

ЛОКАЛІЗОВАНІ СТАНИ БОЗЕ-ЕЙНШТЕЙНІВСЬКОГО КОНДЕНСАТУ В ОПТИЧНИХ ҐРАТКАХ

В. О. Лаун^{1,а}, І. В. Герасимчук^{1,2}

¹ Навчально-науковий Фізико-технічний інститут

² Інститут магнетизму ім. В.Г. Бар'яхтара НАН України

Анотація

У даній роботі в рамках рівняння Гросса-Пітаєвського з двома ідентичними пастками в якості утримуючого потенціалу досліджуються локалізовані стани Бозе-Ейнштейнівського конденсату. Проведено аналіз розв'язків для локалізованих станів у випадках лінійного та нелінійного середовища в потенціальних ямах і лінійного оточуючого середовища, та досліджено їх властивості.

Ключові слова: Бозе-Ейнштейнівський конденсат, локалізовані стани, рівняння Гросса-Пітаєвського, потенціальна яма, еліптичні функції Якобі.

Вступ

Сьогодні однією з найбільш актуальних галузей досліджень в квантовій і атомній фізиці є область квантових газів. Атомний квантовий газ — це газ атомів, охолоджених настільки, що його не можна описувати за допомогою статистики Максвелла-Больцмана. Натомість такий газ можна описувати за допомогою статистики Бозе-Ейнштейна (якщо атоми є бозонами) або статистики Фермі-Дірака (якщо атоми — ферміони). Це означає, що при охолодженні газу атомів до температур, дуже близьких до абсолютного нуля, головну роль починають відігравати квантowo-механічні закони. Матерія має хвилеподібну природу і характерна довжина хвилі $\lambda = h/p$, де p — імпульс і h — стала Планка. Якщо довжину хвилі розрахувати для атома з великою тепловою швидкістю, то вона буде дуже малою, проте при зниженні температури довжина хвилі починає зростати, і близько до абсолютного нуля λ стає порівнянною із середньою відстанню між атомами. Для бозонів атомні хвилі всіх різних, нерозрізнених атомів почнуть перекриватися і сформується конденсат Бозе-Ейнштейна (БЕК) [1, 2, 3]. У цій квантовій фазі всі атоми перебувають в одному квантовому стані і мають когерентно однакову макроскопічну хвильову функцію.

БЕК вважається п'ятим агрегатним станом речовини, який довгий час залишався лише теоретичною концепцією, доки його існування не було підтверджено експериментально, що стало одним із найважливіших досягнень сучасної фізики. БЕК дозволяє спостерігати квантові ефекти на макроскопічному рівні, зокрема надплинність, надпровідність, атомну інтерференцію та тунелювання. БЕК можна використовувати для вивчення фундаментальних властиво-

стей квантової фізики, які неможливо дослідити в газі атомів при кімнатній температурі.

БЕК зазвичай утворюється в чистих, розбавлених газах з густиною близько $n = 10^{20} \text{ м}^{-3}$ при критичній температурі близько $T_c = 1 \text{ } \mu\text{K}$ шляхом захоплення і охолодження газу нейтральних атомів у пастці під зовнішнім потенціалом $U(\vec{r})$. У цьому потенціалі атоми займають різні одночастинкові стани пастки.

Одним із ключових напрямів сучасних досліджень є вивчення поведінки БЕК в оптичних ґратках, що відкриває нові можливості для моделювання твердотільних систем, створення керованих квантових симуляторів та розробки надчутливих квантових сенсорів.

У даній роботі властивості локалізованих станів БЕК в оптичних ґратках досліджуються в рамках модельної системи, яка описується рівнянням Гросса-Пітаєвського (РГП) з двома ідентичними пастками в якості утримуючого потенціалу. При аналізі розв'язків РГП будемо спиратися на результати, отримані в роботі [4]. Будуть проаналізовані розв'язки для локалізованих станів БЕК у випадках лінійного та нелінійного середовища в потенціальних ямах і лінійного оточуючого середовища.

1. Рівняння Гросса-Пітаєвського та еліптичні функції Якобі

Оскільки БЕК є квантовим явищем, для його опису ми повинні використовувати апарат квантової механіки. Зазвичай це включає розв'язання рівняння Шредінгера і знаходження хвильових функцій системи (в нашому випадку — БЕК). Однак хвильове рівняння, яке використовується для опису БЕК, моделює його статичку та динаміку, є нелінійним рівнянням Шредінгера, а у застосуванні до БЕК — має назву рівняння Гросса-Пітаєвського:

^аvikalaun47@gmail.com

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U(\vec{r}) + g|\psi(\vec{r}, t)|^2 \right) \psi(\vec{r}, t),$$

де $\psi(\mathbf{r}, t)$ — хвильова функція, яка залежить від координати $\vec{r}$ та часу t , $\hbar$ — зведена стала Планка, $U(\vec{r})$ — зовнішній потенціал, що діє на частинки, і g — коефіцієнт взаємодії між частинками, який визначається як

$$g = \frac{4\pi\hbar^2 a_s}{m},$$

де a_s — довжина розсіювання.

Для проведення подальших розрахунків необхідно використовувати математичний апарат еліптичних функцій Якобі, ключові аспекти якого наведено нижче. Спочатку представимо основні еліптичні інтеграли:

$$\int_0^\xi \frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-k^2\xi^2)}},$$

$$\int_0^\xi \frac{\xi^2 d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-k^2\xi^2)}},$$

$$\int_0^\xi \frac{d\xi}{(1-n\xi^2)\sqrt{(1-\xi^2)(1-k^2\xi^2)}},$$

де $|k| < 1$. Число k називається *модулем*, а n — *параметром* інтеграла.

Еліптичними функціями Якобі є функції, які є оберненими до еліптичних інтегралів [5].

Розглянемо еліптичний інтеграл першого роду:

$$u = F(\varphi, k) = \int_0^\varphi \frac{d\psi}{\Delta(\psi, k)},$$

де $\Delta(\psi, k)$ — функція від ψ та k . Значення φ називається *амплітудою* u і позначається як $\varphi = \text{am}(u, k)$. Якщо $\xi = \sin \varphi$, тоді маємо

$$\text{sn}(u, k) = \sin \varphi = \sin \text{am}(u, k),$$

$$\text{cn}(u, k) = \cos \varphi = \cos \text{am}(u, k),$$

$$\text{dn}(u, k) = \Delta(\varphi, k) = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \text{am}(u, k)}.$$

Функції $\text{sn}(u, k)$, $\text{cn}(u, k)$ і $\text{dn}(u, k)$ називають еліптичними функціями Якобі, які представляють собою набір основних еліптичних функцій комплексної змінної.

Наведемо ключові співвідношення і графіки для еліптичних функцій Якобі [5, 6]:

$$\text{sn}(-u) = -\text{sn}u, \quad \text{cn}(-u) = \text{cn}u, \quad \text{dn}(-u) = \text{dn}u,$$

$$\text{sn}^2 u + \text{cn}^2 u = 1,$$

$$\text{dn}^2 u + k^2 \text{sn}^2 u = 1.$$

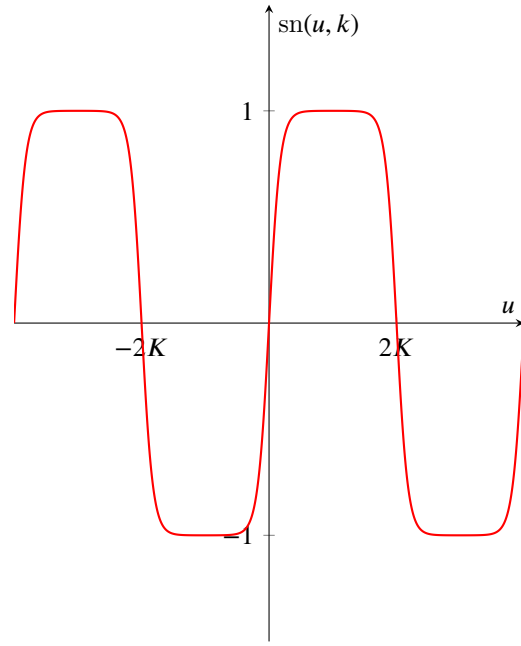


Рис. 1. Еліптичний синус Якобі.

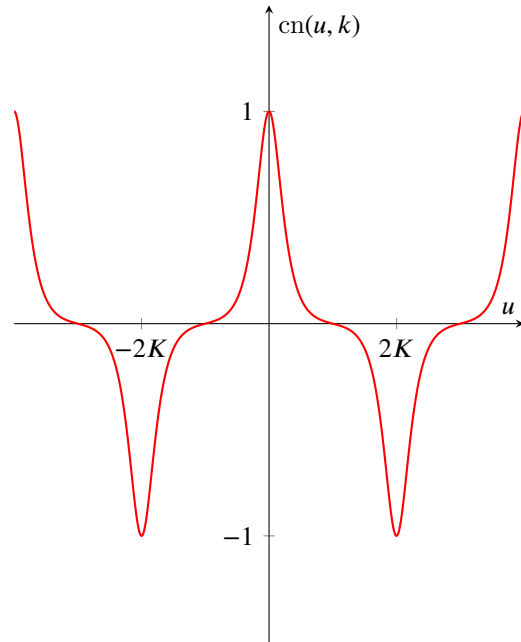


Рис. 2. Еліптичний косинус Якобі.

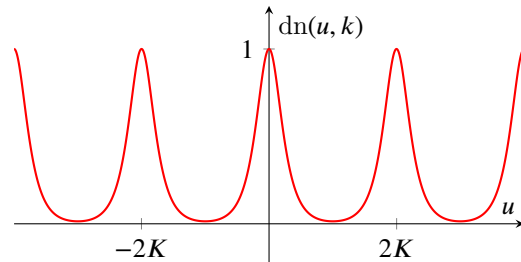


Рис. 3. Дельта амплітуди Якобі.

2. Розв'язки рівняння Гросса-Пітаєвського в системі з двома потенціальними ямами

2.1. Постановка задачі

Потенціальна яма — це концепція, яка описує область простору, де потенціальна енергія частинки є нижчою порівняно з енергією навколишніх областей.

В даній роботі розглядається модельна система з двома прямокутними ямами, яка часто використовується для аналізу локалізованих станів у квантовій механіці.

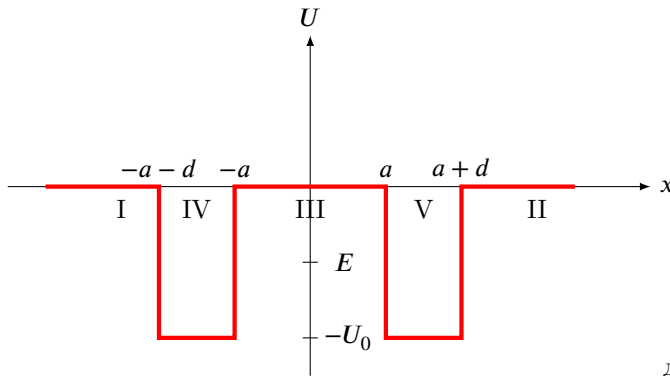


Рис. 4. Досліджувана система з двома прямокутними потенціальними ямами.

В даній системі дві симетричні прямокутні потенціальні ями (шириною d кожна) розташовані на відстані $2a$ одна від одної. В областях IV та V потенціал $U = -U_0$ описує глибину ям.

Розглянемо випадки лінійного та нелінійного середовища в потенціальних ямах і лінійного оточуючого середовища [4].

Задача зводиться до знаходження розв'язків відповідного стаціонарного рівняння Гросса-Пітаєвського в кожній з п'яти областей:

$$E\psi = -\frac{d^2\psi}{dx^2} + 2\psi^3 - U_0\psi. \quad (1)$$

При цьому відповідні розв'язки повинні задовольняти граничним умовам неперервності хвильових функцій та їх похідних (умовам "зшивки") на границях областей:

$$\begin{cases} \psi_1|_{-a-d-0} = \psi_4|_{-a-d+0}, \\ \psi_4|_{-a-0} = \psi_3|_{-a+0}, \\ \psi_3|_{a-0} = \psi_5|_{a+0}, \\ \psi_5|_{a+d-0} = \psi_2|_{a+d+0}. \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} \psi_1'|_{-a-d-0} = \psi_4'|_{-a-d+0}, \\ \psi_4'|_{-a-0} = \psi_3'|_{-a+0}, \\ \psi_3'|_{a-0} = \psi_5'|_{a+0}, \\ \psi_5'|_{a+d-0} = \psi_2'|_{a+d+0}. \end{cases} \quad (3)$$

Зауважимо, що в областях I-III значення енергії можуть бути тільки не додатними, а в областях IV і V значення E знаходяться в діапазоні $-U_0 \leq E \leq 0$. Розглянемо кожен з двох випадків окремо.

2.2. Лінійне середовище в потенціальних ямах і лінійне оточуюче середовище

Нехай досліджувана модельна система складається з суцільного лінійного середовища, як всередині потенціальних ям, так і в їх оточенні. Рівняння Гросса-Пітаєвського в кожній з п'яти областей зводиться до такого вигляду:

$$E \cdot \psi_{1,2,3} = -\frac{d^2\psi_{1,2,3}}{dx^2}, \quad (4)$$

$$E \cdot \psi_{4,5} = -\frac{d^2\psi_{4,5}}{dx^2} - U_0 \cdot \psi_{4,5}. \quad (5)$$

Відповідні розв'язки шукаємо у вигляді:

$$\psi_1 = Ae^{\sqrt{|E|x}}, \quad \psi_2 = Ae^{-\sqrt{|E|x}}, \quad (6)$$

$$\psi_3 = 2A_3 \cosh(\sqrt{|E|x}), \quad (7)$$

$$\psi_{4,5} = C_{4,5} \cos(\epsilon x) + D_{4,5} \sin(\epsilon x), \quad (8)$$

де $\epsilon^2 = U_0 - \sqrt{|E|}$.

Задовольняючи граничні умови, враховуючи симетрію функцій і використовуючи умову нормування, запишемо кінцеві розв'язки в кожній з п'яти областей [4]:

$$\psi_{1,2}(x) = \frac{\text{ch}^2 \sqrt{|E|} a + \mu^2 \text{sh}^2 \sqrt{|E|} a - \mu^2 \text{sh}^2 \sqrt{|E|} a}{\sqrt{\Omega(1+\mu^2)} \sqrt{\text{ch}^2 \sqrt{|E|} a + \mu^2 \text{sh}^2 \sqrt{|E|} a}} \cdot e^{\sqrt{|E|(a+d \pm x)}}, \quad (9)$$

$$\psi_3 = \frac{\text{ch}(\sqrt{|E|x})}{\sqrt{\Omega}}, \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \psi_{4,5} = & \frac{\text{ch} \sqrt{|E|} a \cdot \cos \epsilon a - \mu \text{sh} \sqrt{|E|} a \cdot \sin \epsilon a}{\sqrt{\Omega}} \cos \epsilon x \mp \\ & \mp \frac{\text{ch} \sqrt{|E|} a \cdot \sin \epsilon a + \mu \text{sh} \sqrt{|E|} a \cdot \cos \epsilon a}{\sqrt{\Omega}} \sin \epsilon x, \end{aligned} \quad (11)$$

де $\mu = \frac{\sqrt{|E|}}{\epsilon}$, а параметр Ω дорівнює

$$\begin{aligned} \Omega = & a + d \left(\text{ch}^2 \sqrt{|E|} a + \mu^2 \text{sh}^2 \sqrt{|E|} a \right) + \\ & + \frac{1}{\sqrt{E}} \left(\text{sh} \left(2\sqrt{|E|} a \right) + \text{ch}^2 \sqrt{|E|} a \right) + \\ & + 2 \frac{\mu}{\epsilon} \frac{\text{sh} \sqrt{|E|} a \left(\text{ch} \sqrt{|E|} a - \text{sh} \sqrt{|E|} a \right)}{\text{ch}^2 \sqrt{|E|} a + \mu^2 \text{sh}^2 \sqrt{|E|} a}. \end{aligned} \quad (12)$$

2.3. Нелінійне середовище в потенціальних ямах і лінійне оточуюче середовище

У цьому випадку в середовищі в областях I-III є лінійним, а в областях IV-V — нелінійним. Відповідно, рівняння для областей IV-V стає нелінійним:

$$E \cdot \psi_{1,2,3} = -\frac{d^2 \psi_{1,2,3}}{dx^2}, \quad (13)$$

$$E \cdot \psi_{4,5} = -\frac{d^2 \psi_{4,5}}{dx^2} + 2 \cdot \psi_{4,5}^3 - U_0 \cdot \psi_{4,5}. \quad (14)$$

Використовуючи крайові умови і враховуючи симетрію функцій, отримаємо наступні розв'язки в кожній з п'яти областей [4]:

$$\psi_{1,2} = q\gamma \frac{\operatorname{cn}(\gamma(a+d), q)}{\operatorname{dn}(\gamma(a+d), q)} e^{\sqrt{|E|(a+d \pm x)}}, \quad (15)$$

$$\psi_3 = \frac{\sqrt{|E|q^2\gamma^2\operatorname{cn}^2(\gamma a, q) \cdot \operatorname{dn}^2(\gamma a, q) - q^2q'^4\gamma^4\operatorname{sn}^2(\gamma a, q)}}{\sqrt{|E|\operatorname{dn}^2(\gamma a, q)}} \cdot \operatorname{ch}(\sqrt{|E|x}), \quad (16)$$

$$\psi_{4,5}(x) = \gamma q \frac{\operatorname{cn}(\gamma x, q)}{\operatorname{dn}(\gamma x, q)}, \quad (17)$$

де $\gamma = \frac{\epsilon}{\sqrt{1+q^2}}$ і $q' = \sqrt{1-q^2}$. Параметр q як функція параметрів системи a , d та E визначається із співвідношення

$$\sqrt{|E|} \operatorname{cn}(\gamma(a+d), q) = q^2 \gamma \frac{\operatorname{sn}(\gamma(a+d), q)}{\operatorname{dn}(\gamma(a+d), q)}. \quad (18)$$

Розв'язки (15)–(18) для локалізованих станів дозволяють визначити загальне число елементарних збуджень в БЕК $N = \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi|^2 dx$ завдяки нелінійності середовища в потенціальних ямах [4].

Висновки

У роботі досліджено локалізовані стани Бозе–Ейнштейнівського конденсату в оптичних ґратках в рамках рівняння Гросса–Пітаєвського з двома ідентичними пастками в якості утримуючого потенціалу. Проаналізовано розв'язки для локалізованих станів БЕК у випадках лінійного та нелінійного середовища в потенціальних ямах і лінійного навколишнього середовища.

Перелік використаних джерел

1. *Emspak J.* Bose-Einstein Condensate: The Fifth State of Matter. — 06/01/2016. — URL: <https://www.livescience.com/54667-bose-einstein-condensate.html>.
2. *Pitaevskii L., Stringari S.* Bose-Einstein Condensation. — Oxford, New York : Oxford University Press, 2003. — P. 400. — ISBN 978-0-19-850719-2.
3. *The Nobel Prize Organization.* The Nobel Prize in Physics 2001: Popular Information. — 10/09/2001. — URL: <https://www.nobelprize.org/prizes/physics/2001/popular-information>.
4. *Gerasimchuk V. S., Gerasimchuk I. V., Dranik N. I.* Solutions of Nonlinear Schrödinger Equation with Two Potential Wells in Linear/Nonlinear Media // Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry. — 2016. — Vol. 12, no. 2. — P. 168–176.
5. *Янке Э., Эмде Ф., Лёш Ф.* Специальные функции: Формулы, графики, таблицы. — Москва : Наука, 1964. — С. 344.
6. *Косевич А. М., Ковалев А. С.* Введение в нелинейную физическую механику. — Киев : Наукова думка, 1989. — С. 304. — ISBN 5-12-000865-8.