ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ, СИСТЕМНИЙ АНАЛІЗ ТА КЕРУВАННЯ

УДК 519. 85

О.О. Ємець, Т.О. Парфьонова

ОЦІНЮВАННЯ ДОПУСТИМИХ МНОЖИН РОЗВ'ЯЗКІВ КОМБІНАТОРНОЇ ТРАНСПОРТНОЇ ЗАДАЧІ НА ПЕРЕСТАНОВКАХ, ЩО РОЗВ'ЯЗУЄТЬСЯ МЕТОДОМ ГІЛОК І МЕЖ

Вступ

Розвиток комбінаторної оптимізації [1–11], актуальність транспортних задач у різних постановках [12] (див. ще, наприклад, [13, 14]) спонукає до необхідності ставити і досліджувати транспортні задачі, допустимі множини яких мають певні комбінаторні властивості.

У публікаціях [15–18] започатковано дослідження транспортних задач на перестановках і запропоновано [17, 18] застосування методу гілок та меж. Як відомо, однією з проблем застосування цього методу до оптимізаційних задач є ефективність оцінювання допустимих множин, на які розбивається вся множина допустимих розв'язків. Таким чином, існує проблема: або показати, що запропонована в [17, 18] оцінка допустимих множин розв'язків комбінаторної транспортної задачі на перестановках при розв'язуванні її методом гілок і меж є найкращою, або, по можливості, покращити її.

У даній статті пропонується нова (більш сильна) оцінка допустимої множини в методі гілок і меж для транспортної задачі на перестановках та встановлюються її властивості, які є ефективними при відсіканні безперспективних допустимих множин у методі гілок та меж.

Постановка задачі

Мета статті – показати, як можна здійснити оцінювання допустимих множин при розв'язуванні методом гілок і меж комбінаторної транспортної задачі на перестановках.

Розглянемо транспортну задачу на перестановках:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min \qquad (1)$$

за умов

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, i = 1,2,\ldots,m, \qquad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, j = 1,2,\ldots,n, \qquad (3)$$

$$x = (x_{11},\ldots,x_{1n},\ldots,x_{m1},\ldots,x_{mn}) \in E_k(G), \qquad (4)$$

де $E_k(G)$ – загальна евклідова множина перестановок [7] з елементів мультимножини $G = \{g_1, \ldots, g_k\}$, $(k = mn)$, упорядкованих за неспаданням:

$$g_1 \le g_2 \le \ldots \le g_k. \qquad (5)$$

У [17, 18] як оцінка допустимих множин у методі гілок і меж для задачі (1)–(4) використовувалась сума доданків у цільової функції (1), для яких вже відомі значення змінних (які і визначали допустиму множину). Задача дослідження, викладеного в статті, полягає в посиленні даної оцінки. У зв'язку з цим дамо означення оцінки допустимих множин, яке будемо використовувати далі.

Означення оцінки допустимих множин

Нехай деякі змінні задачі (1)–(4) фіксовані як елементи з мультимножини G:

$$z_l = x_{ij} = g_{i_l}, l = 1,2,\ldots,t. \qquad (6)$$

Не обмежуючи загальності, упорядкуємо нумерацію цих змінних z_l так, щоб

$$z_1 \ge z_2 \ge \ldots \ge z_t. \qquad (7)$$

З умов (6) і (7) маємо також

$$g_{i_1} \ge g_{i_2} \ge \ldots \ge g_{i_t}. \qquad (8)$$

Нехай значення змінних x_{ij} з (6) не суперечить умовам (2), (3). Упорядкуємо за незростанням не визначені в умові (6) змінні задачі (1)–(4) x_{ij}, $i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$, і позначимо їх y_i:

$$y_1 \ge y_2 \ge \ldots \ge y_\tau, \qquad (9)$$

де $\tau = k - t$.

Введемо поняття різниці $A - B$ мультимножини A і її підмультимножини B з основами: множинами $S(A)$, $S(B)$, відповідно, і кратностями елементів $k_A(x)$, $k_B(y)$, $(x \in A$, $y \in B)$, відповідно. Нагадаємо, що B є підмультимножиною мультимножини $A(B \subset A)$, якщо $S(B) \subset S(A)$, $k_B(x) \le k_A(x)$ $\forall x \in B$.

Означення. Мультимножина C називається різницею мультимножини A і її підмультимножини B (позначимо $C = A - B$, де $B \subset A$), коли

$$S(C) = \{x \mid x \in A, \text{якщо } k_A(x) > k_B(x)\},$$

і при цьому

$$k_C(x) = k_A(x) - k_B(x).$$

***Приклад* 1.** Нехай $A = \{1, 2, 2, 3\}$, $B = \{1, 2\}$. Очевидно $B \subset A$.

Знайдемо $C = A - B$. Маємо $S(C) = \{2, 3\}$, оскільки $k_A(2) = 2 > k_B(2) = 1$, $k_A(3) = 1 > k_B(3) = 0$. Визначимо кратності елементів: $k_C(2) = k_A(2) - k_B(2) = 2 - 1 = 1$; $k_C(3) = k_A(3) - k_B(3) = 1 - 0 = 1$. Отже, $C = A - B = \{2, 3\}$.

Упорядкуємо за незростанням не використані в умові (6) елементи мультимножини G, тобто якщо $G_B = \{g_{i_1}, \ldots, g_{i_t}\}$ — мультимножина використаних в (6) елементів G, то $\tilde{G} = G - G_B$, тобто $\tilde{G}$ є різницею мультимножини G і G_B, де $G_B \subset G$. Упорядкуємо елементи таким чином:

$$\tilde{G} = \{\tilde{g}_{j_1}, \tilde{g}_{j_2}, \ldots, \tilde{g}_{j_\tau}\},$$
$$\tilde{g}_{j_1} \geq \tilde{g}_{j_2} \geq \ldots \geq \tilde{g}_{j_i} \geq \tilde{g}_{j_{i+1}} \geq \ldots \geq \tilde{g}_{j_\tau}. \quad (10)$$

Позначимо коефіцієнти цільової функції (1) c_{ij} з тими ж індексами, що й змінні x_{ij}, які фігурують в (6), так: $c_{ij} = c_l^*$, де c_l^* — коефіцієнт при z_l з (6). Коефіцієнти цільової функції (1) c_{ij}, які стоять при невизначених змінних y_i з (9), позначимо $\tilde{c}_i$ $\forall i = 1, 2, \ldots, \tau$. Нумерацію серед чисел c_l^* і $\tilde{c}_i$ зробимо, не порушуючи загальності міркувань, таку, щоб виконувались умови:

$$c_l^* \leq c_{l+1}^* \quad \forall\ l = 1, 2, \ldots, t-1, \quad (11)$$

$$\tilde{c}_i \leq \tilde{c}_{i+1} \quad \forall\ i = 1, 2, \ldots, \tau - 1. \quad (12)$$

Теорема 1. Для множини D допустимих розв'язків задачі (1)–(4), в якій допустимі розв'язки задовольняють умову (6), в методі гілок і меж за оцінку може слугувати величина

$$\xi(D) = \sum_{j=1}^{t} c_j^* g_{i_j} + \sum_{i=1}^{k-t} \tilde{c}_i \tilde{g}_{j_i}, \quad (13)$$

в якій параметри задовольняють умови (8), (10), (11) і (12).

Доведення. Як випливає з теореми 3.1 в [7, с. 79], маємо

$$\min_{x \in E_k(G)} \sum_{j=1}^{n} c_j x_j = \sum_{j=1}^{n} c_{\alpha_j} g_{\beta_j}, \quad (14)$$

де $E_k(G)$ — множина перестановок з елементів мультимножини $G = \{g_1, \ldots, g_k\}$;

$$c_{\alpha_1} \leq c_{\alpha_2} \leq \ldots \leq c_{\alpha_n}, \quad (15)$$

$$g_{\beta_1} \geq g_{\beta_2} \geq \ldots \geq g_{\beta_n}. \quad (16)$$

Згідно з наведеною теоремою, доданки у формулі (13)

$$\xi_1(D) = \sum_{j=1}^{t} c_j^* g_{i_j} \quad (17)$$

і

$$\xi_2(D) = \sum_{i=1}^{k-t} \tilde{c}_i \tilde{g}_{j_i} \quad (18)$$

є мінімумами відповідних лінійних функцій на множинах перестановок з мультимножин G_B (формула (17)) і $\tilde{G}$ (формула (18)).

Щоб вираз (13) був оцінкою множини D в методі гілок і меж, треба довести, що $\xi(D)$ не більше значень цільової функції задачі для $\forall x \in D$. Це легко помітити, оскільки доданок $\xi_1(D)$ у виразі $\xi(D)$ для $\forall x \in D$ є сталим, а доданок $\xi_2(D)$ — мінімум із можливих доданків у цільових функціях для допустимих точок x з множини D. Отже, $\xi(D)$ у формулі (13) є оцінкою множини D в методі гілок і меж, що і треба було довести.

Властивість оцінки

Покажемо, що оцінка (13) має важливу властивість, яка дає можливість у методі гілок і меж значно скоротити кількість вершин, які треба розгалужувати.

Теорема 2. Нехай $Y = \{y_1, \ldots, y_{p-1}, y_p, y_{p+1}, \ldots, y_\tau\}$, де

$$y_p = \tilde{g}_{j_q},\ \tilde{g}_{j_q} \in \tilde{G},\quad \tilde{g}_{j_q} < \tilde{g}_{j_p},\ p \neq q,\ q < \tau,$$
$$1 \leq p \leq \tau,\ y_j \in \tilde{G}, 1 \leq j \leq \tau\ \ \forall\ j \neq p. \quad (19)$$

Нехай $Q = D \cap \{Y\}$, де $\{Y\}$ — множина, в яку входить будь-який з векторів Y, для яких виконуються умови (19) і (10), а D — множина допустимих розв'язків задачі (1)–(4), що задовольняють умову (6). Тоді між оцінками вигляду (13) для множин допустимих розв'язків D і Q задачі (1)–(4) виконується співвідношення

$$\xi(Q) \geq \xi(D). \quad (20)$$

Доведення. Оцінку $\xi(D)$ у формулі (13) можна записати з використанням позначень (17) і (18) як

$$\xi(D) = \xi_1(D) + \xi_2(D). \qquad (21)$$

Аналогічно, маємо $\xi(Q) = \xi_1(Q) + \xi_2(Q)$. Але $\xi_1(Q) = \xi_1(D)$, отже, для порівняння $\xi(Q)$ і $\xi(D)$ достатньо порівняти $\xi_2(D)$ і $\xi_2(Q)$.

Розглянемо два можливих випадки співвідношень між індексами p і q з умови (19): 1) $p < q$; 2) $p > q$.

Випадок $p < q$. Позначимо: $\xi_2^0(Q) = \tilde{c}_p \tilde{g}_{j_q}$, $\xi_2^1(Q) = \sum_{i=1}^{p-1} \tilde{c}_i \tilde{g}_{j_i}$, $\xi_2^2(Q) = \sum_{i=p+1}^{q} \tilde{c}_i \tilde{g}_{j_{i-1}}$, $\xi_2^3(Q) = \sum_{i=q+1}^{k-t} \tilde{c}_i \tilde{g}_{j_i}$. Тоді

$$\xi_2(Q) = \xi_2^0(Q) + \xi_2^1(Q) + \xi_2^2(Q) + \xi_2^3(Q).$$

Випадок $p > q$. Позначимо: $\xi_2^0(Q) = \tilde{c}_p \tilde{g}_{j_q}$, $\xi_2^1(Q) = \sum_{i=1}^{q-1} \tilde{c}_i \tilde{g}_{j_i}$, $\xi_2^2(Q) = \sum_{i=q}^{p-1} \tilde{c}_i \tilde{g}_{j_{i+1}}$, $\xi_2^3(Q) = \sum_{i=p+1}^{k-t} \tilde{c}_i \tilde{g}_{j_i}$. І в цьому випадку у введених позначеннях також матимемо

$$\xi_2(Q) = \sum_{i=0}^{3} \xi_2^i(Q). \qquad (22)$$

Формула (22) має однакову форму в обох випадках, а конкретний вигляд буде такий:

$$1)\ \xi_2(Q) = \sum_{i=1}^{p-1} \tilde{c}_i \tilde{g}_{j_i} + \tilde{c}_p \tilde{g}_{j_q} + \sum_{i=p+1}^{q} \tilde{c}_i \tilde{g}_{j_{i-1}} + \sum_{i=q+1}^{k-t} \tilde{c}_i \tilde{g}_{j_i}; \qquad (23)$$

$$2)\ \xi_2(Q) = \sum_{i=1}^{q-1} \tilde{c}_i \tilde{g}_{j_i} + \sum_{i=q}^{p-1} \tilde{c}_i \tilde{g}_{j_{i+1}} + \tilde{c}_p \tilde{g}_{j_q} + \sum_{i=p+1}^{k-t} \tilde{c}_i \tilde{g}_{j_i}. \qquad (24)$$

Нагадаємо, що $\xi_2(D)$ визначається формулою (18), тобто

$$\xi(D) = \sum_{i=1}^{k-t} \tilde{c}_i \tilde{g}_{j_i}.$$

Очевидно, що доданки $\xi_2^1(Q)$ і $\xi_2^3(Q)$ в обох випадках входять в $\xi_2(D)$. Таким чином, треба довести, що:

1) в першому випадку матимемо

$$\xi_2^0(Q) + \xi_2^2(Q) = \tilde{c}_p \tilde{g}_{j_q} + \sum_{i=p+1}^{q} \tilde{c}_i \tilde{g}_{j_{i-1}} \ge \sum_{i=p}^{q} \tilde{c}_i \tilde{g}_{j_i}; \qquad (25)$$

2) у другому випадку

$$\xi_2^0(Q) + \xi_2^2(Q) = \tilde{c}_p \tilde{g}_{j_q} + \sum_{i=q}^{p-1} \tilde{c}_i \tilde{g}_{j_{i+1}} \ge \sum_{i=q}^{p} \tilde{c}_i \tilde{g}_{j_i}. \qquad (26)$$

Це неважко зробити, якщо помітити, що права частина в (25) – це

$$\min_{y \in E(\tilde{G}_{pq})} \sum_{i=p}^{q} \tilde{c}_i y_i, \qquad (27)$$

де $y = (y_p, y_{p+1}, \ldots, y_q)$, а $E(\tilde{G}_{pq})$ – множина перестановок елементів $\tilde{G}_{pq} = \{\tilde{g}_{j_p}, \tilde{g}_{j_{p+1}}, \ldots, \tilde{g}_{j_q}\}$ (згідно з теоремою 3.1 в [7] із врахуванням умов (12) і (10)). А ліва частина (25) – це значення функції $\sum_{i=p}^{q} \tilde{c}_i y_i$ на довільній перестановці з елементів мультимножини $\tilde{G}_{pq}$. Аналогічно, права частина в (26) – це

$$\min_{y \in E(\tilde{G}_{qp})} \sum_{i=q}^{p} \tilde{c}_i y_i, \qquad (28)$$

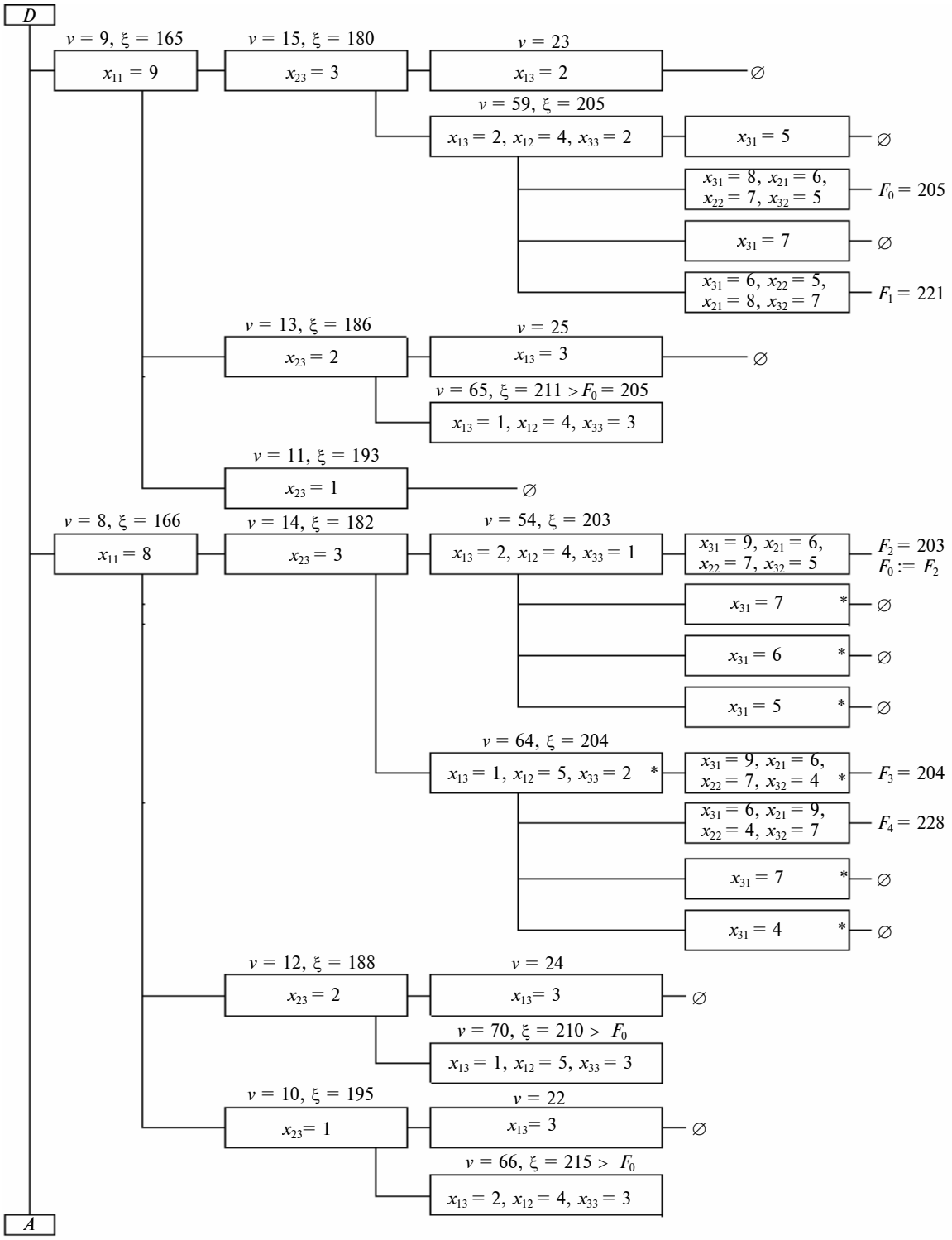
де в (28) $y = (y_q, y_{q+1}, \ldots, y_p)$, а $E(\tilde{G}_{qp})$ в (28) – множина перестановок елементів мультимножини $\tilde{G}_{qp} = \{\tilde{g}_{j_q}, \tilde{g}_{j_q+1}, \ldots, \tilde{g}_{j_p}\}$ (оскільки виконуються (10), (12) і теорема 3.1 в [7]). А ліва частина в (26) – це значення функції $\sum_{i=q}^{p} \tilde{c}_i y_i$ на довільній перестановці (взагалі кажучи, не на мінімалі $(\tilde{g}_{j_q}, \tilde{g}_{j_{q+1}}, \ldots, \tilde{g}_{j_p})$). Таким чином, в обох можливих випадках співвідношення між p і q маємо

$$\xi(Q) \ge \xi(D),$$

що й слід було довести в теоремі.

Ілюстрація застосування введеної оцінки допустимої множини

***Приклад* 2.** Нехай розглядається задача (1)–(4) і задано: $a_1 = 14$, $a_2 = 16$, $a_3 = 15$, $b_1 = 23$, $b_2 = 16$, $b_3 = 6$, $c_{11} = 1$, $c_{12} = 6$, $c_{13} = 4$, $c_{21} = 7$, $c_{22} = 5$, $c_{23} = 2$, $c_{31} = 3$, $c_{32} = 9$, $c_{33} = 8$, $G = \{1, 2, 3,$


D
v = 9, ξ = 165
x11 = 9
v = 15, ξ = 180
x23 = 3
v = 23
x13 = 2
∅
v = 59, ξ = 205
x13 = 2, x12 = 4, x33 = 2
x31 = 5
∅
x31 = 8, x21 = 6, x22 = 7, x32 = 5
F0 = 205
x31 = 7
∅
x31 = 6, x22 = 5, x21 = 8, x32 = 7
F1 = 221
v = 13, ξ = 186
x23 = 2
v = 25
x13 = 3
∅
v = 65, ξ = 211 > F0 = 205
x13 = 1, x12 = 4, x33 = 3
v = 11, ξ = 193
x23 = 1
∅
v = 8, ξ = 166
x11 = 8
v = 14, ξ = 182
x23 = 3
v = 54, ξ = 203
x13 = 2, x12 = 4, x33 = 1
x31 = 9, x21 = 6, x22 = 7, x32 = 5
F2 = 203
F0 := F2
x31 = 7 *
∅
x31 = 6 *
∅
x31 = 5 *
∅
v = 64, ξ = 204
x13 = 1, x12 = 5, x33 = 2 *
x31 = 9, x21 = 6, x22 = 7, x32 = 4 *
F3 = 204
x31 = 6, x21 = 9, x22 = 4, x32 = 7
F4 = 228
x31 = 7 *
∅
x31 = 4 *
∅
v = 12, ξ = 188
x23 = 2
v = 24
x13= 3
∅
v = 70, ξ = 210 > F0
x13 = 1, x12 = 5, x33 = 3
v = 10, ξ = 195
x23= 1
v = 22
x13= 3
∅
v = 66, ξ = 215 > F0
x13 = 2, x12 = 4, x33 = 3
A

Продовження рисунка

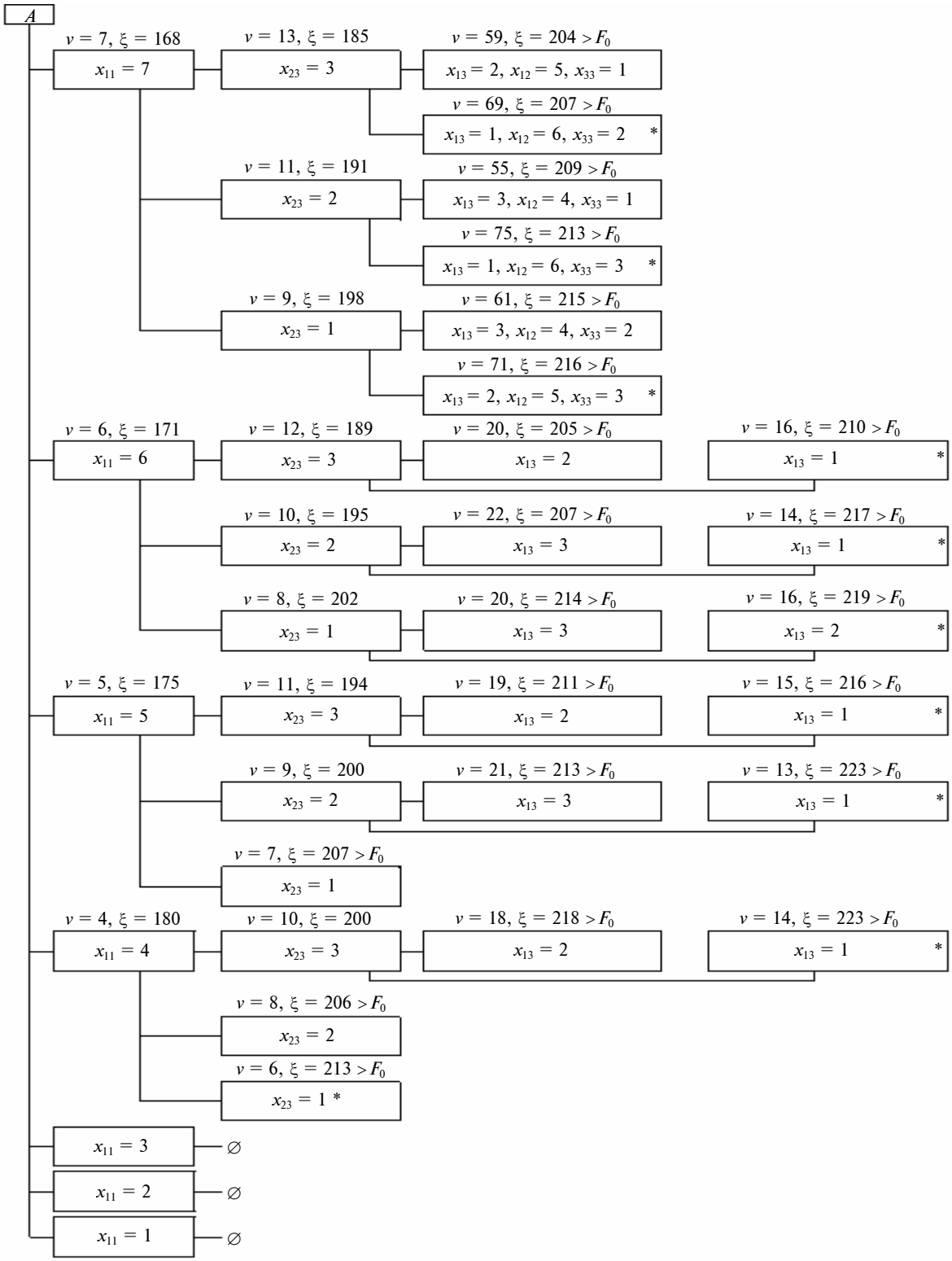


Схема реалізації методу гілок і меж до прикладу 2

$4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Розв'яжемо її методом гілок і меж.

Розв'язок зображено на рисунку. На рисунку позначено: D – множина всіх допустимих розв'язків задачі, A – розрив і продовження схеми. Розгалуження виконується в такий спосіб: найменшому коефіцієнту цільової функції ставиться у відповідність найбільший елемент з G (тобто $x_{11} = 9$, бо $c_{11} = 1$) і т. д., F_0 – поточне рекордне мінімальне значення цільової функції для відомого допустимого розв'язку і F_i $(i = 0, 1, \ldots)$ – значення цільової функції для допустимого розв'язку, що отримано i-м після F_0; $F_0 := F_i$ – операція заміни поточного рекорду на новий, коли $F_i < F_0$. Розгалуження на схемі, наведеній на рисунку, в методі гілок і меж для прикладу 2 відбувається так, як показано на рисунку, тобто згори вниз, а на одному рівні – зліва направо, причому спочатку дається рівень, якщо це можливо, а потім відбувається перехід вниз на наступний рівень. Кожен прямокутник схеми відповідає множині допустимих розв'язків задачі, в яких означені змінні, що показані в ньому, або означені вище чи лівіше за схемою. Знак $\varnothing$ означає, що прямокутнику, біля якого він стоїть, відповідає порожня множина допустимих розв'язків. Якщо $\xi \geq F_0$, то допустима множина далі не розгалужується, а відсікається (відкидається). Величина ν – це оцінка множини, яка використовувалась в [17, 18], а величина ξ – це оцінка вигляду (13). Допустимі множини, позначені в схемі $*$, згідно з теоремою 2 в схемі методу гілок і меж можуть не розглядатися, оскільки для них, як для Q, існують вже розглянуті множини D з $\xi = \xi(D) > F_0$. Останнє свідчить про ефективність властивості, сформульованої в теоремі 2.

Висновки

У статті запропоновано нову, сильнішу порівняно з [17, 18] оцінку для допустимої множини перестановок у комбінаторній транспортній задачі при розв'язуванні її методом гілок і меж. Доведена властивість цієї оцінки, яка на практиці дає можливість продуктивно використовувати її при застосуванні цього методу для відсікання вершин (множин допустимих розв'язків задачі), оцінка яких більша, ніж оцінка множин, про які відомо, що їх оцінка гірша, ніж поточний рекорд цільової функції. Наслідком застосування запропонованої і обґрунтованої оцінки допустимих множин у комбінаторній транспортній задачі на перестановках при розв'язуванні її методом гілок і меж є скорочення часу, за яким знаходиться розв'язок розглянутої задачі. Наукове значення результатів, викладених у статті, полягає також в тому, що запропонований підхід до оцінювання допустимих множин у методі гілок і меж можна застосувати до так званих умовних лінійних задач оптимізації на перестановках [7] – більш широкого класу задач, ніж розглянутий у статті.

Як напрямки подальших досліджень видається доцільним провести числові експерименти комп'ютерної реалізації із запропонованою оцінкою.

О.А. Емец, Т.А. Парфёнова

ОЦЕНИВАНИЕ ДОПУСТИМЫХ МНОЖЕСТВ РЕШЕНИЙ КОМБИНАТОРНОЙ ТРАНСПОРТНОЙ ЗАДАЧИ НА ПЕРЕСТАНОВКАХ, КОТОРАЯ РЕШАЕТСЯ МЕТОДОМ ВЕТВЕЙ И ГРАНИЦ

Определена оценка для допустимого множества в методе ветвей и границ при решении транспортной задачи на перестановках. Доказано свойство этой оценки, позволяющее сократить объем перебора в методе ветвей и границ.

O.O. Iemets, T.O. Parfonova

ON ESTIMATING THE ACCEPTABLE SETS OF SOLUTIONS OF COMBINATORIAL TRANSPORT PROBLEM ON PERMUTATIONS SOLVED BY THE METHOD OF BRANCHES AND BOUNDS

We estimate the acceptable set in the method of branches and bounds at solving a transport problem on permutations. We prove the property of this estimation. It allows reducing a number of the operations in the method of branches and bounds.

1. *Сергиенко И.В., Каспшицкая М.Ф.* Модели и методы решения на ЭВМ комбинаторных задач оптимизации. – К.: Наук. думка, 1981. – 288 с.

2. *Сергиенко И.В., Шило В.П.* Задачи дискретной оптимизации: проблемы, методы исследования, решения. – К.: Наук. думка, 2003. – 264 с.

3. *Гуляницький Л.Ф.* Розробка моделей і наближених методів комбінаторної оптимізації та їх застосування в інформаційних технологіях: Автореф. дис. ... д-ра техн. наук: 01.05.02. – К.: Ін-т кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, 2005. – 32 с.
4. *Гребеннік І.В.* Математичні моделі та методи комбінаторної оптимізації в геометричному проектуванні: Автореф. дис. ... д-ра техн. наук: 01.05.02. – Харків: Інститут проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного, 2006. – 34 с.
5. *Павлов О.А., Павлова Л.О.* Принцип розпаралелювання обчислень як засіб підвищення ефективності ПДС-алгоритмів для важкорозв'язувальних комбінаторних задач // Пробл. информатики и управления. – 1995. – № 4. – С. 135–141.
6. *Панишев А.В., Плечистый Д.Д.* Модели и методы оптимизации в проблеме коммивояжера. – Житомир: ЖГТУ, 2006. – 300 с.
7. *Стоян Ю.Г., Ємець О.О.* Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації. – К.: Ін-т системних досліджень освіти, 1993. – 188 с.
8. *Стоян Ю.Г., Ємець О.О., Ємець Є.М.* Оптимізація на полірозміщеннях: теорія та методи. – Полтава: РВЦ ПУСКУ, 2005. – 104 с.
9. *Ємець О.О., Колєчкіна Л.М.* Задачі комбінаторної оптимізації з дробово-лінійними функціями. – К.: Наук. думка, 2005. – 118 с.
10. *Ємець О.О., Роскладка О.В.* Задачі оптимізації на полікомбінаторних множинах: властивості та розв'язування. – Полтава: РВЦ ПУСКУ, 2006. – 128 с.
11. *Емец О.А., Барболина Т.Н.* Комбинаторная оптимизация на размещениях. – К.: Наук. думка, 2008. – 160 с.
12. *Емеличев В.А., Ковалев М.М., Кравцов М.К.* Многогранники, графы, оптимизация (комбинаторная теория многогранников). – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит-ры, 1981. – 344 с.
13. *Гаращенко І.В.* Моделювання і розробка методів оптимізації циклічних процесів на транспортних мережах: Автореф. дис. ... канд. техн. наук: 01.05.02. – Харків: ХНУРЕ, 2009. – 19 с.
14. *Набатова С.М.* Математичне моделювання та чисельний аналіз процесів транспорту та розподілення неперервних матеріальних потоків у технічних системах: Автореф. дис. ... канд. техн. наук: 01.05.02. – Харків: ХНУРЕ, 2009. – 19 с.
15. *Ємець О.О., Парфьонова Т.О.* Транспортні задачі комбінаторного типу // Вест. Харьк. нац. автомобильно-дорожного ун-та. – 2005. – Вып. 29. – С. 162–164.
16. *Ємець О.О., Парфьонова Т.О.* Наближений метод для розв'язування комбінаторних транспортних задач // Радиоэлектроника и информатика. – 2006. – № 2. – С. 39–41.
17. *Парфьонова Т.О.* Евклідова комбінаторна транспортна задача на переставленнях, її розв'язування методом гілок та меж // Матер. Другої ювілейної наук.-техн. конф. "Комп'ютерна математика в інженерії, науці та освіті" (CMSEE), Полтава, 29–31 жовтня 2008 р. – К.: НАН України, 2008. – С. 24.
18. *Парфьонова Т.О.* Застосування методу гілок та меж до комбінаторних транспортних задач // Тези доп. IV міжнар. наук.-практ. конф. "Методологія та практика менеджменту на порозі XXI століття: загальнодержавні, галузеві та регіональні аспекти", 15–16 травня 2008 р. – Полтава: РВЦ ПУСКУ, 2008. – С. 352–353.

Рекомендована Радою
факультету прикладної математики
НТУУ "КПІ"

Надійшла до редакції
30 квітня 2009 року