{\psi} \cong \tilde{\psi}$.

Значить, α_{23} описує поворот (кручення) елемента балки dx навколо власної осі.

Остаточно встановлюємо шукану таблицю напрямних косинусів між ортами $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ і $(\mathbf{i}^*, \mathbf{j}^*, \mathbf{k}^*)$:

	i	j	k
i*	$1 + \frac{\partial u}{\partial x}$	$\frac{\partial w}{\partial x}$	$\frac{\partial v}{\partial x}$
j*	$-\frac{\partial w}{\partial x}$	1	$\tilde{\psi}$
k*	$-\frac{\partial v}{\partial x}$	$-\tilde{\psi}$	1

Оскільки

$$\begin{aligned} \omega_{1d} \mathbf{i} + \omega_{2d} \mathbf{j} + \omega_{3d} \mathbf{k} &= \\ &= \omega_{1d}^* \mathbf{i}^* + \omega_{2d}^* \mathbf{j}^* + \omega_{3d}^* \mathbf{k}^*, \end{aligned}$$

то звідси випливає, що

$$\begin{aligned} \omega_{1d} &= \omega_{1d}^* \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) - \omega_{2d}^* \frac{\partial w}{\partial x} - \omega_{3d}^* \frac{\partial v}{\partial x} \cong \\ &\cong \omega_{1d}^* - \omega_{2d}^* \frac{\partial w}{\partial x} - \omega_{3d}^* \frac{\partial v}{\partial x}, \\ \omega_{2d} &\cong \omega_{1d}^* \frac{\partial w}{\partial x} + \omega_{2d}^* - \omega_{3d}^* \tilde{\psi}, \\ \omega_{3d} &\cong \omega_{1d}^* \frac{\partial v}{\partial x} + \omega_{2d}^* \tilde{\psi} + \omega_{3d}^*. \end{aligned} \quad (11)$$

Використовуючи остаточну таблицю напрямних косинусів і формули (11), обчислюємо компоненти $\omega_{1d}^*, \omega_{2d}^*, \omega_{3d}^*$.

Отримуємо

$$\omega_{1d}^* \cong \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial t}, \quad \omega_{2d}^* \cong -\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t}, \quad \omega_{3d}^* \cong -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t}. \quad (17)$$

Легко встановити, що

$$\omega_{1d} \cong \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial t}, \quad \omega_{2d} \cong -\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t}, \quad \omega_{3d} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t}. \quad (18)$$

Тоді

$$\omega_d = \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial t} \mathbf{i} - \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} \mathbf{j} - \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \mathbf{k}. \quad (19)$$

Теорема про зміну кількості руху елемента балки змінної маси і рівняння його поступального руху

У випадку, коли маса розглядуваного елемента балки dx є стала величина, його кількість руху обчислюється за відомою формулою

$$d_s \mathbf{Q}_0 = m_6^0 d s \mathbf{v}_{M^*} \quad (m_6^0 = \text{const}), \quad (20)$$

де $\mathbf{v}_{M^*} = \frac{\partial \mathbf{r}_M^*}{\partial t}$ — абсолютна швидкість точки

M^* ; $\frac{\partial}{\partial t}$ — абсолютна похідна (відносно інерціальної СК); d_s — тут і надалі диференціал береться по змінній s — дуговій координаті осі балки.

Оскільки в пропонованій моделі маса елемента вважається змінною в часі і по координаті s великою, то кількість її руху [7, 8] становитиме

$$d_s \mathbf{Q} = m_6(s^*, t) ds^* \mathbf{v}_{Me} \cong m_6(s, t) ds \mathbf{v}_{Me}, \quad (21)$$

де $\mathbf{v}_{Me} = \mathbf{v}_M - \mathbf{v}_{Mr}$; $\mathbf{v}_{Mr}$ — відносна швидкість (відносно стінок ракети) центра мас елемента dx .

Для випадку сталої маси теорема про зміну кількості руху елемента має вигляд

$$\frac{\partial}{\partial t} d_s \mathbf{Q}_0 = \mathbf{f}^e ds, \quad (22)$$

де $\mathbf{f}^e$ — головний вектор зовнішніх сил, прикладених до елемента і розрахованих на одиницю балки.

Зрозуміло, що серед сил, які входять в $\mathbf{f}^e$, мають бути активні (рушійні) сили, що спричиняють рух досліджуваної системи.

У випадку змінної маси елемента теорема (22) значно видозмінюється. Для того щоб це обґрунтувати, використаємо концепцію *еквівалентного тіла* [7]: вважаємо, що в момент часу t елементу балки *змінної маси* ставиться у відповідність елемент *сталої маси* з таким розрахунком, щоб маси обох елементів були однакові і швидкості руху їх центрів мас були б також однаковими.

Тоді в момент часу t маємо

$$d_s \mathbf{Q}_0(s, t) = d_s \mathbf{Q}(s, t), \quad (23)$$

а співвідношення (22) записуємо в такому вигляді:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{d_s \mathbf{Q}_0(s, t + \Delta t) - d_s \mathbf{Q}_0(s, t)}{\Delta t} = \mathbf{f}^e ds. \quad (24)$$

Нехай розглядається момент часу $t + \Delta t$, якому відповідає кількість руху елемента змінної маси $d_s \mathbf{Q}(s, t + \Delta t)$.

Для того щоб виконувалась рівність (23), необхідно її подати так:

$$d_s \mathbf{Q}_0(s, t + \Delta t) =$$

$$= d_s \mathbf{Q}(s, t + \Delta t) + d_s \mathbf{Q}_1(s, t + \Delta t), \quad (25)$$

де $\mathbf{Q}_1(\dots)$ — кількість руху маси, що відділилась від елемента за проміжок часу Δt .

Вказану масу позначаємо Δm_1^M , а абсолютну швидкість її центра мас — $\mathbf{u}_{OM}(t + \Delta t)$.

Зауважимо, що коли постулюється рівність типу (25), то це означає, що елемент і відділена маса середовища являє собою єдину систему при малих Δt . Тоді

$$d_s \mathbf{Q}_1(s, t + \Delta t) = \Delta m_1^M ds \mathbf{u}_{OM}(t + \Delta t). \quad (26)$$

Маса елемента балки в момент часу $t + \Delta t$ обчислюється за формулою

$$m_6(s, t + \Delta t) = m_6(s, t) - \Delta m_1^M. \quad (27)$$

Отже, маємо

$$\begin{aligned} d_s \mathbf{Q}_0(s, t + \Delta t) - d_s \mathbf{Q}_0(s, t) &= d_s \mathbf{Q}(s, t + \Delta t) + \\ &+ d_s \mathbf{Q}_1(s, t + \Delta t) - d_s \mathbf{Q}(s, t) = d_s \mathbf{Q}(s, t + \Delta t) - \\ &- d_s \mathbf{Q}(s, t) + d_s \mathbf{Q}_1(s, t + \Delta t). \end{aligned}$$

З врахуванням наведених вище формул вираз (24) перетворюємо до такого вигляду:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{d_s \mathbf{Q}(s, t + \Delta t) - d_s \mathbf{Q}(s, t) + d_s \mathbf{Q}_1(s, t + \Delta t)}{\Delta t} = \\ = \mathbf{f}^e ds. \end{aligned} \quad (28)$$

Звідси маємо

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{d_s \mathbf{Q}(s, t + \Delta t) - d_s \mathbf{Q}(s, t)}{\Delta t} - \right. \\ \left. - \frac{m_6(s, t + \Delta t) - m_6(s, t)}{\Delta t} ds \mathbf{u}_{OM}(t + \Delta t) \right] = \mathbf{f}^e ds. \end{aligned}$$

Таким чином, отримуємо

$$\frac{\partial}{\partial t} d_s \mathbf{Q}(s, t) = \mathbf{f}^e ds - \frac{\partial m_6(s, t)}{\partial t} \mathbf{u}_{OM}(t) ds. \quad (29)$$

Беручи до уваги формулу (27), записуємо

$$\frac{[m_6(s, t) \mathbf{v}_{Me}]}{\partial t} = \mathbf{f}^e - \frac{\partial m_6}{\partial t} \mathbf{u}_{OM}(t). \quad (30)$$

Це і є теорема про зміну кількості руху елемента балки як тіла змінної маси.

Якщо підставити в (30) формулу (12), то після очевидних перетворень отримаємо

$$m_6(s, t) \frac{\partial \mathbf{v}_M}{\partial t} = \mathbf{f}^e + \mathbf{q}_p + \mathbf{q}_{\text{вар}}, \quad (31)$$

де $\mathbf{q}_p = (\mathbf{u}_{OM} - \mathbf{v}_{Me}) \frac{\partial m_6}{\partial t}$ – вектор реактивної сили в розумінні Мещерського і розрахованої на одиницю довжини балки; $\mathbf{q}_{\text{вар}}$ – вектор інтенсивності варіаційних сил:

$$\mathbf{q}_{\text{вар}} = \frac{\partial}{\partial t} (m_6 \mathbf{v}_{Mr}). \quad (32)$$

Варіаційні сили зумовлюються переміщенням центра мас у результаті протікання палива, газів всередині виділеного елемента балки. Розподілимо величину сили тяги T по довжині балки, покладаючи $|\mathbf{q}_p| = \frac{T}{l}$, де l – довжина ракети-балки. Тоді покладаємо

$$\mathbf{q}_p = \frac{T}{l} \mathbf{i}^*. \quad (33)$$

З формули (31) випливає цікавий висновок: якщо прийняти викладену тут методологію, то рівняння руху центра мас для елемента балки змінної маси буде *по формі* таким, як для елемента сталої маси, але до заданих зовнішніх сил слід додавати ще нові сили: $\mathbf{q}_p$ і $\mathbf{q}_{\text{вар}}$.

Значить, у випадку змінної маси елемента *активна* (рушійна) сила не повинна бути складовою вектора $\mathbf{f}^e$; ця сила з'являється окремо як реактивна сила, що задається вектором $\mathbf{q}_p$.

Для розв'язування відповідних задач необхідно конкретизувати зміст вектора $\mathbf{f}^e$, правила обчислення його складових і деяких інших доданків рівняння (31).

Позначаємо $\mathbf{F}(x, t)$ головний вектор сил пружності в довільному перерізі балки. Його можна подати в такому вигляді:

$$\mathbf{F} = N^* \mathbf{i}^* + Q_2^* \mathbf{j}^* + Q_3^* \mathbf{k}^* = N \mathbf{i} + Q_2 \mathbf{j} + Q_3 \mathbf{k}. \quad (34)$$

У цій формулі величини із зірочками – реальні механічні величини: N^* – поздовжнє зусилля; Q_2^*, Q_3^* – перерізуючі зусилля, що діють у розглядуваному поперечному перерізі балки в напрямку вказаних ортів; величини без зірочки можна назвати псевдозусиллями, але у випадку малих деформацій і кутів повороту $N \cong N^*$, $Q_2 \cong Q_2^*$, $Q_3 \cong Q_3^*$.

Відомо, що

$$N^* = E(x) S(x) \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (35)$$

де $E(x)$ – усереднене значення модуля Юнга по перерізу з площею $S(x)$.

Використовуючи *остаточну* таблицю на-прямних косинусів (див. стор. 5), легко встановлюємо зв'язок між силовими компонентами у формулі (34).

Нехай $m_p(x, t)$ – погонна маса реальної ракети. При моделюванні слід припускати, що

$$m_p(x, t) = m_s(x, t); \quad (36)$$

також загальні маси ракети і балки в довільний момент часу мають бути однаковими, тобто

$$\int_a^b m_p(s^*, t) ds^* = \int_{a_1}^{b_1} m_s(s^*, t) ds^*, \quad (37)$$

де s^* – дугова координата осей ракети і балки в C_t ; a, b і a_1, b_1 – координати точок початку і кінця осей ракети і балки.

Розглядаємо в околі точки M^* елементи балки довжини $\alpha s^* \cong dx$ і зобразимо деякі вектори сил, що діють на цей елемент (рис. 3).

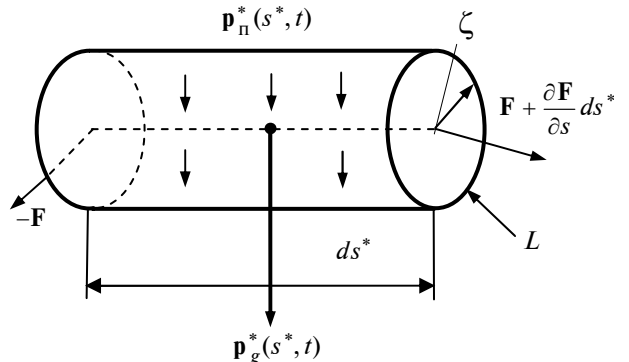


Рис. 3. Виділений елемент балки

На рис. 3 введено такі позначення: $\mathbf{p}_n^*$ – вектор заданих поверхневих сил, в склад яких мають входити також сили ваги від дії умовно відкинутих оперінь, що розміщені на поверхні ракети по певних лініях; $\mathbf{n}$ – зовнішня одинична нормаль до поверхні ракети; $\mathbf{p}_g$ – вектор сили ваги виділеного елемента:

$$\mathbf{p}_g = -m_6(s^*, t) \mathbf{g}_{\text{ст}}, \quad (38)$$

де $\mathbf{j}_{\text{ст}}$ – орт вертикальної осі інерціальної (стартової, рис. 1) СК.

Оскільки площа бічної поверхні елемента становить $\zeta(s^*)ds^*$, де ζ – радіус виділеного циліндра (рис. 3), то головний вектор поверхневих сил, розрахований на одиницю довжини, визначатиметься формулою

$$\mathbf{p}_n \cong 2\pi\zeta(s^*)\mathbf{P}_n(s^*). \quad (39)$$

Нарешті, через $\mathbf{f}^a, \mathbf{f}^k$ позначимо вектори аеродинамічних сил і сил керування, також розрахованих на одиницю довжини осі ракети-балки.

Беручи до уваги формули (6), (38) і (39), рівняння поступального руху ракети як деформованої балки запишемо в такому вигляді:

$$m_6(s, t) \left(\frac{d\mathbf{v}_C}{dt} + \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \right) = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial s} + \mathbf{p}_n + \mathbf{f}_n + \mathbf{f}^k + \mathbf{p}_g + \mathbf{q}_e^{\text{cor}} + \mathbf{q}_p + \mathbf{q}_{\text{вар}}, \quad (40)$$

де $\mathbf{q}_e^{\text{cor}} = -m_i(s, t)[\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{p} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{p})]$ – вектор інтенсивності сил інерції Коріоліса від переносного обертального руху.

Якщо пружні переміщення точок балки відсутні, тобто ракета розглядається як *абсолютно тверде* тіло, то з рівняння (40) можна отримати відомі для цього випадку рівняння руху.

Дійсно, покладаємо в (40) формально $\mathbf{u} = 0$, $\boldsymbol{\omega}_g = 0$ і інтегруємо це рівняння по s в межах від 0 до l .

Маємо

$$M_6(t) \frac{d\mathbf{v}_C}{dt} = \mathbf{F}_n + \mathbf{F}^k + \mathbf{F}_g + \mathbf{F}_e^{\text{cor}} + \mathbf{F}^a + \mathbf{F}_p + \mathbf{F}_{\text{вар}}, \quad (41)$$

де $M_6(t) = \int_0^l m_6(s, t) ds$ ($s = x$) – змінна в часі загальна маса ракети-балки;

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_n &= \int_0^l \mathbf{p}_n ds; \quad \mathbf{F}^k = \int_0^l \mathbf{f}^k ds; \\ \mathbf{F}_g &= \int_0^l \mathbf{p}_g ds; \quad \mathbf{F}_e^{\text{cor}} = -\int_0^l \mathbf{v}_e m_s(s, t) ds; \\ \mathbf{F}^a &= \int_0^l \mathbf{f}^a ds; \end{aligned} \quad (42)$$

$$\mathbf{F}_p = \int_0^l \mathbf{q}_p ds = T; \quad \mathbf{F}_{\text{вар}} = \int_0^l \mathbf{q}_{\text{вар}} ds,$$

де $\mathbf{v}_e$ – переносна швидкість від обертального руху ракети-балки.

Теорема про зміну кінетичного моменту балки змінної маси і рівняння його обертального руху

Розглядаємо знову елемент балки (рис. 4), в якому позначаємо C_{M^*} його центр мас, а також частину пружних сил і моментів, які створюють моменти відносно вказаної точки.

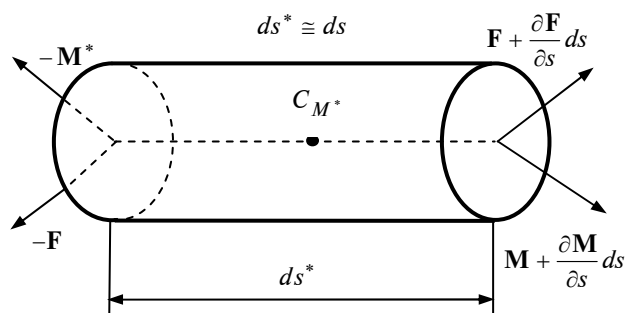


Рис. 4. Пружні сили і моменти, що діють на елемент

У момент старту ракети вказаний елемент є тіло, яке має вісь симетрії і дві площини матеріальної і геометричної симетрії. При русі ракети-балки вказана симетрія в загальному вигляді не матиме місця, оскільки паливо, окислювач вигоряють і діють інші фактори.

Тоді тензор інерції $\mathbf{i}$ виділеного елемента слід у загальному вигляді зобразити так:

$$d_s \mathbf{i} = \begin{bmatrix} i_{11} & -i_{12} & -i_{13} \\ -i_{21} & i_{22} & -i_{23} \\ -i_{31} & -i_{32} & i_{33} \end{bmatrix} ds = i ds. \quad (43)$$

Звідси видно, що тут тензор $\mathbf{i}$ “розраховується” на одиницю довжини ракети-балки.

Вираз для тензора $\mathbf{i}$ (43) матиме місце для випадку, коли розглядається рідинно-паливна ракета.

Надалі розглядаємо твердо-паливні ракети, для яких з певною похибкою можна припускати, що

$$\mathbf{i} = \begin{bmatrix} i_1 & 0 & 0 \\ 0 & i_2 & 0 \\ 0 & 0 & i_3 \end{bmatrix}, \quad (44)$$

де $i_k \equiv i_{kk}(t)$; $i_{rs} = 0$ ($r \neq s$); $k = \overline{1, 3}$.

Звертаємо увагу на те, що компоненти в (43) або (44) слід обчислювати у зв'язаній СК конфігурації C_0 .

Якщо елемент (рис. 4) був би сталої маси, то його кінетичний момент відносно точки C_{M^*} і розрахований на одиницю довжини, визначався б за формулою

$$\mathbf{K}_{C^*} = \mathbf{i} \Omega. \quad (45)$$

У цьому випадку до елемента слід прикладати такі моменти від дії пружних сил і моментів:

$$\begin{aligned} -\mathbf{M} ds^* + \mathbf{M} ds^* + \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial s^*} ds^* &= \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial s^*} ds^*, \\ -\frac{1}{2} \mathbf{i}^* ds^* \times \mathbf{F} + \frac{1}{2} \mathbf{i}^* ds^* \times \left(\mathbf{F} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial s^*} \right) &= \\ &= (\mathbf{i}^* \times \mathbf{F}) ds^*. \end{aligned} \quad (46)$$

До цих моментів слід додати моменти відносно точки C^* від дії аеродинамічних сил $m_{C^*}^a ds^*$, сил керування $m_{C^*}^k ds^*$, поверхневих сил $m_{C^*}^n ds^*$.

Тоді теорема про зміну кінетичного моменту відносно точки C_{M^*} (рис. 4) буде визначатися формулою

$$\frac{\partial \mathbf{K}_{C^*}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial s} + \mathbf{i}^* \times \mathbf{F} + \mathbf{m}_{C^*}^a + \mathbf{m}_{C^*}^k + \mathbf{m}_{C^*}^n \quad (47)$$

для випадку, коли маса елемента є стала в часі величина.

Для випадку, коли маса елемента є змінна в часі величина, то, як нам уже відомо, виникає додаткова сила — реактивна сила Мешерського. Оскільки ця сила є *контролюючою* і лінія дії проходить через точку C^* , то її момент відносно точки C^* дорівнюватиме нулеві.

Тоді з (45) отримуємо аналітичний запис теореми про зміну кінетичного моменту для елемента змінної маси:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{i} \cdot \Omega) = \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial s} + \mathbf{i}^* \times \mathbf{F} + \mathbf{m}_{C^*}^a + \mathbf{m}_{C^*}^k + \mathbf{m}_{C^*}^n. \quad (48)$$

На основі сформульованих теорем (30) і (48) можна отримувати різні варіанти нелінійних і лінійних рівнянь згинальних, поздовжніх і крутильних рухів ракети-балки.

Поздовжні і згинальні в площині тангажа коливальні рухи ракети-балки

Для того щоб розв'язати поставлену задачу, необхідно спроектувати рівняння (40) на вісь Cx і Cy , покласти, що переміщення $v(x, t)$ дорівнює нулеві. Вважаємо, що коливальні процеси типу тангажа відбуваються в площині Cxy (див. рис. 1).

Щоб отримати різні варіанти скалярних рівнянь руху, необхідно у векторному рівнянні (40) попередньо покласти:

$$\mathbf{v}_C = v_{Cx} \mathbf{i} + v_{Cy} \mathbf{j} + v_{Cz} \mathbf{k},$$

$$\mathbf{u} = u \mathbf{i} + w \mathbf{j} + v \mathbf{k},$$

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_x \mathbf{i} + \omega_y \mathbf{j} + \omega_z \mathbf{k},$$

$$\boldsymbol{\omega}_g = \frac{\partial \psi}{\partial t} \mathbf{i} - \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} \mathbf{j} - \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \mathbf{k},$$

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial s} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial Q_2}{\partial x} \mathbf{j} + \frac{\partial Q_3}{\partial x} \mathbf{k},$$

$$\mathbf{p}_n = p_{nx} \mathbf{i} + p_{ny} \mathbf{j} + p_{nz} \mathbf{k},$$

$$\mathbf{f}^a = f_x^a \mathbf{i} + f_y^a \mathbf{j} + f_z^a \mathbf{k}, \quad (49)$$

$$\mathbf{f}^k = f_x^k \mathbf{i} + f_y^k \mathbf{j} + f_z^k \mathbf{k},$$

$$\mathbf{p}_g = -m_6(x, t) g \mathbf{j}_C, \quad \mathbf{q}_p = q_p \mathbf{i},$$

$$\mathbf{q}_e^{\text{cor}} = \mathbf{q}_{ex}^{\text{cor}} \mathbf{i} + \mathbf{q}_{ey}^{\text{cor}} \mathbf{j} + \mathbf{q}_{ez}^{\text{cor}} \mathbf{k},$$

$$\mathbf{q}_{\text{вар}} = \mathbf{q}_{\text{вар},x} \mathbf{i} + \mathbf{q}_{\text{вар},y} \mathbf{j} + \mathbf{q}_{\text{вар},z} \mathbf{k}.$$

Бачимо, що необхідно в явному вигляді обчислити компоненти вектора $\mathbf{q}_e^{\text{cor}}$.

Насамперед маємо

$$\Omega = (\omega_x + \omega_{1g}) \mathbf{i} + (\omega_y + \omega_{2g}) \mathbf{j} + (\omega_z + \omega_{3g}) \mathbf{k}. \quad (50)$$

У випадку руху ракети одержуємо

$$\omega_x = \dot{\gamma} - \dot{\vartheta} \sin \psi,$$

$$\omega_y = \dot{\psi} \cos \gamma + \dot{\vartheta} \sin \gamma \cos \psi, \quad (51)$$

$$\omega_z = \dot{\vartheta} \cos \psi \cos \gamma - \dot{\psi} \sin \gamma,$$

де $\psi = \psi(t)$, $\vartheta = \vartheta(t)$, $\gamma = \gamma(t)$ — відомі кути рискування, тангажа і крену.

Значить, маємо

$$\Omega = \Omega_1 \mathbf{i} + \Omega_2 \mathbf{j} + \Omega_3 \mathbf{k}. \quad (52)$$

Тут введені такі позначення:

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \dot{\gamma} - \dot{\vartheta} \sin \psi + \frac{\partial \dot{\psi}}{\partial t}, \\ \Omega_2 &= \dot{\psi} \cos \gamma + \dot{\vartheta} \sin \gamma \cos \psi - \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t}, \\ \Omega_3 &= \dot{\vartheta} \cos \psi \cos \gamma - \dot{\psi} \sin \gamma - \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t}. \end{aligned} \quad (53)$$

У випадку згинальних коливань типу тангажа в площині S_{xy} цілком природно покласти

$$\psi = 0, \gamma = 0, \tilde{\psi} = 0. \quad (54)$$

Далі маємо

$$\begin{aligned} \Omega \times \rho &= -x \Omega_2 \mathbf{k} + x \Omega_3 \mathbf{j}; \\ \Omega \times (\Omega \times \rho) &= -x (\Omega_2 + \Omega_3^2) \mathbf{i} - x \Omega_1 \Omega_2 \mathbf{j} + x \Omega_1 \Omega_3 \mathbf{k}. \end{aligned}$$

Отже,

$$\begin{aligned} \dot{\Omega} \times \rho + \Omega \times (\Omega \times \rho) &= -x (\Omega_2^2 + \Omega_3^2) \mathbf{i} + \\ &+ x (\dot{\Omega}_3 + \Omega_1 \Omega_2) \mathbf{j} + x (-\dot{\Omega}_2 + \Omega_1 \Omega_3) \mathbf{k}. \end{aligned} \quad (55)$$

В проекції на вісь S_x з рівняння (40) отримуємо

$$\begin{aligned} m_s(x, t) \left(\frac{dv_{Cx}}{dt} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) &= \frac{\partial N}{\partial x} + p_{px} + f_x^a + \\ &+ f_x^k + p_{gx} + q_{px} + q_{варx} + q_{ex}^{cor}. \end{aligned} \quad (56)$$

Зауважимо, що в цьому рівнянні величину N необхідно виразити через реальні зусилля.

Використовуючи *остаточну* таблицю напрямних косинусів і рівність (34), отримуємо

$$N = N - \frac{\partial w}{\partial x} Q_2^* - \frac{\partial v}{\partial x} Q_3^*. \quad (57)$$

Беремо до уваги також таблицю напрямних косинусів між інерціальною (стартовою) і зв'язаною СК. Тоді маємо

$$p_{gx} = -m_6(x, t) g \sin \vartheta. \quad (58)$$

Далі отримуємо

$$q_{ex}^{cor} = -m_6(x, t) x (\Omega_2^2 + \Omega_3^2), \quad (59)$$

$$q_p = \frac{T}{l}, \quad q_{вар, x} = \frac{\partial}{\partial t} [m_6(x, t) v_{mr}] \mathbf{i}. \quad (60)$$

Значить, рівняння поздовжніх коливань рухів ракети-балки (56) перетворюємо до такого вигляду:

$$\begin{aligned} m_6(x, t) \left(\frac{dv_{Cx}}{dt} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} \left[E(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right] + \\ &+ p_{px} + f_x^a + f_x^k - m_s(x, t) g \sin \vartheta + \\ &+ \frac{T}{l} + f_x^a + q_{вар, x}. \end{aligned} \quad (61)$$

Рівняння згинальних коливань у площині S_{xy} отримаємо з рівняння (40), проектуючи його на напрямок з ортом $\mathbf{j}$.

Маємо

$$\begin{aligned} m_s(x, t) \left(\frac{dv_{Cy}}{dt} + \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right) &= \frac{\partial Q_2}{\partial x} + p_{py} + f_y^a + \\ &+ f_y^k - m_6(x, t) g (\sin \psi \sin \gamma \sin \vartheta + \cos \vartheta \cos \gamma) + \\ &+ q_{ey}^{cor} + q_{вар, y}. \end{aligned} \quad (62)$$

Оскільки

$$Q_2 = Q_2^* - \tilde{\psi} Q_3^* + \frac{\partial w}{\partial x} N^*,$$

то при $\tilde{\psi} = \psi = \gamma = 0$ рівняння (62) перетвориться до такого вигляду:

$$\begin{aligned} m_6(x, t) \left(\frac{dv_{Cy}}{dt} + \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right) &= \frac{\partial Q_2^*}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial x} N^* \right) + \\ &+ p_{py} + f_y^a + f_y^k - m_6(x, t) g \cos \vartheta + q_{ey}^{cor} + q_{вар, y}. \end{aligned} \quad (63)$$

Звертаємося до співвідношення (48), де за аналогією з (49) покладемо:

$$\begin{aligned} \mathbf{i} \cdot \Omega &= \Omega_1 i_1 \mathbf{i} + \Omega_2 i_2 \mathbf{j} + \Omega_3 i_3 \mathbf{k}, \\ \mathbf{M} &= M_1 \mathbf{i} + M_2 \mathbf{j} + M_3 \mathbf{k}, \\ \mathbf{m}_{C^*}^a &= m_x^a \mathbf{i} + m_y^a \mathbf{j} + m_z^a \mathbf{k}, \\ \mathbf{m}_{C^*}^k &= m_x^k \mathbf{i} + m_y^k \mathbf{j} + m_z^k \mathbf{k}, \\ \mathbf{m}_{C^*}^n &= m_x^n \mathbf{i} + m_y^n \mathbf{j} + m_z^n \mathbf{k}. \end{aligned} \quad (64)$$

Далі маємо

$$\begin{aligned} \mathbf{i}^* \times \mathbf{F} &= \left[\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \mathbf{i} + \frac{\partial w}{\partial x} \mathbf{j} + \frac{\partial v}{\partial x} \mathbf{k} \right] \times \\ &\times (N \mathbf{i} + Q_2 \mathbf{j} + Q_3 \mathbf{k}) = \left(\frac{\partial w}{\partial x} Q_3 - \frac{\partial v}{\partial x} Q_2 \right) \mathbf{i} + \left[\frac{\partial v}{\partial x} N - \right. \\ &\left. - \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) Q_3 \right] \mathbf{j} + \left[\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) Q_2 - \frac{\partial w}{\partial x} N \right] \mathbf{k} \equiv \\ &\equiv \left(\frac{\partial w}{\partial x} Q_3 - \frac{\partial v}{\partial x} Q_2 \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} N - Q_3 \right) \mathbf{j} + \\ &+ \left(\frac{\partial w}{\partial x} N + Q_2 \right) \mathbf{k}. \end{aligned} \quad (65)$$

Виразимо у формулі (65) псевдозусилля N, Q_2, Q_3 через реальні величини N^*, Q_2^*, Q_3^* за такими формулами:

$$\begin{aligned} N &= \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) N^* - \frac{\partial w}{\partial x} Q_2^* - \frac{\partial v}{\partial x} Q_3^*, \\ Q_2 &= \frac{\partial w}{\partial x} N^* + Q_2^* - \tilde{\psi} Q_3^*, \\ Q_3 &= \frac{\partial v}{\partial x} N^* + \tilde{\psi} Q_2^* + Q_3^*. \end{aligned} \quad (66)$$

Нехтуючи доданками з кубічною нелінійністю, маємо

$$\begin{aligned} \mathbf{i}^* \times \mathbf{F} &\equiv \left(\frac{\partial w}{\partial x} Q_3^* - \frac{\partial v}{\partial x} Q_2^* \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} N^* - Q_3^* \right) \mathbf{j} + \\ &+ \left(Q_2^* - \frac{\partial w}{\partial x} N^* \right) \mathbf{k}. \end{aligned} \quad (67)$$

Використовуючи формули (64) і (67), проєктуюємо співвідношення (48) на вісь Cz . Отримуємо

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\Omega_3 i_3) &= \\ &= \frac{\partial M_3^*}{\partial x} + Q_2^* - \frac{\partial w}{\partial x} N^* + m_z^a + m_z^k + m_z^n. \end{aligned} \quad (68)$$

З цього рівняння визначаємо величину Q_2^* :

$$\begin{aligned} Q_2^* &= \frac{\partial}{\partial t} (\Omega_3 i_3) - \\ &- \frac{\partial M_3^*}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} N^* - m_z^a - m_z^k - m_z^n \end{aligned} \quad (69)$$

і підставляємо її в рівняння (63).

При цьому враховуємо, що

$$\Omega_3 = \dot{\vartheta} - \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t}, \quad M_3^* = E(x) J(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2},$$

де $E(x) J(x)$ – жорсткість на згин балки в площині Cxy .

Отримуємо рівняння згинальних коливань ракети-балки в площині Cxy (в площині тангажа) з одночасним врахуванням дії поздовжніх коливань, зміни в часі маси ракети-балки:

$$\begin{aligned} m_6(x, t) \left(\frac{dv_{Cy}}{dt} + \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right) &= \\ &= - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[E(x) J(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] + \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} (\Omega_3 i_3) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial x} N^* \right) - \frac{\partial}{\partial x} (m_z^a + m_z^k + m_z^n) + P_{py} + \\ &+ f_y^a + f_y^k - m_s(x, t) g \cos \vartheta + q_{ey}^{cor} + q_{вар, y}. \end{aligned} \quad (70)$$

Отже, отримали систему нелінійних диференціальних рівнянь, що описують взаємопов'язані поздовжньо-згинальні коливання ракети-балки.

Оскільки кінці балкової системи є вільними, то граничні умови до отриманих рівнянь відображають факт рівності нулеві на обох кінцях перерізуючих зусиль і моментів.

З аналізу отриманих рівнянь бачимо, що найбільш ефективним методом розв'язування відповідних граничних задач є методи типу Бубнова–Гальоркіна.

Це предмет окремого важливого дослідження.

Висновки

У результаті проведених досліджень встановлено, що, застосовуючи запропонований підхід, можна на відміну від опублікованих досліджень вихідну реальну механічну систему – видовжену ракету – математично моделювати балкою зі змінними по координатах і часу масово-інерційними характеристиками, жорсткостями. Це дає змогу:

- формувати різні варіанти лінійних і нелінійних диференціальних рівнянь руху ракети, силових і кінематичних співвідношень;
- встановлювати на основі запропонованого підходу явний вигляд формули для обчис-

лення реактивних, варіаційних і коріолісових сил і моментів;

- враховувати при розгляді конкретних режимів польоту накладання певних типів поступальних і обертальних рухів, взаємозв'язок між повздовжніми і згинальними коливаннями та ін.

Характерним для запропонованого підходу є те, що він порівняно простий, прозорий у

викладі, логічно послідовний; кожен коефіцієнт отриманих рівнянь є таким, який легко сприймається і трактується з фізичної точки зору.

У подальшому щодо вказаних проблем буде викладено варіаційні методи на основі принципу можливих переміщень, а також розглянуто нові задачі про коливальні процеси.

Я.Ф. Каюк

ЗАДАЧА О МОДЕЛИРОВАНИИ РАКЕТЫ БАЛКОЙ С ПЕРЕМЕННЫМИ ПРИВЕДЕННЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

Сформулированы основные предположения, с помощью которых удлиненную ракету можно моделировать балкой с переменными массоинерционными, геометрическими и жесткостными характеристиками. Предложен подход, позволяющий не только формулировать основные теоремы динамики для ракеты-балки, а и в явном виде получать формулы для вычисления реактивных и вариационных сил. На основе доказанных теорем показано, как можно формулировать различные варианты линейных и нелинейных уравнений движения ракеты-балки. Для примера получены нелинейные уравнения совместных продольно-изгибных колебаний в плоскости тангажа.

Ya.F. Kayuk

THE ROCKET MODELING PROBLEM ON A BEAM WITH REDUCED VARIABLE CHARACTERISTICS

The study under consideration deals with constructing the rocket model using a beam with the reduced variable characteristics. It is assumed that the lengthening rocket may be modeled on the beam with the variable mass inertial, geometric, and rigid characteristics. Using the proposed technique, the basic theorems in dynamics for the rocket-beam, as well as the reactive and variational formulas, are received. Based on the theorems proved, different variants of linear and nonlinear equations of motion may be formulated. Finally, the nonlinear equations of the coincident longitudinal and flexural vibrations in pitch plane are obtained.

1. Лебедев А.А., Чернобровкин Л.С. Динамика полета беспилотных летательных аппаратов: Учебн. пособие для вузов. — 2-е изд., перераб. и доп. — М.: Машиностроение, 1973. — 616 с.
2. Динамика ракет: Учебник для студентов / К.А. Абгарян, Э.Л. Калязин, В.П. Мишин и др.; Под общ. ред. В.П. Мишина. — 2-е изд., перераб. и доп. — М.: Машиностроение, 1990. — 464 с.
3. Собрание трудов академика А.Н. Крылова. Т. X: Вибрация судов. — М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1948. — С. 364—398.
4. Тимошенко С.П. Колебание в инженерном деле. — М.: Наука, 1957. — 442 с.
5. Тимошенко С.П. Курс теории упругости. — К.: Наук. думка, 1972. — 502 с.
6. Кеч В., Теодореску П. Введение в теорию обобщенных функций с приложениями в технике. — М.: Мир, 1976. — 516 с.
7. Каюк Я.Ф., Ахмедов А. Пространственные движения цилиндрического тела переменной массы на упругом подвесе // Прикл. механика. — 1992. — 28, № 7. — С. 62—69.
8. Каюк Я.Ф., Шекера М.К. Нелинейные колебания тел вращения переменной массы // Вісник Донецького університету. Сер. А. Природничі науки. — 2003. — Вип. 1. — С. 24—88.

Рекомендована Радою
НАЦ критичних технологій
навігаційного приладобудування
НТУУ "КПІ"

Надійшла до редакції
4 березня 2008 року