

Міністерство освіти та науки України
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут і Ігоря Сікорського»
Механіко-машинобудівний інститут
кафедра Інтегрованих технологій машинобудування

Методичні вказівки з практичної роботи студентів з курсу

ОСНОВИ ФОРМОУТВОРЕННЯ ПОВЕРХОНЬ

**Тема: Координатні перетворення, кінематичний спосіб утворення
поверхонь**

підготовки бакалавр
(назва освітньо-кваліфікаційного рівня)

напряму 6.050503 – Машинобудування
(шифр і назва)

спеціальності 8,05050302 - Інструментальне виробництво
(шифр і назва)

спеціалізації _____
(назва)

форми навчання денна
(денна/заочна)

Основи формоутворення поверхонь [Електронний ресурс]: Методичні вказівки до виконання практичної роботи «Координатні перетворення, кінематичний спосіб утворення поверхонь» для студентів напрямку підготовки 6.050503 – Машинобудування / Уклад.: О.А. Охріменко, К.: «КПІ ім. Ігоря Сікорського», 2017. – 29 с.

Рекомендовано вченою радою ММІ НТУУ «КПІ»
(Протокол № 1 від 29 серпня 2017 р.)

ЕЛЕКТРОННЕ НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

ОСНОВИ ФОРМОУТВОРЕННЯ ПОВЕРХОНЬ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДО ВИКОНАННЯ ПРАКТИЧНОЇ РОБОТИ

Координатні перетворення, кінематичний спосіб утворення поверхонь

Для студентів напрямку підготовки 6.050503 – машинобудування

Укладач: Охріменко Олександр Анатолійович, д.т.н., доц.

Відповідальний редактор: В.А. Пасічник, д.т.н., проф.

Рецензент: Д.А. Красновид, к.т.н., доц.

Практична робота: Координатні перетворення, кінематичний спосіб утворення поверхонь.

Тема: Вивчення координатних перетворень та їх основі кінематичного способу утворення поверхонь.

Завдання: За допомогою координатних та афінних перетворень в матричній формі отримати рівняння поверхні при різних способах руху її твірної її профілю: обертання навколо осі X, обертання навколо осі Y, гвинтовий рух відносно осі X, та знайти форму кривої торцевого перерізу цієї поверхні. Також в довільному перерізі розташованому в площині, що проходить через вісь Y побудовано за допомогою набору точок сплайнову криву, необхідно отримати рівняння поверхні при гвинтовому русі такої твірної відносно осі X та отримати характеристики цієї поверхні: торцевий та осьовий її переріз.

1. Теоретичні відомості: Координатні та афінні перетворення та їх запис в матричній формі.

Дуже часто під час розв'язання практичних задач при проектуванні інструменту, аналізу формоутворення поверхонь виникають задачі, що до розрахунку координат при формоутворюючих рухах, що викликані зміною координат у просторі.

Також при формоутворенні поверхні деталі при механічній обробці, що математично відповідає процедурі афінного перетворення. Це перетворення називається афінним, якщо його можна отримати наступним способом: обрати «новий» базис простору з «новим» початком координат; координатам x кожної точки простору поставити у відповідність нові координати $f(x)$, які мають те саме положення в просторі відносно « нової » системи координат, яке координати мали в « старій ». Інакше кажучи утворення поверхні виробу інструментом є аналог афінного перетворення, або утворення поверхні виробу за рахунок руху постійної твірної, яка робить свій « слід » на заготовці деталі.

Основні рухи при формоутворенні, це 3 поступальних рухи відносно осей координат та 3 обертальних відповідно. На площині відповідно це 2 поступальних рухи і один обертальний. Основні координатні перетворення на площині показані на рис.1.

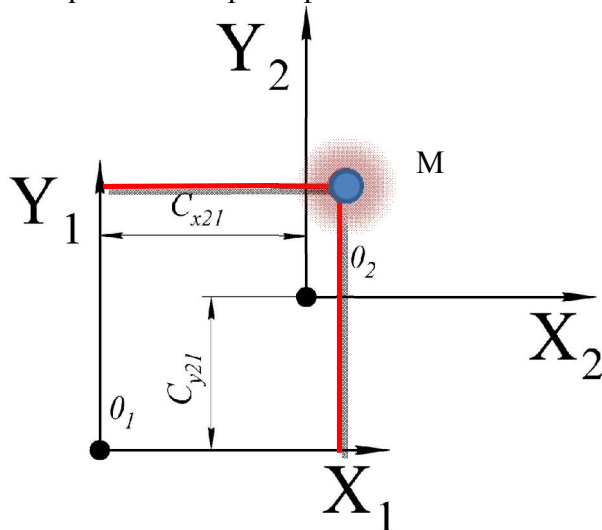


Рис.1. Паралельний перенос систем координат.

Координати точки M (рис.1) в різних системах координат запишуться наступним чином:

$$\begin{aligned} X_2 &= X_1 + C_{x21} & X_1 &= X_2 - C_{x21} \\ Y_2 &= Y_1 + C_{y21} & Y_1 &= Y_2 - C_{y21} \end{aligned} \quad , (1)$$

Де, X_1, Y_1, X_2, Y_2 – координати точки M в системі $S1(X_1, Y_1)$ і в системі $S2(X_2, Y_2)$ відповідно, C_{x21}, C_{y21} – координати центру системи координат O_2 $S2(X_2, Y_2)$ в системі $S1(X_1, Y_1)$.

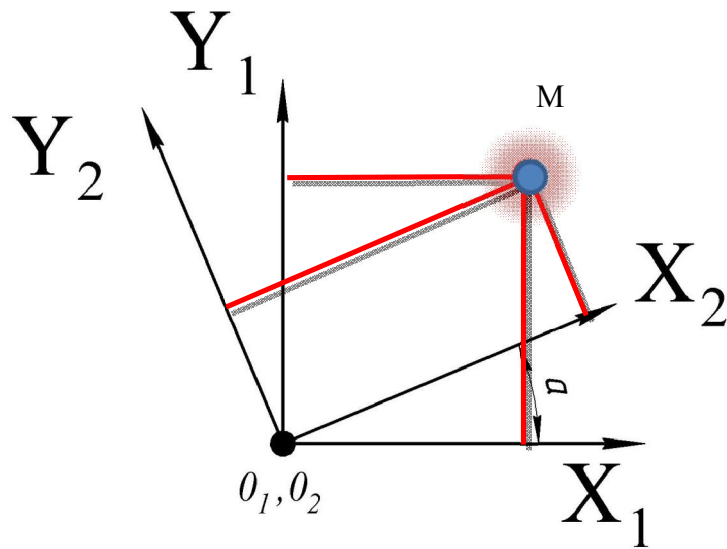


Рис.2. Поворот осей систем координат.

Координати точки М (рис.2) в різних системах координат запишуться наступним чином:

$$\begin{aligned} X_2 &= X_1 \cos \alpha + Y_1 \sin \alpha & X_1 &= X_2 \cos \alpha - Y_2 \sin \alpha \\ Y_2 &= -X_1 \sin \alpha + Y_1 \cos \alpha & Y_1 &= X_2 \sin \alpha + Y_2 \cos \alpha \end{aligned} \quad , (2)$$

Де, X_1, Y_1, X_2, Y_2 – координати точки М в системі $S1(X_1, Y_1)$ і в системі $S2(X_2, Y_2)$ відповідно, α – кут повороту системи $S2(X_2, Y_2)$ відносно системи $S1(X_1, Y_1)$, додатне значення відраховується при повороті проти годинникової стрілки.

У випадку коли в системі реалізується складний рух і відповідно кий можна описати розклавши його на окремі складові то для спрощення такого запису залежності (1), (2) та їх комбінації зручніше представляти в матричному записі, використовуючи властивість добутку матриць:

- поворот осей прямий перехід від $S1(X_1, Y_1)$ до $S2(X_2, Y_2)$:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 \cos \alpha + Y_1 \sin \alpha \\ -X_1 \sin \alpha + Y_1 \cos \alpha \end{pmatrix} \\ M_a &= \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \end{aligned} \quad , (3)$$

де, M_a – матриця повороту.

- поворот осей зворотній перехід від $S2(X_2, Y_2)$ до $S1(X_1, Y_1)$:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{pmatrix} &= M_a^{-1} \cdot \begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_2 \cos \alpha - Y_2 \sin \alpha \\ X_2 \sin \alpha + Y_2 \cos \alpha \end{pmatrix} \\ M_a^{-1} &= \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \end{aligned} \quad , (4)$$

де, M_a^{-1} – обернена матриця повороту.

- поворот осей разом з паралельним переносом:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \end{pmatrix} &= M_a \cdot \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{pmatrix} + M_c = \begin{pmatrix} X_1 \cos \alpha + Y_1 \sin \alpha + C_{x21} \\ -X_1 \sin \alpha + Y_1 \cos \alpha + C_{y21} \end{pmatrix} \\ M_a &= \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}; M_c = \begin{pmatrix} C_{x21} \\ C_{y21} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad , (5)$$

де, M_c – матриця переносу центру систем координат.

Відповідно при складному русі відповідним чином комбінуючи матриці переносу і додавання отримаємо залежності, що описують зв'язок між системами координат при цьому русі.

Аналогічним чином описують перетворення координат у просторі тільки матриця повороту буде 3×3 а матриця переносу 3×1 . До недоліків такого способу запису перетворення координат слід віднести наступне, що в залежності (5) присутнє 2 види математичних операції, це множення – поворот осей і додавання – перенос осей, тому для уніфікації запису цих розрахунків було запропоновано розширену систему матричного запису за допомогою матриць 4×4 , при такому записі всі операції повороту і переносу осей записується, як добуток матриць:

Матриці координатних перетворень

Стара система координат $S_1(x_1, y_1, z_1)$

Нова система координат $S_2(x_2, y_2, z_2)$

Перехід від $S_1 \rightarrow S_2$ $m_{r2} = m_{v21} c_{21} m_{r1}$

$$m_{r1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{- Радіус вектор точки в старій системі координат (S_1)}$$

$$m_{v_{x21}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos v_{x21} & \sin v_{x21} & 0 \\ 0 & -\sin v_{x21} & \cos v_{x21} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{- поворот навколо осі } x_1 \text{ проти годинникової стрілки на кут } v_{x21}$$

$$m_{v_{y21}} = \begin{pmatrix} \cos v_{y21} & 0 & -\sin v_{y21} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin v_{y21} & 0 & \cos v_{y21} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{- поворот навколо осі } y_1 \text{ проти годинникової стрілки на кут } v_{y21}$$

$$m_{v_{z21}} = \begin{pmatrix} \cos v_{z21} & \sin v_{z21} & 0 & 0 \\ -\sin v_{z21} & \cos v_{z21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{- поворот навколо осі } z_1 \text{ проти годинникової стрілки на кут } v_{z21}$$

$$m_{c_{21}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & c_{x21} \\ 0 & 1 & 0 & c_{y21} \\ 0 & 0 & 1 & c_{z21} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{- координати центра старої системи координат } S_1 \text{ в новій системі } S_2$$

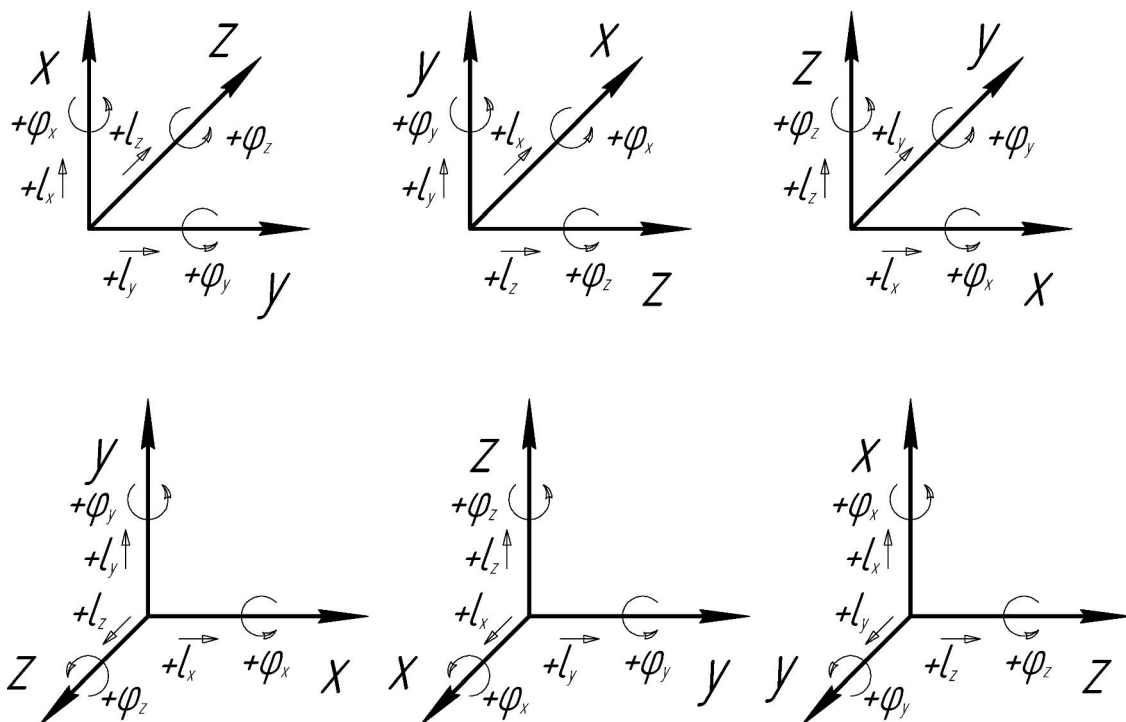
,(6)

Таким чином використовуючи матриці координатних перетворень (6) та комбінуючи їх можемо описати будь-який рух в 3-х вимірному просторі.

Доповненням до матричних перетворень (6) є матриці афінних та координатних перетворень:

Матриці афінних та координатних перетворень. $\nu_x, \nu_y, \nu_z, c_x, c_y, c_z$.

Праві системи координат.



Матриці афінних перетворень

$$\begin{aligned}
 m_{\varphi_x} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi_x & -\sin \varphi_x & 0 \\ 0 & \sin \varphi_x & \cos \varphi_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & m_{\varphi_y} &= \begin{pmatrix} \cos \varphi_y & 0 & \sin \varphi_y & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \varphi_y & 0 & \cos \varphi_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 m_{\varphi_z} &= \begin{pmatrix} \cos \varphi_z & -\sin \varphi_z & 0 & 0 \\ \sin \varphi_z & \cos \varphi_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & m_{l_x} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & l_x \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 m_{l_y} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & l_y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & m_{l_z} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

,(7)

Більшість поверхонь деталей та вихідних інструментальних поверхонь, утворюються, як кінематичні поверхні, а саме певним рухом твірної (рис. 3). Для опису яких необхідно задати твірну та її рух, що повністю описується залежностями (7).

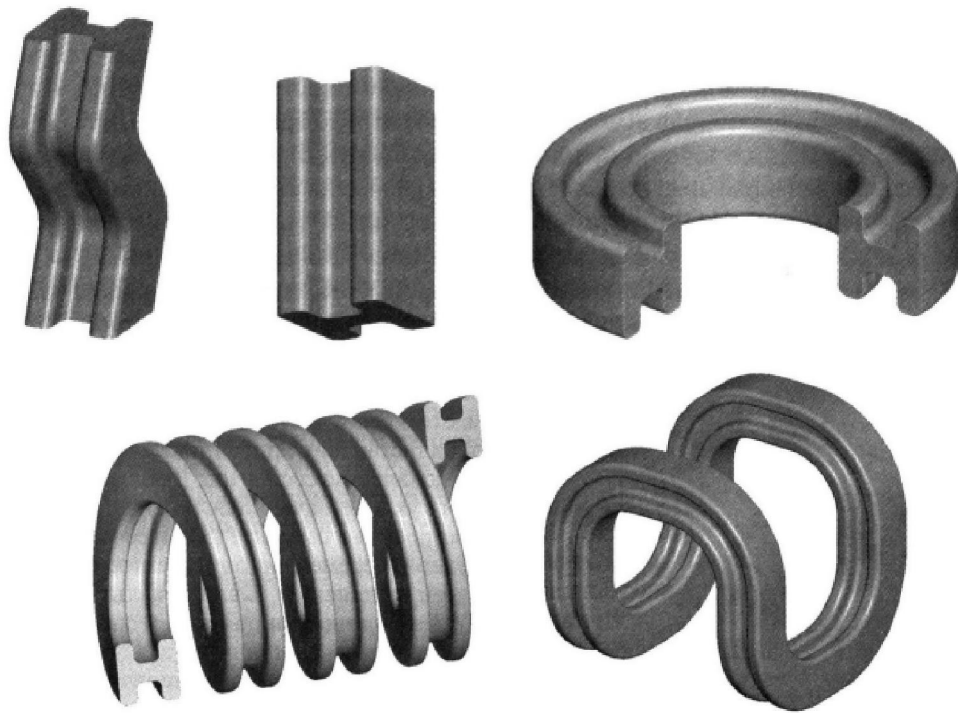


Рис.3. Кінематичні поверхні.

Для того, щоб отримати рівняння такої поверхні необхідно записати рівняння твірної, це буде вектор стовпчик 4×1 для розширених матриць афінних перетворень (7):

$$R_1 = \begin{pmatrix} f_x(u) \\ f_y(u) \\ f_z(u) \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (8)$$

, де $f_x(u)$, $f_y(u)$, $f_z(u)$ – параметричні функції що описують рівняння твірної кривої. Якщо твірна крива плоска то один із компонентів $f_x(u)$, $f_y(u)$, $f_z(u)$ може бути рівний нулю.

Найбільш вживаними геометричними примітивами при описі поверхонь в машинобудуванні є пряма лінія та коло, для прямої лінії, що задана на площині рівняння твірної запишеться наступним чином (рис.4.):

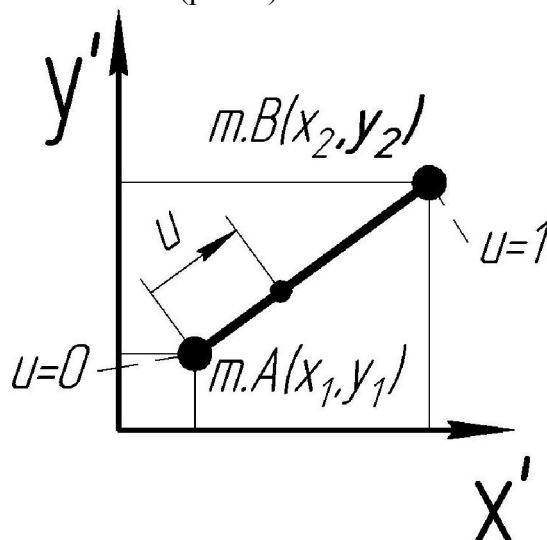


Рис. 4. Твірна – пряма лінія.

$$f_x(u) = x_1 + kx_{12}u; f_y(u) = y_1 + ky_{12}u; kx_{12} = x_2 - x_1; ky_{12} = y_2 - y_1; u = 0..1 \quad , (9)$$

, де x_1, y_1, x_2, y_2 – координати точок кінців відрізків прямої лінії твірної в обраній системі координат, u - параметр, що описує положення точки на прямій і в межах цього відрізка, що обмежений точками А і В (рис.4) він приймає значення від 0 до 1.

Другим найбільш вживаним геометричним плоским примітивом, є коло – дуга кола (рис.5).

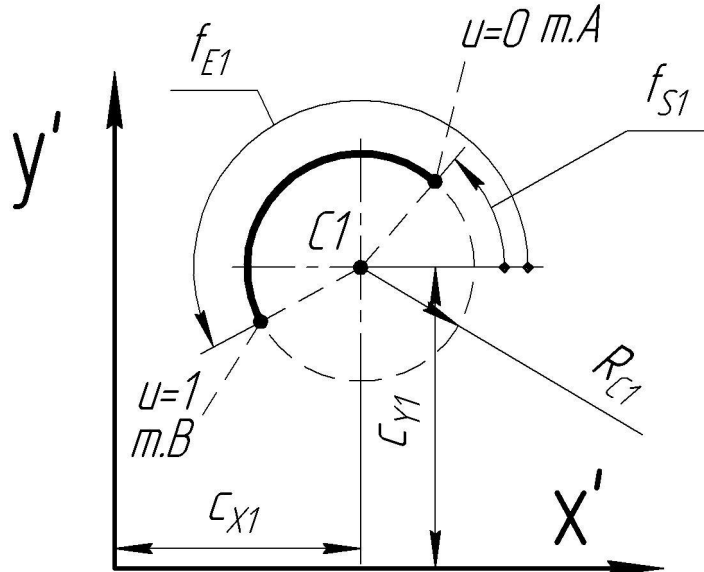


Рис.5. Твірна – дуга кола.

Параметри, що описують дугу кола є наступні (рис.5) : R_{C1} - радіус дуги кола, C_{X1}, C_{Y1} – координати центру дуги кола $C1$, f_{S1} – кут сектору початку дуги кола в т.А, що відраховується від горизонтальної прямої проти годинникової стрілки, f_{E1} – кут сектору закінчення дуги кола в т.В, що відраховується від горизонтальної прямої проти годинникової стрілки. Тоді рівняння твірної, що описує дуга кола в параметричному вигляді запишеться наступним чином:

$$f_x(u) = C_{X1} + R_{C1} \cdot \cos(f_{S1} + kf_{12} \cdot u); f_y(u) = C_{Y1} + R_{C1} \cdot \sin(f_{S1} + kf_{12} \cdot u); \quad , (10)$$

$$kf_{12} = f_{E1} - f_{S1}; u = 0..1$$

, де u - параметр, що описує положення точки на прямій і в межах цього відрізка, що обмежений точками А і В (рис.5) він приймає значення від 0 до 1.

Приклади визначення числових значень кутів початку і кінця дуги сектора для різних випадків розташування дуги кола наведено на рис. 6.

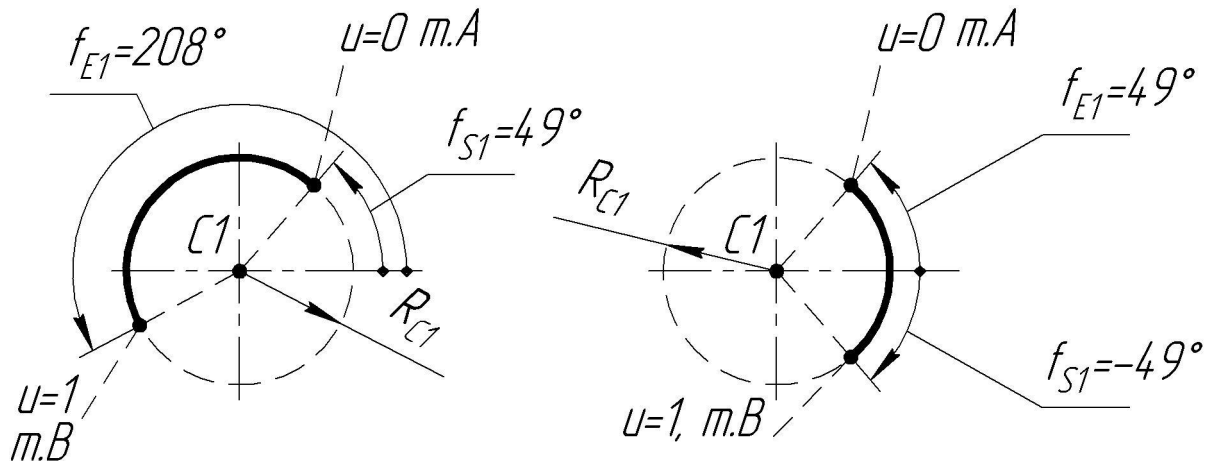


Рис.6. Визначення числових значень кутів початку і кінця дуги сектора для різних випадків розташування дуги кола.

Для прикладу запишемо поверхню, що утворюється при обертанні профілю, що складається з твірної лінії, яка утворена прямим відрізком і дугою кола (рис.7)

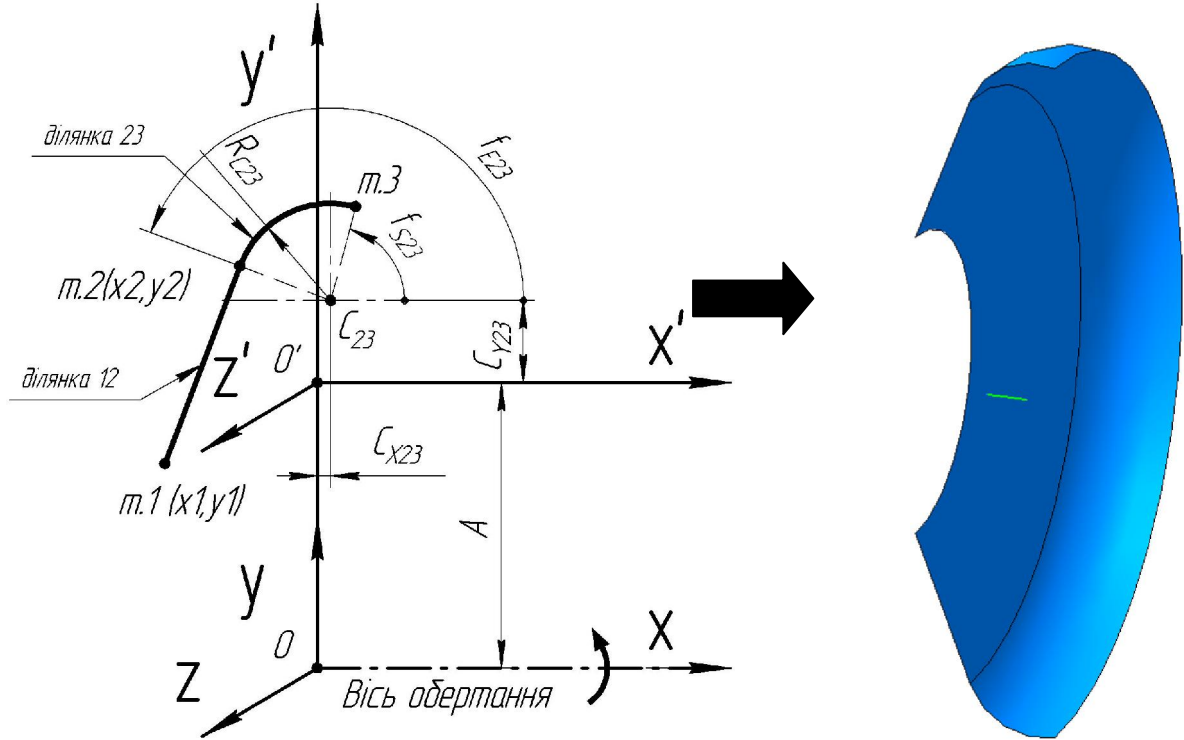


Рис.7. Схема утворення поверхні обертанням профілю навколо осі X.

Відповідно до схеми на рис.7 запишемо рівняння твірної в системі $S'(X', Y', Z')$ для 2 ділянок, ділянка 12 – прямий відрізок, ділянка 23 – дуга кола:

$$R_{12} = \begin{pmatrix} x_1 + kx_{12} \cdot u \\ y_1 + ky_{12} \cdot u \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad R_{23} = \begin{pmatrix} C_{X23} + R_{C23} \cdot \cos(f_{S23} + kf_{23} \cdot u) \\ C_{Y23} + R_{C23} \cdot \sin(f_{S23} + kf_{23} \cdot u) \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , (11)$$

Так як вісь обертання X профілю знаходиться на відстані A від осі X', тоді використовуючи (7) матриця m_{y1} запишемо перетворення переходу від осі X' до X:

$$m_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & A \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , (12)$$

Поверхня утворюється обертанням профілю навколо осі X, тому матриця повороту – афінного перетворення (7) - $m_{\phi X}$ запишеться як:

$$m_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ 0 & \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , (13)$$

Тоді поверхня обертання утворена таким профілем в матричному вигляді запишеться наступним чином:

$$R_{F12} = m_2 \cdot m_1 \cdot R_{12}; \quad R_{F23} = m_2 \cdot m_1 \cdot R_{23} \quad , (14)$$

В розширеному вигляді:

$$\begin{aligned}
R_{F12} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ 0 & \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & A \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 + kx_{12} \cdot u \\ y_1 + ky_{12} \cdot u \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \\
R_{F12} &= \begin{pmatrix} x_1 + kx_{12} \cdot u \\ \cos(\varphi) \cdot (y_1 + ky_{12} \cdot u + A) \\ -\sin(\varphi) \cdot (y_1 + ky_{12} \cdot u + A) \\ 1 \end{pmatrix} \\
R_{F23} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ 0 & \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & A \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_{X23} + R_{C23} \cdot \cos(f_{S23} + kf_{23} \cdot u) \\ C_{Y23} + R_{C23} \cdot \sin(f_{S23} + kf_{23} \cdot u) \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \\
R_{F23} &= \begin{pmatrix} C_{X23} + R_{C23} \cdot \cos(f_{S23} + kf_{23} \cdot u) \\ \cos(\varphi) \cdot (C_{Y23} + R_{C23} \cdot \sin(f_{S23} + kf_{23} \cdot u) + A) \\ -\sin(\varphi) \cdot (C_{Y23} + R_{C23} \cdot \sin(f_{S23} + kf_{23} \cdot u) + A) \\ 1 \end{pmatrix} \quad , (15)
\end{aligned}$$

, де R_{F12} , R_{F23} рівняння поверхні, що утворена обертанням профілю навколо осі X, φ – параметр, що відповідає кут повороту твірного профілю, і для побудови поверхні він змінюється від 0^0 до 360^0 .

Для випадку показаному на рис.8 матриці перетворень запишуться наступним чином:

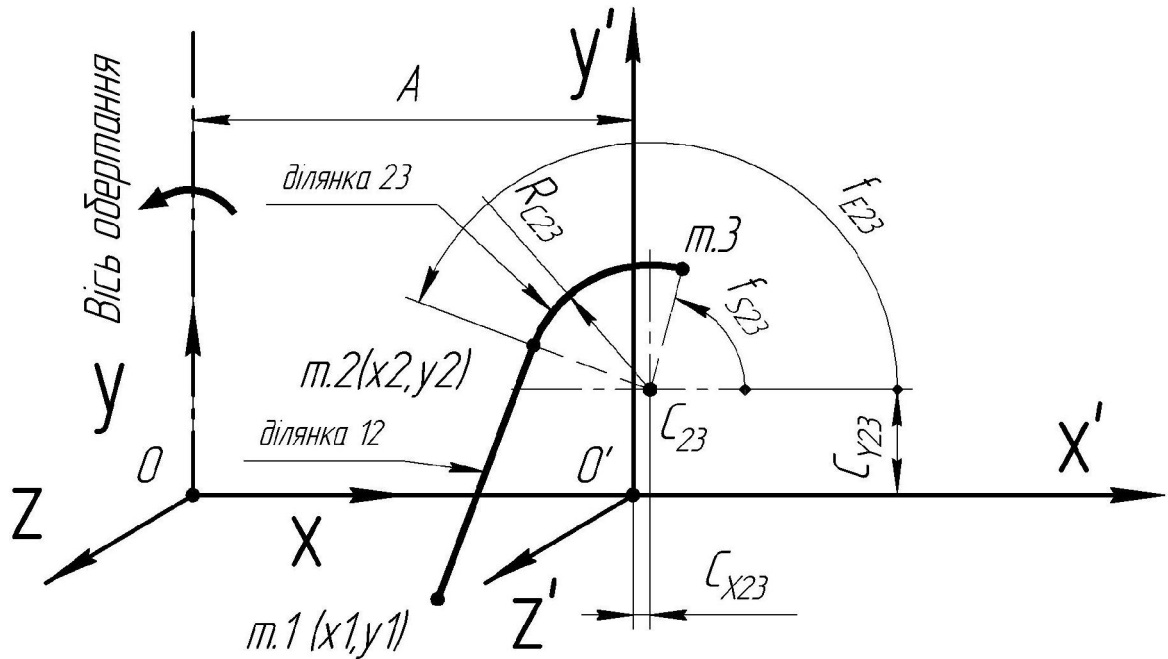


Рис.8. Схема утворення поверхні обертанням профілю навколо осі Y.

$$m_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & A \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad m_2 = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & 0 & -\sin(\varphi) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin(\varphi) & 0 & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , (16)$$

Для випадку коли профіль описує гвинтовий рух уздовж осі Х то необхідно врахувати не тільки поворот навколо осі Х, але й зв'язаний поступальний з ним рух уздовж цієї осі, і тоді матриці перетворення запишуться наступним чином:

$$m_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & A \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad m_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & p \cdot \varphi \\ 0 & \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ 0 & \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , (17)$$

, де p – гвинтовий параметр поверхні, що розраховується, як $p=H/(2\pi)$, H – крок гвинтової поверхні:

$$\begin{aligned} R_{HF12} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & p \cdot \varphi \\ 0 & \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ 0 & \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & A \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 + kx_{12} \cdot u \\ y_1 + ky_{12} \cdot u \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \Rightarrow \\ R_{HF12} &= \begin{pmatrix} x_1 + kx_{12} \cdot u + p \cdot \varphi \\ \cos(\varphi) \cdot (y_1 + ky_{12} \cdot u + A) \\ -\sin(\varphi) \cdot (y_1 + ky_{12} \cdot u + A) \\ 1 \end{pmatrix} \\ R_{HF23} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & p \cdot \varphi \\ 0 & \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ 0 & \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & A \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_{x23} + R_{C23} \cdot \cos(f_{S23} + kf_{23} \cdot u) \\ C_{y23} + R_{C23} \cdot \sin(f_{S23} + kf_{23} \cdot u) \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \Rightarrow \\ R_{HF23} &= \begin{pmatrix} C_{x23} + R_{C23} \cdot \cos(f_{S23} + kf_{23} \cdot u) + p \cdot \varphi \\ \cos(\varphi) \cdot (C_{y23} + R_{C23} \cdot \sin(f_{S23} + kf_{23} \cdot u) + A) \\ -\sin(\varphi) \cdot (C_{y23} + R_{C23} \cdot \sin(f_{S23} + kf_{23} \cdot u) + A) \\ 1 \end{pmatrix} \quad (18) \end{aligned}$$

Для знаходження параметрів торцевого перерізу гвинтової поверхні, це лінія, яка є характеристикою гвинтової поверхні. Щоб знайти параметри цієї лінії необхідно вибрати площину торцевого перерізу (це площина, що перпендикулярна осі гвинтової лінії), найбільш простим є $X=0$, а отже складова координати X при підстановці в рівняння (18) буде мати значення, що дорівнює 0. Тому рівняння складової координати X поверхні R_{H12} , R_{H23} прирівняти до 0 і виразити звідти параметр φ :

$$\begin{aligned} x_1 + kx_{12} \cdot u + p \cdot \varphi &= 0 : \text{прямолінійна ділянка} \\ C_{x23} + R_{C23} \cdot \cos(f_{S23} + kf_{23} \cdot u) + p \cdot \varphi &= 0 : \text{округла ділянка} \end{aligned} \quad , (19)$$

Для кожного значення параметру u від 0 до 1 підставляємо в (19) і знаходимо таке значення φ при якому буде виконуватись дане рівняння, далі отримані значення параметрів φ та u підставляємо в рівняння поверхні (19) по координатам Y, Z і отримуємо координати точок торцевого перерізу і будуємо їх на графіку отримаємо форму торцевого перерізу (рис.9).

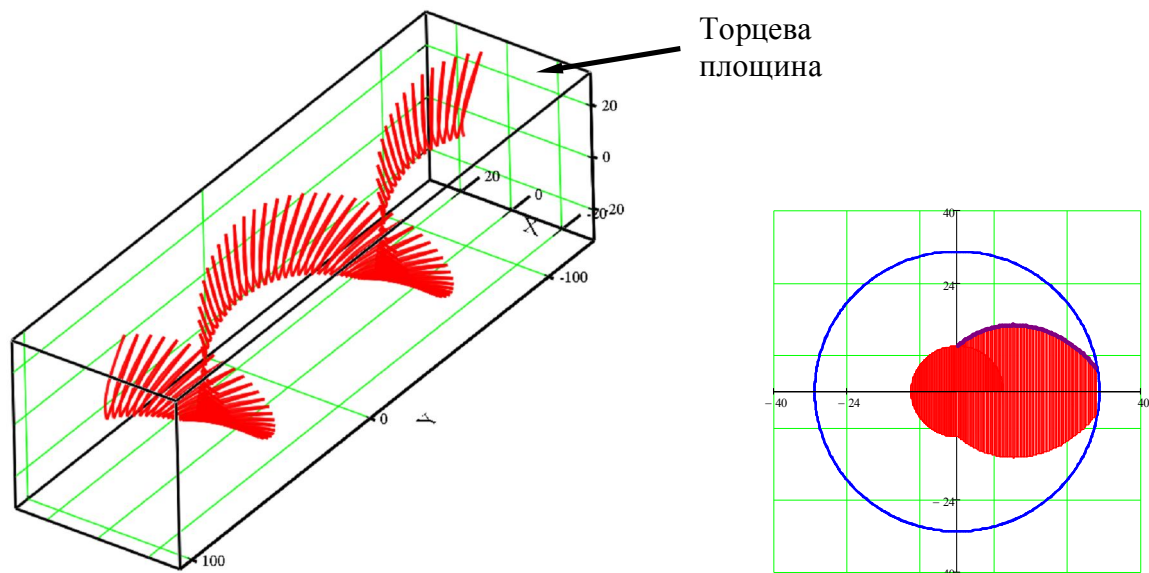


Рис.9. Гвинтова поверхня і її торцевий переріз.

Осьовий переріз такої поверхні повністю співпадає з твірним профілем цієї поверхні так, як він знаходиться в осьовій площині.

Завдання 1 частина 1: Завдання за отриманим рисунком профілю:

- студент самостійно за погодженням з викладачем повинен розробити плоский профіль, який складається мінімум з 5 максимум з 8 ділянок, які послідовно з'єднані одна з одною і в точках дотику можуть мати плавне спряження, навести схему профілю з необхідними розмірами;
- математично описати його ділянки;
- записати рівняння поверхні при обертанні цього профілю навколо осі паралельній X і знаходиться від неї на відстані A (рис.7), побудувати графік поверхні;
- записати рівняння поверхні при обертанні цього профілю навколо осі паралельній Y і знаходиться від неї на відстані A (рис.8), побудувати графік поверхні;
- записати рівняння поверхні при гвинтовому русі (Н-крок гвинтового руху) цього профілю відносно осі X і знаходиться від неї на відстані A і визначити криву торцевого перерізу такої гвинтової поверхні $X=0$, побудувати графік поверхні та графік торцевого перерізу.

Завдання 1 частина 2:

- студент самостійно за погодженням з викладачем повинен вибрати 10 точок, що є ключовими точками плоского контуру деталі;
- через вибрані точки проводиться інтерполяційний кубічний сплайн (використовуючи вбудовані інструменти системи Mathcad)
- викладач задає параметри: Н-крок гвинтового руху поверхні, A – відстань від початку системи координат в якій задана твірна лінія до осі гвинтової поверхні, β – кут повороту системи координат в якій задана твірна лінія навколо осі Y по відношенню до системи v , в якій записується гвинтова поверхня (рис.10).
- математично описати криву за допомогою кубічних сплайнів в системі $S'(X',Y',Z')$
- використовуючи властивості афінних перетворень (7) згідно схеми (рис.10) і значень вхідних даних записати матриці перетворень і рівняння поверхні в матричному вигляді при гвинтовому русі твірної кривої уздовж осі X в системі $S(X,Y,Z)$.
- знайти значення координат кривих осьового та торцевого перерізу утвореної гвинтової поверхні побудувати окремо їх графіки;
- побудувати графік поверхні разом з нанесеними лініями торцевого та осьового перерізу.

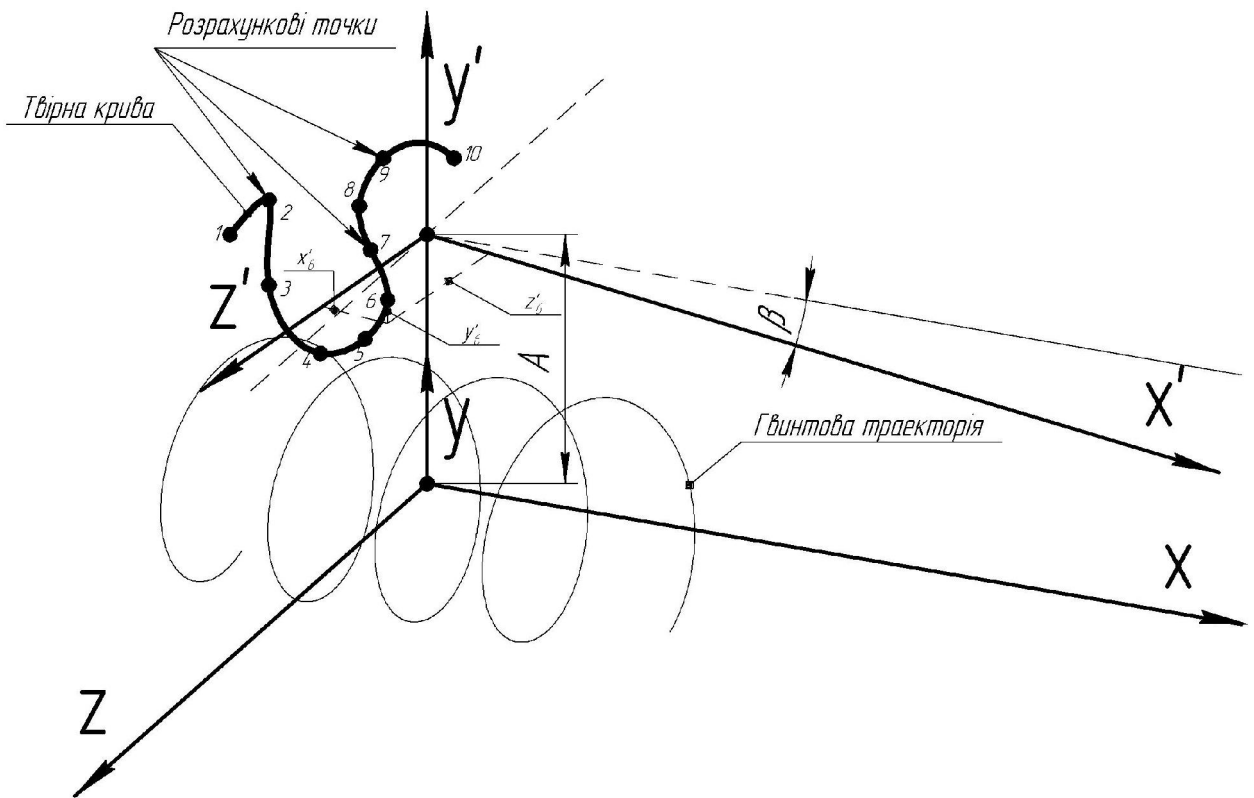


Рис.10. Розрахункова схема до завдання 1 частина 2.

В кінці роботи зробити висновок чого навчились у ході виконанні роботи.

ЛІТЕРАТУРА

1. Голованов Н.Н. Геометрическое моделирование— М.: Издательство Физико-математической литературы, 2002.—472с
2. Люкишин В. С. Теория винтовых поверхностей в проектировании режущих инструментов. — М.: Машиностроение, 1968. — 371 с.
3. Перепелица Б.А. Отображение аффинного пространства в теории формообразования поверхностей резанием. — Харьков: Вища школа, 1991. — 512 с.
4. Равська Н. С. Основи формоутворення поверхонь при механічній обробці/ Н. С. Равська, П. П. Мельничук, Т. П. Ніколаєнко. - К.: Вид. СКД-Друк, 2013. — 215с.
5. Родин П.Р. Основы формообразования поверхности резанием. — К.: Вища школа, 1977. — 190 с.
6. Юнусов Ф.С. Формообразование сложнопрофильных поверхностей шлифованием. — Л.: Машиностроение, 1987. — 248 с.

Звіт з практичної роботи № 1 з дисципліни «Основи формоутворення поверхонь»

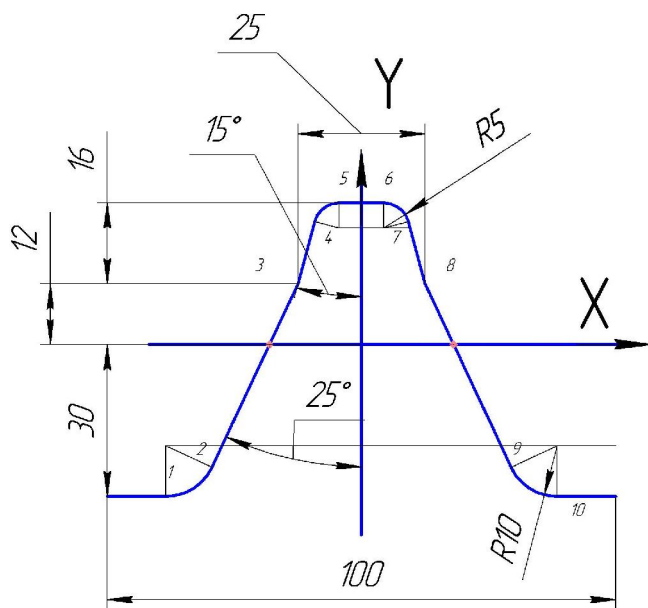
Виконав ст. гр. МІ –
Іванов В.О.

Завдання 1 частина 1: Завдання за отриманим рисунком профілю:

- студент самостійно за погодженням з викладачем повинен розробити плоский профіль, який складається мінімум з 5 максимум з 8 ділянок, які послідовно з'єднані одна з одною і в точках дотику можуть мати плавне спряження, навести схему профілю з необхідними розмірами;
- математично описати його ділянки;
- записати рівняння поверхні при обертанні цього профілю навколо осі паралельній X і знаходиться від неї на відстані A (рис.7), побудувати графік поверхні;
- записати рівняння поверхні при обертанні цього профілю навколо осі паралельній Y і знаходиться від неї на відстані A (рис.8), побудувати графік поверхні;;
- записати рівняння поверхні при гвинтовому русі (Н-крок гвинтового руху) цього профілю відносно осі X і знаходиться від неї на відстані A і визначити криву торцевого перерізу такої гвинтової поверхні $X=0$, побудувати графік поверхні та графік торцевого перерізу.

2. Розв'язок:

2.1. Вхідні дані: наводимо креслення профілю і таблицю з ключовими точками ділянок профілю та інших їх параметрів.



N	x	y
1	-38,4556	-30,0000
2	-29,3925	-24,2262
3	-12,5000	12,0000
4	-9,2058	24,2941
5	-4,3762	28,0000
6	4,3762	28,0000
7	9,2058	24,2941
8	12,5000	12,0000
9	29,3925	-24,2262
10	38,4556	-30,0000
c12	-38,4556	-20,0000
c45	-4,3762	23,0000
c67	4,3762	23,0000
c910	38,4556	-20,0000
	φ start	φ end
φ r12	270,0000	335,0000
φ r45	90,0000	165,0000
φ r67	15,0000	90,0000
φ r910	205,0000	270,0000
R12=R910	10,0000	
R45=R67	5,0000	

2.2. Рівняння плоского контуру профілю.

- для кожної ділянки наводимо її рівняння і вхідні параметри для побудови ділянка 12:

$$r12 := 5 \quad cx12 := -22 \quad cy12 := 20 \quad fs12 := 180 \text{ deg} \quad fe12 := 270 \text{ deg}$$

$$kf12 := fe12 - fs12 = 1.571$$

$$R12(u) := \begin{pmatrix} cx12 + r12 \cos(fs12 + kf12 \cdot u) \\ cy12 + r12 \sin(fs12 + kf12 \cdot u) \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ділянка 23:

$$x2 := -22 \quad y2 := 15 \quad x3 := -5 \quad y3 := -25$$

$$kx23 := x3 - x2 = 17 \quad ky23 := y3 - y2 = -40$$

$$R23(u) := \begin{pmatrix} x2 + kx23u \\ y2 + ky23u \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ділянка ...

...

, де u - параметр, що визначає положення точки на твірній ділянці профілю $u[0,1]$.

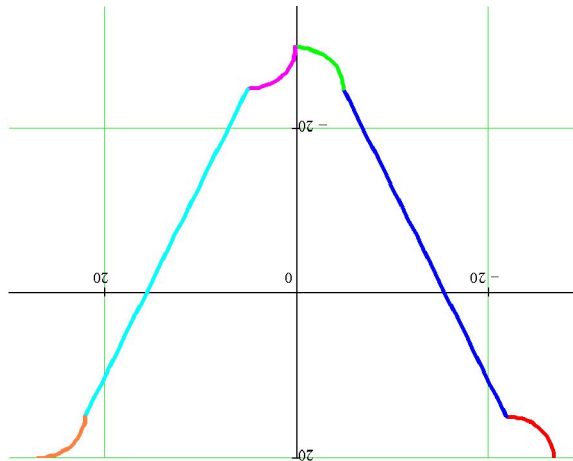


Рис.1. Побудований за залежностями профіль деталі.

2.3. Рівняння поверхні при обертанні заданого профілю навколо осі паралельній X і знаходиться від неї на відстані A

- матриці перетворень і вхідні параметри:

$$A := -50 \quad mx(f) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(f) & \sin(f) & 0 \\ 0 & -\sin(f) & \cos(f) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad mxA := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & A \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- рівняння поверхні

$$R12_{\phi}(u) := mx(\phi) \cdot mxA \cdot R12(u)$$

$$R23_{\phi}(u) := mx(\phi) \cdot mxA \cdot R23(u)$$

.....

, де ϕ - параметр, що визначає кут повороту твірного профілю $f[0,2\pi]$, A – відстань центру координат профілю до осі обертання.

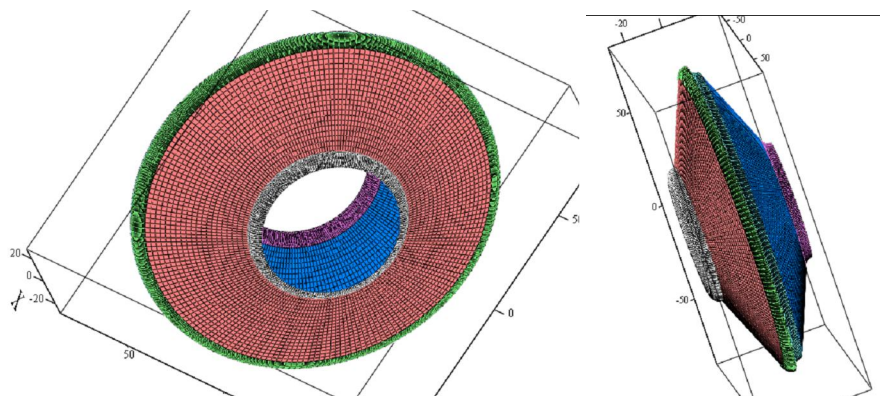


Рис.2. Побудована поверхня при обертанні заданого профілю навколо осі паралельній X .

2.4. Рівняння поверхні при обертанні заданого профілю навколо осі паралельній Y і знаходиться від неї на відстані A ;

- матриці перетворень і вхідні параметри:

$$my(f) := \begin{pmatrix} \cos(f) & 0 & -\sin(f) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin(f) & 0 & \cos(f) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad myA := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & A \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- рівняння поверхні:

$$R12_y(\phi, u) := my(\phi) \cdot myA \cdot R12(u)$$

$$R23_y(\phi, u) := my(\phi) \cdot myA \cdot R23(u)$$

....

, де ϕ - параметр, що визначає кут повороту твірного профілю $f[0, 2\pi]$, A – відстань центру координат профілю до осі обертання.

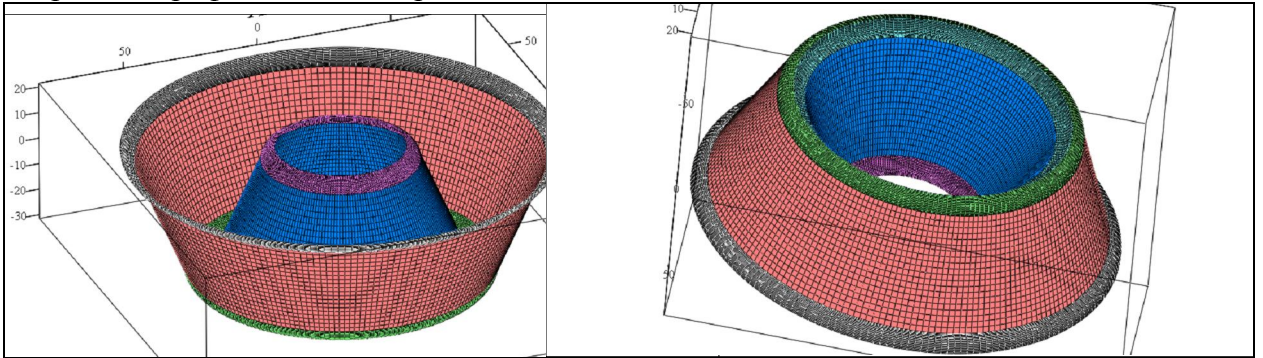


Рис.3. Побудована поверхня при обертанні заданого профілю навколо осі паралельній Y .

2.5. Рівняння поверхні при гвинтовому русі заданого профілю відносно осі X на відстані A від неї.

- матриці перетворень і вхідні параметри:

$$H := 100 \quad p := \frac{H}{2\pi} \quad m\phi(\phi) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & p \cdot \phi \\ 0 & \cos(\phi) & \sin(\phi) & 0 \\ 0 & -\sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad mxA := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & A \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- рівняння поверхні:

$$R12_x(\phi, u) := m\phi(\phi) \cdot mxA \cdot R12(u)$$

$$R23_x(\phi, u) := m\phi(\phi) \cdot mxA \cdot R23(u)$$

....

, де ϕ – параметр гвинтового руху, що визначає кут повороту твірного профілю навколо осі, що паралельна осі X $f[0, 2\pi]$, A – відстань центру координат профілю до гвинтового руху, H -крок гвинтового руху, p - гвинтовий параметр.

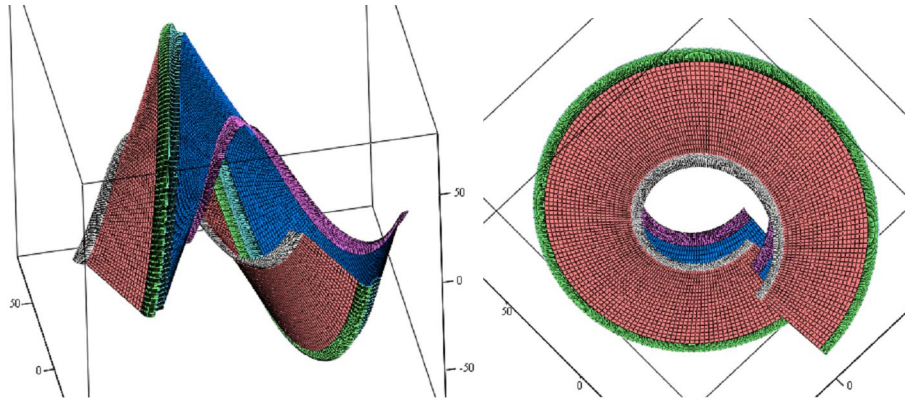


Рис.4. Побудована поверхня поверхні при гвинтовому русі заданого профілю відносно осі X на відстані A від неї.

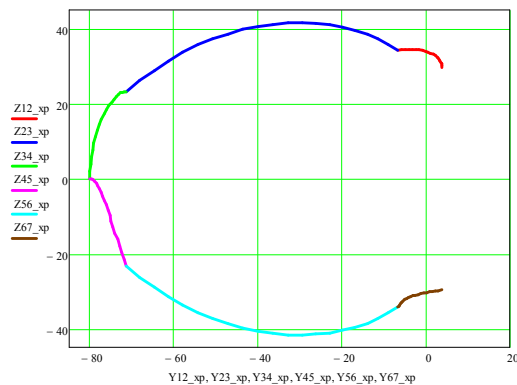


Рис.5. Торцевий переріз площиною $X=0$ поверхні утвореної при її гвинтовому русі заданого профілю відносно осі X .

Висновок: чому навчились при виконанні даної роботи ?

- при здачі завдання мати при собі файл Mathcad з розрахунками по даній роботі.

В роботі це не приводити !!!

Додаток: фрагмент коду Mathcad для визначення параметрів торцевого перерізу гвинтової поверхні.

```


$$t_j := 0$$


$$FP12_j := \text{root}(R12\_xp(t, U_j), 0, t)$$


$$Y12\_xp_j := R12\_xp(FP12_j, U_j)_1 \quad Z12\_xp_j := R12\_xp(FP12_j, U_j)_2$$


```

Завдання 1 частина 2:

- студент самостійно за погодженням з викладачем повинен вибрати 10 точок, що є ключовими точками плоского контуру деталі;
- через вибрані точки проводиться інтерполяційний кубічний сплайн (використовуючи вбудовані інструменти системи Mathcad)
- викладач задає параметри: H -крок гвинтового руху поверхні, A – відстань від початку системи координат в якій задана твірна лінія до осі гвинтової поверхні, β – кут повороту системи координат в якій задана твірна лінія навколо осі Y по відношенню до системи в, якій записується гвинтова поверхня (рис.10).
- математично описати криву за допомогою кубічних сплайнів в системі $S'(X', Y', Z')$

- використовуючи властивості афінних перетворень (7) згідно схеми (рис.10) і значень вхідних даних записати матриці перетворень і рівняння поверхні в матричному вигляді при гвинтовому русі твірної кривої уздовж осі X в системі S(X,Y,Z).
- знайти значення координат кривих осьового та торцевого перерізу утвореної гвинтової поверхні побудувати окремо їх графіки;
- побудувати графік поверхні разом з нанесеними лініями торцевого та осьового перерізу.

3. Розв'язок:

Вхідні дані: Розрахункова схема:

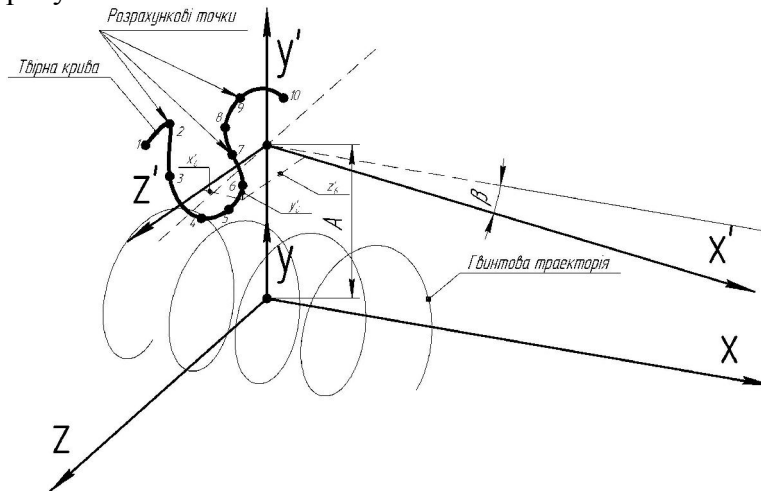


Рис.6. Розрахункова схема

Координати точок:

N	X',мм	Y',мм	Z',мм
1	0	-1	1
2	2	1	2
3	4	-1	8
4	6	-1	8
5	8	1	2
6	10	-1	1
7	11	4	2
8	13	2	3
9	15	3	1
10	17	1	5

$A=10, H=20, \beta=-12^0$

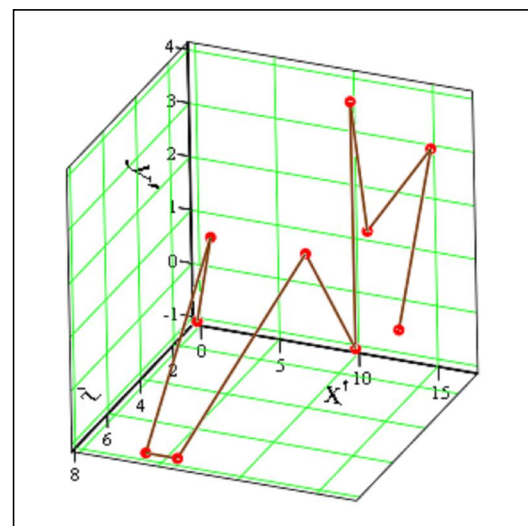
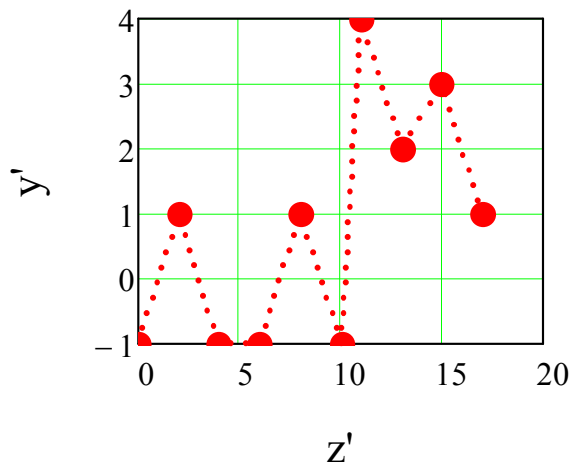


Рис.7. Керуючі точки сплайну.

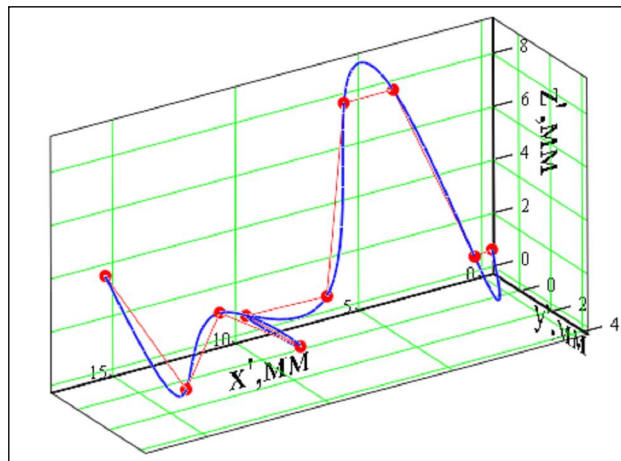
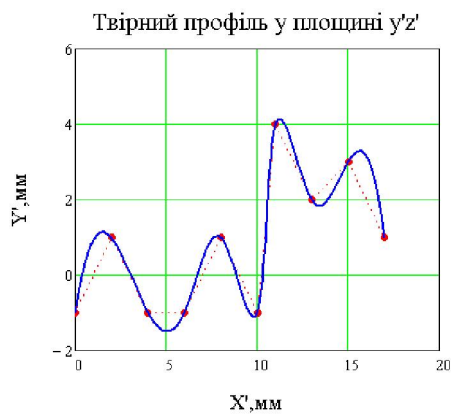


Рис.8. Побудований інтерполяційний сплайн через керуючі точки.

Матриці афінних перетворень і рівняння поверхні в матричному вигляді:

$$\text{myp} := \begin{pmatrix} \cos(\beta) & 0 & \sin(\beta) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{mxp}(\phi) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & p \cdot \phi \\ 0 & \cos(\phi) & \sin(\phi) & 0 \\ 0 & -\sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{mxA} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & A \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R12_xp(\phi, u) := \text{mxp}(\phi) \cdot \text{mxA} \cdot \text{myp} \cdot R12(u)$$

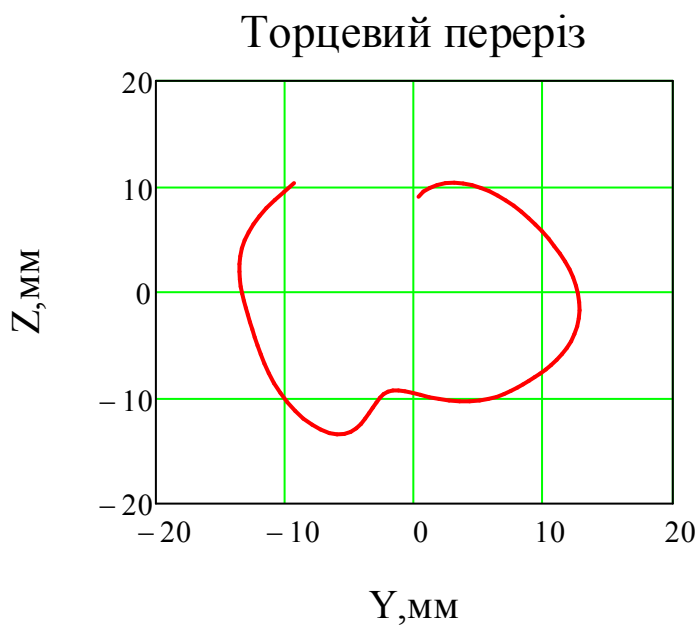


Рис.9. Торцевий переріз гвинтової поверхні.

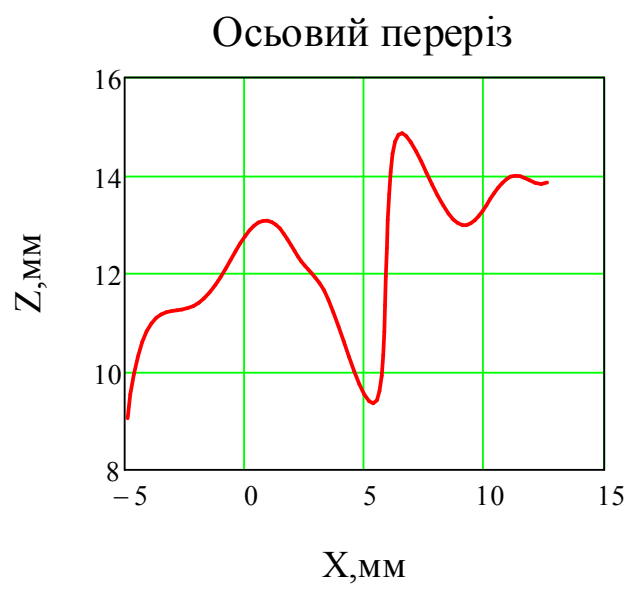
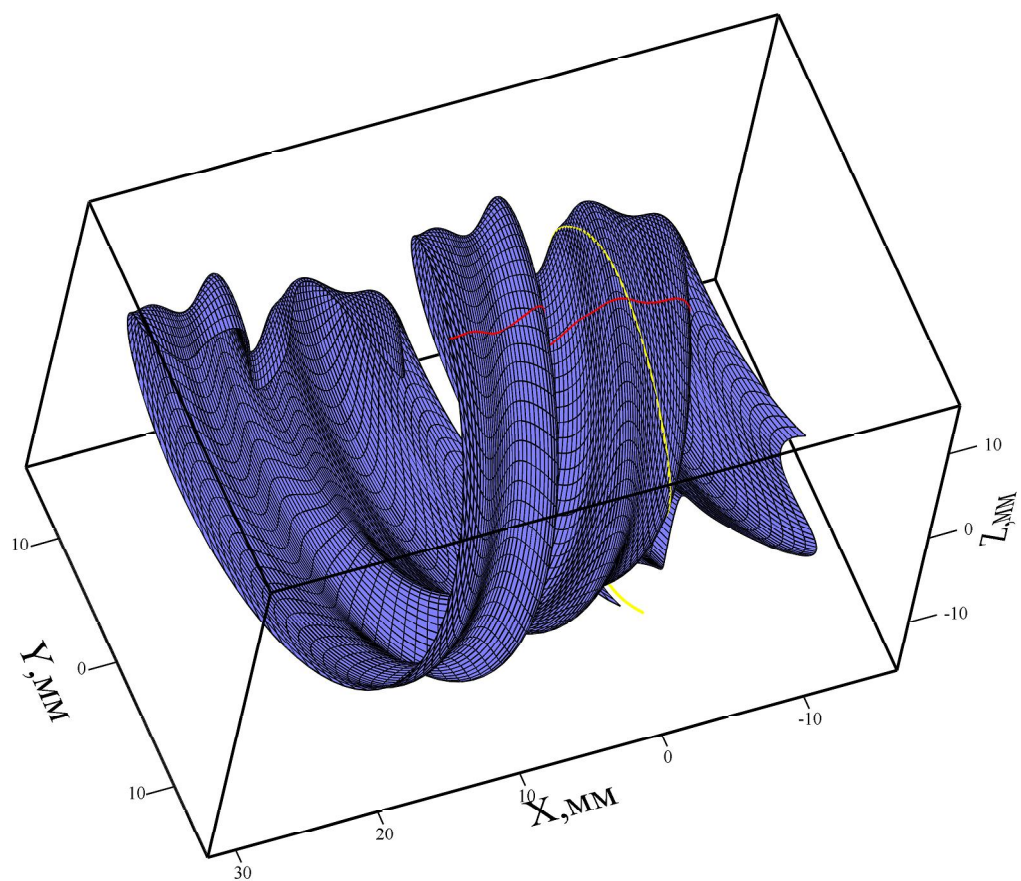


Рис.10. Осьовий переріз гвинтової поверхні.



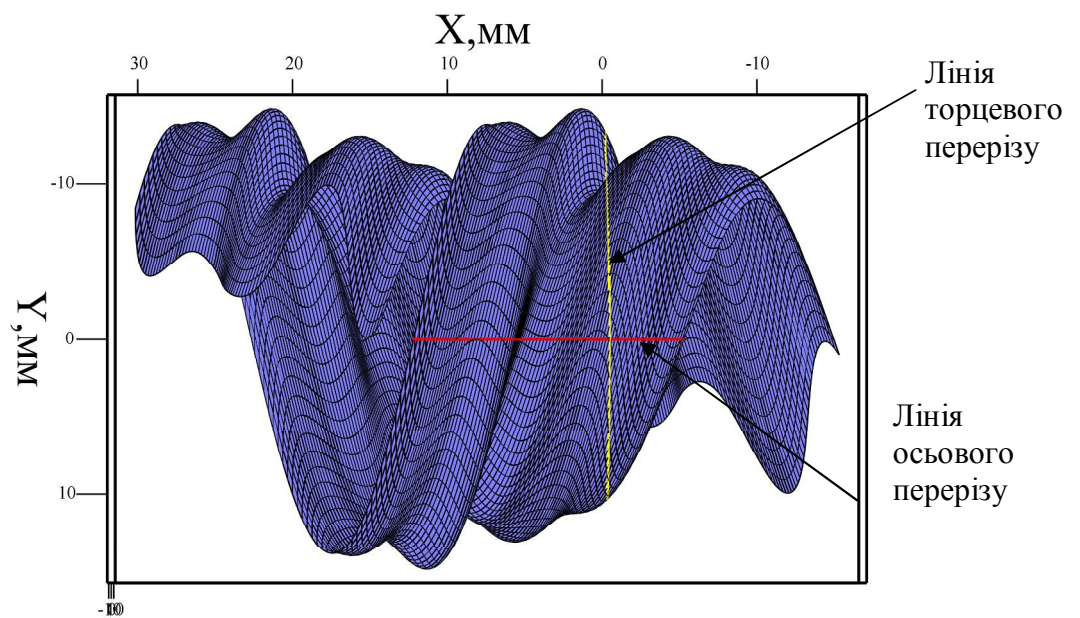


Рис. 11. Графік гвинтової поверхні разом з нанесеними лініями торцевого та осьового перерізу.

Висновок: чому навчились при виконанні даної роботи ?

- при здачі завдання мати при собі файл Mathcad з розрахунками по даній роботі.

$k1 := 9$ кількість керуючих точок сплайну n-1

$$j1 := 0..k1 \quad UR_{j1} := \frac{j1}{k1}$$

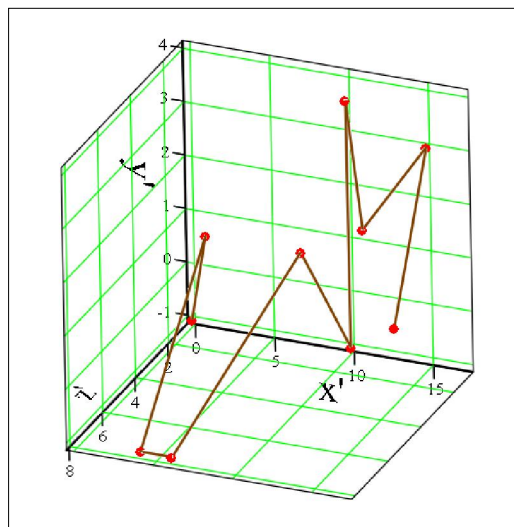
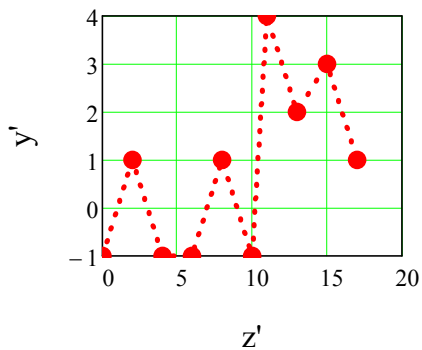
Значення координат керуючих точок сплайну

$j1 =$	$UR_{j1} =$	$XR_{j1} := YR_{j1} := ZR_{j1} :=$		
0	0	0	-1	1
1	0.111	2	1	2
2	0.222	4	-1	8
3	0.333	6	-1	8
4	0.444	8	1	2
5	0.556	10	-1	1
6	0.667	11	4	2
7	0.778	13	2	3
8	0.889	15	3	1
9	1	17	1	5

$k2 := 100$
 $j2 := 0..k2$
 $UR2_{j2} := j2 \cdot \frac{1}{k2}$ розрахункова кількість точок на сплайновій кривій при розрахунках значень координат

параметр, що відповідає розрахунковій кількості точок на сплайновій кривій при розрахунках значень координат

Графік керуючих точок сплайну



(XR, YR, ZR)

Задання сплайнової кривої - визначення к-нтів сплайну

$$SX1 := \text{cspline}(UR, XR)$$

$$SY1 := \text{cspline}(UR, YR)$$

$$SZ1 := \text{cspline}(UR, ZR)$$

Інтерполяція сплайнової кривої

$$x\text{fit}(u) := \text{interp}(SX1, UR, XR, u)$$

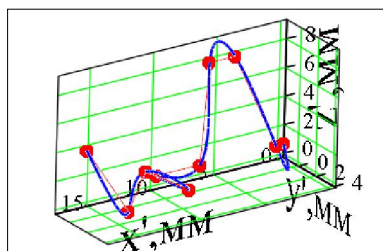
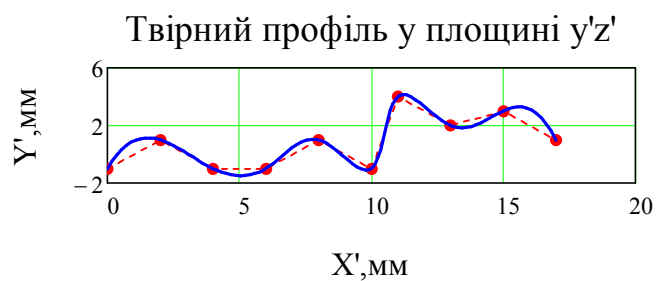
$$y\text{fit}(u) := \text{interp}(SY1, UR, YR, u)$$

$$z\text{fit}(u) := \text{interp}(SZ1, UR, ZR, u)$$

$$R12(u) := \begin{pmatrix} \text{xfit}(u) \\ \text{yfit}(u) \\ \text{zfit}(u) \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \text{рівняння сплайнової твірної кривої} \\ R12(UR2j2)_0 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \text{значення координат точок сплайнової твірної кривої} \\ XL1j2 := R12(UR2j2)_0 & YL1j2 := R12(UR2j2)_1 & ZL1j2 := R12(UR2j2)_2 \end{matrix}$$

Графік сплайну побудований за керуючими точками



$$(XR, YR, ZR), (XL1, YL1, ZL1)$$

кількість точок симетричний діапазон значень їх зміни

$$k3 := 100 \quad j3 := 0..k3 \quad t2 := 1.5 \cdot \pi$$

$$\underline{\underline{Fj3}} := -t2 + j3 \cdot \frac{2t2}{k3} \quad \begin{matrix} \text{масив значень параметру повороту твірного профілю при його} \\ \text{гвинтовому русі} \end{matrix}$$

Значення вхідних даних для установчих параметрів

$$\underline{\underline{H}} := 20 \quad \underline{\underline{A}} := 10 \quad \beta := -12 \cdot \text{deg} \quad p := \frac{H}{2 \cdot \pi}$$

Матриці афінних перетворень що описують задану гвинтову поверхню

$$m_{\varphi} := \begin{pmatrix} \cos(\beta) & 0 & \sin(\beta) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad m_{\varphi}(\phi) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & p \cdot \phi \\ 0 & \cos(\phi) & \sin(\phi) & 0 \\ 0 & -\sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad m_{xA} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & A \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Рівняння гвинтової поверхні в матричному вигляді

$$R12_xp(\phi, u) := m_{\varphi}(\phi) \cdot m_{xA} \cdot m_{\varphi} \cdot R12(u)$$

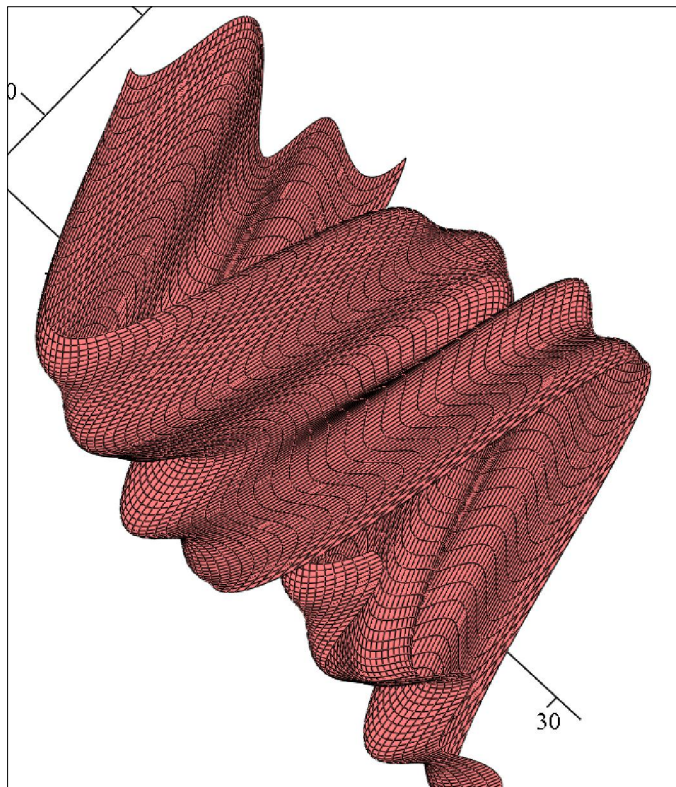
Знаходження значень координат точок для побудови гвинтової поверхні

$$X12_xj3, j2 := R12_xp(Fj3, UR2j2)_0$$

$$Y12_xj3, j2 := R12_xp(Fj3, UR2j2)_1$$

$$Z12_xj3, j2 := R12_xp(Fj3, UR2j2)_2$$

Графік гвинтової поверхні



(X12_x, Y12_x, Z12_x)

Торцевий переріз

Визначення значень параметру для точок торцевого перерізу

$t := 0 \quad KT := 0$

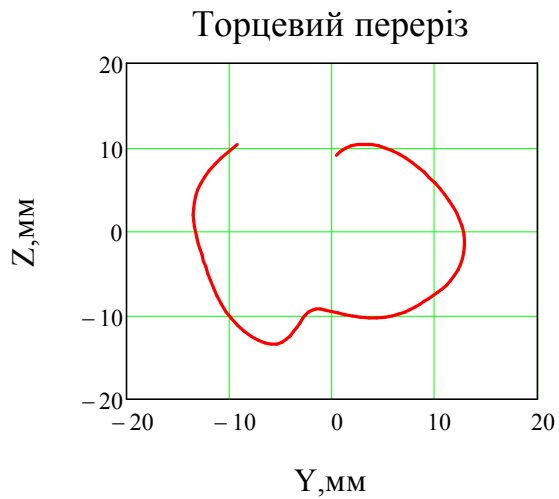
$FP12_{j2} := \text{root}(R12_xp(t, UR2_{j2})_0 - KT, t)$

Знаходження координат точок лінії торцевого перерізу

$X12_ES_{j2} := R12_xp(FP12_{j2}, UR2_{j2})_0$

$Y12_ES_{j2} := R12_xp(FP12_{j2}, UR2_{j2})_1$

$Z12_ES_{j2} := R12_xp(FP12_{j2}, UR2_{j2})_2$



Осьовий переріз

Визначення значень параметру для точок осьового перерізу

```

FA12 :=
| t1 ← -1
| KT1 ← 0
| for j ∈ 0..k2
|   if j ≠ 0
|     | t1 ← TRJj-1
|     | TRJj ← root(R12_xp(t1, UR2j)1 - KT1, t1)
|     | TRJj ← root(R12_xp(t1, UR2j)1 - KT1, t1) otherwise
|   TRJ

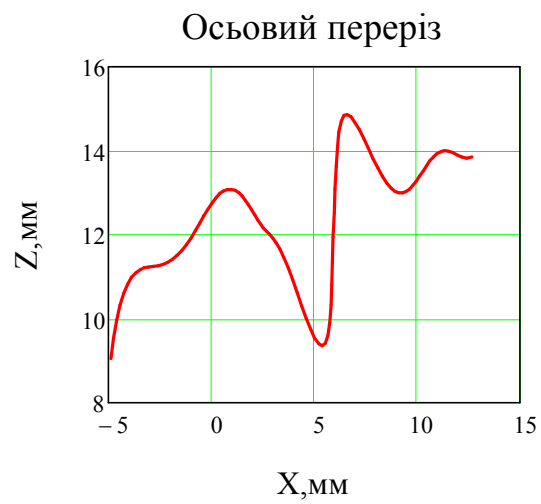
```

Знаходження координат точок лінії осьового перерізу

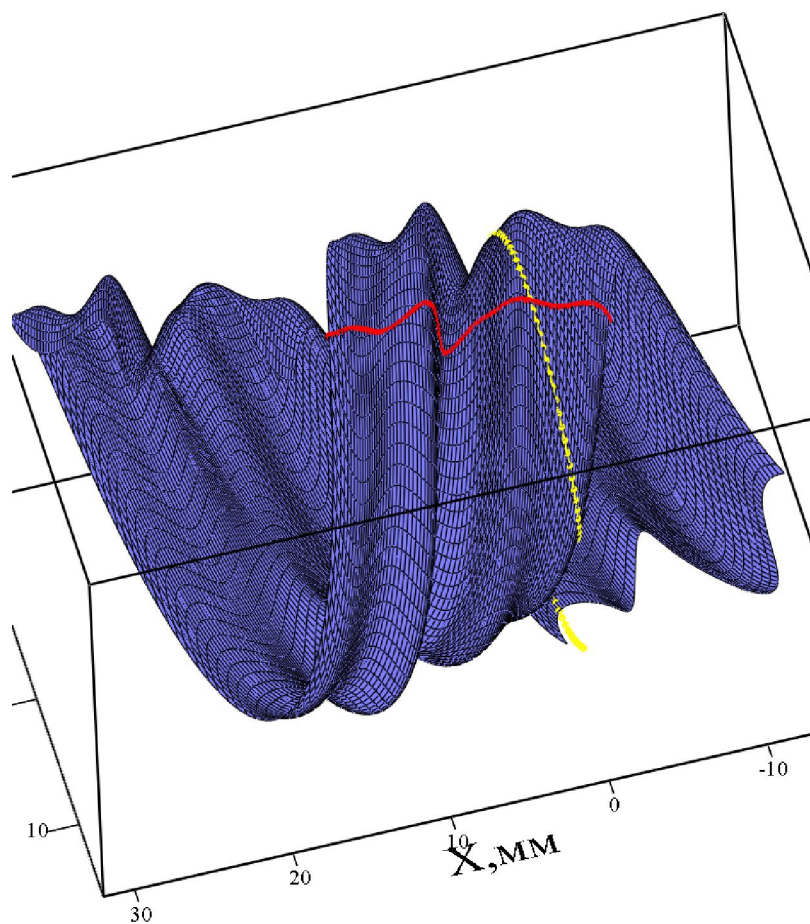
$$X12_ASj2 := R12_xp(FA12j2, UR2j2)_0$$

$$Y12_ASj2 := R12_xp(FA12j2, UR2j2)_1$$

$$Z12_ASj2 := R12_xp(FA12j2, UR2j2)_2$$



Графік гвинтової поверхні разом з лініями торцевого і остового перерізу



$(X12_x, Y12_x, Z12_x), (X12_ES, Y12_ES, Z12_ES), (X12_AS, Y12_AS, Z12_AS)$