

Міністерство освіти і науки України
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

Теорія сигналів

ЛАБОРАТОРНИЙ ПРАКТИКУМ

Навчальний посібник

Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра
за освітньою програмою «Електронні мікро- і наносистеми та технології»
спеціальності 153 Мікро- та наносистемна техніка

Укладачі: А.О.Попов, К.О.Іванько, Г.С. Порєва

Електронне мережне навчальне видання

Київ

КПІ ім. Ігоря Сікорського

2022

Рецензент

Обухова Т.Ю., к.т.н, доцент кафедри МЕ

Відповідальний

редактор

Тимофєєв В.І., д.т.н, проф., зав. каф. ЕІ

*Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
(протокол № X від DD.MM.YYYY р.)
за поданням Вченої ради факультету/навчально-наукового інституту
(протокол № X від DD.MM.YYYY р.)*

Навчальний посібник призначений для здобувачів ступеня бакалавра за освітньою програмою «Електронні мікро- і наносистеми та технології» спеціальності 153 Мікро- та наносистемна техніка. Він допоможе студентам у виконанні лабораторних робіт з дисципліни «Теорія сигналів». В посібнику викладено інформацію щодо методів обробки та аналізу сигналів різного походження. Розглянуто та наведено приклади аналізу сигналів за допомогою найбільш розповсюджених методів: спектральний аналіз, спектрально-часовий аналіз, вейвлет-аналіз, кореляційний аналіз. Приділено увагу таким важливим задачам, як реєстрація та фільтрація сигналів.

Реєстр. № НП XX/XX-XXX. Обсяг X,X авт. арк.

Національний технічний університет України

«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

проспект Перемоги, 37, м. Київ, 03056

<https://kpi.ua>

Свідцтво про внесення до Державного реєстру видавців, виготовлювачів
і розповсюджувачів видавничої продукції ДК № 5354 від 25.05.2017 р.

КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2022

ЗМІСТ

Вступ.....	4
Лабораторна робота № 1. Основи програмування мовою Python.....	6
Лабораторна робота № 2. Візуалізація сигналів з використанням Python.....	21
Лабораторна робота № 3. Моделювання лінійних систем у часовій та частотній області	36
Лабораторна робота № 4. Спектральний аналіз за перетворенням Фур'є.....	51
Лабораторна робота № 5. Спектрально-часовий аналіз сигналів за перетворенням Фур'є	74
Лабораторна робота № 6. Фільтрація сигналів.....	95
Лабораторна робота № 7. Кореляційний аналіз детермінованих сигналів.....	105
Лабораторна робота № 8. Вейвлет-аналіз сигналів	114
Список літератури.....	121

ВСТУП

Навчальний посібник призначений для студентів-бакалаврів, які навчаються за освітньо-професійною програмою «Електронні мікро- і наносистеми та технології» спеціальності 153 «Мікро- та наносистемна техніка». Посібник містить методичні вказівки для виконання лабораторного практикуму з дисципліни «Теорія сигналів». Освітній компонент «Теорія сигналів» сприяє розвитку професійних знань про методи обробки та аналізу сигналів різного характеру. Основною метою навчальної дисципліни є формування цілісного уявлення про сигнали та методи їх вивчення, а також набуття знань, умінь, навичок та досвіду використання методів реєстрації, обробки та аналізу сигналів та зображень на практиці.

Очікувані результати навчання з дисципліни «Теорія сигналів» включають знання про:

1. типи та параметри сигналів та зображень різної природи;
2. методи математичного опису лінійних стаціонарних дискретних систем;
3. методи спектрального, спектрально-часового, вейвлетного та кореляційного аналізу, умови та обмеження їх застосування;
4. сутність частотно-залежної обробки сигналу за допомогою фільтрів;
5. основні підходи до стохастичного, нелінійного та багатовимірного аналізу сигналів та розпізнавання образів;
6. тенденції розвитку теорії сигналів та застосування методів дослідження сигналів на практиці.

Очікується, що успішне опанування дисципліни студентами забезпечить:

- здатність застосовувати знання обробки сигналів та зображень у практичних ситуаціях;
- знання та розуміння предметної області обробки сигналів та застосування її у професійній діяльності;

- навички використання інформаційно-комунікаційних технологій;
- здатність виконувати дослідження на належному рівні;
- вміння шукати, обробляти та аналізувати інформацію з різних джерел;
- здатність генерувати нові ідеї (креативність);
- здатність приймати обґрунтовані рішення.

Невід'ємною частиною підготовки студентів з дисципліни «Теорія сигналів» є виконання лабораторних робіт. Завдання даного посібника поділяються на обов'язкові для всіх студентів та додаткові, призначені для поглибленого вивчення дисципліни.

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 1

ОСНОВИ ПРОГРАМУВАННЯ МОВОЮ PYTHON

Мета роботи: Ознайомлення з основами програмування мовою Python на прикладі використання стандартних функцій, побудови файлів-сценаріїв та створення функцій користувача (на прикладі розв'язку системи рівнянь моделі «хижак-жертва»).

Основні теоретичні відомості

Частина 1

Python – високорівнева мова програмування загального призначення, орієнтована на підвищення продуктивності розробника і читання коду з мінімалістичним синтаксисом ядра та великим набором корисних функцій. Python підтримує структурне, узагальнене, об'єктно-орієнтоване, функціональне і аспектно-орієнтоване програмування. Основні архітектурні риси - динамічна типізація, автоматичне керування пам'яттю, повна інтроспекція, механізм обробки виключень, підтримка багатопоточних обчислень, високорівневі структури даних. Підтримується розбиття програм на модулі, які, у свою чергу, можуть об'єднуватися в пакет.

Мова Python є однією з найбільш поширених мов програмування, та застосовується для розробки веб-додатків, комп'ютерних ігор, у машинному навчанні, аналізі та візуалізації даних, розробці графічних інтерфейсів, роботі з аудіо та відео даними, програмуванні вбудованих систем та ін.

На першій лабораторній роботі треба опанувати основи Python на рівні, достатньому для виконання наступних лабораторних робіт.

Для цього студенти мають обрати для себе зручний для вивчення онлайн-ресурс, з допомогою якого будуть вивчати мову Python. Пропонуються звернути увагу, в першу чергу, на такі ресурси та онлайн-курси:

The Python Tutorial

<https://docs.python.org/3/tutorial/>

Основи програмування

https://courses.prometheus.org.ua/courses/KPI/Programming101/2015_T1/ab

[out](#)

PyCharm Edu -- Learning Python

<https://www.jetbrains.com/help/education/learner-start-guide.html?section=Introduction%20to%20Python>

How to Learn Python in 21 Days?

<https://www.geeksforgeeks.org/how-to-learn-python-in-21-days/?ref=leftbar-rightbar>

Python for Everybody Specialization (University of Michigan by Coursera)

1. Programming for Everybody (Getting Started with Python)

<https://www.coursera.org/learn/python?specialization=python#syllabus>

2. Python Data Structures

<https://www.coursera.org/learn/python-data?specialization=python#syllabus>

Python for Data Science and AI (IBM by Coursera)

<https://www.coursera.org/learn/python-for-applied-data-science-ai#syllabus>

Learn Python 2

<https://www.codecademy.com/learn/learn-python>

Python для початківців, відео уроки російською

<https://www.youtube.com/watch?v=cKRRysbQZsM>

Також корисним для створення програм мовою Python є використання середовища розробки. Пропонується звернути увагу та використовувати у роботі такі безкоштовні продукти:

- **PyCharm Community Edition** <https://www.jetbrains.com/pycharm/> – інтерактивне веб-середовище для розробки. Ознайомлення з роботою в ньому можна поєднувати з вивченням мови Python в цьому курсі: PyCharm Edu -- Learning Python

<https://www.jetbrains.com/help/education/learner-start-guide.html?section=Introduction%20to%20Python>

- **Jupyter** <https://jupyter.org/> -- інтерактивне веб-середовище для розробки. Для ознайомлення з роботою в Jupyter можна скористатися цими ресурсами:

- Jupyter Notebook Tutorial: The Definitive Guide

<https://www.datacamp.com/community/tutorials/tutorial-jupyter-notebook>

- Jupyter Notebook for Beginners: A Tutorial

<https://www.dataquest.io/blog/jupyter-notebook-tutorial/>

- Jupyter Tutorial

<https://www.tutorialspoint.com/jupyter/index.htm>

Частина 2*

В другій (*необов'язковій*) частині роботи студентам пропонується спробувати реалізувати мовою Python модель «хижак-жертва».

Однією із задач математичного моделювання є описання взаємодії біологічних видів з метою прогнозування можливих результатів їх

співіснування залежно від характеристик істот та параметрів навколишнього середовища.

Розглянемо побудову математичної моделі розвитку епідемічного процесу на прикладі виникнення раптової атаки зомбі на людей. Спробуємо промодельовати атаку зомбі з використанням біологічних аналогій, а також проілюструвати методики дослідження математичних моделей в системі Матлаб з використанням власних функцій користувача. Подібна аналогія допоможе показати приклад побудови математичної моделі незвичайних епідемій та гнучкість математичного моделювання за допомогою звичайних диференціальних рівнянь [1, 2].

Зомбі різного ґатунку є відомими фігурами сучасної масової популярної культури, зокрема, образотворчого мистецтва та кінематографу. Зазвичай атаку зомбі у художніх фільмах зображують як спалах захворювання або епідемію, яка непередбачено виникає у певній місцевості та швидко розповсюджується. Відомості про зомбі, історію їх виникнення, особливості поведінки та методи боротьби з ними можна дістати з популярних фільмів жахів (класичним прикладом є «Ніч живих мерців» Дж. Ромеро), або з фольклору афро-карибських жителів.

Класичний зомбі є живим мерцем – реанімованим людським тілом, яке достатньо кровожерливе, агресивне і живиться живою людською плоттю. Коли зомбі кусає людей, то інфекція передається через слину, відбувається зомбіфікація людини, і згодом уражена людина також стає зомбі та може уражати інших людей. Також часто у фільмах зомбі може стати померла людина, яка воскресає з мертвих внаслідок проведення певних магічних обрядів. Для того, щоб знищити зомбі, йому потрібно відтяти голову або пошкодити мозок якимось шляхом. Вилікуватися від того, щоб бути зомбі, в класичних випадках, як правило, неможливо, але в сучасній поп-культурі такі випадки відомі.

Нехай у деякому ареалі в момент часу, який буде початком моделювання, існує N істот. Для побудови найпростішої математичної моделі розглянемо три базові класи:

$H(t)$ – люди (наразі здорові), які можуть бути піддані атаці та стати зомбі в результаті зустрічі із іншим зомбі та укусу;

$Z(t)$ – зомбі;

$D(t)$ – жертви (наразі померлі), які згодом стануть зомбі.

Зміни відповідних величин – кількостей особин всіх класів у часі будуть описуватися похідними $\frac{H(t)}{dt}, \frac{Z(t)}{dt}, \frac{D(t)}{dt}$.

Розглянемо по черзі, від яких чинників буде залежати зміна кількості особин того чи іншого класу та запишемо відповідні математичні рівняння.

Зростання кількості людей відбувається за рахунок народжуваності. Народжуваність пропорційна кількості людей, коефіцієнт пропорційності буде дорівнювати P (доданок $+pH(t)$). Зменшення кількості людей також може відбуватися через природні причини, які не пов'язані із зомбі (природня смертність (параметр δ , доданок $-\delta H(t)$).

Також кількість людей може зменшитися у разі їх зустрічі з зомбі та перетворення на зомбі. Нехай кожна «середня» особа-зомбі в популяції контактує з βN осіб в одиницю часу та переносить інфекцію, зомбіфікуючи їх. Ймовірність того, що випадковий контакт зомбі відбудеться з людиною, дорівнює відношенню $\frac{H(t)}{N}$. Отже, кількість нових зомбі, які виникають

внаслідок такого процесу перенесення інфекції, в одиницю часу на кожного існуючого зомбі дорівнює: $+(\beta N) \left(\frac{H(t)}{N} \right) Z(t) = +\beta H(t) Z(t)$. Відповідно, зменшення кількості людей відбудеться на величину $-\beta H(t) Z(t)$.

Люди з класу жертв можуть воскреснути та перетворитися на зомбі (параметр λ , доданок $+\lambda D(t)$), кількість жертв збільшується внаслідок природних причин.

Також треба передбачити, що людина може уникнути зомбіфікації у разі зустрічі з зомбі, перемігши його у разі контакту та відтявши йому голову, тобто

що кожна людина може опиратися інфекції на рівні, що визначається параметром α . Цей параметр описує ймовірність того, що кількість зомбі зменшиться у разі зустрічі з людиною. Ймовірність випадкового контакту особи з зомбі дорівнює $\frac{Z(t)}{N}$, кожна людина нехай контактує з αN зомбі. Тоді

кількість зомбі, знищених людиною в одиницю часу буде дорівнювати:

$$(\alpha N) \left(\frac{Z(t)}{N} \right) H(t) = \alpha H(t) Z(t).$$

Щодо кількості тимчасово померлих, то вона буде збільшуватись через людей (доданок $+\delta H(t)$) та внаслідок переможених зомбі (доданок $+\alpha H(t) Z(t)$), та зменшуватись внаслідок тих померлих, які стануть зомбі (доданок $-\lambda D(t)$).

Отже, система рівнянь, яка описує найпростішу математичну модель атаки зомбі на людство, буде мати вигляд:

$$\begin{cases} \frac{dH(t)}{dt} = pH(t) - \delta H(t) - \beta H(t) Z(t) \\ \frac{dZ(t)}{dt} = \beta H(t) Z(t) + \lambda D(t) - \alpha H(t) Z(t) \\ \frac{dD(t)}{dt} = \delta H(t) + \alpha H(t) Z(t) - \lambda D(t) \end{cases}$$

Орієнтовані значення параметрів:

$$P = 0.0002; \delta = 0.0001; \beta = 0.0095; \lambda = 0.0001; \alpha = 0.005.$$

Порядок роботи, частина 1

1. Перший етап: визначитися та обрати онлайн-ресурс для вивчення мови Python.
2. Другий етап: надати звіт щодо того, які теми пройдені за 1-2 етап, надати приклад власного коду та скріншоти результатів виконання.
3. Третій етап: надати звіт щодо того, які теми пройдені за 2 етап, надати приклад власного коду та скріншоти результатів виконання.

4. Четвертий етап: надати звіт щодо виконання завдань лабораторної роботи №1.

Завдання, частина 1

1. Ознайомитися з типами даних та представленням змінних в Python:

- з правилами введення змінних та називання змінних;
- з операціями над числами та матрицями. Вивчити матричні та поелементні операції над матрицями.

Навести приклади коду та результати виконання коду в протоколі.

Приклад:

```
A = np.matrix("1 2 3; 4 5 6")
B = np.matrix("3 3 3; 2 2 2")
```

```
# matrix multiplication by number:
C = 3 * A
print("\n",C)
```

```
# matrix addition:
C = A + B
print("\n",C)
```

```
# subtraction of matrices:
C = A - B
print("\n",C)
```

```
# matrix multiplication:
A = np.matrix("2 2 2; 1 1 1")
B = np.matrix("5 5; 4 4; 3 3")
C = A * B
print("\n",C)
```

2. Виконати завдання, надати код та результати його виконання в протоколі:

2.1. Вказати масив, елементи якого є арифметичною прогресією.

2.2. Ознайомитися з функцією побудови гістограм, побудувати гістограми випадкових чисел з різними розподілами густини ймовірності. Використати функції генерації випадкових чисел із заданою густиною розподілу ймовірностей (рис. 1.1., 1.2).

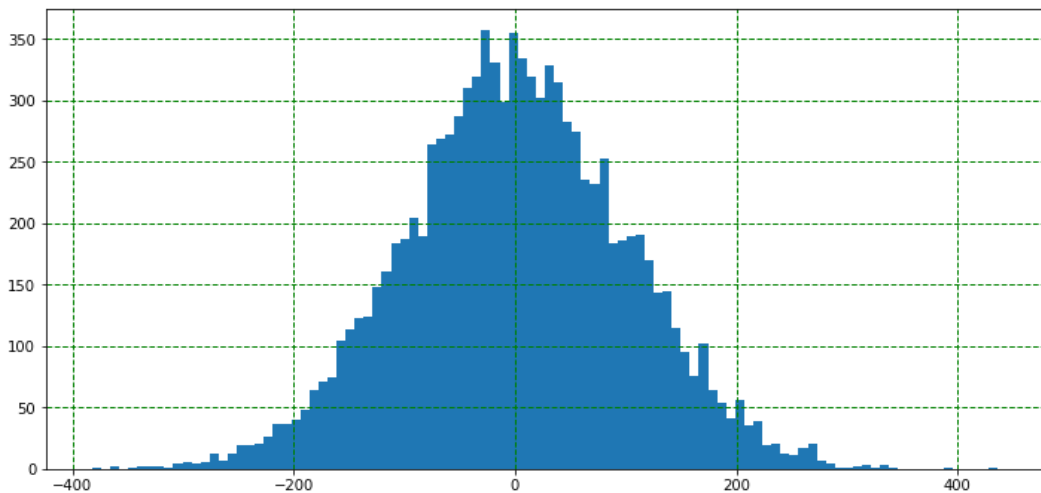


Рис.1.1. Приклад гістограми випадкових чисел із нормальним розподілом густини ймовірності

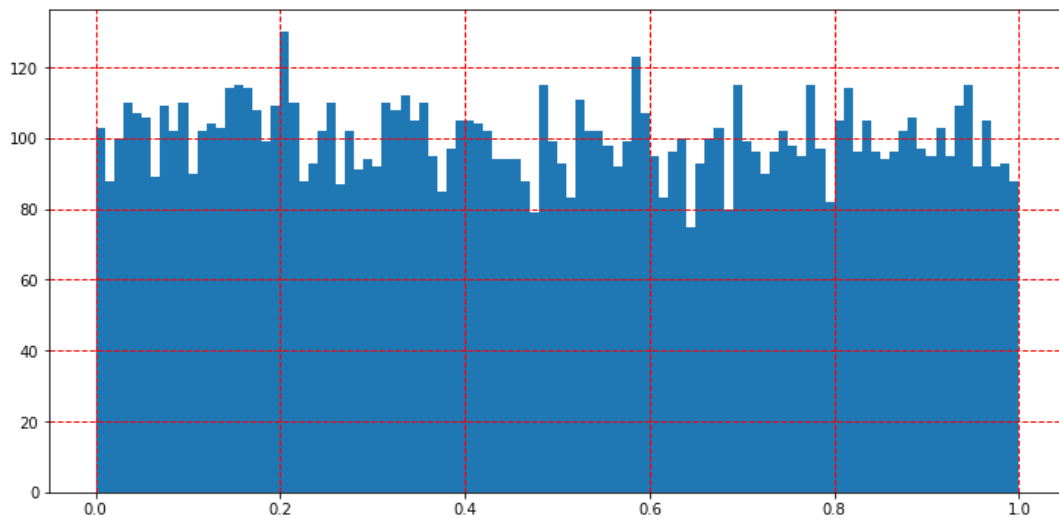


Рис.1.2. Приклад гістограми випадкових чисел з рівномірним розподілом густини ймовірності

Корисні бібліотеки та функції:

numpy (numpy.random.normal, numpy.random.uniform),

random (random.triangular, random.expovariate, random.gauss, random.normalvariate),

matplotlib.pyplot (hist, grid, subplots, plot).

3. Ознайомитися з написанням власних файлів-сценаріїв. У власному файлі-сценарії побудувати графік лінійної функції однієї змінної. Позначити вісі та заголовок графіку, нанести координатну сітку (рис. 1.3).

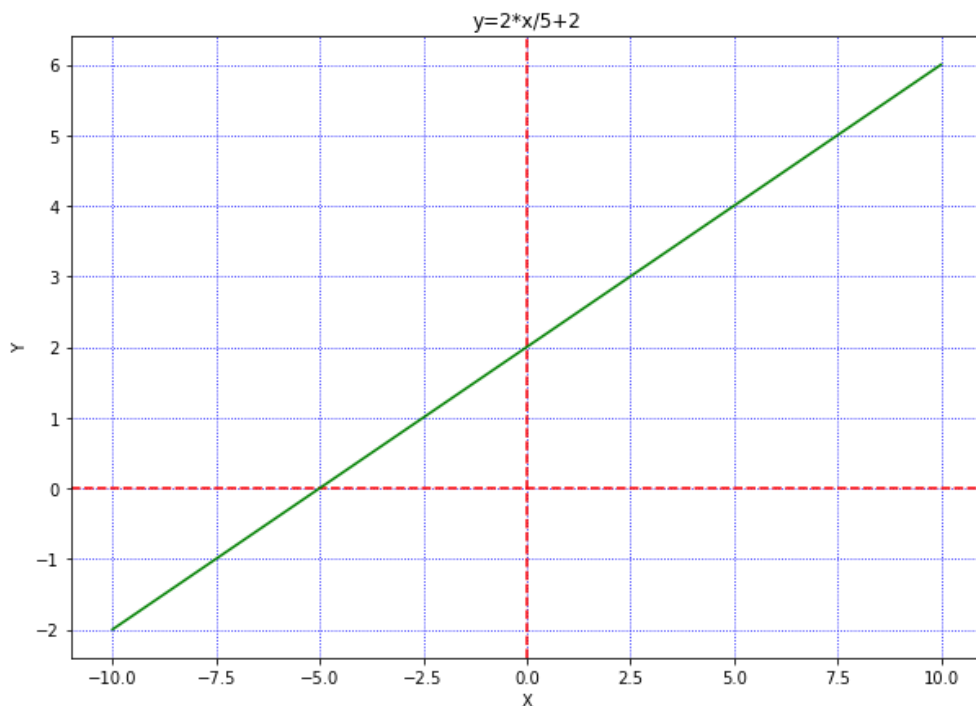


Рис.1.3. Приклад графіку лінійної функції однієї змінної.

Корисні бібліотеки та функції:

numpy, matplotlib.pyplot (hist, grid, subplots, plot).

4. Написати файл-сценарій, в якому:

4.1 Побудувати графіки синусоїд частот для 1, 10, 50 Гц. Тривалість сигналів – 1 с, частота дискретизації 256 Гц. Графіки будувати в одному вікні, але у різних осях. Амплітуди кожної синусоїди повинні бути випадковими числами (рис. 1.4).

4.2 Виконати теж саме, що й в пункті 4.1, але задавати амплітуду кожної синусоїди з клавіатури;

Корисна функція: input

4.3 Підписати заголовок кожного графіку текстом, який буде містити значення частоти та амплітуди відповідної синусоїди (рис. 1.5).

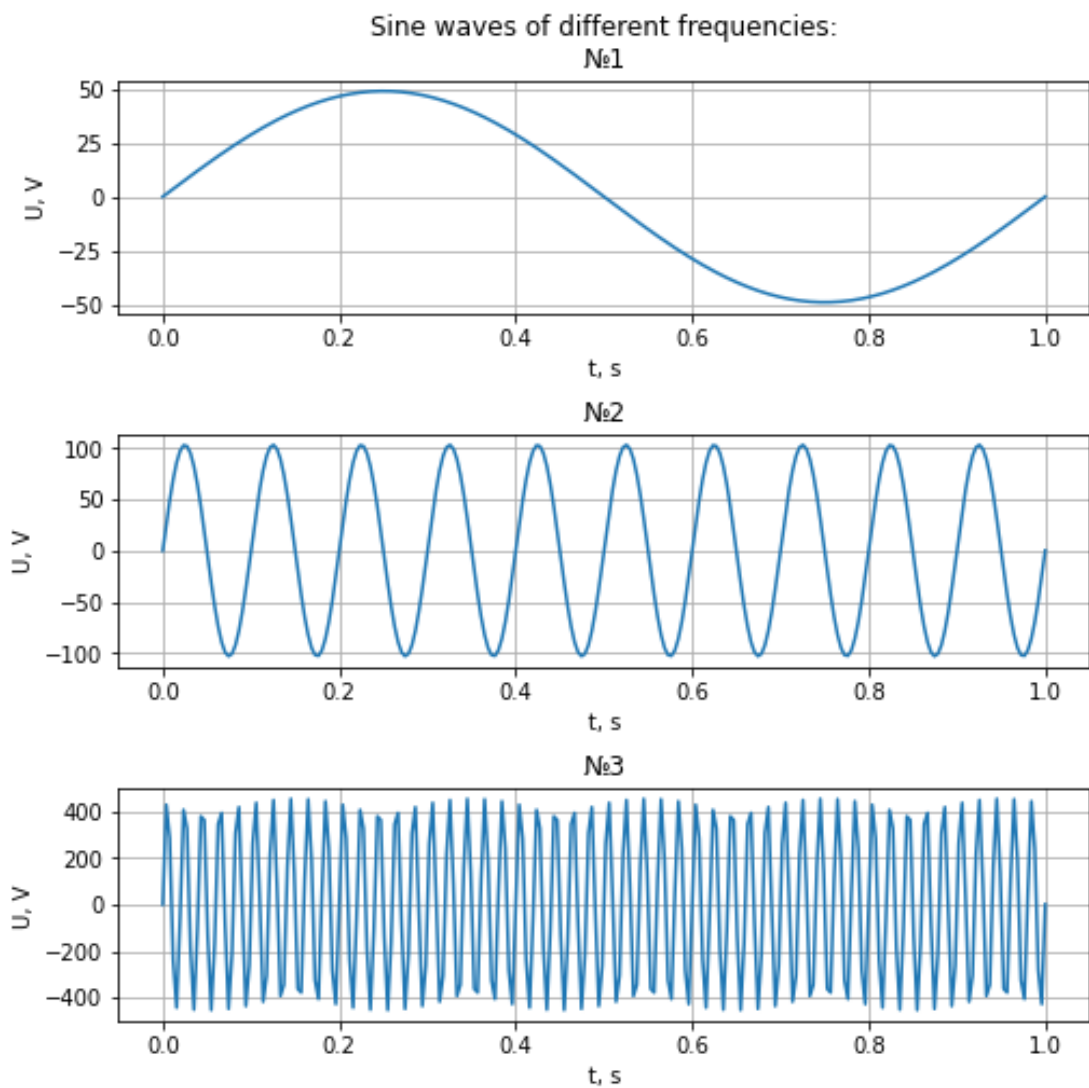


Рис.1.4. Приклад побудови графіка синусоїди з частотами 1, 10, 50 Гц (графіки в одному вікні, але в різних осях)

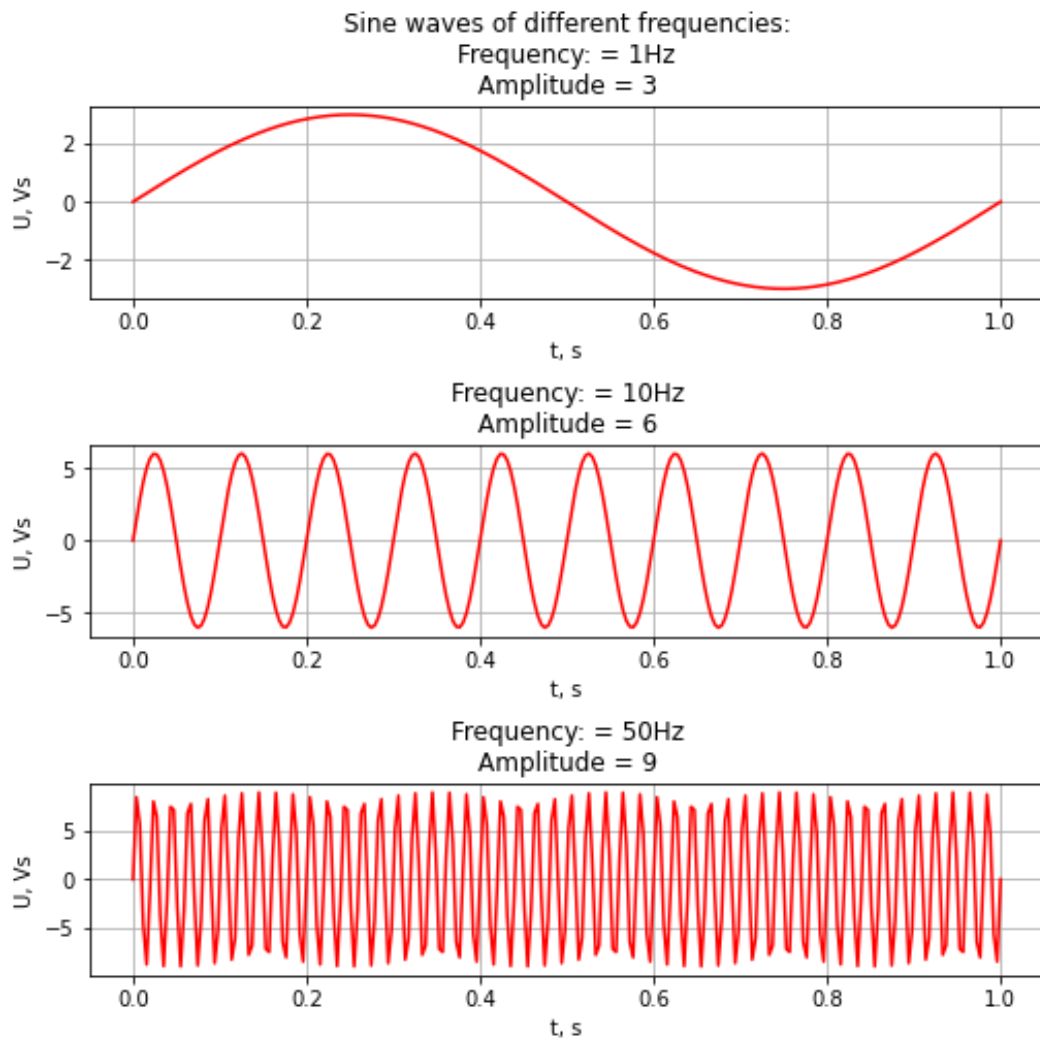


Рис.1.5. Приклад підписання заголовка кожного графіка текстом, що містить значення частоти та амплітуди відповідної синусоїди

5. Наведіть приклади використання функцій, які генерують імпульси (<https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/signal.html>). Форми сигналів: прямокутні імпульси, гаусівські імпульси, трикутні імпульси та послідовності імпульси заданої форми (рис. 1.6).

Корисні функції: gausspulse, sawtooth, square.

5.1 Побудувати одиничний прямокутний імпульс. Задати проміжок значень часу 10 секунд, частота дискретизації 256 Гц. Побудувати графік одиничного прямокутного імпульсу шириною 300 мс, з центром в момент часу 4 с (Рис. 1.7).

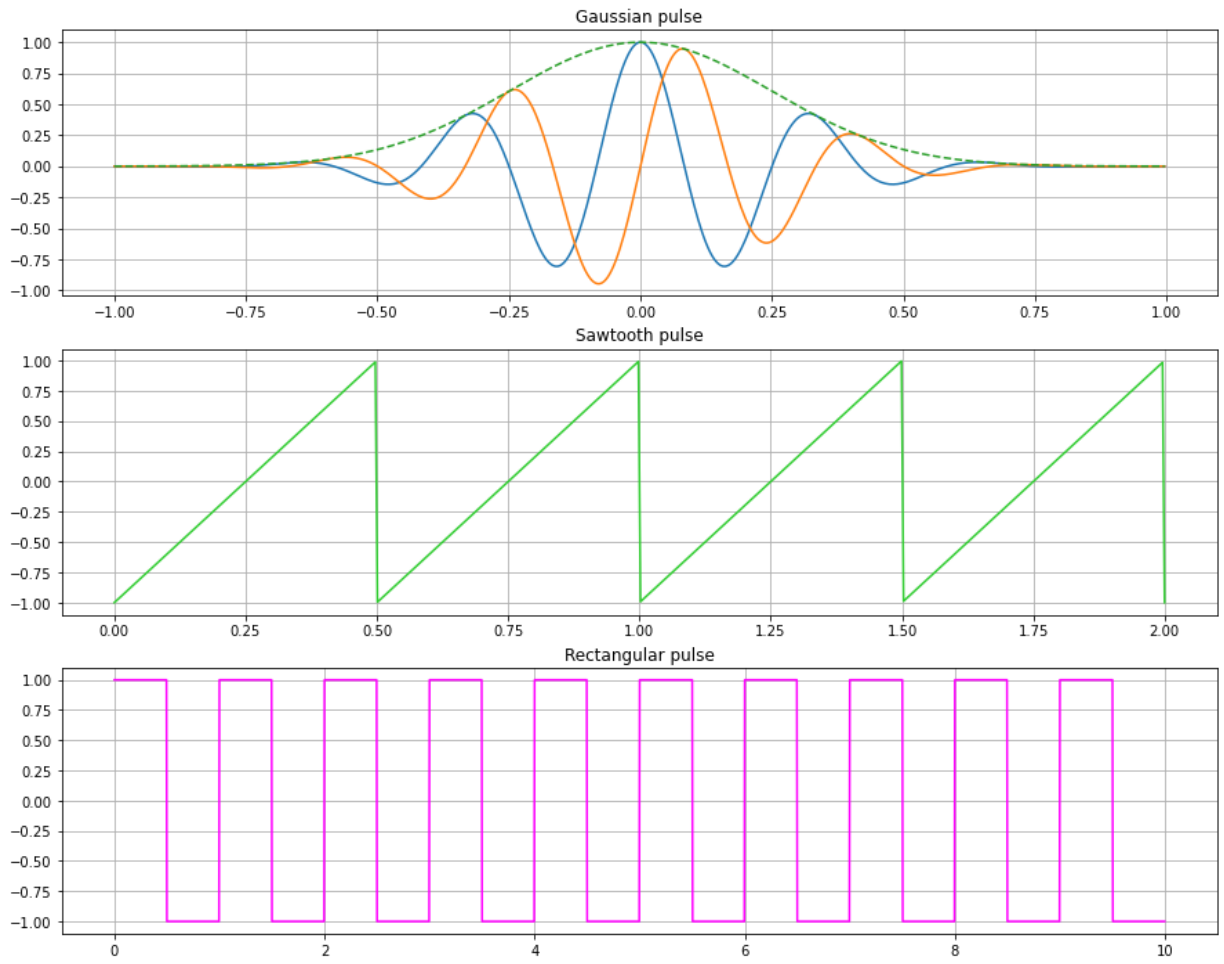


Рис.1.6. Приклад використання функцій, що генерують гаусівські імпульси, трикутні імпульси та прямокутні імпульси

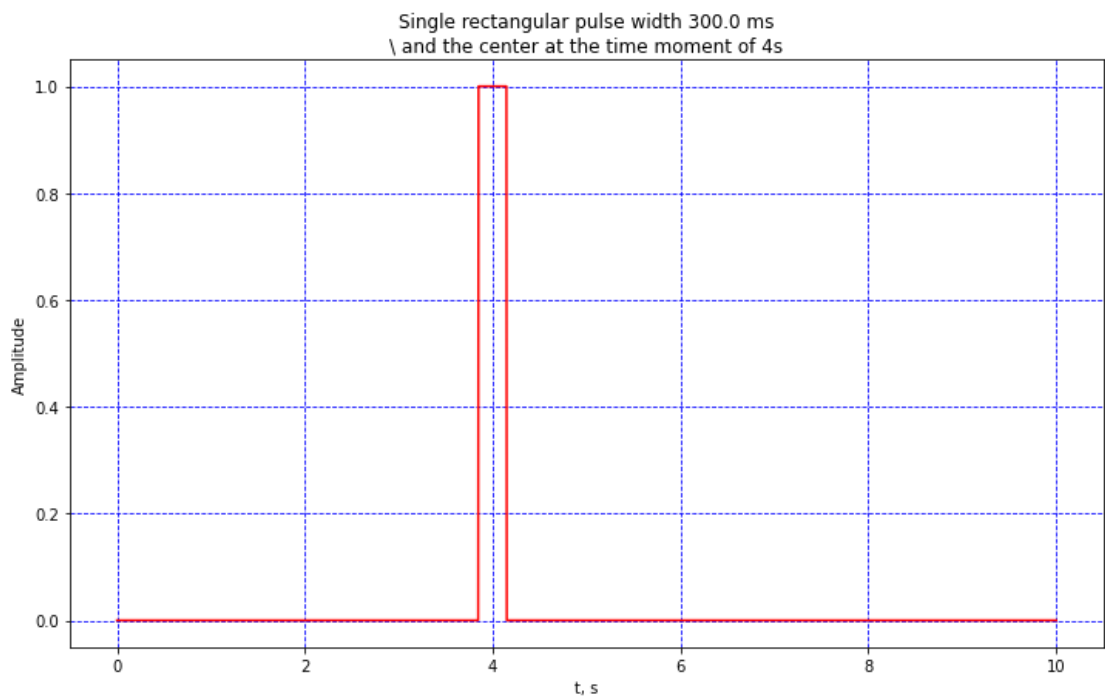


Fig.1.7. Побудова графіка одиничного прямокутного імпульсу

5.2 Написати файл-сценарій для побудови графіку прямокутного імпульсу, тривалість та амплітуда якого буде задаватися з клавіатури. Розташування імпульсу задавати випадковим числом, але передбачити перевірку, чи не виходить імпульс за межі графіка.

5.3 Побудувати послідовності прямокутних імпульсів для випадку, коли інтервали між імпульсами однакові.

6. Зберегти дані розрахунку функції у файлі. Прочитати їх із файлу в іншому сценарії, побудувати графік функції.

Корисні функції: `pr.savez`, `pr.load`.

7. Побудувати власну функцію (окремим файлом або в тому самому файлі) для побудови графіка синусоїдального сигналу із заданою частотою, амплітудою та тривалістю для частоти дискретизації 256 Гц. В якості вихідного параметру функції вивести середнє значення синусоїди.

def — це ключове слово для визначення функції. Після назви функції йде параметр(и) у (). Двокрапка : визначає початок тіла функції, який позначений відступом. У середині тіла функції оператор *return* визначає значення, яке потрібно повернути.

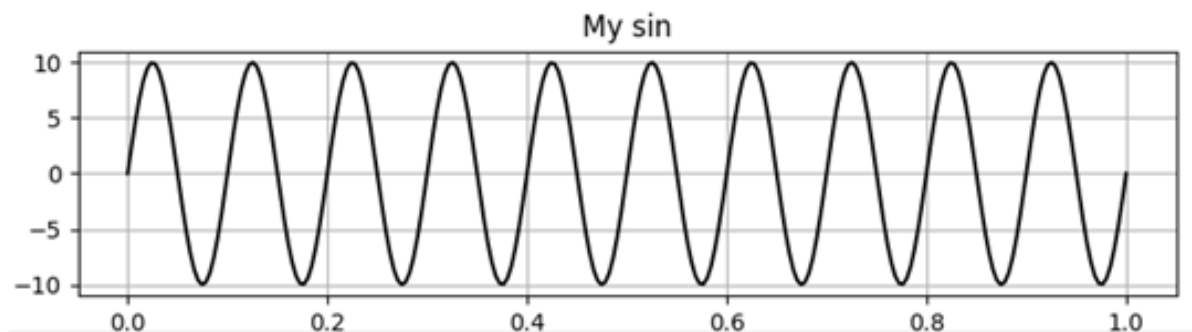


Fig.1.8. Побудова синусоїди із заданою частотою, амплітудою та тривалістю.

Порядок роботи, частина 2*

1. Ознайомитися з написанням власних функцій користувача в Матлаб за допомогою функції `function`. Ознайомитись з роботою та параметрами функції для розв'язання систем диференціальних рівнянь `ode45`.

2. Розв'язати систему рівнянь, яка описує співіснування людей, зомбі та тимчасово померлих, використовуючи метод Рунге-Кутти та отримати залежності від часу кількості зомбі, людей та жертв. Вивести графіки в часовій області. Отримати розв'язки та візуально їх проаналізувати для таких варіантів:

- початкова кількість людей набагато більша за зомбі;
- початкова кількість людей набагато менша за зомбі;
- різні комбінації коефіцієнтів здатності людини боротися із зомбі (альфа), та коефіцієнту зомбіфікації (бета).

3. Знайти програмними засобами перший момент часу, в який кількість зомбі дорівнює кількості людей. Для цього використати функції `abs`, `min`, `max`, та використати векторизованість операцій Матлаб. Побудувати залежність величини цього часу від параметру β . Передбачити можливість, за якої не буде точного співпадіння кількостей, але графіки перетинаються.

4. Про моделювати «оптимістичний» сценарій, за якого існують ліки від зомбіфікації. В моделі треба передбачити можливість для зомбі перетворюватися знову на людей (параметр c). Втім, такі ліки не дають імунітету, отже, зомбі, які стали людьми, можуть знову стати зомбі. Побудувати графіки для різних коефіцієнтів c , виконати візуальний аналіз результатів.

Контрольні запитання:

1. Що таке вектор?
2. Що таке матриця?
3. Які існують цикли в програмуванні?
4. Як задати масив за допомогою функцій Python, елементи якого є арифметичною прогресією?
5. Наведіть приклади функцій Python, які генерують випадкові числа з різними розподілами густини ймовірності.
6. Перелічіть приклади функцій Python, які генерують гаусівські імпульси, трикутні імпульси та прямокутні імпульси.

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 2

ВІЗУАЛІЗАЦІЯ СИГНАЛІВ З ВИКОРИСТАННЯМ PYTHON

Мета роботи: набути навичок читання та візуалізації сигналів різного характеру в Python.

Порядок роботи

Усі записи сигналів представлені на сайті

<https://ee.kpi.ua/~popov/teaching.html#6>.

На всіх графіках, які треба включити у протокол, необхідно належним чином підписати вісі (виходячи із частоти дискретизації та фізичних величин, які вимірюються). Вісі повинні бути правильно промасштабовані.

Створіть функцію, яка обчислює тривалість сигналів. Застосовуйте цю функцію для визначення тривалості всіх сигналів, які використовуються в даній лабораторній роботі.

1. Записати сигнал від внутрішніх датчиків (акселерометра, гіроскопа тощо) за допомогою смартфона. Для цього попередньо встановіть на смартфон програму AndroSensor:

<https://play.google.com/store/apps/details?id=com.fivasim.androsensor&hl=uk>.

Запустіть програму та опануйте її. Встановіть в налаштуваннях «Оновлення даних» - «дуже швидко», «Інтервал запису» - установіть мінімально доступний. Виконайте реєстрацію сигналу від доступних датчиків смартфона, виконуючи такі вправи:

- записувати сигнали стоячи, тримати прилад у руці, яка опущена вздовж тулуба протягом 1 хвилини;

- почати запис, покласти пристрій у кишеню, постояти 10 секунд, спокійно пройти коридором, постояти 10 секунд, припинити запис;

- почати запис, покласти пристрій у кишеню, постояти 10 секунд, пробігти коридором, постояти 10 секунд, припинити запис.

Збережіть дані у файлі csv, відкрийте його за допомогою Python. Збережіть сигнали на диску для подальшого використання. Побудуйте графіки сигналів акселерометра та гіроскопа, підписати вісі (рис.2.1).

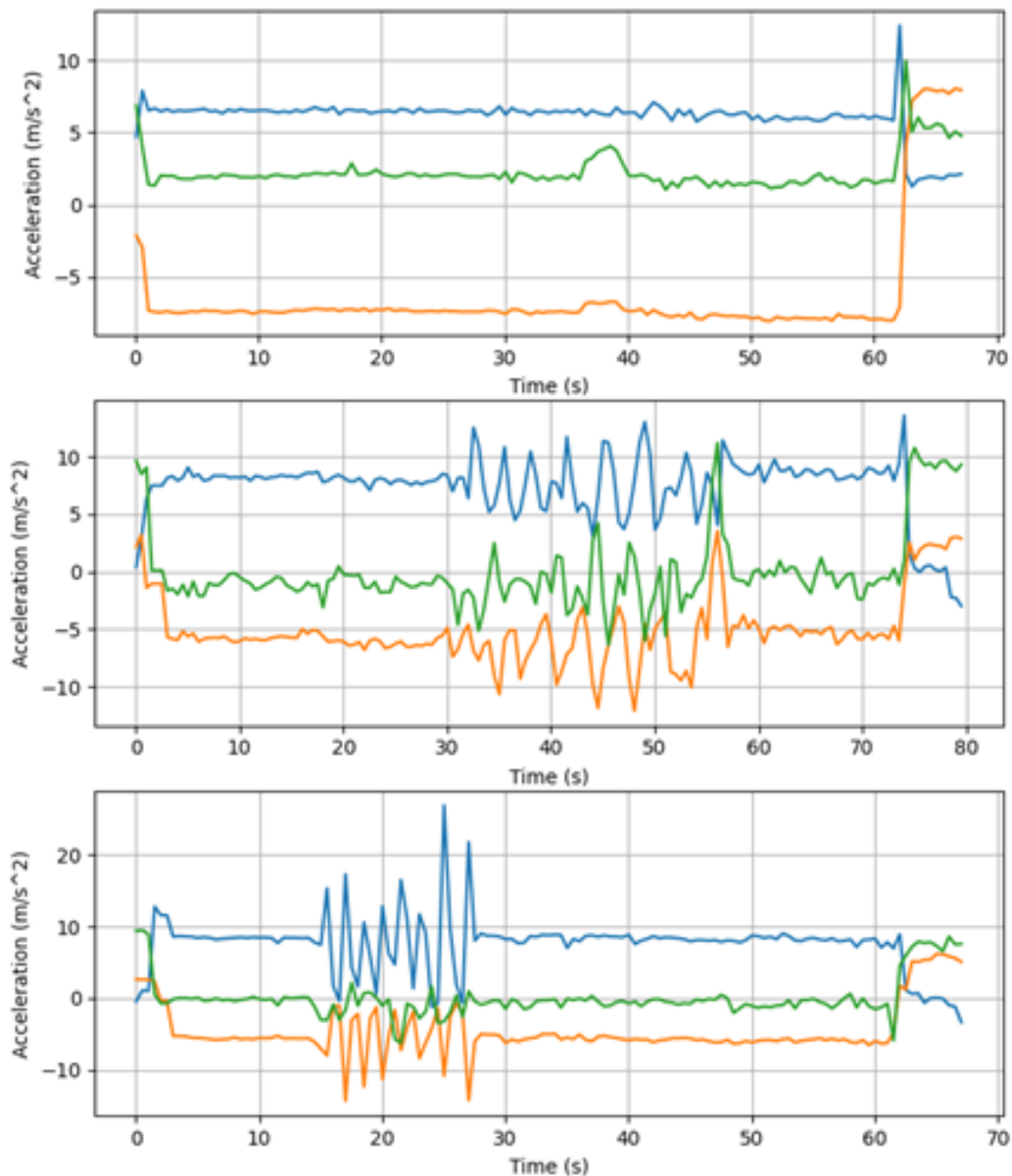


Рис. 2.1. Реєстрація сигналів з датчиків смартфона (стоячи, ходьба, біг)

2. Записати 5 секунд звуку із зовнішнього пристрою за допомогою Python. Записати однакові фрази або музику з частотою дискретизації 8 кГц і

44,1 кГц. Прочитати з файлу та прослухати отримані записи. Навести графік, позначити вісі (Рис.2.2, 2.3).

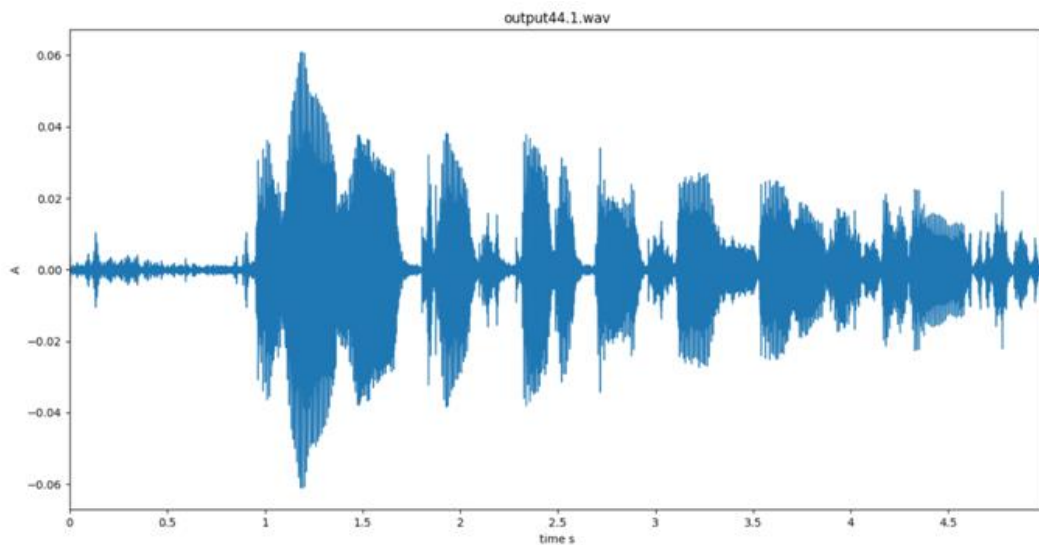


Рис. 2.2. Приклад аудіо сигналу з частотою дискретизації 8 кГц

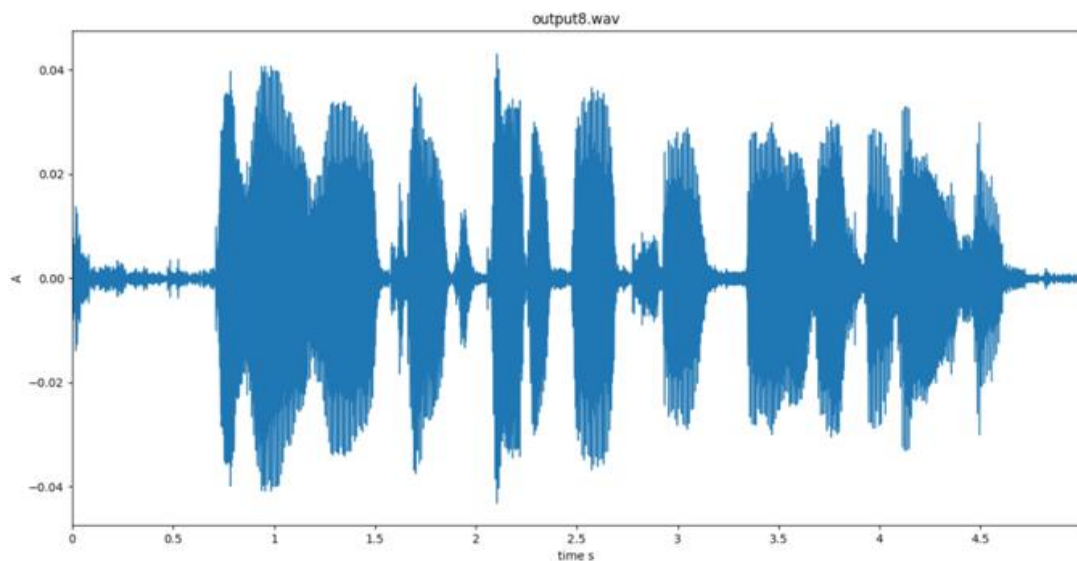


Рис. 2.3. Приклад аудіо сигналу з частотою дискретизації 44.1 кГц

3. Прочитати сигнали ЕЕГ здорової та хворої людини, отримані за допомогою комп'ютерного електроенцефалографа та збережені в mat-файлі (MatLAB). Навести графіки, позначити вісі (рис.2.4, 2.5). Зберегти отримані сигнали для використання у подальшій роботі. Використовуйте архівні файли EEG_healthy.rar і EEG_sick.rar. Потрібно обрати сигнал за своїм номером у

списку студентів групи; сигнали ЕЕГ записані з частотою 256 Гц, значення напруги вказано в мікрвольтах.

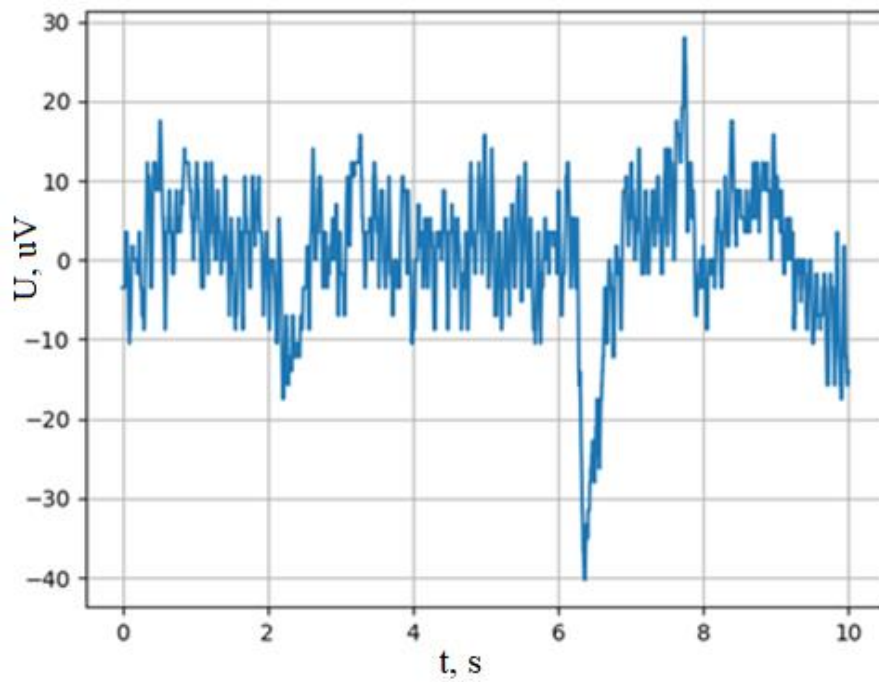


Рис. 2.4. Приклад сигналу ЕЕГ здорової людини

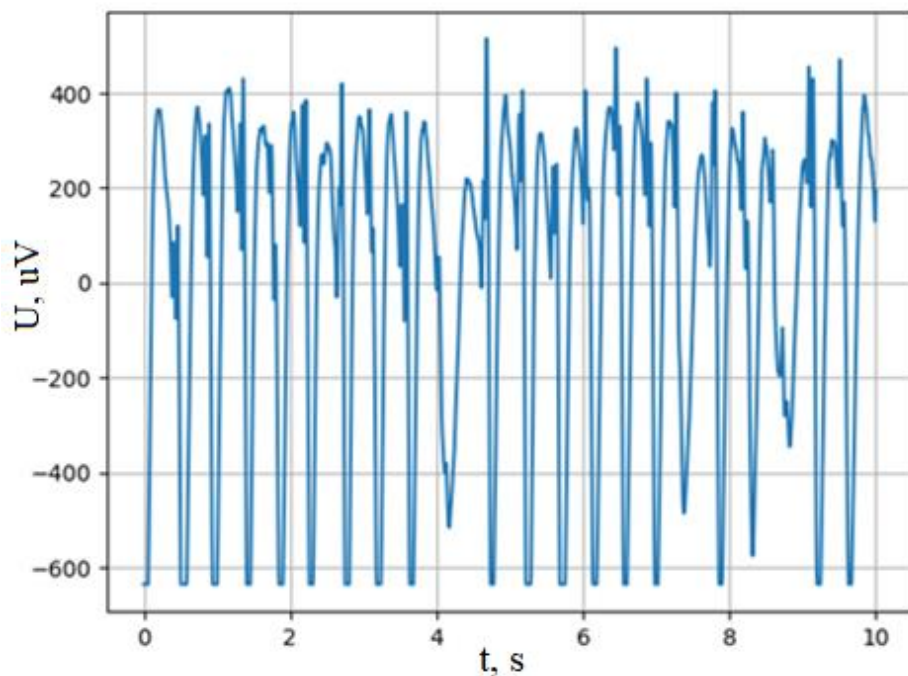


Рис. 2.5. Приклад сигналу ЕЕГ людини з епілепсією

4. Прочитати сигнали ЕКГ здорової (norm) і хворої (anomaly) людини.
Кожен файл має однакову структуру:

description - опис сигналу, може бути порожнім;

source - рядок, в якому вказано джерело файлу, зазвичай «mitdb / 200»;

fs - частота дискретизації;

units – одиниці вимірювання сигналу;

signal - сам сигнал у вигляді масиву numpy;

labels - текстові мітки до сигналу;

labels_indexes - індекси відповідних міток;

source_start - додаткове поле, що вказує початок періоду в вихідному сигналі, зазначеному в джерелі;

source_end - додаткове поле, що вказує кінець періоду в вихідному сигналі, зазначеному в джерелі.

Побудувати графіки сигналів (*) і міток для відповідних серцевих скорочень (рис.2.6, 2.7). Прочитати більше про ці записи можна за посиланням <https://archive.physionet.org/physiobank/database/html/mitdbdir/mitdbdir.htm>.

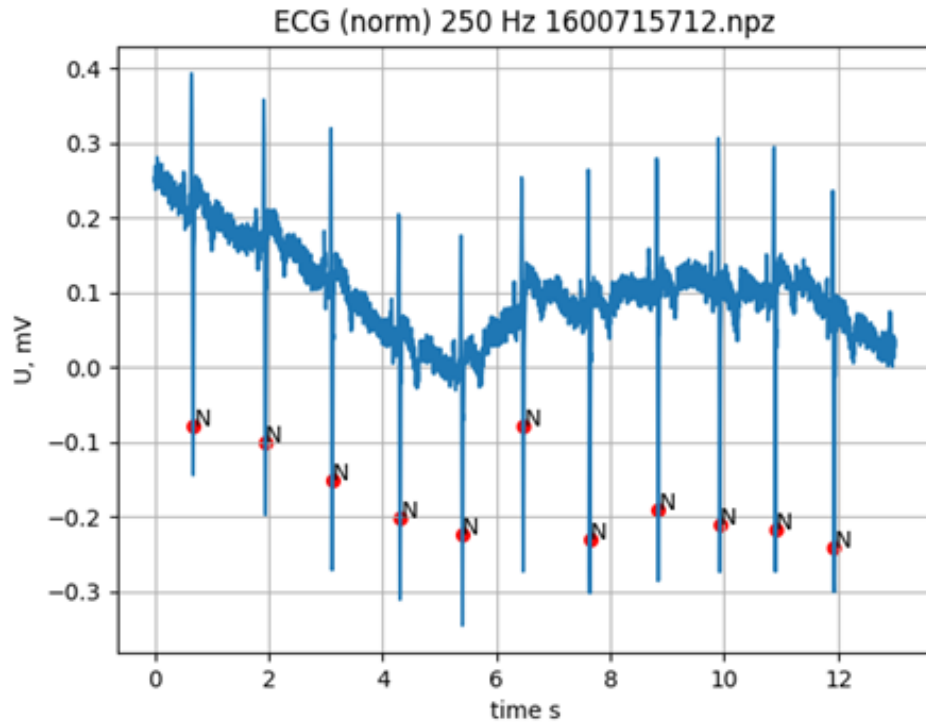


Рис. 2.6. Приклад сигналу ЕКГ здорової людини

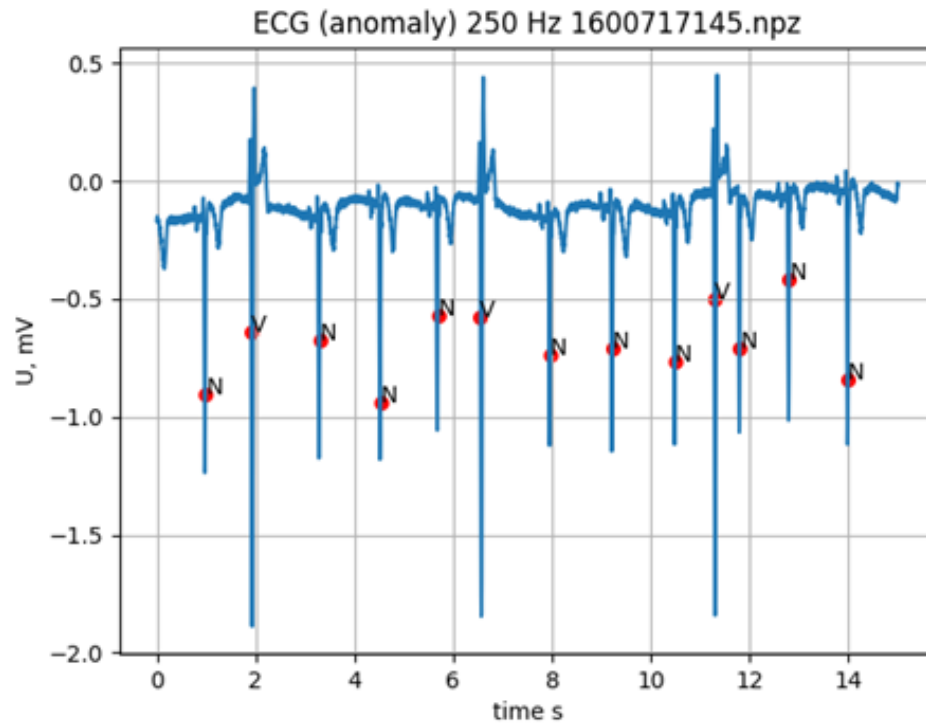


Рис. 2.7. Приклад сигналу ЕКГ з патологією

5. Прочитати сигнали кардіоритмограм здорової та хворої людини, збережені в mat-файлі. Навести графіки, позначити вісі (рис.2.8, 2.9). Значення сигналу записуються в мілісекундах, кожен відлік відповідає інтервалу між

ударами серця. Визначити за допомогою спеціальної функції (створити власну) тривалість записаного сигналу, враховуючи нерівномірну дискретизацію сигналу. Потрібно проінтерполювати сигнал, щоб визначити його значення на однорідній сітці вузлів для частоти дискретизації 1 Гц. Зберегти отриманий сигнал для використання в подальшій роботі.

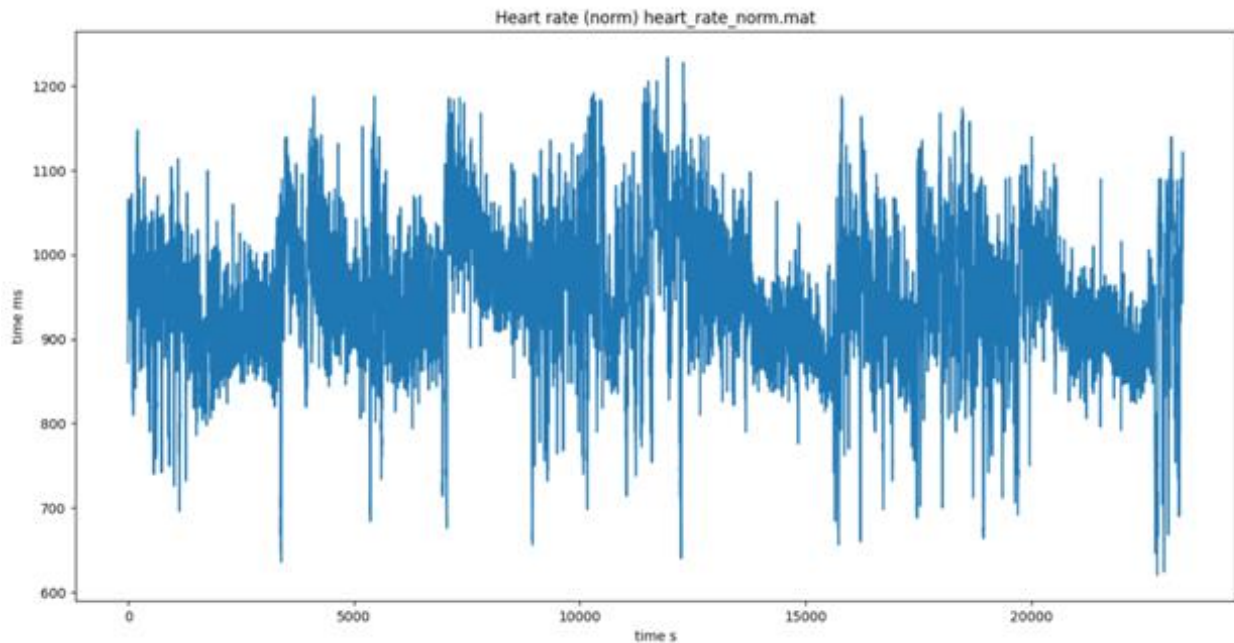


Рис. 2.8. Приклад кардіоритмограми в нормі

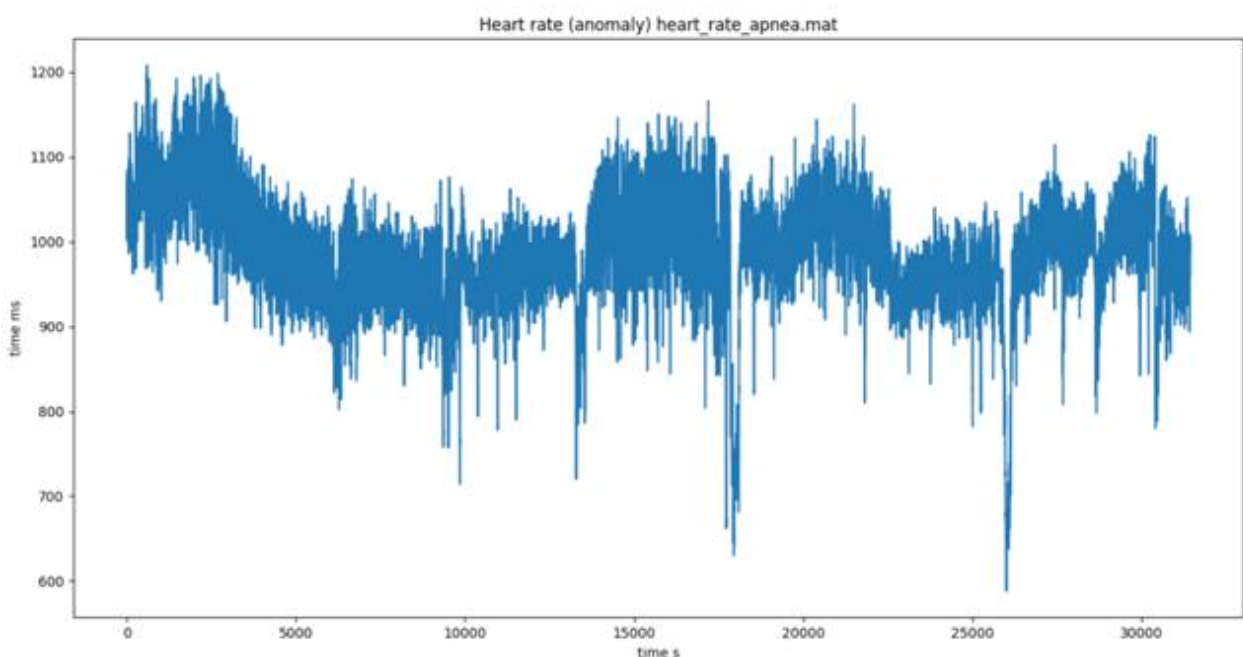


Рис. 2.9. Приклад кардіоритмограми з патологією

6. Прочитати сигнали стабілограм людини, що зареєстровані за допомогою платформи Wii Balance Board (https://en.wikipedia.org/wiki/Wii_Balance_Board). Папка даних містить сигнали для двох груп спортсменів - гандболістів і акробатів, (gahandball та acrobats відповідно). Кожен тип спортсмена проводив певні вправи:

base_close - стоячи прямо, ноги разом, очі закриті;

base_open - стоячи прямо, ноги разом, очі відкриті;

sway_front-back_30 - розгойдування вперед-назад під кутом 30 градусів, ноги разом, очі відкриті;

sway_front_back_60 - розгойдування вперед-назад під кутом 60 градусів, ноги разом, очі відкриті;

sway_left-right_30 - махи ліворуч і праворуч під кутом 30 градусів, ноги разом, очі відкриті;

sway_left-right_60 - махи ліворуч і праворуч під кутом 60 градусів, ноги разом, очі відкриті.

Виконайте наступні завдання:

6.1 Зчитати сигнали CoP (Center-of-Pressure) спортсменів, які спеціалізуються на різних видах спорту. Для цього пропонуємо використовувати функцію read_csv бібліотеки Pandas (бібліотека для роботи з табличними даними). Побудувати графіки (рис.2.10, 2.11).

Порядок розташування стовпців у файлі:

time_ms - час у мс [стовпець0]

top_left_f_kg - необроблені дані верхнього лівого датчика [стовпець1]

top_right_f_kg - необроблені дані верхнього правого датчика [стовпець2]

bottom_left_f_kg - необроблені дані нижнього лівого датчика [стовпець3]

bottom_right_f_kg - необроблені дані нижнього правого датчика [стовпець4]

cor_x - вісь X CoP [стовпець5]

cor_y - вісь Y CoP [стовпець6]

total_f - загальна сила [стовпець7]

6.2 Виберіть будь-які два типи сигналів (наприклад, base-open і sway_left-right_60) для двох типів спортсменів.

6.3 Для кожного сигналу в папці відповідного типу розрахувати статистичні параметри (середнє значення, медіану, стандартне відхилення), окремо по осях X і Y, звести у таблицю та порівняти для спортсменів різних типів (Рис. 2.12).

6.4 Записати свої висновки.

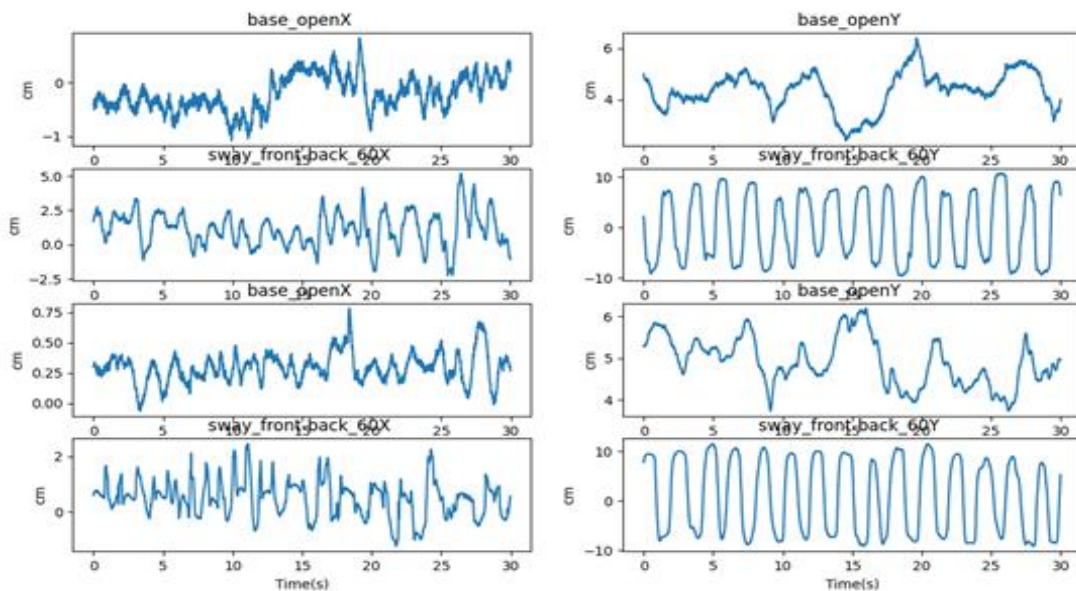


Рис. 2.10. Приклад стабілограм

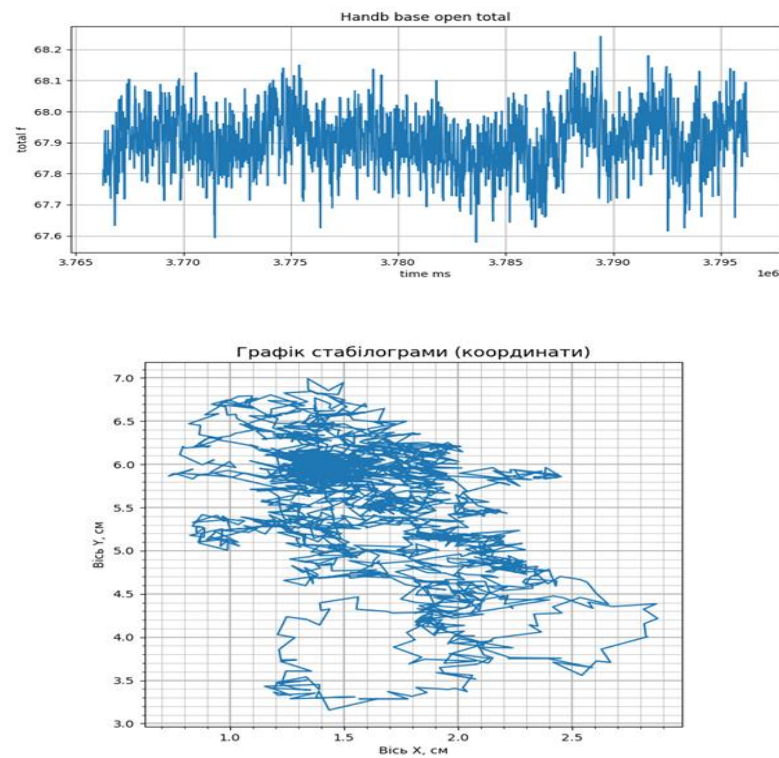


Рис. 2.11. Приклад сигналів CoP

Signal	Operation	Acrobat	Handball
cop_x	Mean	-2.86	0.86
cop_x	Median	-2.833	0.865
cop_x	Standard deviation	0.185	0.088
Signal	Operation	Acrobat	Handball
cop_y	Mean	4.7	4.54
cop_y	Median	4.702	4.551
cop_y	Standard deviation	0.453	0.244
Signal	Operation	Acrobat	Handball
total_f	Mean	68.588	67.911
total_f	Median	68.591	67.913
total_f	Standard deviation	0.129	0.093

Fig. 2.12. Приклад таблиці зі статистичними параметрами для сигналів CoP спортсменів (середнє значення, медіана, стандартне відхилення)

7. Прочитати сигнали частоти серцевих скорочень (ЧСС) та насичення артеріальної крові киснем (SpO_2). Побудувати графіки обох сигналів. Побудувати графіки середніх значень сигналів, які обчислюються у вікнах тривалістю 30 секунд, вікна не перекриваються (рис.2.13-2.16).

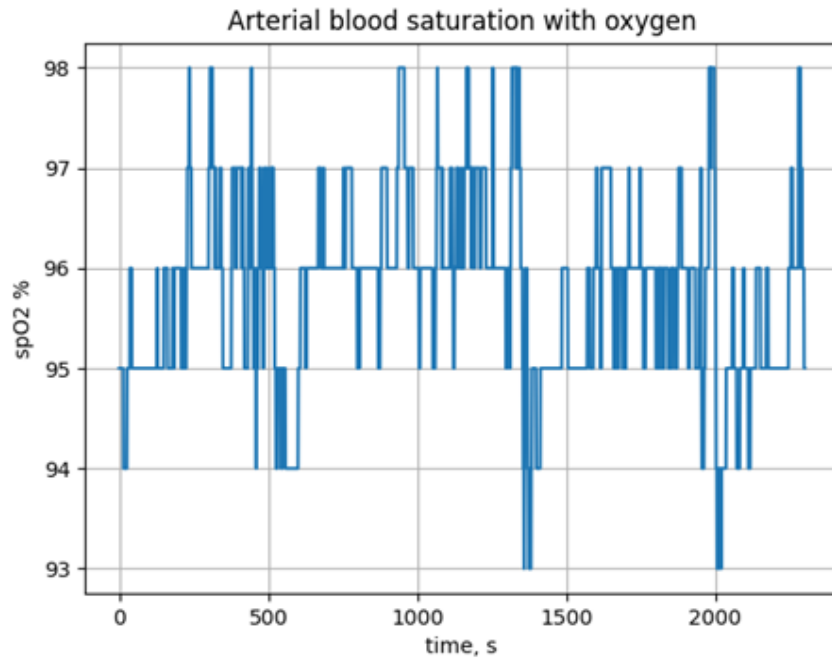


Рис.2.13. Приклад сигналу насичення артеріальної крові киснем

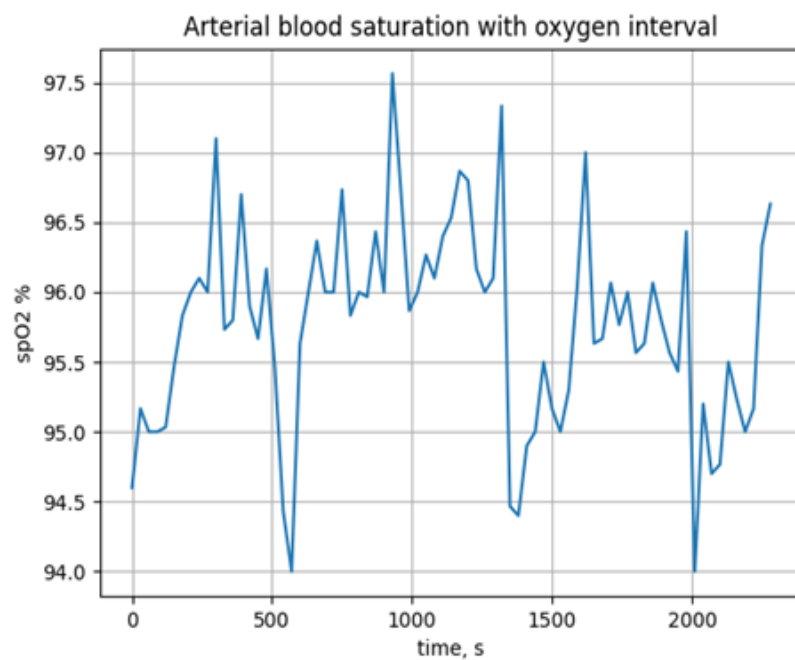


Рис.2.14. Середні значення насичення артеріальної крові киснем, розраховані у вікнах тривалістю 30 секунд

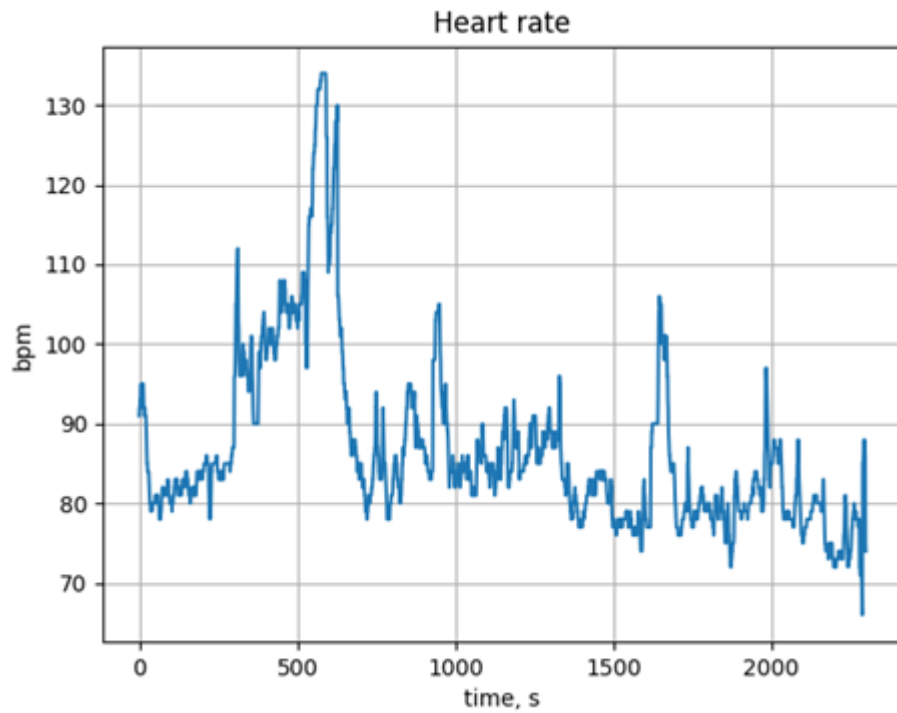


Рис.2.15. Приклад сигналу серцевого ритму

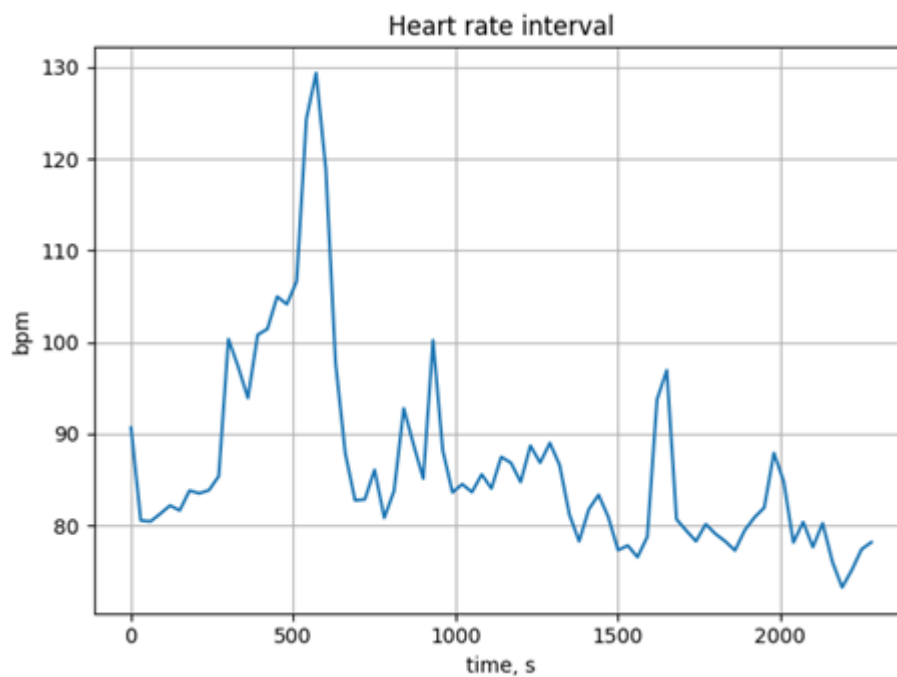


Рис.2.14. Середні значення ЧСС, розраховані у вікнах тривалістю 30 секунд

8. Прочитати сигнал внутрішньо черепного тиску в робочій зоні. Зберегти отриманий сигнал для використання в подальшій роботі. Файл TBI_ICP.txt - одноканальний сигнал, записаний з частотою дискретизації 125

Гц, одиниці виміру - мм рт.ст., вивести графік сигналу на екран, позначити вісі (рис.2.15).

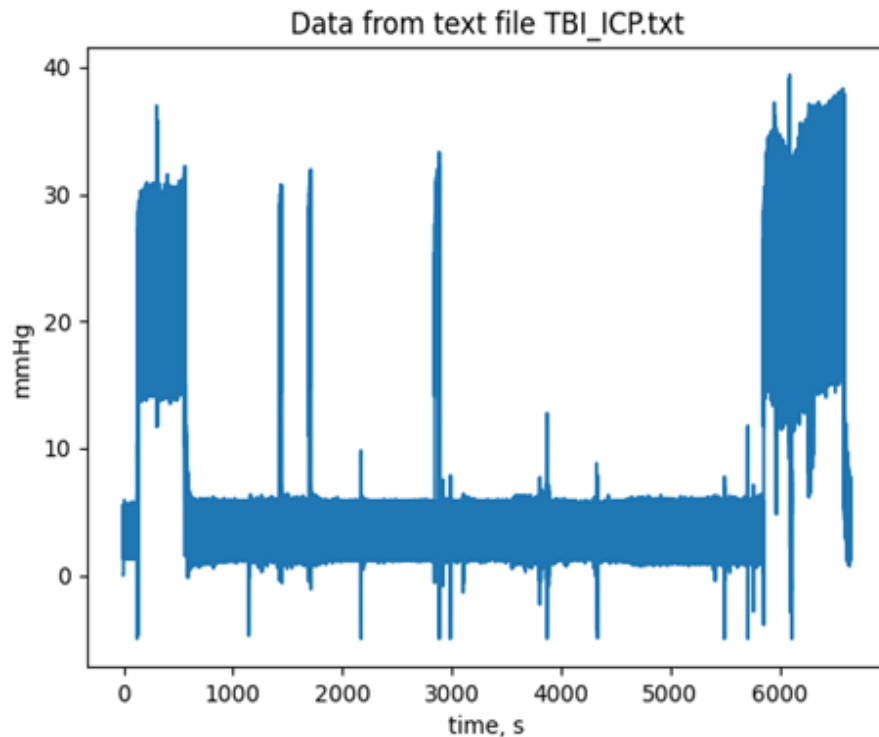


Рис.2.15. Сигнал внутрішньо черепного тиску

9. Створити **функцію** для **побудови графіка частини сигналу** (рис.2.16, 2.17). Параметри, що потрібно передавати у функцію: час початку та кінця частини сигналу (у секундах), вектор із відліками сигналу, частота дискретизації. Здійснити перевірку правильності введення точок часу. Реалізувати можливість отримання вектору з відліками області сигналу та відліками часу в якості вихідних аргументів функції.

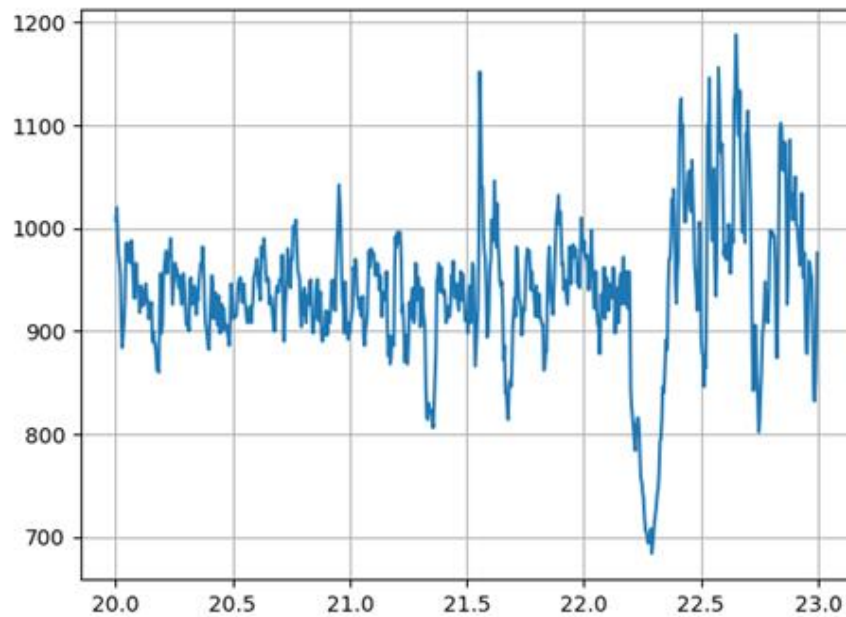


Рис.2.16. Графік частини сигналу кардіоритмограми (починаючи з 20 с сигналу і до 23 с)

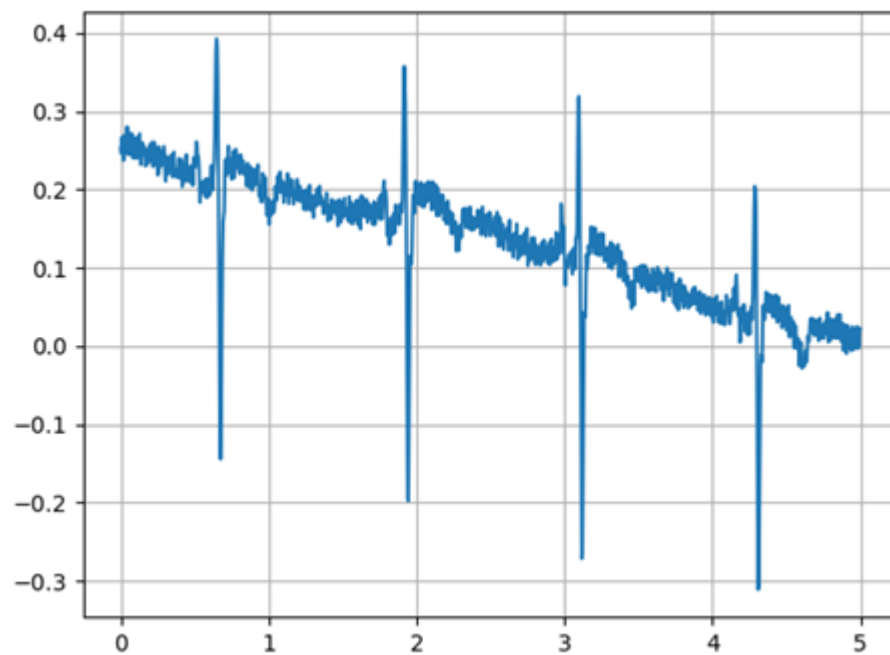


Рис. 2.17. Графік частини ЕКГ сигналу (починаючи з 0 і до 5 с.)

10*. Зареєструвати за допомогою реанімаційного монітору багатоканальний сигнал ЕКГ, сигнал плетизмограми та сигнал дихання, зберегти дані на диск у вигляді бінарного файлу.

Прочитати дані з бінарного файлу, вивести графіки всіх сигналів на екран в одному вікні, підписати кожний графік назвою відповідного сигналу.

Частота дискретизації сигналів дорівнює 151.51 Гц в кожному каналі, формат даних int16. В бінарному файлі відліки відведень розташовані по рядках. Кожний рядок відповідає окремому відведенню; сигнали відведень розташовані в отриманій матриці в такому порядку: ECG I, ECG II, ECG III, ECG AVR, ECG AVL, ECG AVF, ECG V, SpO2, RESP.

Визначити (програмно) тривалість записаних сигналів в секундах. Зберегти отриманий сигнал в файлі для використання в наступних роботах.

Контрольні запитання:

1. Яка мета та завдання обробки сигналів?
2. Яка різниця між безперервним і дискретним сигналом?
3. Що таке квантування та дискретизація сигналів?
4. Наведіть приклади біомедичних систем.

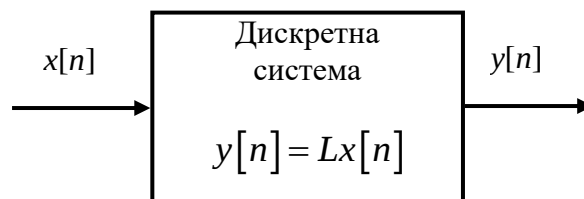
ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 3

МОДЕЛЮВАННЯ ЛІНІЙНИХ СИСТЕМ У ЧАСОВІЙ ТА ЧАСТОТНІЙ ОБЛАСТІ

Мета роботи: дослідити роботу лінійних систем обробки дискретних сигналів; набути навичок моделювання лінійних стаціонарних дискретних систем в Python.

Основні теоретичні відомості

Всі операції обробки сигналів виконуються за допомогою систем. Дискретна система – це набір схемних компонентів або програмних процедур, які реалізують математичні операції над дискретними сигналами.



На вхід дискретної системи подаються відліки дискретного вхідного сигналу $x[n]$, а на виході формуються відліки дискретного вихідного сигналу $y[n]$.

З точки зору теорії сигналів, дискретна система – це оператор або перетворення, яке переводить вхідну послідовність відліків $x[n]$ (вхідний сигнал, вплив на систему) у вихідну послідовність відліків $y[n]$ (вихідний сигнал, реакція системи на вплив):

Попереднє співвідношення, яке позначено оператором L – це правило, або формула, або алгоритм, за яким обчислюється реакція системи на основі відліків вхідного сигналу.

Характеристики дискретних систем можна розділити на дві групи залежно від того, чи вони стосуються властивостей системи в часі, чи властивостей по відношенню до перетворень значень сигналів:

«Амплітудні» властивості:

- лінійність;
- стійкість;
- існування інверсної системи.

«Часові» властивості:

- казуальність;
- наявність пам'яті;
- стаціонарність (інваріантність у часі).

«Амплітудні» властивості дискретних систем

Система називається *лінійною*, якщо вона має дві властивості:

1. Адитивність.
2. Однорідність.

Нехай маємо систему L і маємо сигнали $y_1[n]$ та $y_2[n]$ – реакції системи L на входні сигнали $x_1[n]$ та $x_2[n]$:

$$\begin{aligned} y_1[n] &= Lx_1[n], \\ y_2[n] &= Lx_2[n], \end{aligned}$$

Властивість *адитивності* полягає у тому, що реакція системи на суму входних сигналів повинна дорівнювати сумі реакцій цієї системи на кожний сигнал окремо:

$$L(x_1[n] + x_2[n]) = Lx_1[n] + Lx_2[n] = y_1[n] + y_2[n].$$

Властивість *однорідності* полягає у тому, що реакція системи на масштабований входний сигнал (підсилений або ослаблений) дорівнює масштабованій реакції системи на немасштабований входний сигнал:

$$L(ax_1[n]) = aLx_1[n] = ay_1[n],$$

де a – довільна константа.

Властивості однорідності та адитивності можна записати разом однією формулою у вигляді *принципу суперпозиції*

$$L(ax_1[n] + bx_2[n]) = aLx_1[n] + bLx_2[n] = ay_1[n] + by_2[n].$$

Принцип суперпозиції для дискретної системи T можна записати для суми довільної кількості сигналів:

$$x[n] = \sum_k a_k x_k[n], \quad y[n] = Lx[n] = \sum_k a_k y_k[n]$$

Отже, лінійна система – це система, яка має властивості адитивності та однорідності, або, що те саме, відповідає принципу суперпозиції. Лінійність систем перетворення сигналів – фундаментальна властивість, яку має переважна більшість систем, з якими дослідники зустрічаються в практичній діяльності. Під час аналізу сигналів у разі їх проходження через лінійні системи, внаслідок властивості адитивності можна досліджувати реакції системи не на весь вхідний сигнал, а на його складові. Якщо ми будемо знати, як лінійна система реагує на кожен складову окремо, то ми, не проводячи вимірювань, можемо знайти, яким буде вихідний сигнал системи. Для цього треба буде тільки знайти розклад вхідного сигналу системи. Ці питання будуть більш докладно розглянуті в подальших розділах.

Система є *стійкою*, якщо її реакція на будь-який обмежений за амплітудою вхідний сигнал є обмеженою.

$$\text{якщо } \exists M_x, |x[n]| \leq M_x < +\infty \forall n, \text{ то існує } M_y, |y[n]| \leq M_y < +\infty.$$

$$\text{if } \exists M_x, |x[n]| \leq M_x < +\infty \forall n, \text{ then } M_y, |y[n]| \leq M_y < +\infty$$

Наприклад, суматор – нестійка система, в чому можна пересвідчитись, подавши на його вхід одиничну послідовність.

Система називається *інверсною*, якщо кожному вхідному сигналу відповідає єдиний вихідний сигнал. В такому випадку існує обернена система, яка може відновити вхідний сигнал за вихідним: $x[n] = L^{-1}y[n]$.

Часові властивості дискретних систем

Система називається *каузальною* (детермінованою), якщо кожний відлік вихідного сигналу з номером n_0 залежить лише від тих відліків вхідного сигналу, номер яких не перевищує n_0 .

$$y[n] = F(x[n], x[n-1], x[n-2], \dots).$$

Система без запам'ятовування – дискретна система, кожний n -ий відлік $y[n]$ реакції якої за кожного n залежить лише від одного відліку з тим самим номером n вхідного сигналу $x[n]$:

$$y[n] = F(x[n]).$$

Якщо система має пам'ять, то вона називається динамічною системою, в іншому випадку – статичною.

Стаціонарна дискретна система – це система, для якої будь-який зсув у часі вхідного сигналу веде до такого самого зсуву вихідного сигналу. Тобто, якщо реакція системи на вхідний сигнал $x[n]$ дорівнює $y[n]$:

$$Lx[n] = y[n],$$

то реакція цієї ж системи на той самий сигнал, але який затриманий у часі на певну кількість відліків, буде рівною тій самій реакції, але яка затримана у часі на ту ж саму кількість відліків:

$$Lx[n - n_0] = y[n - n_0].$$

Стаціонарність – також дуже корисна і важлива властивість систем, і бажано, щоб всі системи, з якими має справу дослідник, були стаціонарними. Стаціонарність передбачає стабільність, незмінність властивостей системи в часі. Якщо ми подамо на вхід стаціонарної системи вхідний сигнал і отримаємо реакцію, а потім через деякий час подамо такий самий сигнал – ми отримаємо таку саму реакцію. Оскільки система стаціонарна, то одного разу визначивши її

характеристики, ними можна користуватися у подальшому, оскільки вони не будуть мінятися. Стаціонарні системи називають також *інваріантними* у часі [1-3].

Математичне моделювання обробки сигналів лінійною дискретною системою (ЛДС) включає в себе:

- розрахунок характеристик ЛДС у часовій області, z -області, та частотній області;
- розрахунок реакції ЛДС на вхідний сигнал на основі різницевого рівняння;
- аналіз вхідних сигналів та реакцій ЛДС у часовій та частотних областях.

У **часовій області** основною характеристикою ЛДС є імпульсна характеристика $h[n]$, а моделювання роботи ЛДС (розрахунок реакції) виконується з використанням одного з таких співвідношень між входом та виходом:

1. Різницевого рівняння

$$y[n] = b_0x[n] + b_1x[n-1] + \dots + b_{N-1}x[n-(N-1)] - a_1y[n-1] - a_2y[n-2] - \dots - a_{M-1}y[n-(M-1)]$$

яке задається векторами коефіцієнтів $b = [b_0, b_1, \dots, b_{N-1}]$ та $a = [a_0, a_1, \dots, a_{M-1}]$.

2. Формули згортки

$$y[n] = \sum_{k=0}^{\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{k=0}^{\infty} h[k]x[n-k]$$

3. Системи рівнянь змінних стану.

В **z -області** основною характеристикою ЛДС є характеристична (схемна) функція:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{n=0}^{N-1} b_n z^{-n}}{\sum_{m=0}^{M-1} a_m z^{-m}} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_{N-1} z^{-(N-1)}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_{M-1} z^{-(M-1)}}$$

яка, подібно до різницевого рівняння, задається векторами коефіцієнтів b та a та може мати різні вигляди математичного запису.

В **частотній області** основною характеристикою ЛДС є комплексна частотна характеристика, а також її модуль (амплітудно-частотна характеристика, АЧХ) та аргумент (фазо-частотна характеристика, ФЧХ):

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| e^{j \arg\{H(e^{j\omega})\}} = K(\omega) e^{j\varphi(\omega)}.$$

Порядок роботи

Моделювання роботи ЛДС з використанням різницевого рівняння

1. На основі власної дати народження записати різницеве рівняння:

$$\begin{aligned} y[n] + \frac{(D_1 + D_2)}{150} y[n-1] + \frac{(P_2 - D_1)}{140} y[n-2] - \frac{D_2}{130} y[n-4] - \frac{(M_2 - D_1)}{150} y[n-5] = \\ = \frac{M_1}{20} x[n] + \frac{(P_3 - D_2)}{10} x[n-1] - \frac{(M_2 - M_1)}{20} x[n-2] - \frac{P_4}{20} x[n-3] + \frac{D_2}{30} x[n-4] - \frac{M_2}{20} x[n-5] \end{aligned}$$

$D_1 D_2$ - дата вашого народження (наприклад, 23 - $D_1=2$, $D_2=3$);

$M_1 M_2$ - місяць вашого народження (наприклад, 05 - $M_1=0$, $M_2=5$);

$P_1 P_2 P_3 P_4$ - рік вашого народження (наприклад, 2003 - $P_1=2$, $P_2=0$, $P_3=0$, $P_4=3$).

В програмі задати вектори a та b коефіцієнтів рекурсивної та нерекурсивної частини ЛДС.

$$a = [1, (D_1 + D_2)/150, (P_2 - D_1)/140, 0, -D_2/130, -(M_2 - D_1)/150]$$

$$b = [M_1/20, (P_3 - D_2)/10, -(M_2 - M_1)/20, -P_4/20, D_2/30, -M_2/20]$$

2. Сформувати відліки синусоїдального сигналу частоти 10 Гц тривалістю 1 с амплітуди 1 В, дискретизованого з частотою 256 Гц. Розрахувати реакцію системи на отриманий сигнал (функція **lfilter**) для двох випадків (рис. 3.1):

2.1. нульові початкові умови;

2.2. випадкові початкові умови (скористатися функцією **rand**).

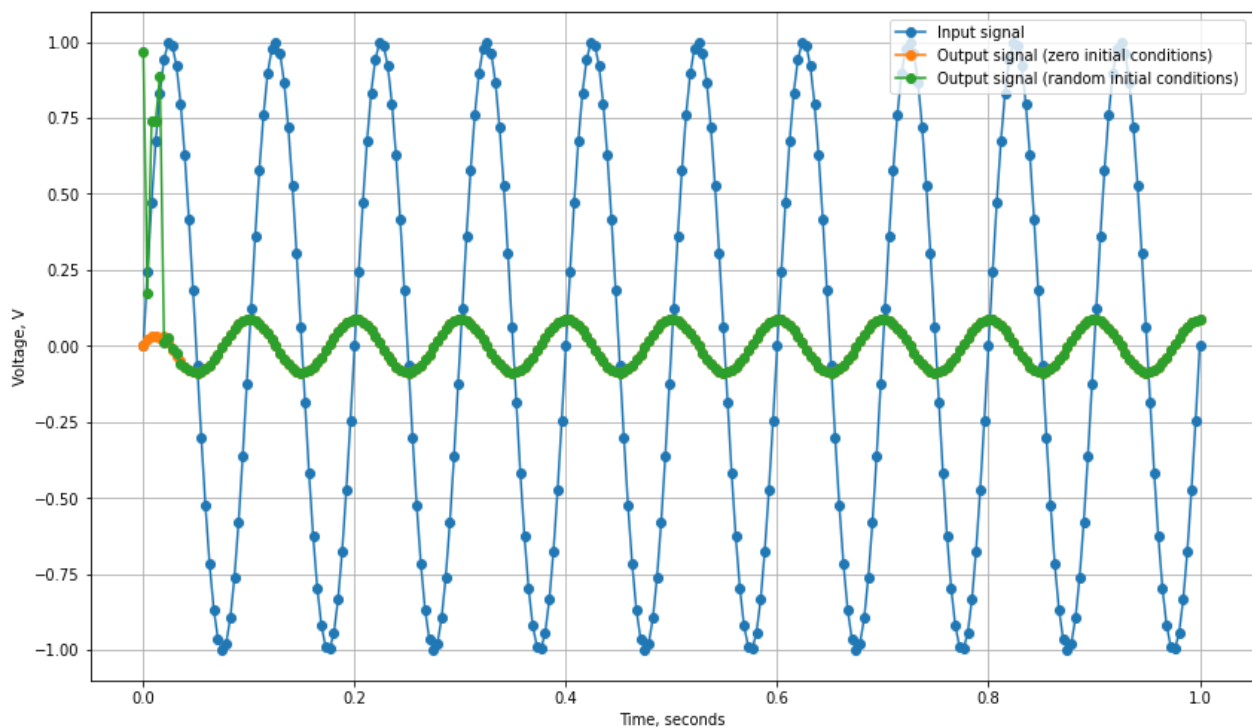


Рис. 3.1. Реакція системи на синусоїдальний сигнал частотою 10 Гц тривалістю 1 с з амплітудою 1 В

Для пунктів 2.1 та 2.2 побудувати графіки вхідного та вихідного сигналів в одному вікні, позначивши точки графіку, що відповідають відлікам, та обвідні графіків. А також побудувати графіки в окремому вікні за перші 100 мс вхідного та вихідного сигналу (рис. 3.2). Зробити висновки щодо вигляду вихідного сигналу відносно вхідного (форма, амплітуда, спотворення, підсилення).

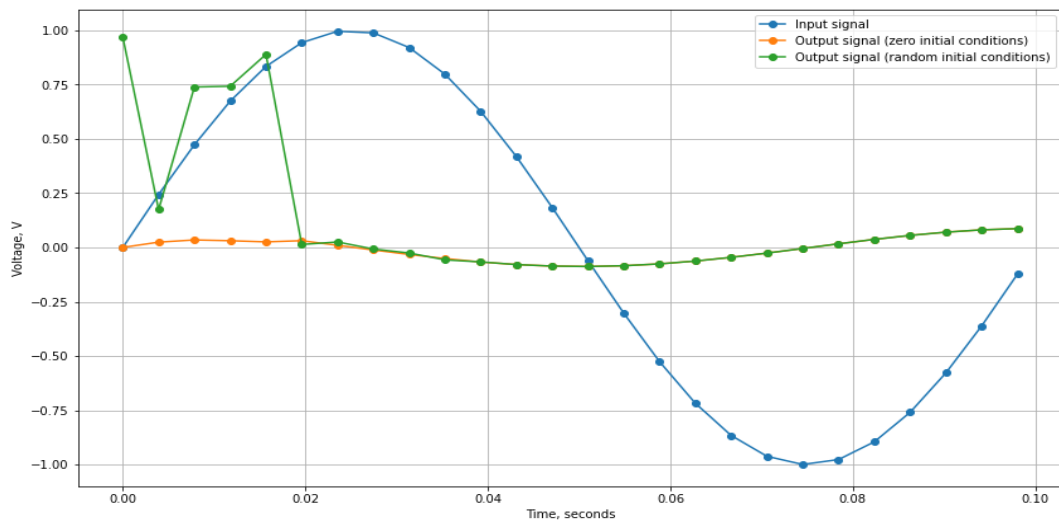


Рис.3.2. Перші 100 мс вхідного та вихідного сигналів

3. Написати програму для визначення коефіцієнта передачі напруги ЛДС на частоті 10 Гц та різниці фаз між вихідним і вхідним сигналом.

4. Сформувати два синусоїдальних сигнали частоти 3 та 20 Гц тривалістю 1 с. Проілюструвати властивість адитивності системи (рис. 3.3), визначивши реакцію системи спочатку на кожний з сигналів окремо, а потім на суму цих сигналів. Проілюструвати властивість однорідності системи (рис. 3.4). Навести необхідні графіки.

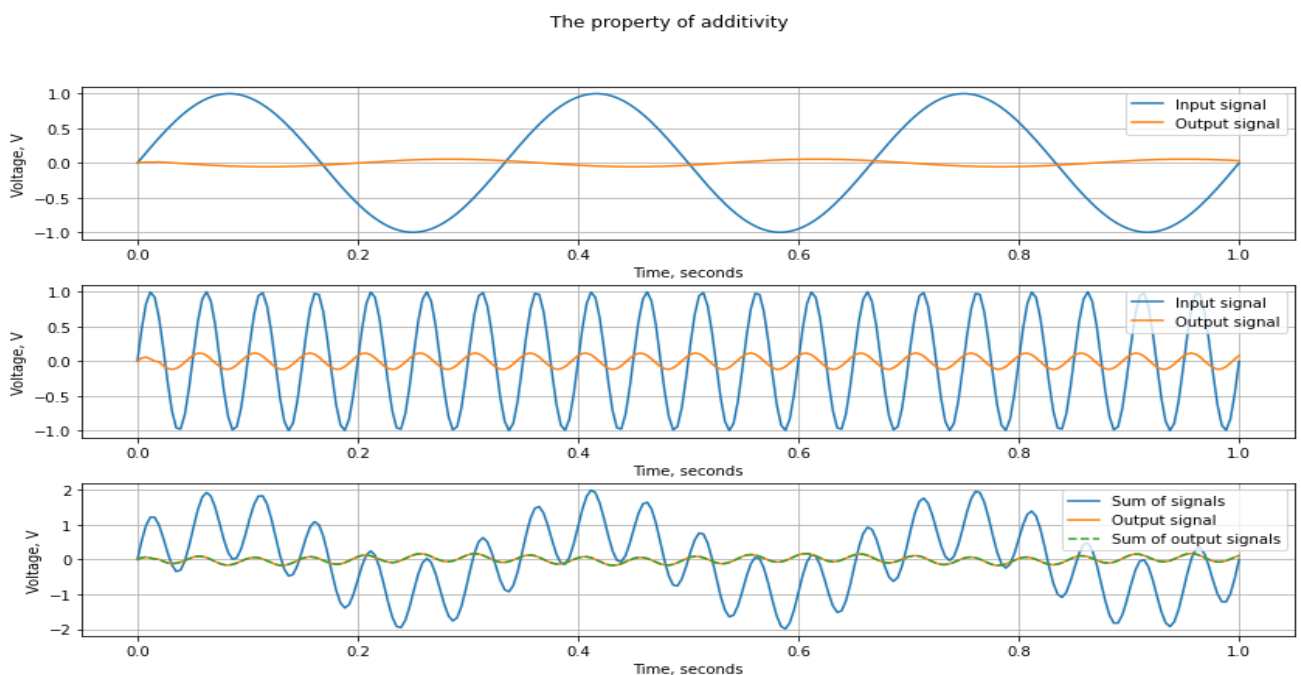


Рис.3.3. Ілюстрація властивості адитивності системи

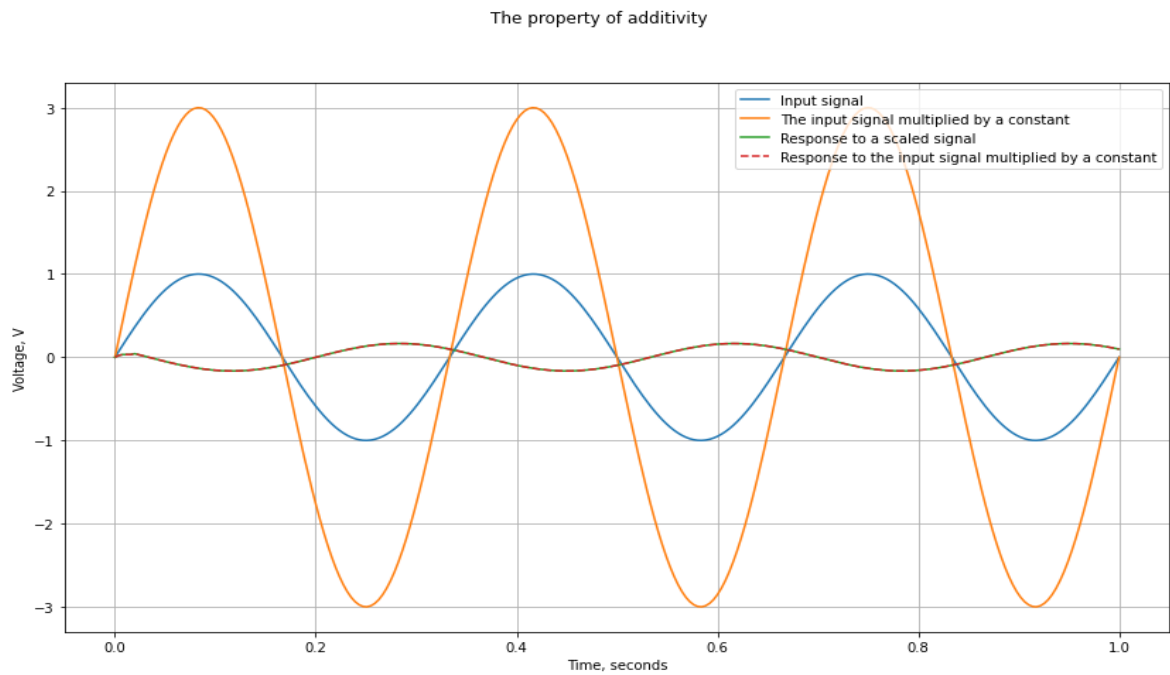


Рис.3.4. Ілюстрація властивості однорідності системи

5. Розрахувати за допомогою функції **lfilter** перші 30 відліків імпульсної характеристики системи, подавши на вхід системи одиничний імпульс (за нульових початкових умов), використовувати функцію **unit_impulse**. Побудувати графіки вхідного та вихідного сигналу (функція **stem**) (рис. 3.5).

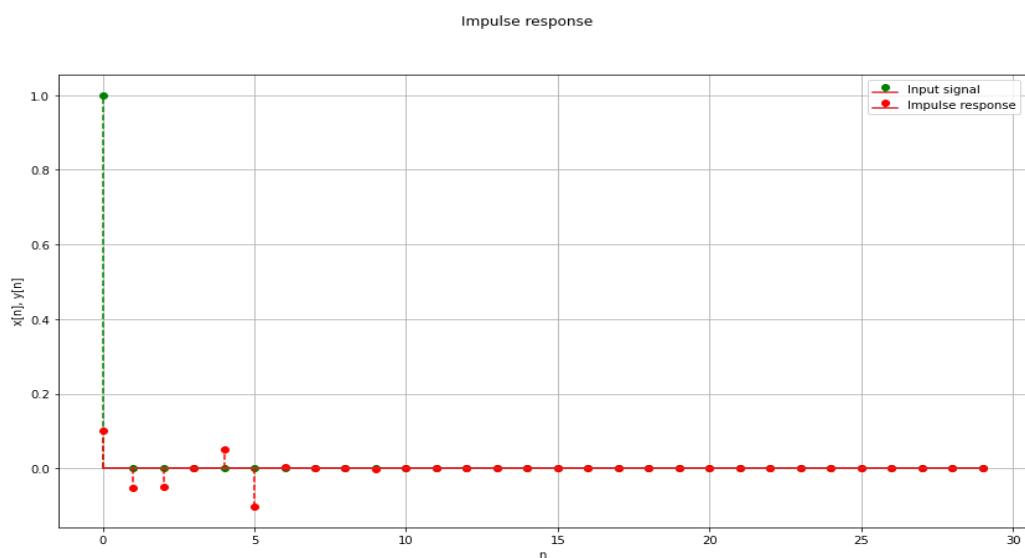


Рис.3.5. Перші 30 відліків імпульсної характеристики системи (отримані за допомогою функції lfilter)

6. Створити систему за допомогою коефіцієнтів чисельника та знаменника передавальної функції з використанням функції **TransferFunction**. Розрахувати 30 відліків імпульсної характеристики системи, використовуючи функцію **dimpulse**. Порівняти результати з результатами п. 5, побудувати графіки, зробити висновки.

*Розрахувати 100 відліків імпульсної характеристики, порівняти з раніше отриманими, зробити висновки.

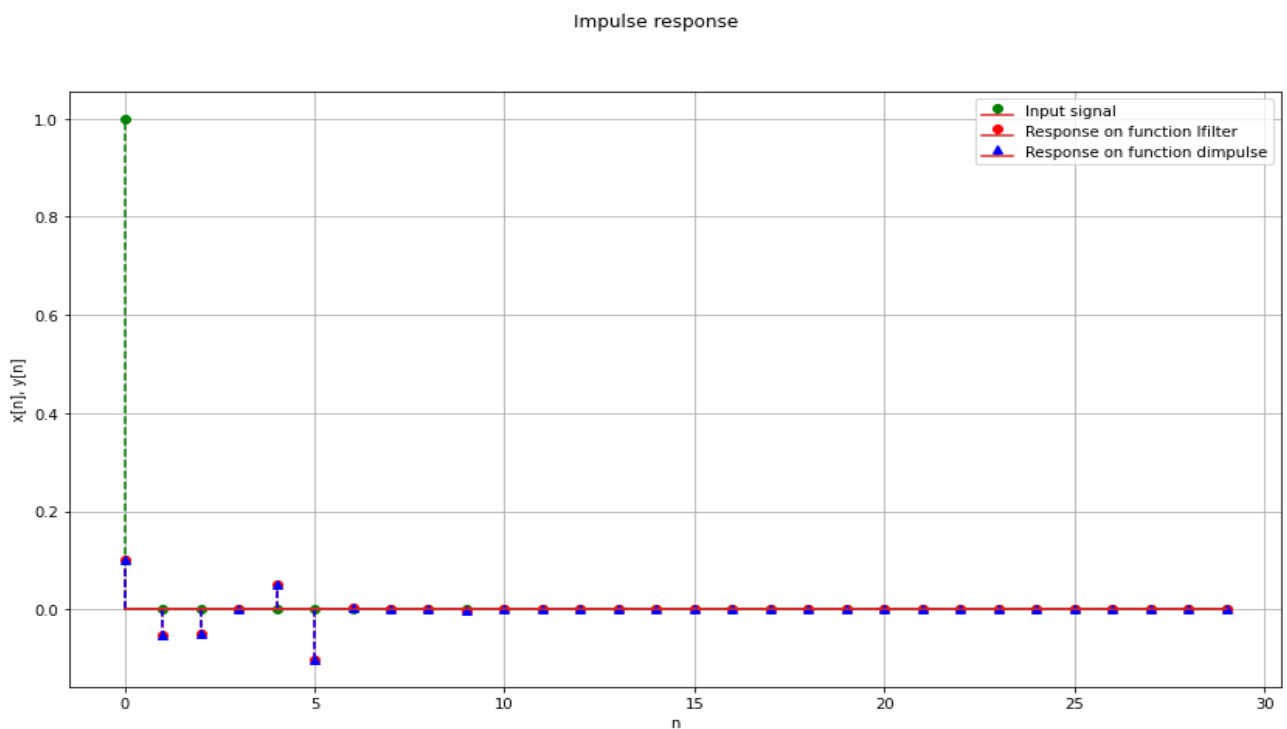


Рис.3.6. Перші 30 відліків імпульсної характеристики системи (отримані за допомогою функції **dimpulse**)

Моделювання роботи ЛДС з використанням рівняння згортки

7. Розрахувати реакцію системи на сигнал з п. 2.1 з використанням функції розрахунку згортки **convolve**. Побудувати графіки вхідного та вихідного сигналу, аналогічні п. 2.1 (з нульовими початковими умовами) (рис.3.7). Всі отримані в п. 7 результати порівняти з п. 2.1. Зробити висновки.

8*. Відновити імпульсну характеристику ЛДС за відомими реакціями та вхідн сигналом зм використанням результатів п. 6. Зробити висновки.

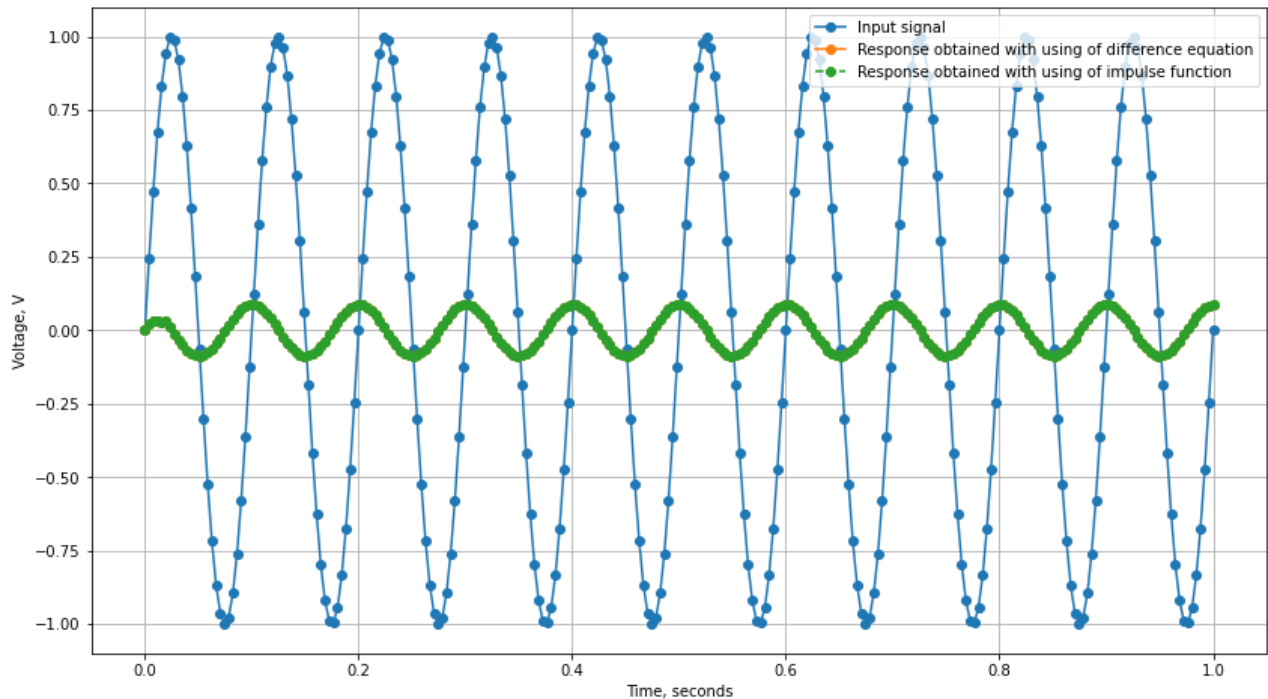


Рис.3.7. Реакція системи, отримана за допомогою функції обчислення згортки

Моделювання роботи ЛДС в частотній області

9. Обчислити комплексну частотну характеристику системи з використанням функції **freqz**. Розрахувати 100 значень КЧХ для частоти дискретизації 256 Гц.

10. Розрахувати та побудувати АЧХ та ФЧХ системи за обчисленою у п. 9 комплексною частотною характеристикою (рис. 3.8). Зробити висновки щодо характеру зміни модуля коефіцієнта передачі системи зі збільшенням частоти. Зробити висновки щодо величини коефіцієнта передачі системи на різних частотах. Визначити програмно діапазони частот, на яких система підсилює сигнал (записати у висновках). Візуально пересвідчитись у правильності визначення коефіцієнту передачі і фазового зміщення, які розраховані у п. 3.

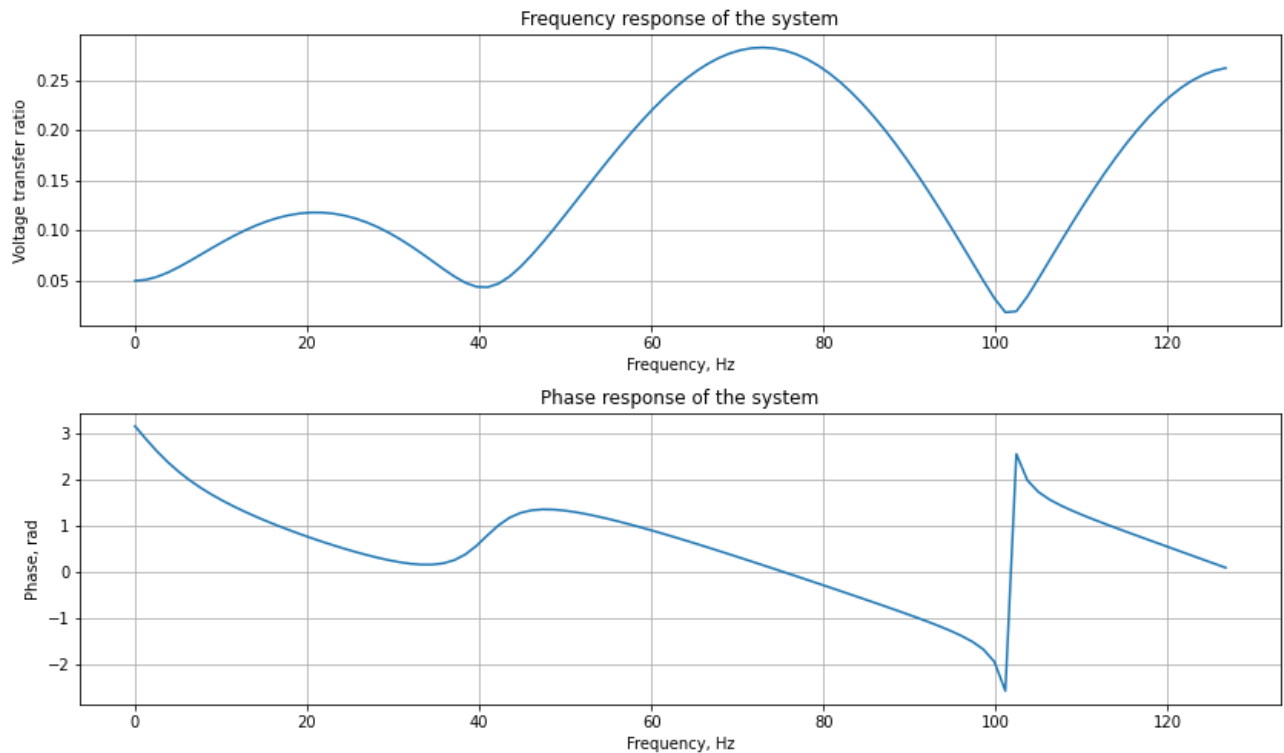


Рис.3.8. АЧХ та ФЧХ системи

11 Побудувати функцію, яка визначає значення АЧХ та ФЧХ системи на довільній частоті. Перевірити за допомогою отриманої функції правильність розрахунків з п. 2.1, беручи до уваги, що у п.2.1 досліджувався синусоїдальний сигнал з частотою 10 Гц. Проілюструвати роботу функції для цього сигналу.

12. Розрахувати реакцію ЛДС на послідовність прямокутних імпульсів зі шпаруватістю 30 % (рис. 3.9). Побудувати графіки вхідного та вихідного сигналів, зробити висновки щодо спотворення вихідного сигналу відносно вхідного.

13*. Розрахувати реакцію ЛДС на вхідний сигнал виміряної раніше власної ЕКГ тривалістю 5 секунд. Побудувати графіки вхідного та вихідного сигналів (рис.3.10).

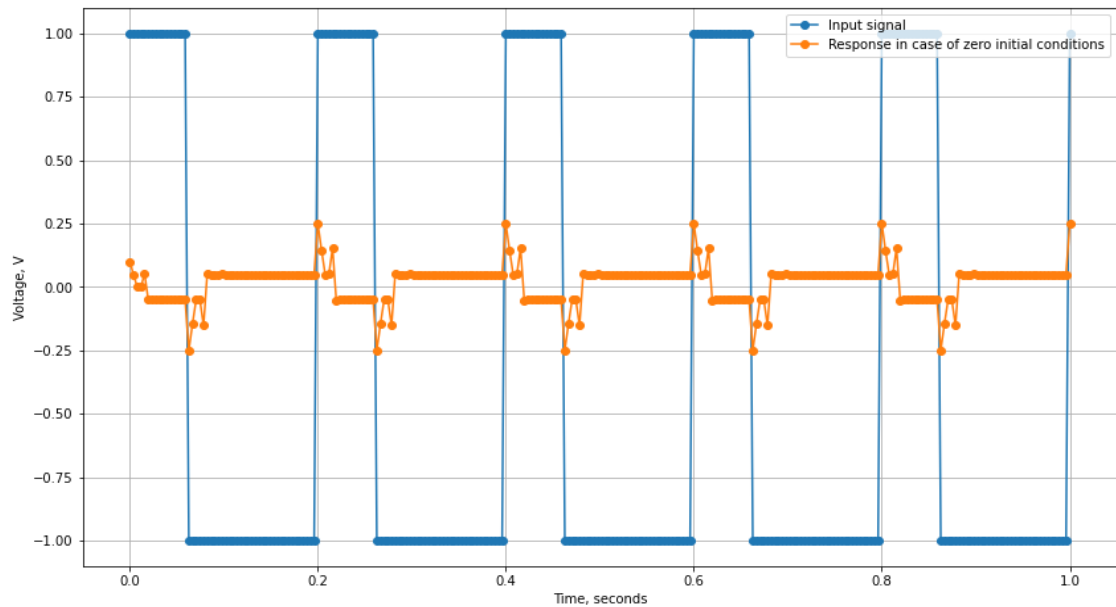


Рис.3.9. Реакція системи на послідовність прямокутних імпульсів зі шпаруватістю 30%

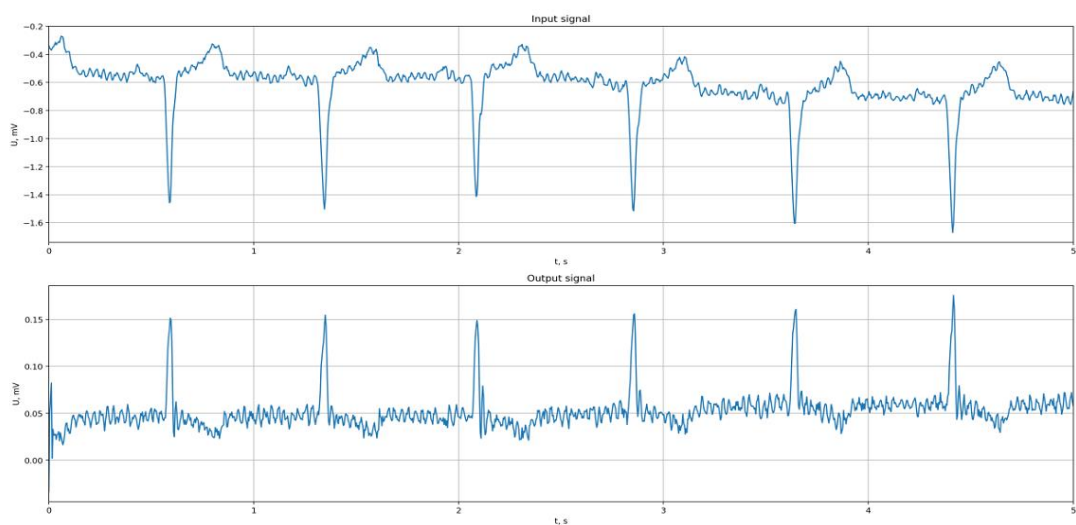


Рис.3.10. Реакція системи на вхідний ЕКГ-сигнал тривалістю 5 секунд

14*. Розрахувати реакцію ЛДС на записаний попередньо звуковий сигнал (рис.3.11). Прослухати вихідний сигнал. Зробити висновки щодо спотворень, які вносить до сигналів система.

15*. Побудувати реакцію ЛДС на сигнал з акселерометра (рис.3.12). Зробити висновки щодо спотворень, які вносить до сигналу система.

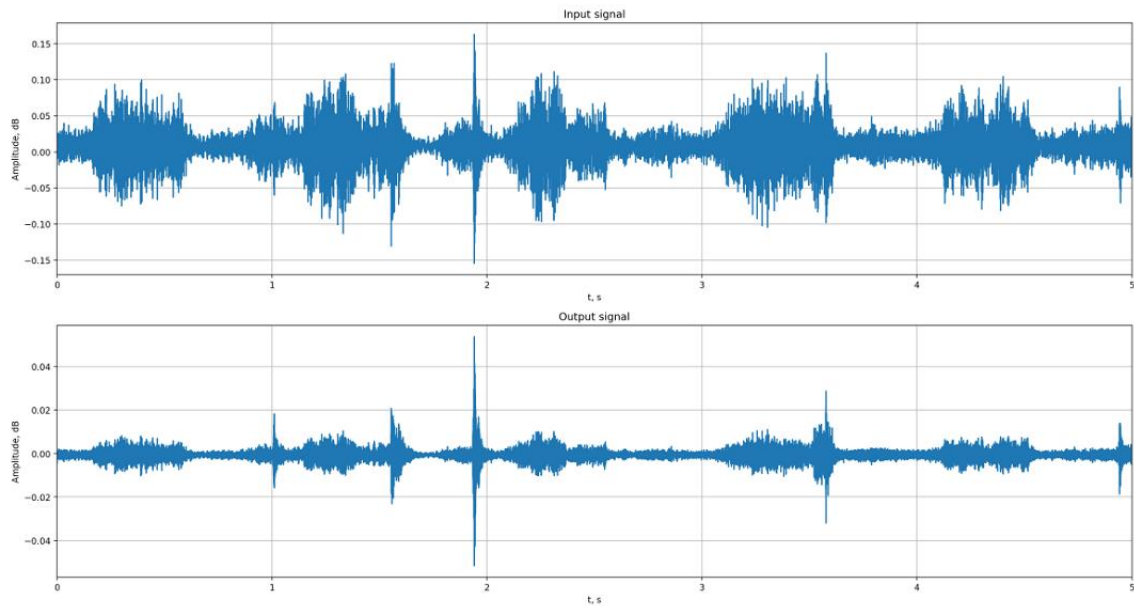


Рис. 3.11. Реакція системи на звуковий сигнал

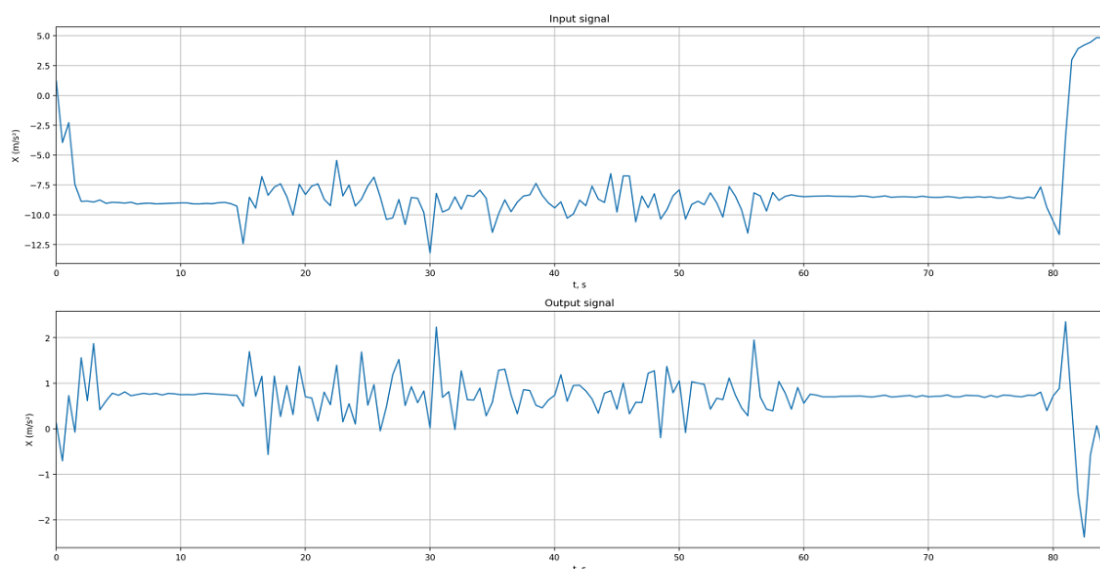


Рис.3.12. Реакція системи на сигнал з акселерометра

Контрольні запитання:

1. Дайте визначення лінійних стаціонарних дискретних систем, їх типів та властивостей.
2. Що таке АЧХ та ФЧХ лінійної стаціонарної дискретної системи?
3. Наведіть способи, за допомогою яких можна описати ЛДС.
4. Які дискретні системи називаються лінійними? В чому полягають властивості стаціонарності, детермінованості, стійкості систем?

5. Що таке імпульсна характеристика лінійних дискретних систем, як її отримати?
6. Як розраховується згортка сигналів, які види згорток бувають? Як, маючи імпульсну характеристику системи та вхідний сигнал, розрахувати відліки вихідного сигналу?
7. Які сигнали для лінійної дискретної системи пов'язує між собою різницеве рівняння? Що таке початкові умови і якими вони є для детермінованих лінійних дискретних систем?

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 4

СПЕКТРАЛЬНИЙ АНАЛІЗ СИГНАЛІВ ЗА ПЕРЕТВОРЕННЯМ ФУР'Є

Мета роботи: дослідити зв'язок між часовими та спектральними характеристиками сигналів; набути навичок використання основних засобів спектрального аналізу сигналів за Фур'є у середовищі Python.

Основні теоретичні відомості

Будь-яку неперервну функцію $f(t)$, що описує фізичний сигнал, можна представити у вигляді зваженої суми більш простих складових функцій з набору $\{\psi_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$:

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \psi_n(t),$$

де a_n коефіцієнти розкладу.

У випадку, коли обраний дослідником набір функцій складає ортогональний базис, коефіцієнти a_n розкладу сигналу $f(t)$ у базисі $\{\psi_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$ отримуються як проекція сигналу $f(t)$ на відповідну базисну функцію:

$$a_n = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi_n^*(t) dt.$$

У випадку, коли для дослідника бажано отримати уяву про те, як можна скласти даний сигнал з гармонічних коливань, використовується розклад за тригонометричним базисом (рис. 4.1).

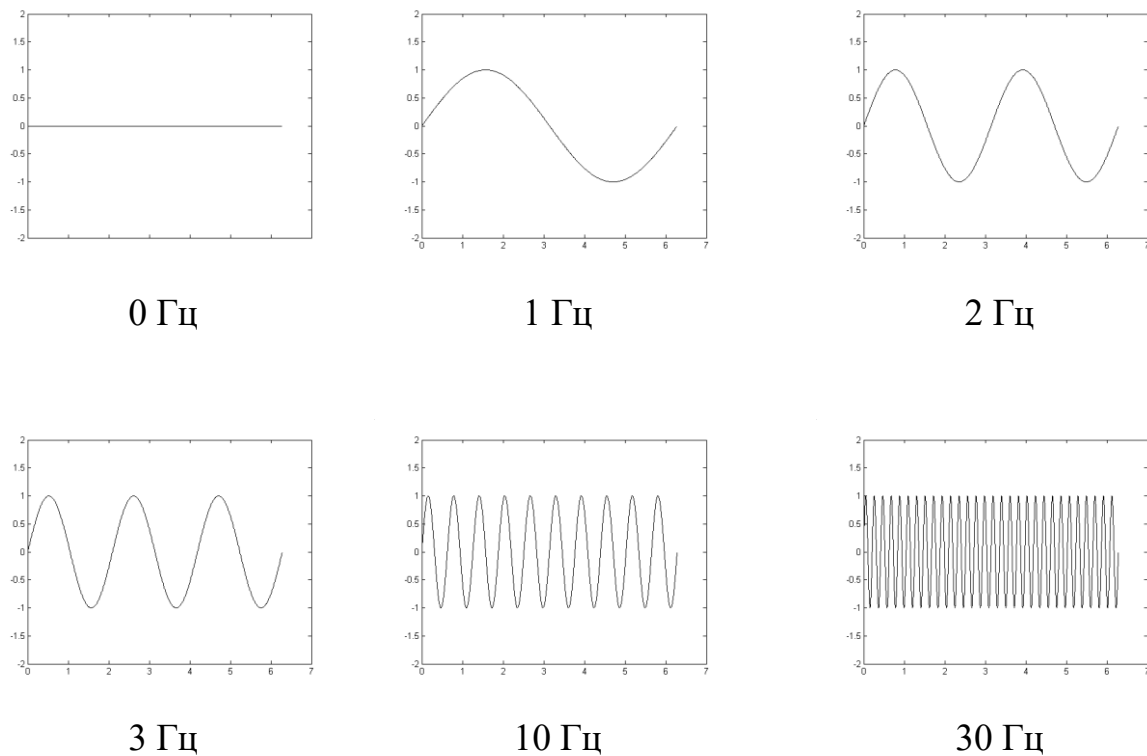


Рис.4.1 – Приклади базисних функцій ортогонального тригонометричного базису

Коефіцієнти розкладу сигналу у базисі Фур'є для неперервних періодичних сигналів можна визначити:

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cdot e^{-jn\omega_0 t} dt \quad (1)$$

Тут інтегрування ведеться за одним періодом, оскільки функції періодичні та нескінченні. Від'ємний показник степеню відповідає комплексному спряженню. Вираз (1) називають *прямим перетворенням Фур'є неперервного періодичного сигналу*.

Це перетворення дає представлення сигналу $x(t)$ у вигляді коефіцієнтів його розкладу у базисі Фур'є. Набір коефіцієнтів розкладу сигналу у базисі Фур'є є проєкціями вектора, який описує сигнал, на вектори базису.

Загальний вираз розкладу сигналу у ряд Фур'є, представлений у комплексній формі:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n| e^{j\varphi_n} e^{jn\omega_0 t} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n| e^{j(n\omega_0 t + \varphi_n)}. \quad (2)$$

Це показникова форма ряду Фур'є для неперервної періодичної функції $x(t)$.

Тригонометрична форма ряду Фур'є:

$$x(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} 2|c_n| \cos(n\omega_0 t + \varphi_n). \quad (3)$$

Видно, що в результаті розкладу у ряд Фур'є неперервний періодичний сигнал $x(t)$ представлений сумою складових вигляду $A_n \cos(n\omega_0 t + \varphi_n)$, кожна з яких є косинусоїдальним коливанням з амплітудою A_n , частотою $n\omega_0$ та початковою фазою φ_n . Частоти елементарних коливань, з яких складено періодичну функцію $x(t)$, утворюють *гармонічну послідовність*, а саме: частоти всіх складових кратні основній частоті $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$, де T_0 – період

косинусоїдального коливання найменшої (основної) частоти. Окремі складові називаються *гармоніками*. Частоти гармонік можна розрахувати за допомогою виразу:

$$\omega_n = n\omega_0 = n \frac{2\pi}{T_0}.$$

Період T_0 складової розкладу, яка має частоту ω_0 , дорівнює періоду того періодичного коливання $x(t)$, яке ми хочемо розкласти на гармоніки. Всі інші складові розкладу матимуть періоди, які менші за період T_0 в ціле число разів.

Доданок c_0 в розкладі можна розглядати як складову розкладу, частота якої нескінченно мала (дорівнює нулю). Він постійний протягом періоду T_0 , а отже описує постійну складову сигналу $x(t)$, яка не може бути представлена одним з гармонічних коливань. Величина c_0 дорівнює середньому значенню сигналу за один період [1, 4-5].

Порядок роботи

Як відомо, спектри всіх дискретних сигналів періодичні, а амплітудні спектри є парними функціями частоти. Засобами Python (функція **fft**) можна розрахувати дві половини одного періоду спектру, які є дзеркальними копіями одна одної відносно частоти Найквіста.

Через це для того, щоб мати уяву про особливості спектру сигналу, на всіх графіках амплітудних спектрів достатньо і необхідно виводити **лише половину періоду спектру**, оскільки вона повністю описує амплітудний спектр. Для того, щоб мати уяву про дійсні значення амплітуд гармонік, значення відліків половини спектру треба **поділити на половину кількості відліків**.

Для правильного представлення результатів, на графіках, що будуть включені ц протокол, вгорі фігури побудувати графік сигналу у часі, знизу – графік амплітудного спектру, ще нижче (за потреби) – графік фазового спектру. Обов'язково підписувати всі вісі та позначати одиниці вимірювання.

1. Сформувати вектор відліків часу тривалістю 1 с для частоти дискретизації 128 Гц. Сформувати сигнали ділянки синусоїди частотою 2, 2,5, 40, 100, 600 Гц. Врахувати необхідність дотримання періодичності дискретного сигналу для отримання адекватного спектру. Побудувати за допомогою функції **plot** графіки сигналів та за допомогою функції **stem** їх амплітудні спектри (рис.4.2-4.6). Зробити висновки щодо відповідності отриманих спектрів тим, які повинні бути отримані згідно теоретичних міркувань.

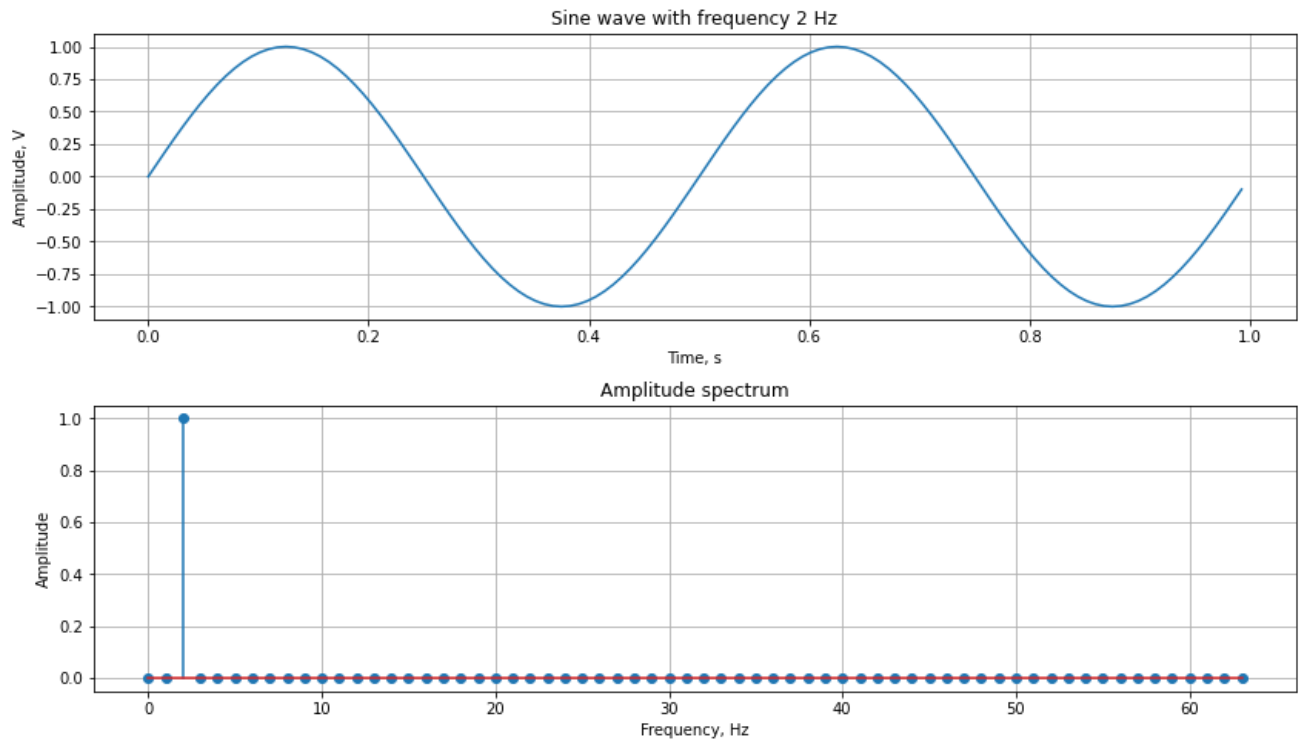


Рис.4.2. Сигнал синусоїди з частотою 2 Гц та його амплітудний спектр

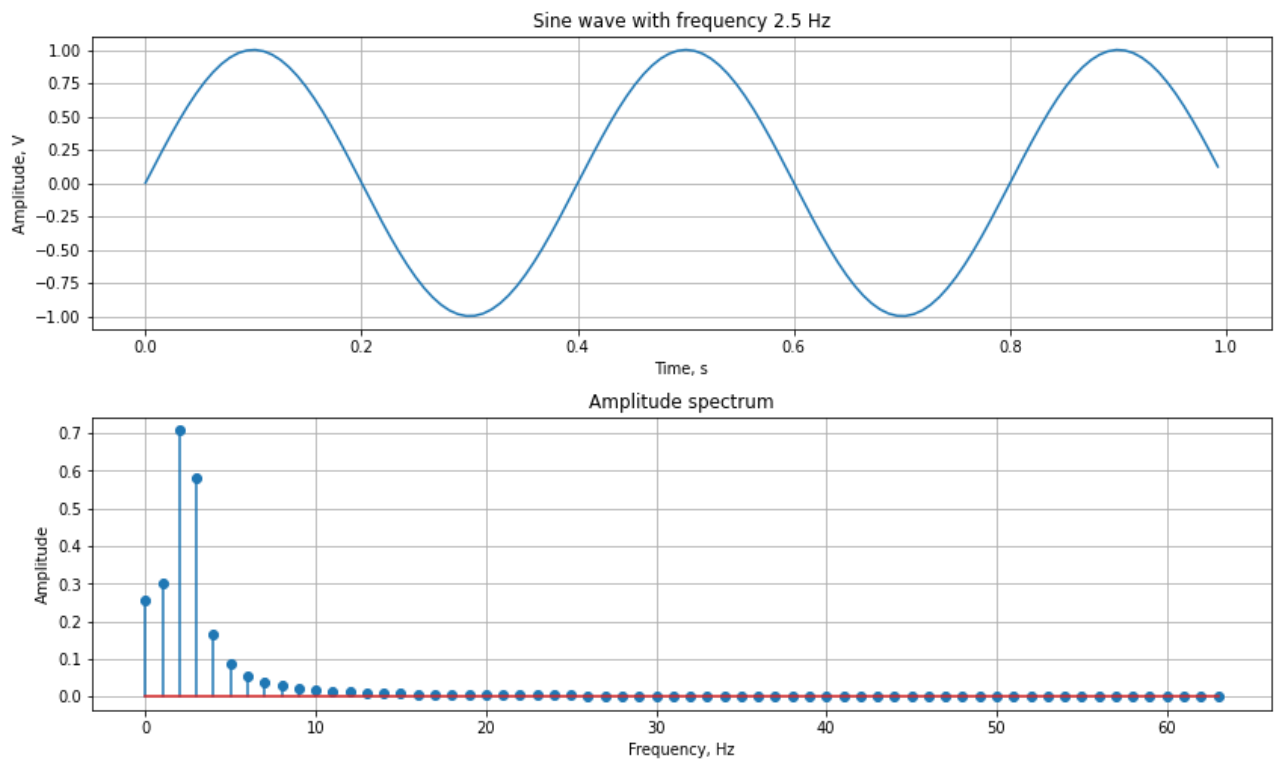


Рис.4.3. Сигнал синусоїди з частотою 2,5 Гц та його амплітудний спектр

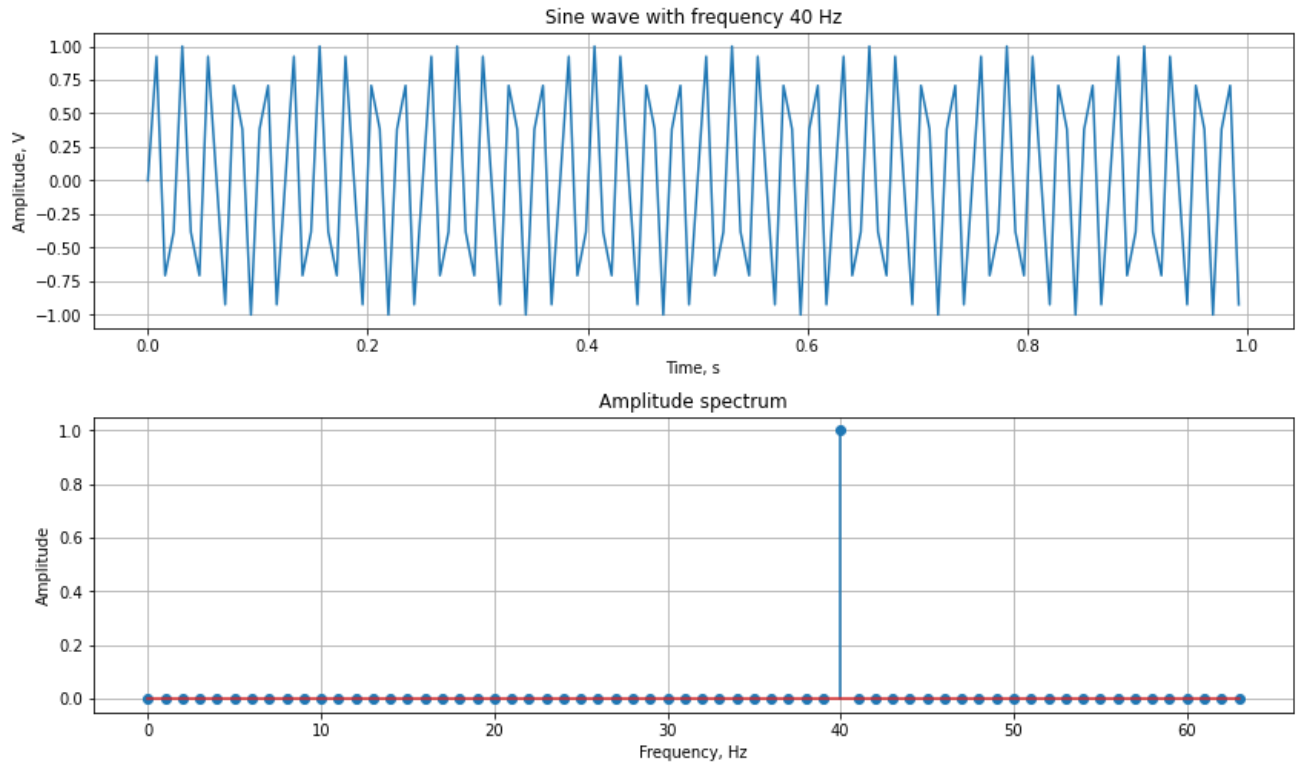


Рис.4.4. Сигнал синусоїди з частотою 40 Гц та його амплітудний спектр

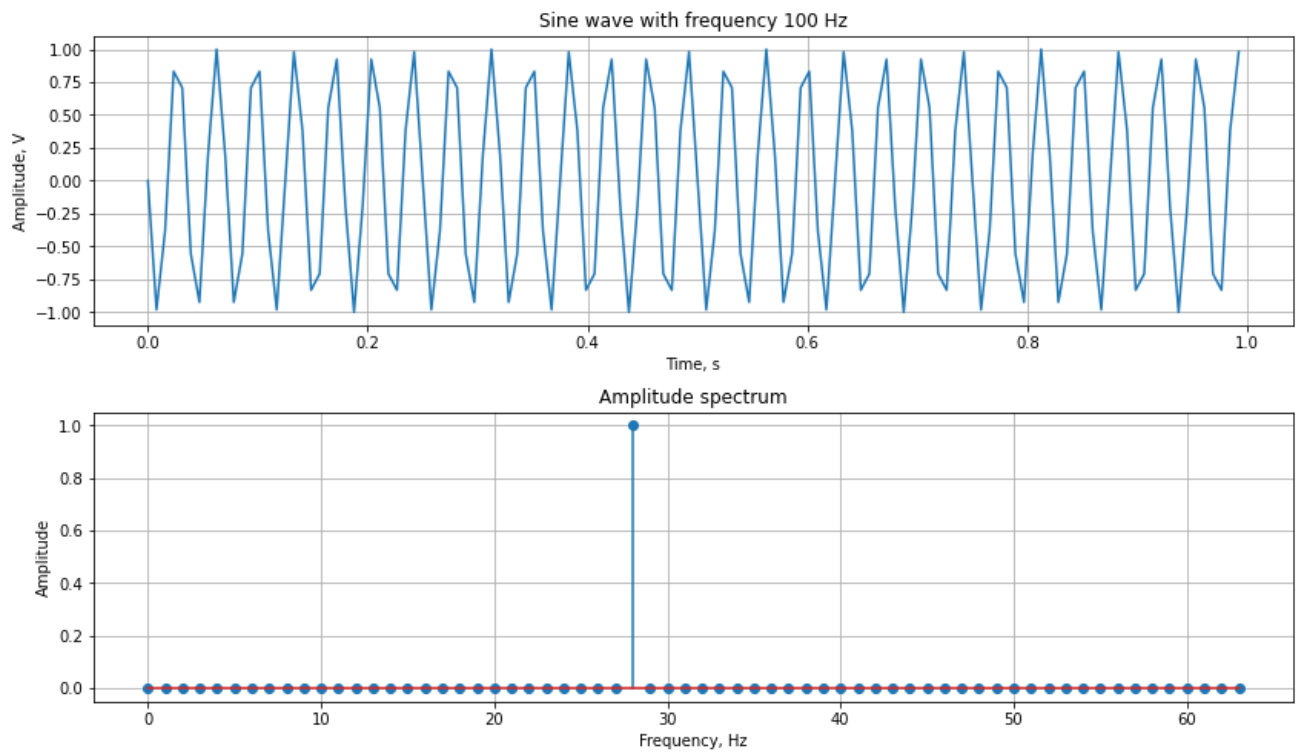


Рис.4.5. Сигнал синусоїди з частотою 100 Гц та його амплітудний спектр

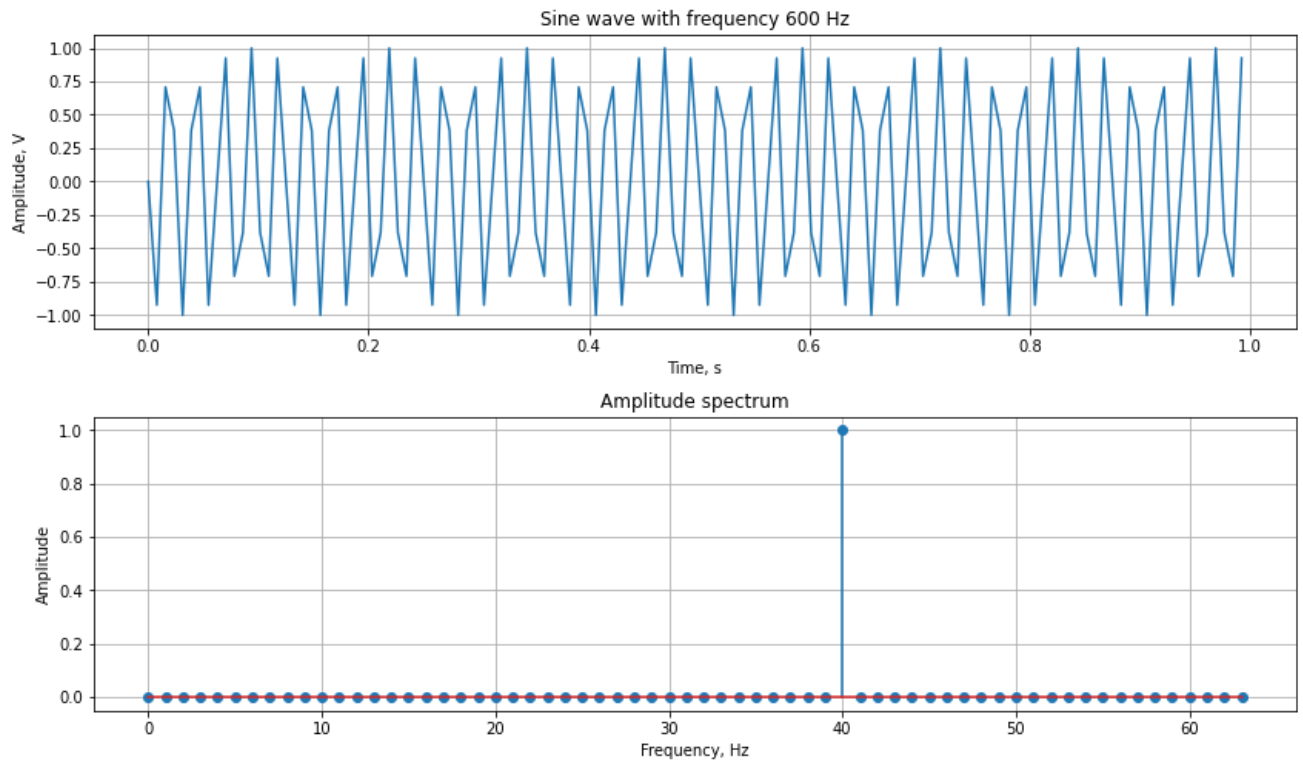


Рис.4.6. Сигнал синусоїди з частотою 600 Гц та його амплітудний спектр

2. Сформувати вектор відліків часу тривалістю 10 с для частоти дискретизації 256 Гц. Сформувати сигнали ділянки синусоїди частотою 10 Гц (S_1) та 100 Гц (S_2). Сформувати на їх основі три сигнали:

- 2.1. сигнал (тривалістю 10 с), що дорівнює сумі цих двох сигналів;
- 2.2. сигнал, який спочатку містить сигнал $2 \cdot S_1$, а потім сигнал $2 \cdot S_2$ (матиме тривалість 20 секунд);
- 2.3. сигнал, який спочатку містить сигнал $2 \cdot S_2$, а потім сигнал $2 \cdot S_1$ (матиме тривалість 20 секунд).

Побудувати графіки сигналів п. 2.1-2.3 (функція **plot**) та їх амплітудні спектри (функція **stem**) (рис.4.7-4.9). Зробити висновки щодо можливості розрізнити коливання, присутні у сигналі, за їх спектральним складом, а також щодо відповідності властивостей сигналів у часі та їх спектрів.

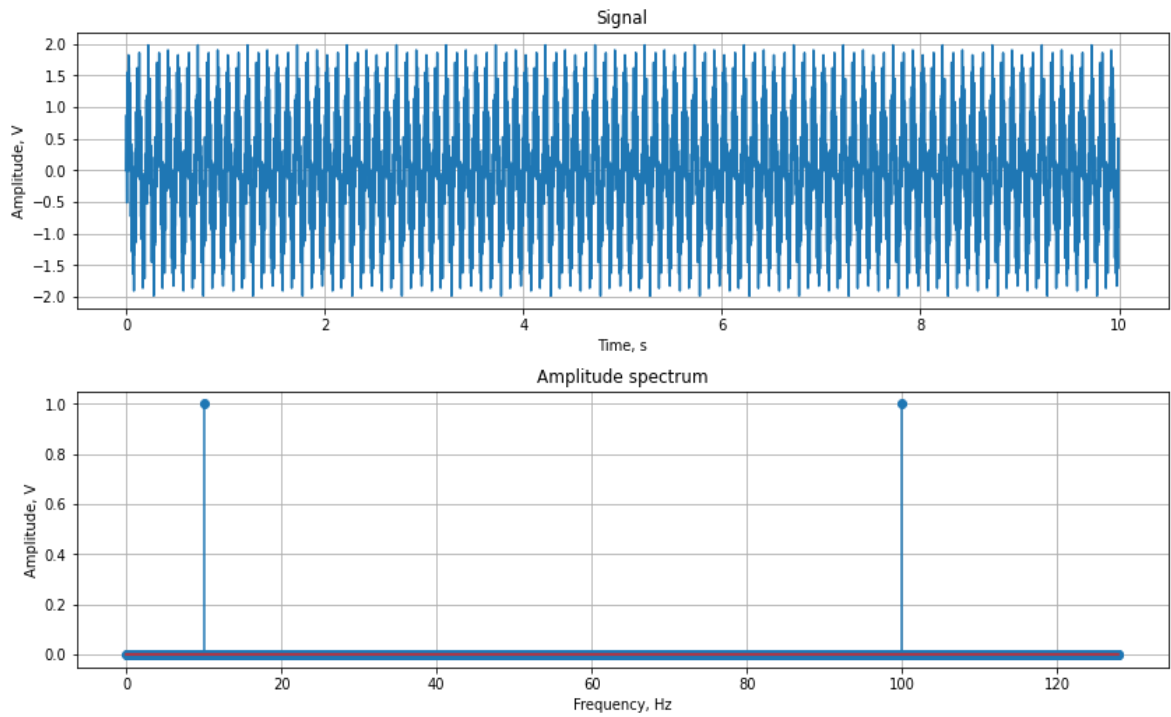


Рис.4.7. Сума двох синусоїд з частотами 10 і 100 Гц і їх амплітудний спектр

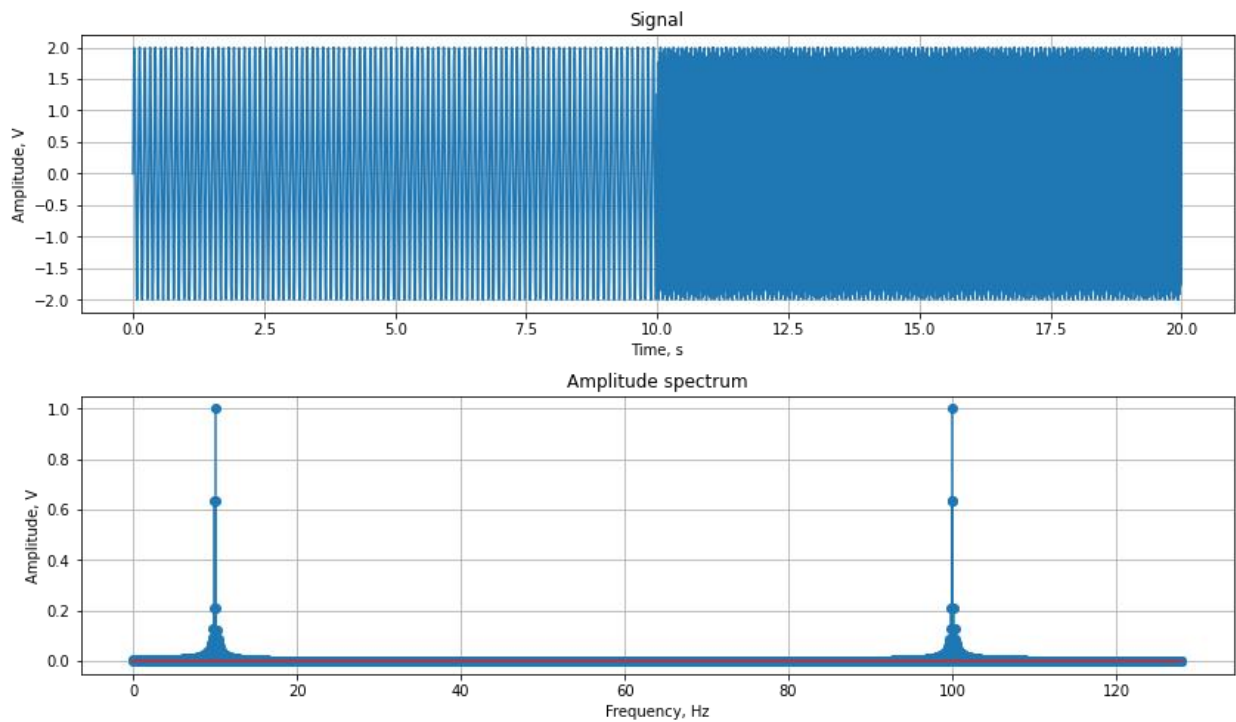


Рис.4.8. Сигнал двох синусоїд з частотами 10 та 100 Гц та їх амплітудний спектр

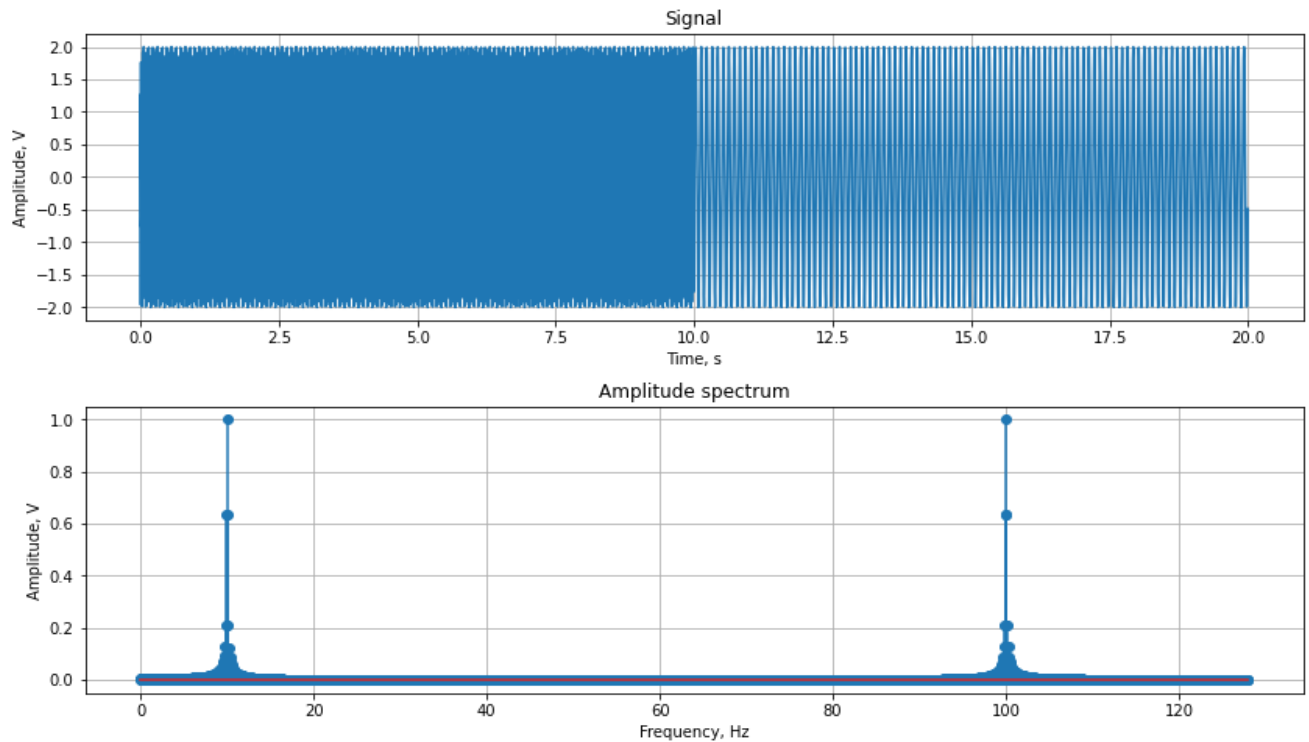


Рис.4.9. Сигнал двох синусоїд з частотами 100 та 10 Гц та їх амплітудний спектр

3. Сформувати вектор відліків часу тривалістю 3 с для частоти дискретизації 128 Гц. Сформувати сигнал ділянки синусоїди частотою 20 Гц. Створити розрив (вставити 10 нульових відліків замість відліків сигналу) в сигналі у момент часу 1,05 с. Отримати спектр сигналу. Перемістити розрив в момент часу 2 с, розрахувати спектр. Побудувати графіки двох сигналів з розривами та їх амплітудні спектри (рис.4.10, 4.11). Зробити висновки щодо того, чи можливо визначити наявність та точне розташування розриву в сигналі, аналізуючи спектр сигналу.

4. Сформувати вектор відліків часу тривалістю 3 с для частоти дискретизації 512 Гц. Сформувати сигнал послідовності прямокутних імпульсів з частотою 10 та 100 Гц. Побудувати за допомогою функції **plot** графіки сигналів та їх амплітудні спектри (рис. 4.12, 4.13), зробити висновки. Графіки будувати для таких частот, щоб було видно особливості спектру (вивести на графік частину спектру на нижніх частотах).

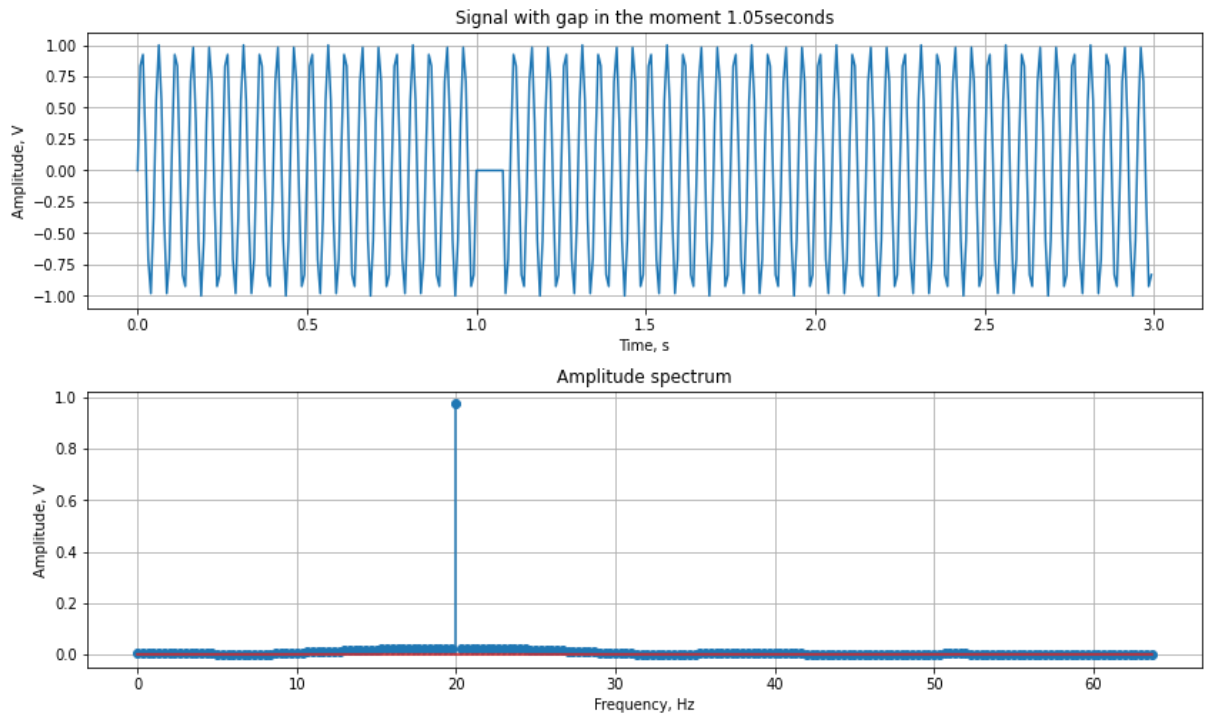


Рис.4.10. Сигнал синусоїди з розривом сигналу у момент часу 1,05 с та його амплітудний спектр

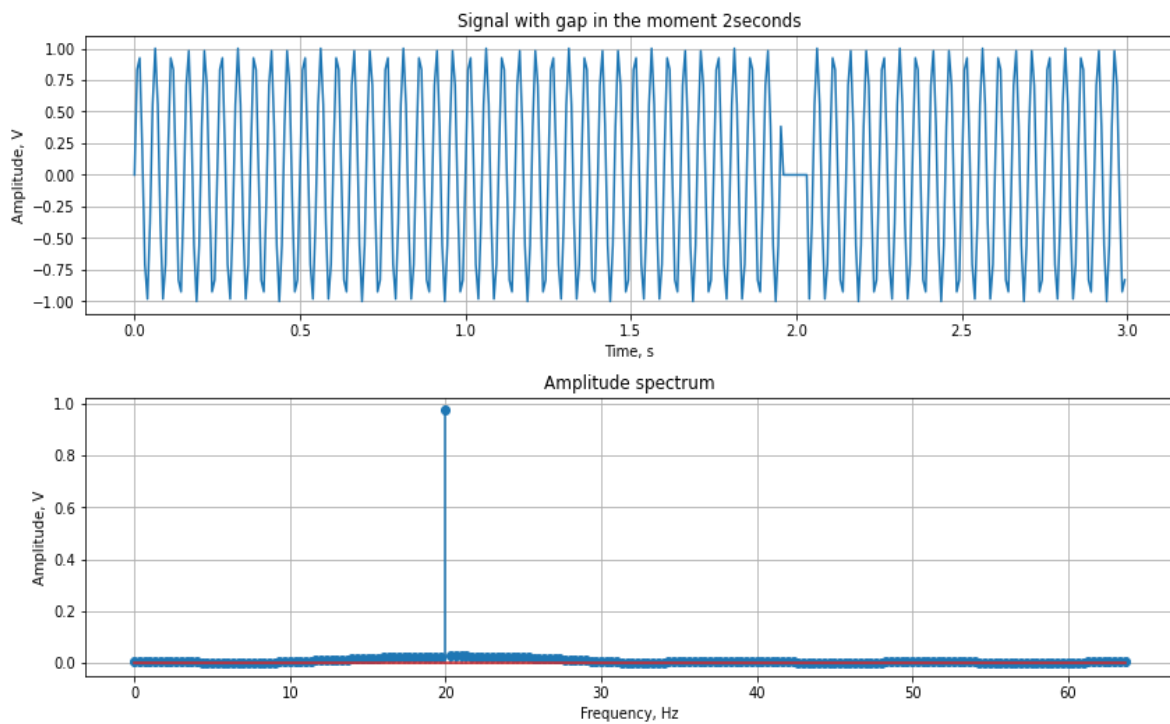


Рис.4.11. Сигнал синусоїди з розривом сигналу в момент часу 2 с та його амплітудний спектр

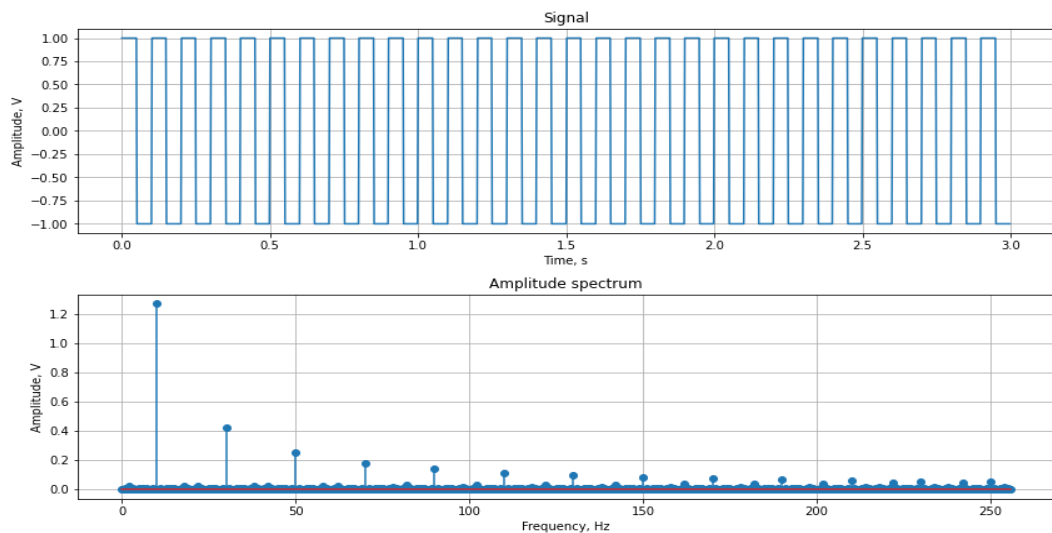


Рис.4.12. Послідовність прямокутних імпульсів з частотою 10 Гц та її амплітудний спектр

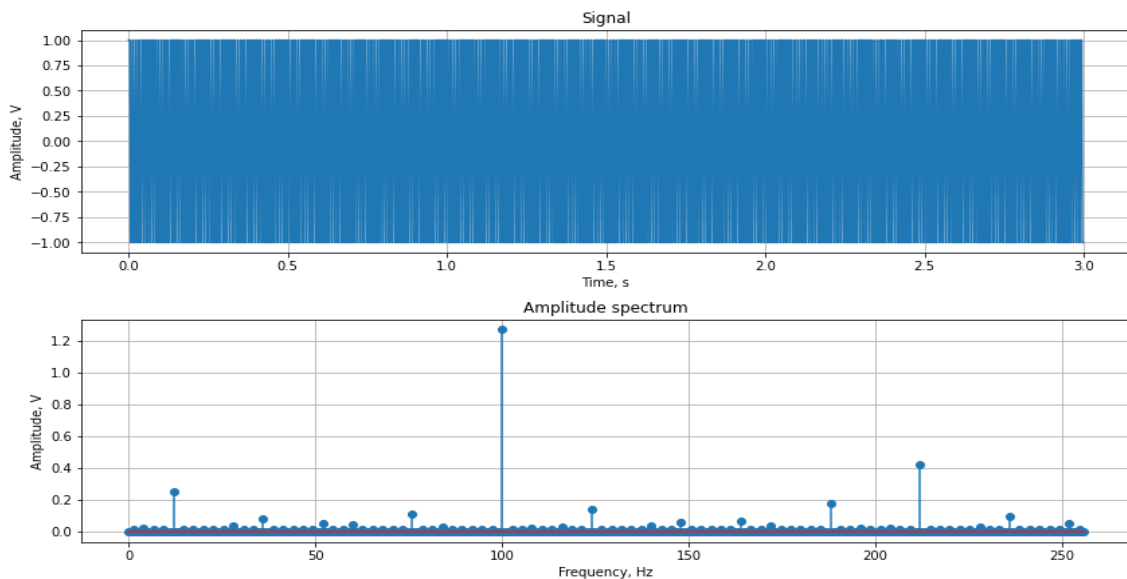


Рис.4.13. Послідовність прямокутних імпульсів з частотою 100 Гц та її амплітудний спектр

5. Сформувати вектор відліків часу тривалістю 30 с для частоти дискретизації 512 Гц. Сформувати сигнал одиночного прямокутного імпульсу для тривалості імпульсу 0,1, 1, 10 сек. (для величин зсуву відносно початку відліку часу 0 та 5 с). Побудувати за допомогою функції plot графіки цих 6 сигналів та їх амплітудні і фазові спектри (функція **angle**) (рис.4.14, 4.15), зробити висновки. Графіки будувати для таких частот, щоб показати особливості спектру.

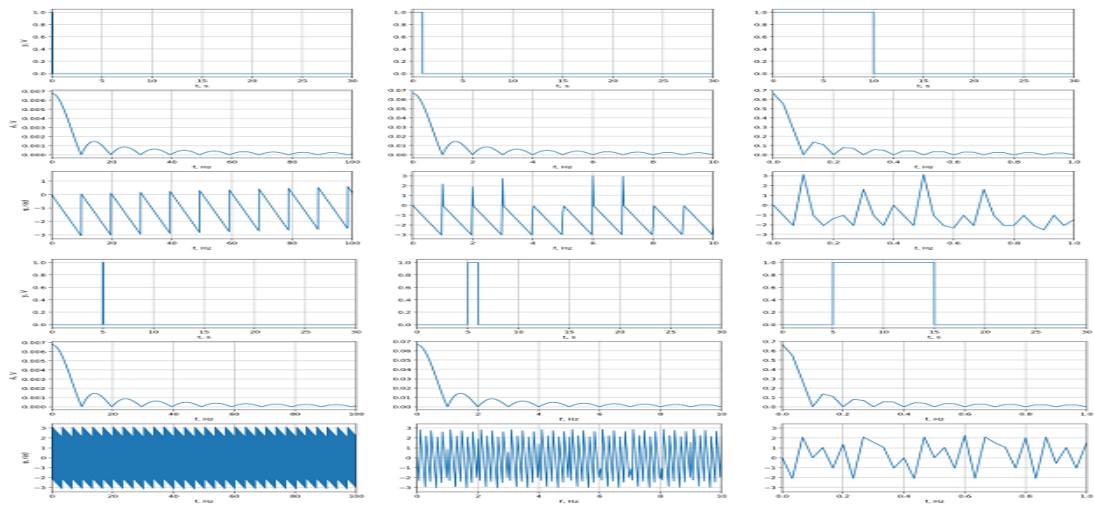


Рис. 4.14. Одиночні прямокутні імпульси тривалістю імпульсів 0,1, 1, 10 с та їх спектри

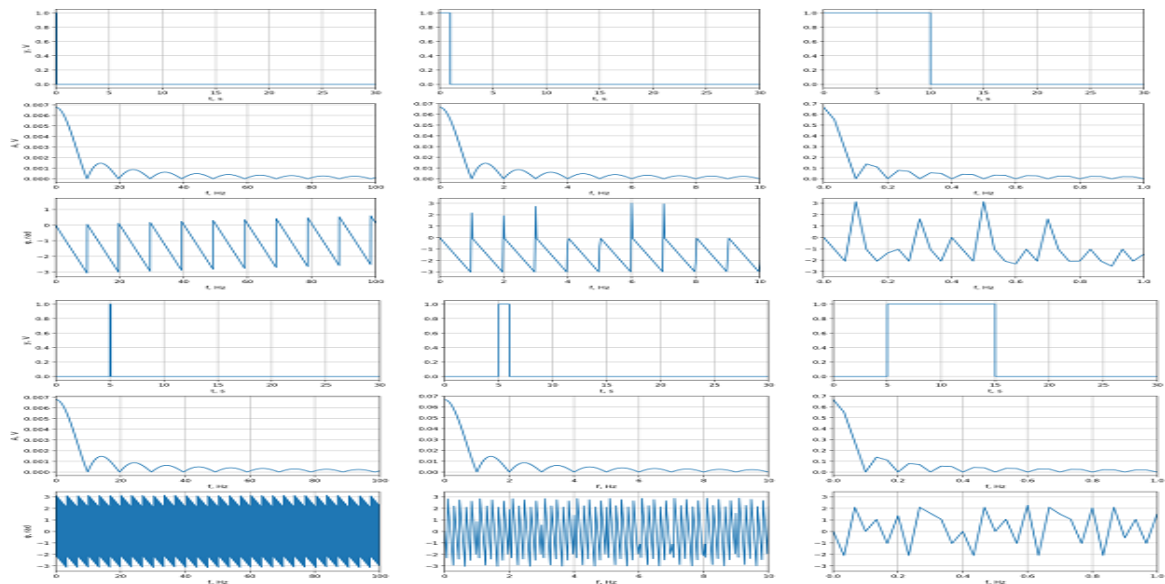


Рис. 4.15. Одиночні прямокутні імпульси з тривалістю імпульсів 0,1, 1, 10 с з часом зміщення 5 с та їх спектри

6. Сформувати випадковий сигнал тривалістю 10 с для частоти дискретизації 1000 Гц. Побудувати за допомогою функції **plot** графік сигналу та його амплітудний спектр (рис.4.16), зробити висновки.

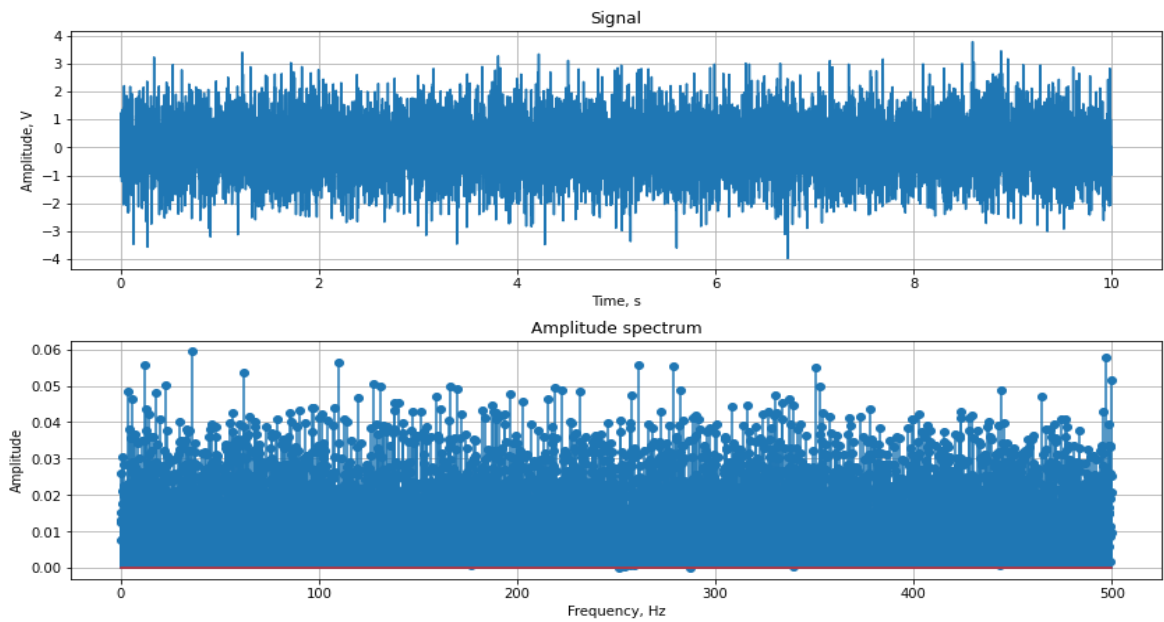


Рис.4.16. Випадковий сигнал тривалістю 10 с для частоти дискретизації 1000 Гц та його амплітудний спектр

7.1 Сформувати сигнал синусоїди частоти 20 Гц амплітуди 1 В та тривалості 0,5 с для частоти дискретизації 128 Гц. Додати до цього сигналу шумову складову амплітуди 10 В з нульовим середнім значенням (функція **randn**). Розрахувати амплітудний спектр даного зашумленого сигналу. Побудувати за допомогою функції **plot** графік сигналу та за допомогою функції **stem** його амплітудний спектр (Рис.4.17).

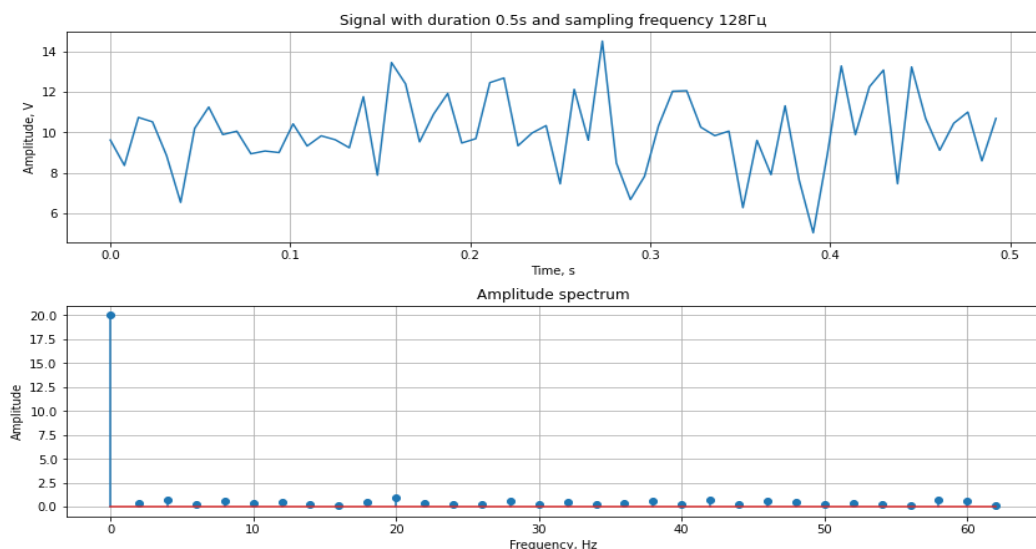


Рис.4.17. Синусоїда із шумовою складовою (тривалістю 0,5 с) та її амплітудний спектр

7.2 Збільшувати тривалість зашумленого сигналу (1, 10, 100, 1000 сек.), отримуючи для кожного сигналу його амплітудний спектр. Побудувати за допомогою функції **plot** графіки сигналів та за допомогою функції **stem** їх амплітудних спектрів (Рис.4.18-4.21), зробити висновки щодо впливу тривалості сигналу на роздільну здатність в частотній області та на якість визначення наявності синусоїдального коливання в шумі за спектральними характеристиками.

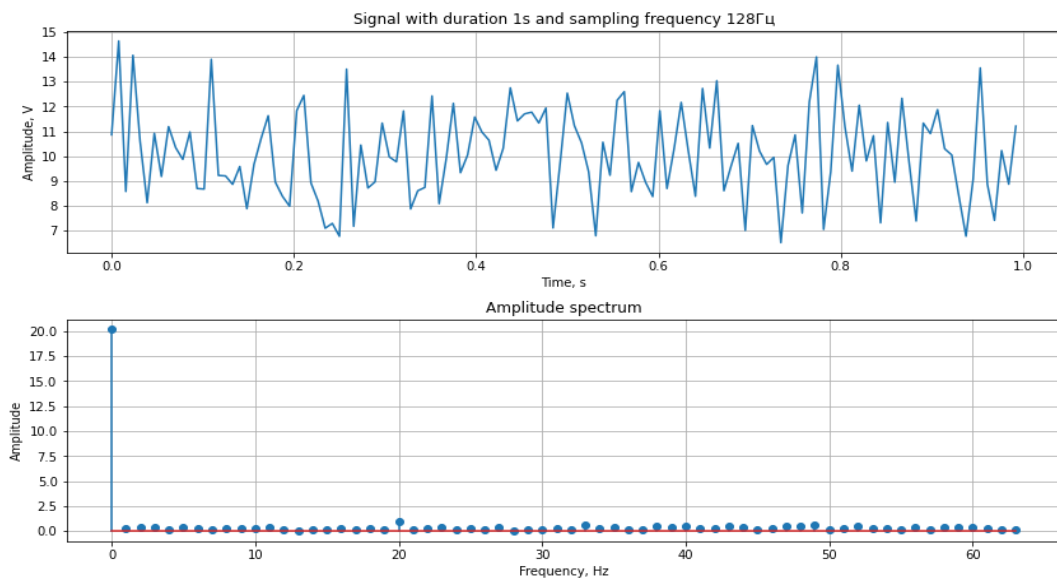


Рис.4.18. Синусоїда із шумовою складовою (тривалістю 1 с) та її амплітудний спектр

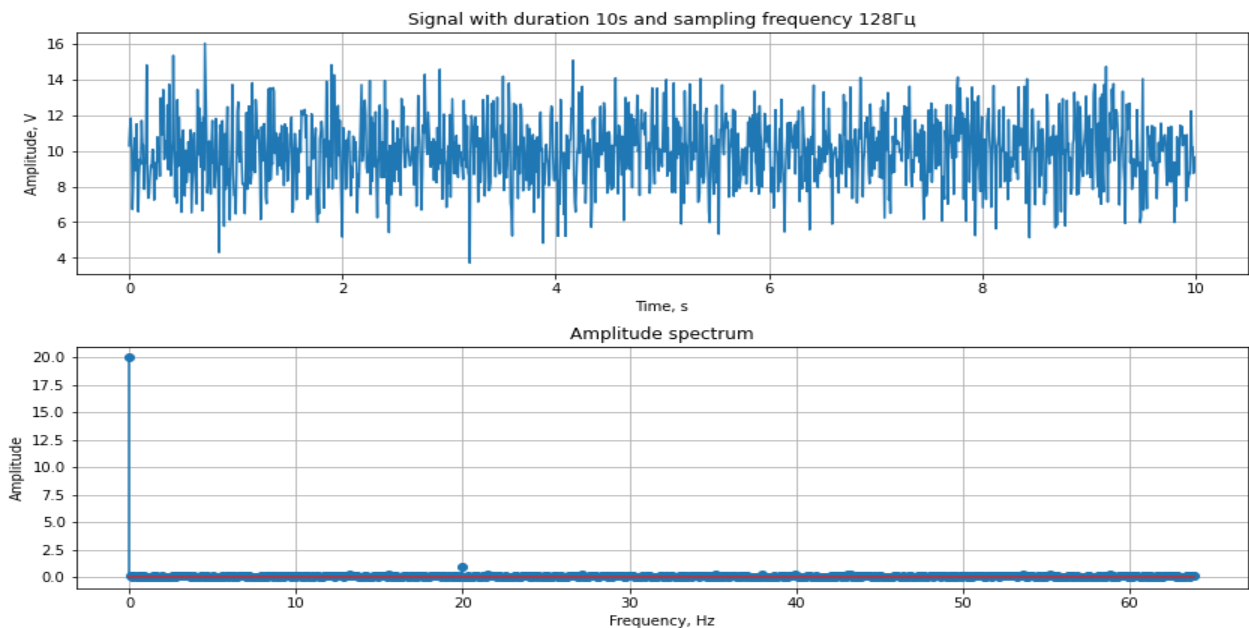


Рис.4.19. Синусоїда із шумовою складовою (тривалістю 10 с) та її амплітудний спектр

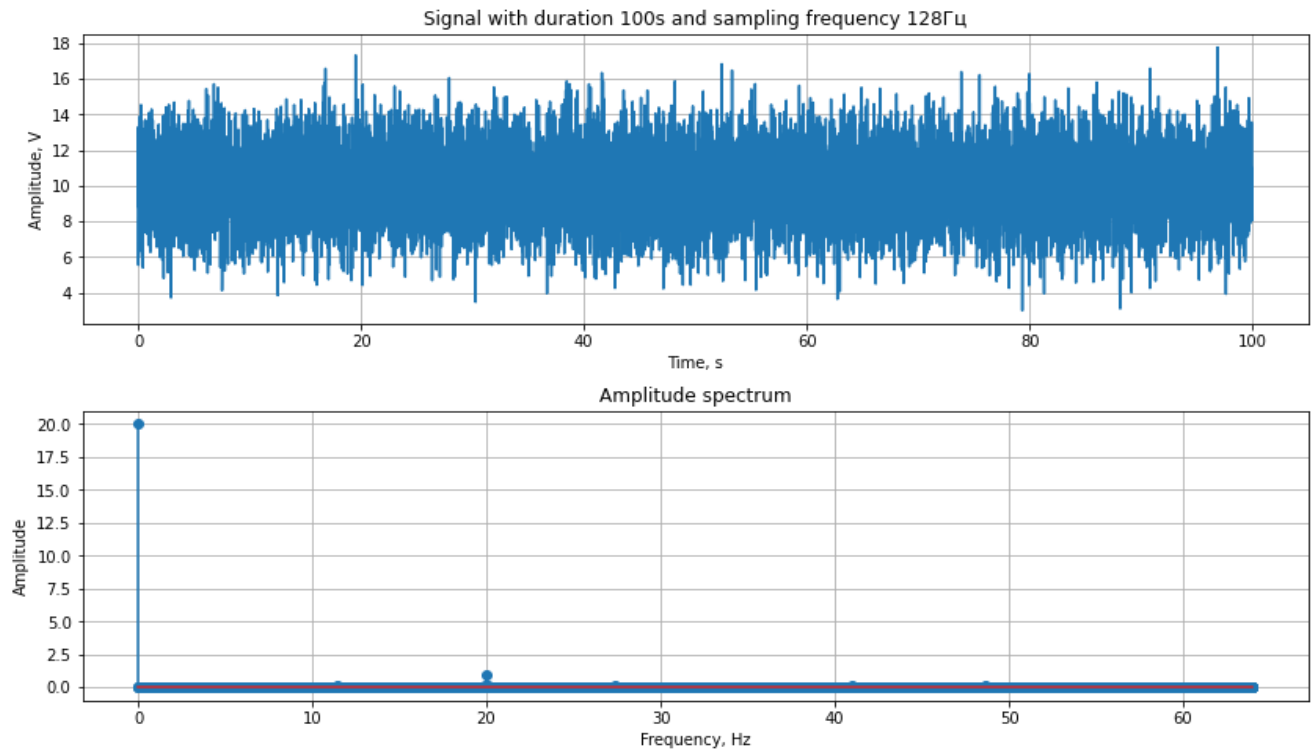


Рис.4.20. Синусоїда із шумовою складовою (тривалістю 100 с) та її амплітудний спектр

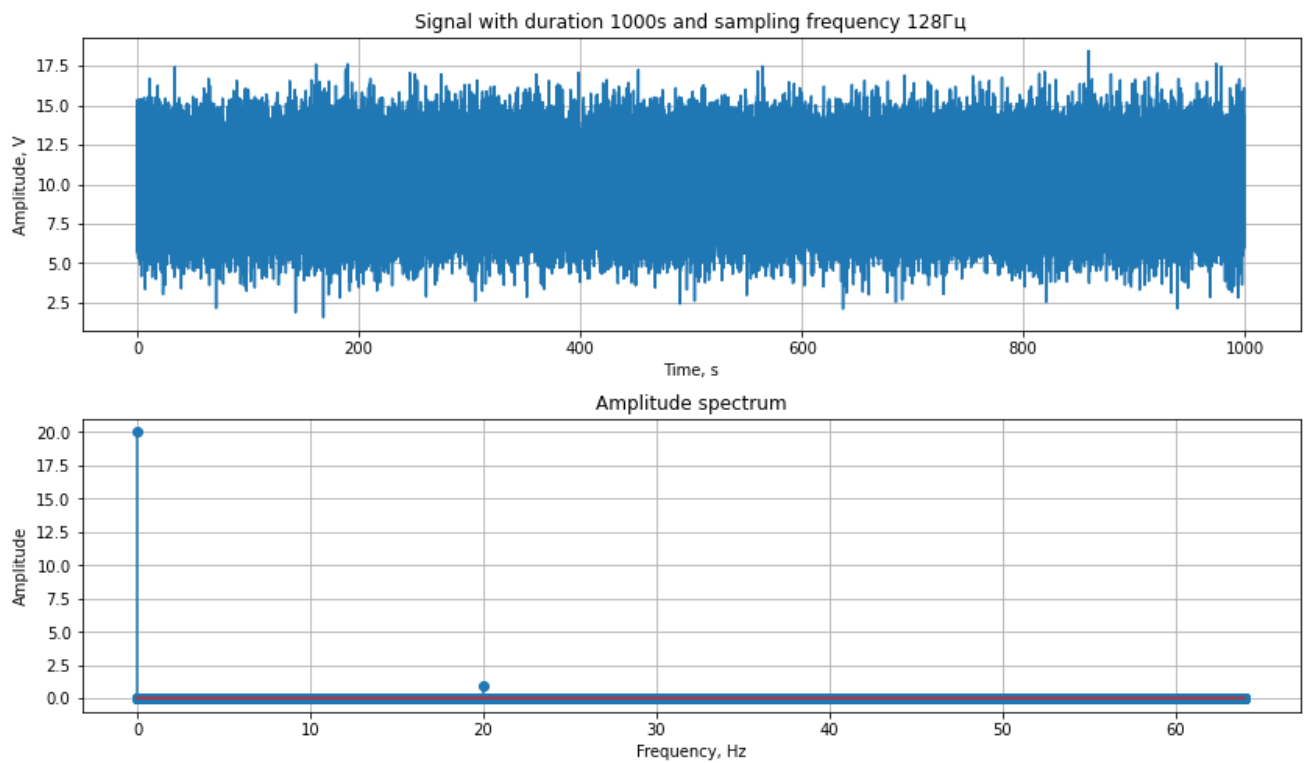


Рис.4.21. Синусоїда із шумовою складовою (тривалістю 1000 с) та її амплітудний спектр

7.3 Збільшувати частоту дискретизації зашумленого сигналу тривалості 0,5 с (1280, 12800, 128000 Гц), отримуючи для кожного сигналу його амплітудний спектр. На графік кожного разу виводити спектр у межах від 0 до 100 Гц.

Побудувати за допомогою функції **plot** графіки сигналів та за допомогою функції **stem** їх амплітудні спектри (рис.4.22-4.24), зробити висновки щодо впливу частоти дискретизації сигналу на роздільну здатність у частотній області та на якість визначення наявності синусоїдального коливання у шумі за спектральними характеристиками.

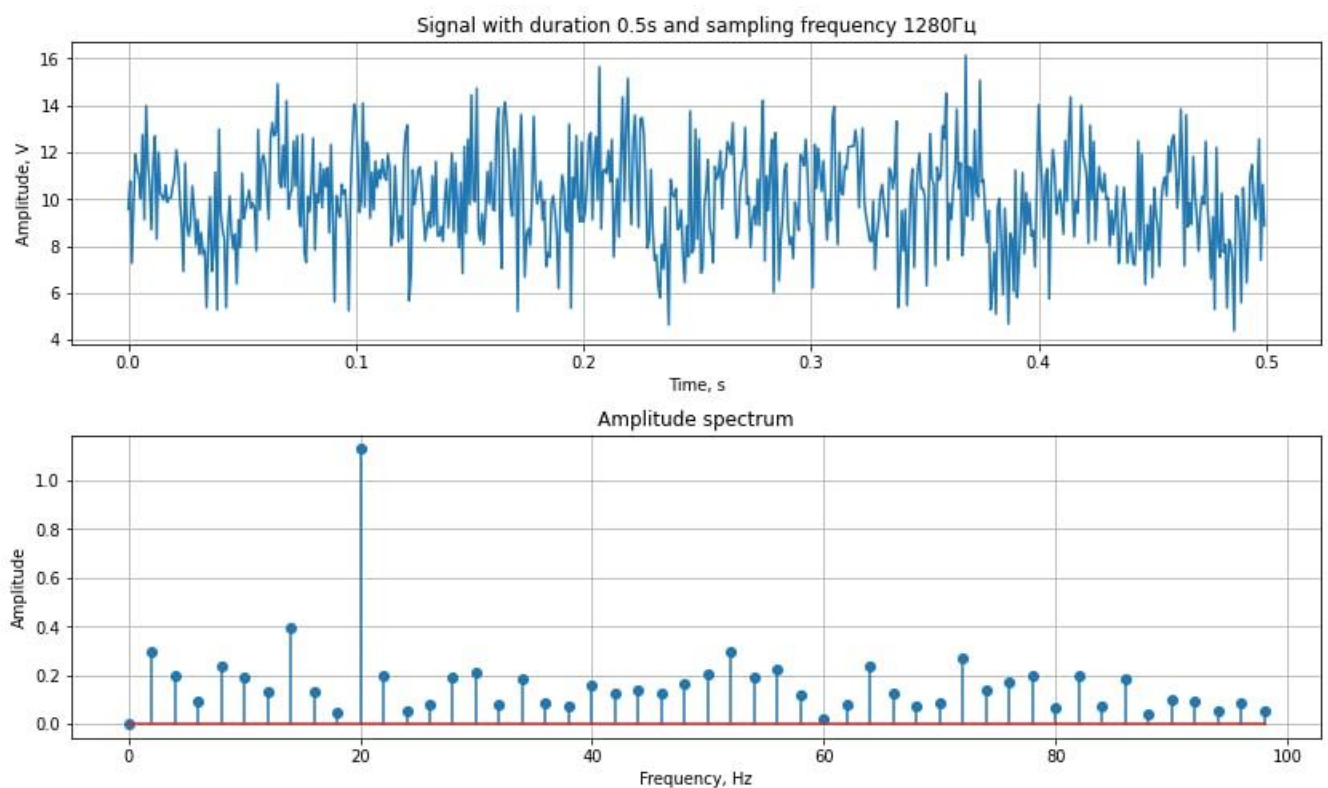


Рис.4.22. Синусоїда з шумовою складовою (тривалістю 0,5 с і частотою дискретизації 1280 Гц) та її амплітудний спектр

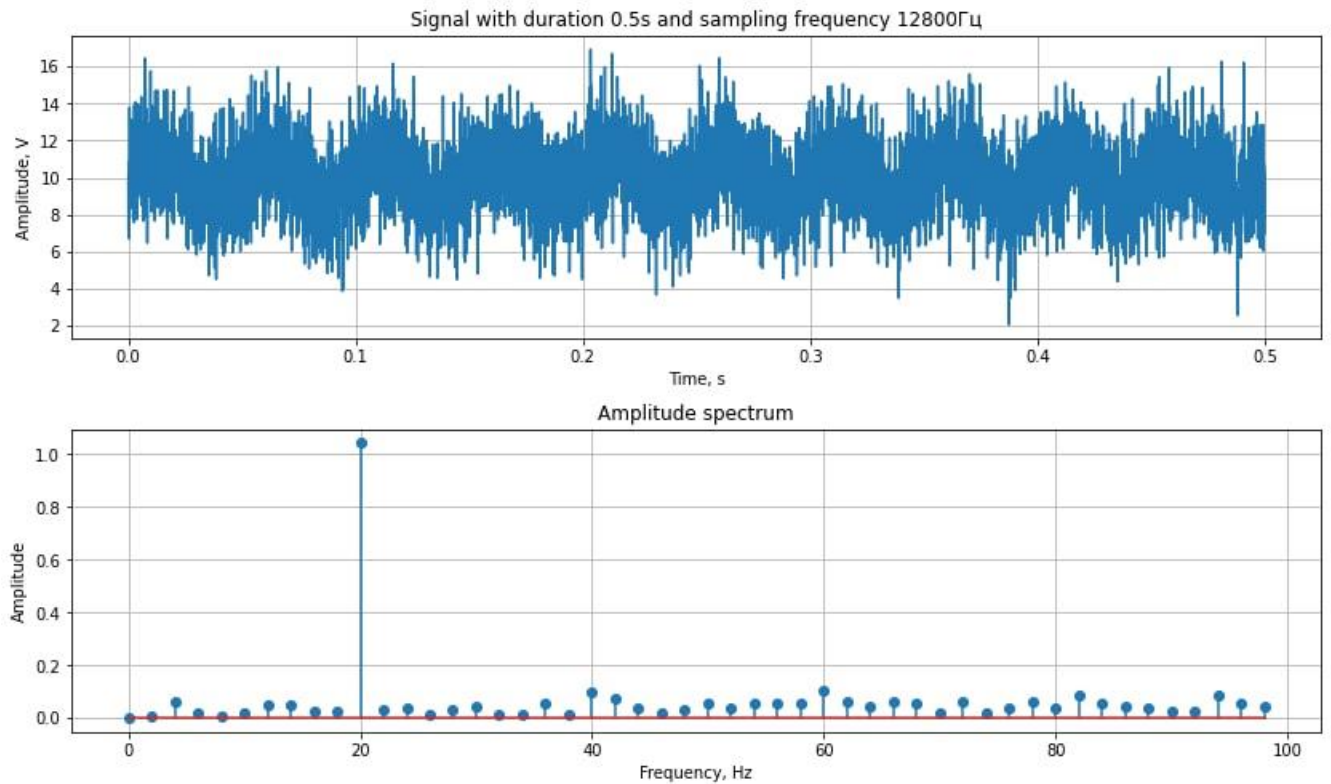


Рис.4.23. Синусоїда з шумовою складовою (тривалістю 0,5 с і частотою дискретизації 12800 Гц) та її амплітудний спектр

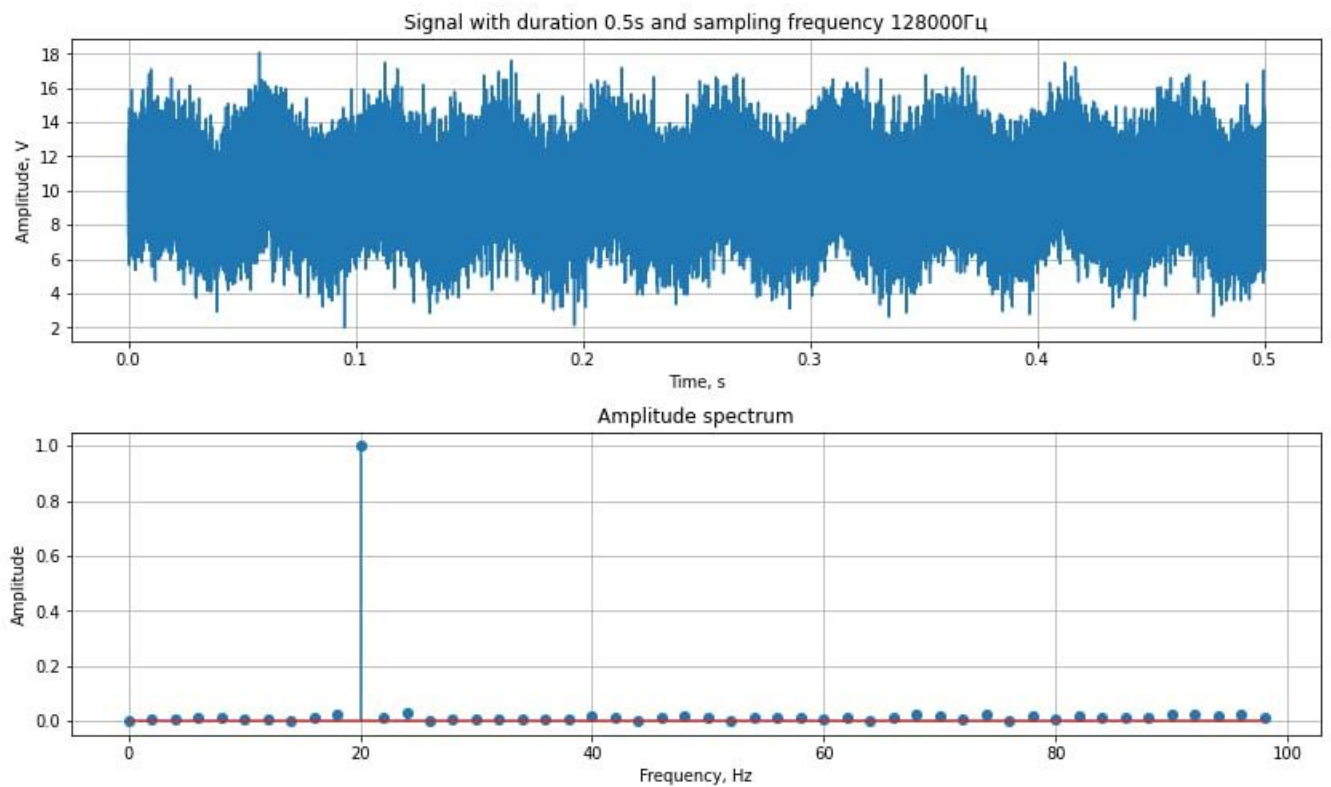


Рис.4.24. Синусоїда з шумовою складовою (тривалістю 0,5 с і частотою дискретизації 128000 Гц) та її амплітудний спектр

8. Сформувати сигнал синусоїди частоти 20,5 Гц амплітуди 1 В та тривалості 1 с для частоти дискретизації 1000 Гц. Отримати амплітудний спектр даного сигналу.

Дописати в кінці сигналу нульові відліки (10, 100, 1000 та 10000 відліків), отримуючи для кожного сигналу його амплітудний спектр (рис. 4.25-4.29).

На графік кожного разу виводити спектр за допомогою функції **stem** в межах від 19 до 22 Гц. Зробити висновки щодо впливу доповнення сигналу нулями на роздільну здатність у частотній області та на якість визначення наявності синусоїдального коливання за спектральними характеристиками.

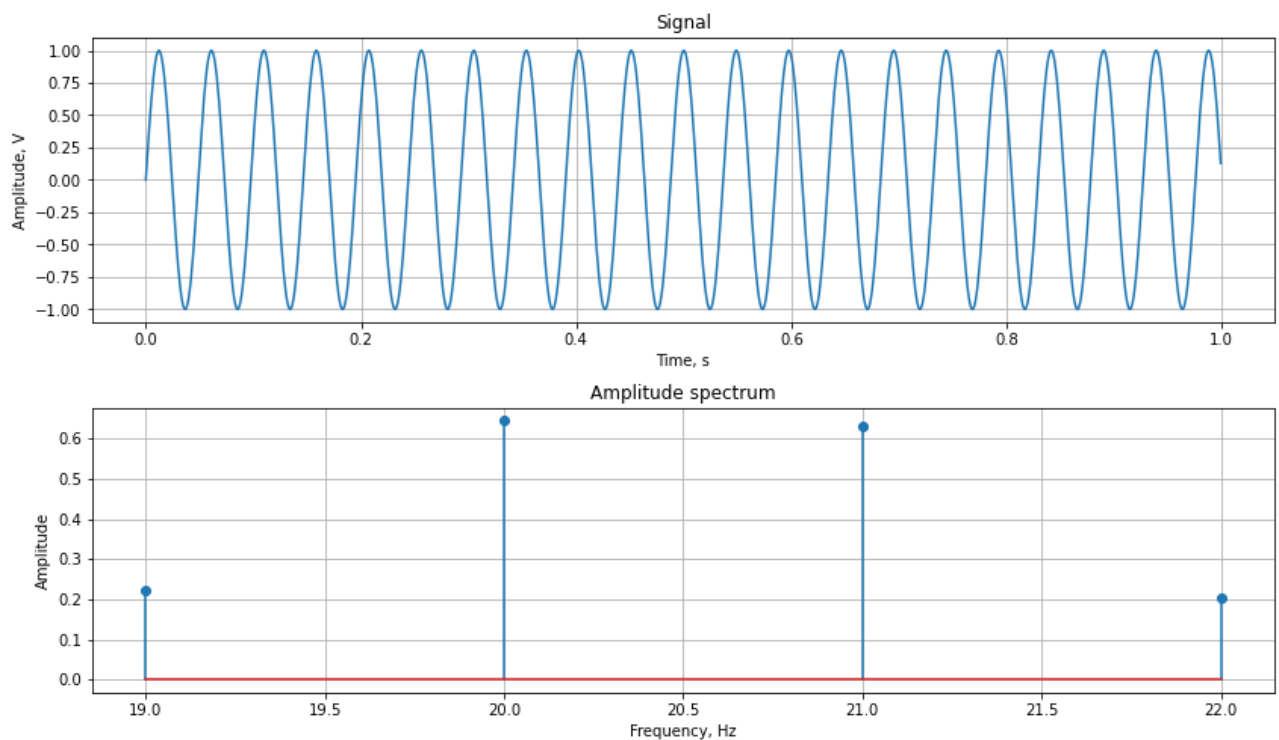


Рис.4.25. Синусоїда з частотою 20,5 Гц та її амплітудний спектр

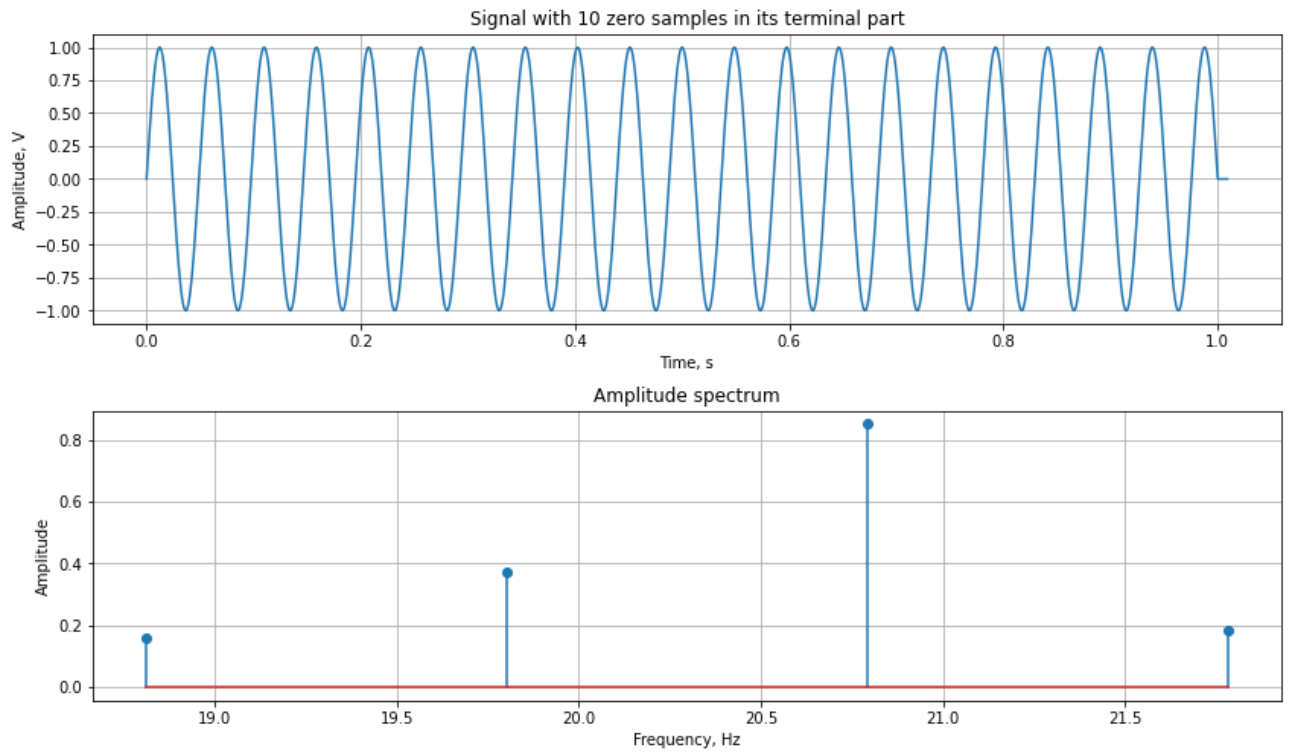


Рис.4.26. Синусоїда з частотою 20,5 Гц та з доданими 10 нульовими відліками та її амплітудний спектр

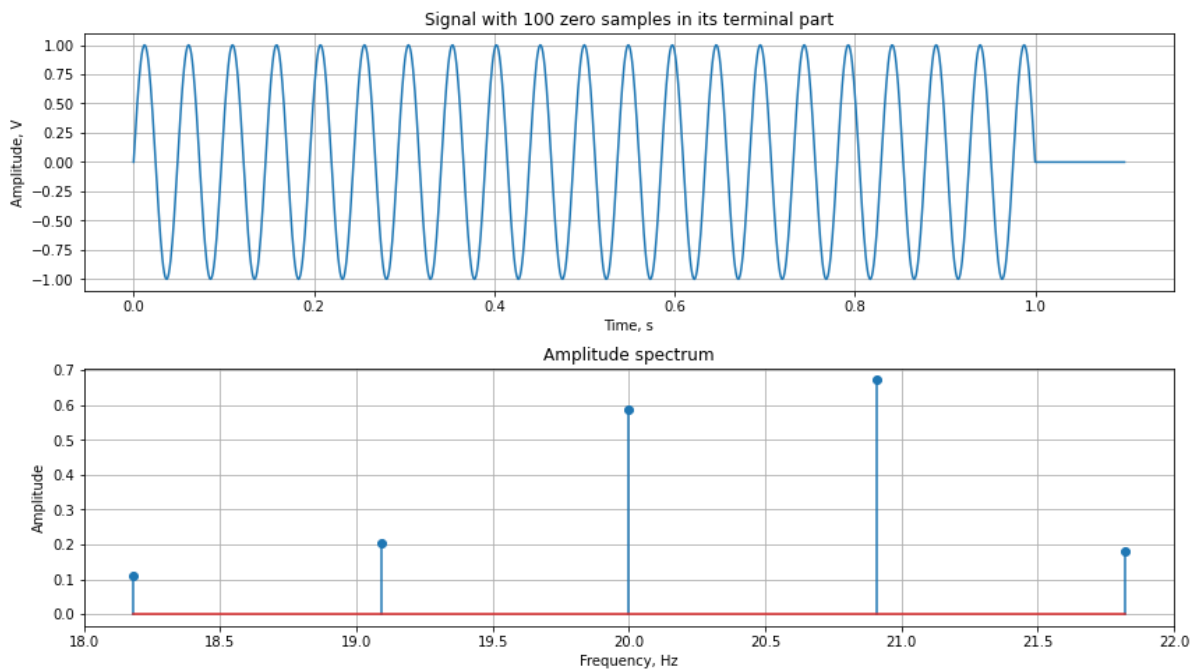


Рис.4.27. Синусоїда з частотою 20,5 Гц та з доданими 100 нульовими відліками та її амплітудний спектр

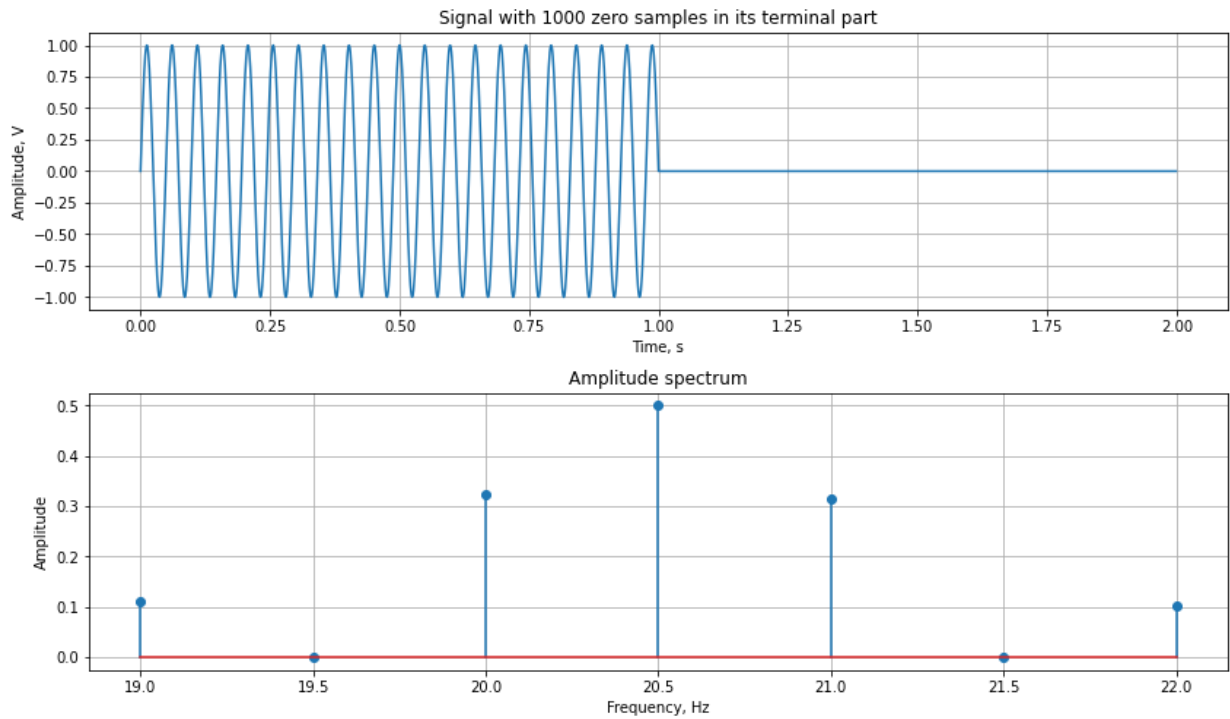


Рис.4.28. Синусоїда з частотою 20,5 Гц та з доданими 1000 нульовими відліками та її амплітудний спектр

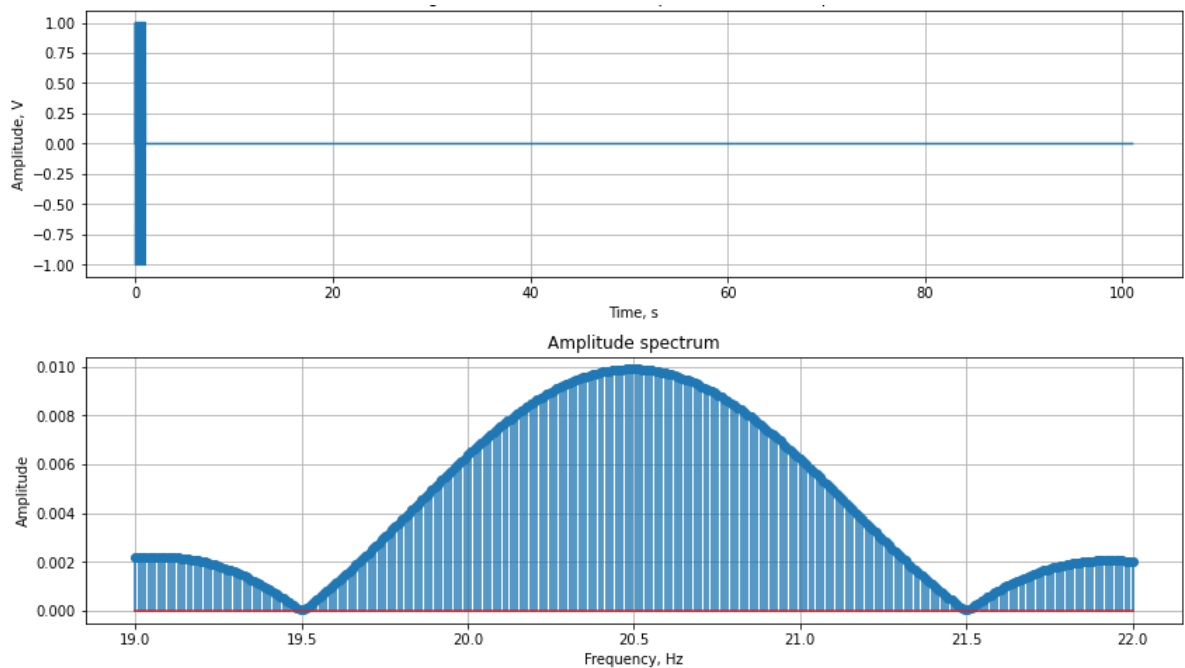


Рис.4.29. Синусоїда з частотою 20,5 Гц та з доданими 10000 нульовими відліками та її амплітудний спектр

9. Для довільного сигналу виконати пряме, а потім обернене перетворення Фур'є, порівняти початковий сигнал та відновлений сигнал

(рис. 4.30). Знайти середньоквадратичну похибку відновлення (функція **std**)
Зробити висновки.

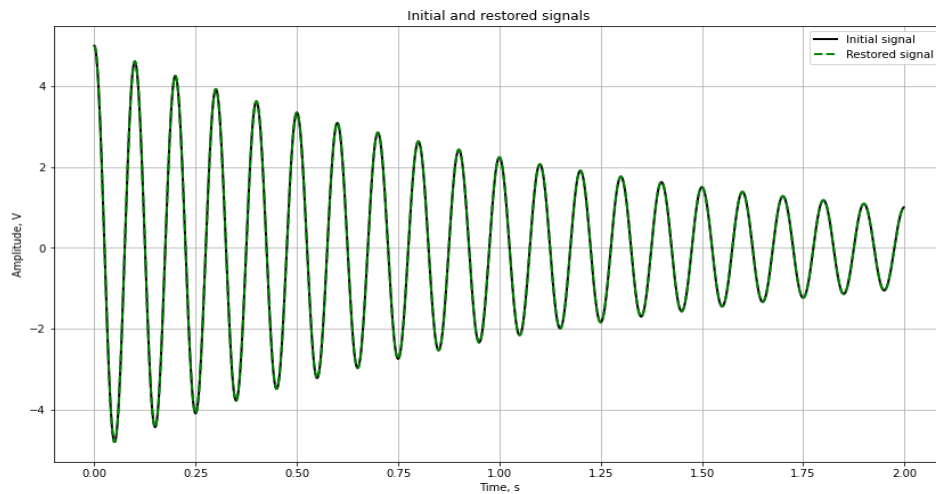


Рис.4.30. Початковий сигнал та відновлений сигнал після прямого та зворотного перетворення Фур'є

10. Побудувати функцію для розрахунку та виводу на графік спектральної густини потужності сигналу, що завантажений з файлу (рис. 4.31). В функцію передавати назву файлу з сигналом та інші необхідні дані.

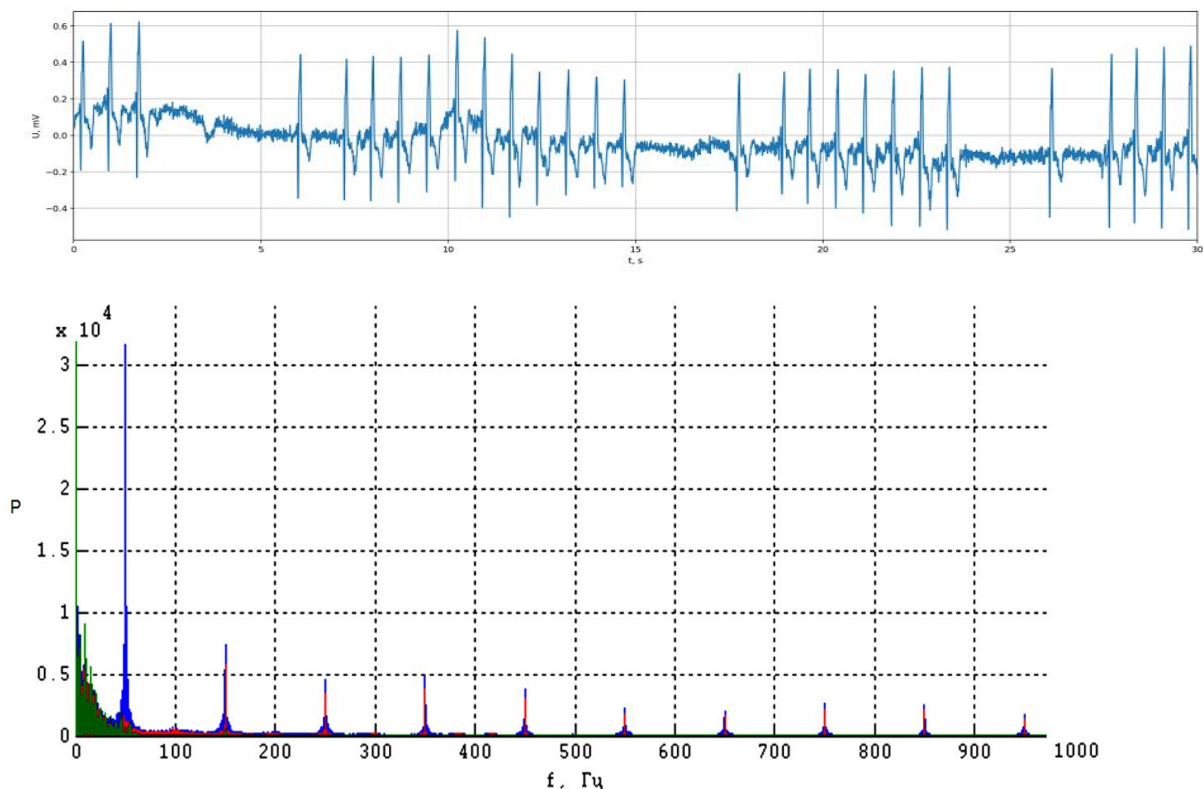


Рис.4.31. ЕКГ сигнал та графік спектральної густини потужності ЕКГ-сигналу, де присутня мережева завада та її гармоніки

11. Побудувати функцію, яка дозволяє розрахувати та побудувати амплітудний та фазовий спектр фрагменту довільного сигналу (рис. 4.32).

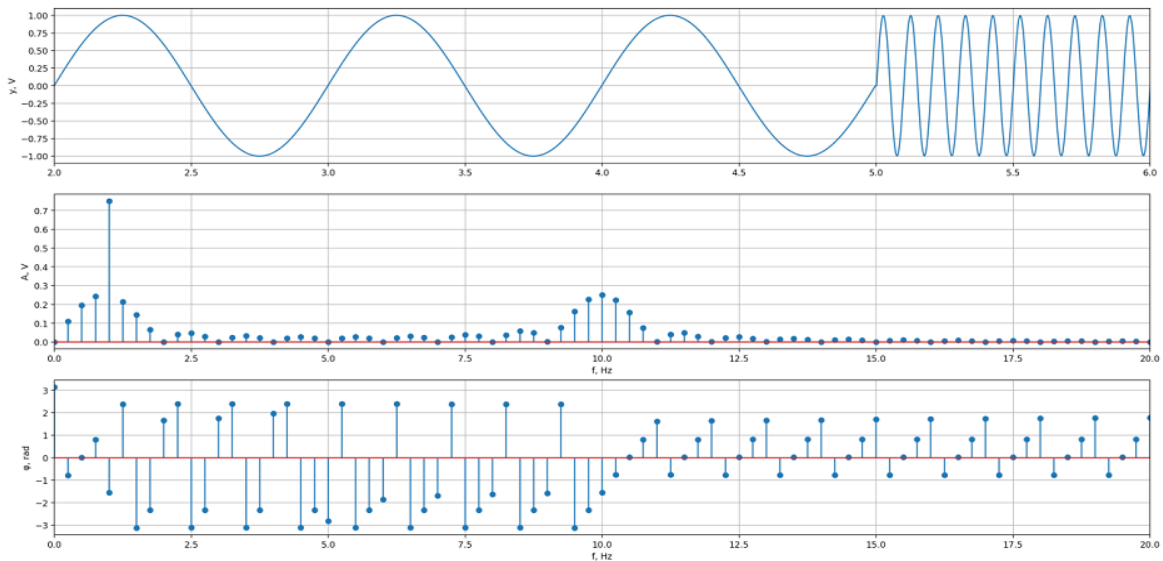


Рис.4.32. Амплітудний та фазовий спектри фрагменту довільного сигналу

12*. Побудувати графік амплітудного спектру прямокутного імпульсу тривалістю 0,1 с для частот дискретизації 128 Гц, 256 Гц, 44100 Гц. Порівняти отримані результати, зробити висновки.

13*. Сформувати вектор відліків часу від -20 с до 20 с для частоти дискретизації 512 Гц. Сформувати сигнал функції Котельникова $\frac{\sin(10x)}{10x}$, $\frac{\sin(x)}{x}$ (функція **sinc**). Побудувати за допомогою функції **plot** графіки сигналів та їх амплітудні спектри, зробити висновки. Графіки будувати для таких частот, щоб показати особливості спектру.

14*. Для оцифрованих сигналів, що досліджувалися у лабораторній роботі №2 побудувати амплітудні та фазові спектри. Зробити висновки щодо діапазону частот, на яких знаходяться спектральні складові, щодо форми спектрів.

15*. Виконати розклад за Фур'є звукових сигналів, які отримані з різною частотою дискретизації. Побудувати амплітудний та фазовий спектри, спектр потужності, зробити висновки.

16 *. Ознайомтеся з функціоналом спектрального аналізу за допомогою matplotlib.

Контрольні питання:

1. В чому полягає спектральний аналіз сигналів та з якою метою він виконується?
2. Записати математичний вираз розкладу сигналу у ряд Фур'є та вираз дискретного перетворення Фур'є.
3. Що таке гармоніка і чим вона характеризується?
4. Що таке амплітудний та фазовий спектр сигналу, яку інформацію вони несуть?
5. Для чого використовують віконні функції у разі спектрального аналізу сигналів?

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 5

СПЕКТРАЛЬНО-ЧАСОВИЙ АНАЛІЗ СИГНАЛІВ ЗА ПЕРЕТВОРЕННЯМ ФУРЬЄ

Мета роботи: дослідити зв'язок між часовими та спектральними характеристиками сигналів; набути навичок використання основних засобів спектрального та спектрально-часового аналізу сигналів за перетворенням Фур'є.

Основні теоретичні відомості

Для зменшення присутності небажаних складових у спектрі сигналу можна використовувати спектральний аналіз з віконними функціями (зважування, перетворення Фур'є з вікном, віконної обробки, windowing).

Для цього перед тим, як розраховувати перетворення Фур'є сигнал перемножується на деяку вагову (віконну) функцію $w(t)$, яка повинна спадати біля кінців того сегменту, на якому ми розглядаємо сигнал. В середині сегменту вона повинна мати постійні значення.

В результаті перемноження вікна на сигнал отримаємо ділянку сигналу, яка розташована на тому інтервалі часу, який потрапляє у вікно $w(t)$. Ця ділянка на краях є дещо спотвореною, але у середині інтервалу співпадає з початковим сигналом. До того ж, значення сигналу в кінці і на початку інтервалу дорівнює одне одному (нульові), що і вимагається для позбавлення від ефекту Гіббса.

Вираз для прямого перетворення Фур'є у цьому випадку матиме вигляд:

$$F_w(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) w(t) e^{-j\omega t} dt,$$

$$c_w[m] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] w[n] e^{-2\pi j \frac{m}{N} n}.$$

Для аналізу сигналів зі змінним спектром часто є корисним двовимірне частотно-часове представлення. Необхідно мати можливість знати одночасно і спектральний склад, і тривалості, присутності у сигналі складових на різних частотах [1, 6-7].

Математичний вираз для спектрально-часового розкладу сигналу називають короткочасовим перетворенням Фур'є (Short-Time Fourier Transform). Розрахунок спектрально-часового представлення сигналів проводиться у такий спосіб. Спочатку віконну функцію $w(t)$ розташовують в околі точки $t = 0$. Після цього розраховується спектр за Фур'є добутку $x(t)w(t)$. Потім віконну функцію зміщують на певний крок τ_1 , формують функцію $w(t - \tau_1)$ і розраховують спектр добутку $x(t)w(t - \tau_1)$. Далі процедура повторюється для всіх можливих зміщень віконної функції. Вирази спектрально-часового розкладу неперервних та дискретних сигналів мають вигляд:

- в неперервному випадку:

$$F_w(\omega, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)w(t - \tau)e^{-j\omega t} dt,$$

- дискретному випадку:

$$c[m, k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]w[n - k]e^{-2\pi j \frac{m}{N} n},$$

де $w(t), w[n]$ – функція вікна;

τ, k – параметр зміщення віконної функції в часі.

Представлення розподілу потужності спектральних складових, яке відображає зміну спектру у часі, називається *спектрограмою*:

$$S_w(\omega, \tau) = \left| \int_{-\infty}^{\infty} x(t)w(t - \tau)e^{-j\omega t} dt \right|^2,$$

$$C_w[m, k] = \left| \sum_{n=0}^{N-1} x[n]w[n - k]e^{-2\pi j \frac{m}{N} n} \right|^2.$$

Порядок роботи

1. За допомогою функції **windows** ознайомитися з часовими характеристиками та спектрами всіх вагових віконних функцій.

Згідно з варіантами, вказаними у таблиці 1 (за списком, відрахувати свій номер і взяти два рядки з таблиці; після останнього номеру починати рахувати спочатку), сформувати вікна заданого типу та тривалості 256 відліків (функція **get_window**). Побудувати графіки вікон та їх амплітудні спектри (рис. 5.1, 5.2).

Таблиця 1

#	Window name
1	modified Bartlett-Hann
2	Bartlett
3	Blackman
4	Blackman-Harris
5	Bohman
6	rectangular
7	simple cosine
8	Poisson
9	flat top
10	Hamming
11	Hann
12	Parzen
13	triangular
14	Tukey

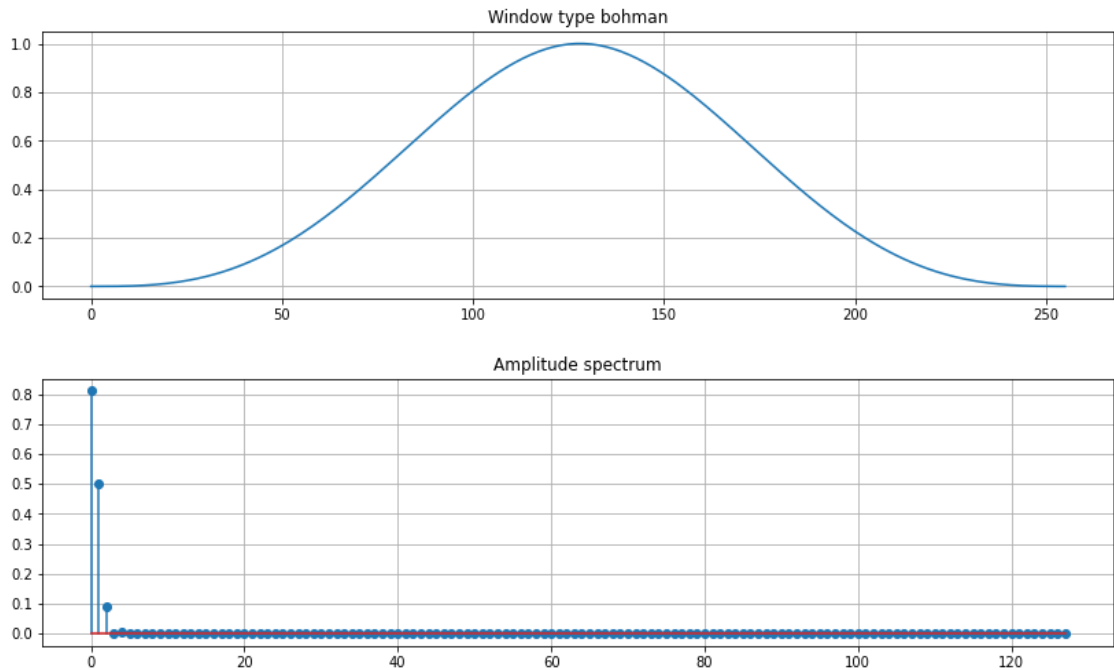


Рис.5.1. Віконна функція Bohman та її спектр

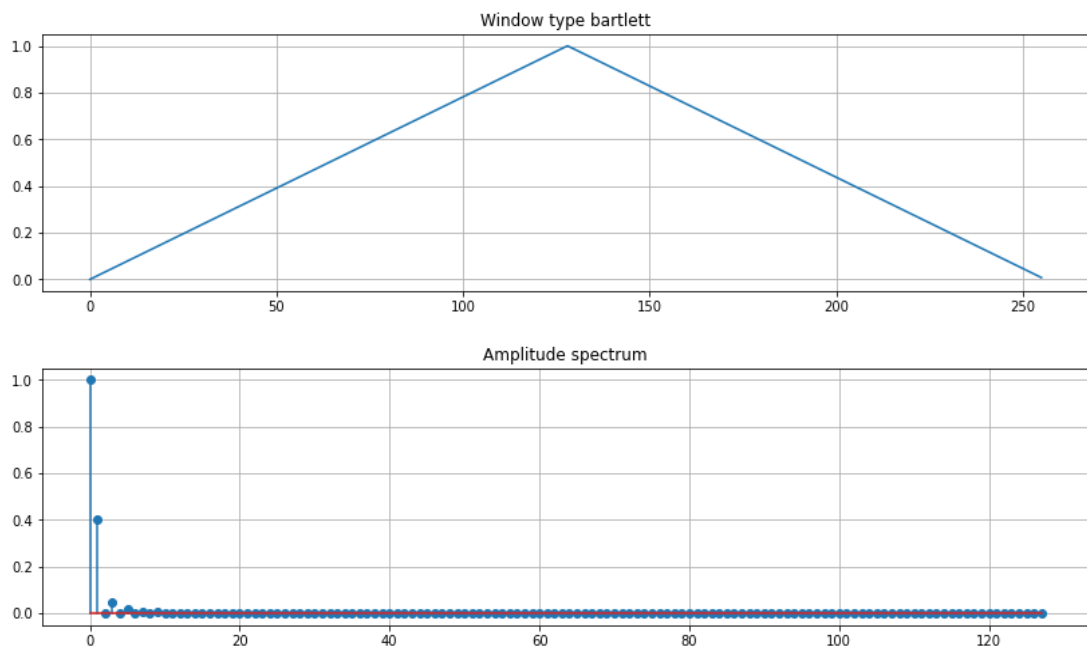


Рис.5.2. Віконна функція Bartlett та її спектр

2. Сформувати вектор відліків часу тривалістю 1 с для частоти дискретизації 128 Гц. Сформувати сигнали ділянки синусоїди частотою 2 та 2,5 Гц. Побудувати амплітудний спектр сигналів без використання віконної функції та з використанням першого вікна згідно з варіантом. Тривалість вікна обрати рівною тривалості сигналів. Порівняти з результатами п. 1 попередньої

лабораторної роботи (№4). Зробити висновки щодо спотворення спектрів та доцільності використання віконної обробки (рис. 5.3, 5.4).

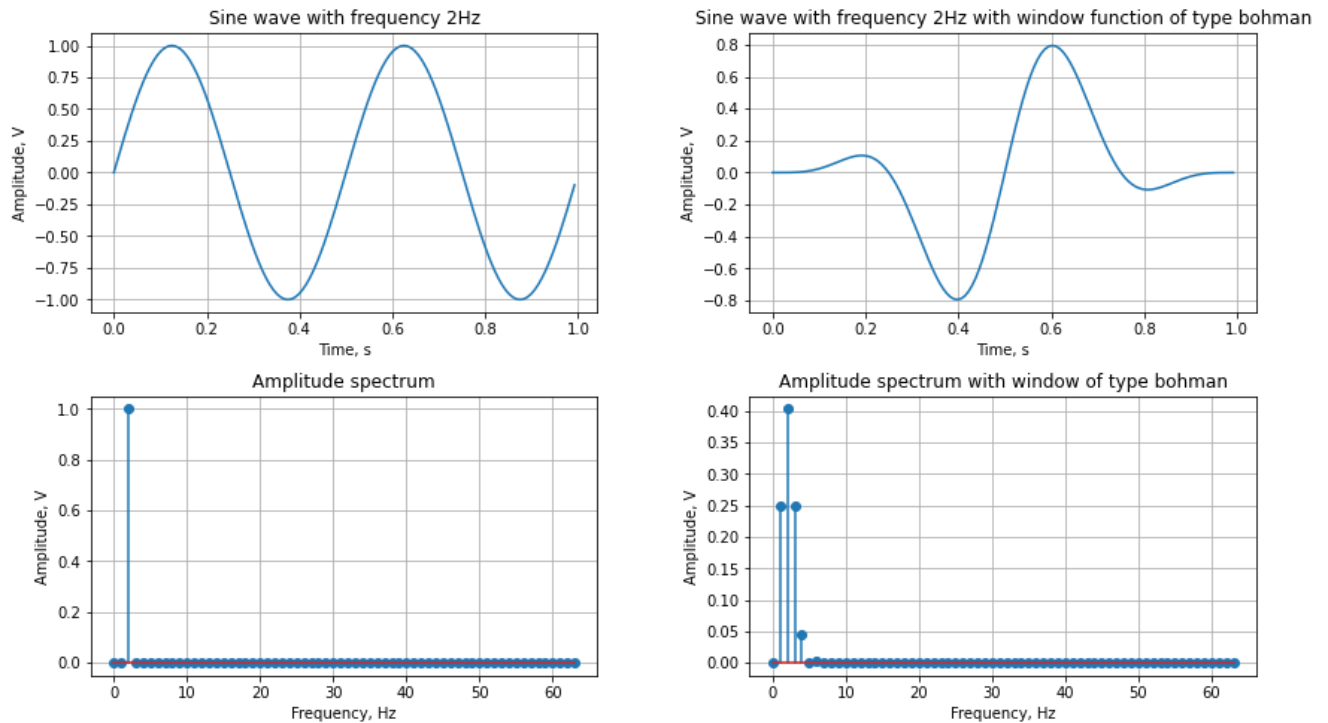


Рис.5.3. Сигнал синусоїди з частотою 2 Гц та його амплітудний спектр (без і з використанням віконної функції Bohman)

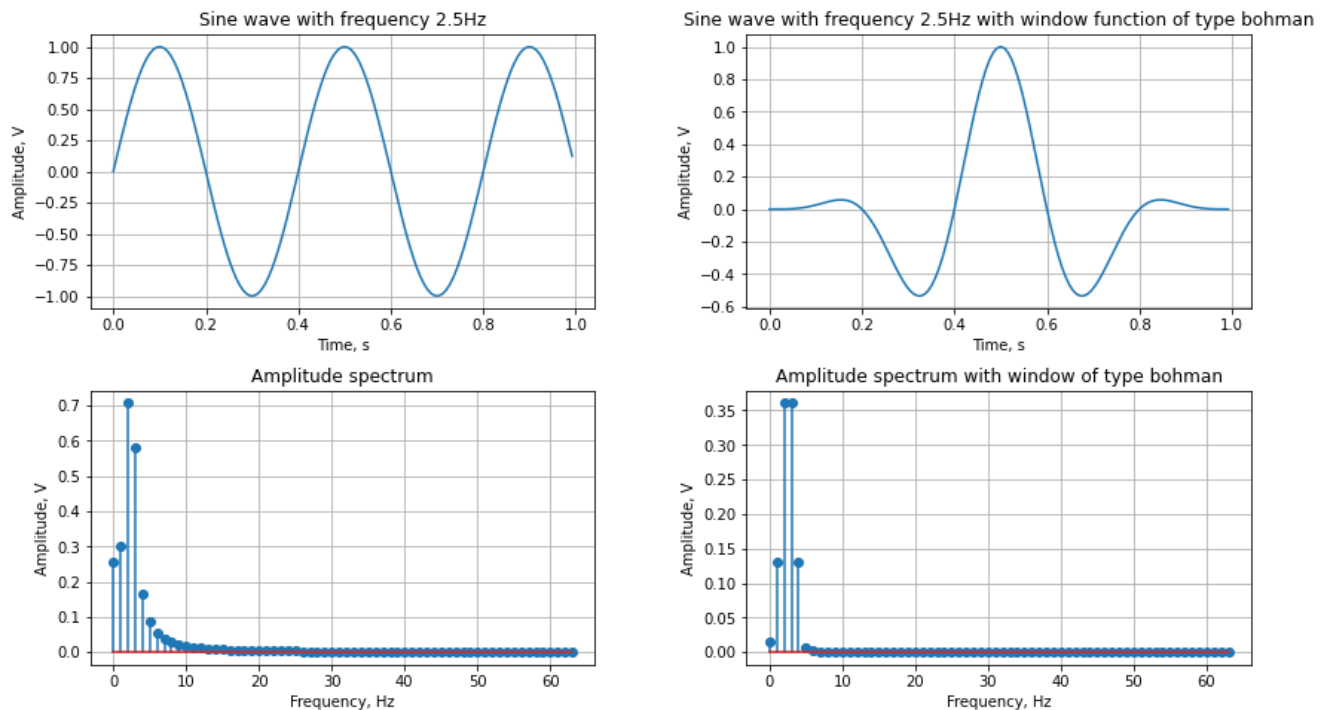
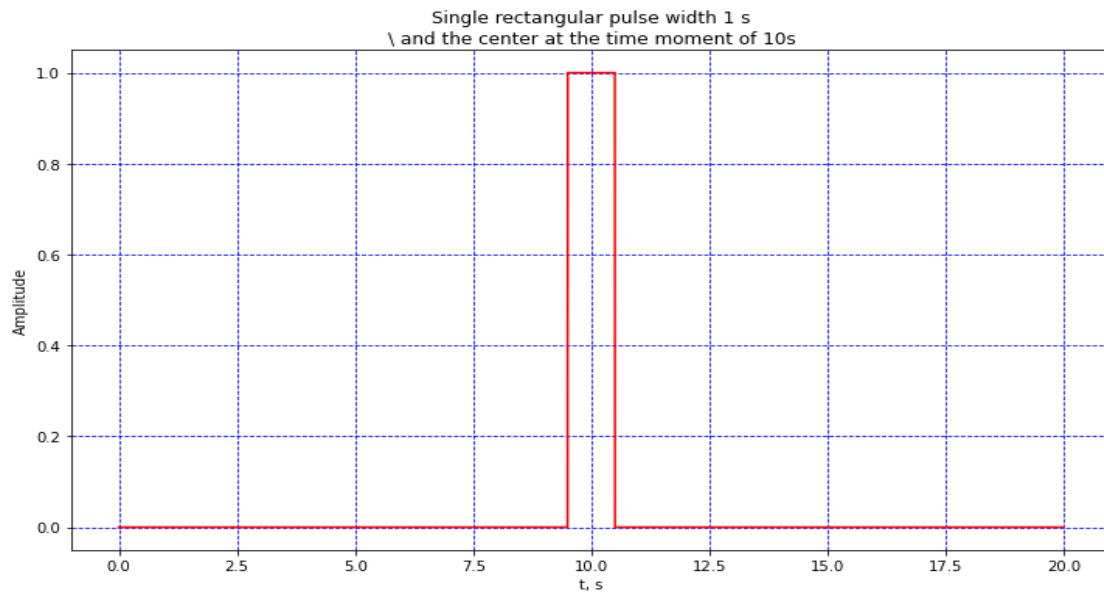


Рис.5.4. Сигнал синусоїди з частотою 2,5 Гц та його амплітудний спектр (без і з використанням віконної функції Bohman)

3. Сформувати вектор відліків часу тривалістю 15 с для частоти дискретизації 128 Гц. Сформувати сигнали:

- 3.1. синусоїди частотою 40 Гц;
- 3.2. випадкового сигналу (шумова складова);
- 3.3. прямокутного імпульсу шириною 1 с у момент часу 10 с;



3.4. суми сигналів 3.1 – 3.3.

Побудувати спектрограми сигналів за допомогою першого вікна згідно з варіантом тривалістю 0,2 с без використання перекриття вікон (рис. 5.5-5.9). Зробити висновки щодо вигляду спектрограм та відповідності часових, спектральних та спектрально-часових властивостей сигналів.

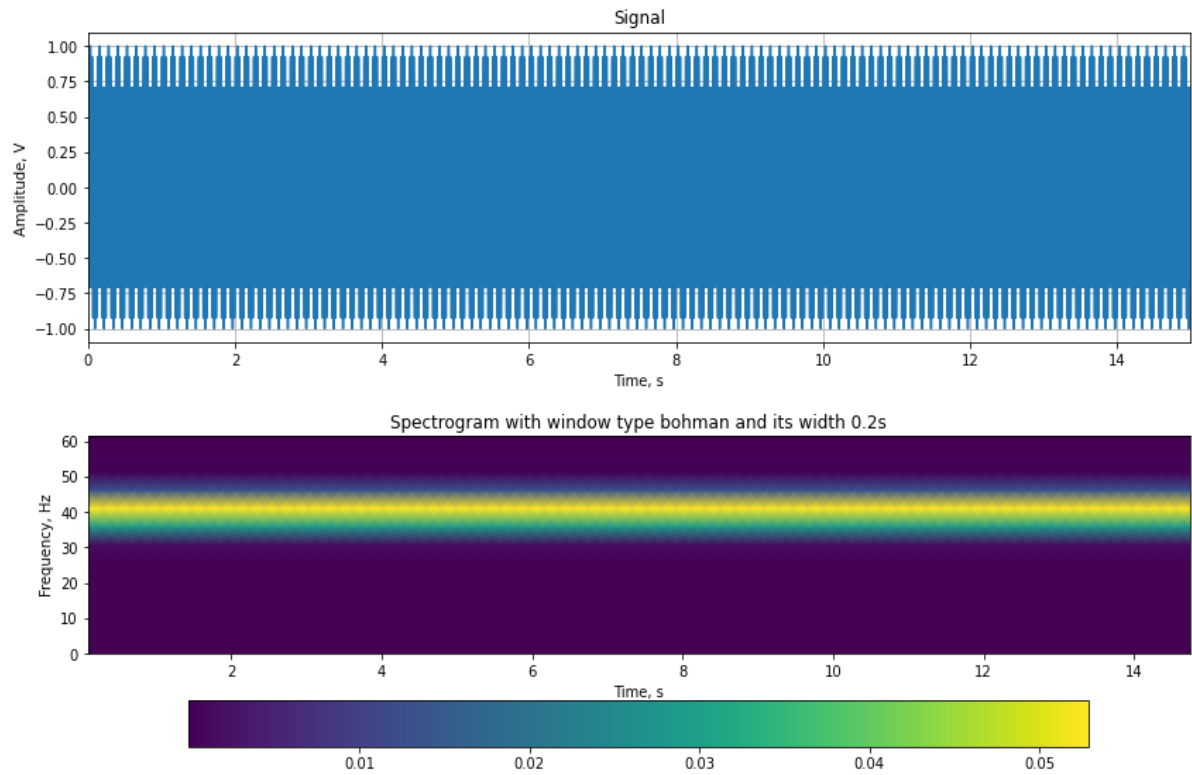


Рис.5.5. Сигнал синусоїди з частотою 40 Гц та його спектр

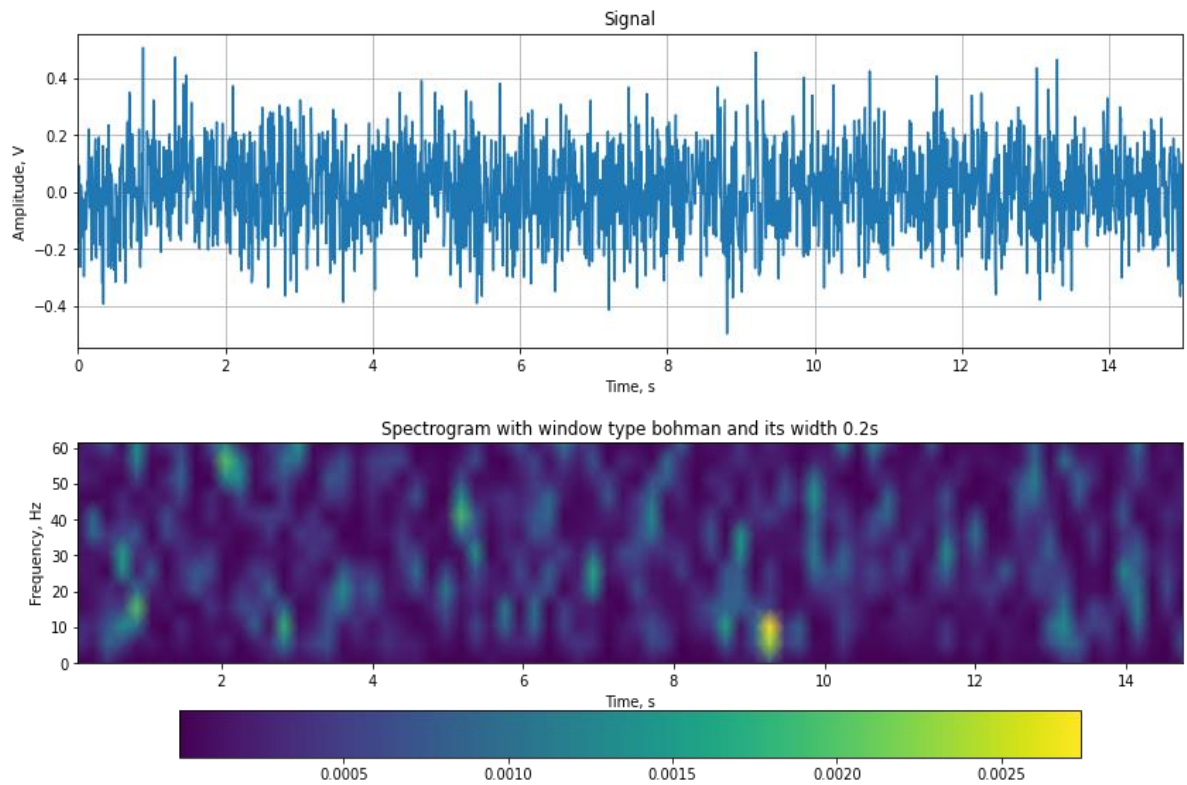


Рис.5.6. Випадковий сигнал та його спектр

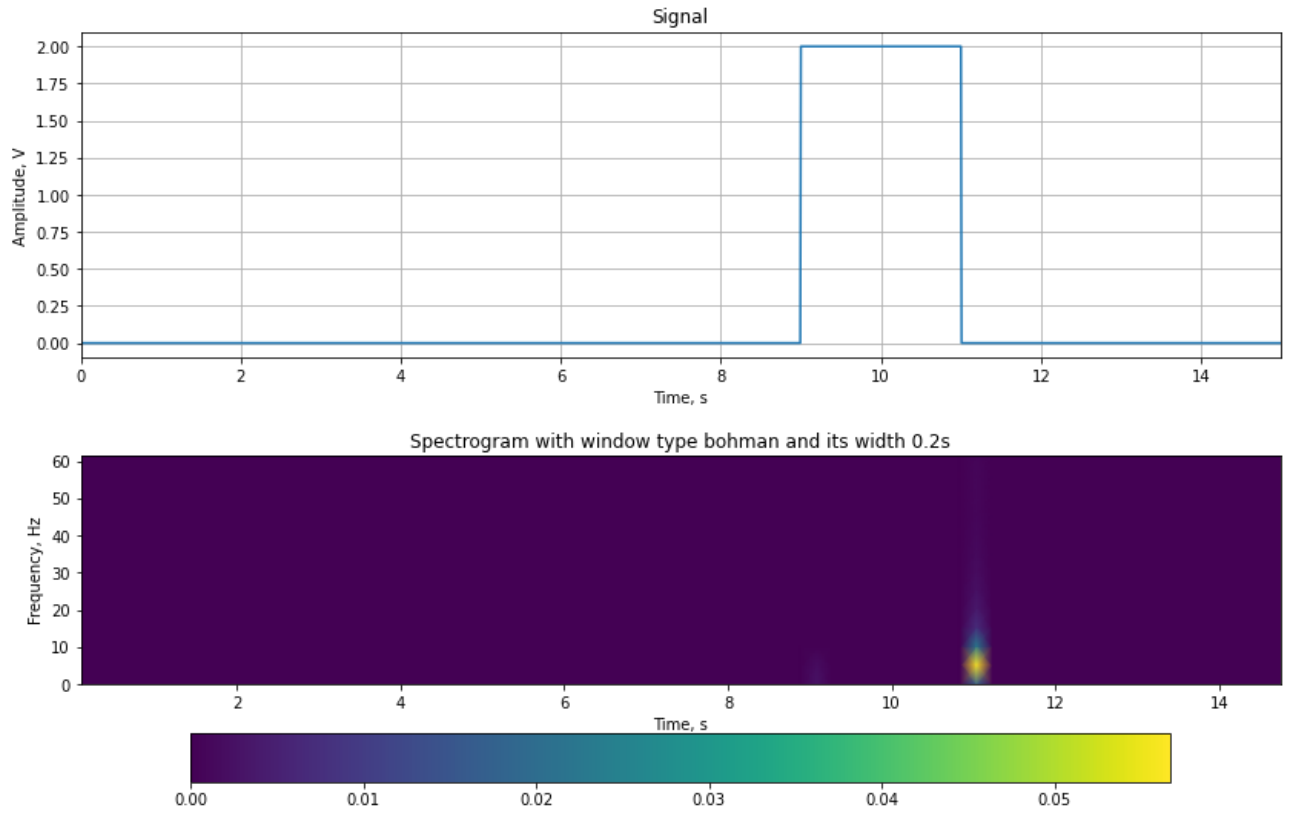


Рис. 5.7. Прямокутний імпульс та його спектр

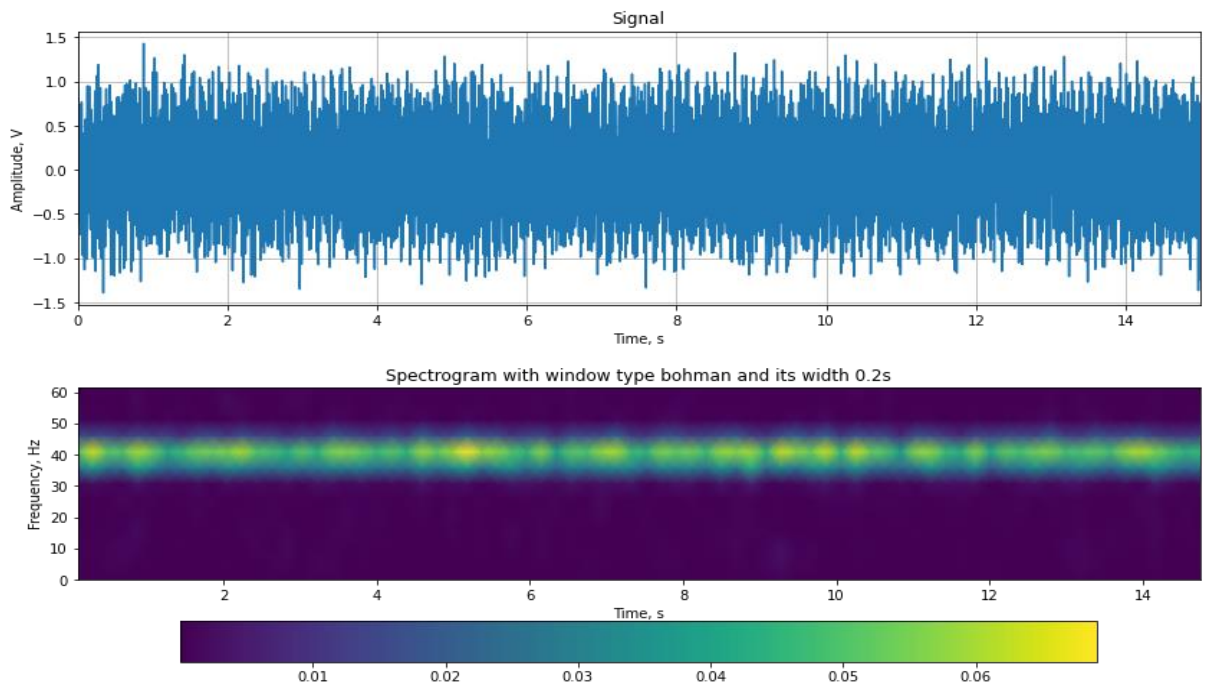


Рис.5.8. Сигнал синусоїди з частотою 40 Гц з шумовою складовою та його спектр

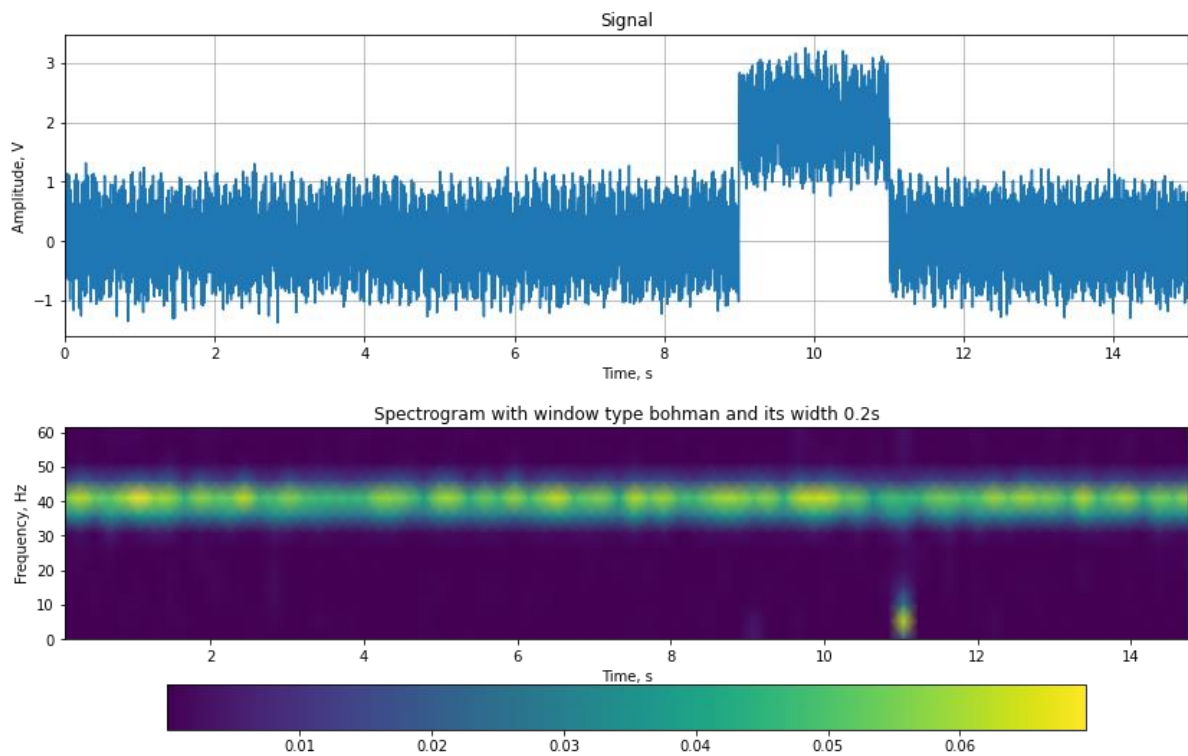


Рис.5.9. Сума прямокутного сигналу, синусоїди з частотою 40 Гц і шумової складової та спектр цього сумарного сигналу

4. Для сигналів з п. 2 лабораторної роботи №4 побудувати спектрограми (рис. 5.10-5.18):

- з вікном тривалості 0,1 с та 2 с (без перекриття);
- з вікном тривалості 1 с з перекриттям 50%.

Застосувати функції **colorbar** для візуалізації значень спектрограми. Зробити висновки щодо відображення часових властивостей сигналів у спектрограмі. Порівняти інформативність спектрограм та спектрів з п. 2 лабораторної роботи №4. Побудувати тривимірні графіки двох різних спектрограм з отриманих.

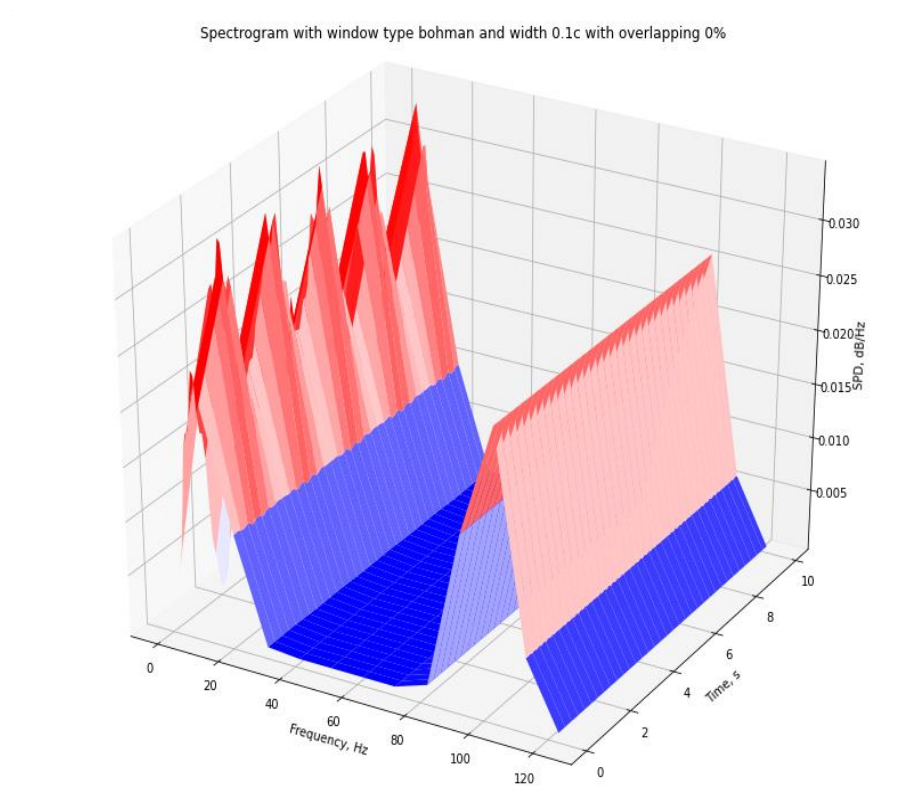
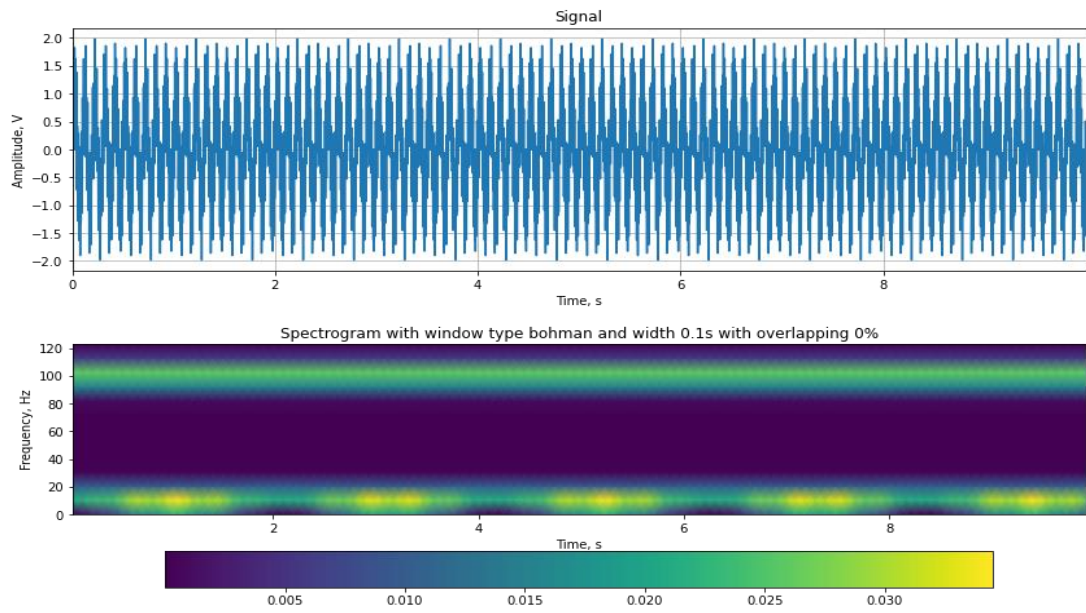


Рис.5.10. Сума двох синусоїд з частотами 10 Гц і 100 Гц та її спектрограма з вікном тривалістю 0,1 с (без перекриття)

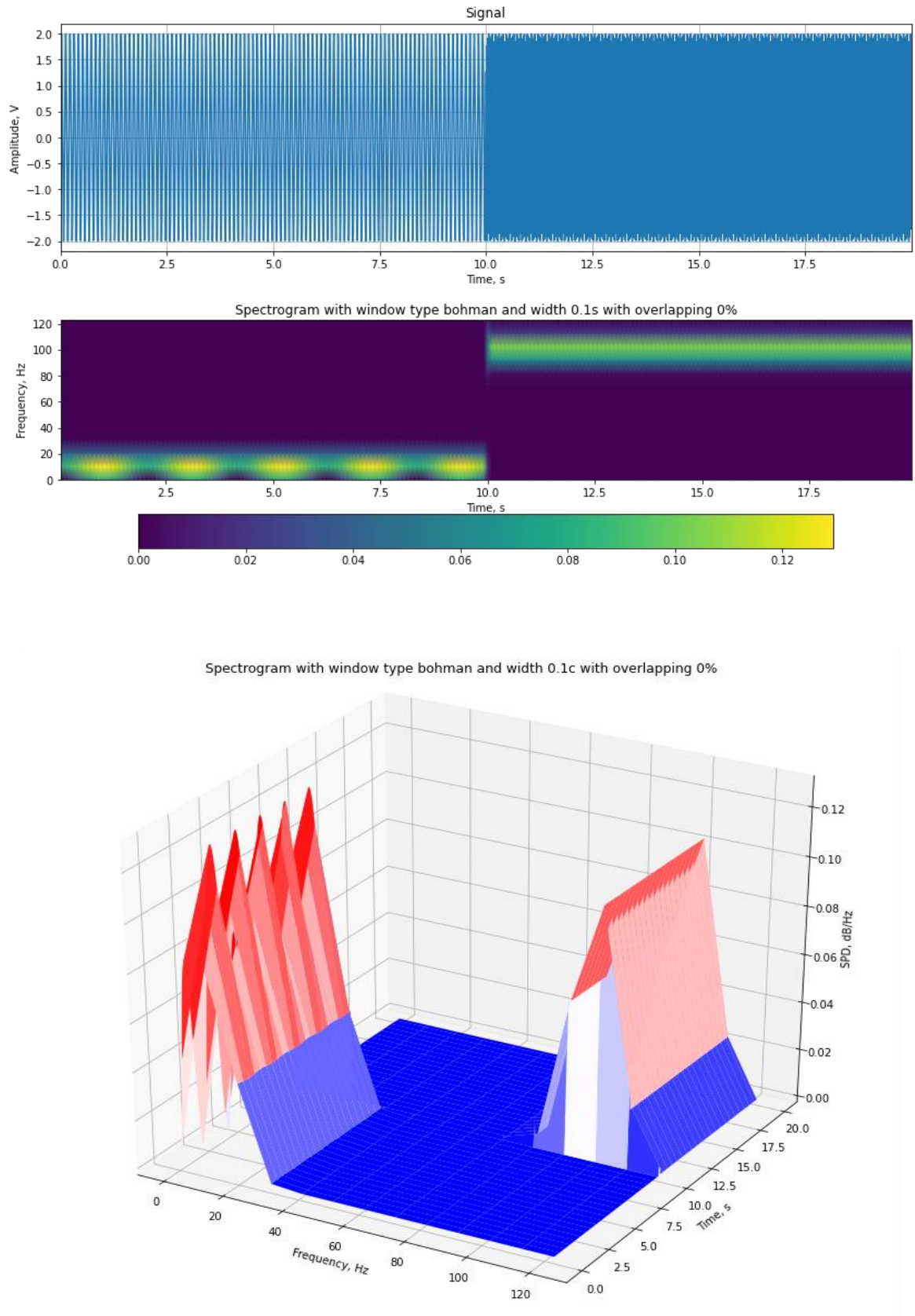


Рис.5.11. Послідовність двох синусоїд з частотами 10 Гц і 100 Гц та її спектрограма з вікном тривалістю 0,1 с (без перекриття)

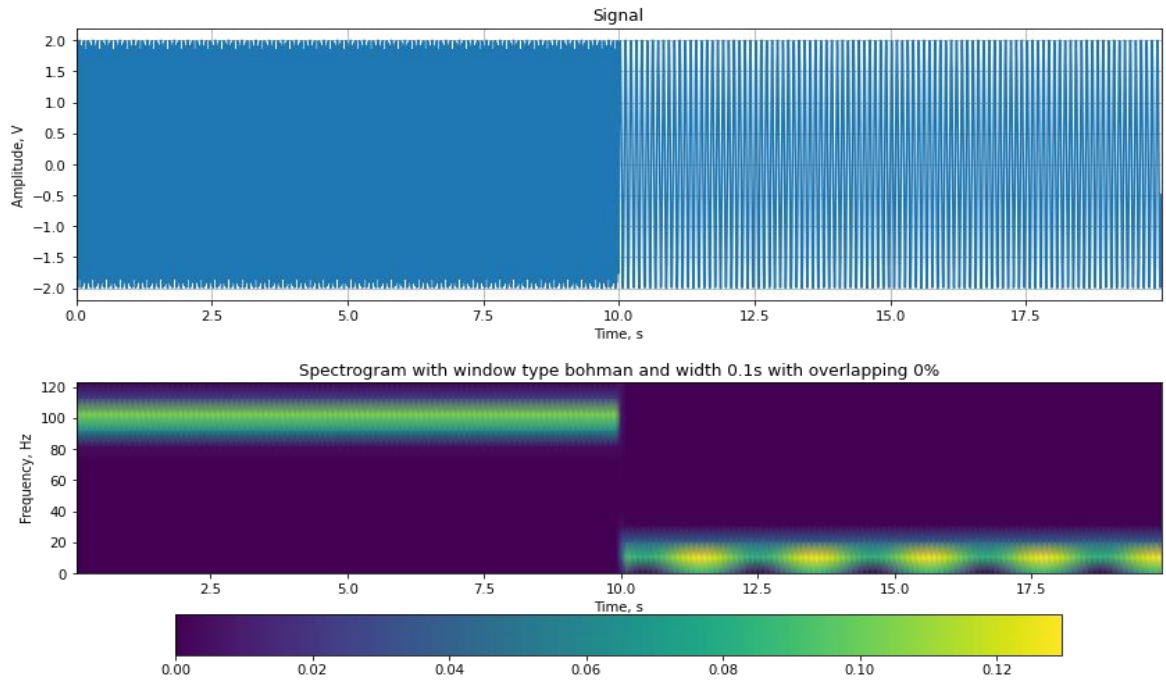


Рис.5.12. Послідовність двох синусоїд з частотами 100 Гц і 10 Гц та її спектрограма з вікном тривалістю 0,1 с (без перекриття)

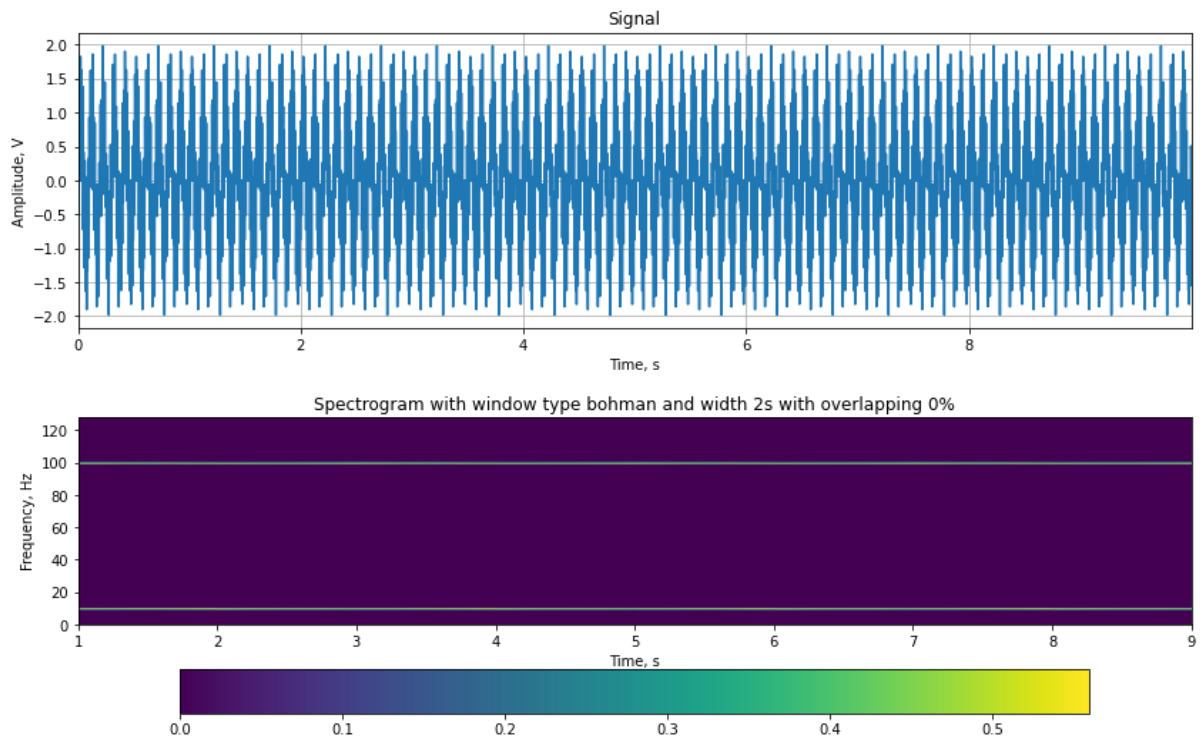


Рис.5.13. Сума двох синусоїд з частотами 10 Гц і 100 Гц та її спектрограма з вікном тривалістю 2 с (без перекриття)

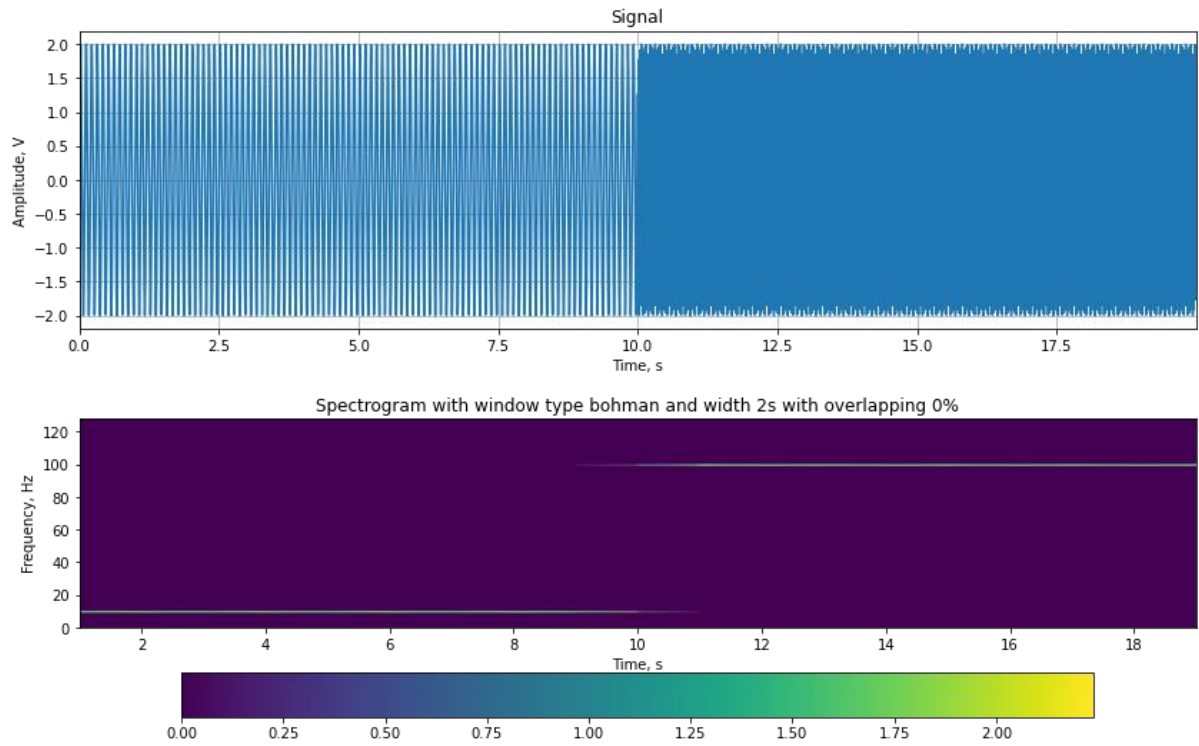


Рис.5.14. Послідовність двох синусоїд з частотами 10 Гц і 100 Гц та її спектрограма з вікном тривалістю 2 с (без перекриття)

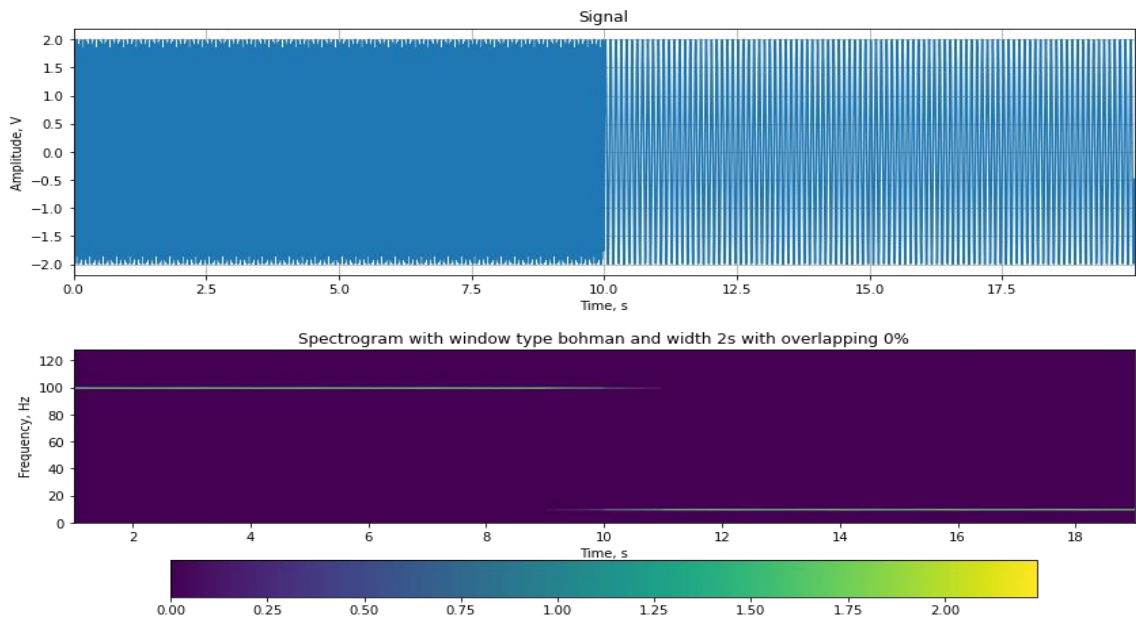


Рис.5.15. Послідовність двох синусоїд з частотами 100 Гц і 10 Гц та її спектрограма з вікном тривалістю 2 с (без перекриття)

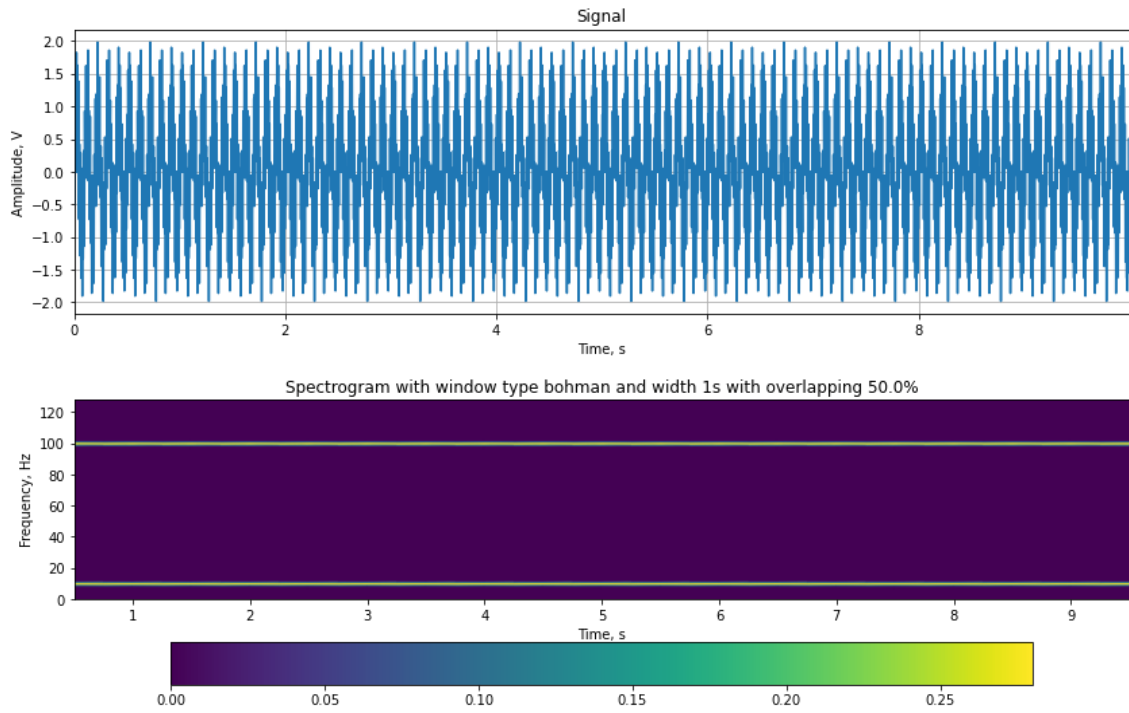
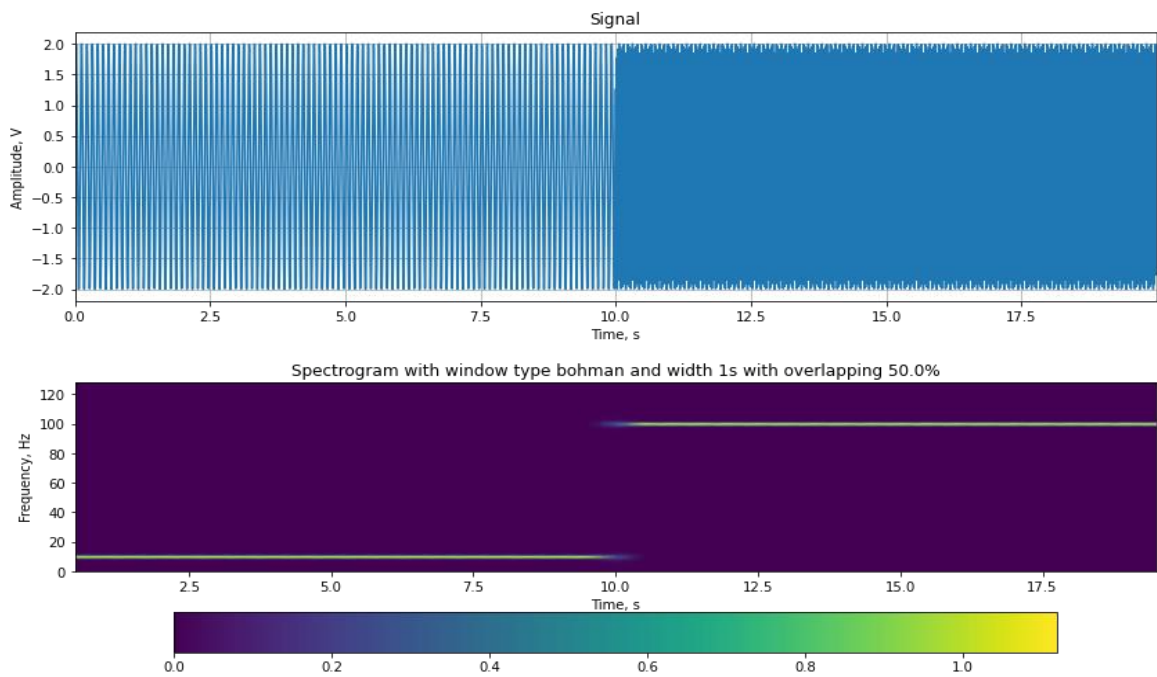


Рис.5.16. Сума двох синусоїд з частотами 10 Гц і 100 Гц та її спектрограма з вікном тривалістю 1 с (з перекриттям 50%)



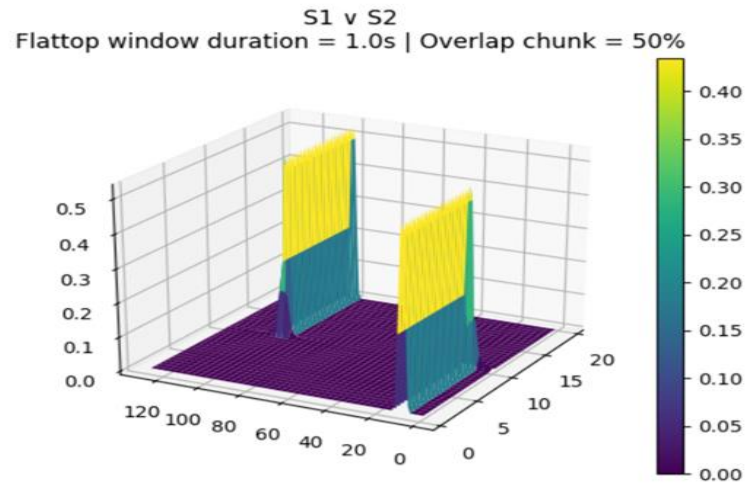
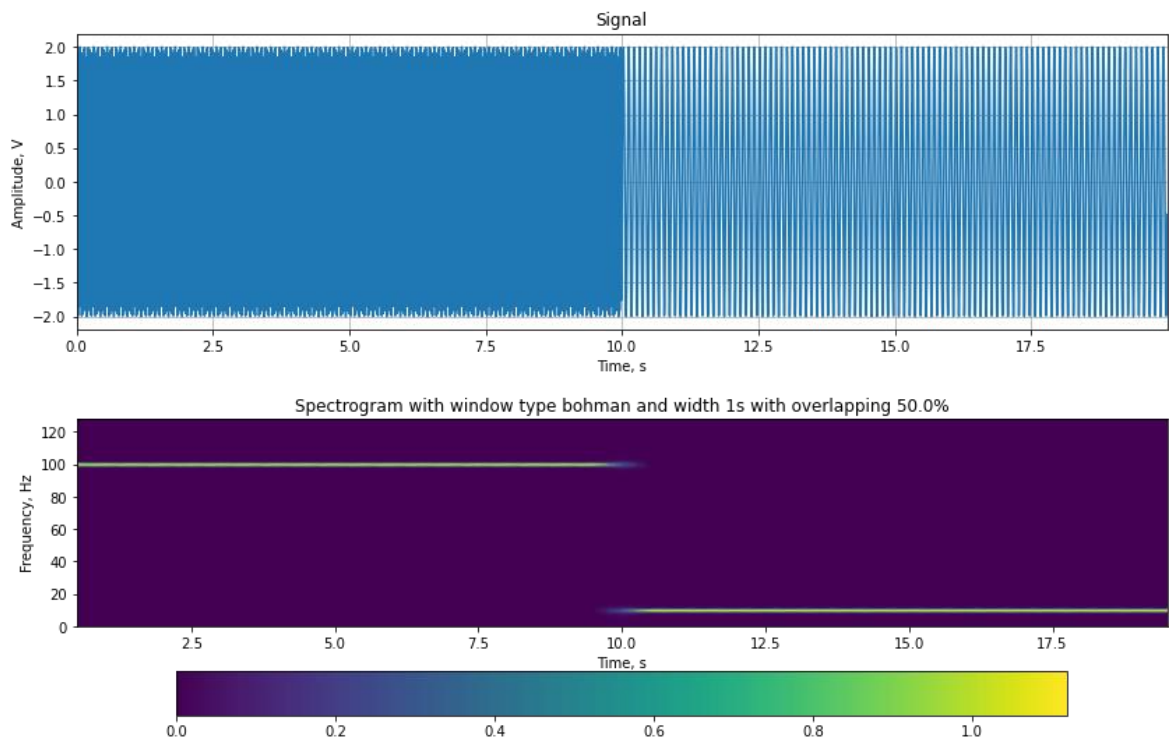


Рис.5.17. Послідовність двох синусоїд з частотами 10 Гц і 100 Гц та її спектрограма з вікном тривалістю 1 с (з перекриттям 50%)



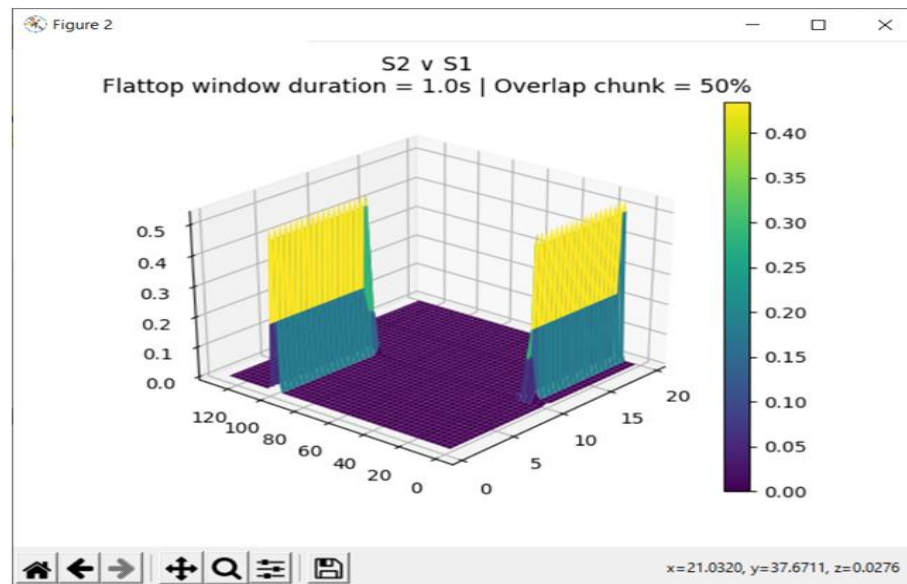


Рис.5.18. Послідовність двох синусоїд з частотами 100 Гц і 10 Гц та її спектрограма з вікном тривалістю 1 с (з перекриттям 50%)

5. Для сигналів з п. 3 лабораторної роботи №4 побудувати спектрограми сигналів з використанням вікна, тривалість і перекриття якого підібрані оптимально для визначення моменту розриву у сигналі (рис. 5.19, 5.20). Обґрунтувати свій вибір та зробити висновки.

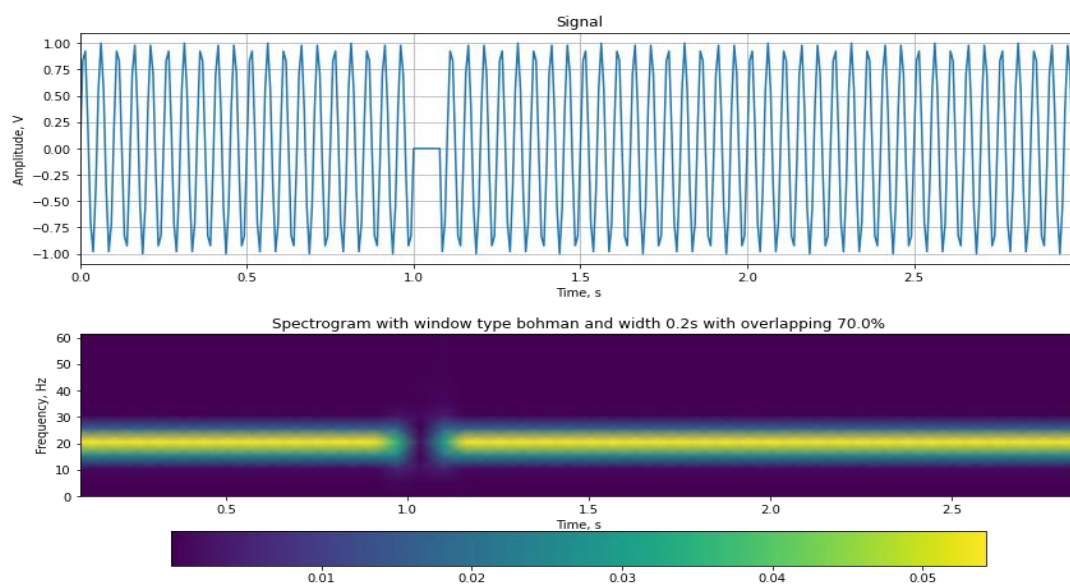


Рис.5.19. Сигнал синусоїди з розривом у сигналі в момент часу 1,05 с та його спектрограма

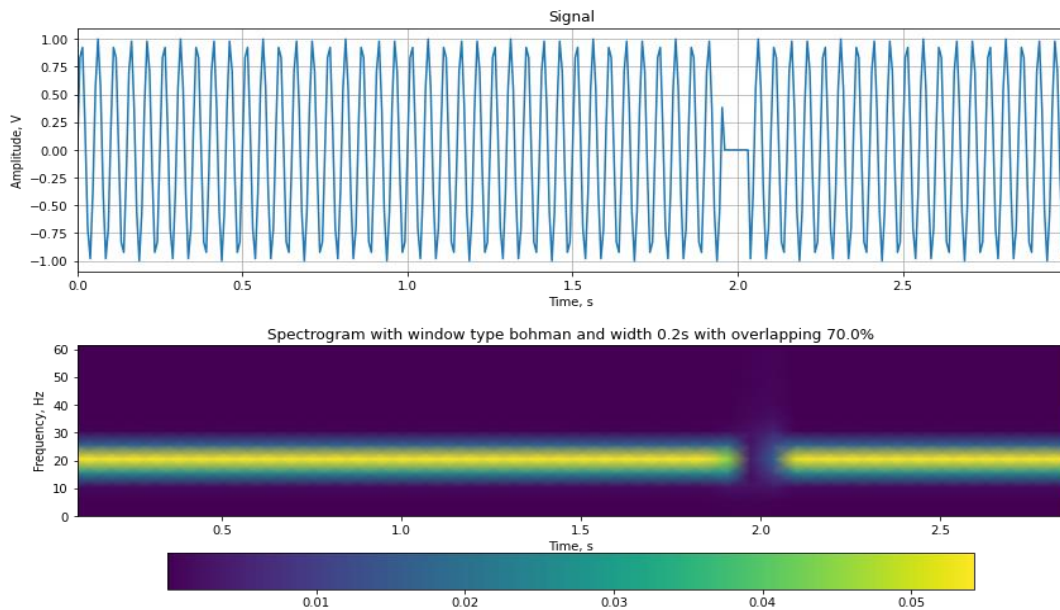
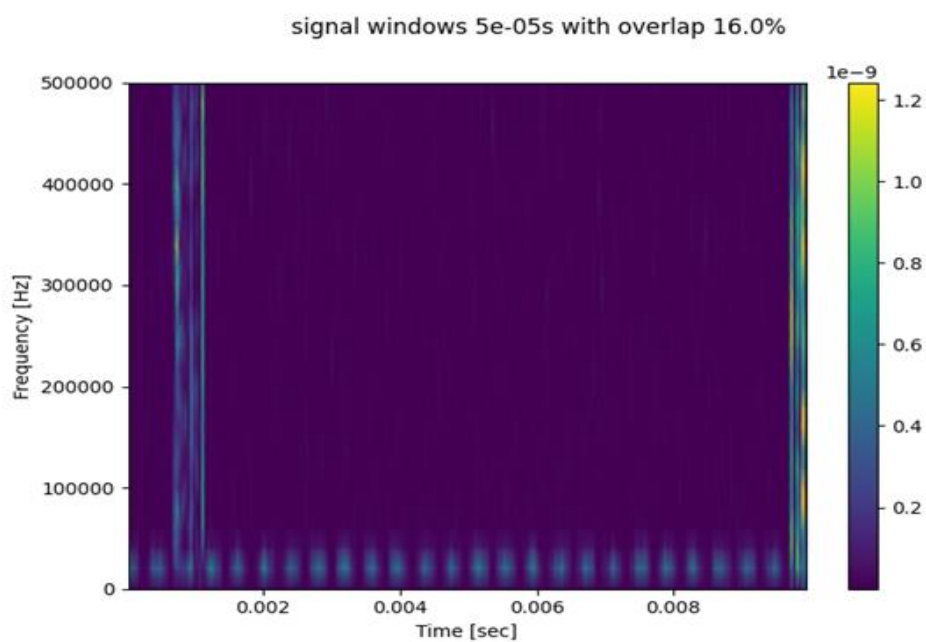


Рис.5.20. Сигнал синусоїди з розривом у сигналі в момент часу 2 с та його спектрограма

6. Побудувати функцію, яка буде графік зміни у часі середньої спектральної густини потужності в заданому частотному діапазоні та часовому діапазоні для заданого сигналу (рис. 5.21). В якості параметрів функції передавати назву сигналу, моменти часу час t_1 , t_2 та частоти f_1 , f_2 , а також інші необхідні параметри.



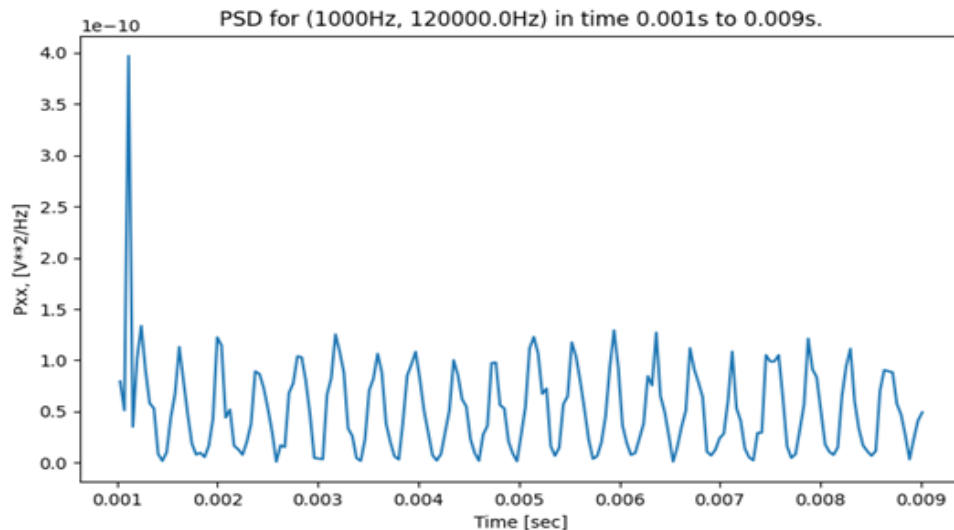


Рис. 5.21. Зміна у часі середньої спектральної густини потужності в заданому діапазоні частот і діапазоні часу для заданого сигналу

7*. Побудувати спектрограми оцифрованих біомедичних сигналів (рис. 5.22-5.26). Використати вікна різної тривалості та різного перекриття, обрати одну з комбінацій, обґрунтувати свій вибір. Зробити висновки щодо характеру зміни спектру сигналів у часі.

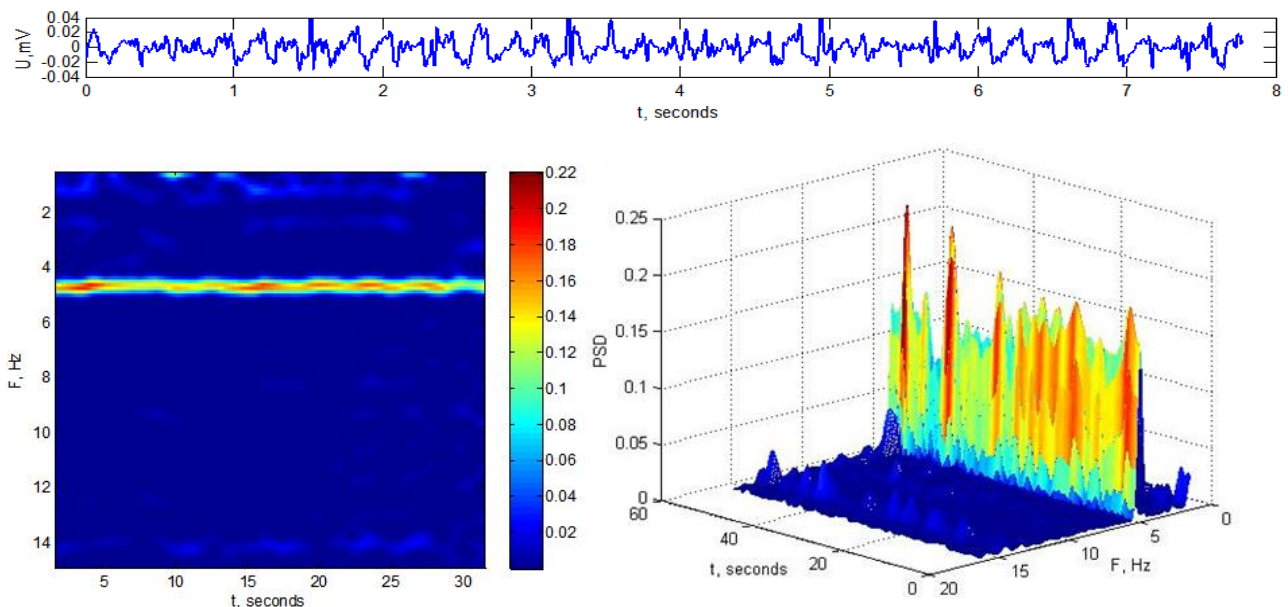


Рис. 5.22. Спектрограма сигналу електричної активності передсердь

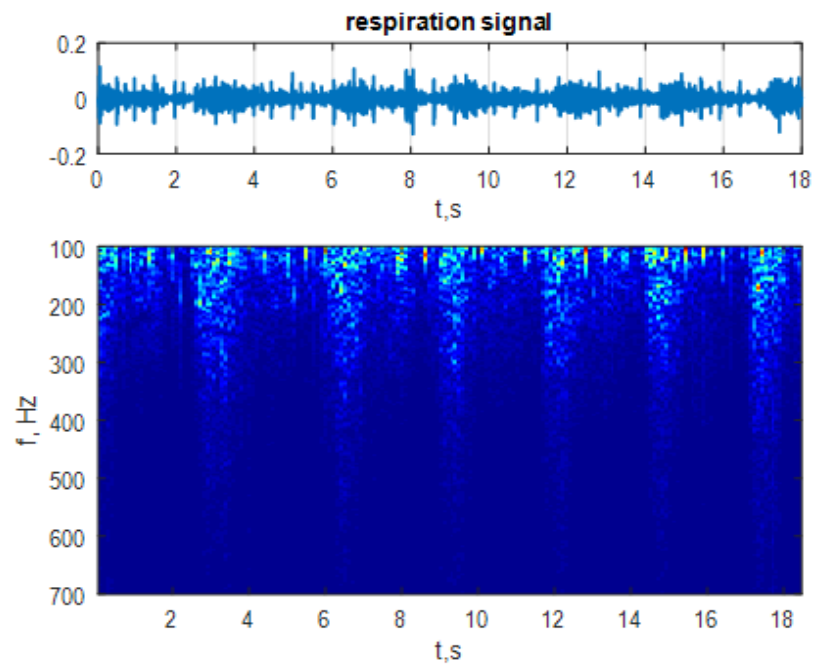


Рис. 5.23. Спектрограма сигналу дихання

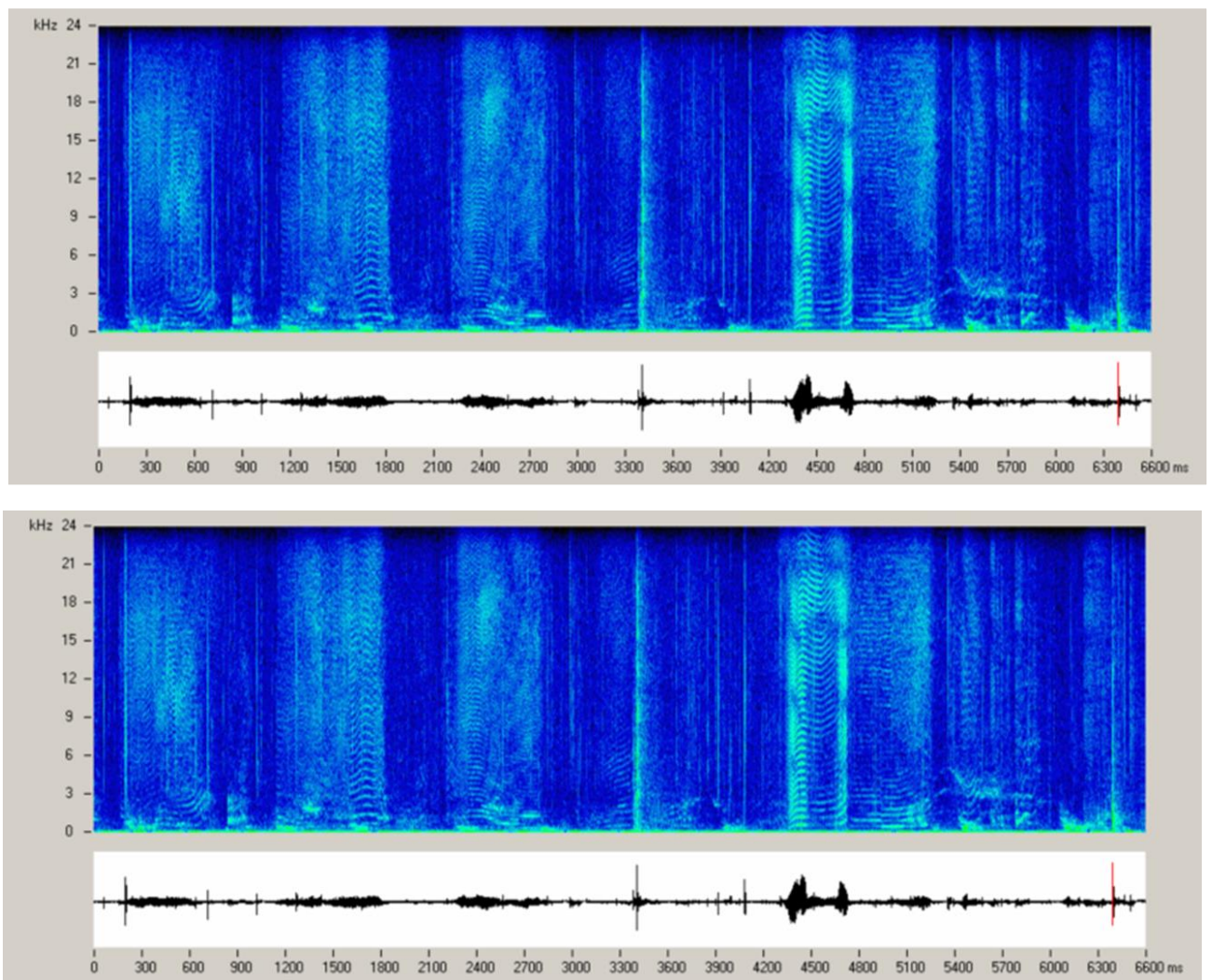


Рис. 5.24. Спектрограми звуків дельфінів

http://www-9.unipv.it/cibra/edu_dolphins_uk.html

8*. Сформувати вектор відліків часу тривалістю 10 с для частоти дискретизації 128 Гц. Сформувати сигнал послідовності прямокутних імпульсів. Сформувати відліки одної віконної функції тривалості 0,2 секунди та 2 секунди. Побудувати спектрограми сигналу. Побудувати тривимірні графіки модуля спектральної функції.

9*. Сформувати вектор відліків часу тривалістю 10 с для частоти дискретизації 512 Гц. З допомогою функції **chirp** сформувати сигнал змінної частоти: від 0 Гц в момент часу 0 с до 256 Гц в момент часу 10 с з квадратичною зміною частоти. Сформувати два синусоїдальних сигнали тривалістю 1 с частотою 150 Гц (S_1) та 200 Гц (S_2) амплітудами 1 В. Вбудувати (додати) у сигнал змінної частоти сигнал S_1 від 1-ї до 2-ї секунди, а сигнал S_2 – від 4-ї до 5-ї секунди. Побудувати спектрограму сигналу (рис. 5.25). Побудувати тривимірний графік модуля спектральної функції.

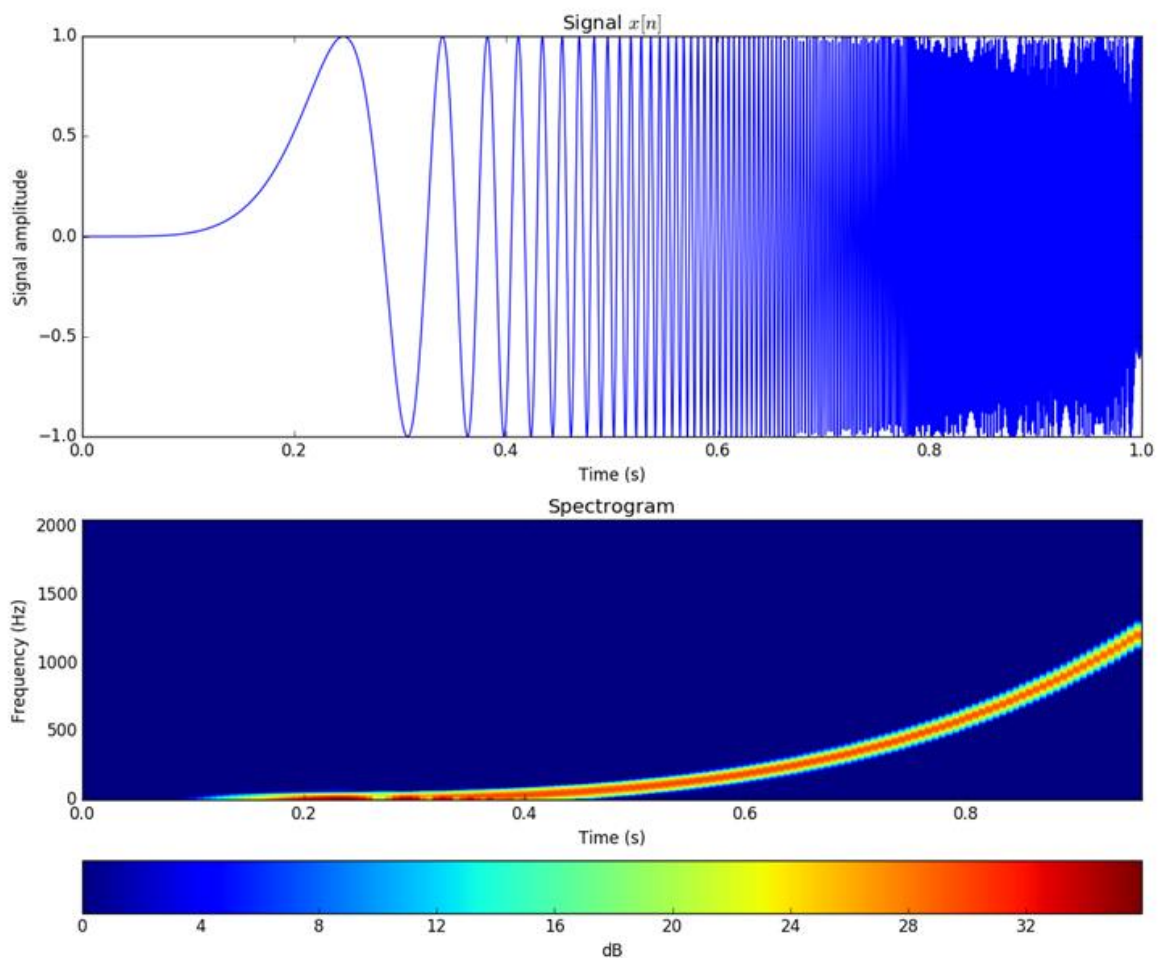


Рис.5.25. Сигнал змінної частоти та його спектрограма

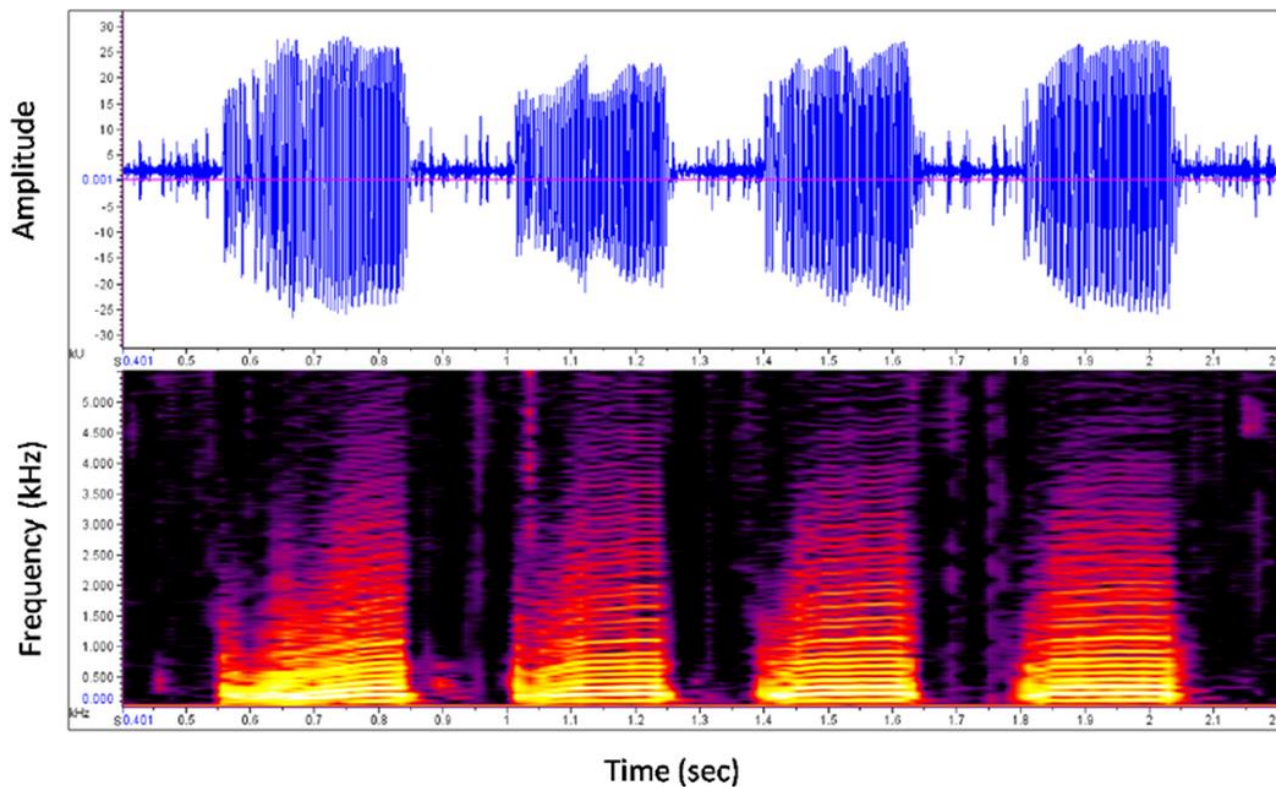


Рис. 5.26. Звуковий сигнал та його спектрограма

Контрольні питання:

1. В чому полягає спектральний аналіз сигналів та з якою метою він виконуються?
2. Записати математичний вираз розкладу сигналу у ряд Фур'є та вираз дискретного перетворення Фур'є.
3. Що таке гармоніка і чим вона характеризується?
4. Що таке амплітудний та фазовий спектр сигналу, яку інформацію він несе?
5. Для чого використовують віконні функції у разі спектрального аналізу сигналів?
6. В чому полягає спектрально-часовий аналіз сигналів та яку інформацію за допомогою нього можна отримати?

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 6

ФІЛЬТРАЦІЯ СИГНАЛІВ

Мета роботи: набути навичок проектування цифрових фільтрів, задавання специфікації фільтрів залежно від властивостей сигналів та шумів, які треба фільтрувати; набути навичок реалізації дискретної фільтрації сигналів.

Основні теоретичні відомості

Основна властивість будь-якого фільтру – це його частотна і фазова характеристики. Вони показують, як фільтр впливає на амплітуду і фазу різних гармонік оброблюваного сигналу.

Апроксимація фільтрів – апроксимація форми амплітудно-частотної характеристики (АЧХ) фільтрів. Як правило, параметри реального фільтра задаються формулюваннями «повинен мати параметри, не гірші за такі ...».

Апроксимація фільтру полягає у підборі аналітичного опису передавальної функції (характеристичної функції), яка задовольняє умовам фільтрації та легко реалізується у вигляді конкретного схемотехнічного блоку або чисельного алгоритму.

За формою графіку модуля комплексної частотної характеристики (за видом АЧХ) фільтри ділять на чотири основні типи:

- фільтр нижніх частот (ФНЧ, low-pass filter) – має порівняно великий коефіцієнт передачі на частотах, які знаходяться в околі нульової частоти, і порівняно низький – на інших частотах. Тому такі фільтри зберігають незмінною величину спектральних складових вхідного сигналу на нижніх частотах; говорять, що ФНЧ пропускають низькочастотні сигнали та не пропускають високочастотні;

- фільтр верхніх частот (ФВЧ, high-pass filter) – має високий коефіцієнт передачі на частотах, які більші за частоту зрізу, і низький – на частотах від

нуля до частоти зрізу f_p . Отже, вони пропускають без змін частину спектру вхідного сигналу, яка знаходиться на частотах від частоти зрізу f_p до $+\infty$ і не пропускають складові спектру сигналу від 0 до f_p . ФВЧ пропускають високочастотні сигнали;

– смуговий фільтр (СФ, band-pass filter) – має великий коефіцієнт передачі лише у певній смузі частот між частотами f_{p1} та f_{p2} . Поза цим діапазоном частот коефіцієнт передачі малий. Отже, на вихід такого фільтра пройдуть лише ті спектральні складові сигналу, які знаходяться у смузі пропускання фільтра, і не пройдуть ті, які лежать від нуля до f_{p1} та від f_{p2} до $+\infty$;

– загороджувальний фільтр (ЗФ, band-stop filter) – є дуальним до смугового: великий коефіцієнт передачі у нього поза діапазоном частот від f_{p1} до f_{p2} . Починаючи від нульової частоти і до f_{p1} , а також від f_{p2} до $+\infty$ коефіцієнт передачі великий. Тому у разі проходження через такий фільтр сигналу, із його спектру видаляться складові, що лежать між f_{p1} та f_{p2} , а всі інші складові пройдуть на вихід фільтру без змін. Іноді загороджувальний фільтр називають режекторним фільтром. Якщо смуга фільтра порівняно вузька, такий загороджувальний фільтр називають іноді фільтром-пробкою (notch-filter). Зокрема, такі фільтри використовують для позбавлення від мережевої перешкоди, коли треба вирізати зі спектру сигналу лише спектральну складову в околі частоти 50 Гц.

Для неперервної системи комплексна частотна характеристика (КЧХ) може бути записана в операторній формі через оператор Лапласа:

$$K(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{A_0 + A_1 p + A_2 p^2 + \dots + A_m p^m}{B_0 + B_1 p + B_2 p^2 + \dots + B_n p^n} =$$

$$= \frac{(a_{01} + a_{11} p)(a_{02} + a_{12} p + a_{22} p^2) \dots (a_{0m} + a_{1m} p + a_{2m} p^2)}{(b_{01} + b_{11} p)(b_{02} + b_{12} p + a_{22} p^2) \dots (b_{0n} + b_{1n} p + b_{2n} p^2)}$$

у вигляді дробу, чисельник та знаменник якої є добутками поліномів не вище другого ступеню. Сукупність значень нулів чисельника називають нулями передавальної функції, сукупність значень нулів знаменника – полюсами.

Порядок фільтра – це кількість полюсів передавальної функції.

Характеристична функція також може бути записана у вигляді:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{m=0}^M b_m z^{-m}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} = \left(\frac{b_0}{a_0} \right) \frac{\prod_{m=1}^M (1 - c_m z^{-1})}{\prod_{k=1}^N (1 - d_k z^{-1})}$$

Кожний із множників $(1 - c_m z^{-1})$ чисельника відповідає простому нулю характеристичної функції у точці $z = c_k$ і простому полюсу у точці $z = 0$. Аналогічно, множник знаменника $(1 - d_k z^{-1})$ відповідає полюсу у точці $z = d_k$ і нулю у точці $z = 0$.

Вираз для комплексної частотної характеристики $K(p)$ доцільно представляти у вигляді добутків множників не вище другого порядку:

$$H(p) = k_1(p) \cdot k_2(p) \cdot \dots$$

Кожний з таких множників є передавальною функцією деякої простої схемної ланки. Тобто фільтр будь-якого порядку можна отримати за послідовного з'єднання фільтрів першого та другого порядку.

Задача апроксимації полягає у знаходженні кількості нулів та полюсів передавальної функції, а також всіх коефіцієнтів передавальної функції.

Фільтри всіх типів проектуються з використанням низькочастотного прототипу – еквівалентного НЧ фільтра для того фільтру, який потрібно спроектувати. Від специфікації необхідного фільтру переходять до специфікації НЧ-прототипу, апроксимують його АЧХ та за допомогою процедури перетворення частот отримують коефіцієнти передавальної функції потрібного фільтру [1, 8].

Порядок роботи

Для всіх завдань програмно будувати: графік початкового сигналу та його амплітудний спектр, графік шуму та його амплітудний спектр, графік зашумленого сигналу (вхідного сигналу фільтра) та його амплітудний спектр,

графік АЧХ фільтра, графік відфільтрованого сигналу та його амплітудний спектр.

Для всіх фільтрів максимальний припустимий коефіцієнт передачі на частоті зрізу обрати 3 дБ, а мінімальний припустимий коефіцієнт передачі на частоті затримки обрати так, щоб порядок фільтра був не менше 5-го та не більше 10-го.

У кожному завданні оцініть співвідношення сигнал/шум на вході та виході фільтра та зробіть висновки про якість фільтрації.

1. Сформувати вектор відліків часу тривалістю 5 с для частоти дискретизації 128 Гц. Сформувати прямокутний імпульс в момент часу 3 с тривалості 0,1 с амплітуди 1 В. Додати до сигналу випадковий шумовий сигнал із нульовим середнім значенням амплітуди 0,5 В. Спроектувати ФНЧ Батерворта для позбавлення сигналу від шуму (функції **buttord**, **butter**, **filter**). (рис. 6.1, 6.2).

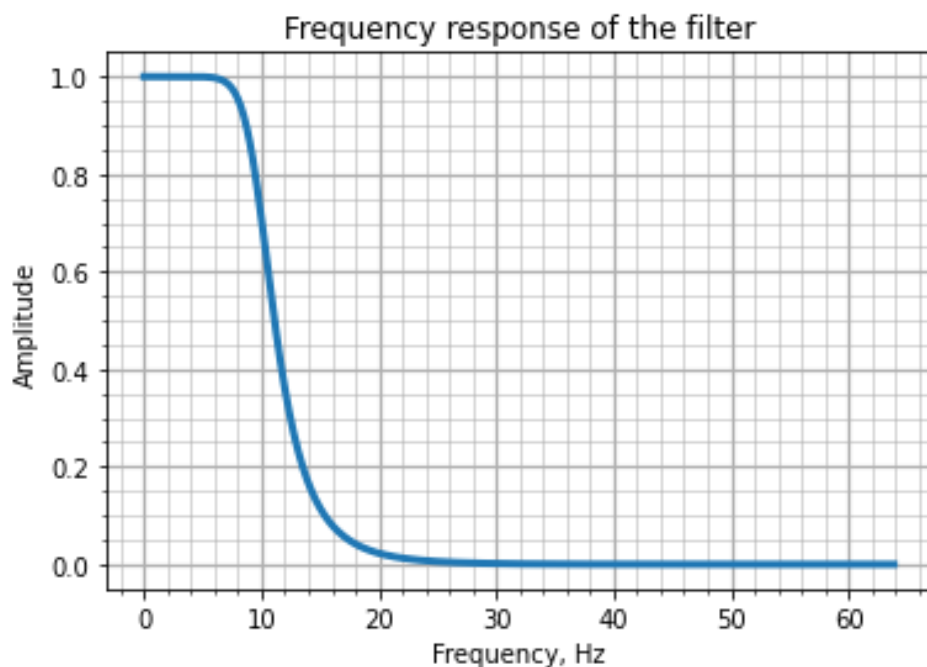


Рис. 6.1. АЧХ фільтру НЧ Батерворда

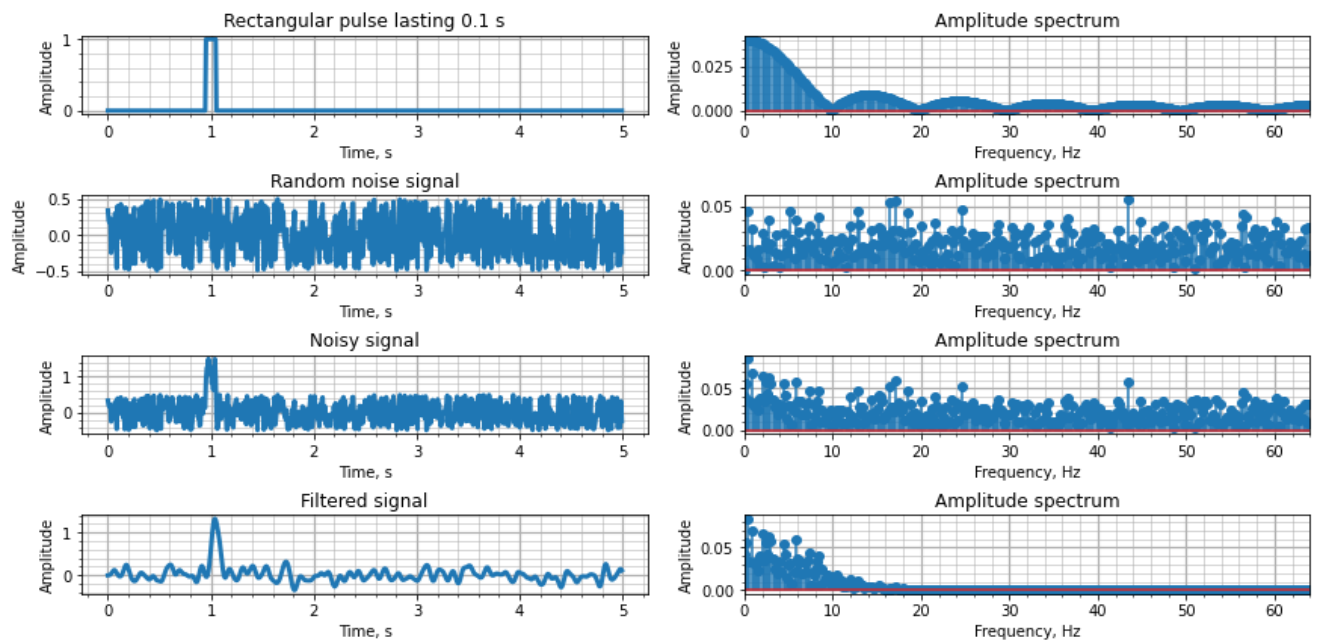


Рис. 6.2. Приклади сигналів та їх амплітудних спектрів

2. Сформувати вектор відліків часу тривалістю 1 с для частоти дискретизації 128 Гц. Сформувати сигнали ділянки синусоїди частотою 10 Гц амплітуди 1 В. Додати випадковий сигнал з нульовим середнім значенням амплітуди 2 В. Спроектувати ФНЧ, ФВЧ та СФ Чебишева І-го роду для позбавлення сигналу від шуму (**cheb1ord**, **cheby1**) (рис. 6.3, 6.4).

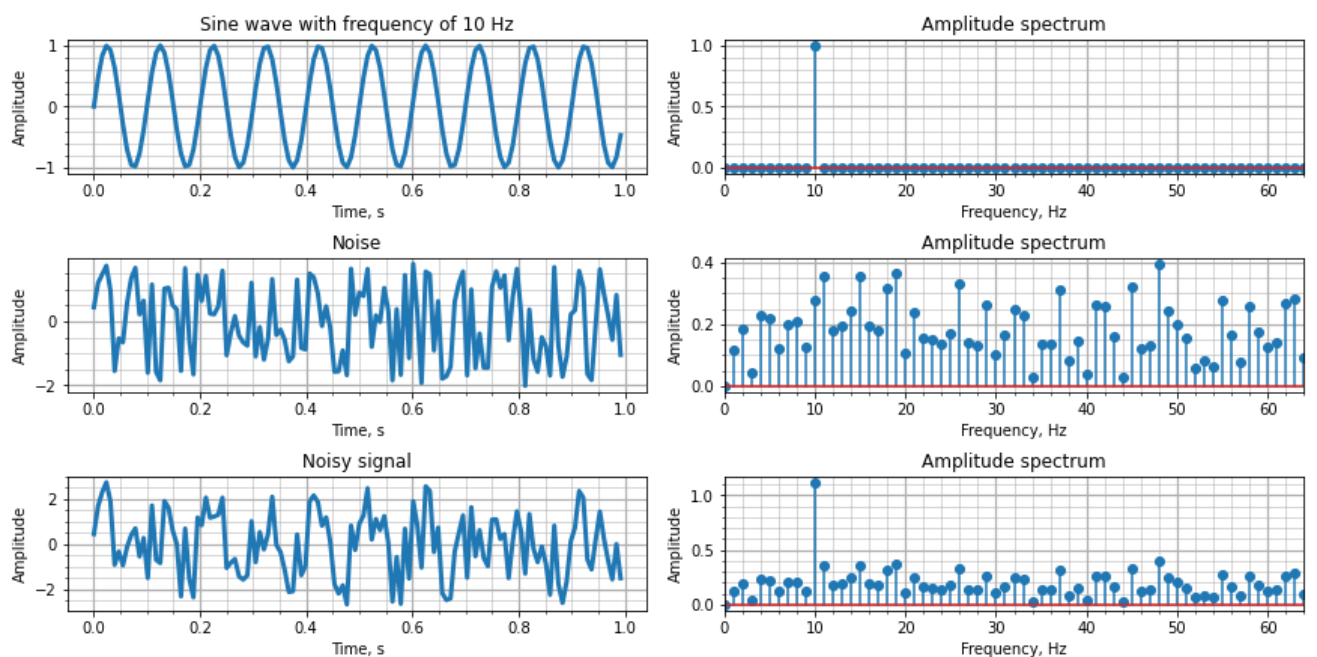


Рис. 6.3. Приклади сигналів та їх амплітудних спектрів

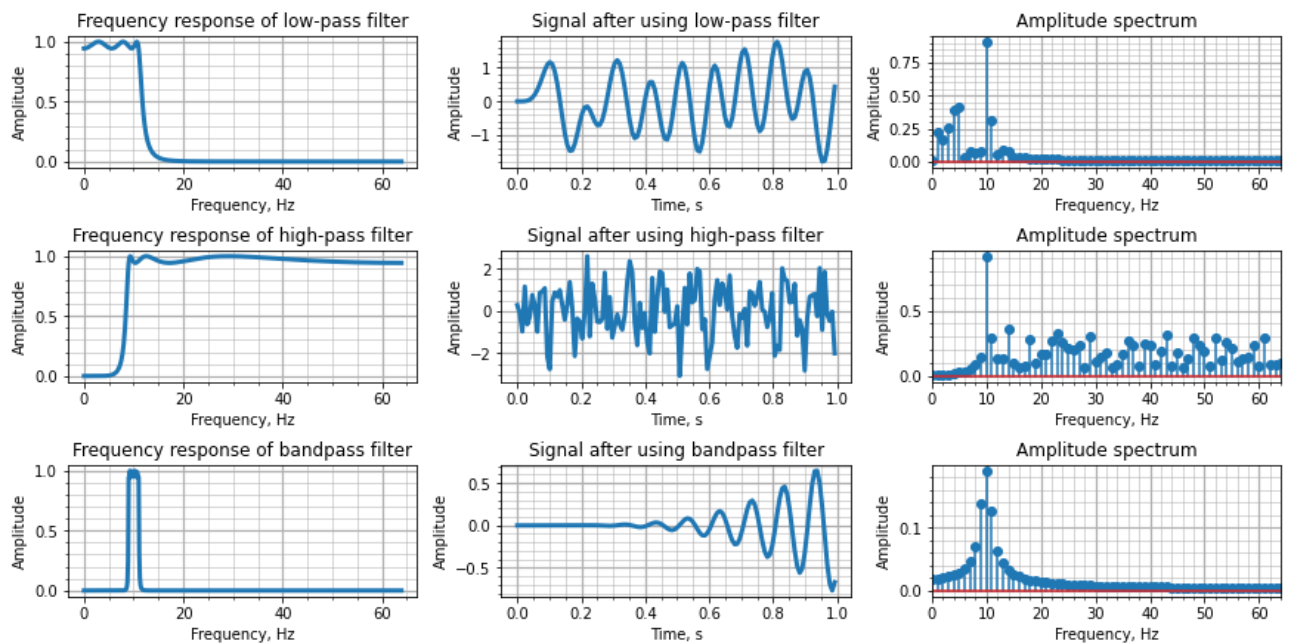


Рис. 6.4. Спроектовані ФНЧ (low-pass), ФВЧ (high-pass) та смугового (band-pass) фільтру Чебишева

3. Сформувати вектор відліків часу тривалістю 10 с для частоти дискретизації 128 Гц. Сформувати випадковий сигнал амплітуди 10 мВ з нульовим середнім значенням, який зашумлений мережевою перешкодою частоти 50 Гц з амплітудою 1 В. Спроекувати ЗФ Батерворта для позбавлення сигналу від перешкоди (рис. 6.5, 6.6).

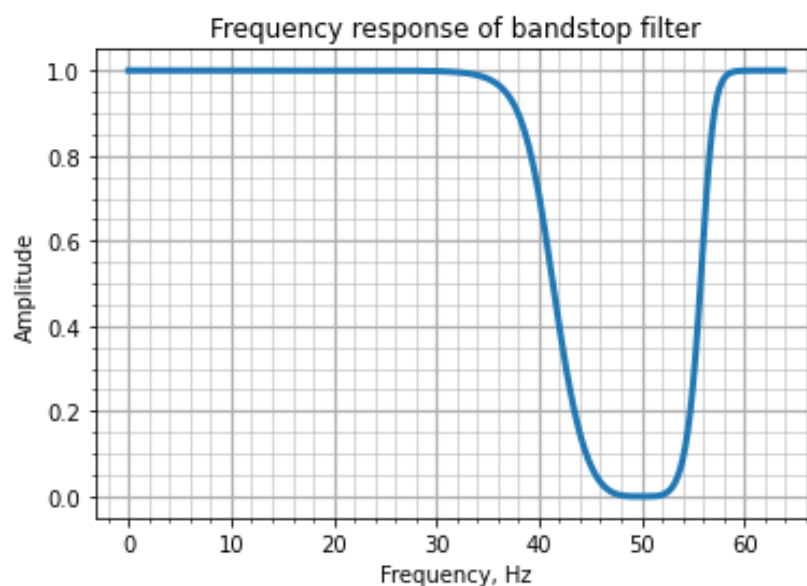


Рис. 6.5. АЧХ загорджувального (band-stop) фільтру Батерворду

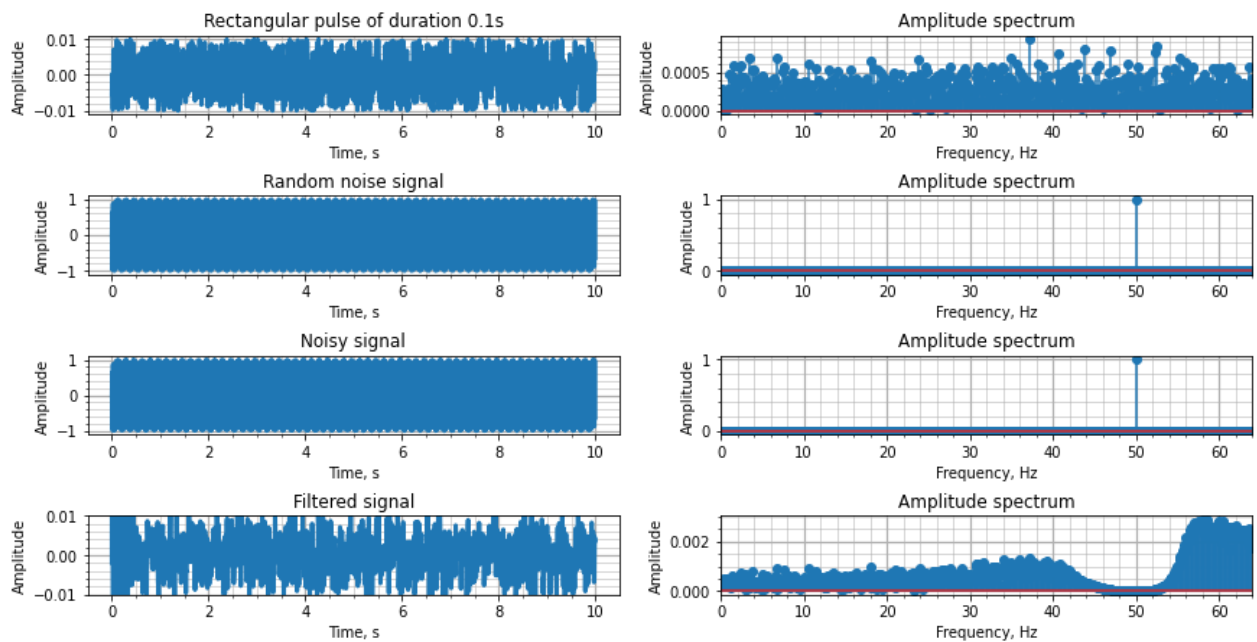


Рис. 6.6. Приклади сигналів та їх амплітудних спектрів

4. Для звукових сигналів, які отримані з різною частотою дискретизації, виконати за допомогою фільтрів розділення на три спектральні діапазони: до 450 Гц; від 450 Гц до 1 кГц; від 1 кГц до 4 кГц. Прослухати отримані сигнали, зробити висновки (рис. 6.7 - 6.9).

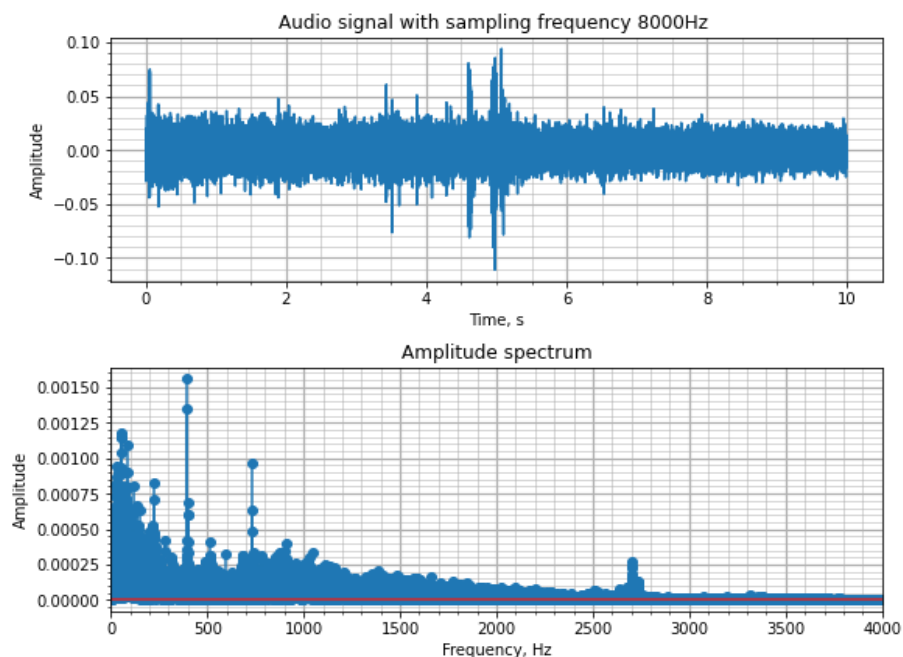


Рис. 6.7. Приклад звукового сигналу з частотою дискретизації 8 кГц та його амплітудний спектр

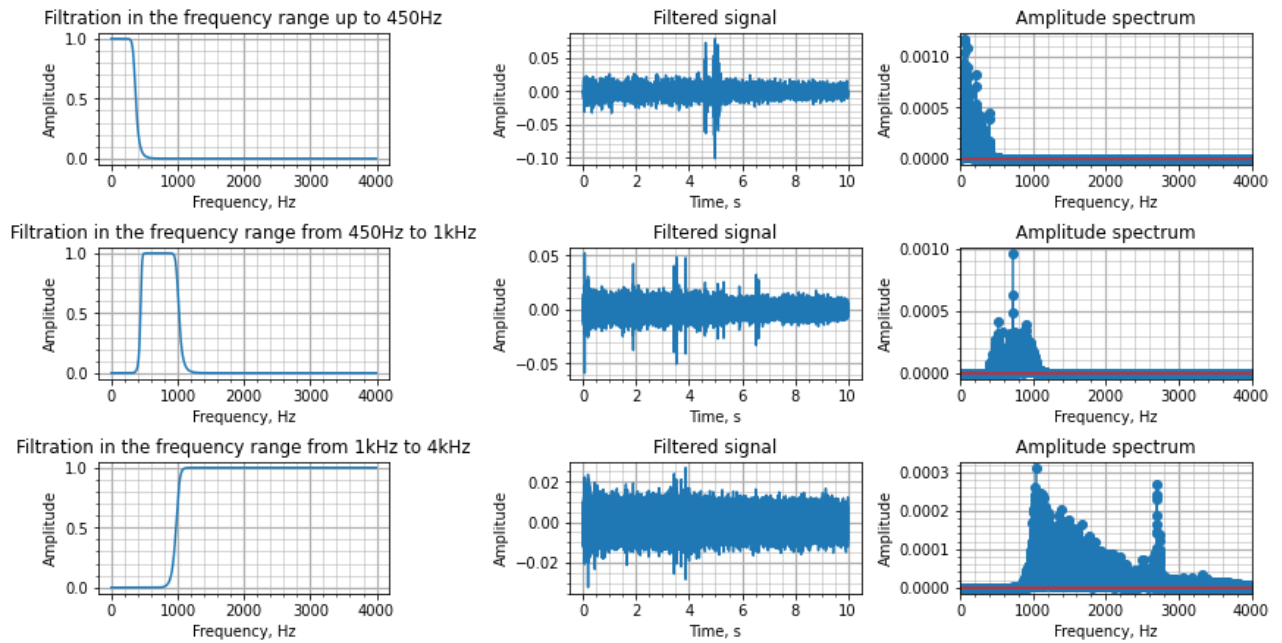


Рис. 6.8. Спроектований ФВЧ, СФ та ФВЧ для звукових сигналів

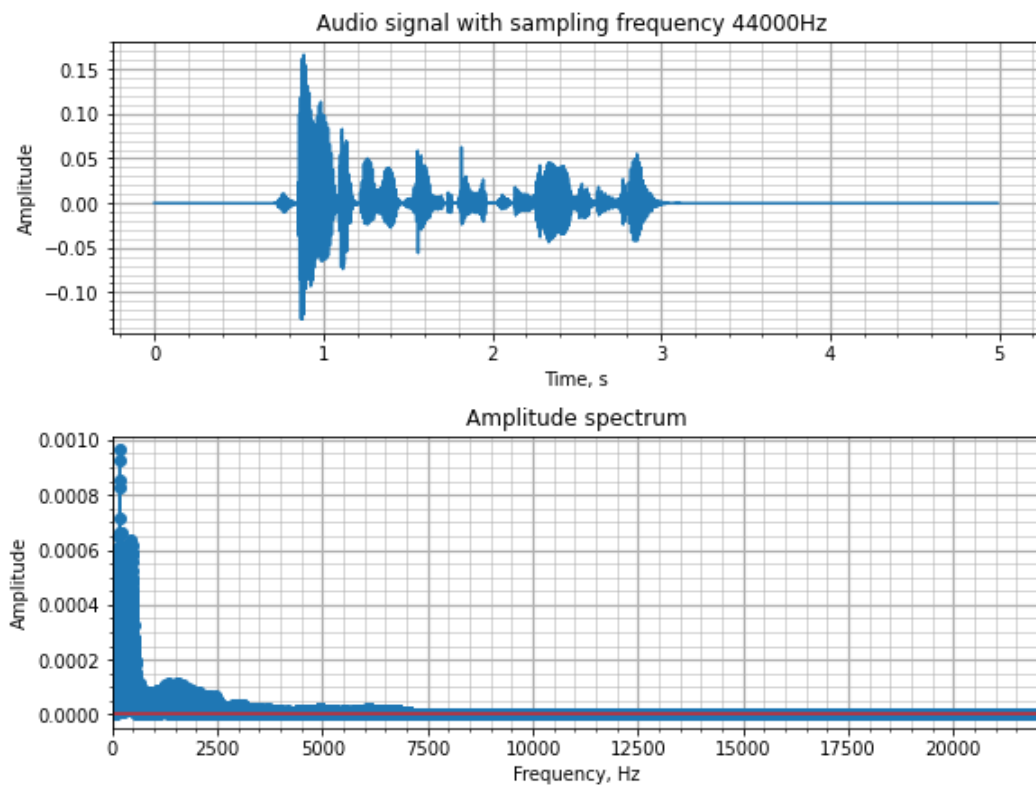


Рис. 6.9. Приклад звукового сигналу з частотою дискретизації 44 кГц та його амплітудний спектр

5*. Для оцифрованих біомедичних сигналів спроектувати фільтри для позбавлення від мережевої перешкоди 50 Гц.

6*. Побудувати функцію, яка для сигналу ЕЕГ, що прочитаний з файлу, для заданого каналу та проміжку часу за допомогою фільтрації розраховує середню спектральну густину потужності у спектральних діапазонах δ - ритму (1-3.5 Гц), θ - ритму (4-7 Гц), α - ритму (8-13 Гц), β - ритму (14-30 Гц). Отримати графіки кожного ритму (рис. 6.10 – 6.12).

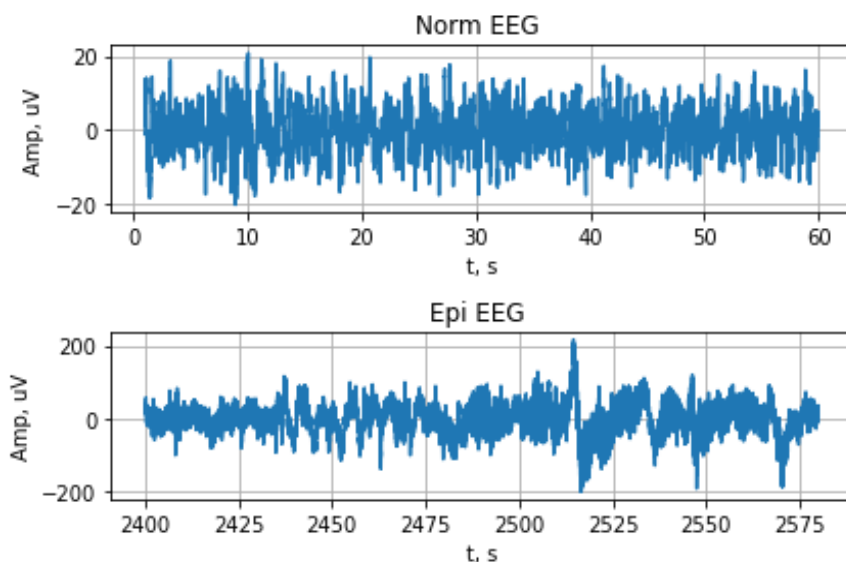


Рис. 6.10. Приклади ЕЕГ-сигналів у нормі та з епілепсією

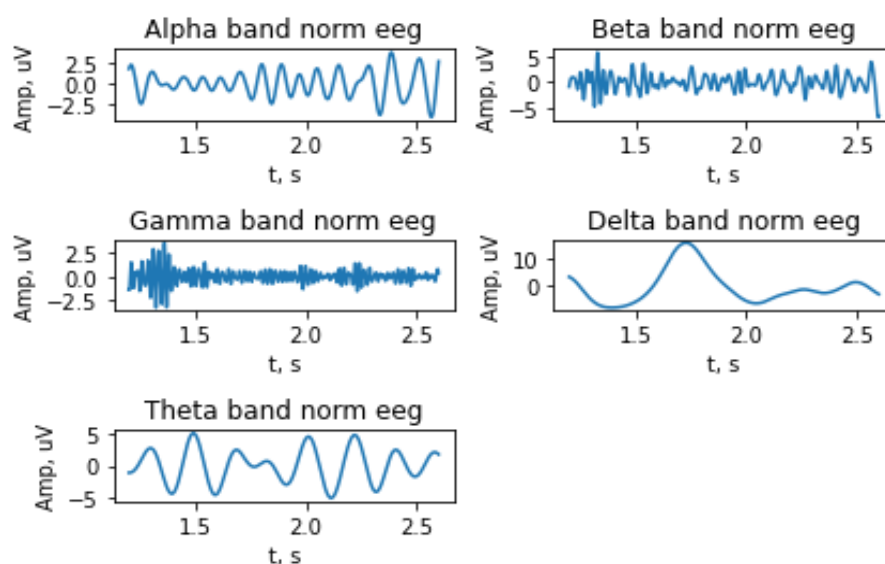


Рис. 6.11. Приклади відфільтрованих ЕЕГ-ритмів для випадку норми: δ - ритм (1-3.5 Гц), θ - ритм (4-7 Гц), α - ритм (8-13 Гц), β - ритм (14-30 Гц)

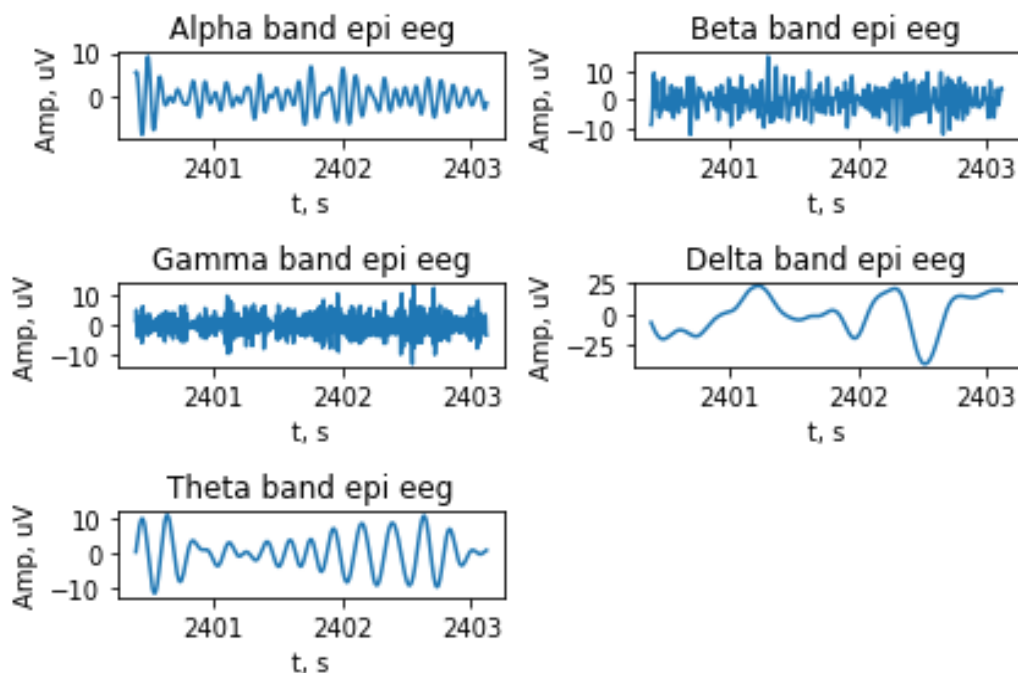


Рис. 6.12. Приклади відфільтрованих ЕЕГ-ритмів для випадку епілепсії: δ - ритм (1-3.5 Гц), θ - ритм (4-7 Гц), α - ритм (8-13 Гц), β - ритм (14-30 Гц)

7*. Застосувати до сигналів фільтр Чебишева II типу та еліптичний фільтр. Порівняйте результати фільтрації різними фільтрами, зробіть висновки.

Контрольні питання:

1. В чому полягає фільтрація сигналів та з якою метою вона проводиться?
2. Як реалізується фільтрація у середовищі Python, та які попередні дані для фільтрації необхідно мати?
3. Внаслідок чого наявна відмінність у результатах застосування різних фільтрів для фільтрації одних і тих самих сигналів?

* ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 7

КОРЕЛЯЦІЙНИЙ АНАЛІЗ ДЕТЕРМІНОВАНИХ СИГНАЛІВ

Мета роботи: дослідити властивості сигналів з використанням кореляційного аналізу; набути навичок кореляційного аналізу сигналів.

Основні теоретичні відомості

Кореляційний аналіз сигналів допомагає для вирішення таких задач, як:

- пошук в сигналі ділянок, які є схожими на певні, заздалегідь визначені зразки (патерни). Це задача, наприклад, виявлення в електроенцефалограмі коливань, які відповідають передвісникам епілепсій, порівняння надісланого та віддзеркаленого від літака імпульсів та ін.;

- визначення, наскільки два сигнали схожі один на інший за формою. Для таких сигналів треба оцінити, чи пов'язані між собою зміни форми сигналів, чи синхронно відбуваються у сигналах коливання, чи однакові параметри сигналів;

- визначити, чи в одному і тому самому сигналі присутні ділянки, які схожі одна на одну, які повторюються через деякий час, або знайти, чи є у сигналі періодичності і чому дорівнює період сигналу.

Нехай маємо два скінченні сигнали з обмеженою енергією $x_1(t)$ та $x_2(t)$ (та $x_1[n]$ і $x_2[n]$). Як кількісний показник того, наскільки вони схожі один на одного, можна обрати інтеграл від їх добутку. Якщо при переході від одного моменту часу до іншого сигнали змінюються схоже, то їх поточкові добутки будуть великими, і інтеграл буде мати велике значення. Якщо значення одного і іншого сигналу змінюються випадково та не пов'язані одні з іншими, то ці поточкові добутки будуть невеликими, мати різні знаки, та значення інтегралу буде близьким до нуля.

Для того, щоб значення запропонованого показника не залежало від тривалості і показувало лише на те, синхронними чи випадковими є зміни в сигналах, інтеграл треба також поділити на довжину сигналів.

Також треба врахувати, що між змінами у сигналах, навіть синхронними, може бути певна затримка. Наприклад, спочатку зростають значення одного сигналу, а потім через деякий час так само зростають значення іншого. Щоб врахувати це у показнику схожості, його треба розраховувати для випадків, коли один сигнал є зафіксованим у часі, а інший – зсувається в тому чи іншому напрямку відносно першого. І для кожного значення зсуву треба розраховувати інтеграл від добутків миттєвих значень сигналів. Отже, показник схожості двох сигналів буде не числом, а функцією від параметра зміщення сигналів один відносно одного. Ця функція буде характеризувати кореляцію між двома сигналами за різних запізнень одного відносно іншого.

Взаємнокореляційна функція (ВКФ) для скінченних неперервних та дискретних сигналів буде визначатися за виразами:

$$r_{12}(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T x_1(t) x_2(t - \tau) dt$$

$$r_{12}[j] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_1[n] x_2[n - j]$$

де τ та j – параметри, які показують зміщення сигналів один відносно одного.

Видно, що вирази (1) та (2) будуть залежати від значень сигналів (амплітуд), і тому вони не завжди будуть відображати саме схожість форми сигналів. Щоб уникнути цього, треба нормувати функцію на енергії сигналів. В результаті отримаємо вирази, які можна використовувати для практичних розрахунків. Остаточно отримаємо такі модифіковані вирази для ВКФ:

$$B_{12}(\tau) = \frac{r_{12}(\tau)}{\frac{1}{T} \sqrt{\int_0^T x_1^2(t) dt \cdot \int_0^T x_2^2(t) dt}}$$

$$B_{12}[j] = \frac{r_{12}[j]}{\frac{1}{N} \sqrt{\sum_{n=0}^{N-1} x_1^2[n] \cdot \sum_{n=0}^{N-1} x_2^2[n]}}$$

ВКФ показує схожість між двома сигналами. Значення функцій та завжди будуть лежати між -1 та +1. -1 відповідає випадку, коли зростання одного сигналу приводить до зменшення іншого, а +1 – коли сигнали змінюються абсолютно однаково. Якщо значення ВКФ дорівнює нулю, це може значити, що зміни сигналів або не пов'язані, або механізм зв'язку між сигналами не можна виявити за допомогою ВКФ.

Значення ВКФ за $\tau = 0$ та $j = 0$ називають коефіцієнтами (взаємної) кореляції двох сигналів.

Якщо треба визначити, чи схожим є сигнал на свою зміщену копію (наприклад, чи є у ньому ділянки, які повторюються, чи періодичний сигнал), то можна скористатися таким же підходом, як і для ВКФ, але брати лише один сигнал. В такому випадку розраховують *автокореляційну* функцію (кореляційну функцію) (АКФ):

$$r_x(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T x(t)x(t-\tau)dt, \quad (5)$$

$$r_x[j] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n]x[n-j]. \quad (6)$$

Ці вирази також можна модифікувати аналогічно до (3) та (4):

$$B_x(\tau) = \frac{\int_0^T x(t)x(t-\tau)dt}{\int_0^T x^2(t)dt}, \quad (7)$$

$$B_x[j] = \frac{\sum_{n=0}^{N-1} x[n]x[n-j]}{\sum_{n=0}^{N-1} x^2[n]}. \quad (8)$$

Треба також зважати на особливості розрахунків ВКФ та АКФ для скінченних сигналів. Оскільки у розрахунках використовують сигнали скінченної тривалості, то за достатньо великих зміщень τ та j величина області перекриття двох сигналів буде невеликою. Значення двох сигналів вже не будуть формувати парні добутки. Тому і значення ВКФ для цих аргументів може бути меншим, ніж насправді, внаслідок крайових ефектів.

Властивості ВКФ та АКФ:

1. Значення ВКФ за нульового зміщення дорівнює потужності сигналу (для періодичних сигналів – середній потужності за період):

$$r_x(0) = P$$

Якби усереднення за період у виразах було відсутнім, то значення при $\tau = 0$ було б рівним енергії сигналу:

$$r(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t) dt = E$$

2. АКФ є парною функцією:

$$r_x(-\tau) = r_x(\tau).$$

3. Для ВКФ виконується властивість:

$$r_{12}(-\tau) = r_{21}(\tau)$$

тобто зміна знаку еквівалентна перестановці сигналів місцями.

4. Значення АКФ за нульово зміщення є максимально можливим значенням. Зі збільшенням зміщення сигналів АКФ згасає.

5. Максимальне значення ВКФ може бути у разі будь-якого значення взаємного зміщення двох сигналів.

6. АКФ періодичного сигналу є періодичною функцією. ВКФ сигналів з однаковим періодом є періодичною функцією з таким самим періодом. Період ВКФ сигналів з різними періодами дорівнює меншому періоду з двох сигналів [1, 9-10].

Порядок роботи

1. Сформувати вектор відліків часу тривалістю 1 с для частоти дискретизації 256 Гц. Сформувати сигнал випадкового білого гаусівського шуму (функція **randn**). Розрахувати та побудувати графік автокореляційної функції. Зробити висновки щодо характеру АКФ для шуму (рис. 7.1).

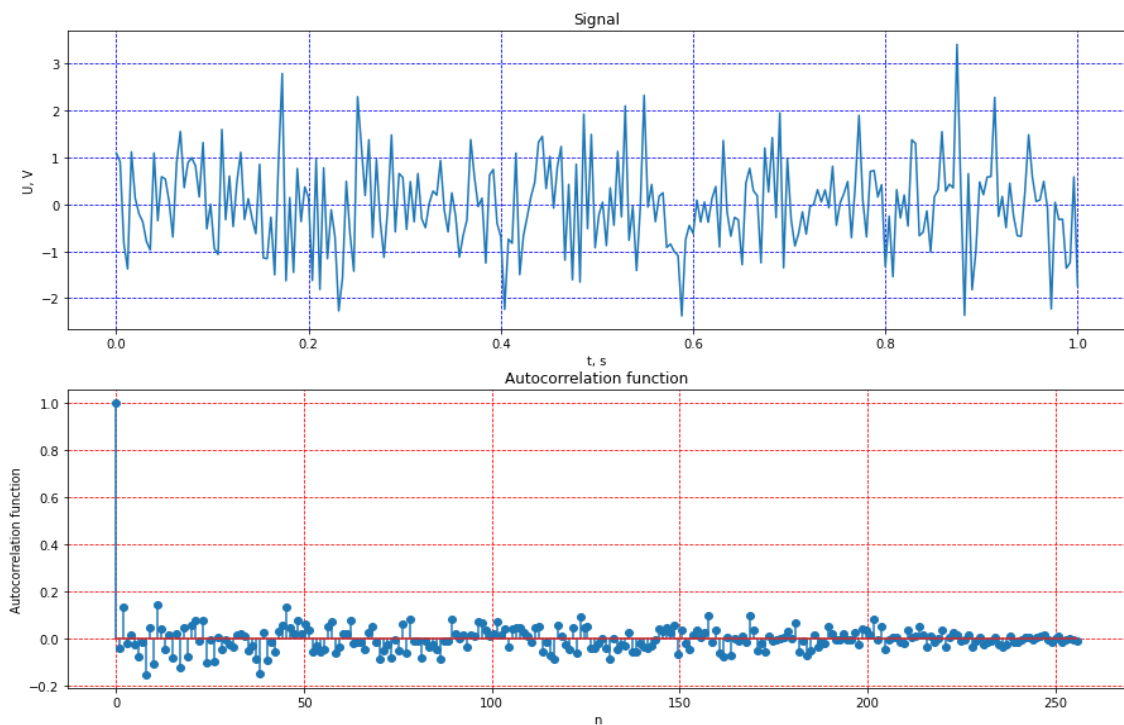


Рис. 7.1. Випадковий білий гаусівський шум та його автокореляційна функція

2. Сформувати вектор відліків часу тривалістю 1 с для частоти дискретизації 256 Гц. Сформувати дискретний аналог сигналу $x(t) = 5\cos(2\pi 50t) + 2\cos(2\pi 100t)$. Побудувати графік автокореляційної функції (рис. 7.2). Зробити висновки щодо характеру АКФ для періодичного сигналу.

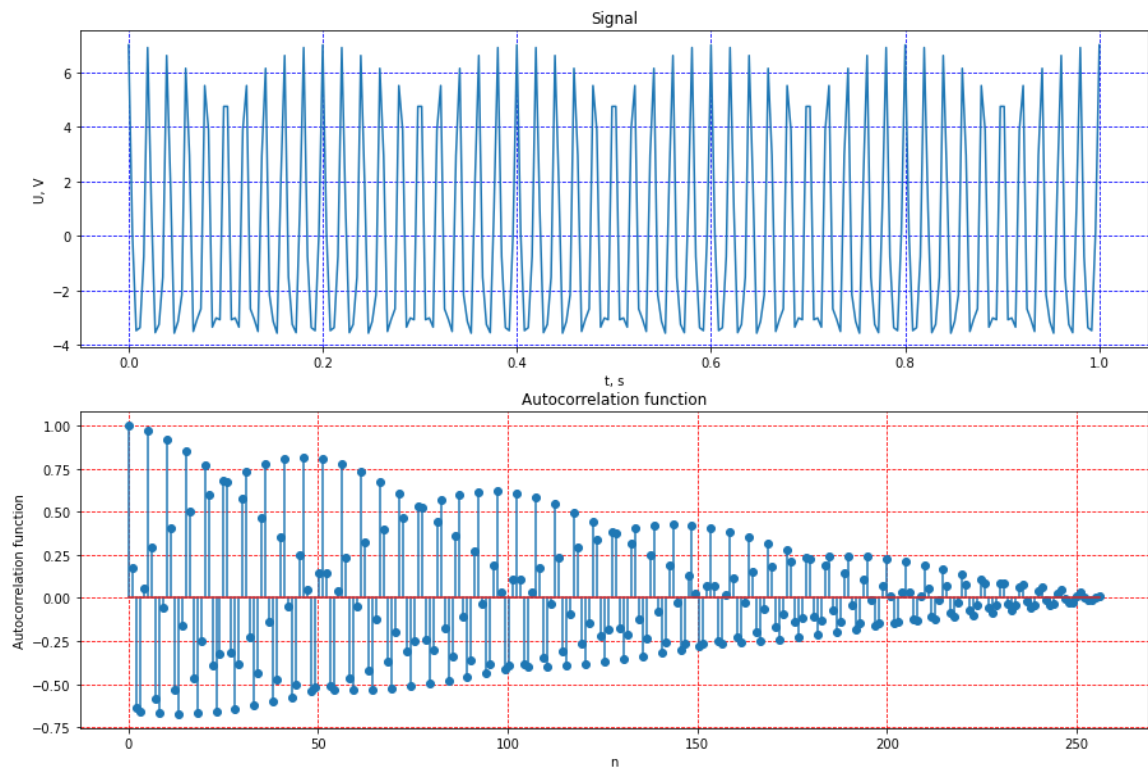


Рис.7.2. Сигнал $x(t) = 5\cos(2\pi 50t) + 2\cos(2\pi 100t)$ та його автокореляційна функція

3. Сформувати вектор відліків часу тривалістю 10 с для частоти дискретизації 256 Гц. Сформувати сигнали: прямокутний імпульс амплітуди 1 В тривалості 1 с у момент часу 3 с (сигнал 1), та прямокутний імпульс амплітуди 1 В тривалістю 1 с у момент часу 0 с (сигнал 2). Побудувати графік взаємнокореляційної функції, зробити висновки щодо можливості визначення локалізації у часі прямокутного імпульсу з використанням кореляційного аналізу (рис. 7.3).

4. Повторити п. 3, попередньо додавши до сигналу 1 шум з нульовим середнім значенням. Зробити висновки, порівняти з п. 3 (рис. 7.4).

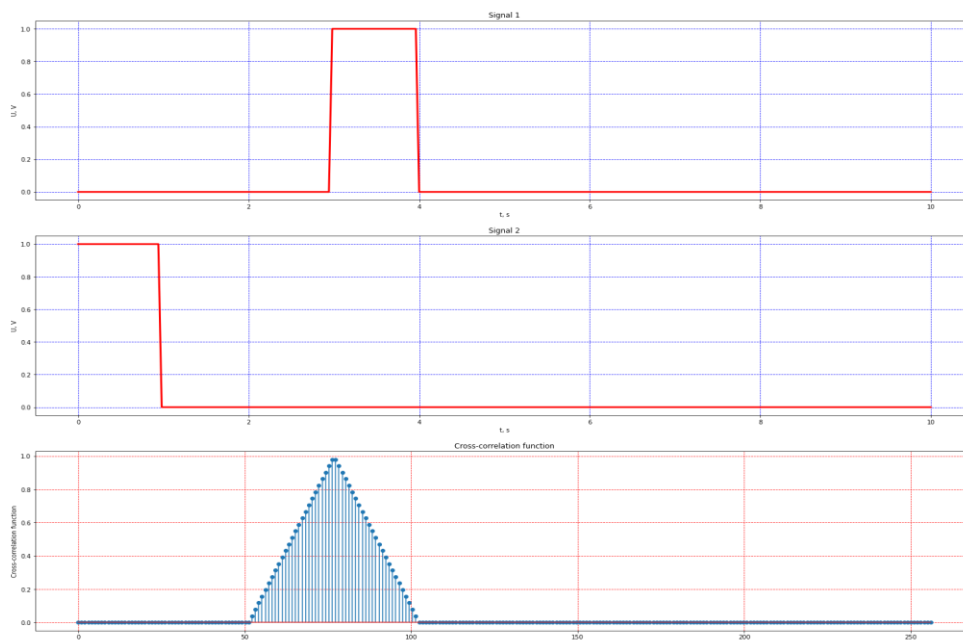


Рис.7.3. Прямокутні сигнали та їх взаємнокореляційна функція

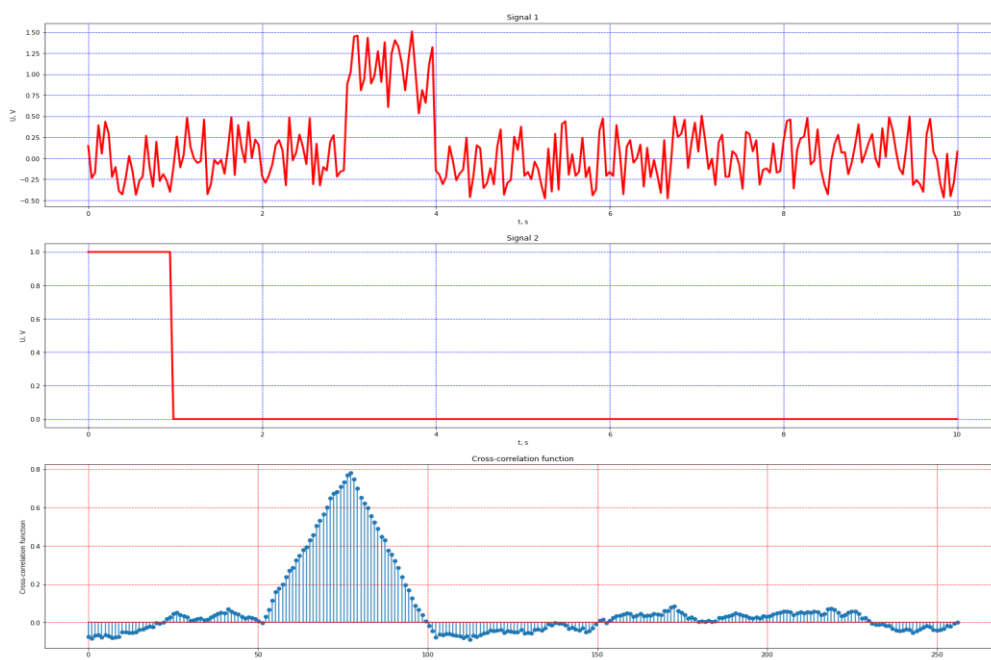


Рис.7.4. Прямокутні сигнали з шумовою компонентою у першому сигналі та їх взаємнокореляційна функція

5*. Розрахувати та побудувати графіки автокореляційних та взаємно кореляційних функцій для оцифрованих сигналів біологічних сигналів (рис.7.5).

6*. Розрахувати та побудувати графіки взаємнокореляційних функцій для пар зареєстрованих сигналів: ЕКГ та плетизмограма, ЕКГ з різних каналів. Зробити висновки щодо зв'язку між цими сигналами.

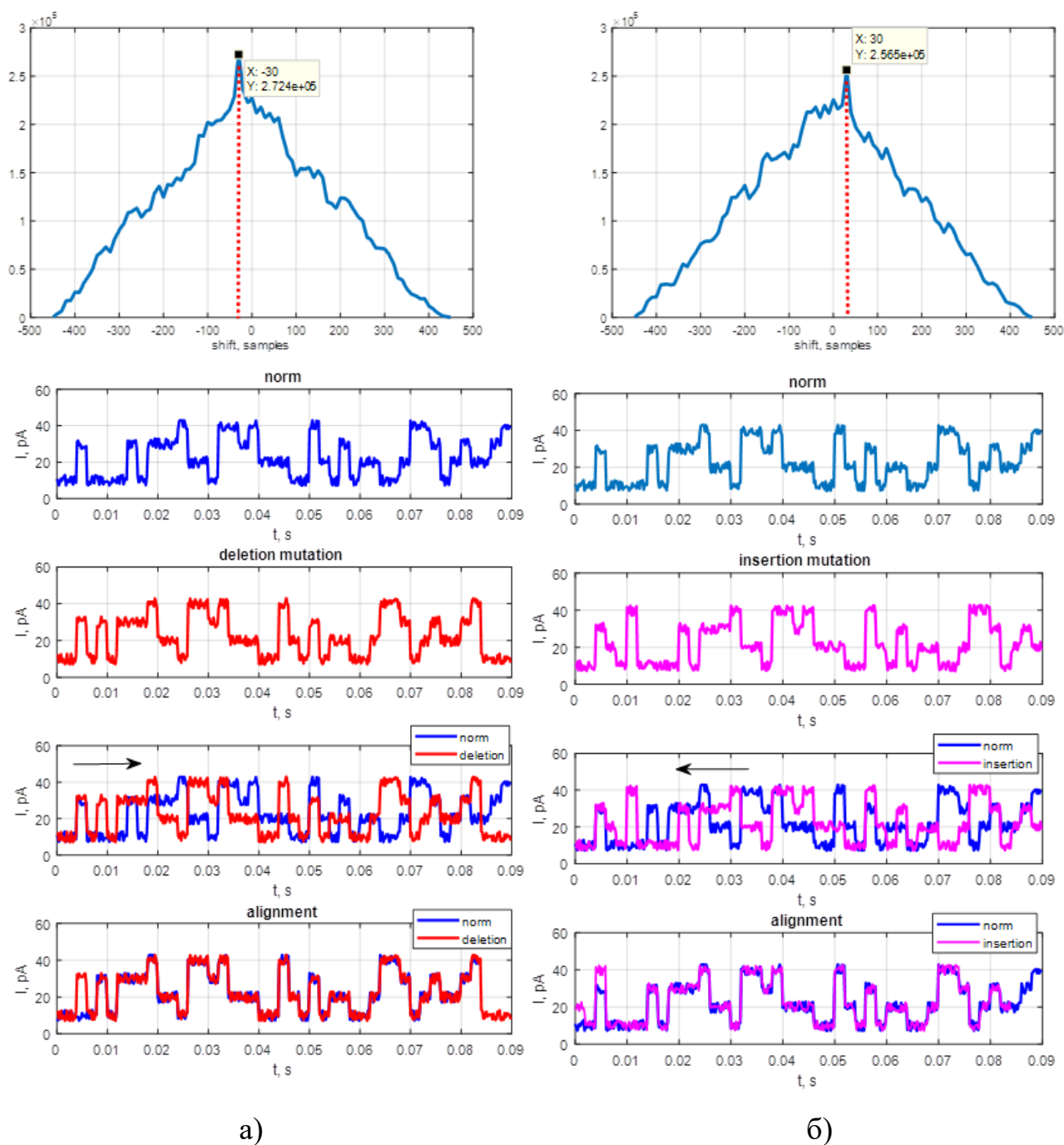


Рис. 7.5. Результати кореляційного аналізу для сигналів іонного струму у разі секвензації ДНК для послідовності нуклеотидів а) в нормі та з мутацією делеції

3х нуклеотидів - спостерігаємо зсув піка на 30 відліків вліво від початку координат; б) в нормі та з мутацією інсерції 3х нуклеотидів - спостерігаємо зсув піка на 30 відліків вправо від початку координат

Контрольні питання:

1. В чому полягає кореляційний аналіз сигналів та з якою метою виконується?
2. Як представляються результати кореляційного аналізу і яку інформацію можна з них отримати?
3. В чому відмінність автокореляційної та кроскореляційної функції?

*** ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 8***

ВЕЙВЛЕТ-АНАЛІЗ СИГНАЛІВ

Мета роботи: дослідити відображення властивостей сигналів у вейвлет-скейлограмі; набути навичок реалізації вейвлет-перетворення сигналів.

Основні теоретичні відомості

Вейвлет-перетворення – це розклад сигналу у набір функцій-вейвлетів, кожна з яких є розтягнутою або стисненою та зміщеною копією одної (для кожного сигналу) функції, яка називається материнським вейвлетом.

Як і будь-який розклад, вейвлет-розклад аналізованого сигналу має на меті представлення його у вигляді функціонального ряду – зваженої скінченої або безкінечної суми деяких складових:

$$x(t) = \sum_n c_n \psi_n(t)$$

де c_n - коефіцієнт розкладу, який відповідає вкладу відповідної складової у сигнал; ψ_n - елемент з деякого набору функцій. Для випадку вейвлетів цей набір не обов'язково повинен бути ортогональним базисом, а може також бути напівортогональним, неортогональним базисом або переповненим словником функцій.

В залежності від властивостей вейвлет-функцій, на які розкладається сигнал, можна виділити такі класи вейвлет-перетворень:

- 1) Неперервне вейвлет-перетворення – виконується для неперервних та дискретних сигналів.
- 2) Розкладання сигналу по фреймам.
- 3) Ортогональні вейвлет-перетворення – клас перетворень сигналу, до якого належать: діадне ортогональне вейвлет-перетворення, вейвлет-перетворення з біортогональними базисами вейвлетів, розклад у вейвлет-пакети та вейвлети на інтервалі.

Задачею вейвлет-аналізу сигналів є розклад аналізованого сигналу в суму масштабованих вейвлет-функцій (1). Значення відповідних коефіцієнтів розкладу визначаються як скалярні добутки сигналу на кожну масштабовану та зміщену вейвлет-функцію з набору $\{\psi_{a,\tau}(t)\}$:

$$W(f)_{\psi}(a, \tau) \equiv \langle f(t), \psi_{a,\tau}(t) \rangle = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi_{a,\tau}^*(t) dt = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi^*\left(\frac{t-\tau}{a}\right) dt, \quad a, \tau \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0,$$

де $\psi_{a,\tau}^*$ – комплексно-спряжена материнська функція.

$W_{\psi}(a, \tau)$ – вейвлет-розклад сигналу $x(t)$.
Видно, що $W_{\psi}(a, \tau)$ є функцією двох змінних: масштабу та зміщення.

Ця функція показує значення коефіцієнту (амплітуди), з яким в розклад (1) входить кожний вейвлет для всіх можливих значень a і τ . Говорять, що такий розклад відображає функцію однієї змінної $x(t) \in L^2(\mathbb{R})$ у функцію двох змінних $W_{\psi}(a, \tau) \in L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$. Функція (2) – пряме неперервне вейвлет-перетворення (НВП) - є розкладом сигналу за всіма можливими стисненнями та зміщеннями однієї материнської функції.

Якщо проаналізувати вираз для прямого НВП, то можна відмітити таке. Якщо параметр a (коефіцієнт масштабування) більший за одиницю та збільшується, то амплітуда і аргумент вейвлет-функції зменшується. Зменшення аргументу функції означає, що вона стає більш тривалою, повільною; в цьому випадку функція стає більш широкою у часовій області. Це, у свою чергу, приводить до того, що спектр вейвлет-функції стає більш низькочастотним. А, отже, коли буде розраховано інтеграл від добутку сигналу на такий низькочастотний вейвлет, у цьому коефіцієнті розкладу будуть відображені лише повільні, низькочастотні складові сигналу.

Навпаки, якщо масштабний коефіцієнт a буде меншим за одиницю, то аргумент масштабованої вейвлет-функції буде збільшуватися, її амплітуда також ставатиме більшою. У цьому випадку масштабований вейвлет стає

стиснутим, коротшим у часовій області, а це еквівалентно тому, що його спектр буде високочастотним. Величина скалярного добутку сигналу на такий високочастотний вейвлет буде тим більшою, чим більш високочастотним є спектр ділянки сигналу.

Підбираючи параметр зміщення функції, можна переміщати масштабований вейвлет у часі. Нескінченні межі інтегрування показують, що коефіцієнти вейвлет-розкладу розраховуються для всіх можливих комбінацій значень коефіцієнта стиснення/розтягу, та зміщення вейвлет-функції у часі. Тобто, за допомогою коефіцієнта масштабування a та параметру переносу можна створювати функції з високо- чи низькочастотним спектром та розміщувати їх в різні моменти часу. На такі складові і ведеться вейвлет-розклад сигналу. Отже, нестационарні сигнали з різними частотними компонентами, які розташовані на різних проміжках часу, можна описувати як суму різних вейвлет- функцій (1).

Можна сказати, що величина коефіцієнта розкладу відображає «схожість» ділянки сигналу за формою та спектральним складом на масштабований вейвлет. Ця схожість оцінюється локально, лише в околі того періоду часу, куди зараз зміщений вейвлет за допомогою параметра τ , і лише на ділянці, яка має таку ж тривалість, як і масштабований вейвлет. Ця унікальна властивість вейвлет-аналізу широко використовується у дослідженні сигналів різної природи.

Вклад певної складової вейвлет-розкладу до повної енергії сигналу для деякого масштабу a та зміщення може бути представлений на двовимірному графіку функції густини енергії для вейвлетів, яка називається скейлограма:

$$E(a, \tau) = |W_{\psi}(a, \tau)|^2$$

Вираз (3) говорить про те, що оскільки вся енергія сигналу у часі дорівнює сумі енергій вейвлет-складових, то скейлограма може бути використана для дослідження розподілу енергій вейвлет-складових сигналу за

масштабами та у часі. Приклади скейлограм подано на рис. 4.7. Колір на графіку відповідає абсолютному або відносному значенню енергії складової для кожного значення масштабу (вертикальна вісь) та зміщення (горизонтальна вісь) [1-2, 11].

Порядок роботи

1. Побудувати графіки 256 відліків вейвлетів Ricker та Morlet (рис. 8.1).
2. Сформувати вектор масштабних коефіцієнтів
 $a = [.01:.02:.11 \ .2:.2:1 \ 2:2:30]$
3. Побудувати скейлограми сигналів лабораторної роботи № 5. На основі аналізу скейлограм зробити висновки щодо відповідності властивостей сигналів у часі, їх відображення на скейлограмі (рис. 8.2, 8.3). Порівняти відображення характеристик сигналів на скейлограмі та спектрограмі, зробити висновки.

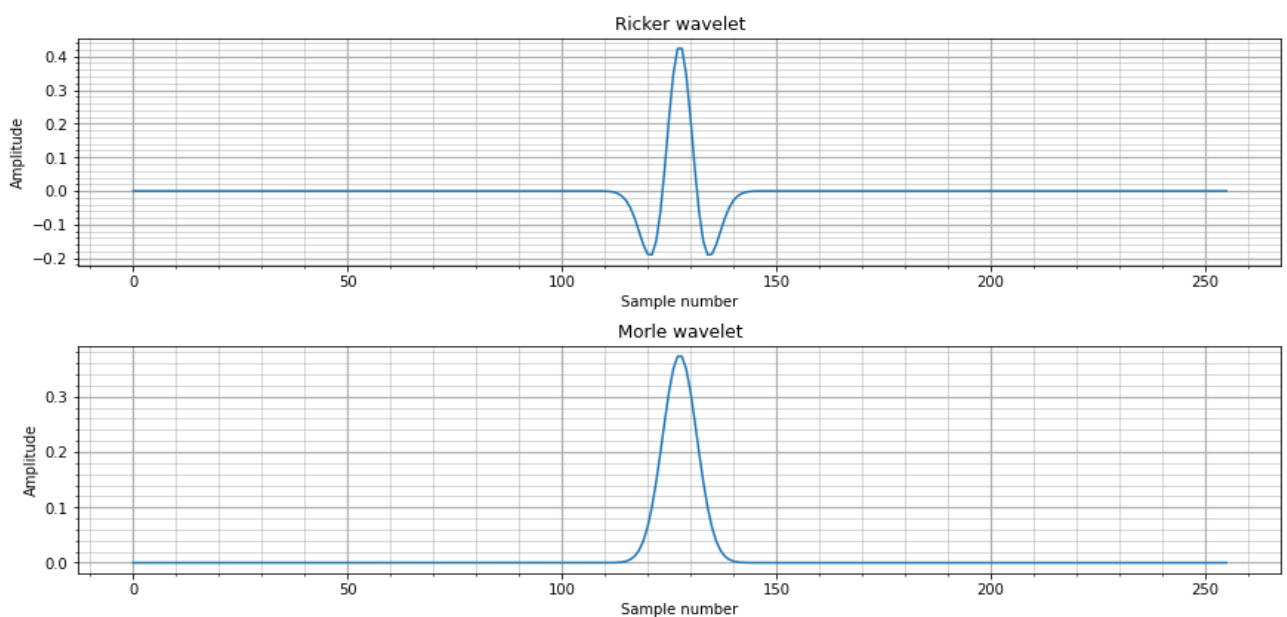


Рис.8.1. Вейвлети Ricker та Morle

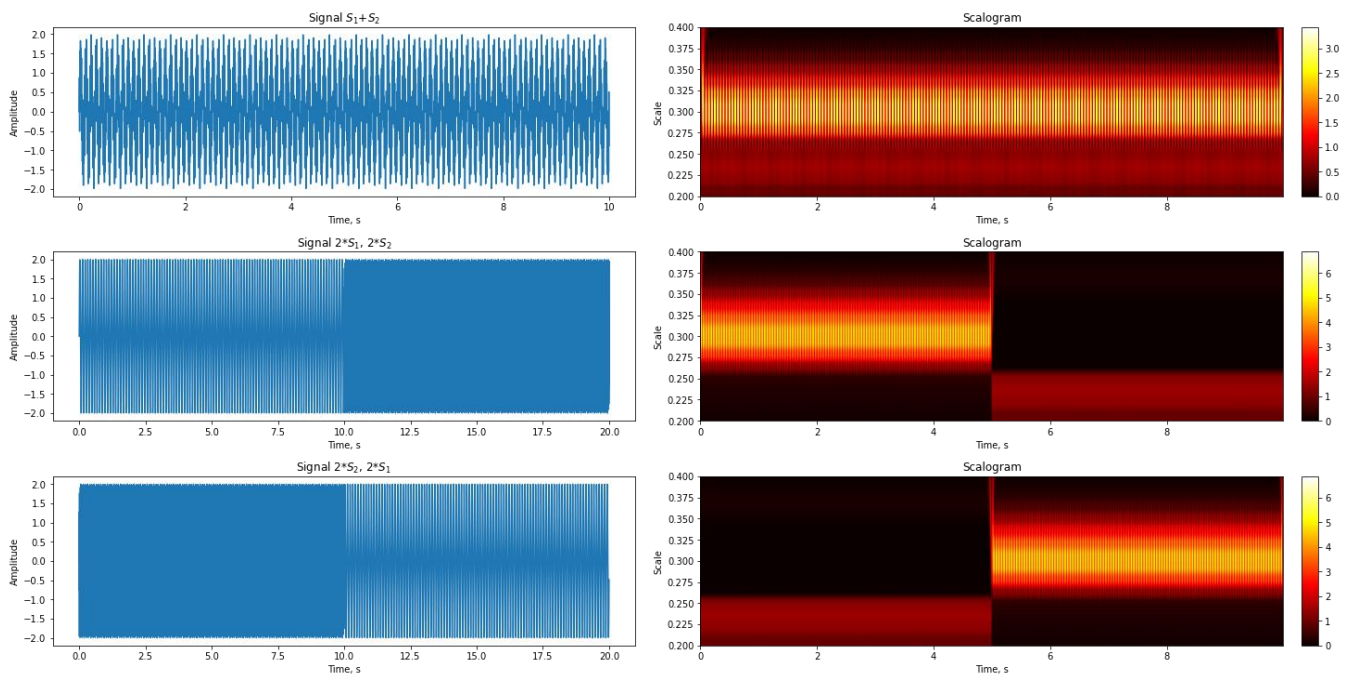


Рис.8.2. Сума двох синусоїд 10 і 100 Гц та їх скейлограми; послідовність двох синусоїд 10 і 100 Гц та їх скейлограми; послідовність двох синусоїд 100 і 10 Гц та їх скейлограми

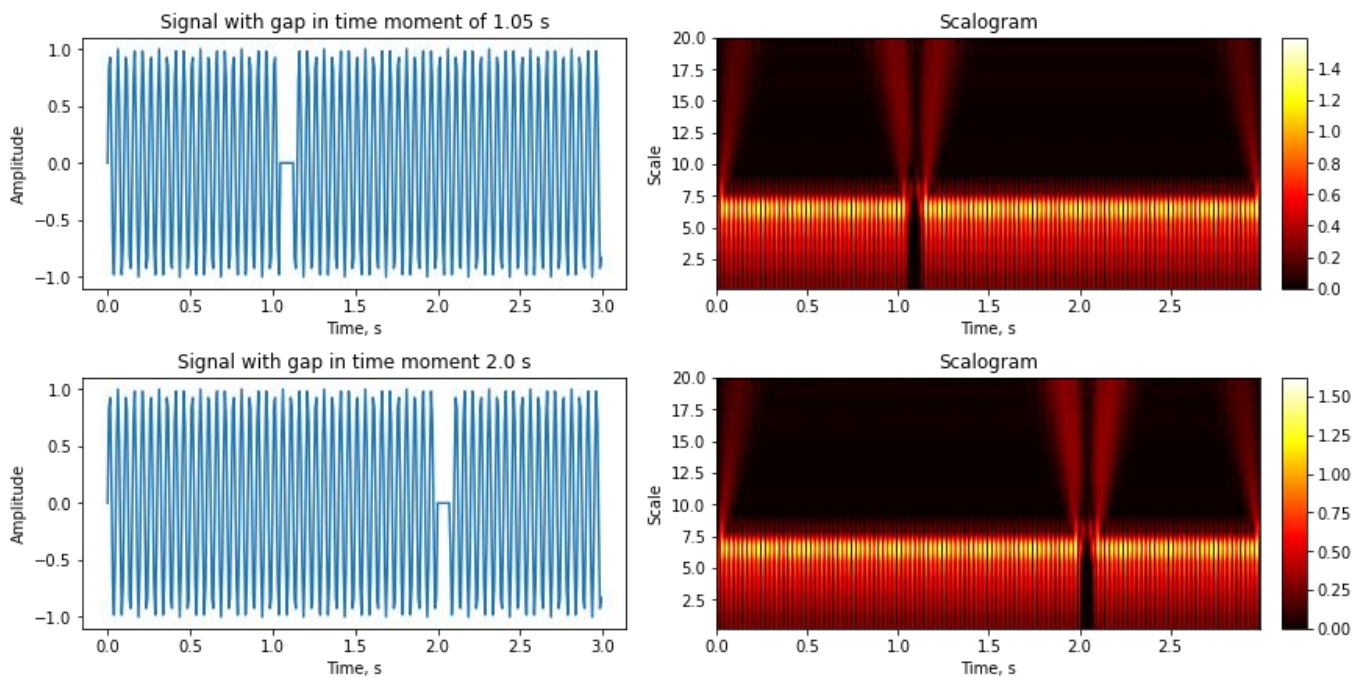


Рис.8.3. Сигнали синусоїд з розривами і сигнали у моменти часу 1,05 с та 2 с та їх скейлограми

4. Побудувати функцію, яка будує графік зміни у часі суми модулів вейвлет-коефіцієнтів у заданому діапазоні масштабів для заданого сигналу.

5*. З допомогою символічних обчислень побудувати графіки перших 10 вейвлетів Гауса, які є похідними від функції Гауса. Виконати нормування вейвлетів.

6*. Виконати неперервний вейвлет-аналіз біомедичних сигналів з лабораторної роботи № 2, підібрати вагові коефіцієнти для отримання інформативних скейлограм. Порівняти з результатами спектрального та спектрально-часового аналізу, зробити висновки (рис. 8.4).

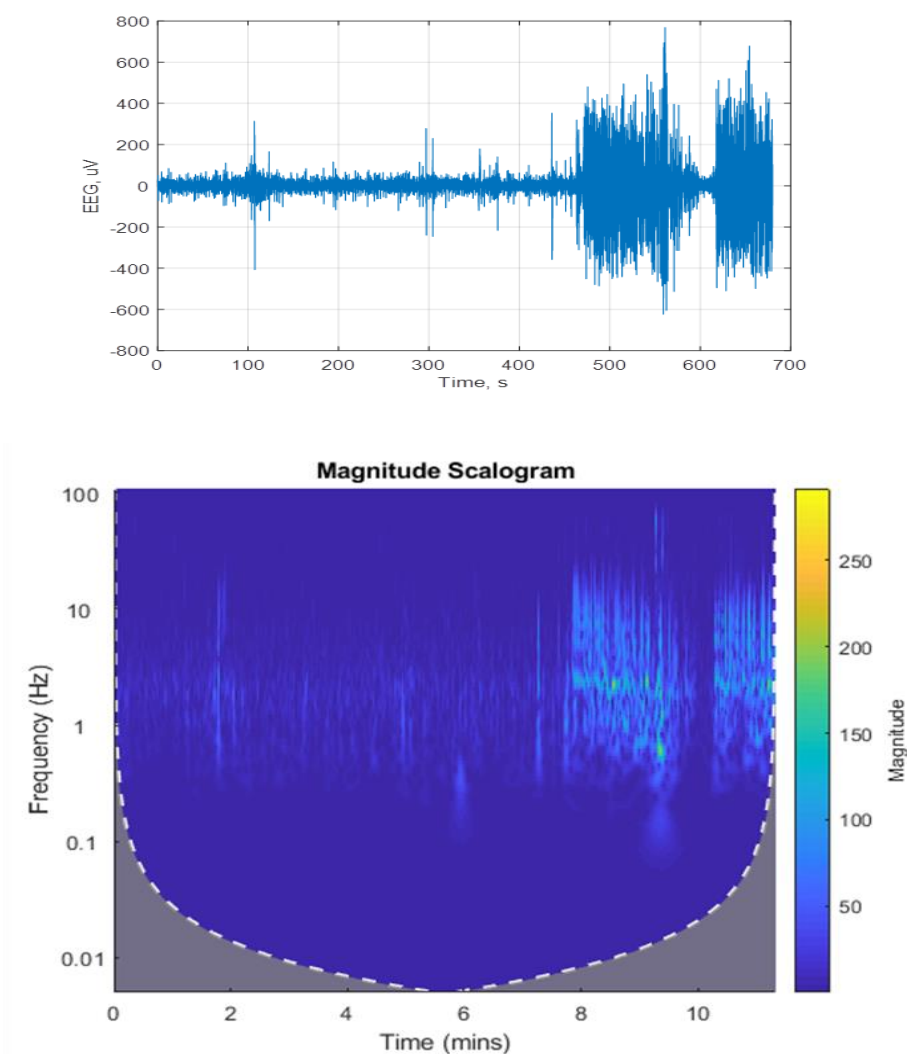


Рис. 8.4. Сигнал ЕЕГ з епілептичним нападом та його скейлограма

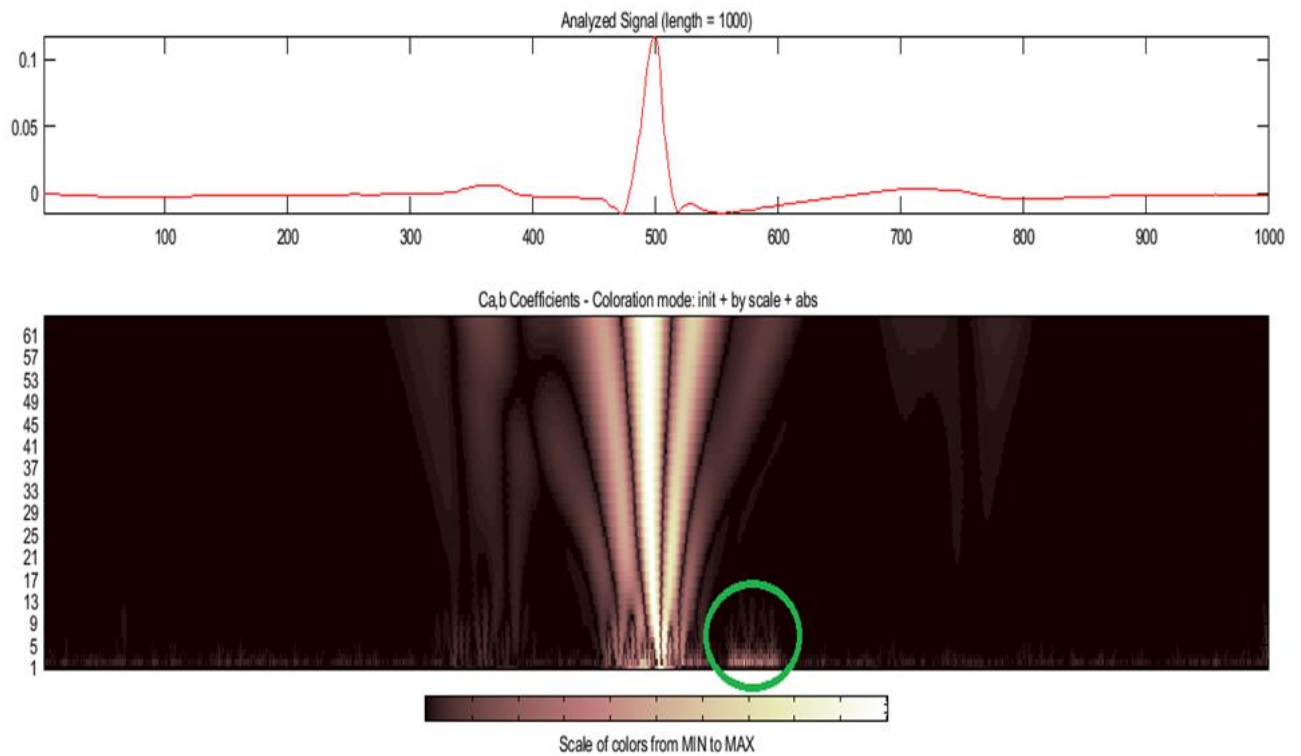


Рис. 8.5. Кардіоцикл та його скейлограма

Контрольні питання

1. В чому полягає вейвлет-аналіз сигналів та з якою метою він виконується.
2. Що необхідно задати, щоб провести вейвлет-аналіз?
3. Як наочно представляються результати вейвлет-аналізу сигналів? Яку інформацію можна з них отримати?

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Теорія сигналів: навч. посіб. для здобувачів ступеня бакалавра за спеціальністю 153 «Мікро- та наносистемна техніка» / КПІ ім. Ігоря Сікорського ; уклад.: А.О. Попов. – Електронні текстові данні. – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2019. – 268 с.
2. Айфичер, Э. Цифровая обработка сигналов. Практический подход / Э. Айфичер, Б. Джервис. – М. : Издательский дом «Вильямс», 2008. – 992 с. – ISBN 978-5-8459-0710-3.
3. Najarian, K., & Splinter, R. (2012). Biomedical Signal and Image Processing (2nd ed.). CRC Press. <https://doi.org/10.1201/b11978>
4. Rangayyan, Rangaraj M. Biomedical Signal Analysis Wiley (2015). IEEE Press series in biomedical engineering. DOI:10.1002/9781119068129
5. Bronzino J. D. The biomedical engineering handbook. Boca Raton: CRC Press LLC, 2000.
6. Marques de Sá J. P. Pattern recognition: concepts, methods, and applications / Marques de Sá J. P. — Springer, 2001. — 318 p.
7. Blinowska, K. J., & Zygierecz, J. (2011). Practical Biomedical Signal Analysis Using MATLAB® (Series in Medical Physics and Biomedical Engineering). CRC Press.
8. Gopi, E. S. (2012). *Digital Signal Processing for Medical Imaging Using Matlab*. Springer.
9. Kaniusas, E. (2012). *Biomedical Signals and Sensors I: Linking Physiological Phenomena and Biosignals*. Springer.
10. Devasahayam, S. R. (2012). *Signals and systems in biomedical engineering: signal processing and physiological systems modeling*. Springer.
11. Advanced Methods of Biomedical Signal Processing/ Sergio Cerutti (Editor), Carlo Marchesi (Editor), April 2011, Wiley-IEEE Press, 608 pages.