УДК 534.6

В. Г. Савін, Н. І. Штефан, Ж. В. Сотула

ОДИН ІЗ МЕТОДІВ РОЗРАХУНКУ ДИНАМІЧНИХ ХАРАКТЕРИСТИК П'ЄЗОКЕРАМІЧНОГО ЦИЛІНДРИЧНОГО ВИПРОМІНЮВАЧА

Вступ

З усіх існуючих методів розрахунку динамічних характеристик перетворювачів, які використовуються в прикладній гідроакустиці, метод «зв'язаних полів» вигідно відрізняється від інших методів завдяки своїй універсальності, а також можливості використовувати його у випадках, коли результатам, одержаним іншими методами (метод еквівалентних схем, метод чотирьох полюсників), можна довіряти з визначеним ступенем достовірності, або цими методами взагалі неможливо скористатися.

Зазначений метод припускає спільні розв'язки рівнянь коливань електропружних тіл і акустичного середовища з урахуванням взаємовпливу електромеханічних полів і містить в собі математичну постановку задачі, її розв'язок знаходження співвідношень, що дозволяють визначити практично всі динамічні характеристики перетворювача [2, 3, 4, 8].

При описі коливань п'єзокерамічного тіла використовується лінійна теорія електропружності чи лінійна теорія тонких п'єзокерамічних пластин і оболонок. Хвильові процеси в середовищі, що контактує з перетворювачем, описуються в акустичному наближенні, хоча можливе урахування в ньому також в'язких властивостей.

У місцях контакту п'єзокерамічного тіла з акустичним середовищем передбачається відсутність у ньому розривів при їхньому спільному коливанні. Наведемо деякі публікації по цій тематиці, які з'явились в останній час [5, 6, 7].

Ціллю роботи є розрахунок динамічних характеристик циліндричного перетворювача, що працює в режимах випромінювання акустичних хвиль.

Математична постановка задачі

Розглядається циліндричний перетворювач, який знаходиться в рідині. Будемо вважати, що металеві електроди випромінювача суцільні та цілком покривають його внутрішню і зовнішню поверхні. Перетворювач поляризований у радіальному напрямку і являє собою кругову циліндричну оболонку, що передбачається тонкостінною, і для опису її руху впроваджене залучення гіпотез Кіргхофа-Лява. Зовні оболонка оточена стисливою ідеальною рідиною, динамічні процеси в якій можна моделювати хвильовим рівнянням (акустичне наближення). Будемо вважати, що оболонка нескінченної довжини, а у внутрішньому її обсязі вакуум. При збудженні перетворювача електричною напругою виникають спільні коливання оболонки і контактуючої з нею рідиною, в результаті чого в акустичному середовищі розповсюджуються хвилі, які випромінені п'єзокерамічним перетворювачем. У цьому разі оболонка здійснює вісесиметричні радіальні коливання. Інші компоненти пружних коливань будуть відсутні.

Запишемо ці коливання оболонки, враховуючи те, що вони не залежать від інших просторових координат Z та θ [9]

$$-\frac{h}{R^2}C_n^E W + \frac{h}{R}e_{31}E_r^{(0)} = \gamma h\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} - q\,, \tag{1}$$

де q – гідродинамічне навантаження, яке діє на оболонку $\left(q = -P_{1|r=R}\right)$,

$P_{1|r=R}$ – акустичний тиск у місті контакту оболонки з середовищем;

R, h – серединний радіус і товщина оболонки,

W – її прогин,

γ – щільність п'єзокераміки;

C_{11}^E, e_{31} – її модуль пружності і п'єзомодуль,

$E_r^{(0)}$ – складова напруженості електричного поля, що не залежить від радіальної координати r, t – час.

Нормальні складові напруженості й індукції електричного поля відповідно до [1] записуються в такій спосіб

$$E_r = E_r^{(0)} + \eta E_r^{(1)}, \quad D_r = D_r^{(0)} = \mathrm{const}, \quad \left(-\frac{h}{2} \le \eta \le \frac{h}{2}\right).$$

В свою чергу, враховуючи те, що E_r не залежить від θ, z, можна записати

$$E_r = -\frac{d\psi_0}{dr},$$

де ψ_0 – різниця електричних потенціалів на електродах перетворювача.
Після інтегрування по товщині оболонки отримуємо:

$$\psi_0 = -\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} E_r d\eta\,.$$

Тоді

$$\psi_0 = \psi_0\Big|_{\frac{h}{2}} - \psi_0\Big|_{-\frac{h}{2}} = -\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(E_r^{(0)} + \eta E_r^{(1)}\right) d\eta = -E_r^{(0)} h .$$

Таким чином, існує зв'язок між постійною складовою (незалежно від радіальної координати) електричної напруженості $E_r^{(0)}$ і різницею електричних потенціалів ψ_0

$$E_r^{(0)} = -\frac{\psi_0}{h} . \qquad (2)$$

Запишемо рівняння руху акустичного середовища (хвильове рівняння) у кругових циліндричних координатах [8]

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\theta}{\partial r} = \frac{1}{C_0^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} ,$$

$$P = -\rho\frac{\partial\varphi}{\partial t}; \qquad V_r = -\frac{d\varphi}{dr}, \qquad (3)$$

де φ – хвильовий потенціал, P – акустичний тиск, V_r – коливальна швидкість середовища, C_0, ρ – швидкість звуку і щільність, r – радіальна координата, t – час.

Доповнимо співвідношення (1-3) граничною умовою, що забезпечує безвідривний контакт оболонки з середовищем

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial\varphi}{\partial r}\Big|_{r=R} . \qquad (4)$$

Вирази (1-4) являють собою математичну постановку розглянутої задачі в розмірному вигляді.

Розв'язок задачі

Запишемо вирази (1-4) в безрозмірному вигляді. Для цього розділимо R, W, h, r на R; $E_r^{(0)}$ на $\frac{1}{d_{33}}$; t на $\frac{R}{C_0}$; P на ρC_0^2; ψ_0 на $\frac{R}{d_{33}}$; ω на $\frac{C_0}{R}$; I_0 на $C_0 e_{31}$ (I_0 – струм зміщення, що тече через п'єзокераміку).

У безрозмірному вигляді постановка задачі матиме вигляд

$$-W + \frac{e_{31}}{C_{11}^E d_{33}} E_r^{(0)} = \frac{\gamma C_0^2}{C_{11}^E}\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + \frac{\rho C_0^2}{C_{11}^E h} P_{|r=R=1},$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} , \qquad (5)$$

$$E_r^{(0)} = -\frac{\Psi_0}{h},$$

$$P = \frac{\partial \varphi}{\partial t}; \; V_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r}; \quad \frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial r}\Big|_{r=R=1}.$$

Для сталих режимів коливань фізичні характеристики динамічного процесу вибирають у вигляді

$$\begin{aligned}
&W(t) = W_0 e^{i\omega t}, && E_r^{(0)}(t) = E_{0r}^{(0)} e^{i\omega t},\\
&P(r,t) = P_0(r) e^{i\omega t}, && D_r(t) = D_{0r}^{(0)} e^{i\omega t},\\
&\varphi(r,t) = \varphi_0(r) e^{i\omega t}, && \psi_1(t) = \psi_0 e^{i\omega t},\\
&V_r(r,t) = V_{0r}(r) e^{i\omega t}, && I(t) = I_0 e^{i\omega t}
\end{aligned} \qquad (6)$$

де ω – частота коливань.

Підставляючи (6) у (5) одержимо

$$\left[\frac{\gamma C_0^2 \omega}{C_{11}^E} - 1\right] W_0 = -\frac{\rho C_0^2}{C_{11}^E h} i\omega \varphi_{0|r=R=1} - \frac{e_{31}}{C_{11}^E d_{33}} E_{0r}^{(0)}, \qquad (7)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi_0}{\partial r} = -\omega^2 \varphi_0, \qquad (8)$$

$$P_0 = -i\omega\varphi_0, \;\; E_{0r}^{(0)} = -\frac{\Psi_0}{h}, \qquad (9)$$

$$V_{0r} = \frac{\partial \varphi_0}{\partial r}, \quad W_0 i\omega = \frac{\partial \varphi_0}{\partial r}\Big|_{r=R=1}. \qquad (10)$$

Рівняння коливань оболонки (1) після підстановки в нього $E_r^{(0)}$ приймає вигляд

$$aW_0 = ib\varphi_0\Big|_{r=1} = d\psi_0,$$

де $a = \frac{\gamma C_0^2 \omega^2}{C_{11}^E} - 1; \quad b = -\frac{\rho C_0^2 \omega^2}{C_{11}^E h}; \quad d = \frac{e_{31}}{C_{11}^E d_{33} h},$

з якого

$$W_0 = i\frac{b}{a}\varphi_{0\,|r=1} + \frac{d}{a}\psi_0. \qquad (11)$$

Розв’язок рівняння (8) з урахуванням згасання збурення на нескінченності

$$\lim_{r\to\infty} \varphi_0 = 0$$

виберемо у вигляді

$$\varphi_0 = AH_0^{(2)}(\omega r), \tag{12}$$

де $H_0^{(2)}(\omega r)$ – функція Ханкеля другого роду нульового порядку,

A – постійна інтегрування.

Тоді V_{0r} дорівнює

$$V_{0r} = \frac{\partial \varphi_0}{\partial r} = A\frac{\partial H_0^{(2)}(\omega r)}{\partial r} = -A\omega H_1^{(2)}(\omega r), \tag{13}$$

де $H_1^{(2)}(\omega r)$ – функція Ханкеля другого роду першого порядку.

Підставимо (12) у формулу (11)

$$W_0 = i\frac{b}{a}AH_0^{(2)}(\omega) + \frac{d}{a}\psi_0. \tag{14}$$

Зажадавши виконання графічної умови (10), знайдемо постійну

$$A = \frac{i\dfrac{d}{a}\psi_0}{-H_1^{(2)}(\omega) + \dfrac{b}{a}H_0^{(2)}(\omega)}, \tag{15}$$

після підстановки якої в (14) остаточно отримуємо формулу для розрахунку амплітуди коливань п'єзокерамічної оболонки (перетворювача)

$$W_0 = \frac{\dfrac{db}{a^2}\psi_0 H_0^{(2)}(\omega)}{H_1^{(2)}(\omega) - \dfrac{b}{a}H_0^{(2)}(\omega)} + \frac{b}{a}\psi_0. \tag{16}$$

Її коливальна швидкість визначається за формулою (13) після підстановки в неї (15)

$$\dot{W}_0 = V_{0r|r=1} = \frac{\partial \varphi_0}{\partial r}_{|r=1} = -A\omega H_1^{(2)}(\omega) = \frac{i\omega\dfrac{d}{a}H_1^{(2)}(\omega)\psi_0}{\dfrac{b}{a}H_0^{(2)}(\omega) + H_1^{(2)}(\omega)}. \tag{17}$$

Аналогічну формулу можна одержати, якщо взяти похідну за t від W.

Відкинувши у першому рівнянні (5) електричне та акустичне навантаження, що діють на перетворювач (другий і четвертий доданок), одержимо рівняння для розрахунку його основної резонансної частоти (пульсуючої)

$$-W = \frac{\gamma C_0^2}{C_{11}^E}\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}. \tag{18}$$

Вибравши розв’язок у вигляді $W = e^{i\omega_p t}$ і підставивши його в (18) запишемо формулу для розрахунку першої (пульсуючої) частоти коливань перетворювача ω_P у випадку, коли електроди замкнені

$$\omega_P = \sqrt{\frac{C_{11}^E}{\gamma C_0^2}}\,. \tag{19}$$

Акустичний тиск у середовищі, викликаний електропружними коливаннями оболонки, з використанням співвідношень (9, 12, 15) обчислюється за такою формулою

$$P_0 = \frac{\frac{d\omega}{a} H_0^{(2)}(\omega r)\psi_0}{\frac{b}{a} H_0^{(2)}(\omega) - H_1^{(2)}(\omega)}\,. \tag{20}$$

Отримуємо вираз для розрахунку електричного струму I_0, що тече через перетворювач одиничної висоти. З теорії електрики відомо, що повний заряд Q на електроді площею S обчислюється через нормальну складову вектора електричної індукції за формулою

$$Q = -\int_s (\vec{n}\vec{D})ds = -\int_s D_r ds\,,$$

а струм у ланцюзі дорівнює [1]

$$I = \frac{\partial Q}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_s D_r ds\,. \tag{21}$$

У випадку вісесиметричних пульсуючих коливань оболонки, $\left(\varepsilon_{zz} = 0,\, \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{W}{R}\right)$ вираз для нормальної складової електричної індукції D_r
має вигляд [9]

$$D_r = \frac{e_{31}}{R} W + \varepsilon_{33}^s E_r\,, \tag{22}$$

де ε_{33}^s – діелектрична стала п’єзокераміки.

Підставляючи (22) в (21) і враховуючи, що $ds = Rd\theta$, отримаємо в безрозмірному вигляді

$$I_0 = -i\omega 2\pi \left(W_0 + \frac{\varepsilon_{33}^s}{e_{31} d_{33}} E_{0r}^{(0)} \right),$$

або остаточно маємо

$$I_0 = -i\omega 2\pi\psi_0 \left(\frac{\frac{db}{a^2} H_0^{(2)}(\omega)}{\frac{b}{a} H_0^{(2)}(\omega) - H_1^{(2)}(\omega)} - \frac{d}{a} + \frac{\varepsilon_{33}^s}{e_{31} d_{33} h} \right).$$

Варто відзначити, що наведені формули, якими обчислюються динамічні характеристики навантаженого на акустичне середовище перетворювача, наведені в безрозмірному вигляді. Для того щоб ці характеристики стали розмірними величинами, необхідно домножити W_0 на R; P_0 на ρC_0^2; $\dot{W}_0$ на C_0; ω_0 на $\frac{C_0}{R}$; I_0 на $e_{31} C_0$.

Висновки

1. В роботі розглянута задача про електропружні коливання в рідині циліндричного п’єзопетерворювача. В науковій літературі такий підхід при розрахунку акустичних і механічних полів в електропружних тілах, що контактують з рідиною, отримав назву «метода зв’язаних полів». Цей підхід припускає спільні розв’язки рівнянь коливань електропружних тіл і рівнянь акустичного середовища з урахуванням взаємовпливу електромеханічних полів.
2. Розроблена математична модель, яка включає в себе постановку і роз’язок задачі про сталі електропружні коливання циліндричної оболонки (перетворювача), яка знаходиться в рідині і на яку діє електрична напруга.
3. Наведені вирази за допомогою яких знаходяться пульсуючі коливання перетворювача, електричний струм, що тече в п’єзокераміці, акустичний тиск і коливальна швидкість рідини.
4. При розв’язку задачі використовувалась лінійна теорія електропружних оболонок, яка базується на гіпотезі Кіргхофа-Лява, а також рівняння ідеальної стисливої рідини.

Список використаної літератури

1. *Гринченко, В. Т.* Механика связанных полей в элементах конструкций [Текст] Т.5./ В. Т. Гринченко, А. Ф. Улитко, Н. А. Шульга

// Электроупругость. – К: Наукова думка, 1989. – 280 с. ISBN 5-12-000378-8.

2. *Лейко*, *А. Г.* Дифракция плоских звуковых волн на системе полых упругих цилиндров, расположенных в незамкнутых кольцевых слоях [Текст]/ А. Г. Лейко //Акустический журнал. – 1979. –25, №3. –С.241–426.

3. *Лейко*, *А. Г.* Взаимодействие плоской акустической волны с цилиндрической решеткой, состоящей из пьезокерамических цилиндрических преобразователей [Текст]/ А. Г. Лейко, В. Г. Савин, В. П. Ткаченко // Акустичний вісник. – 1999. –Т.2, №2. –С.64–72.

4. *Лейко*, *А. Г.* Закономерности взаимодействия плоской акустической волны с цилиндрическими решетками, состоящими из пьезокерамических цилиндрических преобразователей [Текст]/ А. Г. Лейко, В. Г. Савин // Акустичний вісник. – 2000. –Т.3, №2. –С.34–42.

5. *Коржик*, *А. В.* Применение метода «сквозной задачи» к исследованию амплитудно-частотных зависимостей характеристик акустического поля приемного цилиндрического пьезокерамического преобразователя с разрезными электродами [Текст]/ А. В. Коржик // Электроника и связь.–2010.–№3.–С.160–166.

6. *Коржик*, *А. В.* Один из методов решения задачи стационарной гидроэлектроупругости для режима излучения звуковых волн антенными решетками, образованными системами стержневых преобразователей [Текст]/ А. В. Коржик // Інформаційні системи, механіка та керування.–2010.–№5.–С.61–74.

7. *Коржик*, *А. В.* Пространственная избирательность многомодовых электроупругих цилиндрических систем [Текст]/ А. В. Коржик // Электроника и связь.–2010.–№6.–С.43–51.

8. *Бабаев*, *А. Э.* Нестационарные волны в сплошных средах с системой отражающих поверхностей [Текст]/ А. Э. Бабаев// Киев: Наукова думка, 1990. – 176 с. ISBN 978-966-00-0696-62.

9. *Савин*, *В. Г.* Уравнение колебаний пьезокерамических сферических и цилиндрических оболочек [Текст]/ В. Г. Савин, И. О. Моргун// Інформаційні системи, механіка та керування.–2010.–№5.–С.85–97.