

УНІВЕРСАЛЬНА КВАНТОВА СХЕМА ДЛЯ ДВОКУБІТНОГО ПЕРЕТВОРЕННЯ

Л. Ю. Карасьова¹

¹ Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут»

Анотація

У даній роботі запропонована і детально описується схема побудови універсального алгоритму обробки інформації на двох кубітах.

Ключові слова: квантовий комп'ютер; унітарна матриця; кубіт; квантове перетворення; гейт

Вступ

Універсальний квантовий комп'ютер – пристрій, здатний імітувати будь-яку фізичну систему і є важливою метою в сфері квантової інформатики. У класичному комп'ютері будь-яка програма в результаті може бути розкладена на послідовність операцій, реалізованих з допомогою логічних гейтів. Подібне розкладання існує і для квантових процесорів: довільні операції на системі з декількох кубітів можуть бути розбиті на послідовності дискретних операторів – «квантових гейтів». Проте, в порівнянні з класичним комп'ютером, який призначений для фіксованих завдань, програмований квантовий комп'ютер є більш універсальним. Сьогодні досить легко реалізувати операцію, яка ґрунтується на довільному однокубітному гейті, або на одному переплутаному двокубітному [1, 2]. Але реалізація довільних гейтів, що діють на двох і більше кубітах, є експериментально складною, тому багато зусиль направлено на представлення таких гейтів через більш простіші, а також на мінімізацію такого представлення. Деякі вдало підібрані операції можуть бути виконані з двома або й меншою кількістю застосувань двокубітних гейтів, але вони утворюють нескінченну підмножину в просторі двокубітних операцій. Для системи з двох кубітів три застосування максимально переплутаного двокубітного гейта в поєднанні з додатковими однокубітними гейтами, достатні для універсальності. У даній роботі представлений універсальний квантовий процесор, який може реалізувати будь-яке двокубітне унітарне перетворення, запрограмоване з 15 класичними входами [3].

1. Основна ідея

Декомпозиція вхідної операції залежить від наявних наборів гейтів. В даній роботі описується універсальна бібліотека гейтів, що складається з однокубітних гейтів і одного максимально переплутаного гейта. Однокубітні гейти – це повороти в Гільберто-

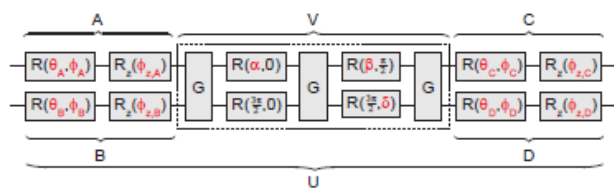


Рис. 1. Компоненти для універсальних обчислень

вому просторі, що мають наступний вигляд:

$$R(\theta, \varphi) = \exp[-i \cdot \theta (\cos \varphi \cdot \sigma_x + \sin \varphi \cdot \sigma_y)]/2 \quad (1)$$

$$R_z(\varphi_z) = \exp[-i \cdot \varphi_z \cdot \sigma_z]/2 \quad (2)$$

в обчислювальній базисі $|1\rangle \equiv (1, 0)$, $|0\rangle \equiv (0, 1)$. Тут σ_x , σ_y , σ_z – матриці Паулі. Однокубітні гейти мають змінні θ , φ , φ_z , які можуть приймати будь-яке значення від 0 до 2π . Переплутаний двокубітний гейт

$$G = \exp[-i \cdot \pi/4] \cdot \exp[\frac{i \cdot \pi}{4} \cdot \sigma_z \otimes \sigma_z] \quad (3)$$

діє на базисі $|00\rangle$, $|01\rangle$, $|10\rangle$, $|11\rangle$. Тут $\otimes$ позначає тензорний добуток, а $|ij\rangle \equiv |i\rangle \otimes |j\rangle$. З такою бібліотекою гейтів можна реалізувати схему, зображену на рис. 1, яка використовується для представлення довільного унітарного перетворення на двох кубітах. Однокубітна операція характеризується трьома степенями свободи і може бути розкладена на матричний добуток $R_z(\varphi_z) \cdot R(\theta, \varphi)$. Кожне двокубітне унітарне перетворення описується 15 степенями свободи [3, 4]. Група всіх таких перетворень може бути поділена на підмножини, які еквівалентні однокубітним операціям. Такі підмножини називаються локально еквівалентними класами тому, що локальними операціями можна отримати будь-який елемент класу. Кожен локально еквівалентний клас може описуватися трьома параметрами. Дане унітарне перетворення U ми розкладаємо на $U = (C \otimes D) \cdot V \cdot (A \otimes B)$. Тут V в тому ж локально еквівалентному класі, що й U , і у такій формі, що дозволяє мінімізувати кількість використаних гейтів. A і C – однокубітні операції, що діють на один кубіт, а B і D – однокубітні операції над іншим кубітом. Визначення 15 параметрів однокубітних гейтів спрощується роботою в так званому

«магічному базисі» [4]:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|11\rangle + |00\rangle), \frac{i}{\sqrt{2}}(|11\rangle - |00\rangle) \\ \frac{i}{\sqrt{2}}(|10\rangle + |01\rangle), \frac{1}{\sqrt{2}}(|10\rangle - |01\rangle).$$

В цьому базисі однокубітні операції з одиничним детермінантом відповідають дійсним ортогональним матрицям; двокубітні операції u і v належать одному класу локальної еквівалентності, якщо і тільки якщо uu^T і vv^T мають однакові власні значення [5] (u^T – транспонована матриця u у магічному базисі).

2. Алгоритмічні деталі методу

Для розрахування 15 параметрів вхідної двокубітної операції U спочатку необхідно перейти до магічного базису [4]. Перехід до магічного базису від двокубітного обчислювального базису $|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle$ здійснюється з допомогою використання унітарної матриці

$$\Lambda = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 1 \\ 0 & 0 & i & -1 \\ 1 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Таким чином, матриця в обчислювальному базисі позначена великою літерою, а в магічному – маленькою: $m = \Lambda^\dagger M \Lambda$. Спочатку знайдемо три степені свободи α, β, δ , які утворюють правильний локально еквівалентний клас. Ми розкладаємо схему з Рис.1 як

$$U = (C \otimes D) \cdot V \cdot (A \otimes B), \quad (5)$$

де V визначає локально еквівалентний клас і генерується з допомогою гейтових операцій, виділених пунктиром на рис.1. Для того, щоб побудувати V , ми переводимо обидві матриці V і U в магічний базис як v і u і вибираємо α, β, δ так, щоб власні значення uu^T і vv^T були однаковими. Це робиться шляхом порівняння аналітичних форм власних векторів vv^T та uu^T . Оскільки uu^T є унітарною, то вона має комплексні власні значення, які за модулем рівні одиниці: $\lambda_j = e^{i\varphi_j} (j \in 1, 2, 3, 4)$. α, β і δ представляються, як пари фаз власних значень. Таких представлень може бути багато, оскільки ніяких вимог щодо порядку власних значень не накладається. Тому ми обрали одне із можливих таких представлень: $\alpha = (\varphi_1 + \varphi_2)/2$, $\beta = (\varphi_1 + \varphi_3)/2$, $\delta = (\varphi_2 + \varphi_3)/2$. Тепер знайдемо чотири однокубітні повороти A, B, C, D , що містять в собі решту 12 степенів свободи. Зазначимо, що vv^T та uu^T – унітарні симетричні матриці, тому вони мають дійсні, ортонормальні власні вектори [4, 5]. Оскільки вони поділяють власні значення, то їх можна одночасно діагоналізувати з допомогою матриць k і l наступним

чином:

$$kvv^T k^T = luu^T l^T. \quad (6)$$

Тут k і l – власні вектори, колонки яких були переставлені так, щоб виконувалась рівність (6). На основі рівності (6) ми отримали

$$I = v^\dagger k^T l u u^T l^T k v^* = v^\dagger k^T l u (v^\dagger k^T l u)^T \quad (7)$$

(тут I – одинична матриця), звідки знаходимо, що $m \equiv v^\dagger k^T l u$. Тепер маємо

$$u = l^T k v m, \quad (8)$$

де $l^T k$ і m – дійсні. Оскільки вони є дійсними ортогональними матрицями в магічному базисі, то вони представляють однокубітні повороти. Ми переводимо рівність (8) в обчислювальний базис і порівнюємо з рівністю (5). Маємо

$$C \otimes D = \Lambda (l^T l) \Lambda^T \quad (9)$$

$$A \otimes B = \Lambda m \Lambda^T. \quad (10)$$

Останнім кроком є розбиття $A \otimes B$ і $C \otimes D$ на A, B, C, D і знаходження $\theta, \varphi, \varphi_z$ для кожної.

Висновки

У даній роботі була розглянута можливість представлення будь-якого квантового перетворення з допомогою набору з трьох операторів CNOT і декількох локальних операторів. Така оптимізація конструкції становлять досить значний інтерес принаймні з двох причин. По-перше, вона грає роль у визначенні алгоритмічної складності вхідного квантового обчислення, тобто кількості елементарних операторів, необхідних для здійснення відповідного n -кубітного унітарного перетворення. По-друге, дозволяє здійснювати довільні унітарні перетворення за допомогою однієї схеми, тобто, робить їх обробку універсальною.

Перелік використаних джерел

1. Barenco A., Bennett C. H. and others Elementary gates for quantum computation.. — 1995. — 52., 3457–3467.
2. Bremner M. J. and others Practical scheme for quantum computation with any two-qubit entangling gate. — 2002. — 89., 247902.
3. Vidal G. and Dawson C. M. A universal quantum circuit for two-qubit transformations with three CNOT gates. — 2004. — 69., 010301.
4. Kraus B. and Cirac J. I. Optimal creation of entanglement using a two-qubit gate. — 2001. — 63., 062309.
5. Makhlin Y. Nonlocal properties of two-qubit gates and mixed states, and the optimization of quantum computations. — 2002. — 1., 243–252.