

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ ІМЕНІ ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

В. С. Герасимчук, І. В. Герасимчук

МЕТОДИ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ

ЧАСТИНА 4

МЕТОД ВЛАСНИХ ФУНКЦІЙ ДЛЯ ОДНОРІДНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ

Навчальний посібник

Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра за спеціальностями
104 Фізика та астрономія, 105 Прикладна фізика та наноматеріали,
111 Математика, 113 Прикладна математика

Електронне мережне навчальне видання

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2025

УДК 517.95 (075.8)

М54

Автори: Герасимчук Віктор Семенович, д-р фіз.-мат. наук, професор
Герасимчук Ігор Вікторович, д-р фіз.-мат. наук, ст. наук. співроб.

Рецензент Антонов В. М., д-р фіз.-мат. наук, професор, чл.-кор. НАН України,
завідувач відділу обчислювальної фізики
Інституту металофізики ім. Г. В. Курдюмова НАН України

Відповідальний редактор Швець О. Ю., д-р фіз.-мат. наук, професор

*Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
(протокол № 3 від 09.01.2025 р.)
за поданням Вченої ради Фізико-математичного факультету
(протокол № 13 від 18.12.2024 р.)*

М54 Герасимчук, В. С. **Методи математичної фізики**. Частина 4. Метод власних функцій для однорідних крайових задач [Електронний ресурс] : навч. посіб. для здобувачів ступеня бакалавра за спеціальностями 104 Фізика та астрономія, 105 Прикладна фізика та наноматеріали, 111 Математика, 113 Прикладна математика / В. С. Герасимчук, І. В. Герасимчук ; КПІ ім. Ігоря Сікорського. – Електрон. текст. дані (1 файл: 3,48 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2025. – 62 с.

У навчальному посібнику викладено основи одного з найпотужніших методів класичної математичної фізики – методу пошуку розв'язків початково-крайових задач шляхом розкладання за власними функціями. Метод застосовується до однорідних мішаних задач для рівнянь гіперболічного та параболічного типів і граничних умов першого, другого та третього роду. Наведено численні приклади розв'язання крайових задач різної фізичної природи.

Посібник охоплює як матеріал стандартних розділів курсу "Методи математичної фізики", так і компактне викладення питань, яким в навчальній літературі приділяється недостатня увага. Акцент робиться на загальних моментах та практичних навичках. Кожен параграф містить теоретичні відомості, типові задачі з поясненнями, рисунками і графіками та задачі для самостійного розв'язання, забезпечені відповідями.

Це видання продовжує серію навчальних видань, об'єднаних єдиною темою та назвою: "Методи математичної фізики".

Посібник призначений для здобувачів ступеня бакалавра за спеціальностями 104 Фізика та астрономія, 105 Прикладна фізика та наноматеріали, 111 Математика, 113 Прикладна математика. Може бути корисним студентам інших природознавчих та інженерно-технічних спеціальностей, здобувачам ступеня магістра, а також викладачам закладів вищої освіти. Він буде корисним здобувачам вищої освіти для самостійної роботи та дистанційного навчання.

УДК 517.95 (075.8)

Реєстр. № НП 24/25-190. Обсяг 3,70 авт. арк.

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
проспект Берестейський, 37, м. Київ, 03056
<https://kpi.ua>

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру видавців, виготовлювачів
і розповсюджувачів видавничої продукції ДК № 5354 від 25.05.2017 р.

© В. С. Герасимчук, І. В. Герасимчук, 2025

© КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2025

Зміст

1. Метод власних функцій для однорідних крайових задач для рівнянь гіперболічного та параболічного типів	4
Задачі для самостійного розв'язування до розділу 1	18
2. Мішані задачі з однорідним телеграфним рівнянням	21
2.1. Коливання в середовищі з опором	25
2.2. Крайові задачі з граничними умовами 3-го роду або коливання пружно закріпленої струни в середовищі з опором	30
2.3. Коливання в електричному контурі	35
Задачі для самостійного розв'язування до розділу 2	39
3. Перетворення рівнянь в задачах теплопровідності та дифузії	40
Задачі для самостійного розв'язування до розділу 3	46
4. Поширення тепла в необмеженому стержні.....	48
Задачі для самостійного розв'язування до розділу 4	60

«Я твердо вірю, що для того, щоб чогось навчитися, треба це зробити: найлегший спосіб навчитися плавати – це почати плавати, а лекції з плавання не допоможуть»
(Пол Річард Халмош, американський математик угорського походження)

1. Метод власних функцій для однорідних крайових задач для рівнянь гіперболічного та параболічного типів

Мішана або початково-крайова задача називається однорідною, якщо вона ставиться для однорідного рівняння при однорідних крайових умовах.

При описанні фізичних явищ поряд із знайденими з досліду законами природи в диференціальній формі не менш важливу роль відіграють крайові умови, які, по суті, також є своєрідним відображенням законів природи. Розмаїття форм і способів задання навіть однорідних крайових умов зумовлює можливість адекватного описи великого різноманіття фізичних явищ. Можна припустити різні варіації крайових умов в одномірних мішаних задачах, які є певними комбінаціями граничних умов на кінцях заданого відрізка.

I. Доречно розглянути разом чотири найпростіші мішані задачі, рівняння стану і початкові умови яких збігаються, а граничні умови – відрізняються:

Знайти розв'язок однорідного хвильового рівняння

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < \infty, \quad (1.1)$$

який задовольняє довільні початкові

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x) \quad (1.2)$$

та граничні умови 1-го та 2-го роду

$$\text{задача 1} \quad - \quad u(0, t) = u(l, t) = 0; \quad (1.3.1)$$

$$\text{задача 2} \quad - \quad u(0, t) = u_x(l, t) = 0; \quad (1.3.2)$$

$$\text{задача 3} \quad - \quad u_x(0, t) = u(l, t) = 0; \quad (1.3.3)$$

$$\text{задача 4} \quad - \quad u_x(0, t) = u_x(l, t) = 0. \quad (1.3.4)$$

Зауваження 1. В кожній з наведених задач функції $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ повинні бути задані так, щоб початкові та граничні умови були узгоджені.

Задачі 1 і 2 розв'язані нами в [3, п. 1.1 і п. 1.4]. Розв'язки інших задач знаходяться за тією самою схемою: шукана функція подається у вигляді

$$u(x, t) = X(x) \cdot T(t).$$

Рівняння стану (1.1) буде задовольнятися, якщо функції $X(x)$ і $T(t)$, відповідно, є розв'язками рівнянь

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \quad T''(t) + a^2 \lambda^2 T(t) = 0. \quad (1.4)$$

Граничні умови задач (1.3.1)-(1.3.4) зводяться до наступних:

$$\text{задача 1} \quad - \quad X(0) = X(l) = 0; \quad (1.5.1)$$

$$\text{задача 2} \quad - \quad X(0) = X'(l) = 0; \quad (1.5.2)$$

$$\text{задача 3} \quad - \quad X'(0) = X(l) = 0; \quad (1.5.3)$$

$$\text{задача 4} \quad - \quad X'(0) = X'(l) = 0. \quad (1.5.4)$$

Внаслідок для функції $X(x)$ отримуємо перші чотири задачі Штурма-Ліувілля [3, формули (3.27)]. Це задачі на власні значення та власні функції одновимірного оператора Лапласа на відрізку $(0, l)$ за наявності однорідних граничних умов першого (I) та другого (II) роду.

Кожному додатному¹ власному значенню λ_n цих задач відповідають також функції $T = T_n(t)$, які задовольняють друге рівняння (1.4)

$$T_n(t) = A_n \cos a\lambda_n t + B_n \sin a\lambda_n t, \quad n \geq 1. \quad (1.6)$$

У випадку задачі 4 до розв'язку (1.6) додається розв'язок задачі Штурма-Ліувілля при $\lambda = 0$, а саме

$$T_0(t) = A_0 + B_0 t, \quad n = 0. \quad (1.6a)$$

Отже, повний набір лінійно-незалежних частинних розв'язків усіх чотирьох мішаних задач можна подати у вигляді

$$u_n(x, t) = X_n(x) \cdot T_n(t) = (A_0 + B_0 t)X_0 + (A_n \cos a\lambda_n t + B_n \sin a\lambda_n t) X_n(x).$$

Відповідно і загальний розв'язок можна записати у вигляді єдиного виразу

$$u(x, t) = (A_0 + B_0 t)X_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos a\lambda_n t + B_n \sin a\lambda_n t) X_n(x), \quad (1.7)$$

де власні значення та власні функції для кожної задачі різні:

$$\text{задача 1} \quad - \quad \lambda_n = \frac{n\pi}{l}, \quad X_n = \sin \lambda_n x \quad (n = \overline{1, \infty}); \quad (1.8.1)$$

$$\text{задача 2} \quad - \quad \lambda_n = \frac{(2n-1)\pi}{2l}, \quad X_n = \sin \lambda_n x \quad (n = \overline{1, \infty}); \quad (1.8.2)$$

$$\text{задача 3} \quad - \quad \lambda_n = \frac{(2n-1)\pi}{2l}, \quad X_n = \cos \lambda_n x \quad (n = \overline{1, \infty}); \quad (1.8.3)$$

$$\text{задача 4} \quad - \quad \lambda_n = \frac{n\pi}{l}, \quad X_n = \cos \lambda_n x, \quad (n = \overline{0, \infty}). \quad (1.8.4)$$

¹ Задача Штурма-Ліувілля для цих крайових задач, як ми вже переконалися раніше [3], не має від'ємних власних значень.

Підкреслимо ключовий момент цих розв'язків – можливість поставити спектральну задачу для функції $X(x)$, а також знайти функцію $T(t)$, тобто розділити змінні, обумовлена (забезпечена) однорідними граничними умовами.

Коефіцієнти загального розв'язку (1.7) знаходяться за формулами:

$$A_n = \frac{1}{\|X_n(x)\|^2} \int_0^l \varphi(x) X_n(x) dx, \quad B_n = \frac{1}{a \lambda_n \|X_n(x)\|^2} \int_0^l \psi(x) X_n(x) dx \quad (n = \overline{1, \infty}),$$

де квадрат норми для будь-якої з власних функцій (1.8.1)-(1.8.4) однаковий

$$\|X_n(x)\|^2 = \int_a^b \sin^2 \lambda_n x dx = \int_a^b \cos^2 \lambda_n x dx = \frac{l}{2}.$$

У випадку задачі 4, крім коефіцієнтів A_n, B_n ($n = \overline{1, \infty}$), обраховують ще й коефіцієнти при $n = 0$:

$$A_0 = \frac{1}{l} \int_0^l \varphi(x) dx, \quad B_0 = \frac{1}{l} \int_0^l \psi(x) dx$$

II. Наголосимо, що оскільки при розв'язуванні крайових задач для хвильового рівняння та рівняння теплопровідності ми розв'язуємо одну й ту саму задачу Штурма-Ліувілля для функції $X(x)$, то викладене вище дозволяє одразу записати розв'язок чотирьох мішаних задач і для однорідного рівняння теплопровідності $u_t = a^2 u_{xx}$ з довільною початковою умовою $u(x, 0) = \varphi(x)$ та граничними умовами (1.3.1)-(1.3.4). Розв'язок можна записати у вигляді єдиного виразу:

$$u(x, t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp(-a^2 \lambda_n^2 t) \cdot X_n(x) \quad (1.9)$$

де λ_n і $X_n(x)$ визначається формулами (1.8.1)-(1.8.4), а коефіцієнти A_k ($k = \overline{0, \infty}$) за допомогою квадратур

$$A_0 = \frac{1}{l} \int_0^l \varphi(x) dx, \quad A_n = \frac{1}{\|X_n(x)\|^2} \int_0^l \varphi(x) X_n(x) dx, \quad n = \overline{1, \infty}.$$

Зауваження 2. За такою самою схемою розв'язуються крайові задачі для хвильового рівняння або рівняння теплопровідності за наявності однорідних крайових умов третього (**III**) роду. Однак, для знаходження власних значень у цих задачах, необхідно розв'язувати *трансцендентні* рівняння з чисельними коефіцієнтами, що входять до граничних умов (див., наприклад, задачі Штурма-Ліувілля [3, формули (3.28)].

III. Зауважимо, що у всіх розглянутих тут крайових задачах, загальний розв'язок формально має однаковий вигляд

$$u(x, t) = \sum_n X_n(x) \cdot T_n(t) \quad (1.10)$$

розвинення в ряд за власними функціями $X_n(x)$ просторової частини задачі. Визначивши один раз цей набір власних функцій і власних значень λ_n можна відразу шукати розв'язок крайової задачі у вигляді (1.10). Підставивши цей розв'язок у вихідне рівняння, отримаємо рівняння для функцій часу $T_n(t)$, розв'язавши які матимемо можливість побудувати загальне рішення задачі у вигляді (1.10). У цьому власне і полягає суть методу власних функцій.

Таким чином, метод власних функцій – це по суті скорочений метод розділення змінних, в якому ми вважаємо просторову частину рішення – набір власних функцій $X_n(x)$ просторового оператора – відомою і шукаємо загальний розв'язок у вигляді розвинення в ряд (1.10) по цьому набору.

Нагадаємо [3], що власні функції – це власні моди коливань, які можуть існувати в даній (одно-або багатовимірній) області без підведення енергії як завгодно довго.

Теоретичною базою методу власних функцій є теорія рядів Фур'є.

Проілюструємо цей метод на прикладі розв'язування одновимірних мішаних задач з **однорідними граничними умовами**. Приклади мішаних задач з однорідними граничними умовами, що відповідають окремо *задачам 1 і 2* ми вже наводили в [3, п. 1.1, 1.2 і 1.4 відповідно]. Між тим, корисно продемонструвати метод власних функцій як єдиний підхід до задач різного фізичного типу та змісту.

Приклад 1.

a) Знайти розв'язок хвильового рівняння $u_{tt} = u_{xx}$, що описує коливання струни довжиною l із закріпленими кінцями за таких початкових умов $u(x, 0) = 0$, $u_t(x, 0) = \sin \frac{4\pi x}{l}$.

b) Знайти закон розподілу температури всередині стержня довжиною l з теплоізолюваною бічною поверхнею, якщо його кінці підтримуються за нульової температури, а початкова температура задається виразом

$$u(x, 0) = 6 \sin \frac{2\pi x}{l} - 2 \sin \frac{3\pi x}{l}.$$

В задачі (a) мова йде про механічні процеси, а в задачі (b) про термодинамічні явища, проте математична постановка *граничних умов* до обох задач однакова (граничні умови 1-го роду (I)) і вона моделюється *задачею 1* (див. формулу (1.3.1)):

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, \quad 0 < t < \infty.$$

◆ Отже, задачі (a) відповідає *крайова задача 1 для хвильового рівняння*. Тут швидкість точок струни (друга початкова умова) визначається функцією $\sin \frac{4\pi x}{l}$, яка збігається з однією із *власних функцій* задачі $X_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{l}$ ($n = 4$). Розв'язування такої задачі особливо просте з огляду на те, що систе-

ма тригонометричних функцій $\{\sin \lambda_n x\}_{n=0}^{\infty}$, $\lambda_n = n\pi/l$ ортогональна на відрітку $[0, l]$ з одиничною вагою. Тому обертаються в нуль всі коефіцієнти B_n , якщо $n \neq 4$,

$$B_{n \neq 4} = \frac{2}{\pi n} \int_0^l \sin \frac{4\pi x}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} dx \equiv 0,$$

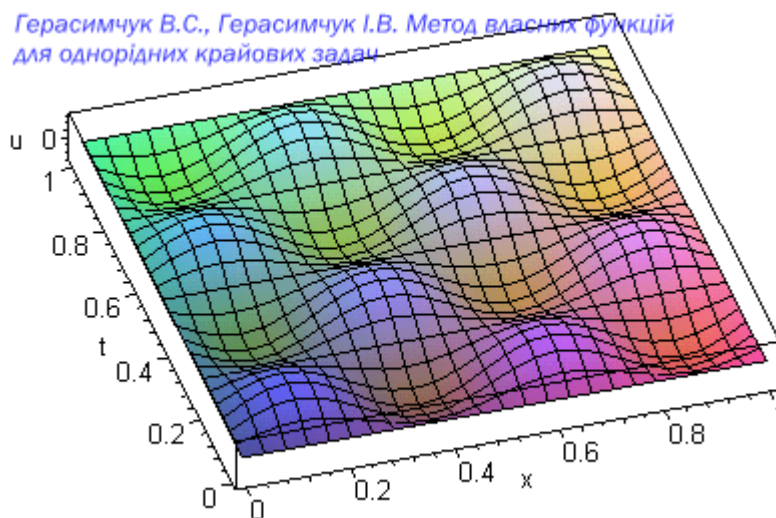
а при $n = 4$, маємо

$$B_{n=4} = \frac{2}{4\pi} \int_0^l \sin \frac{4\pi x}{l} \sin \frac{4\pi x}{l} dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^l \sin^2 \frac{4\pi x}{l} dx = \frac{1}{4\pi} \int_0^l \left(1 - \cos \frac{8\pi x}{l}\right) dx = \frac{l}{4\pi}.$$

У чинність першої початкової умови всі коефіцієнти $A_n = 0$. Тому, розв'язок набуває простого вигляду

$$u(x, t) = \frac{l}{4\pi} \sin \frac{4\pi t}{l} \sin \frac{4\pi x}{l}.$$

Отриманий розв'язок описує *стоячі хвилі*, наочне уявлення про які дає графік функції $u(x, t)$:

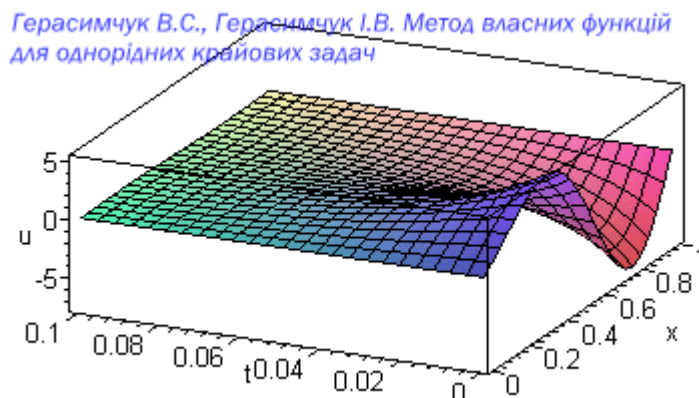


◆ Задача (b) є *крайовою задачею 1* для рівняння теплопровідності, де початкова умова $u(x, 0) = \varphi(x)$ збігається з двома частинними значеннями власних функцій $X_n(x) = \sin \lambda_n x$ ($n = 2, n = 3$). Як і при розв'язанні задачі (a) скористаємось тим, що система тригонометричних функцій $\{\sin \lambda_n x\}_{n=0}^{\infty}$, $\lambda_n = n\pi/l$ ортогональна на відрітку $[0, l]$ з одиничною вагою. Тому обертаються в нуль всі коефіцієнти A_n крім

$$A_{n=2} = \frac{2}{l} \int_0^l 6 \sin \frac{2\pi x}{l} \sin \frac{2\pi x}{l} dx = 6, \quad A_{n=3} = \frac{2}{l} \int_0^l (-2) \sin \frac{3\pi x}{l} \sin \frac{3\pi x}{l} dx = -2.$$

Наведемо відповідно аналітичний і графічний розв'язки задачі:

$$u(x,t) = 6 \exp \left[- \left(\frac{2\pi a}{l} \right)^2 t \right] \cdot \sin \frac{2\pi x}{l} - 2 \exp \left[- \left(\frac{3\pi a}{l} \right)^2 t \right] \cdot \sin \frac{3\pi x}{l}.$$



Приклад 2.

- Дослідити поздовжні коливання залізного стержня довжиною l , які відбуваються вздовж осі стержня за рахунок того, що в початковий момент він був деформований (розтягнутий) під дією сили F , прикладеної до його вільного кінця. Вважати вільним кінець стержня, що збігається з початком координат, а протилежний кінець стержня – закріпленим.
- Знайти закон охолодження однорідного стержня довжиною l з теплоізолюваною бічної поверхнею, якщо один кінець стержня ($x = 0$) теплоізолюваний, інший ($x = l$) – підтримується при нульовій температурі, а початкова температура точок стержня $u(x, 0) = \varphi(x)$.

Незважаючи на те, що в задачі (а) досліджуються механічний процес, а в задачі (б) – термодинамічний, математична постановка *граничних умов* для обох задач однакова (наявні граничні умови 1-го (I) та 2-го роду (II)) і вона моделюється *задачею 3* (формула (1.3.3)):

$$u_x(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0.$$

♦ Таким чином, задачі (а) відповідає *крайова задача 3 для хвильового рівняння* ($u_{tt} = a^2 u_{xx}$). За початкових умов $u(x, 0) = \varphi(x)$ і $u_t(x, 0) = \psi(x)$, її розв'язок має вигляд:

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[A_n \cos \frac{(2n+1)\pi a t}{2l} + B_n \sin \frac{(2n+1)\pi a t}{2l} \right] \cos \frac{(2n+1)\pi x}{2l}, \quad (1.11)$$

де

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \cos \frac{(2n+1)\pi x}{2l} dx, \quad B_n = \frac{4}{(2n+1)\pi a} \int_0^l \psi(x) \cos \frac{(2n+1)\pi x}{2l} dx. \quad (1.11a)$$

Розберемось з коливаннями стержня докладніше. Нехай стержень розтягується за вільний кінець ($x = 0$), а потім відпускається. Зрозуміло, що точки у поперечному перерізі розтягнутого стержня прагнуть повернутися до початкового рівноважного стану. Точки поперечного перерізу розтягнутого кінця стержня ($x = l$), повертаючись у початкове положення пройдуть це положення по інерції і продовжать рух до закріпленого кінця ($x = l$). Виникаючі сили пружності перешкоджатимуть цьому руху і зрештою зупинять рух точок поперечного перерізу відносно стержня. Але тепер стержень буде деформований на стиск. Тому подальший процес відбуватиметься в зворотному напрямку. У такий спосіб в стержні відбуваються *поздовжні коливання*.

За умовою задачі в початковий момент стержень був деформований під дією сили F , прикладеної до вільного кінця стержня. Зрозуміло, що у кожному поперечному перерізі стержня сила стала і дорівнює силі натягу F . За законом Гука у випадку стержня $F = ESu_x(x, t)$, де E – модуль Юнга, S – площа перерізу.

Тепер конкретизуємо приклад. Вважаючи, що в початковий момент часу зміщення перерізу с абсцисою x , згідно із законом Гука, пропорціональні абсцисі з коефіцієнтом $\delta = \frac{F}{ES}$, матимемо такі початкові умови $u(x, 0) = \delta(l - x)$, $u_t(x, 0) = 0$.

Тоді

$$A_n = \frac{8\delta l}{(2n+1)^2 \pi^2}, \quad B_n = 0.$$

Звідси витікає, що відносно зміщення перерізу стержня з абсцисою x визначається рядом

$$u(x, t) = \frac{8\delta l}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \cos \frac{(2n+1)\pi at}{2l} \cos \frac{(2n+1)\pi x}{2l}.$$

Зробимо чисельні оцінки для основного тону коливань. Так при $n = 0$ маємо:

$$u(x, t) = \frac{8\delta l}{\pi^2} \cos \frac{\pi at}{2l} \cos \frac{\pi x}{2l}.$$

З'ясуємо, наприклад, яку силу F потрібно прикласти до вільного кінця залізного прута довжиною $l = 1$ м і діаметром $d = 2$ мм, щоб відносно зміщення перерізу стержня (прута) сягало $\Delta u = 1$ мм. Зі співвідношення $\Delta u = \frac{8\delta l}{\pi^2}$ (вважаємо косинуси рівними одиниці) знаходимо $F = \frac{\pi^2 ES}{8l} \Delta u$. Приймаючи $E(Fe) = 21 \cdot 10^{10}$ Па і

$S = \pi r^2 = 3,14 \cdot 10^{-6}$ м², отримаємо

$$F = \frac{(3,14)^2 \cdot 21 \cdot 10^{10} \cdot 3,14 \cdot 10^{-6}}{8} \cdot 10^{-3} = \frac{6501,4}{8} = 812,7 \text{ Н.}$$

Повертаючись до умови задачі, можна уявити, що в початковий момент часу ($t = 0$) від вільного кінця ($x = 0$) залізного прута довжиною $l = 1$ м і діаметром $d = 2$ мм відчепили вагу масою

$$m = \frac{F}{g} = \frac{812,7}{9,8} = 82,9 \text{ кг.}$$

Нічого собі!

◆ У свою чергу, задачі **(b)** відповідає *крайова задача 3 для рівняння теплопровідності* ($u_t = a^2 u_{xx}$). При заданій початковій умові її розв'язком є ряд:

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \exp \left[- \left(\frac{(2n+1)\pi a}{2l} \right)^2 t \right] \cdot \cos \frac{(2n+1)\pi x}{2l} \quad (1.12)$$

з коефіцієнтами

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \cos \frac{(2n+1)\pi x}{2l} dx, \quad n = \overline{0, \infty}. \quad (1.12a)$$

Уточнюючи цей приклад, припустимо квадратичну зміну початкової температури по довжині стержня $\varphi(x) = A(l^2 - x^2)$. Обчислюючи інтеграл, отримаємо такий розв'язок

$$u(x, t) = \frac{32Al^2}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} \exp \left[- \left(\frac{(2n+1)\pi a}{2l} \right)^2 t \right] \cdot \cos \frac{(2n+1)\pi x}{2l}.$$

Оскільки стержень теплоізований на лівому кінці, а правий підтримується при нульовій температурі, то тепла енергія поширюється зліва направо і все тепло витікає через правий кінець в термостат, який і підтримує нульову температуру на правому кінці. Для розуміння якісної картини залишимо лише перший доданок в отриманій відповіді

$$u_{n=0}(x, t) = \frac{32Al^2}{\pi^3} \exp \left[- \left(\frac{\pi a}{2l} \right)^2 t \right] \cdot \cos \frac{\pi x}{2l}, \quad (1.12б)$$

з якого явно видно і часову і координатну залежність температури стержня. Визначимо час, за який певні точки $\left(x = 0, \frac{l}{4}, \frac{l}{2}, \frac{3l}{4} \right)$, наприклад, мідного стержня довжиною $l = 1$ м охолонуть до температури $u_0(x, t) = 1^0 C$. Коефіцієнт температуропровідності міді $a^2 = 1,11 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2/\text{с}$, а сталу A покладемо рівною $A = 100^0 C / \text{м}^2$. Тоді

$$1 = \frac{32Al^2}{\pi^3} \exp \left[- \left(\frac{\pi a}{2l} \right)^2 t \right] \cdot \cos \frac{\pi x}{2l} \quad \Rightarrow \quad t = \left(\frac{2l}{\pi a} \right)^2 \left[\ln \frac{32Al^2}{\pi^3} + \ln \cos \frac{\pi x}{2l} \right],$$

звідки

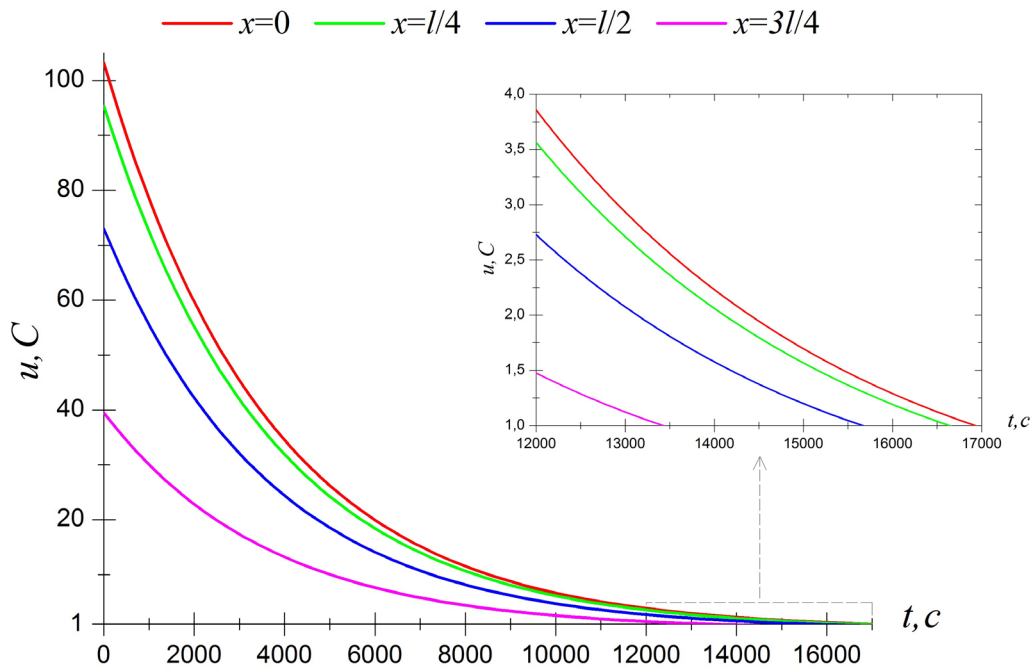
$$t(x=0) = \frac{4}{\pi^2 \cdot 1,11 \cdot 10^{-4}} \ln \frac{3200}{\pi^3} \approx 16929 \text{ с} \approx 282 \text{ хв} \approx 4,7 \text{ годин};$$

$$t\left(x = \frac{l}{4}\right) = \frac{4}{\pi^2 \cdot 1,11 \cdot 10^{-4}} \left(\ln \frac{3200}{\pi^3} + \ln \cos \frac{\pi}{8} \right) \approx 16640 \text{ с} \approx 277 \text{ хв} \approx 4,6 \text{ годин};$$

$$t\left(x = \frac{l}{2}\right) = \frac{4}{\pi^2 \cdot 1,11 \cdot 10^{-4}} \left(\ln \frac{3200}{\pi^3} + \ln \cos \frac{\pi}{4} \right) \approx 15664 \text{ с} \approx 261 \text{ хв} \approx 4,4 \text{ годин};$$

$$t\left(x = \frac{3l}{4}\right) = \frac{4}{\pi^2 \cdot 1,11 \cdot 10^{-4}} \left(\ln \frac{3200}{\pi^3} + \ln \cos \frac{3\pi}{8} \right) \approx 13423 \text{ с} \approx 224 \text{ хв} \approx 3,7 \text{ годин}.$$

Графічна залежність температури охолодження зазначених точок стержня від часу (1.126) наведена на рисунку. Очевидно, що графіки на вставці узгоджуються з нашими розрахунковими значеннями.



Приклад 3.

- До кінців струни довжиною l прикріплені кільця малої маси, які можуть ковзати без тертя у вертикальному напрямку по напрямним стержням, перпендикулярним до положення рівноваги струни. Знайти закон вільних коливань струни при довільних початкових умовах.
- Знайти закон вирівнювання початкової температури $u(x, 0) = \varphi(x)$ в однорідному стержні довжиною l з теплоізолюваною бічної поверхнею та теплоізолюваними кінцями.

З умов задачі (а) витікає, що на струну не можуть діяти сили, паралельні стержням. Сили мають бути перпендикулярні напрямним, тобто на обох кінцях струни похідна $u_x = 0$.

Як і в Прикладі 2, тут, в задачі (а) мова йде про механічні процеси, а в задачі (б) про термодинамічні явища, але знову математична постановка граничних умов до обох задач однакова (граничні умови 2-го роду (II)) і тепер моделюється задачею 4 (формула (1.3.4)):

$$u_x(0, t) = 0, \quad u_x(l, t) = 0.$$

◆ Отже, задачі (а) відповідає крайова задача 4 для хвильового рівняння ($u_{tt} = a^2 u_{xx}$) з довільними початковими умовами $u(x, 0) = \varphi(x)$ і $u_t(x, 0) = \psi(x)$. Враховуючи, що за властивостями задачі Штурма-Ліувілля власними значеннями у цьому випадку є $\lambda = 0$ і $\lambda > 0$ з відповідними власними функціями [3, формула (3.27.4)], загальний розв'язок задачі подамо у вигляді

$$u(x, t) = \frac{(A_0 + B_0 t)X_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{n\pi a t}{l} + B_n \sin \frac{n\pi a t}{l} \right) \cos \frac{n\pi x}{l}, \quad (1.13)$$

де

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx, \quad B_n = \frac{2}{a n \pi} \int_0^l \psi(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx, \quad n = \overline{0, \infty}. \quad (1.13a)$$

Зважаючи на особливості задачі 4 доцільно розглянути конкретний приклад. Нехай початкове відхилення підпорядковується лінійному закону $\varphi(x) = x$, а початкова швидкість стала $\psi(x) = 1$. Обчислюючи коефіцієнти

$$A_0 = l, \quad B_0 = 2, \quad A_n = \begin{cases} 0, & n = 2k, \\ -\frac{4l}{(2k+1)^2 \pi^2}, & n = 2k+1, \end{cases} \quad B_n = 0,$$

отримаємо такий набір розв'язків рівняння коливань струни

$$u(x, t) = \frac{l}{2} + t - \frac{4l}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \cos \frac{(2n+1)\pi a t}{l} \cos \frac{(2n+1)\pi x}{l}$$

♦ Відповідно, для задачі (b) маємо *крайову задачу 4 для рівняння теплопровідності* ($u_t = a^2 u_{xx}$). При довільній початковій умові її розв'язком є сума

$$u(x, t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp \left[-\left(\frac{n\pi a}{l} \right)^2 t \right] \cdot \cos \frac{n\pi x}{l}, \quad (1.14)$$

де коефіцієнти

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx, \quad n = \overline{0, \infty}. \quad (1.14a)$$

Покладемо, наприклад, в початковий момент температуру рівною $\varphi(x) = 1 + \cos \frac{\pi x}{l}$. За такої умови не обов'язково обчислювати інтеграли, щоб знайти коефіцієнти A_n ($n = \overline{0, \infty}$). Достатньо помітити, що задовольняючи початкову умову отримаємо рівність

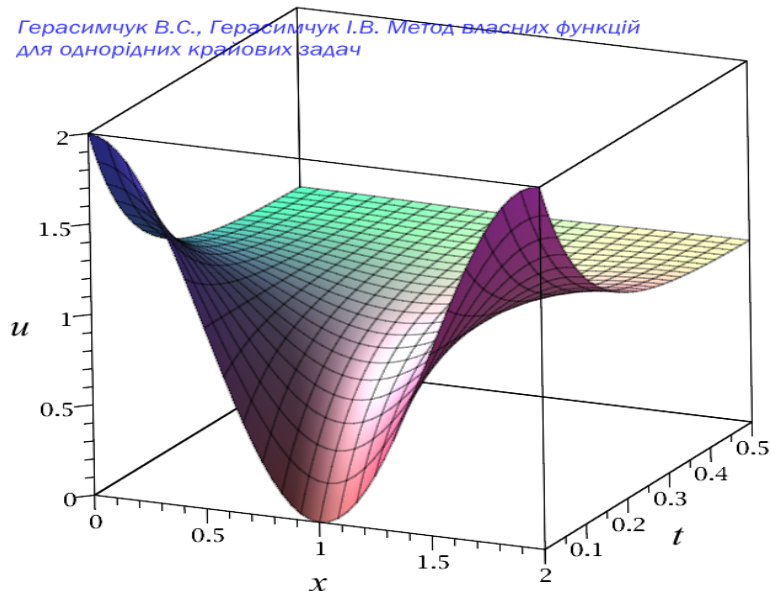
$$\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi x}{l} = 1 + \cos \frac{\pi x}{l},$$

яка справедлива лише при $A_0 = 2$, $A_1 = 1$, $A_{n \geq 2} = 0$.

Отже, вирівнювання початкової температури стержня у цьому випадку відбувається за законом

$$u(x, t) = 1 + \exp \left[-\left(\frac{\pi a}{l} \right)^2 t \right] \cdot \cos \frac{\pi x}{l},$$

що наглядно ілюструє графік розв'язку.



Приклад 4.

- Один кінець стержня ($x = 0$) вільний, а інший ($x = l$) закріплений пружно. Знайти повздовжні коливання стержня при довільних початкових умовах.
- Знайти температуру однорідного стержня довжиною l з теплоізолюваною бічної поверхнею, якщо його лівий кінець теплоізолюваний, а на правому відбувається конвективний теплообмін за законом Ньютона [2, п.2.2] з середовищем, температура якого дорівнює U_0 . Початкова температура стержня рівна нулю.

Умова пружного закріплення в задачі (а) і умова конвективного теплообміну з оточуючим середовищем в задачі (б) моделюються граничними умовами 3-го роду (III).

♦ За умовою задачі (а) маємо розв'язувати *хвильове рівняння* ($u_{tt} = a^2 u_{xx}$) з довільними початковими умовами $u(x, 0) = \varphi(x)$ і $u_t(x, 0) = \psi(x)$ і граничними умовами виду

$$u_x(0, t) = 0, \quad u_x(l, t) + \gamma u(l, t) = 0,$$

де γ – коефіцієнт жорсткості пружного кріплення правого кінця стержня.

Таким граничним умовам відповідає задача Штурма-Ліувілля (II-III) [3, формула (3.28.2)]. Розв'язуючи яку

$$X(x) = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x, \quad X'(x) = \lambda(-C_1 \sin \lambda x + C_2 \cos \lambda x),$$

$$X'(0) = \lambda(-C_1 \sin 0 + C_2 \cos 0) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0,$$

$$X'(l) + \gamma X(l) = \lambda(-C_1 \sin \lambda l + \cancel{C_2 \cos \lambda l}) + \gamma(C_1 \cos \lambda l + \cancel{C_2 \sin \lambda l}) = 0,$$

отримаємо трансцендентне рівняння

$$-\lambda \sin \lambda l + \gamma \cos \lambda l = 0,$$

звідки (очевидно, косинус не може дорівнювати нулю, бо тоді синус дорівнював би ± 1 ; з аналогічної причини синус не може дорівнювати нулю, бо тоді косинус дорівнював би ± 1), знаходимо

$$\lambda \sin \lambda l = \gamma \cos \lambda l \quad \Rightarrow \quad \gamma = \lambda \operatorname{tg} \lambda l.$$

Це рівняння має злічену множину коренів λ_n , $n \in \mathbb{N}$, які можна знайти або графічно, або за допомогою комп'ютерних (чисельних) методів з будь-якою точністю. Не наводячи їх значення, задовольнимся знанням того, що вони є, і їх можна знайти в кожному конкретному випадку.

Відповідні власним значенням λ_n , власні функції (з точністю до константи) впливають із загального розв'язку задачі Штурма-Ліувілля (при $C_2 = 0$):

$$X_n(x) = \cos \lambda_n x, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (1.15)$$

За відомих власних значень λ_n , визначеним також стає рівняння для функцій $T_n(t)$

$$T_n''(t) + a^2 \lambda_n^2 T_n(t) = 0,$$

з загальним розв'язком

$$T_n(t) = A_n \cos a \lambda_n t + B_n \sin a \lambda_n t. \quad n \in \mathbb{N}. \quad (1.16)$$

Для власних функцій $X_n(x)$ (1.15) спектральної задачі і функцій $T_n(t)$ (1.16) загальний розв'язок мішаної задачі (а) набуває вигляду

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos a \lambda_n t + B_n \sin a \lambda_n t) \cdot \cos \lambda_n x, \quad (1.17)$$

де

$$A_n = \frac{1}{\|X_n(x)\|^2} \int_0^l \varphi(x) \cos \lambda_n x dx, \quad B_n = \frac{1}{a \lambda_n \|X_n(x)\|^2} \int_0^l \psi(x) \cos \lambda_n x dx, \quad (1.18)$$

$$\|X_n(x)\|^2 = \frac{l(\lambda_n^2 + \gamma^2) + \gamma}{2(\lambda_n^2 + \gamma^2)}.$$

Доповнимо цей приклад такими початковими умовами $u(x, 0) = 0$, $u_t(x, 0) = 1$. Тоді коефіцієнт $A_n = 0$, а коефіцієнт

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{1}{a \lambda_n \|X_n(x)\|^2} \int_0^l \cos \lambda_n x dx = \frac{\sin \lambda_n l}{a \lambda_n^2 \|X_n(x)\|^2} = \frac{1}{a \lambda_n^2 \|X_n(x)\|^2} \sqrt{\frac{\operatorname{tg}^2 \lambda_n l}{1 + \operatorname{tg}^2 \lambda_n l}} = |\gamma = \lambda_n \operatorname{tg} \lambda_n l| = \\ &= \frac{1}{a \lambda_n^2 \|X_n(x)\|^2} \sqrt{\frac{\gamma^2}{\lambda_n^2 + \gamma^2}} = \frac{2(\lambda_n^2 + \gamma^2)}{a \lambda_n^2 [l(\lambda_n^2 + \gamma^2) + \gamma]} \sqrt{\frac{\gamma^2}{\lambda_n^2 + \gamma^2}} = \frac{2\gamma \sqrt{\lambda_n^2 + \gamma^2}}{a \lambda_n^2 [l(\lambda_n^2 + \gamma^2) + \gamma]}. \end{aligned}$$

Звідси витікає, що за таких початкових умов повздовжні коливання стержня, вільного на лівому кінці і пружно закріпленого на правому, відбуваються за законом

$$u(x,t) = \frac{2\gamma}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{\lambda_n^2 + \gamma^2}}{\lambda_n^2 [l(\lambda_n^2 + \gamma^2) + \gamma]} \sin a\lambda_n t \cos \lambda_n x,$$

де λ_n – додатні корені рівняння $\gamma = \lambda_n \operatorname{tg} \lambda_n l$.

♦ За умовою задачі (b) потрібно розв'язати *крайову задачу для рівняння теплопровідності* ($u_t = a^2 u_{xx}$) за таких граничних умов

$$u_x(0,t) = 0, \quad u_x(l,t) + \gamma[u(l,t) - U_0] = 0. \quad (1.19)$$

де γ – коефіцієнт теплопередачі.

Одразу звернемо увагу на те, що гранична умова третього роду на правому кінці стержня неоднорідна

$$u_x(l,t) + \gamma u(l,t) = \gamma U_0,$$

що унеможливує розв'язання відповідної задачі Штурма-Ліувілля. Як відомо [3], задача Штурма-Ліувілля формулюється лише для однорідних крайових умов.

З іншого боку, оскільки початкова температура стержня рівна нулю, то процес теплопередачі в даному випадку обумовлений лише конвективним теплообміном з середовищем зі сталою температурою $U_0 = \text{const}$. Зрозуміло, що з часом температура стержня прагнучим зрівнятися з ненульовою температурою оточуючого середовища. Тому, враховуючи лінійність крайової задачі, розв'язок можна шукати у вигляді суперпозиції

$$u(x,t) = v(x,t) + U_0, \quad (1.20)$$

де $v(x,t)$ – невідома функція, для якої слід побудувати свою крайову задачу.

Послідовно підставляючи (1.20) у рівняння теплопровідності $u_t = a^2 u_{xx}$, початкову $u(x,0) = 0$ та граничні умови (1.19) вихідної задачі, отримуємо для функції $v(x,t)$ мішану задачу з однорідними граничними умовами

$$\begin{aligned} v_t &= a^2 v_{xx}, & 0 < x < l, & & 0 < t < \infty, \\ v_x(0,t) &= 0, & v_x(l,t) + \gamma v(l,t) &= 0, & 0 < t < \infty, \\ v(x,0) &= -U_0, & 0 &\leq x \leq l. \end{aligned} \quad (1.21)$$

Зауваження. Завдяки підстановці (1.20) ми виконали редукцію від крайової задачі з неоднорідними граничними умовами для функції $u(x,t)$ до крайової задачі з однорідними граничними умовами для функції $v(x,t)$.

Крайовій задачі (1.21) для функції $v(x,t)$ відповідає та сама спектральна задача (II-III), що і задачі (a). Відповідно, для функції $T_n(t)$ маємо:

$$T'_n(t) + a^2 \lambda_n^2 T_n(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad T_n(t) = A_n e^{-a^2 \lambda_n^2 t}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Загальним розв'язком задачі (1.21) є ряд

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-a^2 \lambda_n^2 t} X_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-a^2 \lambda_n^2 t} \cos \lambda_n x, \quad (1.22)$$

де власні значення λ_n – розв'язки рівняння $\gamma = \lambda_n \operatorname{tg} \lambda_n l$; власні функції – $X_n(x) = \cos \lambda_n x$, $n \in \mathbb{N}$; квадрат норми $\|X_n(x)\|^2 = \frac{l(\lambda_n^2 + \gamma^2) + \gamma}{2(\lambda_n^2 + \gamma^2)}$.

Коефіцієнт A_n знаходиться стандартним способом. Знаходимо значення функції (1.22) в момент часу $t = 0$

$$v(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n X_n(x).$$

і прирівнюємо початковій умові $v(x, 0) = -U_0$ задачі (1.21). Тобто задовольняємо рядом (1.22) початкову умову задачі (1.21) і дістаємо

$$-U_0 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n X_n(x).$$

Домножаємо обидві частини цієї рівності на власні функції задачі Штурма-Ліувілля $X_m(x) = \cos \lambda_m x$ й інтегруємо в межах від 0 до l . Оскільки система власних функцій $\{X_n(x) = \cos \lambda_n x, n \in \mathbb{N}\}$ ортогональна на відрізку $[0, l]$, то для номера $n = m$ маємо

$$-\int_0^l U_0 X_m(x) dx = A_m \int_0^l X_m^2(x) dx,$$

звідки випливає, що

$$\begin{aligned} A_m &= \frac{-\int_0^l U_0 X_m(x) dx}{\int_0^l X_m^2(x) dx} = -\frac{U_0}{\|X_m(x)\|^2} \int_0^l \cos \lambda_m x dx = \\ &= \frac{-U_0}{\|X_m(x)\|^2} \cdot \frac{1}{\lambda_m} \sqrt{\frac{\gamma^2}{\lambda_m^2 + \gamma^2}} = -\frac{2U_0(\lambda_m^2 + \gamma^2)}{l(\lambda_m^2 + \gamma^2) + \gamma} \cdot \frac{1}{\lambda_m} \sqrt{\frac{\gamma^2}{\lambda_m^2 + \gamma^2}} = -\frac{2U_0 \gamma \sqrt{\lambda_m^2 + \gamma^2}}{\lambda_m [l(\lambda_m^2 + \gamma^2) + \gamma]}. \end{aligned}$$

Тут враховано, що інтеграл від власної функції цієї задачі

$$\int_0^l \cos \lambda_m x dx = \frac{1}{\lambda_m} \sqrt{\frac{\gamma^2}{\lambda_m^2 + \gamma^2}},$$

обчислений в задачі (а) даного прикладу (див. обрахування коефіцієнта B_n).

Тоді, розв'язок мішаної задачі (1.21) для функції $v(x, t)$ набуває вигляду:

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-a^2 \lambda_n^2 t} \cos \lambda_n x = -2U_0 \gamma \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{\lambda_n^2 + \gamma^2}}{\lambda_n [l(\lambda_n^2 + \gamma^2) + \gamma]} e^{-a^2 \lambda_n^2 t} \cos \lambda_n x.$$

З урахуванням співвідношення (1.20), запишемо розв'язок вихідної задачі про розподіл температури в однорідному стержні довжиною l з теплоізолюваною бічної поверхнею, якщо його лівий кінець теплоізолюваний, а на правому відбувається конвективний теплообмін за законом Ньютона з середовищем, температура якого дорівнює U_0 :

$$u(x, t) = v(x, t) + U_0 = U_0 \left[1 - 2\gamma \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{\lambda_n^2 + \gamma^2}}{\lambda_n [l(\lambda_n^2 + \gamma^2) + \gamma]} e^{-a^2 \lambda_n^2 t} \cos \lambda_n x \right].$$

Задачі для самостійного розв'язування до розділу 1

1. Розв'язати мішану задачу для хвильового рівняння і пояснити фізичний зміст граничних умов:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l \text{ (або } 0 < x < \pi), \quad 0 < t < \infty,$$

а) $u(0, t) = u_x(l, t) = 0, \quad u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = \sin \frac{2\pi x}{l};$

б) $u(0, t) = u_x(\pi, t) = 0, \quad u(x, 0) = \sin \frac{5x}{2}, \quad u_t(x, 0) = \sin \frac{x}{2};$

в) $u(0, t) = u_x(l, t) = 0, \quad u(x, 0) = x, \quad u_t(x, 0) = \sin \frac{\pi x}{2l} + \sin \frac{3\pi x}{2l};$

г) $u_x(0, t) = u(l, t) = 0, \quad u(x, 0) = \cos \frac{\pi x}{2l}, \quad u_t(x, 0) = \cos \frac{3\pi x}{2l} + \cos \frac{5\pi x}{2l};$

е) $u_x(0, t) = u_x(l, t) = 0, \quad u(x, 0) = x, \quad u_t(x, 0) = 1;$

ф) $u_x(0, t) = u(\pi, t) + \gamma u_x(\pi, t) = 0, \quad u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 1, \quad 0 < x < \pi.$

2. Однорідна струна довжиною l закріплена на кінці $x = 0$, а до іншого її кінця прикріплено кільце, масою якого можна знехтувати. Кільце може ковзати по гладкому стержню; воно відхилено на малу відстань h від положення рівноваги і в момент $t = 0$ відпущено. Знайти закон коливання струни.

3. Труба, відкрита з одного кінця, рухається поступально вздовж своєї осі з постійною швидкістю V . У момент часу $t = 0$ труба миттєво зупиняється. Визначити зсув повітря всередині труби на відстані x від закритого кінця труби.

4. Знайти розв'язок $u(x, y)$ рівняння $u_y = u_{xx}$, який задовольняє такі крайові умови $u(0, y) = u(\pi, y) = 0$, $u(x, 0) = 3 \sin 2x$.
5. Розв'язати мішану задачу для рівняння теплопровідності і пояснити фізичний зміст граничних умов:

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < \infty,$$

a) $u_x(0, t) = u_x(l, t) = 0, \quad u(x, 0) = \frac{x}{l};$

b) $u(0, t) = u_x(l, t) + \gamma u(l, t) = 0, \quad u(x, 0) = 1;$

c) $u_x(0, t) = u_x(l, t) + \gamma u(l, t) = 0, \quad u(x, 0) = Ax;$

d) $u_x(0, t) - \gamma u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad u(x, 0) = U_0;$

e) $u_x(0, t) - \gamma u(0, t) = u_x(l, t) + \gamma u(l, t) = 0, \quad u(x, 0) = U_0.$

6. Розв'язати мішану задачу для рівняння теплопровідності

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad u_x(0, t) = u_x(\pi, t) + u_x(\pi, t) = 0, \quad u(x, 0) = \pi - x.$$

7. Знайти закон зміни температури в однорідному ізотропному стержні довжиною l , лівий кінець якого та бічна поверхня теплоізовані, а на правому кінці відбувається теплообмін за законом Ньютона із навколишнім середовищем нульової температури з коефіцієнтом $\gamma = \pi/4l$. Початкова температура точок стержня рівна $A \cos \frac{\pi x}{4l}$.

8. Знайти закон зміни температури в однорідному ізотропному стержні одичної довжини з теплоізованою бічною поверхнею, якщо на правому кінці підтримується нульова температура, а на лівому відбувається теплообмін за законом Ньютона з середовищем нульової температури. Початкова температура точок стержня рівна $\varphi(x) = 1 + x - 2x^2$.

Відповіді до задач

1. a) $u(x, t) = \frac{l}{2\pi a} \sin \frac{2\pi a t}{l} \sin \frac{2\pi x}{l};$

b) $u(x, t) = \frac{2}{a} \sin \frac{at}{2} \sin \frac{x}{2} + \cos \frac{5at}{2} \sin \frac{5x}{2};$

c) $u(x, t) = \frac{2l}{\pi a} \sin \frac{\pi a t}{2l} \sin \frac{\pi x}{2l} + \frac{2l}{3\pi a} \cos \frac{3\pi a t}{2l} \sin \frac{3\pi x}{2l} +$
 $+ \frac{8l}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \cos \frac{(2n+1)\pi a t}{2l} \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2l};$

d) $u(x, t) = \cos \frac{\pi a t}{2l} \cos \frac{\pi x}{2l} + \frac{2l}{3\pi a} \sin \frac{3\pi a t}{2l} \cos \frac{3\pi x}{2l} + \frac{2l}{5\pi a} \sin \frac{5\pi a t}{2l} \cos \frac{5\pi x}{2l};$

$$e) u(x,t) = t + \frac{l}{2} - \frac{4l}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \cos \frac{(2n+1)\pi at}{l} \sin \frac{(2n+1)\pi x}{l};$$

$$f) u(x,t) = \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \lambda_n \pi}{\lambda_n (\pi \gamma \lambda_n^2 + \cos^2 \lambda_n \pi)} \cdot \sin \lambda_n at \cdot \cos \lambda_n x,$$

де λ_n – додатні корені рівняння $\gamma = \lambda_n \operatorname{tg} \lambda_n \pi$.

$$2. u(x,t) = \frac{8h}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \cdot \cos \frac{(2n+1)\pi at}{2l} \cdot \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2l}.$$

Вказівка: Крайові умови такі:

$$u(0,t) = 0; \quad u_x(l,t) = 0; \quad u(x,0) = \frac{h}{l} x; \quad u_t(x,0) = 0.$$

$$3. u(x,t) = \frac{8Vl}{\pi^2 a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \cdot \sin \frac{(2n+1)\pi at}{2l} \cdot \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2l}.$$

Вказівка: Крайові умови такі:

$$u(0,t) = 0; \quad u_x(l,t) = 0; \quad u(x,0) = 0; \quad u_t(x,0) = V.$$

$$4. u(x,y) = 3e^{-4y} \sin 2x.$$

$$5. a) u(x,t) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \cdot e^{-\left(\frac{(2n+1)\pi a}{l}\right)^2 t} \cos \frac{(2n+1)\pi x}{l};$$

$$b) u(x,t) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n^2 + \gamma^2 - \gamma \sqrt{\lambda_n^2 + \gamma^2}}{\lambda_n [l(\lambda_n^2 + \gamma^2) + \gamma]} \cdot e^{-(a\lambda_n)^2 t} \sin \lambda_n x,$$

де λ_n – додатні корені рівняння $\lambda_n = -\gamma \operatorname{tg} \lambda_n l$;

$$c) u(x,t) = 2A \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n (1 + \gamma l) \sqrt{\lambda_n^2 + \gamma^2} - (\lambda_n^2 + \gamma^2)}{l(\lambda_n^2 + \gamma^2) + \gamma} \cdot e^{-(a\lambda_n)^2 t} \cos \lambda_n x,$$

де λ_n – додатні корені рівняння $\lambda_n = \gamma \operatorname{tg} \lambda_n l$;

$$d) u(x,t) = 2U_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma - (-1)^n \sqrt{\lambda_n^2 + \gamma^2}}{\lambda_n [l(\lambda_n^2 + \gamma^2) + \gamma]} \cdot e^{-(a\lambda_n)^2 t} (\lambda_n \cos \lambda_n x + \gamma \sin \lambda_n x),$$

де λ_n – додатні корені рівняння $\lambda_n = -\gamma \operatorname{tg} \lambda_n l$;

$$e) u(x,t) = 2U_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{l(\lambda_n^2 + \gamma^2) + 2\gamma} \left(\frac{\gamma}{\lambda_n} + \frac{\lambda_n^2 + \gamma^2}{2\lambda_n^2} \sin \lambda_n l \right) \cdot e^{-(a\lambda_n)^2 t} (\lambda_n \cos \lambda_n x + \gamma \sin \lambda_n x),$$

де λ_n – додатні корені рівняння $\frac{\lambda_n}{\gamma} - \frac{\gamma}{\lambda_n} = 2 \operatorname{ctg} \lambda_n l$.

$$6. u(x,t) = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos \lambda_n \pi}{2\pi \lambda_n^2 + \cos \lambda_n \pi} \cdot e^{-\lambda_n^2 t} \cdot \cos \lambda_n x, \quad \text{де } \lambda_n \text{ – додатні корені рівняння } \gamma = \lambda_n \operatorname{tg} \lambda_n \pi.$$

$$7. u(x,t) = Ae^{-\left(\frac{\pi a}{4l}\right)^2 t} \cos \frac{\pi x}{4l}.$$

$$8. u(x,t) = 8 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{tg} \frac{\lambda_n}{2} \cos^2 \lambda_n}{\lambda_n^2 (1 + \cos^2 \lambda_n)} \cdot e^{-(a\lambda_n)^2 t} (\lambda_n \cos \lambda_n x + \sin \lambda_n x),$$

де λ_n – додатні корені рівняння $\lambda_n = -\operatorname{tg} \lambda_n$, $n \in \mathbb{N}$.

«При вивченні наук приклади корисніші за правила»
(Ісаак Ньютон)

2. Мішані задачі з однорідним телеграфним рівнянням

Ми достатньо опрацювали класичне хвильове рівняння. Час звернутися до більш загальної моделі, до *телеграфного* рівняння [2] та його варіацій. Почнемо з відносно простих мішаних задач, особливістю яких є саме рівняння.

Будемо знову застосовувати метод розкладання за власними функціями. При цьому, у процесі відокремлення змінних слід уникати віднесення (перенесення) доданків з шуканою функцією до функції $X(x)$, щоб не ускладнювати рівняння задачі Штурма-Ліувілля. Оскільки це обов'язково вплине на її розв'язки. Ці доданки бажано віднести до функції $T(t)$, для якої ускладнення розв'язку відповідного рівняння не настільки критичне.

Приклад 5. Дослідити поперечні коливання однорідної струни довжиною $l = 2$ із закріпленими кінцями, викликані початковим розподілом швидкостей $\psi(x) = x - 2$, якщо середовище чинить опір, пропорційний з коефіцієнтом $q > 0$ зміщенню струни від положення рівноваги.

Математична постановка задачі така:

$$\begin{aligned} u_{tt} &= a^2 u_{xx} - qu, & 0 < x < 2, & \quad t > 0, \\ u(0,t) &= 0, & u(2,t) &= 0, & \quad t \geq 0, \\ u(x,0) &= 0, & u_t(x,0) &= x - 2, & \quad 0 \leq x \leq 2. \end{aligned}$$

Це рівняння відрізняється від хвильового наявністю члена, пропорційного шуканій функції $u(x,t)$, який характеризує пружні властивості струни, пов'язані з силою опору, пропорційною зсуву. Однак, рівняння залишається однорідним, тому застосовуємо метод Фур'є $u(x,t) = X(x) \cdot T(t)$, розділяючи змінні в рівнянні та граничних умовах:

$$\frac{T''(t) + qT(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda^2, \quad X(0) = 0, \quad X(2) = 0.$$

Звідси маємо задачу Штурма-Ліувілля [3, формула (3.27.1)] для функції $X(x)$

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \quad X(0) = 0, \quad X(2) = 0,$$

власними функціями і власними значення якої є

$$X_n(x) = \sin \lambda_n x = \sin \frac{\pi n x}{2}, \quad \lambda_n = \frac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Для функцій $T_n(t)$ отримуємо звичайне ЛОДР 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами

$$T_n''(t) + (\omega_n^2 + q) T_n(t) = 0, \quad \omega_n = a \lambda_n = \frac{\pi n a}{2} \quad n \in \mathbb{N},$$

розв'язками якого є функції:

$$T_n(t) = A_n \cos \sqrt{\omega_n^2 + q} t + B_n \sin \sqrt{\omega_n^2 + q} t.$$

Отже, розв'язок вихідної задачі дається рядом

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \sqrt{\omega_n^2 + q} t + B_n \sin \sqrt{\omega_n^2 + q} t \right) \cdot \sin \lambda_n x,$$

коефіцієнти якого визначається з урахуванням початкових умов: $A_n = 0$,

$$B_n = \frac{1}{\sqrt{\omega_n^2 + q}} \int_0^2 u_t(x, 0) \sin \lambda_n x dx = \frac{1}{\sqrt{\omega_n^2 + q}} \int_0^2 (x - 2) \sin \frac{\pi n x}{2} dx = -\frac{4}{\pi n \sqrt{\omega_n^2 + q}}.$$

Остаточно, маємо

$$\boxed{u(x, t) = -\frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \sqrt{\omega_n^2 + q}} \sin \left(\sqrt{\omega_n^2 + q} t \right) \cdot \sin \frac{\pi n x}{2}} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Як бачимо, урахування в хвильовому рівнянні доданка, що характеризує силу опору, пропорційну зсуву, не вносить принципівих змін у характер коливань струни, змінюючи лише спектр частот

$$v_n = \sqrt{\omega_n^2 + q} = \sqrt{\left(\frac{\pi n a}{2} \right)^2 + q}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Приклад 6. Розв'язати мішану задачу для хвильового рівняння

$$u_{tt} = u_{xx} + 10u, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}, \quad t > 0,$$

$$u(0, t) = 0, \quad u_x \left(\frac{\pi}{2}, t \right) = 0, \quad t \geq 0,$$

$$u(x, 0) = \frac{1}{9} \sin x + \sin 3x, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}.$$

Застосовуючи метод Фур'є $u(x,t) = X(x) \cdot T(t)$, розділимо змінні в рівнянні та граничних умовах:

$$\frac{T''(t) - 10T(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda^2, \quad X(0) = 0, \quad X'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

Дістали задачу Штурма-Ліувілля [3, формула (3.27.2)] для функції $X(x)$

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \quad X(0) = 0, \quad X'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0,$$

власними функціями і власними значення якої є

$$X_n(x) = \sin \lambda_n x = \sin(2n+1)x, \quad \lambda_n = 2n+1, \quad n \in Z. \quad (2.1)$$

Функції $T_n(t)$ визначається як розв'язок ЛОДР 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами

$$T_n''(t) + (\lambda_n^2 - 10)T_n(t) = 0. \quad (2.2)$$

Воно має характеристичне рівняння

$$k^2 + (\lambda_n^2 - 10) = 0,$$

розв'язки якого залежать від номера (!) власного значення (2.1) і приводять до таких рішень рівняння (2.2):

$$k_{1,2} = \pm \sqrt{10 - \lambda_n^2}, \quad n = 0, 1 \quad \Rightarrow \quad T_n(t) = A_n e^{\sqrt{10 - \lambda_n^2} t} + B_n e^{-\sqrt{10 - \lambda_n^2} t},$$

$$k_{1,2} = \pm i \sqrt{\lambda_n^2 - 10}, \quad n \geq 2 \quad \Rightarrow \quad T_n(t) = A_n \cos \sqrt{\lambda_n^2 - 10} t + B_n \sin \sqrt{\lambda_n^2 - 10} t.$$

У результаті загальним розв'язком шуканої крайової задачі є суперпозиція

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^1 \left(A_n e^{\sqrt{10 - \lambda_n^2} t} + B_n e^{-\sqrt{10 - \lambda_n^2} t} \right) \sin \lambda_n x + \\ + \sum_{n=2}^{\infty} \left(A_n \cos \sqrt{\lambda_n^2 - 10} t + B_n \sin \sqrt{\lambda_n^2 - 10} t \right) \sin \lambda_n x.$$

Щоб визначити коефіцієнти A_n і B_n цього розв'язку одразу продиференціюємо його по t :

$$u_t(x,t) = \sum_{n=0}^1 \sqrt{10 - \lambda_n^2} t \left(A_n e^{\sqrt{10 - \lambda_n^2} t} - B_n e^{-\sqrt{10 - \lambda_n^2} t} \right) \sin \lambda_n x + \\ + \sum_{n=2}^{\infty} \sqrt{\lambda_n^2 - 10} \left(-A_n \sin \sqrt{\lambda_n^2 - 10} t + B_n \cos \sqrt{\lambda_n^2 - 10} t \right) \sin \lambda_n x.$$

Тепер враховуємо початкові умови. Завдяки першій з них маємо:

$$u(x, 0) = \sum_{n=0}^1 (A_n + B_n) \sin(2n+1)x + \sum_{n=2}^{\infty} A_n \sin(2n+1)x = \frac{1}{9} \sin x + \sin 3x.$$

Легко помітити, що отримана рівність можлива лише при $n = 0$ і $n = 1$. Тому, друга сума для значень $n \geq 2$ виявляється зайвою. З другої початкової умови випливає

$$u_t(x, 0) = \sum_{n=0}^1 \sqrt{10 - \lambda_n^2} (A_n - B_n) \sin \lambda_n x + \sum_{n=2}^{\infty} \sqrt{\lambda_n^2 - 10} B_n \sin \lambda_n x = 0,$$

звідки $A_n = B_n$. Тоді, з системи

$$\begin{cases} \sum_{n=0}^1 (A_n + B_n) \sin(2n+1)x = \frac{1}{9} \sin x + \sin 3x, \\ A_n = B_n. \end{cases}$$

знаходимо

$$\sum_{n=0}^1 2A_n \sin(2n+1)x = \frac{1}{9} \sin x + \sin 3x \quad \Rightarrow \quad A_0 \sin x + A_1 \sin 3x = \frac{1}{18} \sin x + \frac{1}{2} \sin 3x.$$

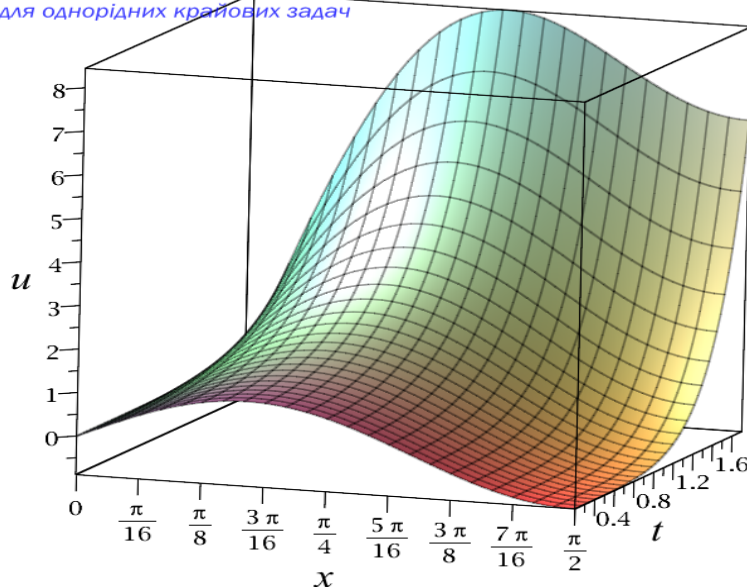
Звідси $A_0 = \frac{1}{18}$, $A_1 = \frac{1}{2}$ і, відповідно, $B_0 = \frac{1}{18}$, $B_1 = \frac{1}{2}$.

Остаточним розв'язком задачі є функція

$$u(x, t) = \frac{1}{18} (e^{3t} + e^{-3t}) \sin x + \frac{1}{2} (e^t + e^{-t}) \sin 3x = \frac{1}{9} \operatorname{ch} 3t \sin x + \operatorname{cht} \sin 3x.$$

Як бачимо, має місце експоненціальна залежність розв'язку від часу. А це означає, що в цій крайовій задачі для хвильового рівняння коливальний режим відсутній. Про це свідчить і графік розв'язку, який ми обрізали вже при $t = 1.8$, оскільки він стрімко зростає.

Герасимчук В.С., Герасимчук І.В. Метод власних функцій для однорідних крайових задач



2.1. Коливання в середовищі з опором

Дослідимо коливальний процес у середовищі з опором. Відомо, що сила опору при невеликих швидкостях пропорційна швидкості руху (у випадку коливання струни – швидкості відхилення струни від положення рівноваги). Тому в класичному хвильовому рівнянні (1.1) з'являється доданок, пропорційний першій похідній за часом [2]. Сила опору завжди спрямована проти напрямку руху.

Поставимо задачу про вільні коливання струни довжиною l в середовищі з опором, при довільних початкових умовах, якщо лівий кінець струни вільний, а правий – закріплений. Математична постановка задачі є такою:

$$\begin{aligned} u_{tt} + 2mu_t &= a^2 u_{xx}, & 0 < x < l, & \quad t > 0, \\ u_x(0, t) &= 0, & u(l, t) &= 0, & \quad t \geq 0, \\ u(x, 0) &= \varphi(x), & u_t(x, 0) &= \psi(x), & \quad 0 \leq x \leq l. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Для зручності, коефіцієнт пропорційності позначено через $2m \equiv b^2 = \beta/\rho$ [2]. Стала m називається постійною згасання і має розмірність частоти.

Наявність саме таких граничних умов не є принциповою. Важливо, що крайова задача однорідна, тому за методом Фур'є $u(x, t) = X(x) \cdot T(t)$. Внаслідок розділення змінних

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2} \frac{T''(t) + 2mT'(t)}{T(t)} = -\lambda^2, \quad X'(0) = 0, \quad X(l) = 0,$$

дістаємо задачу Штурма-Ліувілля [3, формула (3.27.3)] для функції $X(x)$

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \quad X'(0) = 0, \quad X(l) = 0.$$

з власними значеннями та власними функціями

$$\lambda_n = \frac{(2n-1)\pi}{2l}, \quad X_n(x) = \cos \lambda_n x = \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2l} \quad (n = \overline{1, \infty}). \quad (2.4)$$

Для визначення функцій $T_n(t)$ маємо ЛОДР 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами

$$T_n''(t) + 2mT_n'(t) + a^2 \lambda_n^2 T_n(t) = 0. \quad (2.5)$$

Користуючись *теоремою про структуру загального розв'язку* ЛОДР [10]

$$y(x) = C_1 y_1 + C_2 y_2, \quad \{y_1, y_2\}, \quad W(y_1, y_2) = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} \neq 0,$$

шукатимемо частинні розв'язки у вигляді

$$T_n(t) = e^{rt}, \quad T'_n(t) = re^{rt}, \quad T''_n(t) = r^2 e^{rt}.$$

Відповідне ЛОДР (2.5) характеристичне рівняння,

$$r^2 + 2mr + a^2 \lambda_n^2 = 0,$$

має такі розв'язки

$$r_{1,2} = -m \pm \sqrt{m^2 - a^2 \lambda_n^2} = -m \pm \sqrt{m^2 - \omega_n^2}, \quad \omega_n \equiv a \lambda_n.$$

Проаналізуємо вираз під радикалом, оскільки від його знаку залежить загальний розв'язок ЛОДР (2.5). Дійсно, розв'язання розпадається на три випадки. Якщо:

1. $m > \omega_n$ (це відповідає СИЛЬНОМУ опору середовища), корені характеристичного рівняння дійсні й різні, а розв'язок рівняння (2.5) має вигляд

$$T_n(t) = C e^{(-m + \sqrt{m^2 - \omega_n^2})t} + D e^{(-m - \sqrt{m^2 - \omega_n^2})t}.$$

Має місце асимптотично згасаючий рух (рис. 2.1). Такий процес називають *аперіодичним* – коливання відсутні. Це нецікаво.

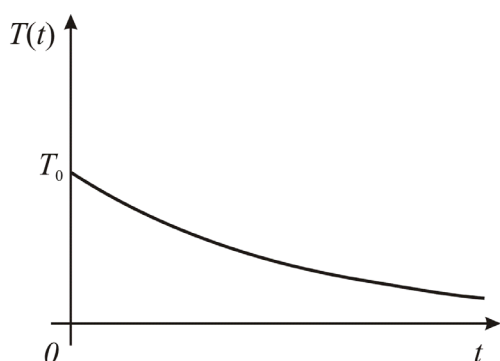


Рис. 2.1

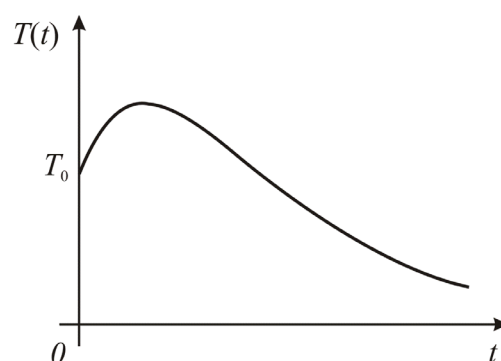


Рис. 2.2

2. $m = \omega_n$ (це означає, що опір ПОМІРНИЙ), корені характеристичного рівняння дійсні й кратні, а розв'язок рівняння (2.5) набуває вигляду

$$T_n(t) = e^{-mt} (C + Dr).$$

Спостерігається граничний випадок аперіодичного руху – коливання одразу згасають (рис. 2.2). Це малоцікаво.

3. $m < \omega_n$ (це відповідає СЛАБКОМУ опору середовища), корені характеристичного рівняння комплексно-спряжені

$$-m \pm \sqrt{m^2 - \omega_n^2} = -m \pm iq_n, \quad \text{де } q_n \equiv \sqrt{\omega_n^2 - m^2}. \quad (2.6)$$

а розв'язком рівняння є гармонічні функції

$$T_n(t) = e^{-mt} \left(C \cos \sqrt{\omega_n^2 - m^2} t + D \sin \sqrt{\omega_n^2 - m^2} t \right). \quad (2.7)$$

Процес, який описується цією функцією періодичний! Мають місце *вільно згасаючі коливання* біля положення рівноваги за експоненціальним законом (рис. 2.3). Це найбільш цікавий процес із трьох можливих.

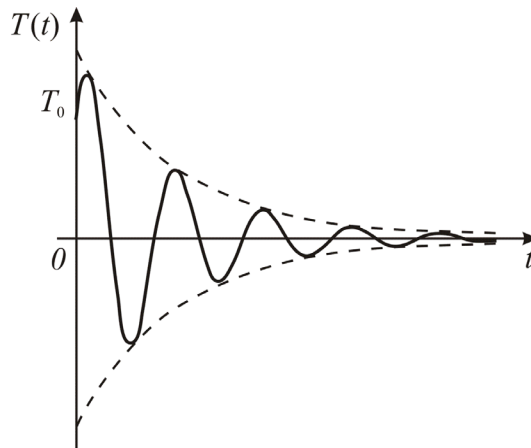


Рис. 2.3

Отже, залишаємо останній випадок і записуємо загальний розв'язок мішаної задачі (2.3)

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) T_n(t) = e^{-mt} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos q_n t + B_n \sin q_n t) \cos \lambda_n x, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2.8)$$

Залишилось задовольнити початкові умови. З допомогою першої з них одразу знаходимо коефіцієнт A_n , як розвинення функції $\varphi(x)$ в ряд Фур'є:

$$u(x, 0) = \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \lambda_n x \quad \Rightarrow \quad A_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \cos \lambda_n x dx. \quad (2.9)$$

Щоб скористатися другою початковою умовою спочатку продиференціюємо загальний розв'язок (2.8) за змінною t :

$$u_t(x, t) = -m e^{-mt} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos q_n t + B_n \sin q_n t) \cos \lambda_n x + e^{-mt} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} q_n (-A_n \sin q_n t + B_n \cos q_n t) \cos \lambda_n x,$$

і врахуємо другу початкову умову

$$u_t(x, 0) = \psi(x) = -m \cdot \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \lambda_n x + \sum_{n=1}^{\infty} q_n B_n \cos \lambda_n x,$$

звідки маємо розвинення функції $\psi(x)$ в ряд Фур'є:

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-mA_n + q_n B_n) \cos \lambda_n x \quad \Rightarrow \quad -mA_n + q_n B_n = \frac{2}{l} \int_0^l \psi(x) \cos \lambda_n x dx.$$

Виявляється, коефіцієнт B_n виражається через коефіцієнт A_n , і загалом, враховує обидві початкові умови:

$$B_n = \frac{mA_n}{q_n} + \frac{2}{lq_n} \int_0^l \psi(x) \cos \lambda_n x dx = \frac{2}{lq_n} \int_0^l [m\varphi(x) + \psi(x)] \cos \lambda_n x dx. \quad (2.10)$$

Звідки випливає, що однорідність другої початкової умови ($u_t(x, 0) = \psi(x) \equiv 0$) в даному випадку ще не є ознакою того, що коефіцієнт B_n буде рівним нуль.

Зауваження. В задачах лінійної динаміки наявність опору, пропорційного швидкості (першій похідній від шуканої функції за часом), приводить до появи у відповіді експоненціально спадного множника.

Переконаємося в цьому на наступному прикладі.

Приклад 7. Розв'язати крайову задачу для однорідного телеграфного рівняння:

$$\begin{aligned} u_{tt} + 2u_t &= u_{xx} - u, & 0 < x < \pi, & \quad t > 0, \\ u(0, t) &= 0, & u(\pi, t) &= 0, & \quad t \geq 0, \\ u(x, 0) &= (\pi - x)x, & u_t(x, 0) &= 0, & \quad 0 \leq x \leq \pi. \end{aligned}$$

Застосовуючи метод Фур'є $u(x, t) = X(x) \cdot T(t)$, розділимо змінні в телеграфному рівнянні та граничних умовах:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t) + 2T'(t)}{T(t)} + 1 = -\lambda^2, \quad X(0) = X(\pi) = 0.$$

Дістали задачу Штурма-Ліувілля [3, формула (3.27.1)] для функції $X(x)$

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \quad X(0) = X(\pi) = 0,$$

власними значення і власними функціями якої є

$$\lambda_n = n, \quad X_n = \sin \lambda_n x = \sin nx \quad (n = \overline{1, \infty}). \quad (2.11)$$

Функції $T_n(t)$ визначається як розв'язок ЛОДР 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами

$$T_n''(t) + 2T_n'(t) + (1 + \lambda_n^2)T_n(t) = 0.$$

Відповідне йому характеристичне рівняння

$$r^2 + 2r + (1 + \lambda_n^2) = 0,$$

має комплексні корені

$$r_{1,2} = -1 \pm i\lambda_n,$$

а, отже, для функцій $T_n(t)$ маємо

$$T_n(t) = e^{-t}(A_n \cos \lambda_n t + B_n \sin \lambda_n t).$$

Загальний розв'язок заданої крайової задачі набуває вигляду (2.8), але з власною функцією (2.11)

$$u(x, t) = e^{-t} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos nt + B_n \sin nt) \sin nx.$$

Звідси, задовольняючи першу початкову умову

$$u(x, 0) = (\pi - x)x = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin nx,$$

знаходимо коефіцієнт A_n :

$$A_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi x - x^2) \sin nx dx = \frac{4}{\pi n^3} (1 - \cos \pi n) = \begin{cases} 0, & n = 2k, \\ \frac{8}{\pi n^3}, & n = 2k + 1. \end{cases}$$

Далі, диференціюємо загальний розв'язок за змінною t

$$u_t(x, t) = -e^{-t} \cdot \left[\sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos nt + B_n \sin nt) \sin nx + \sum_{n=1}^{\infty} n (-A_n \sin nt + B_n \cos nt) \sin nx \right]$$

і задовольняємо другу початкову умову

$$u_t(x, 0) = 0 = -\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin nx + \sum_{n=1}^{\infty} n B_n \sin nx,$$

звідки

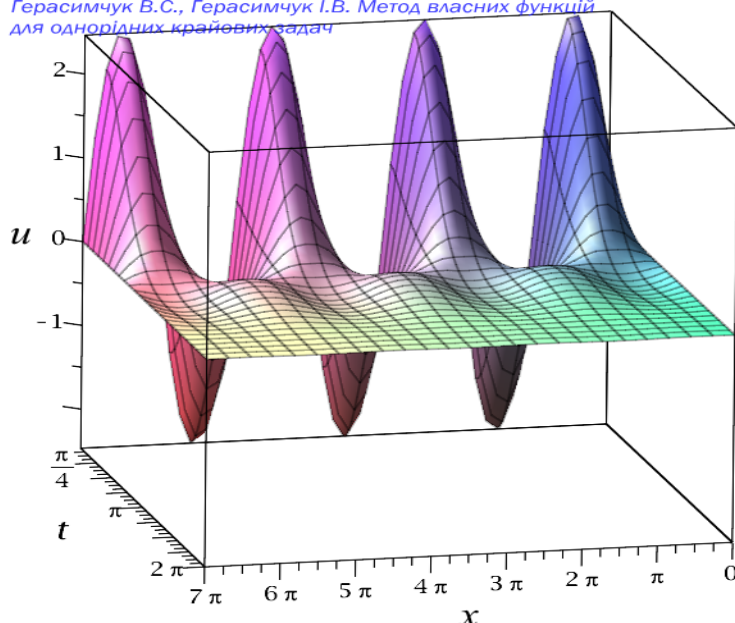
$$u_t(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} (-A_n + n B_n) \sin nx \quad \Rightarrow \quad -A_n + n B_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} u_t(x, 0) \sin nx dx = 0,$$

тобто $B_n = \frac{A_n}{n} = \frac{8}{\pi n^4}.$

З урахуванням знайдених коефіцієнтів, записуємо аналітичний розв'язок

$$u(x, t) = \frac{8e^{-t}}{\pi} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^3} \left(\cos(2k+1)t + \frac{1}{(2k+1)} \sin(2k+1)t \right) \sin(2k+1)x$$

і наводимо графічний розв'язок заданої крайової задачі для однорідного телеграфного рівняння. Має місце ледь помітний коливальний процес, який з часом, за рахунок експоненти, достатньо швидко згасає.



2.2. Крайові задачі з граничними умовами 3-го роду або коливання пружно закріпленої струни в середовищі з опором

Ускладнимо попередню модель і розглянемо крайову задачу про коливання струни в середовищі з опором, вільної на одному кінці ($x = 0$) і пружно закріпленої на іншому ($x = l$). Початкові умови вважатимемо довільними

$$\begin{aligned} u_{tt} + 2mu_t &= a^2 u_{xx}, & 0 < x < l, & \quad t > 0, \\ u_x(0, t) &= 0, & u_x(l, t) + \gamma u(l, t) &= 0, & \quad \gamma > 0, & \quad t \geq 0, \\ u(x, 0) &= \varphi(x), & u_t(x, 0) &= \psi(x), & \quad 0 \leq x \leq l. \end{aligned}$$

За фізичним змістом тут ми маємо справу з двома видами опору: опір середовища (з коефіцієнтом $2m$) в якому відбувається процес, і опір, обумовлений пружними властивостями (з коефіцієнтом γ) закріплення струни на правому кінці.

З математичної точки зору, ця задача принципово не відрізняється від крайової задачі (2.3), тому будемо спиратися на неї і, дотримуючись методу Фур'є, одразу перейдемо до задачі Штурма-Ліувілля для функції $X(x)$:

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \\ X'(0) = 0, & X'(l) + \gamma X(l) = 0. \end{cases}$$

Дістали спектральну задачу Штурма-Ліувілля (II-III) [3, формула (3.28.2)]. Процедура її розв'язування наведена в [Прикладі 4](#). Вона має власні значення λ_n – розв'язки рівняння $\gamma = \lambda_n \operatorname{tg} \lambda_n l$, $n \in \mathbb{N}$ і власні функції $X_n(x) = \cos \lambda_n x$.

Відповідні цим власним значенням розв'язки рівняння (2.5) для змінних $T_n(t)$ визначаються формулою (2.7) (зрозуміло, що ми обмежуємося найбільш цікавим випадком слабкого опору середовища). А загальний розв'язок вихідної мішаної задачі – формулою (2.8)

$$u(x,t) = e^{-mt} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos q_n t + B_n \sin q_n t) \cos \lambda_n x, \quad q_n \equiv \sqrt{\omega_n^2 - m^2}, \quad \omega_n \equiv a\lambda_n.$$

Однак, пам'ятаємо, що тут λ_n – розв'язки трансцендентного рівняння $\gamma = \lambda_n \operatorname{tg} \lambda_n l$, $n \in \mathbb{N}$, а власні функції $X_n(x) = \cos \lambda_n x$.

Це в свою чергу відображається і на формулах для коефіцієнтів отриманого розв'язку. Дійсно, задовольняючи першу початкову умову дістанемо

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \lambda_n x \quad \Rightarrow \quad \int_0^l \varphi(x) \cos \lambda_m x dx = A_m \int_0^l \cos^2 \lambda_m x dx,$$

звідки

$$A_m = \frac{1}{\|X_m(x)\|^2} \int_0^l \varphi(x) \cos \lambda_m x dx, \quad (2.12)$$

де квадрат норми

$$\|X_m(x)\|^2 = \int_0^l \cos^2 \lambda_m x dx = \frac{l(\lambda_n^2 + \gamma^2) + \gamma}{2(\lambda_n^2 + \gamma^2)}.$$

Далі, диференціюємо загальний розв'язок за змінною t :

$$u_t(x,t) = -me^{-mt} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos q_n t + B_n \sin q_n t) \cos \lambda_n x + \\ + e^{-mt} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} q_n (-A_n \sin q_n t + B_n \cos q_n t) \cos \lambda_n x,$$

і враховуємо другу початкову умову

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-mA_n + q_n B_n) \cos \lambda_n x.$$

Звідси маємо:

$$\int_0^l \psi(x) \cos \lambda_m x dx = (-mA_m + q_m B_m) \int_0^l \cos^2 \lambda_m x dx,$$

тоді,

$$-mA_m + q_m B_m = \frac{\int_0^l \psi(x) \cos \lambda_m x dx}{\int_0^l \cos^2 \lambda_m x dx} = \frac{1}{\|X_m(x)\|^2} \int_0^l \psi(x) \cos \lambda_m x dx.$$

Отже, в задачах із дисипацією енергії, пропорційною швидкості, коефіцієнт B_n дійсно виражається через коефіцієнт A_n і, в загальному випадку, враховує обидві початкові умови:

$$B_m = \frac{mA_m}{q_m} + \frac{1}{q_m \|X_m(x)\|^2} \int_0^l \psi(x) \cos \lambda_m x dx = \frac{1}{q_m \|X_m(x)\|^2} \int_0^l [m\varphi(x) + \psi(x)] \cos \lambda_m x dx. \quad (2.13)$$

І знову наголосимо, що в задачах з дисипацією однорідність другої початкової умови ($u_t(x, 0) = \psi(x) \equiv 0$) не є підставою для того, щоб коефіцієнт B_n перетворювався на нуль.

Таким чином, розв'язок крайової задачі, що зводиться до спектральної задачі Штурма-Ліувілля (II-III), а також враховує в хвильовому рівнянні опір пропорційний швидкості, визначається рядом (2.8), коефіцієнти якого знаходяться за формулами (2.12) і (2.13).

Корисно порівняти наведені розрахунки з відповідними результатами [Прикладу 4\(а\)](#), де сформульована така сама крайова задача, але не враховується опір в хвильовому рівнянні. Очевидно, що і розв'язки цих задач мають відрізнятись лише наявністю у відповіді в останньому випадку постійною згасання m , яка відповідає за опір.

Якщо прийняти тут ті самі початкові умови, що і в [Прикладі 4\(а\)](#), тобто

$$u(x, 0) = \varphi(x) = 0, \quad u_t(x, 0) = \psi(x) = 1,$$

то легко помітити, що значення коефіцієнтів A_n і B_n , які визначаються формулами (2.12) і (2.13) не зміняться, а розв'язок крайової задачі набуде вигляду

$$u(x, t) = \frac{2\gamma}{a} e^{-mt} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{\lambda_n^2 + \gamma^2}}{\lambda_n^2 [l(\lambda_n^2 + \gamma^2) + \gamma]} \sin a\lambda_n t \cos \lambda_n x.$$

Приклад 8. Розв'язати мішану задачу для однорідного телеграфного рівняння:

$$\begin{aligned} u_{tt} + 2mu_t &= a^2 u_{xx}, & 0 < x < l, & \quad t > 0, \\ u_x(0, t) - \gamma u(0, t) &= 0, & u_x(l, t) &= 0, & \quad \gamma > 0, \quad t \geq 0, \\ u(x, 0) &= \varphi(x), & u_t(x, 0) &= \psi(x), & \quad 0 \leq x \leq l. \end{aligned}$$

Внаслідок розділення змінних

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2} \frac{T''(t) + 2mT'(t)}{T(t)} = -\lambda^2, \quad X'(0) - \gamma X(0) = 0, \quad X'(l) = 0$$

дістаємо спектральну задачу Штурма-Ліувілля (III-II) [3, формула (3.28.4)] для функції $X(x)$:

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \\ X'(0) - \gamma X(0) = 0, \quad X'(l) = 0. \end{cases}$$

Загальний розв'язок рівняння цієї задачі

$$X(x) = C \cos \lambda x + D \sin \lambda x$$

задовольняємо крайовими умовами

$$X'(0) - \gamma X(0) = [\lambda(-C \sin \lambda x + D \cos \lambda x) - \gamma(C \cos \lambda x + D \sin \lambda x)]|_{x=0} = \lambda D - \gamma C = 0,$$

$$X'(l) = \lambda(-C \sin \lambda l + D \cos \lambda l)|_{x=l} = \lambda(-C \sin \lambda l + D \cos \lambda l) = 0,$$

звідки знаходимо:

$$\begin{cases} C = \frac{\lambda D}{\gamma}, \\ D(\cos \lambda l - \frac{\lambda}{\gamma} \sin \lambda l) = 0 \end{cases} \Rightarrow \cos \lambda l - \frac{\lambda}{\gamma} \sin \lambda l = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg} \lambda l = \frac{\gamma}{\lambda}.$$

Отримане тригонометричне рівняння має додатні корені – злічену множину власних значень λ_n , $n \in \mathbb{N}$. Відповідні їм власні функції $X_n(x)$, з точністю до константи, є сумою двох тригонометричних функцій

$$X_n(x) = \lambda_n \cos \lambda_n x + \gamma \sin \lambda_n x, \quad n \in \mathbb{N},$$

а квадрат норми власних функцій обраховується аналогічно обчисленням, наведеним у [3, Приклад 10] і дорівнює

$$\|X_n(x)\|^2 = \int_0^l (\lambda_n \cos \lambda_n x + \gamma \sin \lambda_n x)^2 dx = \frac{l(\lambda_n^2 + \gamma^2) + \gamma}{2}. \quad (2.14)$$

Відповідні власним значенням розв'язки рівняння (2.5) для змінних $T_n(t)$ визначаються формулою (2.7) (ми знову обмежуємося найбільш цікавим випадком слабкого опору середовища). А загальний розв'язок вихідної мішаної задачі тепер визначається рядом

$$u(x, t) = e^{-mt} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos q_n t + B_n \sin q_n t) (\lambda_n \cos \lambda_n x + \gamma \sin \lambda_n x), \quad (2.15)$$

де $q_n \equiv \sqrt{\omega_n^2 - m^2}$, $\omega_n \equiv a\lambda_n$.

Залишилося обчислити коефіцієнти ряду (2.15). Спочатку задовольняємо першу початкову умову

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n (\lambda_n \cos \lambda_n x + \gamma \sin \lambda_n x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n X_n(x).$$

Домножимо обидві частини цієї рівності на власні функції $X_m(x)$ і проінтегруємо в заданих межах, враховуючи умови ортогональності та нормування $X_m(x)$:

$$\int_0^l \varphi(x)(\lambda_m \cos \lambda_m x + \gamma \sin \lambda_m x) dx = A_m \int_0^l (\lambda_m \cos \lambda_m x + \gamma \sin \lambda_m x)^2 dx = A_m \cdot \|X_m(x)\|^2,$$

звідки знаходимо

$$A_m = \frac{1}{\|X_m(x)\|^2} \int_0^l \varphi(x)(\lambda_m \cos \lambda_m x + \gamma \sin \lambda_m x) dx. \quad (2.16)$$

Щоб скористатися другою початковою умовою продиференціюємо загальний розв'язок (2.15) за змінною t :

$$u_t(x, t) = -me^{-mt} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos q_n t + B_n \sin q_n t)(\lambda_n \cos \lambda_n x + \gamma \sin \lambda_n x) + e^{-mt} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} q_n (-A_n \sin q_n t + B_n \cos q_n t)(\lambda_n \cos \lambda_n x + \gamma \sin \lambda_n x),$$

і підставимо другу початкову умову

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-mA_n + q_n B_n)(\lambda_n \cos \lambda_n x + \gamma \sin \lambda_n x).$$

Повторюючи попередню процедуру стосовно множення на власні функції $X_m(x)$ отримаємо:

$$\int_0^l \psi(x)(\lambda_m \cos \lambda_m x + \gamma \sin \lambda_m x) dx = (-mA_m + q_m B_m) \int_0^l (\lambda_m \cos \lambda_m x + \gamma \sin \lambda_m x)^2 dx,$$

$$\int_0^l \psi(x)(\lambda_m \cos \lambda_m x + \gamma \sin \lambda_m x) dx = (-mA_m + q_m B_m) \cdot \|X_m(x)\|^2,$$

звідки

$$-mA_m + q_m B_m = \frac{1}{\|X_m(x)\|^2} \int_0^l \psi(x)(\lambda_m \cos \lambda_m x + \gamma \sin \lambda_m x) dx$$

і, відповідно,

$$B_m = \frac{mA_m}{q_m} + \frac{1}{q_m \|X_m(x)\|^2} \int_0^l \psi(x)(\lambda_m \cos \lambda_m x + \gamma \sin \lambda_m x) dx =$$

$$= \frac{1}{q_m \|X_m(x)\|^2} \int_0^l [m\varphi(x) + \psi(x)](\lambda_m \cos \lambda_m x + \gamma \sin \lambda_m x) dx. \quad (2.17)$$

Отже, розв'язок крайової задачі, що зводиться до спектральної задачі Штурма-Ліувілля (III-II) і при цьому враховує в хвильовому рівнянні опір пропорційний швидкості, визначається рядом (2.15), коефіцієнти якого знаходяться за формулами (2.16) і (2.17) з квадратом норми (2.14).

2.3. Коливання в електричному контурі

Коливання напруги або сили струму в електричному контурі, звісно, мають свої особливості, пов'язані з фізичними принципами процесу протікання струму. Проте, з точки зору МФ, постановка відповідних крайових задач для електричного контура і процедура їх розв'язування принципово не відрізняється від процедури розв'язування задач механічного змісту, з якими ми вже добре знайомі.

Приклад 9. Ізольований однорідний електричний провід довжиною l заряджений до деякого потенціалу $V_0 = const$. У початковий момент часу один кінець проводу ($x = 0$) заземляється, а інший ($x = l$) продовжує залишатися ізольованим. Знайти розподіл напруги у проводі, якщо самоіндукція L , ємність C та омичний опір R одиниці довжини проводу відомі.

Згідно з припущенням про ізольованість проводу вважатимемо витік $G = 0$. Тоді у відповідності з [2, п. 1.2], матимемо таке рівняння для напруги

$$v_{tt} + \frac{R}{L}v_t = \frac{1}{CL}v_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \quad (2.18)$$

розв'язок якого має задовольняти граничні умови, що відповідають досліджуваному процесу

$$v(0, t) = 0, \quad v_x(l, t) = 0, \quad t \geq 0,$$

і задані початкові умови

$$v(x, 0) = V_0, \quad v_t(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq l.$$

Дотримуючись алгоритму методу Фур'є, розділяємо змінні

$$v(x, t) = X(x)T(t),$$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{CLT''(t) + CRT'(t)}{T(t)} = -\lambda^2, \quad X(0) = 0, \quad X'(l) = 0,$$

і дістаємо задачу Штурма-Ліувілля [3, формула (3.27.2)] для функції $X(x)$

$$\begin{aligned} X''(x) + \lambda^2 X(x) &= 0, \\ X(0) &= 0, \quad X'(l) = 0 \end{aligned}$$

з власними значеннями і власними функціями

$$\lambda_n = \frac{(2n-1)\pi}{2l}, \quad X_n(x) = \sin \lambda_n x = \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2l} \quad (n = \overline{1, \infty}).$$

Для визначення функцій $T_n(t)$ отримуємо ЛОДР 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами

$$T_n''(t) + \frac{R}{L} T_n'(t) + \frac{\lambda_n^2}{CL} T_n(t) = 0.$$

Відповідне йому характеристичне рівняння (при $T_n(t) \sim e^{kt}$)

$$k^2 + \frac{R}{L} k + \frac{\lambda_n^2}{CL} = 0$$

у найбільш цікавому випадку слабкого омичного опору $R < \frac{\pi}{l} \sqrt{\frac{L}{C}}$ має комплексно спряжені корені

$$-\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{\lambda_n^2}{CL} - \frac{R^2}{4L^2}} = -\frac{R}{2L} \pm iq_n, \quad \text{де} \quad q_n = \sqrt{\frac{\lambda_n^2}{CL} - \frac{R^2}{4L^2}}.$$

Тому, загальний розв'язок рівняння для функцій $T_n(t)$ набуває вигляду:

$$T_n(t) = e^{-\frac{R}{2L}t} (A_n \cos q_n t + B_n \sin q_n t).$$

Як наслідок записуємо загальний розв'язок вихідної мішаної задачі

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) T_n(t) = e^{-\frac{R}{2L}t} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos q_n t + B_n \sin q_n t) \sin \lambda_n x. \quad (2.19)$$

Для знаходження коефіцієнтів отриманого ряду скористаємось початковими умовами задачі. З першої з них маємо

$$v(x, 0) = \begin{cases} V_0 \\ \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \lambda_n x \end{cases} \Rightarrow A_n = \frac{2}{l} \int_0^l V_0 \sin \lambda_n x dx = -\frac{2V_0}{l\lambda_n} \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2l} \Big|_0^l = \frac{2V_0}{l\lambda_n}.$$

Далі, диференціюємо загальний розв'язок за змінною t

$$v_t(x, t) = -\frac{R}{2L} e^{-\frac{R}{2L}t} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos q_n t + B_n \sin q_n t) \sin \lambda_n x + e^{-\frac{R}{2L}t} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} q_n (-A_n \sin q_n t + B_n \cos q_n t) \sin \lambda_n x,$$

і враховуємо другу початкову умову

$$v_t(x, 0) = \begin{cases} 0 \\ -\frac{R}{2L} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \lambda_n x + \sum_{n=1}^{\infty} q_n B_n \sin \lambda_n x \end{cases} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{R}{2L} A_n + q_n B_n \right) \sin \lambda_n x = 0$$

звідки витікає, що коефіцієнт B_n дійсно виражається через коефіцієнт A_n :

$$B_n = \frac{R}{2Lq_n} A_n.$$

Бажано підставити знайдені значення коефіцієнтів у загальний розв'язок:

$$\begin{aligned} v(x, t) &= e^{-\frac{R}{2L}t} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos q_n t + \frac{R}{2Lq_n} A_n \sin q_n t \right) \sin \lambda_n x = \\ &= \frac{2V_0}{l} e^{-\frac{R}{2L}t} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} \left(\cos q_n t + \frac{R}{2Lq_n} \sin q_n t \right) \sin \lambda_n x = \\ &= \frac{4V_0}{\pi} e^{-\frac{R}{2L}t} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)} \left(\cos q_n t + \frac{R}{2Lq_n} \sin q_n t \right) \sin \lambda_n x. \quad (2.20) \end{aligned}$$

Отриманий ряд є математичним розв'язком поставленої крайової задачі. Як ми і очікували, формулюючи цю задачу, гармонічні коливання напруги у проводі експоненціально згасають з часом.

Отриманому результату можна надати більш прийнятну в електротехніці форму, якщо ввести фазу коливань δ_n , позначивши

$$\operatorname{ctg} \delta_n = \frac{R}{2Lq_n}$$

і згорнути вираз у дужках

$$\frac{4V_0}{\pi(2n-1)} \left(\cos q_n t + \frac{R}{2Lq_n} \sin q_n t \right) = \underbrace{\frac{4V_0}{\pi(2n-1) \sin \delta_n}}_{a_n} \sin(q_n t + \delta_n) = a_n \sin(q_n t + \delta_n).$$

Тоді,

$$v(x, t) = e^{-\frac{R}{2L}t} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{a_n \sin \lambda_n x}_{\text{амплітуда}} \cdot \sin(q_n t + \delta_n), \quad (2.21)$$

що у відсутності опору збігається з формулою для вільних коливань (1.21) [3]. Тут q_n – частота коливань, δ_n – початкова фаза, λ_n – власні значення і $\sin \lambda_n x$ – власні функції.

Приклад 10. Знайти напругу $v(x, t)$ в «лінії без спотворення» довжиною l , один кінець якої ($x = 0$) ізолюваний, а інший ($x = l$) – заземлений. Початкова напруга в усіх точках стала E_0 , а початковий струм відсутній.

Оскільки «лінія без спотворення» – це лінія, параметри якої зв'язані співвідношенням $RC = GL$ [2, п. 1.2], то задача зводиться до розв'язання однорідного телеграфного рівняння

$$v_{tt} + 2\beta v_t = a^2 v_{xx} - \beta^2 v, \quad a^2 = \frac{1}{LC}, \quad \beta = \frac{G}{C}$$

при однорідних граничних

$$v_x(0, t) = 0, \quad v(l, t) = 0$$

і неоднорідних початкових умовах

$$v(x, 0) = E_0, \quad v_t(x, 0) = -\beta E_0.$$

Особливості даної крайової задачі пов'язані лише з самим рівнянням, оскільки наявні граничні умови 2-го (II) та 1-го (I) роду моделюється задачею 3 (формула (1.3.3)).

Тому, застосовуючи метод Фур'є, розділяємо змінні

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t) + 2\beta T'(t)}{a^2 T(t)} + \frac{\beta^2}{a^2} = -\lambda^2, \quad X'(0) = 0, \quad X(l) = 0,$$

формулюємо задачу Штурма-Ліувілля (її розв'язком є (1.8.3))

$$\begin{aligned} X''(x) + \lambda^2 X(x) &= 0, \\ X'(0) = 0, \quad X(l) &= 0 \end{aligned} \Rightarrow X_n(x) = \cos \lambda_n x, \quad \lambda_n = \frac{(2n-1)\pi}{2l}, \quad n \in \mathbb{N}$$

і звичайне ЛОДР для функцій $T_n(t)$:

$$T_n''(t) + 2\beta T_n'(t) + [\omega_n^2 + \beta^2] T_n(t) = 0, \quad \omega_n = a\lambda_n,$$

розв'язуючи яке, знаходимо

$$T_n(t) = e^{-\beta t} (A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t).$$

Отже, загальній розв'язок даної крайової задачі

$$v(x, t) = e^{-\beta t} \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t) \cos \lambda_n x.$$

Задовольняючи початкові умови, знаходимо коефіцієнти

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \lambda_n x = E_0 \Rightarrow A_n = \frac{2E_0}{l} \int_0^l \cos \lambda_n x dx = \frac{2E_0(-1)^{n-1}}{l\lambda_n},$$

$$-\cancel{\beta E_0} + \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n B_n \cos \lambda_n x = \cancel{\beta E_0} \Rightarrow B_n = 0.$$

Остаточно,

$$v(x, t) = \frac{2E_0}{l} e^{-\beta t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\lambda_n} \cos \omega_n t \cdot \cos \lambda_n x, \quad \lambda_n = \frac{(2n-1)\pi}{2l}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Задачі для самостійного розв'язування до розділу 2

1. Розв'язати мішану задачу про коливання в середовищі з опором

$$u_{tt} + 2mu_t = u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0$$

за таких крайових умов:

a) $u(0,t) = 0, \quad u_x(l,t) = 0, \quad t \geq 0,$
 $u(x,0) = Ax, \quad u_t(x,0) = 0, \quad 0 \leq x \leq l;$

b) $u_x(0,t) = 0, \quad u_x(l,t) = 0, \quad t \geq 0,$
 $u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq l;$

c) $u_x(0,t) = 0, \quad u_x(l,t) + \gamma u(l,t) = 0, \quad t \geq 0,$
 $u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq l.$

2. Розв'язати мішану задачу для однорідного телеграфного рівняння:

a) $u_{tt} = u_{xx} - 4u, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0,$
 $u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0, \quad t \geq 0,$
 $u(x,0) = x(x-1), \quad u_t(x,0) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1.$

b) $u_{tt} + 2u_t = u_{xx}, \quad 0 < x < \pi/2, \quad t > 0,$
 $u_x(0,t) = 0, \quad u_x\left(\frac{\pi}{2}, t\right) = 0, \quad t \geq 0,$
 $u(x,0) = \cos x, \quad u_t(x,0) = 0, \quad 0 \leq x \leq \pi/2.$

c) $u_{tt} + 2u_t = u_{xx} - u, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0,$
 $u(0,t) = 0, \quad u_x(\pi,t) = 0, \quad t \geq 0,$
 $u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = x, \quad 0 \leq x \leq \pi.$

d) $u_{tt} + 2u_t = u_{xx} - u, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0$
 $u_x(0,t) = 0, \quad u(\pi,t) = 0, \quad t \geq 0,$
 $u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = x, \quad 0 \leq x \leq \pi.$

3. Знайти силу струму $i(x, t)$ в провіднику довжиною l , один кінець якого ($x = 0$) ізолюваний, а інший ($x = l$) – заземлений, якщо початковий струм відсутній, а початкова напруга $E = E_0 \sin \frac{\pi x}{2l}$. Вважати, що омичний опір R і витік струму G відсутні.

Відповіді до задач

1. а)
$$u(x,t) = \frac{8Al}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} \left(\cos q_n t + \frac{m}{q_n} \sin q_n t \right) \cdot \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2l},$$

де $q_n \equiv \sqrt{\omega_n^2 - m^2}$, $\omega_n \equiv a\lambda_n$;

б)
$$u(x,t) = A_0 + B_0 e^{-2mt} + e^{-mt} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos q_n t + B_n \sin q_n t) \cdot \cos \frac{\pi n x}{l};$$

де $q_n \equiv \sqrt{\omega_n^2 - m^2}$, $\omega_n \equiv a\lambda_n$; $A_0 = \frac{1}{l} \int_0^l \varphi(x) dx + B_0$, $B_0 = \frac{1}{2ml} \int_0^l \psi(x) dx$,
 $A_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \cos \lambda_n x dx$ $B_n = \frac{mA_n}{q_n} + \frac{2}{lq_n} \int_0^l \psi(x) \cos \lambda_n x dx$;

в)
$$u(x,t) = e^{-mt} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos q_n t + B_n \sin q_n t) \cdot \cos \lambda_n x,$$

де $A_n = \frac{2(\lambda_n^2 + \gamma^2)}{l(\lambda_n^2 + \gamma^2) + \gamma_0} \int_0^l \varphi(x) \cos \lambda_n x dx$, $B_n = \frac{mA_n}{q_n} + \frac{2(\lambda_n^2 + \gamma^2)}{l(\lambda_n^2 + \gamma^2) + \gamma_0} \int_0^l \psi(x) \cos \lambda_n x dx$;
 $q_n \equiv \sqrt{\omega_n^2 - m^2}$, $\omega_n \equiv a\lambda_n$, λ_n – додатні корені рівняння $\gamma = \lambda_n \operatorname{tg} \lambda_n l$.

2. а)
$$u(x,t) = -\frac{8}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3} \cos \left(\sqrt{(2n+1)^2 \pi^2 + 4t} \right) \cdot \sin(2n+1)\pi x;$$

б)
$$u(x,t) = (1+t)e^{-t} \cos x;$$

в)
$$u(x,t) = \frac{16e^{-t}}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} \cdot \sin \frac{(2n+1)t}{2} \sin \frac{(2n+1)x}{2};$$

г)
$$u(x,t) = 8e^{-t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \left[(-1)^n - \frac{2}{(2n+1)\pi} \right] \sin \frac{(2n+1)t}{2} \cos \frac{(2n+1)x}{2}.$$

3.
$$i(x,t) = -E_0 \sqrt{\frac{C}{L}} \cos \frac{\pi x}{2l} \sin \frac{\pi t}{2l\sqrt{LC}}.$$

«Все слід робити якомога простіше, але не спрощуючи»

(Альберт Ейнштейн)

3. Перетворення рівнянь в задачах теплопровідності та дифузії

Якщо через бічну поверхню стержня відбувається теплообмін із навколишнім середовищем температури $U_0(x,t) \neq 0$, то згідно закону Ньютона [2] кількість тепла, яка витікає через бічну поверхню, пропорційна різниці температур стержня і навколишнього середовища, тому рівняння теплопровідності набуває вигляду

$$v_t = a^2 v_{xx} - \beta[v - U_0].$$

I. Розглянемо задачу теплопровідності у разі, коли кінці стержня підтримуються за нульової температури, а тепловий потік (дифузія) через бічну поверхню дорівнює $(-\beta v)$. Нехай початкова температура стержня описується функцією $\varphi(x)$. Така ситуація моделюється крайовою задачею

$$\begin{aligned} v_t &= a^2 v_{xx} - \beta v, & 0 < x < l, & \quad t > 0, \quad \beta > 0, \\ v(0, t) &= v(l, t) = 0, & t & \geq 0, \\ v(x, 0) &= \varphi(x), & 0 & \leq x \leq l. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Можливі два підходи до її розв'язання: (а) безпосереднє застосування методу Фур'є; (б) зведення крайової задачі (3.1) до більш простої (бажано вже відомої) крайової задачі.

У першому випадку використовуючи стандартну процедуру відокремлення змінних (див. п. 1.2), отримуємо задачу Штурма-Ліувілля, яка моделюється задачею 1 (формула (1.3.1))

$$\begin{aligned} X''(x) + \lambda^2 X(x) &= 0, & \Rightarrow & \quad X_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{l}, & \quad \lambda_n = \frac{n\pi}{l} & \quad (n = \overline{1, \infty}), \\ X(0) = X(l) &= 0 \end{aligned}$$

і звичайне ЛОДР 1-го порядку для функцій $T_n(t)$:

$$T_n'(t) + [\omega_n^2 + \beta] T_n(t) = 0, \quad \omega_n = a\lambda_n.$$

розв'язком якого є функції

$$T_n(t) = A_n e^{-(\omega_n^2 + \beta)t}.$$

В результаті, маємо загальний розв'язок:

$$v(x, t) = e^{-\beta t} \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\omega_n^2 t} \sin \lambda_n x. \tag{3.2}$$

Задовольняємо початкову умову і знаходимо невідомий коефіцієнт

$$v(x, 0) = \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \lambda_n x \quad \Rightarrow \quad A_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \lambda_n x dx.$$

Висновок. В задачах теплопровідності наявність теплового потоку (дифузії) через бічну поверхню приводить до появи у відповіді експоненціально спадного множника. А це у свою чергу означає, що наявність теплового потоку (дифузії) через бічну поверхню прискорює процес вирівнювання температури у порівнянні з випадком теплоізолюваної бічної поверхні. Що узгоджується з фізичними міркуваннями.

У другому випадку введемо нову функцію температури $u(x, t)$ так, щоб рівняння для неї стало простіше, ніж рівняння для $v(x, t)$. Це досить загальний прийом, який використовується в теорії диференціальних рівнянь, у чому ми

вже раніше могли переконатися. На жаль, вибір відповідного перетворення не можна здійснити певною регулярною процедурою. Тут основними є досвід і інтуїтивне уявлення про поведінку розв'язку.

Щодо задачі (3.1), то тут можливі такі міркування: температура $v(x,t)$ в кожній фіксованій точці змінюється внаслідок протікання двох фізичних процесів:

- *дифузії* тепла вздовж стержня (описується доданком $a^2 v_{xx}$),
- *перенесення* тепла через бічну поверхню (описується доданком $-\beta v$).

Щоб отримати уявлення про характер рішення, припустимо, що дифузія вздовж стержня відсутня ($a = 0$). У цьому випадку температура в кожній точці стержня прямує до нуля за експоненціальним законом $v(x,t) = v(x_0,t) \cdot e^{-\beta t}$. Відштовхуючись від цього, спробуємо уявити розв'язок задачі (3.1) у вигляді виразу:

$$v(x,t) = u(x,t) \cdot e^{-\beta t} \quad (3.3)$$

де $u(x,t)$ описує розподіл температури, обумовлений лише дифузією.

В результаті нескладних перетворень (рекомендуємо виконати *самостійно!*) отримаємо *першу мішану задачу* для нової функції $u(x,t)$

$$\begin{aligned} u_t &= a^2 u_{xx}, & 0 < x < l, & \quad t > 0, \\ u(0,t) &= u(l,t) = 0, & t & \geq 0, \\ u(x,0) &= \varphi(x), & 0 \leq x \leq l, \end{aligned} \quad (3.4)$$

докладно розглянуту в [3, п. 1.2 (див. формули (1.28) і (1.29))]. З урахуванням відомого розв'язку задачі (3.4) і підстановки (3.3) можна одразу записати розв'язок вихідної задачі для шуканої функції $v(x,t)$

$$v(x,t) = e^{-\beta t} \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\omega_n^2 t} \sin \lambda_n x, \quad A_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \lambda_n x dx.$$

який, зрозуміло, збігається із розв'язком (3.2).

Зауваження. Другий підхід особливо зручний, якщо відомий розв'язок будь-яких мішаних суто дифузійних задач.

Приклад 11. Дослідити закон вирівнювання початкової температури $v(x,0) = \varphi(x)$ в однорідному стержні довжиною l з теплоізованими кінцями у випадку дифузії тепла (теплообміну) через бічну поверхню з оточуючим середовищем нульової температури.

Математична постановка задачі така:

$$\begin{aligned} v_t &= a^2 v_{xx} - \beta v, & 0 < x < l, & \quad t > 0, \quad \beta > 0, \\ v_x(0,t) &= v_x(l,t) = 0, & t & \geq 0, \\ v(x,0) &= \varphi(x), & 0 \leq x \leq l. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Про процес конвективного теплообміну з навколишнім середовищем через бічну поверхню свідчить наявність другого члена у правій частині рівняння, пропорційного шуканій функції.

За допомогою підстановки (3.3) дана задача зводиться до *крайової задачі 4 для рівняння теплопровідності* (формула (1.3.4)).

$$\begin{aligned} u_t &= a^2 u_{xx}, & 0 < x < l, & \quad t > 0, \\ u_x(0, t) &= u_x(l, t) = 0, & t &\geq 0, \\ u(x, 0) &= \varphi(x), & 0 \leq x \leq l. \end{aligned}$$

А ця задача вже розв'язана нами в [Прикладі 3\(b\)](#). Скористаємось цим і запишемо розв'язок вихідної задачі (3.5), застосовуючи формули (1.14) і (1.14а):

$$v(x, t) = e^{-\beta t} \cdot \left(\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp \left[- \left(\frac{n\pi a}{l} \right)^2 t \right] \cdot \cos \frac{n\pi x}{l} \right), \quad (3.6)$$

де

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx, \quad n = \overline{0, \infty}. \quad (3.6a)$$

Надамо певні, конкретні значення параметрам задачі (3.5). Нехай, наприклад,

$$\begin{aligned} v_t &= a^2 v_{xx} - 2v, & 0 < x < 9, & \quad t > 0, \\ v_x(0, t) &= v_x(9, t) = 0, & t &\geq 0, \\ v(x, 0) &= 8(1 - \cos \pi x), & 0 \leq x \leq 9. \end{aligned}$$

Згідно (3.6) запишемо загальний розв'язок

$$v(x, t) = e^{-2t} \cdot \left(\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp \left[- \left(\frac{n\pi a}{9} \right)^2 t \right] \cdot \cos \frac{n\pi x}{9} \right),$$

а задовольняючи початкову умову

$$v(x, 0) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi x}{9} = 8 - 8 \cos \pi x,$$

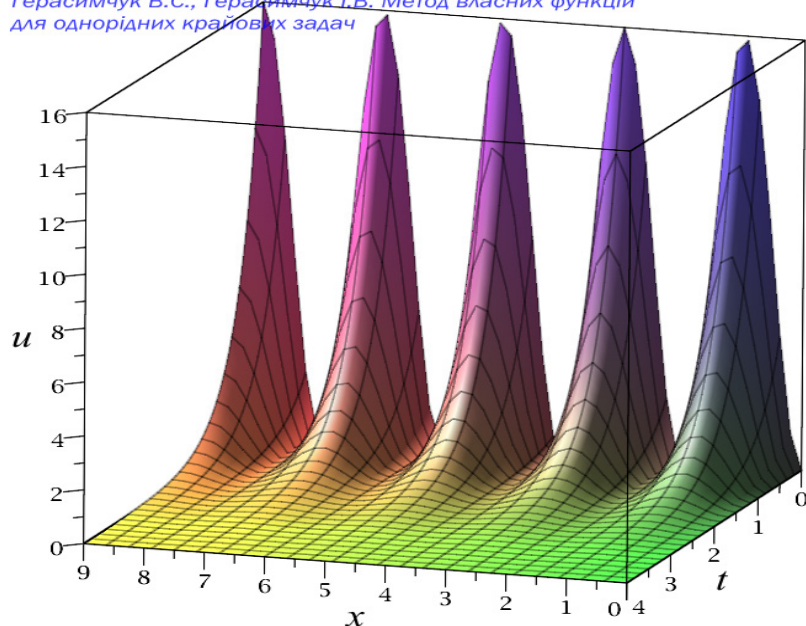
знаходимо коефіцієнти

$$A_0 = 16, \quad A_{n=9} = -8.$$

Отже, вирівнювання початкового розподілу температури в однорідному стержні з теплоізованими кінцями, за наявності теплообміну через бічну поверхню з оточуючим середовищем нульової температури, визначається законом

$$\boxed{v(x, t) = 8e^{-2t} \left(1 - e^{-(\pi a)^2 t} \cdot \cos \pi x \right)}.$$

Уявлення про цей тепловий процес надає графік розв'язку. Видно, що за рахунок експоненціально спадного множника температура стержня швидко спадає до нуля.



II. Аналогічно розв'язуються крайові задачі для рівнянь *конвективної дифузії* [2, формула (2.9)], зокрема, рівняння Ейнштейна-Колмогорова в однорідному просторі

$$w_t = a^2 w_{xx} - V w_x \quad (V = \text{const}).$$

Відповідне перетворення має вигляд

$$w(x, t) = u(x, t) \exp\left[\frac{V(x - Vt/2)}{2a^2}\right], \quad (3.6)$$

де експоненціальний множник повністю зумовлений рухом середовища і описує *біжучу хвилю* перенесення речовини макрочастинками середовища, яка поширюється вправо зі швидкістю $V/2$.

Приклад 12. Знайти розв'язок крайової задачі:

а) безпосередньо методом Фур'є;

б) редукцією до більш простої крайової задачі:

$$v_t = v_{xx} - v_x, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0,$$

$$v(0, t) = v(1, t) = 0, \quad t \geq 0,$$

$$v(x, 0) = e^{x/2} \sin 3\pi x, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

а) За методом Фур'є $v(x, t) = X(x)T(t)$. Розділяючи змінні отримаємо задачу Штурма-Ліувілля

$$X''(x) - X'(x) + \lambda^2 X(x) = 0,$$

$$X(0) = 0, \quad X(1) = 0,$$

яка має власні значення $\lambda_n = \sqrt{(n\pi)^2 + 1/4}$ і власні функції $X_n(x) = e^{x/2} \sin n\pi x$ [3, задача 2(b) у розділі Задачі для самостійного розв'язування до розділу 3].

Не складає труднощів знайти розв'язки рівняння

$$T_n'(t) + a^2 \lambda_n^2 T_n(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad T_n(t) = A_n e^{-\lambda_n^2 t} = A_n e^{-[(n\pi)^2 + 1/4]t}.$$

Підсумовуючи всі частинні розв'язки (в силу лінійності рівняння), маємо

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-[(n\pi)^2 + 1/4]t} e^{x/2} \sin n\pi x.$$

Враховуємо початкову умову для знаходження константи A_n :

$$v(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{x/2} \sin n\pi x = e^{x/2} \sin 3\pi x = \begin{cases} A_{n=3} = 1, \\ A_n = 0, \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{3\}. \end{cases}$$

Отже,

$$v(x, t) = e^{-[(3\pi)^2 + 1/4]t} e^{x/2} \sin 3\pi x = e^{-[(3\pi)^2 + 1/4]t + x/2} \sin 3\pi x.$$

б) Скористаємося формулою (3.6) і зробимо підстановку

$$v(x, t) = u(x, t) e^{(2x-t)/4}, \quad (3.7)$$

вважаючи, що функція $u(x, t)$ описує розподіл, обумовлений лише дифузією.

Підставляючи (3.7) в умови заданої крайової задачі, отримуємо для функції $u(x, t)$ першу мішану задачу для рівняння теплопровідності [3, п.1.2]

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx}, & 0 < x < 1, & \quad t > 0, \\ u(0, t) &= 0, \quad u(1, t) = 0, & t &\geq 0, \\ u(x, 0) &= \sin \pi x, & 0 \leq x \leq 1, \end{aligned} \quad (3.8)$$

розв'язання якої не викликає складнощів:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-(n\pi)^2 t} \sin n\pi x.$$

Задовольняємо початкову умову

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\pi x = \sin \pi x,$$

знаходимо коефіцієнт A_n

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\pi x = \sin 3\pi x = \begin{cases} A_{n=3} = 1, \\ A_n = 0, \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{3\} \end{cases}$$

і записуємо розв'язок задачі (3.8):

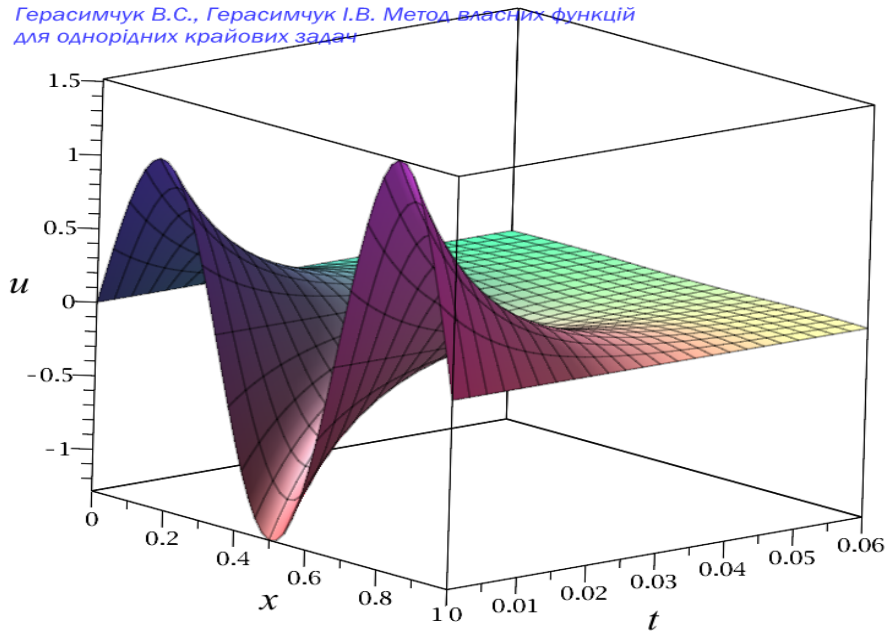
$$u(x, t) = e^{-(3\pi)^2 t} \sin 3\pi x.$$

Залишилось повернутися до підстановки (3.7) і записати відповідь для

вихідної задачі

$$v(x,t) = e^{(2x-t)/4} \cdot e^{-(3\pi)^2 t} \sin 3\pi x = e^{-[(3\pi)^2 + 1/4]t + x/2} \sin 3\pi x.$$

Отриманий експоненціально спадний з часом розподіл температури наглядно ілюструє графік функції $v(x,t)$



Задачі для самостійного розв'язування до розділу 3

1. Розв'язати крайову задачу для однорідного рівняння дифузії:

a) $u_t = u_{xx} - 4u, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0,$

$$u(0,t) = 0, \quad u(\pi,t) = 0, \quad t \geq 0,$$

$$u(x,0) = x^2 - \pi x, \quad 0 \leq x \leq \pi.$$

b) $u_t = u_{xx} - \beta u, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \quad \beta > 0,$

$$u(0,t) = 0, \quad u_x(l,t) = 0, \quad t \geq 0,$$

$$u(x,0) = \sin \frac{\pi x}{2l}, \quad 0 \leq x \leq l.$$

c) $u_t = u_{xx} - \beta^2 u, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \quad \beta > 0,$

$$u_x(0,t) = 0, \quad u_x(l,t) = 0, \quad t \geq 0,$$

$$u(x,0) = -36,6 \cos^2 \frac{\pi x}{l} \quad 0 \leq x \leq l.$$

d) $u_t = u_{xx} - \beta^2 u, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \quad \beta > 0,$

$$u_x(0,t) - \gamma u(0,t) = 0, \quad u_x(l,t) = 0, \quad t \geq 0,$$

$$u(x,0) = U_0 \quad 0 \leq x \leq l.$$

2. Розв'язати крайову задачу:

а) безпосередньо методом Фур'є;

б) редукцією до більш простої крайової задачі

$$1. \quad v_t = v_{xx} - v,$$

$$v(0, t) = v(1, t) = 0,$$

$$v(x, 0) = \sin \pi x.$$

$$2. \quad v_t = v_{xx} - 2v_x, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0,$$

$$v(0, t) = v(1, t) = 0, \quad t \geq 0,$$

$$v(x, 0) = e^x \sin \pi x \quad 0 \leq x \leq 1.$$

3. Розв'язати крайову задачу для однорідного рівняння теплопровідності:

$$u_t = u_{xx} - 2u_x + u, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0,$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(\pi, t) = 0, \quad t \geq 0,$$

$$u(x, 0) = e^x (\sin 2x - \sin x), \quad 0 \leq x \leq \pi.$$

4. Знайти закон зміни температури в однорідному ізотропному стержні довжиною l , лівий кінець якого теплоізолюваний, а правий підтримується при нульовій температурі. Через бічну поверхню відбувається теплообмін із навколишнім середовищем нульової температури. Початкова температура точок стержня рівна $6 \cos \frac{3\pi x}{2l}$.

5. В однорідному ізотропному ($a = 1$) стержні одиничної довжини обидва кінці теплоізолювані, а через бічну поверхню відбувається теплообмін із навколишнім середовищем температури U_0 . Початкова температура точок стержня рівна U_1 . Визначити розподіл температури у стержні з часом.

Відповіді до задач

$$1. \quad \text{а)} \quad u(x, t) = -\frac{8}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3} e^{-[(2n+1)^2+4]t} \cdot \sin(2n+1)x;$$

$$\text{б)} \quad u(x, t) = e^{-\left[\beta + \left(\frac{\pi a}{2l}\right)^2\right]t} \sin \frac{\pi x}{2l};$$

$$\text{в)} \quad u(x, t) = -18,3 e^{-\beta^2 t} \left(1 + e^{-\left(\frac{2\pi}{l}\right)^2 t} \cos \frac{2\pi x}{l} \right);$$

$$\text{г)} \quad u(x, t) = 2\gamma U_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n [l(\lambda_n^2 + \gamma^2) + \gamma]} e^{-(\beta^2 + a^2 \lambda_n^2)t} (\lambda_n \cos \lambda_n x + \gamma \sin \lambda_n x).$$

$$2.1. \quad v(x, t) = e^{-[\pi^2+1]t} \sin \pi x.$$

$$2.2. \quad v(x, t) = e^{-[\pi^2+1]t+x} \sin \pi x.$$

$$3. \quad u(x, t) = e^x (-e^{-t} \sin x + e^{-4t} \sin 2x).$$

4. $u(x,t) = 6e^{-\left[\beta + \left(\frac{3\pi a}{2l}\right)^2\right]t} \cos \frac{3\pi x}{2l}$, де β – коефіцієнт теплообміну.

5. $u(x,t) = U_0 + (U_1 - U_0)e^{-\beta t}$, де β – коефіцієнт теплообміну.

4. Поширення тепла в необмеженому стержні

I. Дослідимо поширення тепла в необмеженому стержні з теплоізолюваною бічною поверхнею. Для цього розглянемо *задачу Коші* на нескінченній прямій: знайти обмежену функцію $u(x,t)$, визначену в області $-\infty < x < \infty$, $t > 0$, яка задовольняє рівняння теплопровідності

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \quad (4.1)$$

і початкову умову

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad -\infty < x < \infty. \quad (4.2)$$

Шукаючи розв'язок задачі методом Фур'є

$$u(x,t) = X(x)T(t), \quad (4.3)$$

матимемо

$$\frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda^2,$$

звідки

$$T'(t) + (a\lambda)^2 T(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad T_\lambda(t) = C e^{-(a\lambda)^2 t}, \quad (4.4)$$

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad X_\lambda(x) = A \cos \lambda x + B \sin \lambda x; \quad (4.5)$$

і, відповідно,

$$u_\lambda(x,t) = X_\lambda(x)T_\lambda(t) = \tilde{C}(\lambda) e^{-(a\lambda)^2 t} \cdot [\tilde{A}(\lambda) \cos \lambda x + \tilde{B}(\lambda) \sin \lambda x]. \quad (4.6)$$

Тут, за відсутності граничних умов, параметр λ пробігає всю множину дійсних чисел; тому візьмемо в частинному розв'язку (4.6) додатний знак і просумуємо всі розв'язки $u_\lambda(x,t)$ по параметру λ :

$$u(x,t) = \int_0^\infty u_\lambda(x,t) d\lambda = \int_0^\infty e^{-(a\lambda)^2 t} \cdot [A(\lambda) \cos \lambda x + B(\lambda) \sin \lambda x] d\lambda. \quad (4.7)$$

Невласний інтеграл (4.7) збігається рівномірно відносно (x,t) і задовольняє рівняння (4.1) як суперпозиція частинних розв'язків цього рівняння, якщо похідні, що входять до рівняння (4.1), можна обчислювати шляхом диференціювання під знаком інтеграла (4.7). Дійсно,

$$u_t - a^2 u_{xx} = \int_0^\infty \left(\frac{\partial u_\lambda(x,t)}{\partial t} - a^2 \frac{\partial u_\lambda(x,t)}{\partial x^2} \right) d\lambda \equiv 0,$$

оскільки $u_\lambda(x,t)$ – розв'язок рівняння (4.1) при довільних λ .

Тепер слід вибрати коефіцієнти $A(\lambda)$ і $B(\lambda)$ так, щоб інтеграл (4.7) задовольняв і початкову умову (4.2). Для цього $A(\lambda)$ і $B(\lambda)$ повинні забезпечити виконання рівності

$$\varphi(x) = u(x, 0) = \int_0^{\infty} [A(\lambda) \cos \lambda x + B(\lambda) \sin \lambda x] d\lambda \text{ – інтеграл Фур'є.} \quad (4.8)$$

Припустимо, що функцію $\varphi(x)$ можна розкласти в інтеграл Фур'є, тобто

$$\varphi(x) = u(x, 0) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) \cos \lambda(x - \xi) d\xi \Rightarrow \quad (4.9)$$

Нагадаємо, що якщо функція $f(x)$ – абсолютно інтегровна на $(-\infty, +\infty)$, то вона може бути зображена інтегралом Фур'є

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} du \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos u(t - x) dt = \dots = \int_0^{\infty} [a(u) \cos ux + b(u) \sin ux] du,$$

$$a(u) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos ut dt, \quad b(u) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin ut dt.$$

звідки маємо

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) \cos \lambda \xi \cos \lambda x d\xi + \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) \sin \lambda \xi \sin \lambda x d\xi \right] d\lambda = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\left(\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) \cos \lambda \xi d\xi \right) \cos \lambda x + \left(\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) \sin \lambda \xi d\xi \right) \sin \lambda x \right] d\lambda = \\ &= \int_0^{\infty} [A(\lambda) \cos \lambda x + B(\lambda) \sin \lambda x] d\lambda. \end{aligned} \quad (4.9a)$$

Порівнюючи (4.8) і (4.9a) приходимо до висновку, що рівність (4.8) виконується, якщо

$$A(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) \cos \lambda \xi d\xi, \quad B(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) \sin \lambda \xi d\xi. \quad (4.10)$$

Підставляючи значення коефіцієнтів (4.10) в (4.7) і виконуючи зворотну процедуру, отримаємо

$$u(x, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-(a\lambda)^2 t} \cdot \left[\left(\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) \cos \lambda \xi d\xi \right) \cos \lambda x + \left(\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) \sin \lambda \xi d\xi \right) \sin \lambda x \right] d\lambda =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-(a\lambda)^2 t} \cdot \left[\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) (\cos \lambda \xi \cos \lambda x + \sin \lambda \xi \sin \lambda x) d\xi \right] d\lambda = \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-(a\lambda)^2 t} \cdot \left[\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) \cos \lambda(x - \xi) d\xi \right] d\lambda = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) d\xi \cdot \left[\int_0^{\infty} e^{-(a\lambda)^2 t} \cos \lambda(x - \xi) d\lambda \right],
\end{aligned}$$

або

$$u(x, t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \varphi(\xi) e^{-(a\lambda)^2 t} \cos \lambda(x - \xi) d\lambda d\xi. \quad (4.11)$$

Обчислимо інтеграл за змінною λ , виконуючи спочатку заміну змінної

$$\int_0^{\infty} e^{-(a\lambda)^2 t} \cos \lambda(x - \xi) d\lambda = \left. \begin{array}{l} a\lambda\sqrt{t} = z, \\ \lambda = \frac{z}{a\sqrt{t}}, \quad \lambda(x - \xi) = \frac{z(x - \xi)}{a\sqrt{t}} = \beta z \\ d\lambda = \frac{dz}{a\sqrt{t}} \end{array} \right| = \frac{1}{a\sqrt{t}} \int_0^{\infty} \underbrace{e^{-z^2} \cos \beta z}_{K(\beta)} dz,$$

а потім прийом диференціювання по параметру:

$$\begin{aligned}
K(\beta) &\equiv \int_0^{\infty} e^{-z^2} \cos \beta z dz, \\
K'(\beta) &= \left(\int_0^{\infty} e^{-z^2} \cos \beta z dz \right)_{\beta} = - \int_0^{\infty} e^{-z^2} \sin \beta z \cdot z dz = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \underbrace{\sin \beta z}_u \cdot \underbrace{d(e^{-z^2})}_{dv} = \\
&= \frac{1}{2} \left[\cancel{\left(e^{-z^2} \sin \beta z \right) \Big|_0^{\infty}} - \beta \int_0^{\infty} e^{-z^2} \cos \beta z dz \right] = -\frac{\beta}{2} \int_0^{\infty} e^{-z^2} \cos \beta z dz = -\frac{\beta}{2} K(\beta)
\end{aligned}$$

$$K'(\beta) = -\frac{\beta}{2} K(\beta) \quad \Rightarrow \quad K(\beta) = C e^{-\frac{\beta^2}{4}}.$$

Для знаходження константи C покладемо тут $\beta = 0$:

$$K(0) = C, \quad C = K(0) = \int_0^{\infty} e^{-z^2} dz = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Звідси,

$$K(\beta) \equiv \int_0^{\infty} e^{-z^2} \cos \beta z dz = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\frac{\beta^2}{4}}$$

і, відповідно,

$$\int_0^{\infty} e^{-(a\lambda)^2 t} \cos \lambda(x - \xi) d\lambda = \frac{\sqrt{\pi}}{2a\sqrt{t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}}. \quad (4.12)$$

Отже, формальний розв'язок задачі Коші (4.1)-(4.2) набуває вигляду:

$$u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) \cdot e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} d\xi = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} u(\xi, 0) \cdot e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} d\xi. \quad (4.13)$$

Можна довести, що розв'язок (4.13) обмежений і задовольняє рівняння теплопровідності (4.1) та початкову умову (4.2). Цей розв'язок є єдиним для неперервної й обмеженої функції $\varphi(x)$.

З формули (4.13) витікає, що тепло поширюється вдовж стержня не зі скінченною швидкістю, як можна було б очікувати. З точки зору даної моделі, як видно з отриманого розв'язку, швидкість поширення тепла нескінченна: у будь-який, як завгодно малий, момент часу $t > 0$ зміна температури $u(x, t)$ відбувається по всій довжині нескінченного стержня (для всіх x), тобто миттєво. Це пояснюється неточністю фізичних передумов, які лежать в основі теорії теплопровідності. Пам'ятаємо, що «По суті всі моделі неправильні, але деякі корисні» (Джордж Бокс, британський статистик).

II. Розв'язок (4.13) називається інтегралом Пуассона². З огляду на цей розв'язок побудуємо функція

$$G(x, \xi, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}}. \quad (4.14)$$

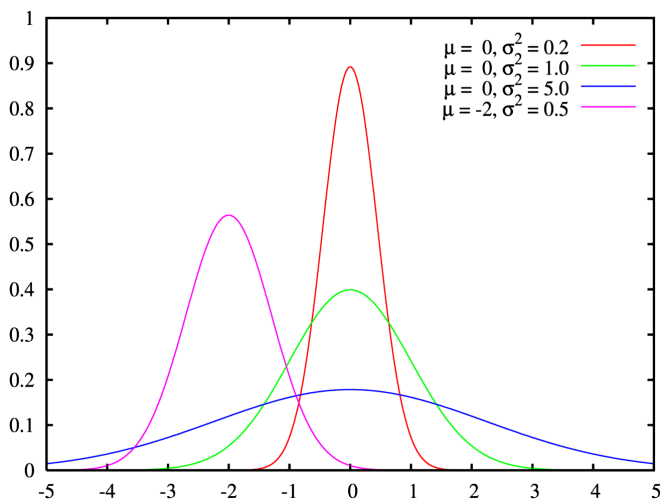
Не складно показати (**самостійно!**), що функція (4.14) задовольняє рівняння (4.1), а отже є фундаментальним розв'язком рівняння теплопровідності. Вона називається також функцією Гріна задачі Коші. З використанням (4.14) розв'язок (4.13) набуває вигляду

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x, \xi, t) \cdot \varphi(\xi) d\xi. \quad (4.15)$$

У свою чергу, якщо початкова функція $\varphi(x)$ неперервна й обмежена, то існує класичний розв'язок задачі Коші (4.1)-(4.2) на нескінченній прямій і він вира-

² ПУАССОН Сімеон Дені (*Poisson Siméon Denis*, 1781-1840) – видатний французький математик і механік, один із основоположників математичної фізики. Роботи присвячені теорії рядів Фур'є, варіаційного та інтегрального числення, теоретичної механіки, теорії ймовірностей. Розробив математичну теорію електростатики та явищ магнетизму, узагальнив рівняння Нав'є - Стокса, розв'язав низку задач теорії пружності. Доказав стійкість планетних рухів, вивів так звані пуассонові формули збуреного руху, довів теорему, яка носить його ім'я, відповідно до якої вираз, складений із двох інтегралів рівнянь динаміки і званий дужками Пуассона, залежить не від часу, а лише від елементів орбіт. У теорію потенціалу ввів рівняння, що носить його ім'я, яке застосував для розв'язання задач з гравітації та електростатики. Запропонував названий його ім'ям розподіл – один із найважливіших розподілів ймовірностей випадкових величин. Незалежно від Ф. Бесселя ввів бесселеві функції (нульового порядку) і дав їх розвинення в напізвбіжні ряди.

жається інтегралом Пуассона (4.13) (або, що теж саме, (4.15)). Це твердження доводиться безпосередньою перевіркою: спираючись на те, що інтеграл Пуассона збіжний і його можна диференціювати по t і x , доводиться що він є обмеженою функцією, яка задовольняє рівняння (4.1) і початкову умову (4.2).



Зауваження 1. Легко помітити, що фундаментальний розв'язок рівняння теплопровідності (4.14) фактично збігається з густиною нормального розподілу випадкової величини ξ :

$$f(\xi) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\sigma}} e^{-\frac{(\xi-a)^2}{4\sigma^2}},$$

де $M(\xi) = a$ – математичне сподівання, $D(\xi) = \sigma^2$ – дисперсія, σ – середнє квадратичне відхилення.

Звідси витікає така *фізична інтерпретація*: фундаментальний розв'язок $G(x, \xi, t)$ визначає температуру в будь-якій точці x в будь-який момент часу $t > 0$, якщо в початковий момент $t = 0$ вся кількість тепла $Q = c\rho$ (c – питома теплоємність, ρ – лінійна густина матеріалу стержня) зосереджена в одній точці $x = a$.

Саме тому фундаментальний розв'язок часто називають *функцією точкового теплового джерела*. Саме з цієї причини функцію $G(x, \xi, t)$ називають також *функцією впливу миттєвого точкового джерела тепла для необмеженого стержня із теплоізолюваною бічною поверхнею*.

Тому, графік густини нормального розподілу випадкової величини можна інтерпретувати як графік залежності миттєвого точкового джерела від x у різні моменти часу $t_1 < t_2 < t_3$ (червона, зелена та сині лінії, відповідно).

Зрозуміло, що зосередити визначену кількість тепла в одній точці практично неможливо. Ми здійснюємо певну ідеалізацію, уявляючи, що відрізок, на якому розподілена теплота, стягується в точку, а його температура прагне до нескінченності, але так, щоб добуток дорівнював Q .

Саме для опису подібних уявлень в багатьох фізичних застосуваннях використовують поняття δ -функції Дірака. Хоча δ -функція не є функцією в звичайному розумінні, оскільки вона не визначена для конкретних значень аргументу, а лише для інтегралів, вона, як *узагальнена функція*, використовується для опису точкових впливів або густин фізичних величин, зосереджених в одній точці. Наприклад, δ -функцією зручно зображати густину заряду або масу точкової частинки.

Тому, як ілюстрацію поняття *точкового джерела* для задачі Коші, поставимо задачу: знайти функцію точкового джерела $G(x, \xi, t)$ за допомогою δ -функції Дірака, яка визначається рівностями:

$$\delta(x - \xi) = \begin{cases} 0, & x \neq \xi, \\ \infty, & x = \xi; \end{cases} \quad \int_a^b \delta(x - \xi) \psi(\xi) d\xi = \begin{cases} \psi(x), & x \in [a, b], \\ 0, & x \notin [a, b], \end{cases}$$

де $\psi(x)$ – довільна неперервна функція в околі точки $x = \xi$.

Розв'язок задачі Коші (4.1)-(4.2) шукатимемо у вигляді (4.15), де невідомим є ядро $G(x, \xi, t)$. Якщо припустити, що початкова температура стержня визначається δ -функцією

$$u(x, 0) = \delta(x - \xi).$$

то розподіл температури при $t > 0$ має бути таким

$$u_\xi(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x, y, t) \cdot \delta(y - \xi) dy = G(x, \xi, t),$$

тобто ядро $G(x, \xi, t)$ є розв'язком задачі Коші

$$G_t = a^2 G_{xx}, \quad G(x, \xi, 0) = \delta(x - \xi). \quad (4.16)$$

Тому, розв'язок задачі (4.16) шукаємо у вигляді функції точкового джерела

$$G(x, \xi, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} T(\lambda, t) \cos \lambda(x - \xi) d\lambda. \quad (4.17)$$

Підставляючи (4.17) в рівняння (4.16) отримаємо рівняння для функції $T(\lambda, t)$:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} T_t(\lambda, t) \cos \lambda(x - \xi) d\lambda = -\frac{a^2}{\pi} \int_0^{\infty} \lambda^2 T(\lambda, t) \cos \lambda(x - \xi) d\lambda,$$

$$\int_0^{\infty} [T_t(\lambda, t) + a^2 \lambda^2 T(\lambda, t)] \cos \lambda(x - \xi) d\lambda = 0,$$

$$T_t(\lambda, t) + a^2 \lambda^2 T(\lambda, t) = 0. \quad (4.18)$$

Підставимо (4.17) в початкову умову (4.16) і, приймаючи до уваги розвинення $\delta(x - \xi)$ в інтеграл Фур'є

$$\delta(x - \xi) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos \lambda(x - \xi) d\lambda,$$

отримаємо

$$G(x, \xi, 0) = \delta(x - \xi) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} T(\lambda, 0) \cos \lambda(x - \xi) d\lambda = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos \lambda(x - \xi) d\lambda,$$

звідки

$$T(\lambda, 0) = 1. \quad (4.19)$$

Отже, задача Коші (4.18)-(4.19) для функції $T(\lambda, t)$ має розв'язок

$$T(\lambda, t) = e^{-a^2\lambda^2 t}.$$

Тоді функція точкового джерела (4.17) набуває вигляду

$$G(x, \xi, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-a^2\lambda^2 t} \cos \lambda(x - \xi) d\lambda = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}}. \quad (4.20)$$

(обчислення останнього інтегралу наведено вище (формула (4.12))

Звідси витікає, що розв'язок задачі про поширення початкової температури на нескінченній прямій дійсно має виражатися формулою (4.15).

З урахуванням (4.20) із (4.15) знаходимо шуканий розв'язок задачі Коші (4.1)-(4.2):

$$u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \varphi(\xi) d\xi.$$

На завершення, зазначимо, що розглянутий метод придатний також для розв'язання **задачі Коші** для *неоднорідного* рівняння теплопровідності [2, формула (2.2)]

$$\begin{aligned} u_t &= a^2 u_{xx} + f(x, t), & -\infty < x < \infty, & \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= \varphi(x), & -\infty < x < \infty. & \end{aligned}$$

Так, в *одновимірному* випадку формула (4.15) модифікується до такої:

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x, \xi, t) \varphi(\xi) d\xi + \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{\infty} G(x, \xi, t - \tau) f(\xi, \tau) d\xi, \quad (4.21)$$

де

$$G(x, \xi, t - \tau) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi(t - \tau)}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t - \tau)}}.$$

Приклад 13. Знайти розподіл температури в однорідному ізотропному необмеженому стержні з теплоізолюваною бічною поверхнею при вільному теплообміні, якщо початкова температура точок стержня задана функцією:

$$u(x, 0) = A e^{-x^2}.$$

Маємо задачу Коші на нескінченній прямій (4.1)-(4.2). Тому можемо одразу скористатися інтегралом Пуассона (4.13) для заданої умови

$$u(x, t) = \frac{A}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2} \cdot e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} d\xi.$$

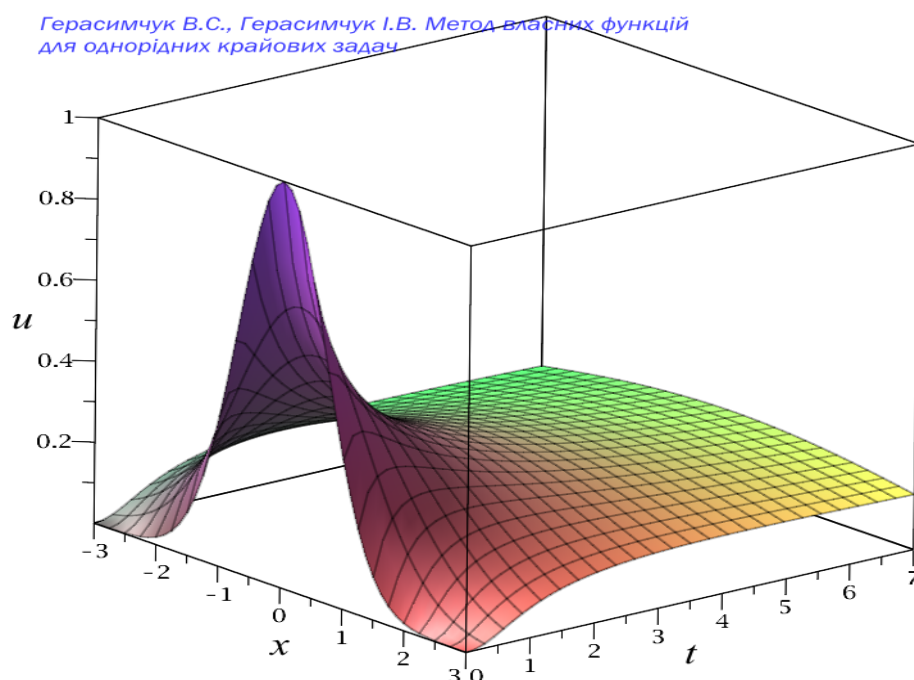
Для обчислення інтеграла доцільно в показнику степеня виділити повний квадрат відносно змінної інтегрування ξ :

$$\begin{aligned} -\xi^2 - \frac{(x - \xi)^2}{4a^2t} &= -\frac{(1 + 4a^2t)\xi^2 - 2x\xi + x^2}{4a^2t} = \\ &= -\frac{\left(\sqrt{1 + 4a^2t} \cdot \xi - \frac{x}{\sqrt{1 + 4a^2t}}\right)^2 + \frac{4a^2tx^2}{1 + 4a^2t}}{4a^2t} = -\frac{\left((1 + 4a^2t)\xi - x\right)^2}{4a^2t(1 + 4a^2t)} - \frac{x^2}{1 + 4a^2t}. \end{aligned}$$

Тоді шуканий інтеграл спрощується і за допомогою заміни змінної одразу зводиться до відомого невласного інтегралу $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} dz = \sqrt{\pi}$:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{A}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{1+4a^2t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{((1+4a^2t)\xi-x)^2}{4a^2t(1+4a^2t)}} d\xi = \\ &= \left| \frac{(1 + 4a^2t)\xi - x}{2a\sqrt{t(1 + 4a^2t)}} = z, \quad \xi = \frac{z \cdot 2a\sqrt{t(1 + 4a^2t)} + x}{1 + 4a^2t}, \quad d\xi = \frac{2a\sqrt{t(1 + 4a^2t)}}{1 + 4a^2t} dz \right| = \\ &= \frac{A}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{1+4a^2t}} \cdot \frac{2a\sqrt{t(1 + 4a^2t)}}{1 + 4a^2t} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} dz = \frac{A}{\sqrt{1 + 4a^2t}} e^{-\frac{x^2}{1+4a^2t}}. \end{aligned}$$

Знайдений розподіл температури в однорідному ізотропному необмеженому стержні з теплоізолюваною бічною поверхнею наочно ілюструє графік



Приклад 14. Розв'язати задачу про розподіл температури в однорідному нескінченному ізотропному стержні з теплоізолюваною бічною поверхнею при вільному теплообміні, якщо тепловий режим визначається кусково-сталого початковою функцією наступного виду:

$$u(x, 0) = \begin{cases} T_1, & x < 0, \\ T_2, & x > 0. \end{cases}$$

Процес охолодження нескінченного ізотропного стержня є задачею Коші для однорідного рівняння теплопровідності (4.1)-(4.2). Зазначимо, однак, що тут початкова функція $u(x, 0)$ не є неперервною, а зазнає розриву у точці $x = 0$. У цьому випадку розв'язання задачі Коші, яке надається інтегралом Пуассона (4.13), вже не буде класичним, оскільки значення розв'язку задачі Коші в особливій точці $x = 0$ у початковий момент часу залежить від способу переходу до границі $x \rightarrow 0 + 0$, $x \rightarrow 0 - 0$.

При обчисленні інтеграл Пуассона (4.13) розпадається на два інтеграли

$$u(x, t) = \frac{T_1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^0 e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} d\xi + \frac{T_2}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} d\xi,$$

кожен з яких за допомогою заміни змінної z , відповідно, меж інтегрування

$$\frac{\xi - x}{2a\sqrt{t}} = z, \quad d\xi = 2a\sqrt{t} dz,$$

зводиться до інтегралу імовірностей (або функції помилок)

$$\Phi(\omega) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\omega} e^{-\xi^2} d\xi, \quad \Phi(\omega) = -\Phi(-\omega), \quad \Phi(\pm\infty) = \pm 1, \quad \Phi(0) = 0$$

за допомогою простих перетворень:

$$\frac{T_1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^0 e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} d\xi = \frac{T_1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{-\frac{x}{2a\sqrt{t}}} e^{-z^2} dz = \frac{T_1}{\sqrt{\pi}} \left(\int_{-\infty}^0 e^{-z^2} dz + \int_0^{-\frac{x}{2a\sqrt{t}}} e^{-z^2} dz \right) = \frac{T_1}{2} \left[1 + \Phi\left(-\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right) \right],$$

$$\frac{T_2}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} d\xi = \frac{T_2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-z^2} dz = \frac{T_2}{\sqrt{\pi}} \left(\int_0^{\infty} e^{-z^2} dz - \int_0^{-\frac{x}{2a\sqrt{t}}} e^{-z^2} dz \right) = \frac{T_2}{2} \left[1 - \Phi\left(-\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right) \right].$$

Як наслідок, знаходимо

$$u(x, t) = \frac{T_1}{2} \left[1 + \Phi\left(-\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right) \right] + \frac{T_2}{2} \left[1 - \Phi\left(-\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right) \right] = \frac{T_1 + T_2}{2} - \frac{T_1 - T_2}{2} \Phi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right).$$

Розглянемо процес вирівнювання температури в цій задачі докладніше. Суттєво спрощуючи, змодельємо, наприклад, технологічний процес виготовлення мідного дроту. Виготовлення дроту проходить на волочильних верстатах, налаштованих на певний діаметр виробу. Перед волочінням заготівлю травлять у розчині сірчаної кислоти, підігрітому до температури 50°C . Далі заготівля відправляється на волочіння. Після волочіння мідний дріт надходить у спеціальні печі для відпалювання. Відпал дозволяє зняти внутрішні механічні напруження в структурі металу, що виникли при його волочінні. Температура відпалу міді лежить в межах $450\text{-}650^{\circ}\text{C}$. Тривалий відпал при низьких температурах забезпечує рівномірність прогріву, що дозволяє отримати однорідні механічні властивості дроту по всій довжині, а також збільшити міцність. Це власне все, що потрібно нам для даної задачі.

Уявимо, що у початковий момент різні частини мідного дроту, настільки довгого, щоб вважати його нескінченним, мають такі температури: $T_1 = 50^{\circ}\text{C}$ ($x < 0$) і $T_2 = 550^{\circ}\text{C}$ ($x > 0$). З'ясуємо чому дорівнює температура на відстані 1м зліва і 1м справа від точки $x = 0$ через 1500с, 3000с і 9000с (час виміряємо у секундах). Коефіцієнт температуропровідності міді $a^2 = 1,11 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2/\text{с}$. Користуючись таблицею значень функції помилок $\Phi(\omega)$, знаходимо:

$$u(-1\text{м}; 1500\text{с}) = \frac{T_1 + T_2}{2} - \frac{T_1 - T_2}{2} \Phi\left(-\frac{1}{2a\sqrt{1500}}\right) = 300 - 250 \cdot 0,9181 \approx 70,48^{\circ}\text{C},$$

$$u(1\text{м}; 1500\text{с}) = \frac{T_1 + T_2}{2} - \frac{T_1 - T_2}{2} \Phi\left(\frac{1}{2a\sqrt{1500}}\right) = 300 + 250 \cdot 0,9181 \approx 529,53^{\circ}\text{C};$$

$$u(-1\text{м}; 3000\text{с}) = \frac{T_1 + T_2}{2} - \frac{T_1 - T_2}{2} \Phi\left(-\frac{1}{2a\sqrt{3000}}\right) = 300 - 250 \cdot 0,7814 \approx 104,65^{\circ}\text{C},$$

$$u(1\text{м}; 3000\text{с}) = \frac{T_1 + T_2}{2} - \frac{T_1 - T_2}{2} \Phi\left(\frac{1}{2a\sqrt{3000}}\right) = 300 + 250 \cdot 0,7814 \approx 495,33^{\circ}\text{C};$$

$$u(-1\text{м}; 9000\text{с}) = \frac{T_1 + T_2}{2} - \frac{T_1 - T_2}{2} \Phi\left(-\frac{1}{2a\sqrt{9000}}\right) = 300 - 250 \cdot 0,5221 \approx 169,48^{\circ}\text{C},$$

$$u(1\text{м}; 9000\text{с}) = \frac{T_1 + T_2}{2} - \frac{T_1 - T_2}{2} \Phi\left(\frac{1}{2a\sqrt{9000}}\right) = 300 + 250 \cdot 0,5221 \approx 430,53^{\circ}\text{C}.$$

Помітно, що права частина ($x > 0$) мідного дроту повільно охолоджується, а ліва ($x < 0$) – повільно нагрівається. Температура дійсно повільно вирівнюється, як і повинно відбуватися в реальному технологічному процесі. Хоча, зрозуміло, наша модель далека від досконалості і не претендує на всеосяжний опис зазначеного технологічного процесу.

Очевидно, що в точці $x = 0$ температура весь час стала і дорівнює напівсумі початкових значень температури зліва і справа.

Приклад 15. Розв'язати задачу про охолодження однорідного нескінченного ізотропного стержня, нагрітого до температури $\varphi(x)$, якщо через його бічну поверхню відбувається теплообмін за законом Ньютона із зовнішнім середовищем нульової температури.

Математична постановка задачі така:

$$\begin{aligned} u_t &= a^2 u_{xx} - \gamma u, & -\infty < x < \infty, t > 0, \\ u(x, 0) &= \varphi(x), & -\infty < x < \infty. \end{aligned}$$

Наявність в однорідному рівнянні теплопровідності доданка, пропорційного шуканій функції u , автоматично означає, що розв'язок можна шукати у вигляді (див. п. 3):

$$u(x, t) = e^{-\gamma t} v(x, t).$$

Легко переконатися, що для нової функції $v(x, t)$ отримаємо вже відому задачу Коші (4.1)-(4.2):

$$\begin{aligned} v_t &= a^2 v_{xx}, & -\infty < x < \infty, & t > 0, \\ v(x, 0) &= \varphi(x), & -\infty < x < \infty, \end{aligned}$$

розв'язок якої знаходиться за допомогою інтеграла Пуассона (4.13). Тоді розв'язок вихідної задачі для функції $u(x, t)$ набуває вигляду

$$u(x, t) = \frac{e^{-\gamma t}}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) \cdot e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} d\xi.$$

Звідси випливає, що чим більшим є коефіцієнт теплообміну γ , тим швидше відбувається процес охолодження. Очевидно, що випадок $\gamma = 0$ відповідає теплоізолюваній бічній поверхні стержня.

Приклад 16. Дослідити процес зміни температури однорідного нескінченного ізотропного стержня з рівномірно розподіленими джерелами, потужність яких змінюється у часі за законом $f(x, t) = 2e^{-t} \cos t$. Бічна поверхня стержня теплоізолювана, а початкова температура стала і рівна 4.

Математична постановка задачі зводиться до розв'язання задачі Коші для *неоднорідного* рівняння теплопровідності

$$\begin{aligned} u_t &= 4u_{xx} + 2e^{-t} \cos t, & -\infty < x < \infty, t > 0, \\ u(x, 0) &= 4, & -\infty < x < \infty. \end{aligned}$$

Будемо користуватися формулою (4.21), яка за даних умов набуває вигляду:

$$u(x,t) = \frac{1}{4\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} 4e^{-\frac{(x-\xi)^2}{16t}} d\xi + \frac{1}{4} \int_0^t \frac{2e^{-\tau} \cos \tau}{\sqrt{\pi(t-\tau)}} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{16(t-\tau)}} d\xi = I_1 + I_2.$$

Послідовно обчислюємо інтеграли:

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{16t}} d\xi = \left| \frac{\xi-x}{4\sqrt{t}} = z, \quad d\xi = 4\sqrt{t} dz \right| = \frac{4\sqrt{t}}{\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} dz = \frac{4\sqrt{t}}{\sqrt{\pi t}} \cdot \sqrt{\pi} = 4;$$

$$I_2 = \frac{1}{2} \int_0^t \frac{e^{-\tau} \cos \tau}{\sqrt{\pi(t-\tau)}} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{16(t-\tau)}} d\xi = \left| \frac{\xi-x}{4\sqrt{t-\tau}} = \omega, \quad d\xi = 4\sqrt{t-\tau} d\omega \right| =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^t \frac{e^{-\tau} \cos \tau}{\sqrt{\pi(t-\tau)}} d\tau \cdot 4\sqrt{t-\tau} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega^2} d\omega = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-\tau} \cos \tau d\tau \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega^2} d\omega = 2 \int_0^t e^{-\tau} \cos \tau d\tau =$$

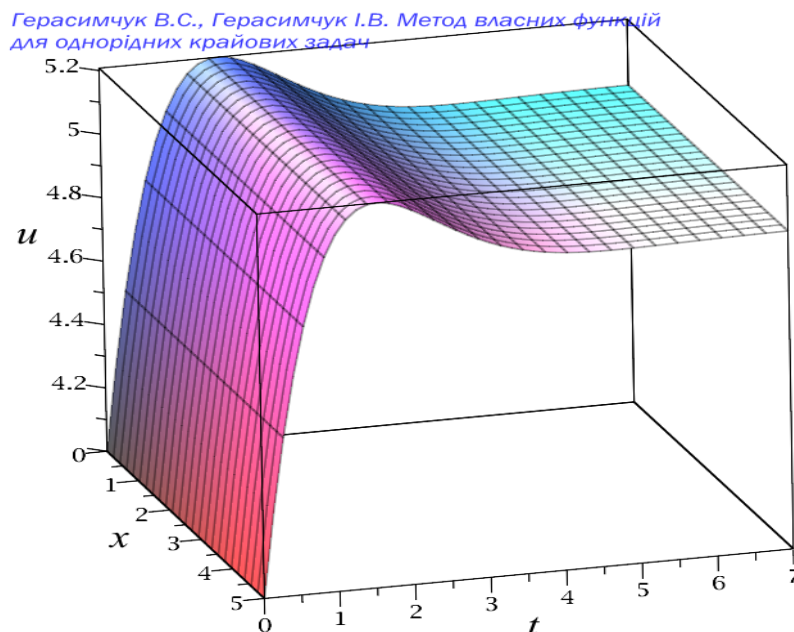
$$= 2 \cdot \frac{e^{-\tau}}{2} (\sin \tau - \cos \tau) \Big|_0^t = e^{-t} (\sin t - \cos t) + 1.$$

Зовнішній інтеграл на останньому етапі обчислення I_2 – *циклічний*, береться частинами [10].

Таким чином, остаточно знаходимо

$$u(x,t) = I_1 + I_2 = 5 + e^{-t} (\sin t - \cos t).$$

Цікаво, що в даному випадку процес зміни температури однорідного нескінченного ізотропного стержня однаковий для будь-якого значення просторової координати x , оскільки він від неї не залежить. Про це свідчить і графічний розв'язок даної задачі.



Задачі для самостійного розв'язування до розділу 4

1. Знайти розподіл температури в однорідному ізотропному необмеженому стержні з теплоізолюваною бічною поверхнею при вільному теплообміні, якщо початкова температура точок стержня задана функцією:

a) $u(x, 0) = e^{-\frac{x^2}{4a^2}};$

b) $u(x, 0) = \begin{cases} 0, & |x| > \delta, \\ U_0, & |x| \leq \delta. \end{cases}$

c) $u(x, 0) = e^{-x^2} \sin x,$
вважати $a = 1/2;$

d) $u(x, 0) = xe^{-x^2},$
вважати $a = 1.$

2. Знайти розподіл температури в однорідному ізотропному необмеженому стержні, якщо через його бічну поверхню відбувається теплообмін за законом Ньютона з навколишнім середовищем нульової температури, а початкова температура стержня T_0 .

3. Розв'язати крайову задачу:

a) $u_t = a^2 u_{xx} - u, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0,$

$u(x, 0) = \sin x - \cos x, \quad -\infty < x < \infty;$

b) $u_t = a^2 u_{xx} - \gamma u, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0,$

$u(x, 0) = \begin{cases} 0, & |x| > \delta, \\ U_0, & |x| \leq \delta \end{cases}$

і порівняти з результатом задачі 1(b).

4. Розв'язати задачу Коші для *неоднорідного* рівняння теплопровідності:

a) $u_t = 4u_{xx} + 5, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0,$

$u(x, 0) = 4, \quad -\infty < x < \infty;$

b) $u_t = a^2 u_{xx} + 2a \cos x, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0,$

$u(x, 0) = 0, \quad -\infty < x < \infty;$

c) $u_t = 4u_{xx} - 2u + \sin 2x, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0,$

$u(x, 0) = 0, \quad -\infty < x < \infty;$

d) $u_t = \frac{1}{4} u_{xx} + xt, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0,$

$u(x, 0) = x, \quad -\infty < x < \infty.$

Відповіді до задач

1. a) $u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{1+t}} \cdot e^{-\frac{x^2}{4a^2(1+t)}};$

b) $u(x,t) = \frac{U_0}{2} \left[\Phi\left(\frac{\delta-x}{2a\sqrt{t}}\right) + \Phi\left(\frac{\delta+x}{2a\sqrt{t}}\right) \right];$

c) $u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{1+t}} \cdot e^{-\frac{4x^2+t}{4(1+t)}} \sin \frac{x}{1+t};$

d) $u(x,t) = \frac{x}{(1+4t)^{\frac{3}{2}}} \cdot e^{-\frac{x^2}{1+4t}}.$

2. $u(x,t) = T_0 e^{-\beta t}$, де β – коефіцієнт теплообміну.

3. a) $u(x,t) = e^{-(a^2+1)t} (\sin x - \cos x);$

b) $u(x,t) = \frac{U_0}{2} e^{-\gamma t} \left[\Phi\left(\frac{\delta-x}{2a\sqrt{t}}\right) + \Phi\left(\frac{\delta+x}{2a\sqrt{t}}\right) \right].$

4. a) $u(x,t) = 5t + 4;$

b) $u(x,t) = e^{-at(a-2)} \cos x - 1;$

c) $u(x,t) = e^{-5t} \sin 2x;$

d) $u(x,t) = \frac{xt^2}{2} + x.$

Література

1. Герасимчук В.С. Методи математичної фізики: Частина 1. Вступ до теорії диференціальних рівнянь у частинних похідних [Електронний ресурс]: навч. посіб. для студ. спеціальностей 104 Фізика та астрономія, 111 Математика / КПІ ім. Ігоря Сікорського; уклад.: В.С. Герасимчук. – Електронні текстові дані. – Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2022. – 25 с. – Доступ: <https://ela.kpi.ua/handle/123456789/46092>
2. Герасимчук В.С. Методи математичної фізики: Частина 2. Математичні моделі деяких поширених фізичних процесів [Електронний ресурс]: навч. посіб. для студ. спеціальностей 104 Фізика та астрономія, 111 Математика / КПІ ім. Ігоря Сікорського; уклад.: В.С. Герасимчук. – Електронні текстові дані. – Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2022. – 38 с. – Доступ: <https://ela.kpi.ua/handle/123456789/46095>
3. Герасимчук В.С. Методи математичної фізики: Частина 3. Метод Фур'є. Задача Штурма–Ліувілля [Електронний ресурс]: навч. посіб. для здобувачів ступеня бакалавра за спеціальностями 104 Фізика та астрономія, 105 Прикладна фізика та наноматеріали, 111 Математика, 113 Прикладна математика / КПІ ім. Ігоря Сікорського; уклад.: В.С. Герасимчук. – Електронні текстові дані. – Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2024. – 58 с. – Доступ: <https://ela.kpi.ua/handle/123456789/68175>
4. Tikhonov A.N. and Samarskiĭ A.A. Equations of mathematical physics. – Courier Corporation, 2013. – 800 p.
5. Перестюк М.О., Маринець В.В. Теорія рівнянь математичної фізики. – Київ: Либідь, 2001. – 333 с.
6. Шалдырван В.А., Герасимчук В.С. Методы математической физики. – М.: Вузовская книга, 2006. – 512 с.
7. Івасишен С.Д., Лавренчук В.П., Івасюк Г.П., Рева Н.В. Основи класичної теорії рівнянь математичної фізики. – Чернівці: Вид. дім «Родовід», 2015. – 358 с.
8. Вірченко Н.О. Основні методи розв'язання задач математичної фізики. – К.: Інрес: Воля, 2006. – 332 с.
9. Журавська Г.В., Качаєнко О.Б., Кузьма О.В., Рева Н.В., Стогній В.І. Методи розв'язування задач математичної фізики: навч. посіб. для інженер. спец. – К.: НТУУ «КПІ», 2015. – 228 с. – Доступ: <https://ela.kpi.ua/handle/123456789/19879>
10. Герасимчук В.С., Васильченко Г.С., Кравцов В.І. *Вища математика. Повний курс у прикладах і задачах*. Невизначений, визначений та невластні інтеграли. Звичайні диференціальні рівняння. Прикладні задачі. Навч. посіб. – Вид. 2-е, випр. – К.: Книги України ЛТД, 2014. – 470 с.
11. Герасимчук В.С., Васильченко Г.С., Кравцов В.І. *Вища математика. Повний курс у прикладах і задачах*. Кратні, криволінійні та поверхневі інтеграли. Елементи теорії поля. Ряди. Прикладні задачі. Навч. посіб. – Вид. 2-е, випр. – К.: Книги України ЛТД, 2014. – 400 с.
12. Герасимчук В.С., Васильченко Г.С., Кравцов В.І. *Вища математика. Повний курс у прикладах і задачах*. Лінійна й векторна алгебра. Аналітична геометрія. Вступ до математичного аналізу. Диференціальне числення функції однієї та багатьох змінних. Прикладні задачі. Навч. посіб. – Вид. 2-е, випр. – К.: Книги України ЛТД, 2014. – 578 с.