ТЕОРЕТИЧНІ ТА ПРИКЛАДНІ ПРОБЛЕМИ ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНИХ НАУК

УДК 519.1

Р.А. Заторський, І.М. Литвиненко

ЗАСТОСУВАННЯ ПАРАПЕРМАНЕНТІВ ДО ЛІНІЙНИХ РЕКУРЕНТНИХ РІВНЯНЬ

Вступ

На сьогодні для лінійних рекурентних співвідношень доведено ряд загальних теорем, зміст яких, з відомих причин, є аналогами відповідних теорем з теорії лінійних однорідних і неоднорідних систем рівнянь із сталими коефіцієнтами та теорії однорідних і неоднорідних звичайних диференціальних рівнянь із сталими коефіцієнтами. Ці теореми є класичними і широко використовуються [1]. Проте навіть для лінійних однорідних рекурентних рівнянь із змінними коефіцієнтами загальних методів їх розв'язання і дослідження досі немає.

Лінійні рекурентні рівняння k-го порядку із сталими коефіцієнтами є важливим і ефективним інструментом, що знаходить свої застосування в різних галузях математики. Проте виникає найбільша необхідність в розв'язанні відповідного характеристичного рівняння k-го порядку, яке часто викликає значні труднощі.

Теоретичним інструментом для досліджень лінійних рекурентних рівнянь у даній статті є параперманенти трикутних матриць (див. [2, 3]).

Деякі результати даної статті анонсувалися в [4] та доповідалися на Міжнародній математичній конференції, присвяченій сторіччю від початку роботи Д.О. Граве в Київському університеті [5] .

Постановка задачі

Метою статті є застосування параперманентів трикутних матриць до розв'язання лінійних рекурентних рівнянь, встановлення загальних співвідношень між членами числових послідовностей, згенерованих такими рівняннями, та виділення класу лінійних рекурентних рівнянь з нормальними початковими умовами, числові послідовності яких мають деякі загальні теоретико-числові властивості.

Метод дає змогу досліджувати лінійні рекурентні рівняння, минаючи розв'язання відповідних характеристичних рівнянь.

Означення параперманенту трикутної матриці

Розглянемо нижню трикутну матрицю

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}_n . \qquad (1)$$

Кожному елементу $a_{ij}, i \le j$, цієї матриці поставимо у відповідність $i - j + 1$ елементів a_{ik}, $k = j,\ldots,i$, які назвемо похідними елементами матриці, породженими ключовим елементом a_{ij}, що є одночасно і його похідним елементом.

Добуток всіх похідних елементів, породжених ключовим елементом a_{ij}, позначимо $\{a_{ij}\}$ і назвемо факторіальним добутком ключового елемента a_{ij}, тобто

$$\{a_{ij}\} = \prod_{k=j}^{i} a_{ik} .$$

***Означення* 1.** Набір ключових елементів матриці (1) назвемо нормальним набором цієї матриці, якщо ключові елементи породжують множину похідних елементів потужності n, кожні два з яких не лежать в одному стовпці цієї матриці.

Розглянемо множину $A(n)$ впорядкованих розбиттів $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_r)$ натурального числа n. Нехай $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_r)$ – деякий елемент із цієї множини. Кожній компоненті $\alpha_s, s = 1,\ldots,r$, цього розбиття поставимо у відповідність ключовий елемент a_{ij} трикутної матриці за допомогою такого алгоритму.

1. Початок.
2. $j := 1; s := 0; i := 0$.
3. $s := s + 1; i := i + \alpha_s$, ключ. ел. $(s) := a_{ij}$.
4. Якщо $s < r$, то $j := j + \alpha_s$, перейти до п.3.
5. Кінець.

При цьому отримаємо нормальний набір ключових елементів, породжених розбиттям α. Кожному нормальному набору a ключових елементів припишемо знак $(-1)^{\varepsilon(a)}$, де $\varepsilon(a)$ – сума всіх індексів ключових елементів цього набору.

***Означення* 2.** Параперманентом трикутної матриці (1) назвемо число

$$\operatorname{pper}(A) = \sum_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_r)\in A(n)} \prod_{s=1}^{r} \{a_{i(s),j(s)}\},$$

де $a_{i(s),j(s)}$ – ключовий елемент, що відповідає s-й компоненті розбиття $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_r)$ із множини розбиттів $A(n)$.

Лінійні рекурентні рівняння та параперманенти

Часто буває так, що розв'язати характеристичне рівняння лінійного рекурентного рівняння k-го порядку важко, тоді його розв'язок можна знайти за допомогою параперманенту. При цьому справедлива наступна теорема, яка разом із наслідком 1 (див. далі) є теоретичним фундаментом цієї статті.

Теорема 1. Нехай задано два вектори

$$a = (a_1, a_2, a_3, ..., a_k),$$

$$b = (b_0 = 1, b_1, b_2, b_3, ..., b_{k-1}).$$

Для послідовності $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ рівносильні такі три рівняння:

1) лінійне рекурентне рівняння k-го порядку

$$u_n = a_1 u_{n-1} + a_2 u_{n-2} + a_3 u_{n-3} + ... + a_k u_{n-k},$$

$$n = k, k+1, k+2, ...$$

з початковими умовами

$$u_0 = b_0 = 1, u_1 = b_1, u_2 = b_2, ..., u_{k-1} = b_{k-1}; \qquad (2)$$

2) рівняння

$$u_n = \operatorname{pper}(A_n) =$$

$$= \begin{bmatrix} a_1c_1 & & & & & & & \\ \frac{a_2}{a_1} & a_1c_2 & & & & & & \\ \cdots & \cdots & \ddots & & & & & \\ \frac{a_{k-1}}{a_{k-2}} & \frac{a_{k-2}}{a_{k-3}} & \cdots & a_1c_{k-1} & & & & \\ \frac{a_k}{a_{k-1}} & \frac{a_{k-1}}{a_{k-2}} & \cdots & \frac{a_2}{a_1} & a_1 & & & \\ 0 & \frac{a_k}{a_{k-1}} & \cdots & \frac{a_3}{a_2} & \frac{a_2}{a_1} & a_1 & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{a_k}{a_{k-1}} & \cdots & \frac{a_2}{a_1} & a_1 \end{bmatrix}_n. \qquad (3)$$

Тут поправки c_i визначаються з рівностей

$$c_i = b_i \left(\sum_{s=1}^{i} a_s b_{i-s} \right)^{-1} =$$

$$= \frac{b_i}{a_i + a_{i-1}b_1 + a_{i-2}b_2 + ... + a_2 b_{i-2} + a_1 b_{i-1}},$$

де $i = 1, ..., k-1$;

3) рівняння

$$1 + \sum_{i=1}^{\infty} u_i z^i =$$

$$1 + b_1\left(1 - \frac{1}{c_1}\right)z^1 + b_2\left(1 - \frac{1}{c_2}\right)z^2 + \ldots$$

$$= \frac{\ldots + b_{k-1}\left(1 - \frac{1}{c_{k-1}}\right)z^{k-1}}{1 - a_1 z - a_2 z^2 - \ldots - a_k z^k}.$$

Доведення. Рівносильність перших двох рівнянь випливає з того, що поправки

$$c_i = \frac{b_i}{a_i + a_{i-1}b_1 + \ldots + a_2 b_{i-2} + a_1 b_{i-1}}, \; i = 1, 2, \ldots, k-1,$$

є розв'язками системи рівнянь

$$\left[(1 + \delta_{sr}(c_s - 1)) \frac{a_{s-r+1}}{a_{s-r}} \right]_{1 \le r \le s \le i} = b_i, \; i = 1, 2, \ldots,$$

та розкладу параперманенту в рівнянні (3) при $n = k, k+1, k+2, \ldots$ за елементами останнього рядка.

Відзначимо, що теорема 1 справедлива також для рекурентних рівнянь із змінними коефіцієнтами.

***Зауваження* 1**. Теорема 1, по своїй суті, є теоремою Стенлі, вираженою в термінах параперманентів (див. [6, с. 301]). У зв'язку з цим доведення рівносильності першого і третього рівнянь теореми опускаємо (див. також [8]).

З теореми випливає такий наслідок.

***Наслідок* 1.** Нехай задано два вектори

$$a = (a_1, a_2, a_3, ..., a_k),$$

$$b = (b_0 = 1, b_1, b_2, b_3, ..., b_{k-1}),$$

де

$$b_i = \begin{bmatrix} a_1 & & & \\ \frac{a_2}{a_1} & a_1 & & \\ \dots & \dots & \ddots & \\ \frac{a_{i-1}}{a_{i-2}} & \frac{a_{i-2}}{a_{i-3}} & \dots & a_1 \end{bmatrix}_i, \quad i = 1, \dots, k-1.$$

Для послідовності $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ рівносильні такі три рівняння:

1) лінійне рекурентне рівняння k-го порядку

$$u_n = a_1 u_{n-1} + a_2 u_{n-2} + a_3 u_{n-3} + \dots + a_k u_{n-k},$$

$$n = k, k+1, k+2, \dots, \qquad (4)$$

з початковими умовами

$$u_0 = b_0 = 1, u_1 = b_1, u_2 = b_2, \dots, u_{k-1} = b_{k-1};$$

2) рівняння

$$u_n = \begin{bmatrix} a_1 & & & & & \\ \frac{a_2}{a_1} & a_1 & & & & \\ \dots & \dots & \ddots & & & \\ \frac{a_k}{a_{k-1}} & \frac{a_{k-1}}{a_{k-2}} & \dots & a_1 & & \\ 0 & \frac{a_k}{a_{k-1}} & \dots & \frac{a_2}{a_1} & a_1 & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots \\ 0 & \dots & 0 & \frac{a_k}{a_{k-1}} & \dots & \frac{a_2}{a_1} \quad a_1 \end{bmatrix}_n, \qquad (5)$$

$$n = 1, 2, 3, \dots;$$

3) рівняння

$$\frac{1}{1 - a_1 x - a_2 x^2 - \dots - a_k x^k} = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} u_i x^i.$$

Початкові умови для рекурентного рівняння (4) перепишемо у вигляді

$$u_0 = 1, \; u_i = \begin{bmatrix} a_1 & & & \\ \frac{a_2}{a_1} & a_1 & & \\ \dots & \dots & \ddots & \\ \frac{a_{i-1}}{a_{i-2}} & \frac{a_{i-2}}{a_{i-3}} & \dots & a_1 \end{bmatrix}_i, \quad i = 1, \dots, k-1, \quad (6)$$

і називаються *нормальними початковими умовами*, а послідовність, що генерується відповідним рекурентним співвідношенням, – *нормальною послідовністю*.

Теоретико-числові властивості рекурентних послідовностей *k*-го порядку

Теорема 2. Якщо послідовності $\{u_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ і $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ задовольняють рекурентне рівняння (3) k-го порядку з початковими умовами (2) і (6), відповідно, причому $k < r$, то виконуються співвідношення

$$u_{r+s}^* = \sum_{i=1}^{k} a_i \left(\sum_{j=r-i+1}^{r} u_j^* u_{r+s-i-j+1} \right). \qquad (7)$$

Доведення. За теоремою 1, параперманент (5) є розв'язком рівняння (4) з початковими умовами (6). Розкладемо цей параперманент при $n = r + s$ за елементами вписаної прямокутної таблиці $T(r)$. При цьому, якщо b_{ij} – деякий елемент вписаної таблиці $T(r)$, то перший ріг $R_{j-1,1}$ його алгебричного доповнення $P_{ij} = \mathrm{pper}(R_{j-1,1})\,\mathrm{pper}(R_{r+s-1,i+1})$, крім коефіцієнтів рівняння (4), буде містити в собі поправки x_t, $t = 1, \dots, k$, які задаються рівностями $x_t = 1$. Тому параперманент рога $R_{j-1,1}$ є j-м членом послідовності $\{u_n^*\}_{n=1}^{\infty}$. У другому розі ці поправки дорівнюють одиниці, тому його параперманент є $r + s - i$-м членом послідовності $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$. Очевидно, що $b_{ij} = 0$, якщо $k - 1 < i - j$, і $b_{ij} = a_{i-j+1}$, якщо $0 \le i - j \le k$. Якщо $i - j = k - 1$, то $b_{ij} = a_k$, $i = j + k - 1$, і j набуває значень від $r - k + 1$ до r, тому всі доданки, які входять у розклад параперманенту u_{r+s} за

елементами таблиці $T(r)$, що містять коефіцієнт a_k рівняння (4), ввійдуть до суми

$$a_k \sum_{j=r-k+1}^{r} u_j^* u_{r+s-j-k+1}.$$

Якщо ж $i-j=k-2$, то $b_{ij}=a_{k-1}$, $i=j+k-2$, $j=r-k+2,\dots,r$, і аналогічна сума має вигляд

$$a_{k-1} \sum_{j=r-k+2}^{r} u_j^* u_{r+s-j-k+2}.$$

Продовжуючи процес обчислень таких сум, через $(k-1)$ кроків отримаємо рівність $i-j=0$, тобто прийдемо до суми

$$a_1 \sum_{j=r}^{r} u_j^* u_{r+s-j}.$$

Таким чином, індекс i коефіцієнтів a_i буде набувати значень від 1 до k і розклад параперманенту u_{r+s}^* за елементами вписаної прямокутної таблиці $T(r)$ матиме вигляд (7).

***Наслідок* 2**. Якщо послідовність $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ задовольняє рекурентне рівняння (4) з нормальними початковими умовами (6), то для її членів виконуються співвідношення

$$u_{r+s} = \sum_{i=1}^{k} a_i \left(\sum_{j=r-i+1}^{r} u_j u_{r+s-i-j+1} \right). \qquad (8)$$

Справедливість цього наслідку безпосередньо випливає з теореми 2. Запишемо співвідношення (8) при $k=1,2,3$:

$$k=1 \quad u_{r+s} = a_1 u_r u_s;$$

$$k=2 \quad u_{r+s} = a_1 u_r u_s + a_2(u_{r-1}u_s + u_r u_{s-1});$$

$$k=3 \quad u_{r+s} = a_1 u_r u_s + a_2(u_{r-1}u_s + u_r u_{s-1}) + a_3(u_{r-2}u_s + u_{r-1}u_{s-1} + u_r u_{s-2}).$$

Теорема 3. Нехай послідовність $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ задовольняє рекурентне рівняння другого порядку

$$u_{n+2} = a_1 u_{n+1} + a_2 u_n \qquad (9)$$

з цілими ненульовими коефіцієнтами і нормальними початковими умовами

$$u_1 = 1,\ u_2 = a_1. \qquad (10)$$

Тоді:

1) виконуються рівності

$$u_{r+s} = u_{r+1}u_s + a_2 u_r u_{s-1},\ r=1,2,\dots;\ s=2,3,\dots, \qquad (11)$$

$$u_{sr} \equiv 0 (\mathrm{mod}\, u_r),\ s,r=1,2,\dots; \qquad (12)$$

2) якщо в рівнянні (9) коефіцієнти взаємно прості, тобто $(a_1,a_2)=1$, то маємо

$$(u_r,u_s) = u_{(s,r)}. \qquad (13)$$

Доведення. 1. Доведемо справедливість рівності (11). До рівняння (9) з початковими умовами (10) можна застосувати наслідок 2. При $k=2$ рівність (8) має вигляд

$$u_{r+s} = a_2 u_{r-1}u_s + a_1 u_r u_s + a_2 u_r u_{s-1}.$$

Враховуючи рівняння (9), маємо

$$u_{r+s} = u_s(a_1 u_r + a_2 u_{r-1}) + a_2 u_r u_{s-1} = u_{r+1}u_s + a_2 u_r u_{s-1}.$$

Доведемо справедливість рівності (12). При $s=2$ рівність (11) має вигляд

$$u_{2r} = u_r(u_{r+1} + a_2 u_{r-1}),$$

тобто (12) справедлива при $s=1$ і при $s=2$.

Нехай рівність (12) виконується при $s=1,2,\dots,m-1$. Доведемо її справедливість при $s=m$:

$$u_{mr} = u_{(m-r)r+r} = u_{(m-1)r+1}u_r + a_2 u_{(m-1)r}u_{r-1}.$$

Оскільки $u_{(m-1)r} \equiv 0 (\mathrm{mod}\, u_r)$, то рівність (12) справедлива при $s=m$.

2. Доведемо справедливість рівності (13). Спочатку покажемо, що виконуються рівності

$$(u_n,u_{n+1}) = 1,\ n=1,2,\dots, \qquad (14)$$

$$(a_2,u_n) = 1,\ n=1,2,\dots \qquad (15)$$

Очевидно, що при $n=1$ рівність (14) справедлива. Нехай рівність (14) виконується при $n=k$. Доведемо, що вона виконується і для $n=k+1$. Припустимо протилежне:

$$1 < d = (u_{k+1},u_{k+2}).$$

Тоді з рівняння (9) при $n=k$ випливає, що або u_k кратне d, або a_2 кратне d. У першому випадку приходимо до суперечності з припу-

щенням, що рівність (14) виконується при $n = k$, а у другому випадку – з рівняння (9) при $n = k$ випливає, що a_1 кратне d, а це суперечить взаємній простоті коефіцієнтів рівняння (9). Таким чином, рівність (14) виконується для довільного натурального n. Справедливість (15) випливає з того, що припущення протилежного твердження разом з (9) при $n = s-1$ приводить до протиріччя з (14).

Нехай тепер $s < r$. Тоді, враховуючи рівність (11), маємо

$$(u_r, u_s) = (u_{r-s+s}, u_r) = (u_{r-s+1}u_s + a_2 u_{r-s}u_{s-1}, u_s) =$$
$$= (a_2 u_{r-s}u_{s-1}, u_s).$$

З рівностей (14), (15) випливає, що

$$(a_2 u_{s-1}, u_s) = 1.$$

Тому маємо

$$(u_r, u_s) = (u_{r-s}, u_s),$$

звідки відразу випливає справедливість (13).

***Наслідок* 3.** Якщо послідовність $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ задовольняє умови теореми 3, причому $u_k \neq 1$, $2 \le k$, то член u_s цієї послідовності є простим числом лише тоді, коли s – просте число.

Доведення випливає з рівності (12).

***Наслідок* 4.** Нехай послідовність $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ задовольняє умови теореми 3 і p – просте число. Тоді u_p не має спільних дільників із своїми попередніми членами цієї послідовності.

Доведення наслідку випливає з рівності (12).

***Наслідок* 5.** Нехай послідовність $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ задовольняє умови теореми 3. Якщо $a_2 = b^2$, де b – ціле число, то кожен член $u_{2m+1}, 1 < m$, цієї послідовності можна подати у вигляді суми квадратів двох цілих невід'ємних чисел, причому виконуватиметься рівність

$$u_{2m+1} = u_{m+1}^2 + (bu_m)^2.$$

Доведення. Справедливість цього наслідку випливає з рівності (11) при $r = n$, $s = n+1$.

***Наслідок* 6.** Для довільного натурального m виконується тотожність

$$\sum_{i=0}^{m}(-1)^i \binom{2m-i}{i} a^{2(m-i)}b^{2i} =$$
$$= \left(\sum_{i=0}^{[m/2]}(-1)^i \binom{m-i}{i} a^{m-2i}b^{2i} - \right.$$
$$\left. - \sum_{i=0}^{[(m-1)/2]}(-1)^i \binom{m-i-1}{i} a^{m-2i-1}b^{2i+1}\right) \times$$
$$\times \left(\sum_{i=0}^{[m/2]}(-1)^i \binom{m-i}{i} a^{m-2i}b^{2i} + \right.$$
$$\left. + \sum_{i=0}^{[(m-1)/2]}(-1)^i \binom{m-i-1}{i} a^{m-2i-1}b^{2i+1}\right).$$

Доведення. Розглянемо послідовність $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$, яка задовольняє умови теореми 3, причому $a_1 = 1$, $a_2 = -b^2$, де b – деяке ціле число, яке не дорівнює нулю.

Доведемо спочатку справедливість рівностей

$$u_n = \begin{bmatrix} a & & & & \\ -\frac{b^2}{a} & a & & & \\ 0 & -\frac{b^2}{a} & a & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ 0 & 0 & \cdots & -\frac{b^2}{a} & a \end{bmatrix}_{n-1} =$$
$$= \sum_{i=0}^{[(n-1)/2]}(-1)^i \binom{n-i-1}{i} a^{n-2i-1}b^{2i}. \qquad (16)$$

Ліва частина (16) випливає з наслідку 1. Доведемо праву частину (16) за індукцією по n. При $n = 2$ маємо

$$u_2 = a = \sum_{i=0}^{0}(-1)^i \binom{1-i}{i} a^{1-2i}b^{2i} = a.$$

Нехай рівності (16) справедливі для всіх $2 \le n < k$. Розкладемо параперманент із рівностей (16) при $n = k$ за елементами останнього рядка. Враховуючи припущення індукції, маємо

$$u_k = au_{k-1} - b^2 u_{k-2} =$$
$$= a\sum_{i=0}^{[(k-2)/2]} (-1)^i \binom{k-i-2}{i} a^{k-2i-2} b^{2i} -$$
$$- b^2 \sum_{i=0}^{[(k-3)/2]} (-1)^i \binom{k-i-3}{i} a^{k-2i-3} b^{2i}.$$

Нехай у другій сумі $j = i+1$. Тоді, враховуючи рівності

$$\left[\frac{k-1}{2}\right] = \left[\frac{k-2}{2}\right]$$

для парного значення k і

$$\left[\frac{k-1}{2}\right] = \left[\frac{k-2}{2}\right] + 1$$

для непарного значення k, отримаємо рівності

$$u_k = \sum_{i=0}^{[(k-2)/2]} (-1)^i \binom{k-i-2}{i} a^{k-2i-1} b^{2i} +$$
$$+ \sum_{j=0}^{[(k-1)/2]} (-1)^j \binom{k-j-1}{j-1} a^{k-2j-1} b^{2j} = a^{k-1} +$$
$$+ a^{k-1} + \sum_{i=0}^{[(k-1)/2]} (-1)^i \left(\binom{k-i-2}{i} + \right.$$
$$\left. + \binom{k-i-1}{i-1} \right) a^{k-2i-1} b^{2i} =$$
$$= \sum_{i=0}^{[(k-1)/2]} (-1)^i \binom{k-i-1}{i} a^{k-2i-1} b^{2i}.$$

Тепер для доведення наслідку 6 достатньо отриманий вираз для u_k підставити в очевидну тотожність:

$$u_{2m+1} = u_{m+1}^2 - b^2 u_m^2 = (u_{m+1} - bu_m)(u_{m+1} + bu_m).$$

***Приклад* 1.** При $m = 7$ і $m = 11$ тотожність наслідку 6 матиме відповідно вигляд

$$a^6 - 5a^4 b^2 + 6a^2 b^4 - b^6 =$$
$$= (a^3 - 2ab^2 - a^2 b + b^3)(a^3 - 2ab^2 + a^2 b - b^3),$$

$$a^{10} - 9a^8 b^2 + 28a^6 b^4 - 35a^4 b^6 + 15a^2 b^8 - b^{10} =$$
$$= (a^5 - a^4 b - 4a^3 b^2 + 3a^2 b^3 + 3ab^4 - b^5) \times$$
$$\times (a^5 + a^4 b - 4a^3 b^2 - 3a^2 b^3 + 3ab^4 + b^5).$$

***Приклад* 2.** Рекурентне рівняння

$$u_{n+2} = (k+1)u_{n+1} - ku_n$$

з нормальними початковими умовами

$$u_1 = 1,\ u_2 = k+1, 1 \le k$$

генерує послідовність чисел $\left\{\frac{k^n - 1}{k-1}\right\}_{n=1}^{\infty}$.

Звернемо увагу на те, що умова $1 \le k$ забезпечує виконання умови $u_k \ne 1,\ 2 \le k$ наслідку 3. Згідно з наслідком 3 число $\frac{k^n - 1}{k-1}$, можливо, є простим, якщо тільки n – просте число. При $k = 2$ отримаємо відомий факт про те, що прості числа Мерсена містяться серед чисел виду $2^p - 1$, де p – деяке просте число. При $k = 10$ отримуємо, що реп'юніти (прості числа, які в десятковій системі числення зображаються у вигляді $\underbrace{11\ldots1}_{n}$) також можна знайти при простих значеннях n.

***Зауваження* 2.** Оскільки рекурентне рівняння $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ з нормальними початковими умовами $u_1 = u_2 = 1$ генерує послідовність чисел Фібоначчі, то теорему 3 можна розглядати як узагальнення деяких співвідношень для чисел Фібоначчі (див. [7, с. 325–327]).

Висновки

Застосування параперманентів трикутних матриць є досить ефективним при розв'язанні лінійних рекурентних рівнянь k-го порядку із сталими та змінними коефіцієнтами. За їх допомогою виділяється важливий клас числових послідовностей із нормальними початковими умовами та встановлюються загальні співвідношення між членами числової послідовності, які виявляються ефективними при дослідженні теоретико-числових властивостей числових послідовностей. Метод може бути корисним при дослідженні деяких адитивних задач теорії чисел.

Р.А. Заторский, И.Н. Литвиненко

ПРИМЕНЕНИЕ ПАРАПЕРМАНЕНТОВ К ЛИНЕЙНЫМ РЕКУРРЕНТНЫМ УРАВНЕНИЯМ

Рассматриваются применения параперманентов треугольных матриц к исследованию свойств числовых последовательностей, порожденных линейными рекуррентными уравнениями *k*-го порядка с постоянными коэффициентами. В частности, доказаны некоторые общие утверждения о свойствах теоретико-числовых последовательностей, порожденных линейными рекуррентными уравнениями второго порядка.

R.A. Zatorsky, I.M. Lytvynenko

APPLICATIONS OF PARAPERMANENTS OF LINEAR RECURRENT SEQUENCES

In this paper, we consider the application of parapermanents to study of numerical sequences, generated by recurrent equation of *k*-th order with constant coeffitients. Specifically, we substantiate some general statements on number-theoretical properties of numerical sequences, generated by recurrent equation of the second order.

1. *Гельфонд А.О.* Исчисление конечных разностей. – М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит-ры, 1959. – 400 с.
2. *Заторський Р.А.* Про паравизначники та параперманенти трикутних матриць // Математичні студії. – 2002. – **17**, №1. – С. 3–17.
3. *Заторський Р.А.* Паравизначники та параперманенти трикутних матриць// Доп. НАН України. – 2002. – № 8. – С. 21–25.
4. *Zatorsky R.A.* Theory of paradeterminants and its applications // Algebra and Diskrete Mathematics. – 2007. – N 1. – P. 109–138.
5. *Заторський Р.А.* Параперманенти та лінійні рекурентні співвідношення // Матер. міжнар. мат. конф., присвяченій сторіччю від початку роботи Д.О. Граве в Київському університеті. – К., 2002. – С. 138.
6. *Стенли Р.*. Перечислительная комбінаторика / Пер. с англ. – М.: Мир, 1990. – 440 с.
7. *Грэхем Р., Кнут Д., Паташник О.* Конкретная математика. Основание информатики / Пер. с англ. – М.: Мир, 1998. – 704 с.
8. *Ландо С.К.* Лекции о производящих функциях. – М.: МЦНМО, 2004. – 144 с.

Рекомендована Радою
Фізико-технічного інституту
НТУУ “КПІ”

Надійшла до редакції
13 березня 2008 року