НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

Факультет робототехніки та приладобудування

Кафедра комп'ютерно-інтегрованих оптичних та навігаційних систем

До захисту допущено:

Завідувач кафедри

_____ Н.І. Бурау

«___»_____20__ р.

Дипломна робота

на здобуття ступеня бакалавра

за освітньо-професійною програмою «Комп'ютерно-інтегровані системи та технології в приладобудуванні»

спеціальності 151 «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології»

на тему: «Математичне моделювання та аналіз систем стабілізації нестійких динамічних об'єктів»

Виконав:
студент IV курсу, групи ПГ-21
Цісаренко Іван Михайлович _____

Керівник:
асистент, д.ф.,
Паздрій Ольга Ярославівна _____

Рецензент:
асистент, д.ф.,
Повшенко Олександр Анатолійович

_____

Засвідчую, що у цьому дипломному проєкті немає запозичень з праць інших авторів без відповідних посилань.
Студент (-ка) _____

Київ – 2026 року

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут
імені Ігоря Сікорського»

Інститут (факультет) Факультет робототехніки та приладобудування
(повна назва)

Кафедра Комп'ютерно-інтегрованих оптичних та навігаційних систем
(повна назва)

Рівень вищої освіти – перший (бакалаврський)

Спеціальність 151 – Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології
(код і назва)

ЗАТВЕРДЖУЮ
Завідувач кафедри
_____ Н.І. Бурау
(підпис) (ініціали, прізвище)
«___»_____2026 р.

ЗАВДАННЯ
на дипломну роботу студенту
Цісаренку Івану Михайловичу
(прізвище, ім'я, по батькові)

1. Тема дипломної роботи Математичне моделювання та аналіз систем стабілізації нестійких динамічних об'єктів

Науковий керівник роботи Паздрій Ольга Ярославівна, д.ф.,
(прізвище, ім'я, по батькові, науковий ступінь, вчене звання)

затверджені наказом по університету від «__» _____ 2026 р. № _____

2. Термін подання студентом роботи « 5 » червня 2026 р.

3. Вихідні дані до роботи: маса маятника в межах 0,1–0,5 кг; довжина стрижня 0,2–0,5 м; кут відхилення до ±30°; прискорення вільного падіння 9,81 м/с²; для синтезу системи стабілізації використовуються параметри регулятора K; допустима похибка стабілізації повинна становити не більше 5%, а час перехідного процесу до 5 с; моделювання системи здійснюється у середовищі MATLAB/Simulink.

4. Зміст роботи Вступ. 1. Аналіз нестійких динамічних об'єктів та методів їх стабілізації. 2. Математичне моделювання системи. 3. Аналіз характеристик системи стабілізації. Висновки

5. Перелік ілюстративного матеріалу (із зазначенням плакатів, презентацій тощо) демонстраційний матеріал представлений у форматі презентації PowerPoint (*.ppt)

6. Консультанти розділів роботи*

Розділ	Прізвище, ініціали та посада консультанта	Підпис, дата	
		завдання видав	завдання прийняв

7. Дата видачі завдання 30.04.2026

Календарний план

№ з/п	Назва етапів виконання дипломної роботи	Термін виконання етапів роботи	Примітка
1.	Літературний пошук та визначення задач моделювання нестійких динамічних об’єктів.	04.05.2026	
2.	Аналіз нестійких динамічних систем та методів їх стабілізації	07.05.2026	
3.	Вибір об’єкта моделювання (інвертований маятник) та постановка задачі	10.05.2026	
4.	Побудова математичної моделі інвертованого маятника	14.05.2026	
5.	Аналіз стійкості системи без керування Синтез системи стабілізації (розробка та налаштування регулятора)	20.05.2026	
6.	Моделювання системи в MATLAB/Simulink та дослідження характеристик	25.05.2026	
7.	Оформлення пояснювальної записки	05.06.2026	

Студент _____ І.М. Цісаренко
(підпис) (ініціали, прізвище)

Керівник дипломної роботи _____ О. Я. Паздрій
(підпис) (ініціали, прізвище)

* Консультантом не може бути зазначено керівника дипломної роботи.

АНОТАЦІЯ

Дипломну роботу присвячено математичному моделюванню та розробці систем стабілізації нестійкого динамічного об’єкта на прикладі інвертованого маятника на рухомому візку.

У першому розділі проведено огляд і аналіз існуючих нестійких динамічних систем, розглянуто їх застосування в робототехніці, авіації та промисловості. Здійснено аналіз класичних та сучасних методів автоматичного керування такими об'єктами.

У другому розділі розроблено фізичну та математичну моделі інвертованого маятника. На основі енергетичного підходу (рівнянь Лагранжа другого роду) виведено систему нелінійних диференціальних рівнянь руху. Виконано лінеаризацію моделі, отримано передавальну функцію та матриці простору станів. Математично доведено структурну нестійкість розімкненої системи за критерієм розташування коренів.

У третьому розділі проведено синтез систем стабілізації за допомогою пропорційно-інтегрально-диференціального (ПІД) та оптимального лінійно-квадратичного (LQR) регуляторів. У середовищі MATLAB/Simulink розроблено структурні схеми та побудовано імітаційні моделі. Виконано порівняльний аналіз регуляторів, який математично та графічно довів абсолютну перевагу методу LQR для комплексного позиціонування об'єкта та його високу робастність до зовнішніх збурень.

Пояснювальна записка складається зі вступу, 3 розділів, загальних висновків та списку використаних джерел.

Ключові слова: інвертований маятник, математичне моделювання, рівняння Лагранжа, нестійка система, простір станів, ПІД-регулятор, LQR-регулятор, стабілізація, MATLAB, Simulink.

ABSTRACT

The bachelor's thesis is devoted to the mathematical modeling and development of stabilization systems for an unstable dynamic object using the example of an inverted pendulum on a moving cart.

In the first chapter, a review and analysis of existing unstable dynamic systems is carried out, and their application in robotics, aviation, and industry is considered. An analysis of classical and modern methods of automatic control of such objects is performed.

In the second chapter, the physical and mathematical models of the inverted pendulum are developed. Based on the energy approach (Lagrange equations of the second kind), a system of nonlinear differential equations of motion is derived. Linearization of the model is performed, and the transfer function and state-space matrices are obtained. The structural instability of the open-loop system is mathematically proven.

In the third chapter, the synthesis of stabilization systems using proportional-integral-derivative (PID) and optimal linear-quadratic (LQR) regulators is carried out. Structural diagrams are developed and simulation models are built in the MATLAB/Simulink environment. A comparative analysis of the regulators is performed, which mathematically and graphically proved the absolute advantage of the LQR method for complex object positioning and its high robustness to external disturbances.

The explanatory note consists of an introduction, 3 chapters, general conclusions, and a list of references.

Keywords**:** inverted pendulum, mathematical modeling, Lagrange equations, unstable system, state space, PID controller, LQR controller, stabilization, MATLAB, Simulink.

ЗМІСТ

ВСТУП 8
РОЗДІЛ 1. АНАЛІЗ НЕСТІЙКИХ ДИНАМІЧНИХ ОБ'ЄКТІВ ТА МЕТОДІВ ЇХ СТАБІЛІЗАЦІЇ 10
1.1 Огляд нестійких динамічних об'єктів 10
1.1.1 Загальна характеристика нестійких систем 10
1.1.2 Інвертований маятник як нестійкий об'єкт 13
1.2 Методи стабілізації нестійких систем 17
1.2.1 Класичні методи керування 18
1.2.2 Оптимальні методи стабілізації 20
1.2.3 Сучасні підходи до стабілізації 22
1.3 Огляд існуючих моделей і підходів до моделювання 23
1.3.1 Математичні моделі нестійких систем 23
1.3.2 Використання середовища MATLAB/Simulink 26
1.3.3 Аналіз сучасних наукових робіт 28
Висновки до розділу 1 30
РОЗДІЛ 2. МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ СИСТЕМИ 32
2.1 Фізична модель та параметри 32
2.2. Побудова математичної моделі за методом Лагранжа 33
2.2.1 Теоретичні основи застосування енергетичного методу Лагранжа 33
2.2.2 Визначення кінетичної та потенційної енергії системи 35
2.2.3 Формування лагранжіану та виведення диференціальних рівнянь руху 36
2.3 Лінеаризація математичної моделі системи 38
2.3.1 Теоретичне обґрунтування методів лінеаризації нелінійних систем 38
2.3.2 Визначення точки рівноваги (робочої точки) системи 39
2.3.3 Математичні перетворення та отримання лінеаризованих рівнянь руху 39
2.4 Отримання передавальної функції системи 42
2.4.1 Теоретичні відомості про перетворення Лапласа 42

2.4.2 Перетворення системи лінеаризованих рівнянь динаміки 43
2.4.3 Виведення аналітичного виразу передавальної функції 43
2.4.4 Розрахунок передавальної функції з урахуванням номінальних параметрів об'єкта 45
2.5 Математична модель у просторі станів 46
2.5.1 Концепція простору станів у сучасній теорії керування 46
2.5.2 Вибір змінних стану для системи «інвертований маятник — візок» .. 48
2.5.3 Алгебраїчне виведення елементів структурних матриць 49
2.5.4 Чисельне представлення моделі об'єкта 51
2.6 Аналіз стійкості, керованості та спостережуваності системи 52
2.6.1 Теоретичні основи аналізу стійкості за методом Ляпунова 52
2.6.2 Математичний розрахунок значень матриці стану 53
2.6.3 Дослідження керованості та спостережуваності за Калманом 54
2.7 Синтез алгоритмів стабілізації системи 56
2.7.1 Теоретичне обґрунтування та аналітична розробка ПІД-регулятора .. 56
2.7.2 Теоретичне обґрунтування та синтез оптимального лінійно-квадратичного регулятора (LQR) 60
Висновки до розділу 2 61
РОЗДІЛ 3. АНАЛІЗ ХАРАКТЕРИСТИК СИСТЕМИ СТАБІЛІЗАЦІЇ 63
3.1 Структурна організація моделюючого комплексу в MATLAB/Simulink ... 63
3.2 Синтез та оптимізація ПІД-регулятора 64
3.3 Синтез та оптимізація лінійно-квадратичного регулятора (LQR) 67
3.4 Аналіз перехідних процесів оптимізованої системи 69
3.5 Дослідження впливу параметрів регулятора на характеристики системи . 71
3.6 Дослідження робастності системи 75
3.7 Порівняльний аналіз ефективності синтезованих систем керування 78
Висновки до розділу 3 80
ВИСНОВКИ 82
ПЕРЕЛІК ВИКОРИСТАНИХ ЛІТЕРАТУРНИХ ДЖЕРЕЛ 84

ВСТУП

Розвиток сучасної робототехніки та систем автоматичного керування нерозривно пов'язаний із задачею стабілізації нестійких динамічних об'єктів. Варто зазначити, що класичним еталоном для дослідження алгоритмів керування такими системами є інвертований маятник на рухомому візку [1, 2]. Як показує світовий досвід, математичний апарат, який застосовується для стабілізації інвертованого маятника, є фундаментальною базою для розробки цілого ряду реальних промислових рішень: від сучасних балансуючих роботів і моноколіс до систем орієнтації космічних апаратів та ракет-носіїв на початковій стадії польоту [3, 4].

З огляду на вищезазначене, задача аналізу та синтезу ефективних регуляторів для багатовимірних недокерованих (underactuated) систем залишається вкрай актуальною. Незважаючи на широке розповсюдження класичних пропорційно-інтегрально-диференціальних (ПІД) регуляторів, на практиці їх застосування для складних нестабільних об'єктів часто супроводжується об'єктивними труднощами [2, 4]. Це змушує інженерів-дослідників переходити до більш сучасних методів зворотного зв'язку за станом (зокрема, лінійно-квадратичних регуляторів LQR), що вимагає ретельного математичного моделювання та комп'ютерної симуляції [1, 5].

Метою дипломної роботи є розробка, математичне моделювання та дослідження ефективності систем автоматичної стабілізації для нестійкого динамічного об’єкта на прикладі інвертованого маятника.

Для досягнення поставленої мети було сформульовано та вирішено такі основні задачі:

1. Проаналізувати поточний стан проблеми керування нестійкими динамічними об'єктами та розглянути сучасні методи їх стабілізації.

2. Розробити математичну модель інвертованого маятника на візку з використанням методів аналітичної механіки [3, 6].
3. Виконати лінеаризацію моделі та отримати її представлення у вигляді передавальної функції та матриць простору станів [1, 7].
4. Здійснити синтез класичного ПІД-регулятора та сучасного лінійно-квадратичного регулятора (LQR) [8, 9].
5. Провести імітаційне моделювання розроблених систем у середовищі MATLAB/Simulink та виконати порівняльний аналіз їхньої ефективності [2, 4].

Об’єкт дослідження: процеси динамічної стабілізації нестійких електромеханічних систем.

Предмет дослідження: математичні моделі, алгоритми керування (ПІД, LQR) та методи комп'ютерного моделювання інвертованого маятника.

У дипломній роботі застосовано комплексний підхід, що базується на фундаментальних законах фізики. Для побудови математичної моделі використано методи аналітичної механіки, зокрема енергетичний метод та рівняння Лагранжа другого роду [6]. Синтез регуляторів базується на положеннях класичної та сучасної теорії автоматичного керування [1, 7]. Перевірка стійкості та аналіз перехідних процесів здійснювалися за допомогою методів імітаційного комп'ютерного моделювання у програмному середовищі MATLAB із залученням пакету візуального моделювання Simulink [10].

РОЗДІЛ 1. АНАЛІЗ НЕСТІЙКИХ ДИНАМІЧНИХ ОБ'ЄКТІВ ТА МЕТОДІВ ЇХ СТАБІЛІЗАЦІЇ

1.1 Огляд нестійких динамічних об'єктів

1.1.1 Загальна характеристика нестійких систем

Нестійкість є однією з фундаментальних властивостей динамічних систем, що визначає поведінку системи при наявності збурень. У загальному сенсі система вважається нестійкою, якщо будь-яке, навіть нескінченно мале, відхилення від стану рівноваги не загасає з часом, а навпаки — зростає без обмежень [1, 6]. Інакше кажучи, нестійка система після збурення не повертається до вихідного стану рівноваги, тоді як стійка система завжди повертається або залишається у безпосередній близькості від нього.

Формальне математичне визначення стійкості для диференціальних рівнянь було закладено О.М. Ляпуновим [11]. Відповідно до теорії Ляпунова, стан рівноваги x^* системи $\dot{x} = f(x)$ є стійким за Ляпуновим, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$ таке, що $\|x(0) - x^*\| < \delta$ тягне за собою $\|x(t) - x^*\| < \varepsilon$ для всіх $t \geq 0$. Якщо ця умова не виконується — стан рівноваги є нестійким. Для лінійних систем ця умова рівносильна вимозі, щоб усі власні значення матриці системи мали від'ємну дійсну частину [1, 7].

З практичної точки зору нестійка система, залишена без керування, не може тривалий час перебувати поблизу стану рівноваги. Класичним прикладом є балансування олівця на кінчику пальця: достатньо найменшого відхилення від вертикалі, щоб олівець впав. Натомість стійка система поводить себе як маятник у нижньому положенні — відхилений від рівноваги, він завжди повертається назад завдяки силі тяжіння.

Нестійкість динамічних систем може мати різноманітні фізичні причини. У механічних системах нестійкість виникає тоді, коли центр мас об'єкта знаходиться вище точки опори або підвісу, як це має місце в інвертованому маятнику, ракеті або ходячому роботі [3]. У таких системах сила тяжіння виступає не як відновлювальна, а як дестабілізуюча сила — вона збільшує відхилення від рівноваги.

В електричних і гідравлічних системах нестійкість може бути спричинена позитивним зворотним зв'язком, що підсилює відхилення сигналу [1]. В аеродинамічних системах — специфічними аеродинамічними силами та моментами, що виникають при певних кутах атаки. У хімічних реакторах — екзотермічними реакціями, де тепловиділення зростає зі зростанням температури швидше, ніж система встигає його відвести. Незважаючи на різну фізичну природу, у всіх цих випадках причина нестійкості є єдиною з математичної точки зору: наявність власних значень матриці лінеаризованої системи з додатною дійсною частиною.

Важливо зазначити, що не кожна нестійка система є непридатною для використання. Сучасна інженерна практика свідомо проектує нестійкі об'єкти задля досягнення певних технічних переваг: маневрені військові літаки спеціально проектуються аеродинамічно нестійкими для підвищення швидкості реакції на керуючий вплив, а балансуючі роботи типу Segway використовують нестійкість для досягнення компактності та маневреності [3, 4]. Завдання інженера в таких випадках — синтезувати ефективну систему керування, яка забезпечить стабілізацію.

Нестійкі динамічні системи класифікуються за кількома критеріями. За характером розбіжності розрізняють аперіодичну нестійкість, при якій вихідна змінна монотонно зростає без коливань (відповідає дійсному додатному власному значенню матриці системи), та осцилюючу нестійкість, при якій

спостерігаються коливання з наростаючою амплітудою (відповідає комплексно-спряженим власним значенням з додатною дійсною частиною) [7].

За ступенем нестійкості системи поділяють на слабконестійкі, у яких відхилення від рівноваги зростають повільно, та сильнонестійкі, у яких будь-яке відхилення призводить до катастрофічно швидкої розбіжності. Кількісною мірою ступеня нестійкості слугує максимальне додатне власне значення матриці системи: чим воно більше, тим швидше відбувається розбіжність і тим складніше завдання стабілізації [1].

За природою нелінійності розрізняють лінійно нестійкі системи, у яких нестійкість присутня вже в лінеаризованій моделі, та нелінійно нестійкі, у яких лінеаризована модель може бути стійкою, але за великих відхилень нелінійні ефекти призводять до розбіжності. Перший клас значно складніший для стабілізації та є основним предметом розгляду в даній роботі.

Окремо виділяють клас систем із запізненням (delayed systems), де нестійкість спричинена запізненням у вимірюванні стану або у подачі керуючого впливу [6]. Такі системи зустрічаються, наприклад, у телекерованих роботах або у мережевих системах керування, де сигнали передаються через канали зв'язку з ненульовою затримкою. Навіть незначне запізнення може перетворити стійку систему на нестійку, що робить цей клас особливо важким для аналізу та синтезу регуляторів.

Таким чином, нестійкі системи утворюють широкий і різноманітний клас об'єктів, які об'єднані єдиним математичним критерієм — наявністю нестійких власних значень — але відрізняються за фізичною природою, ступенем нелінійності та характером розбіжності. Це визначає необхідність застосування різних підходів до стабілізації залежно від конкретного типу об'єкта та умов його експлуатації.

1.1.2 Інвертований маятник як нестійкий об'єкт

Інвертований маятник на візку є одним з найбільш відомих і широко досліджуваних об'єктів у теорії автоматичного керування. Система складається зі стержня (маятника), закріпленого шарніром до рухомого візка таким чином, що стержень може вільно обертатися у вертикальній площині [12]. Задача керування полягає у підтриманні маятника у вертикальному положенні шляхом горизонтального переміщення візка за допомогою зовнішньої сили [1].

На рисунку 1.1 [13] представлено навчальну модель інвертованого маятника на візку, що складається з вертикального стрижня, встановленого на рухому платформу, яка переміщується вздовж направляючих за допомогою електромотора та керується мікроконтролером для автоматичного утримання рівноваги [12, 13].

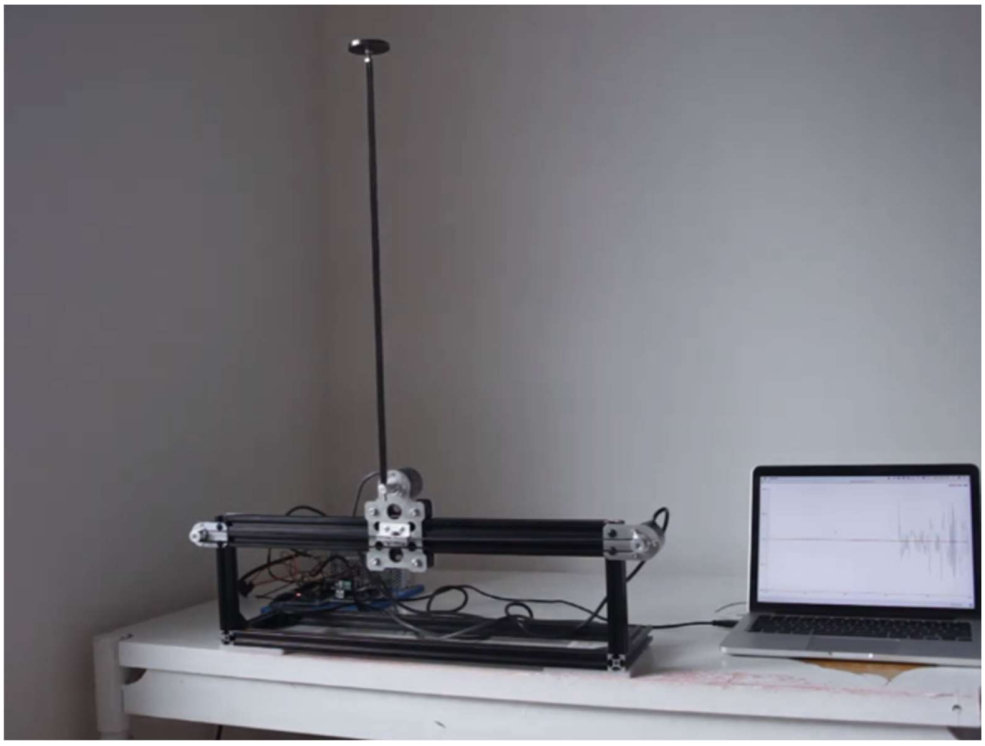

Рис. 1.1. Навчальна модель інвертованого маятника на візку

На відміну від звичайного маятника, центр мас якого знаходиться нижче точки підвісу, інвертований маятник має центр мас вище точки кріплення. Це принципово змінює характер рівноваги: нижнє положення звичайного маятника є стійким (маятник повертається туди після відхилення), тоді як верхнє положення інвертованого маятника є нестійким — будь-яке відхилення від вертикалі призводить до подальшого збільшення цього відхилення під дією сили тяжіння [1].

Система є недопривідною : вона має два ступені вільності — горизонтальне переміщення візка x та кут нахилу маятника θ — але лише один керуючий вхід — горизонтальну силу F, що прикладається до візка [3]. Це означає, що неможливо незалежно керувати обома координатами одночасно: регулювання положення візка та кута маятника є взаємозв'язаними задачами, що суттєво ускладнює синтез регулятора порівняно з повністю приводними системами [2].

З фізичної точки зору нестійкість інвертованого маятника зумовлена тим, що потенціальна енергія системи досягає максимуму при вертикальному положенні маятника [14]. Будь-яке мале відхилення кута θ від нуля збільшує момент сили тяжіння відносно шарніра: $M = m \cdot g \cdot l \cdot \sin\theta$ [2]. Цей момент спрямований у бік збільшення відхилення, тобто є дестабілізуючим [3]. Чим більше відхилення — тим більший обертовий момент, що призводить до необмеженого зростання кута [2].

З математичної точки зору нестійкість підтверджується аналізом власних значень матриці лінеаризованої системи: серед них є щонайменше одне дійсне додатне значення [1]. Фізично це означає, що в системі є «нестійкий мод» — напрямок у просторі станів, вздовж якого відхилення зростає експоненційно з часом [7]. Задача регулятора — нейтралізувати цей нестійкий мод та одночасно забезпечити бажані динамічні характеристики замкненої системи [1].

Інвертований маятник є не лише теоретичним об'єктом, а й прямим прототипом багатьох реальних технічних систем [3]. Найбільш відомою аналогією є задача керування ракетою або ракетою-носієм під час старту: центр мас ракети знаходиться в передній частині, тоді як двигун розташований ззаду, що робить її аеродинамічно нестійкою [1]. Система керування повинна постійно коригувати вектор тяги двигуна, щоб утримати ракету у вертикальному положенні — це є точним аналогом задачі стабілізації інвертованого маятника [3].

Самобалансуючі транспортні засоби типу Segway, моноколіс та двоколісних роботів функціонують на тому самому принципі: вони є нестійкими у вертикальній площині і потребують безперервного коригування положення платформи для підтримання рівноваги. На рисунку 1.2 [15] зображено один із самобалансуючих транспортних засобів.

Рис. 1.2. Моноколісо Segway Ninebot ONE E+

Алгоритми стабілізації ходьби гуманоїдних роботів також безпосередньо використовують результати, отримані при дослідженні інвертованого маятника [4]. Зокрема, задача підтримання рівноваги двоногого робота при ходьбі зводиться до стабілізації «лінійного інвертованого маятника» відносно точки опори — так звана модель лінійного інвертованого маятника (LIPM, Linear Inverted Pendulum Model), яка є основою планування траєкторій ходьби в сучасних роботах [16].

Іншою важливою аналогією є система керування вектором тяги рідинних ракетних двигунів [1]. Ракета-носій у момент старту є аеродинамічно нестійкою системою з центром тиску, розміщеним нижче центру мас [2]. Відхилення ракети від вертикалі вимагає негайної корекції кута сопла двигуна для формування відновлювального моменту — аналогічно до того, як система керування інвертованим маятником коригує горизонтальне переміщення візка у відповідь на відхилення стержня [3].

Крім того, інвертований маятник широко застосовується як стендова система у навчальних і дослідницьких лабораторіях для тестування та порівняння алгоритмів керування [2]. Доступність фізичних лабораторних макетів інвертованого маятника (зокрема, виробництва компаній Quanser, MATLAB-Simulink) дозволяє підтвердити результати числового моделювання на реальному обладнанні, що суттєво підвищує достовірність досліджень [2].

На рисунку 1.3 [17] наведена спрощена схема системи «інвертований маятник на візку», де M — маса візка, m — маса маятника (зосереджена на кінці стержня), l — довжина маятника, θ — кут відхилення від вертикалі, x — горизонтальне переміщення візка, F — прикладена керуюча сила [2].

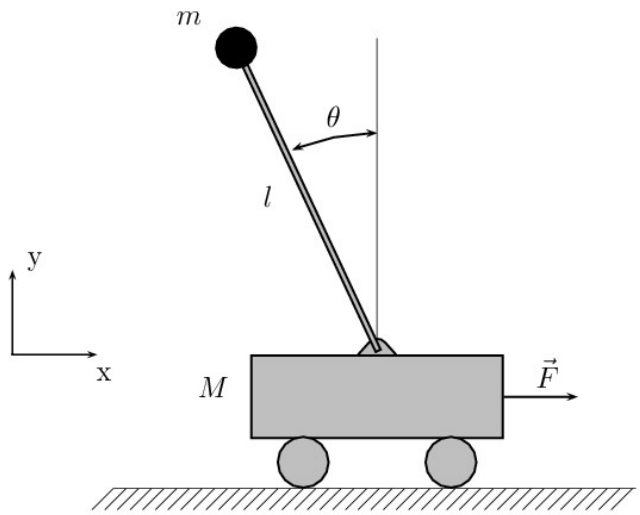

Рис. 1.3. Спрощена схема інвертованого маятника на візку

1.2 Методи стабілізації нестійких систем

Задача стабілізації нестійких об'єктів є однією з центральних у теорії автоматичного керування. Протягом кількох десятиліть досліджень сформувалося широке коло методів — від класичних регуляторів до сучасних методів, що базуються на штучному інтелекті. Вибір конкретного методу визначається вимогами до точності та швидкодії, доступністю інформації про стан системи, наявністю обмежень, а також складністю практичної реалізації [1, 6, 7].

З точки зору архітектурної класифікації всі методи керування можна поділити на дві великі групи: методи з вихідним зворотним зв'язком (output feedback) та методи з повним зворотним зв'язком за станом (state feedback). У першому випадку регулятор отримує лише вимірювані вихідні змінні, що спрощує практичну реалізацію, але обмежує можливості стабілізації. У другому — регулятор використовує повний вектор стану системи, що дозволяє досягти

значно кращих показників якості, але вимагає або вимірювання всіх змінних стану, або застосування оцінювача стану (спостерігача) [1, 7].

Ще одна важлива класифікація — за підходом до роботи з моделлю об'єкта: методи, що спираються на точну математичну модель (model-based), і методи, що не потребують або мінімально використовують модель (model-free). ПІД-регулятор є класичним прикладом model-free підходу, тоді як LQR, MPC та SMC відносяться до model-based методів. Кожна група має свої переваги та сферу застосування, і у практиці часто використовуються гібридні підходи [1, 4].

1.2.1 Класичні методи керування

Пропорційно-інтегрально-диференціальний (ПІД) регулятор є найбільш поширеним типом регулятора у промисловій автоматизації завдяки простоті реалізації та налаштування. Закон керування ПІД-регулятора визначається трьома складовими: пропорційною, що реагує на поточну помилку; інтегральною, що реагує на накопичену помилку; та диференціальною, що реагує на швидкість зміни помилки [1, 6].

$$u(t) = K_p e(t) + K_i \int_0^t e(\tau) d\tau + K_d \frac{de(t)}{dt}$$

де e(t) = r(t) − y(t) — помилка регулювання (різниця між заданим r(t) та поточним y(t) значеннями), Kp, Ki, Kd — коефіцієнти підсилення пропорційної, інтегральної та диференціальної складових відповідно. Інтегральна складова забезпечує усунення статичної помилки, а диференціальна — демпфування коливань та покращення швидкодії [7, 18].

ПІД-регулятор є одноконтурним регулятором: він аналізує відхилення лише однієї вихідної змінної від заданого значення і формує керуючий сигнал для усунення цього відхилення. При застосуванні до інвертованого маятника виникає принципова складність: система має дві вихідні змінні — кут маятника θ та

положення візка x, — тоді як класичний ПІД-регулятор розрахований на один вихід. Це означає, що при стабілізації кута маятника за допомогою ПІД-регулятора положення візка може мимовільно дрейфувати [2, 4].

Крім того, для нестійких систем традиційні методи налаштування ПІД-регулятора (метод Зіглера–Ніколса, метод кривої розгону тощо) часто виявляються непридатними або дають незадовільні результати, оскільки вони розроблялися для стійких об'єктів. Проте, незважаючи на ці обмеження, ПІД-регулятори широко використовуються як базовий метод порівняння при дослідженнях нових алгоритмів керування нестійкими системами [1, 6].

До основних переваг ПІД-регулятора відносяться: проста та зрозуміла структура; відсутність необхідності мати точну математичну модель об'єкта; широка база реалізацій у промислових контролерах; можливість налаштування безпосередньо на реальному об'єкті. Недоліки, що суттєво обмежують застосування для нестійких систем: оперує лише вихідною змінною, а не повним вектором стану; диференціальна складова надзвичайно чутлива до шумів вимірювання; не гарантує оптимальності керування за жодним критерієм якості; при мультивимірних системах потребує реалізації кількох незалежних контурів з неминучим взаємним впливом [1, 7].

Для подолання обмеження одноконтурності при керуванні інвертованим маятником на практиці реалізують каскадний ПІД: зовнішній контур стабілізує кут маятника θ, а внутрішній — положення візка x. Вихід зовнішнього контуру слугує завданням для внутрішнього. Такий підхід дозволяє забезпечити стабілізацію обох координат, однак налаштування каскадного ПІД є значно складнішим: необхідно не лише підібрати шість коефіцієнтів (Kp, Ki, Kd для кожного контуру), а й забезпечити правильне розмежування смуг пропускання контурів для уникнення їхньої взаємодії [2, 4].

Незважаючи на зазначені обмеження, ПІД-регулятор відіграє важливу роль як базовий метод для порівняння при оцінюванні ефективності більш складних алгоритмів. У науковій літературі прийнято наводити результати ПІД як еталонну точку відліку, відносно якої оцінюється виграш у якості стабілізації від застосування LQR, SMC або MPC. Це робить ПІД невід'ємним елементом будь-якого порівняльного дослідження методів керування нестійкими системами [4, 16].

1.2.2 Оптимальні методи стабілізації

Лінійно-квадратичний регулятор (LQR), є одним з найбільш теоретично обґрунтованих та практично ефективних методів стабілізації нестійких лінійних систем. Метод базується на поданні системи у просторі станів та використовує повну інформацію про вектор стану, що дозволяє одночасно стабілізувати всі координати системи [1, 8].

Основна ідея LQR полягає у знаходженні лінійного закону керування з повним зворотним зв'язком за станом u = −Kx, який мінімізує квадратичний функціонал якості:

$$J = \int_0^\infty \left[x^T Q x + u^T R u \right] dt$$

де x — вектор стану, u — вектор керування, Q та R — симетричні позитивно визначені матриці вагових коефіцієнтів. Матриця Q визначає «штраф» за відхилення координат стану від нуля (наприклад, великий коефіцієнт при θ^2 означає, що допускається лише мале відхилення кута), а матриця R — «ціну» керуючого впливу (великий коефіцієнт при u^2 означає, що система намагається витрачати мінімум енергії) [8, 9].

Оптимальна матриця підсилення K знаходиться аналітично через розв'язання алгебраїчного рівняння Ріккаті: $A^TP + PA - PBR^{-1}B^TP + Q = 0$, після

чого $K = R^{-1}B^{T}P$. Ключова перевага LQR полягає в тому, що замкнена система завжди стійка, якщо пара (A, B) є керованою, а матриці Q та R обрані правильно. При реалізації в MATLAB задача зводиться до виклику однієї функції: K = lqr(A, B, Q, R) [1, 5].

Вибір матриць Q та R є основним етапом при синтезі LQR-регулятора. Широко використовується метод Бруяна–Зіглера: діагональні елементи Q та R обираються обернено пропорційними до квадратів максимально допустимих відхилень відповідних змінних. Наприклад, якщо максимально допустимий кут відхилення маятника становить 0.1 рад, то відповідний діагональний елемент Q дорівнює 1/0.01 = 100. Такий підхід дає нормований початковий варіант, який потім коригується за результатами моделювання [1, 5].

Слід зазначити важливе обмеження LQR: метод вимагає знання повного вектора стану $x = \left[x\ \dot{x}\ \theta\ \dot{\theta}\right]^{\top}$ у кожний момент часу. На практиці не всі компоненти стану є безпосередньо вимірюваними — наприклад, кутова швидкість маятника $\dot{\theta}$ часто недоступна без диференціювання сигналу датчика кута, що посилює шум. Для вирішення цієї проблеми LQR доповнюється оцінювачем стану — фільтром Калмана — що утворює комбінований регулятор LQG (Linear Quadratic Gaussian). Фільтр Калмана відновлює повний вектор стану з вимірюваних виходів, враховуючи статистичні характеристики шуму вимірювань та шуму процесу [1, 26].

Незважаючи на це ускладнення, LQR (і LQG) залишаються основними методами стабілізації інвертованого маятника у практичних реалізаціях. Ключова перевага — гарантована стійкість замкненої системи та систематичний підхід до компромісу між якістю стабілізації та витратами керуючого сигналу через налаштування матриць Q та R. Саме тому LQR обрано основним методом для реалізації у даній дипломній роботі [4, 5].

1.2.3 Сучасні підходи до стабілізації

Поряд з класичним ПІД та оптимальним LQR у сучасній теорії керування розроблено ряд підходів, що розширюють можливості стабілізації нестійких систем у разі наявності невизначеностей, нелінійностей або специфічних обмежень на якість перехідного процесу. Нижче наведено огляд чотирьох найбільш поширених методів [23, 26].

1. Модальне керування (Pole Placement). Метод дозволяє інженеру безпосередньо вказати бажані власні значення (полюси) замкненої системи. Матриця підсилення K розраховується таким чином, щоб матриця A − BK мала саме ці власні значення. Вибір полюсів у лівій напівплощині гарантує стійкість замкненої системи, а їх конкретне розташування визначає динаміку — час регулювання, перерегулювання тощо. На відміну від LQR, цей метод не пов'язаний з оптимізацією конкретного функціоналу якості, але дає пряме керування розташуванням полюсів [1, 18].

2. Ковзний режим (Sliding Mode Control, SMC). Метод відноситься до класу нелінійних регуляторів зі змінною структурою. Ідея полягає у виборі гіперплощини (поверхні ковзання) у просторі станів та синтезі закону перемикання, що «зштовхує» траєкторію системи на цю поверхню і утримує на ній. Після потрапляння на поверхню ковзання система рухається вздовж неї до точки рівноваги. SMC має чудові властивості робастності до параметричних збурень та зовнішніх впливів, однак страждає від ефекту чатерингу — високочастотних коливань керуючого сигналу [4, 19, 20].

3. Прогнозуюче керування (MPC, Model Predictive Control). MPC на кожному кроці дискретизації розв'язує задачу оптимального керування на скінченному горизонті прогнозу з урахуванням обмежень на вхід і вихід. Після розв'язання оптимізаційної задачі застосовується лише перший керуючий вплив,

після чого процедура повторюється. Основна перевага MPC — явне врахування обмежень на керування та стан системи. Дослідження показують, що MPC забезпечує кращі перехідні характеристики порівняно з LQR та LQG при наявності обмежень, але потребує суттєво більших обчислювальних ресурсів [21, 26].

4. Нечітка логіка (Fuzzy Logic Control). Замість точного математичного опису об'єкта нечіткий регулятор кодує знання експерта у вигляді лінгвістичних правил типу «ЯКЩО кут відхилення великий ТА кутова швидкість велика, ТО прикласти велику силу вліво». Нечітка логіка є особливо корисною для сильно нелінійних систем, де лінеаризація є грубим наближенням. Сучасні гібридні підходи поєднують нечітку логіку з ковзним режимом, досягаючи переваг обох методів [22, 23].

5. Методи на основі підкріплювального навчання (Reinforcement Learning, RL). RL-агент навчається стабілізувати об'єкт шляхом взаємодії з ним без апріорного знання математичної моделі. Алгоритм отримує числову винагороду за успішну стабілізацію та покарання за втрату стійкості, поступово навчаючись оптимальній стратегії керування. Сучасні алгоритми глибокого RL (Deep Q-Network, PPO, SAC) демонструють здатність стабілізувати навіть потрійний інвертований маятник, що недосяжне для класичних лінійних методів [24, 25].

1.3 Огляд існуючих моделей і підходів до моделювання

1.3.1 Математичні моделі нестійких систем

Математичний опис динаміки інвертованого маятника на візку традиційно починається з виведення рівнянь Лагранжа [2]. Функція Лагранжа $L = T - V$, де

T — кінетична енергія системи, V — потенціальна енергія [6]. Для системи «інвертований маятник на візку» кінетична енергія складається з кінетичної енергії поступального руху візка та кінетичної і обертальної енергії маятника; потенціальна — визначається висотою центру мас маятника [2].

Застосування рівнянь Лагранжа до узагальнених координат $q_1 = x$ (переміщення візка) та $q_2 = \theta$ (кут маятника) дає систему нелінійних диференціальних рівнянь другого порядку [3]. Після спрощення ці рівняння мають вигляд:

$$\begin{cases} (M+m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta}\cos\theta - ml\dot{\theta}^2\sin\theta = F \\ l\ddot{\theta} + \ddot{x}\cos\theta - g\sin\theta = 0 \end{cases}$$

де M — маса візка, m — маса маятника, l — відстань від шарніра до центру мас маятника, g — прискорення вільного падіння, F — зовнішня горизонтальна сила. Ці рівняння є нелінійними через присутність тригонометричних функцій $\sin\theta$ та $\cos\theta$, а також добутку $\dot{\theta}^2$ та $\sin\theta$ [2].

Для застосування класичних методів аналізу та синтезу нелінійну систему лінеаризують у околі точки рівноваги [1]. При малих відхиленнях від вертикального положення рівноваги ($\theta \approx 0$) приймають наближення: $\sin\theta \approx \theta$, $\cos\theta \approx 1$, $\theta^2 \approx 0$ [6]. Застосування перетворення Лапласа до лінеаризованих рівнянь дозволяє отримати передавальні функції системи — залежності між вхідним сигналом F(s) та вихідними сигналами Θ(s) і X(s) [7].

Аналіз передавальних функцій показує, що система має полюси як в лівій (стійкі), так і в правій (нестійкі) напівплощині комплексної площини [7]. Це підтверджує нестійкість системи та пояснює, чому без замкненого контуру керування маятник не може залишатися у вертикальному положенні [2]. Передавальні функції зручні для частотного аналізу та використовуються для оцінки запасів стійкості замкненої системи за критеріями Найквіста та Боде [18].

Представлення у просторі станів є найбільш зручним для синтезу сучасних регуляторів, зокрема LQR та модального керування [1]. Вектор стану системи вибирається у вигляді:

$$x = [x \ \dot{x} \ \theta \ \dot{\theta}]$$

де x — переміщення візка, $\dot{x}$ — швидкість візка, θ — кут відхилення маятника, $\dot{\theta}$ — кутова швидкість маятника [5]. Лінеаризована система записується у стандартній формі простору станів: $\dot{x} = Ax + Bu$ та $y = Cx + Du$, де матриці A, B, C, D визначаються через параметри системи M, m, l, g [1].

Аналіз власних значень матриці A — необхідний перший крок перед синтезом регулятора [7]. Для типових числових параметрів оберненого маятника (M = 1.0 кг, m = 0.2 кг, l = 0.2 м, g = 9.81 м/с²) матриця A має два від'ємних та одне додатне дійсне власне значення, що підтверджує нестійкість. Крім того, обчислення матриць керованості та спостережуваності Калмана підтверджує, що система є повністю керованою та спостережуваною, що є необхідною умовою синтезу регулятора [1].

Матриця керованості для системи четвертого порядку (чотири змінних стану: x, $\dot{x}$, θ, $\dot{\theta}$) визначається як: $W_c = [B \ AB \ A^2B \ A^3B]$, і є повністю керованою, якщо ранг W_c дорівнює чотирьом [5]. Аналогічно, матриця спостережуваності $W_o = [C; CA; CA^2; CA^3]$ повинна мати повний ранг для повної спостережуваності. Ці умови є фундаментальними теоремами теорії систем (теореми Калмана про керованість і спостережуваність) і забезпечують принципову можливість синтезу регулятора та оцінювача стану [1].

Нелінійна модель використовується у Simulink для верифікації: синтезований на основі лінійної моделі LQR-регулятор тестується на повній нелінійній моделі, що дозволяє оцінити область його ефективності. Як правило, при відхиленнях кута маятника до ±15–20° лінійна апроксимація є достатньо точною, і синтезований лінійний регулятор забезпечує успішну стабілізацію. При

більших відхиленнях необхідне застосування нелінійних методів або вдосконалення регулятора з урахуванням нелінійної динаміки [4].

1.3.2 Використання середовища MATLAB/Simulink

Середовище MATLAB/Simulink компанії MathWorks є загальновизнаним стандартом для проектування, аналізу та моделювання систем автоматичного керування як в академічному середовищі, так і в промисловості [1]. Бібліотека Control System Toolbox надає готовий інструментарій для роботи з моделями у просторі станів: функції ss(), tf(), bode(), nyquist(), step() дозволяють виконати повний аналіз лінійних систем кількома рядками коду [5].

Для синтезу оптимальних регуляторів призначена функція lqr(A, B, Q, R), яка в одному виклику розв'язує рівняння Ріккаті та повертає матрицю підсилення K [8]. Функції eig() та ctrb()/obsv() відповідно перевіряють стійкість та керованість/спостережуваність системи [5]. Функція place() реалізує модальне керування, дозволяючи розмістити полюси у потрібних точках комплексної площини.

Simulink доповнює MATLAB графічним середовищем блочного моделювання, де математична модель будується у вигляді структурної схеми з блоків інтеграторів, підсилювачів, нелінійних перетворень тощо [2]. Для інвертованого маятника це дозволяє реалізувати повну нелінійну модель (з $\sin\theta$ та $\cos\theta$ без лінеаризації) та перевірити ефективність синтезованого лінійного LQR-регулятора на нелінійному об'єкті [4].

Стандартний приклад застосування MATLAB/Simulink для інвертованого маятника включає такі кроки: (1) задання числових параметрів системи (M, m, l, g); (2) формування матриць A, B, C, D лінеаризованої моделі; (3) перевірка стійкості за власними значеннями матриці A та керованості через ранг матриці

Калмана; (4) вибір матриць Q та R та виклик функції lqr() для отримання матриці K; (5) побудова замкненої системи та моделювання перехідного процесу; (6) аналіз результатів за показниками якості — часом регулювання, перерегулюванням, точністю стабілізації [10].

Такий підхід дозволяє у короткі строки отримати практичний досвід синтезу оптимальних регуляторів та верифікувати теоретичні результати чисельним моделюванням. Навчальний матеріал [10] Мічиганського університету є загальнодоступним ресурсом, де детально описані всі кроки для задачі оберненого маятника — від виведення рівнянь руху до налаштування LQR-регулятора та оцінювача стану.

Особливу роль відіграє інструментарій Simulink для аналізу лінеаризації нелінійних моделей. Функція linmod() або блок Linearization Point дозволяє автоматично лінеаризувати нелінійну Simulink-модель у заданій робочій точці [21], що позбавляє від необхідності ручного виведення матриць A, B, C, D. Отримані матриці можна безпосередньо передати у функцію lqr() для синтезу регулятора. Такий автоматизований підхід особливо корисний при роботі зі складними нелінійними моделями, де ручна лінеаризація є трудомісткою.

Для візуалізації результатів моделювання в MATLAB/Simulink використовуються блоки Scope, To Workspace та інструмент Simulation Data Inspector [2], який дозволяє порівнювати траєкторії кількох змінних на одному графіку та обчислювати інтегральні показники якості. Оцінка ефективності синтезованого LQR-регулятора виконується за такими показниками: час досягнення рівноваги (settling time), максимальне відхилення від рівноваги при початковому збуренні (overshoot), та інтегральний квадратичний критерій (ISE — Integral Square Error) як кількісна міра відхилення [7].

Таким чином, середовище MATLAB/Simulink забезпечує повний цикл проектування системи керування нестійким об'єктом: від побудови та аналізу

математичної моделі через синтез регулятора до моделювання та верифікації результатів. Це робить MATLAB/Simulink незамінним інструментом як у навчальній, так і в дослідницькій практиці при вирішенні задач стабілізації нестійких динамічних систем.

1.3.3 Аналіз сучасних наукових робіт

Наведемо 10 актуальних наукових публікацій та навчально-методичних робіт, що стосуються задачі стабілізації нестійких динамічних об'єктів.

У роботі [20] досліджується ковзний режим з спостерігачем збурень для стабілізації нестійкого об'єкта. Запропонований метод дозволяє зменшити чатеринг і покращити якість перехідного процесу у порівнянні зі стандартним SMC. Результати підтверджують ефективність підходу для систем з невизначеностями.

Робота [4] порівнює три підходи до стабілізації двоколісного оберненого маятника: класичний ПІД, LQR та ковзний режим. Результати свідчать, що LQR та SMC перевищують ПІД за показниками якості стабілізації, при цьому SMC демонструє вищу робастність до збурень, тоді як LQR забезпечує мінімальні витрати енергії. Модель побудовано в MATLAB/Simulink.

Дослідження [24] присвячено застосуванню методів глибокого підкріплювального навчання для стабілізації потрійного оберненого маятника в реальному часі. Вперше задемонстровано, що RL-агент (з алгоритмом SAC) здатний стабілізувати фізичний потрійний маятник — задачу, що є принципово нерозв'язною для лінійних методів через складну нелінійність.

В дослідженні [26] виконано систематичне порівняння LQR, LQG та MPC для системи інвертованого маятника. Показано, що при відсутності обмежень три методи дають близькі результати, але MPC значно перевищує їх при наявності

обмежень на керуючий сигнал за рахунок явного врахування цих обмежень в задачі оптимізації.

Публікація [23] присвячена гібридному методу, що поєднує нечітку логіку та ковзний режим для підвищення якості стабілізації нелінійного інвертованого маятника. Оптимізований нечіткий регулятор (з алгоритмом PSO) поєднується з SMC та розширеним спостерігачем стану, демонструючи значне покращення показників стабілізації та відхилення збурень.

У роботі [25] оцінюються RL-алгоритми для стабілізації оберненого маятника: порівнюються алгоритми DQN, PPO та SAC. PPO демонструє найкращу продуктивність і найкоротший час навчання, що робить його перспективним методом для реального часу.

Робота [16] порівнює ПІД та LQR при стабілізації системи балансування кулі на площині — об'єкта, аналогічного інвертованому маятнику. Показано, що LQR перевершує ПІД за показником перерегулювання та часом регулювання завдяки використанню повного вектора стану.

Дисертація [22] розвиває теорію нечітких регуляторів для систем з нестійкими підсистемами. Запропоновано методику синтезу нечітких регуляторів, що гарантує стійкість замкненої системи з нестійким об'єктом за теорією Ляпунова.

У навчально-методичному посібнику [18] систематизовано матеріал з теорії автоматичного керування включно з методами синтезу регуляторів у просторі станів та оптимального керування. Посібник використовується у навчальному процесі для практичного освоєння MATLAB/Simulink.

Відкритий навчальний курс [14] охоплює теоретичний та практичний аналіз задачі стабілізації інвертованого маятника: від лінеаризації та аналізу стійкості до синтезу LQR та оцінювача стану.

Висновки до розділу 1

У першому розділі виконано аналіз нестійких динамічних об'єктів та методів їх стабілізації.

Нестійкість є фундаментальною властивістю широкого класу динамічних систем, при якій будь-яке мале відхилення від стану рівноваги не загасає, а зростає з часом. Формальний критерій нестійкості лінійних систем — наявність власних значень матриці системи з додатною дійсною частиною — є єдиним з математичної точки зору незалежно від фізичної природи об'єкта. Нестійкість може бути як небажаним явищем, так і свідомо закладеною конструктивною властивістю задля отримання технічних переваг.

Інвертований маятник на рухомому візку обрано як основний предмет дослідження. Показано, що нестійкість цієї системи зумовлена розміщенням центру мас вище точки кріплення: сила тяжіння відіграє роль дестабілізуючої, а не відновлювальної сили. Система є недопривідною — два ступені вільності при одному керуючому вході — що принципово ускладнює синтез регулятора. Встановлено, що результати стабілізації інвертованого маятника безпосередньо застосовуються в задачах керування ракетами, самобалансуючими роботами та безпілотними апаратами.

Проведено огляд методів стабілізації нестійких систем. ПІД-регулятор є найбільш поширеним у промисловості, проте має принципові обмеження при застосуванні до нестійких та багатовимірних об'єктів: він оперує лише однією вихідною змінною і не гарантує оптимальності. LQR-регулятор базується на поданні системи у просторі станів та мінімізує квадратичний функціонал якості, що дозволяє одночасно стабілізувати всі координати системи та гарантувати стійкість замкненої системи за умови керованості. Серед сучасних методів розглянуто ковзний режим (SMC), прогнозуюче керування (MPC), нечітку логіку

та підкріплювальне навчання (RL), кожен з яких має свої переваги в залежності від умов задачі.

Розглянуто три рівні математичного опису нестійких систем: нелінійні диференціальні рівняння Лагранжа, передавальні функції після лінеаризації та лінеаризована модель у просторі станів. Встановлено, що представлення у просторі станів є найбільш зручним для синтезу LQR-регулятора, оскільки безпосередньо використовується функцією lqr() у MATLAB. Аналіз власних значень матриці системи та перевірка керованості за критерієм Калмана є обов'язковими попередніми кроками перед синтезом регулятора.

Обґрунтовано вибір середовища MATLAB/Simulink як основного інструменту моделювання. Бібліотека Control System Toolbox забезпечує повний набір функцій для аналізу та синтезу регуляторів, а Simulink дозволяє верифікувати синтезований лінійний регулятор на повній нелінійній моделі об'єкта. Огляд десяти актуальних наукових публікацій підтвердив актуальність обраної теми та доцільність використання LQR як основного методу стабілізації в даній роботі.

Таким чином, аналітичні матеріали, зібрані у першому розділі, формують теоретичну та методологічну основу для розробки системи керування інвертованим маятником, що буде реалізовано в наступних розділах дипломної роботи.

РОЗДІЛ 2. МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ СИСТЕМИ

2.1 Фізична модель та параметри

Об'єктом дослідження в даній дипломній роботі є класична нестійка динамічна система — інвертований маятник на рухомому візку [12]. Ця система є фундаментальною в теорії автоматичного керування, оскільки її динаміка описує широке коло реальних фізичних об'єктів (від систем стабілізації ракет до сучасних гіроскутерів та крокуючих роботів) [3]. Головна мета системи керування полягає в утриманні стрижня маятника у верхньому вертикальному (нестійкому) положенні шляхом прикладання керуючої сили виключно до візка, який має можливість пересуватися вздовж горизонтальної осі [2].

Для побудови коректної математичної моделі введемо наступні ідеалізації та фізичні допущення, які дозволять уникнути надмірної складності рівнянь[2]:

1. Стрижень маятника вважається абсолютно жорстким (не піддається деформації) та невагомим.
2. Вся маса маятника зосереджена в одній точці на його кінці у вигляді матеріальної точки (вантажу).
3. Шарнір, який з'єднує маятник із візком, є ідеальним, тобто сили сухого та в'язкого тертя в ньому відсутні.
4. Візок рухається по ідеально рівній горизонтальній поверхні без проковзування та без тертя кочення.
5. Аеродинамічним опором повітря нехтуємо у зв'язку з малими швидкостями руху системи.

Система розглядається у двовимірній декартовій системі координат. За узагальнені координати системи приймаємо:

1. $x(t)$ — лінійне переміщення візка відносно початкової точки відліку вздовж горизонтальної осі (м);
2. $\theta(t)$ — кут відхилення маятника від вертикальної осі (рад). Вертикальне положення рівноваги відповідає куту $\theta = 0$.

Для проведення подальших розрахунків та комп'ютерного моделювання системи у середовищі MATLAB зафіксуємо номінальні масо-габаритні параметри об'єкта, що відповідають умовам завдання на дипломну роботу. Параметри наведено у Таблиці 2.1.

Таблиця 2.1. Фізичні параметри

Символ	Зміст	Значення	Одиниця
M	Маса візка	1.0	кг
m	Маса зосередженого вантажу маятника	0.2	кг
l	Відстань від осі шарніра до центру мас вантажу	0.2	м
g	Прискорення вільного падіння	9.81	м/с²

2.2. Побудова математичної моделі за методом Лагранжа

2.2.1 Теоретичні основи застосування енергетичного методу Лагранжа

Для побудови математичної моделі складних багатовимірних електромеханічних об'єктів у сучасній теорії автоматичного керування застосовуються різноманітні підходи. Використання виключно класичних методів ньютонівської механіки (через закони Ньютона-Ейлера) часто виявляється занадто громіздким. Це пов'язано з необхідністю обов'язкового

врахування всіх внутрішніх сил реакцій у шарнірах та зчленуваннях системи, що для нестійких об'єктів створює надлишкову систему диференціальних рівнянь [3]. Тому в інженерній практиці розрахунку систем автоматичного керування (САК) більш раціональним та загальноприйнятим підходом є використання аналітичної механіки, зокрема енергетичного методу — рівнянь Лагранжа другого роду [6].

У загальному вигляді рівняння Лагранжа для голономних систем записується наступним чином:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i$$

де q_i — узагальнені координати системи, тобто незалежні параметри, що однозначно визначають положення системи у просторі; $\dot{q}_i$ — узагальнені швидкості (перша похідна від координат за часом); Q_i — узагальнені неконсервативні сили (зовнішні керуючі впливи або сили в'язкого тертя), що діють уздовж відповідної координати; L — функція Лагранжа (лагранжіан) [1].

Функція Лагранжа L визначається як різниця між повною кінетичною енергією системи T та її повною потенційною енергією V:

$$L(q_i, \dot{q}_i) = T(q_i, \dot{q}_i) - V(q_i)$$

Для нашої системи (інвертований маятник на візку) маємо два ступені вільності [14]. Відповідно, ми обираємо дві узагальнені координати:

1. $q_1 = x$ — лінійне переміщення візка вздовж горизонтальної направляючої;
2. $q_2 = \theta$ — кут відхилення стрижня маятника від вертикальної осі.

Відповідні узагальнені швидкості: $\dot{x}$ (лінійна швидкість візка) та $\dot{\theta}$ (кутова швидкість маятника). Узагальнена сила, що діє по координаті x, дорівнює керуючому зусиллю приводу F (тобто $Q_1 = F$). По координаті θ зовнішні сили відсутні (шарнір вважається ідеальним), тому $Q_2 = 0$ [2].

2.2.2 Визначення кінетичної та потенційної енергії системи

Кінетична енергія всієї системи складається з кінетичної енергії поступального руху візка T_c та кінетичної енергії складного (поступального та обертального) руху маятника T_p [2].

Кінетична енергія візка масою M визначається за класичною формулою:

$$T_c = \frac{1}{2} M\dot{x}^2$$

Для визначення кінетичної енергії маятника масою m, необхідно спочатку знайти вектор швидкості його центру мас. Задамо декартові координати центру мас маятника (x_p, y_p) через узагальнені координати x та θ [1]:

$$x_p = x + l\sin\theta$$

$$y_p = l\cos\theta$$

Щоб знайти проекції лінійної швидкості центру мас маятника на осі координат, продиференціюємо ці рівняння по часу t:

$$\dot{x}_p = \frac{d}{dt}(x + l\sin\theta) = \dot{x} + l\dot{\theta}\cos\theta$$

$$\dot{y}_p = \frac{d}{dt}(l\cos\theta) = -l\dot{\theta}\sin\theta$$

Квадрат абсолютної швидкості центру мас маятника дорівнює сумі квадратів його проекцій:

$$v_p^2 = \dot{x}_p^2 + \dot{y}_p^2$$

$$v_p^2 = (\dot{x} + l\dot{\theta}\cos\theta)^2 + (-l\dot{\theta}\sin\theta)^2$$

$$v_p^2 = \dot{x}^2 + 2l\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta + l^2\dot{\theta}^2\cos^2\theta + l^2\dot{\theta}^2\sin^2\theta$$

Використовуючи основну тригонометричну тотожність, спростимо вираз:

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

$$v_p^2 = \dot{x}^2 + 2l\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta + l^2\dot{\theta}^2$$

Тоді кінетична енергія маятника (як матеріальної точки) набуде вигляду:

$$T_p = \frac{1}{2} m v_p^2 = \frac{1}{2} m \left(\dot{x}^2 + 2l\dot{x}\dot{\theta} \cos\theta + l^2 \dot{\theta}^2 \right)$$

Повна кінетична енергія системи $T = T_c + T_p$:

$$T = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m \left(\dot{x}^2 + 2l\dot{x}\dot{\theta} \cos\theta + l^2 \dot{\theta}^2 \right)$$

$$T = \frac{1}{2} (M + m) \dot{x}^2 + ml\dot{x}\dot{\theta} \cos\theta + \frac{1}{2} ml^2 \dot{\theta}^2$$

Потенційна енергія системи зосереджена лише у маятнику, оскільки візок рухається по горизонталі (його висота не змінюється). За нульовий рівень потенційної енергії приймемо вісь руху візка [2]. Тоді:

$$V = mgy_p = mgl \cos\theta$$

2.2.3 Формування лагранжіану та виведення диференціальних рівнянь руху

Функція Лагранжа для нашої системи має вигляд:

$$L = T - V$$

$$L = \frac{1}{2} (M + m) \dot{x}^2 + ml\dot{x}\dot{\theta} \cos\theta + \frac{1}{2} ml^2 \dot{\theta}^2 - mgl \cos\theta$$

Застосуємо рівняння Лагранжа до першої узагальненої координати ($q_1 = x$). Для цього знайдемо відповідні частинні похідні [1]:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (M + m) \dot{x} + ml\dot{\theta} \cos\theta$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = (M + m) \ddot{x} + ml\ddot{\theta} \cos\theta - ml\dot{\theta}^2 \sin\theta$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

Підставляючи ці компоненти в рівняння Лагранжа та враховуючи, що $Q_1 = F$, отримуємо перше нелінійне диференціальне рівняння руху системи (рівняння динаміки візка):

$$(M+m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta}\cos\theta - ml\dot{\theta}^2\sin\theta = F$$

Тепер застосуємо рівняння Лагранжа до другої узагальненої координати ($q_2 = \theta$):

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = ml\dot{x}\cos\theta + ml^2\dot{\theta}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = ml\ddot{x}\cos\theta - ml\dot{x}\dot{\theta}\sin\theta + ml^2\ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -ml\dot{x}\dot{\theta}\sin\theta + mgl\sin\theta$$

Підставляючи компоненти в рівняння Лагранжа ($Q_2 = 0$):

$$ml\ddot{x}\cos\theta - ml\dot{x}\dot{\theta}\sin\theta + ml^2\ddot{\theta} - (-ml\dot{x}\dot{\theta}\sin\theta + mgl\sin\theta) = 0$$

Після скорочення $ml\dot{x}\dot{\theta}\sin\theta$ та ділення обох частин на спільний множник ml, отримуємо друге диференціальне рівняння (рівняння динаміки маятника):

$$\ddot{x}\cos\theta + l\ddot{\theta} - g\sin\theta = 0$$

Таким чином, повна математична модель інвертованого маятника у вигляді системи двох нелінійних диференціальних рівнянь другого порядку має остаточний вигляд [3]:

$$(M+m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta}\cos\theta - ml\dot{\theta}^2\sin\theta = F$$

$$\ddot{x}\cos\theta + l\ddot{\theta} - g\sin\theta = 0$$

Отримана система рівнянь є суттєво нелінійною, що ускладнює пряме застосування методів класичної теорії автоматичного керування та потребує проведення процедури лінеаризації в околі робочої точки [7].

2.3 Лінеаризація математичної моделі системи

2.3.1 Теоретичне обґрунтування методів лінеаризації нелінійних систем

Як було показано у попередньому підрозділі, динаміка інвертованого маятника описується системою нелінійних диференціальних рівнянь. Нелінійність обумовлена наявністю тригонометричних функцій (синусів та косинусів кута відхилення), а також добутками змінних стану (наприклад, відцентровою силою $ml\dot{\theta}^2 \sin\theta$).

Варто зазначити, що переважна більшість класичних і сучасних методів теорії автоматичного керування (включаючи критерії стійкості, частотні методи, синтез ПІД-регуляторів та лінійно-квадратичних регуляторів LQR) розроблені виключно для лінійних стаціонарних систем (LTI — Linear Time-Invariant systems) [7, 18]. Безпосереднє застосування цих методів до отриманої нелінійної моделі є неможливим. Тому наступним критично важливим етапом математичного моделювання є процедура лінеаризації — наближеної заміни нелінійних диференціальних рівнянь лінійними в околі певного заданого режиму роботи.

З математичної точки зору, процедура лінеаризації базується на розкладанні нелінійних функцій у ряд Тейлора в околі так званої робочої точки (точки рівноваги) з подальшим відкиданням членів вищих порядків [1]. Якщо нелінійна система описується векторним рівнянням виду $\dot{x} = f(x,u)$, то її розкладання в ряд Тейлора має вигляд:

$$\dot{x} \approx f(x_0,u_0) + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x_0,u_0} (x - x_0) + \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{x_0,u_0} (u - u_0) + O(x^2,u^2)$$

де (x_0, u_0) — координати точки рівноваги; $O(x^2, u^2)$ — залишкові члени ряду другого та вищих порядків, якими в інженерних розрахунках нехтують через їхню нескінченну малість.

2.3.2 Визначення точки рівноваги (робочої точки) системи

Для проведення лінеаризації необхідно чітко визначити робочу точку, навколо якої система буде функціонувати. Згідно з технічним завданням, головною метою проектованої системи керування є стабілізація маятника у строго вертикальному (верхньому) положенні та утримання візка у заданій початковій координаті [2].

Отже, ідеальним станом рівноваги для нашої системи є такий стан, при якому:

1. Кут нахилу маятника дорівнює нулю: $\theta_0 = 0$.
2. Візок знаходиться у початку координат: $x_0 = 0$.
3. Всі швидкості та прискорення у системі дорівнюють нулю, оскільки система перебуває у стані абсолютного спокою: $\dot{\theta}_0 = 0$, $\ddot{\theta}_0 = 0$, $\dot{x}_0 = 0$, $\ddot{x}_0 = 0$.
4. Зовнішнє керуюче зусилля, що подається на двигун візка, також відсутнє: $F_0 = 0$.

Припускається, що в процесі роботи під дією зовнішніх збурень система буде здійснювати лише малі відхилення навколо цієї точки рівноваги. Позначимо ці малі відхилення як $\Delta\theta$ та Δx. Оскільки робоча точка знаходиться в нулі, справедливими є рівності: $\theta = \Delta\theta$ та $x = \Delta x$.

2.3.3 Математичні перетворення та отримання лінеаризованих рівнянь руху

Використаємо припущення про малість відхилень для спрощення тригонометричних та нелінійних компонентів у системі рівнянь, отриманій у пункті 2.2.3. Для достатньо малих значень кута θ (в радіанах) справедливими є

наступні математичні наближення (перші члени розкладання в ряд Маклорена) [6]:

1. $\sin\theta \approx \theta$ (синус малого кута наближено дорівнює самому куту).
2. $\cos\theta \approx 1$ (косинус малого кута наближається до одиниці).

Крім того, складова $ml\dot{\theta}^2 \sin\theta$ містить добуток квадрата малої швидкості на синус малого кута. З точки зору математичного аналізу, цей доданок є величиною третього порядку малості. Відповідно до правил лінеаризації, такими величинами ми повністю нехтуємо, прирівнюючи їх до нуля [1]:

$$\dot{\theta}^2 \sin\theta \approx 0$$

Застосуємо ці наближення до першого нелінійного рівняння (рівняння візка):

$$(M+m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta}\cos\theta - ml\dot{\theta}^2 \sin\theta = F$$

Підставивши наближені значення, отримаємо лінеаризоване рівняння візка:

$$(M+m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta} = F$$

Застосуємо ті ж самі наближення до другого нелінійного рівняння (рівняння маятника):

$$\ddot{x}\cos\theta + l\ddot{\theta} - g\sin\theta = 0$$

Після підстановки отримаємо лінеаризоване рівняння маятника:

$$\ddot{x} + l\ddot{\theta} - g\theta = 0$$

Для подальшого синтезу систем керування (отримання передавальних функцій та простору станів) необхідно розв'язати цю систему з двох лінійних алгебраїчних рівнянь відносно старших похідних, тобто виразити прискорення $\ddot{x}$ та $\ddot{\theta}$ в явному вигляді [2].

З другого лінеаризованого рівняння виразимо лінійне прискорення візка $\ddot{x}$:

$$\ddot{x} = g\theta - l\ddot{\theta}$$

Підставимо цей вираз у перше лінеаризоване рівняння:

$$(M+m)(g\theta - l\ddot{\theta}) + ml\ddot{\theta} = F$$

Розкриємо дужки:

$$(M+m)g\theta - (M+m)l\ddot{\theta} + ml\ddot{\theta} = F$$

$$Mg\theta + mg\theta - Ml\ddot{\theta} - ml\ddot{\theta} + ml\ddot{\theta} = F$$

Скоротивши $-ml\ddot{\theta} + ml\ddot{\theta}$, отримаємо:

$$(M+m)g\theta - Ml\ddot{\theta} = F$$

Тепер виразимо кутове прискорення маятника θ̈:

$$Ml\ddot{\theta} = (M+m)g\theta - F$$

$$\ddot{\theta} = \frac{(M+m)g}{Ml}\theta - \frac{1}{Ml}F$$

Знаючи явний вираз для θ̈, знайдемо явний вираз для лінійного прискорення $\ddot{x}$, підставивши θ̈ у раніше отриману формулу:

$$\ddot{x} = g\theta - l\left(\frac{(M+m)g}{Ml}\theta - \frac{1}{Ml}F\right)$$

$$\ddot{x} = g\theta - \frac{(M+m)g}{M}\theta + \frac{1}{M}F$$

$$\ddot{x} = g\theta - \left(g + \frac{mg}{M}\right)\theta + \frac{1}{M}F$$

$$\ddot{x} = g\theta - g\theta - \frac{mg}{M}\theta + \frac{1}{M}F$$

$$\ddot{x} = -\frac{mg}{M}\theta + \frac{1}{M}F$$

Отже, остаточна система лінеаризованих диференціальних рівнянь, яка зручна для подальшого аналізу та розрахунків, має такий вигляд:

$$\ddot{\theta} = \frac{(M+m)g}{Ml}\theta - \frac{1}{Ml}F$$

$$\ddot{x} = -\frac{mg}{M}\theta + \frac{1}{M}F$$

Отримані лінійні рівняння дозволяють перейти до формування передавальної функції об'єкта та побудови матричної моделі у просторі станів.

2.4 Отримання передавальної функції системи

2.4.1 Теоретичні відомості про перетворення Лапласа

Для подальшого аналізу стійкості та синтезу класичних систем автоматичного керування (зокрема, пропорційно-інтегрально-диференціальних регуляторів) необхідно перейти від системи диференціальних рівнянь у часовій області (t-області) до алгебраїчних рівнянь у комплексній області (s-області) [7]. Цей перехід у класичній теорії автоматичного керування здійснюється за допомогою інтегрального перетворення Лапласа [1].

Як відомо, пряме перетворення Лапласа для довільної неперервної функції часу $f(t)$ визначається невласним інтегралом [6]:

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

де $s = \sigma + j\omega$ — комплексна змінна (оператор Лапласа), що складається з дійсної σ та уявної ω частин [1].

Однією з найважливіших властивостей перетворення Лапласа, яка дозволяє кардинально спрощувати розв'язання складних диференціальних рівнянь, є теорема про диференціювання оригіналу. Згідно з цією теоремою, зображення другої похідної функції має вигляд [6]:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2f(t)}{dt^2}\right\} = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$$

Оскільки у попередньому підрозділі було прийнято, що лінеаризація здійснюється для малих відхилень навколо ідеальної точки рівноваги, всі початкові умови у момент часу $t = 0$ (початкові кути, переміщення та їх швидкості) приймаються рівними нулю [2]:

$$\theta(0) = 0, \quad \dot{\theta}(0) = 0, \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0$$

Враховуючи нульові початкові умови, загальна теорема про диференціювання значно спрощується до прямого множення на квадрат оператора Лапласа [7]:

$$\mathcal{L}\{\ddot{\theta}(t)\} = s^2\theta(s)$$

$$\mathcal{L}\{\ddot{x}(t)\} = s^2x(s)$$

2.4.2 Перетворення системи лінеаризованих рівнянь динаміки

Застосуємо перетворення Лапласа до системи лінеаризованих диференціальних рівнянь, яку ми отримали у підрозділі 2.3 [2]. Замінимо функції часу t на їх зображення від комплексної змінної s , а другі похідні — на добуток s^2 та відповідного зображення.

Перше рівняння (динаміка кута відхилення маятника) набуває вигляду:

$$s^2\theta(s) = \frac{(M+m)g}{Ml}\theta(s) - \frac{1}{Ml}F(s)$$

Друге рівняння (динаміка лінійного переміщення візка) перетворюється на:

$$s^2x(s) = -\frac{mg}{M}\theta(s) + \frac{1}{M}F(s)$$

Таким чином, завдяки перетворенню Лапласа позбулися складних диференціальних операторів і отримали систему звичайних лінійних алгебраїчних рівнянь, що дозволяє легко виразити будь-яку змінну через іншу [1].

2.4.3 Виведення аналітичного виразу передавальної функції

У класичній теорії автоматичного керування передавальною функцією $W(s)$ лінійної стаціонарної системи називається відношення зображення за Лапласом вихідної величини до зображення за Лапласом вхідної керуючої величини за умови нульових початкових умов [18].

Оскільки першочерговим завданням розроблюваної системи є стабілізація маятника (запобігання його падінню), нас насамперед цікавить передавальна функція по каналу "керуюче зусилля двигуна — кут відхилення маятника". У цьому випадку вхідним сигналом системи є керуюча сила $F(s)$, а вихідним сигналом, який ми хочемо контролювати, — кут $\theta(s)$ [2].

Візьмемо перше алгебраїчне рівняння з перетвореної системи:

$$s^2\theta(s) = \frac{(M+m)g}{Ml}\theta(s) - \frac{1}{Ml}F(s)$$

Для того щоб знайти необхідне відношення $\frac{\theta(s)}{F(s)}$, згрупуємо всі члени, що містять вихідну змінну $\theta(s)$, у лівій частині рівняння:

$$s^2\theta(s) - \frac{(M+m)g}{Ml}\theta(s) = -\frac{1}{Ml}F(s)$$

Винесемо спільний множник $\theta(s)$ за дужки:

$$\theta(s)\left(s^2 - \frac{(M+m)g}{Ml}\right) = -\frac{1}{Ml}F(s)$$

Тепер, розділивши обидві частини рівняння на вхідний сигнал $F(s)$ та на вираз, що знаходиться у дужках, отримаємо шукану передавальну функцію об'єкта керування в аналітичному вигляді [2]:

$$W_\theta(s) = \frac{\theta(s)}{F(s)} = \frac{-\frac{1}{Ml}}{s^2 - \frac{(M+m)g}{Ml}}$$

Слід звернути увагу на наявність знака "мінус" у чисельнику отриманої передавальної функції. З фізичної точки зору це закономірне явище, яке пояснюється реакцією опори та інерцією: якщо двигун прикладає додатну силу F (візок прискорюється вперед), то за інерцією центр мас маятника спочатку відхиляється назад, тобто у від'ємному напрямку відносно прийнятої осі координат [2].

2.4.4 Розрахунок передавальної функції з урахуванням номінальних параметрів об'єкта

Для проведення подальшого комп'ютерного моделювання у середовищі MATLAB/Simulink та кількісної перевірки стійкості системи необхідно перейти від літерного запису передавальної функції до числового.

Згідно з технічними характеристиками обраної моделі макету інвертованого маятника, об'єкт керування має наступні номінальні масо-габаритні параметри:

1. Маса рухомого візка: $M = 1.0$ кг;
2. Маса стрижня з вантажем: $m = 0.2$ кг;
3. Відстань від осі обертання до центру мас маятника: $l = 0.2$ м;
4. Прискорення вільного падіння: $g = 9.81$ м/с².

Підставимо ці значення у чисельник отриманої передавальної функції та виконаємо розрахунок:

$$-\frac{1}{Ml} = -\frac{1}{1.0 \cdot 0.2} = -\frac{1}{0.2} = -5$$

Тепер розрахуємо вільний член, що знаходиться у знаменнику функції:

$$\frac{(M+m)g}{Ml} = \frac{(1.0+0.2)\cdot 9.81}{1.0 \cdot 0.2}$$

$$\frac{(M+m)g}{Ml} = \frac{1.2 \cdot 9.81}{0.2} = \frac{11.772}{0.2} = 58.86$$

Підставивши отримані числові значення назад у формулу, запишемо остаточний вигляд передавальної функції об'єкта по каналу контролю кута відхилення [2]:

$$W(s) = \frac{-5}{s^2 - 58.86}$$

Отриманий математичний вираз є базовою моделлю типу SISO (Single-Input Single-Output) і буде використаний у подальших підрозділах для аналізу

стійкості (визначення полюсів) та синтезу ізольованого контуру керування на базі ПІД-регулятора.

2.5 Математична модель у просторі станів

2.5.1 Концепція простору станів у сучасній теорії керування

У попередньому підрозділі була отримана математична модель об'єкта у вигляді передавальної функції. Незважаючи на широке застосування, метод передавальних функцій (так званий частотний підхід або метод «вхід-вихід») має суттєві обмеження. Він орієнтований переважно на лінійні системи з одним входом і одним виходом (SISO — Single-Input Single-Output) і дозволяє оцінювати лише зовнішню поведінку об'єкта, повністю ігноруючи внутрішні динамічні процеси, що відбуваються в його компонентах [1].

Для аналізу та синтезу сучасних багатовимірних систем, що мають кілька входів та виходів (MIMO — Multiple-Input Multiple-Output), у сучасній теорії автоматичного керування використовується більш універсальний метод — метод простору станів (State-Space) [1, 6]. Цей підхід базується на тимчасовому аналізі та представленні диференціальних рівнянь n-го порядку у вигляді системи з n диференціальних рівнянь першого порядку, записаних у матрично-векторній формі [7].

Основними поняттями даного методу є:

1. Змінні стану — це мінімальний набір фізичних або математичних величин, знання яких у поточний момент часу разом із заданими вхідними впливами дозволяє однозначно визначити стан системи у будь-який майбутній момент часу [1].
2. Вектор стану $x(t)$ — вектор, компонентами якого є змінні стану.

3. Простір станів — абстрактний n-вимірний простір, осями координат якого є змінні стану. Динаміка системи у цьому просторі відображається у вигляді траєкторії руху зображуючої точки [1].

У загальному вигляді лінійна стаціонарна динамічна система у просторі станів описується системою двох матричних рівнянь:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

де,

1. $x(t)$ — вектор стану системи розмірністю $n \times 1$;
2. $\dot{x}(t)$ — вектор похідних змінних стану за часом розмірністю $n \times 1$;
3. $u(t)$ — вектор вхідних керуючих впливів розмірністю $m \times 1$;
4. $y(t)$ — вектор вихідних змінних (спостережуваних параметрів) розмірністю $p \times 1$ [1, 7].

Матриці системи мають наступний зміст:

1. A — системна матриця (матриця динаміки) розмірністю $n \times n$, яка характеризує власні властивості об'єкта;
2. B — матриця керування (входу) розмірністю $n \times m$, яка визначає вплив вхідних сигналів на зміну стану;
3. C — матриця виходу розмірністю $p \times n$, яка пов'язує внутрішній стан системи з її вихідними параметрами;
4. D — матриця прямого зв'язку (обходу) розмірністю $p \times m$, яка показує безпосередній вплив вхідного сигналу на вихід (для більшості реальних фізичних об'єктів через їхню інерційність матриця D є нульовою) [1].

2.5.2 Вибір змінних стану для системи «інвертований маятник — візок»

Оскільки наша система складається з двох взаємопов'язаних частин (лінійне переміщення візка та кутове відхилення маятника) і описується двома диференціальними рівняннями другого порядку, загальний порядок системи дорівнює $n = 4$ [2]. Відповідно, для повного опису динаміки об'єкта необхідно обрати чотири змінні стану.

Доцільно обрати змінні стану, які мають чіткий фізичний зміст і можуть бути виміряні за допомогою технічних засобів (датчиків положення, енкодерів, гіроскопів та акселерометрів) [14]:

1. Перша змінна стану $x_1(t) = x(t)$ — лінійне положення (координата) візка на направляючій;
2. Друга змінна стану $x_2(t) = \dot{x}(t) = v(t)$ — лінійна швидкість руху візка;
3. Третя змінна стану $x_3(t) = \theta(t)$ — кут відхилення стрижня маятника від верхньої вертикальної осі рівноваги;
4. Четверта змінна стану $x_4(t) = \dot{\theta}(t) = \omega(t)$ — кутова швидкість обертання маятника [5, 10].

Формуємо вектор стану системи $x(t)$ та вектор його похідних за часом $\dot{x}(t)$:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}, \quad \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix}$$

Вхідним сигналом (керуванням) для нашої системи є зовнішня сила, що розвивається приводним двигуном візка, тому вектор входу складається з одного елемента: $u(t) = [F]$ [5, 10].

Як вихідні змінні системи, які підлягають обов'язковому контролю та реєстрації в контурі зворотного зв'язку, оберемо лінійну координату візка x та кут маятника θ . Отже, вектор виходу має вигляд [5, 10]:

$$y(t) = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ \theta \end{bmatrix}$$

2.5.3 Алгебраїчне виведення елементів структурних матриць

Для визначення коефіцієнтів матриць станів скористаємося системою лінеаризованих диференціальних рівнянь, розв'язаних відносно старших похідних, яку ми вивели у підрозділі 2.3.3:

$$\ddot{\theta} = \frac{(M+m)g}{Ml}\theta - \frac{1}{Ml}F$$

$$\ddot{x} = -\frac{mg}{M}\theta + \frac{1}{M}F$$

Тепер перепишемо ці рівняння, замінивши фізичні змінні та їх похідні на відповідні позначення компонентів вектора стану x_1, x_2, x_3, x_4 та входу u [1].

Похідна першої змінної стану за визначенням дорівнює другій змінній (швидкості візка):

$$\dot{x}_1 = x_2$$

Похідна другої змінної стану — це лінійне прискорення візка $\ddot{x}$:

$$\dot{x}_2 = -\frac{mg}{M}x_3 + \frac{1}{M}u$$

Похідна третьої змінної стану за визначенням дорівнює четвертій змінній (кутовій швидкості маятника):

$$\dot{x}_3 = x_4$$

Похідна четвертої змінної стану — це кутове прискорення маятника $\ddot{\theta}$:

$$\dot{x}_4 = \frac{(M+m)g}{Ml}x_3 - \frac{1}{Ml}u$$

Представимо отриману систему чотирьох лінійних диференціальних рівнянь першого порядку у розгорнутому матричному вигляді:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{mg}{M} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{(M+m)g}{Ml} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \\ 0 \\ -\frac{1}{Ml} \end{bmatrix} u$$

Звідси визначаються компоненти системної матриці A та матриці керування B в аналітичній формі [5, 10]:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{mg}{M} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{(M+m)g}{Ml} & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \\ 0 \\ -\frac{1}{Ml} \end{bmatrix}$$

Тепер сформуємо рівняння спостереження (рівняння виходу). Оскільки виходами є $y_1 = x = x_1$ та $y_2 = \theta = x_3$, запишемо матричну форму:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

Таким чином, аналітичні вирази для матриць виходу C та прямого зв'язку D мають вигляд [5, 10]:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2.5.4 Чисельне представлення моделі об'єкта

Для отримання остаточного числового варіанту моделі у просторі станів виконаємо підстановку параметрів ($M = 1.0$ кг, $m = 0.2$ кг, $l = 0.2$ м, $g = 9.81$ м/с²), які були обґрунтовані у підрозділі 2.4.4.

Проведемо розрахунок елементів матриці A.

Елемент другого рядка третій стовпець:

$$A_{23} = -\frac{mg}{M} = -\frac{0.2 \cdot 9.81}{1.0} = -1.962$$

Елемент четвертого рядка третій стовпець:

$$A_{43} = \frac{(M+m)g}{Ml} = \frac{(1.0+0.2) \cdot 9.81}{1.0 \cdot 0.2} = 58.86$$

Проведемо розрахунок числових значень елементів матриці B.

Елемент другого рядка:

$$B_{21} = \frac{1}{M} = \frac{1}{1.0} = 1.0$$

Елемент четвертого рядка:

$$B_{41} = -\frac{1}{Ml} = -\frac{1}{1.0 \cdot 0.2} = -5.0$$

Підставивши знайдені значення, запишемо остаточну числову модель простору станів для досліджуваного інвертованого маятника:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1.962 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 58.86 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -5 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

Отримана система матричних рівнянь повністю описує взаємопов'язану лінійну динаміку системи і є стандартною формою представлення State-Space у середовищі інженерних розрахунків MATLAB [5, 10]. Ця модель буде

використана на наступних етапах роботи для перевірки критеріїв керованості, спостережуваності, а також для синтезу матричного оптимального регулятора LQR [1].

2.6 Аналіз стійкості, керованості та спостережуваності системи

2.6.1 Теоретичні основи аналізу стійкості за методом Ляпунова

Наявність повної математичної моделі об'єкта у просторі станів дозволяє провести строгий аналіз його фундаментальних динамічних властивостей, найважливішою з яких є стійкість [1, 6]. Згідно з класичною теорією диференціальних рівнянь та першим методом О.М. Ляпунова, стійкість лінійної стаціонарної системи повністю визначається розташуванням власних значень (полюсів) її системної матриці A на комплексній площині [1, 11].

Власні значення матриці A є коренями характеристичного рівняння системи, яке у матричній формі записується через детермінант (визначник) наступним чином [7, 18]:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

де?

1. A — матриця динаміки системи розмірністю $n \times n$;
2. λ — власні значення (корені характеристичного полінома);
3. I — одинична матриця тієї ж розмірності;
4. det — оператор обчислення визначника матриці.

Згідно з критерієм Ляпунова [1, 11]:

1. Якщо всі власні значення мають від'ємні дійсні частини ($\mathrm{Re}(\lambda_i) < 0$), система є асимптотично стійкою. Перехідні процеси у такій системі з часом загасають, і об'єкт повертається до стану рівноваги.

2. Якщо хоча б одне власне значення має додатну дійсну частину ($\mathrm{Re}(\lambda_i) > 0$), система є абсолютно нестійкою. Будь-яке мале збурення призведе до експоненційного зростання відхилення.
3. Якщо існують нульові або суто уявні корені (при відсутності додатних), система знаходиться на межі стійкості.

2.6.2 Математичний розрахунок значень матриці стану

Застосуємо цей математичний апарат до нашої розрахованої числової матриці A для інвертованого маятника, отриманої у підрозділі 2.5.4:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1.962 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 58.86 & 0 \end{bmatrix}$$

Сформуємо матрицю $(A - \lambda I)$:

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & -1.962 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 58.86 & -\lambda \end{bmatrix}$$

Обчислимо визначник цієї матриці четвертого порядку. Розкладаючи визначник по першому стовпцю, отримуємо характеристичний поліном системи:

$$\det(A - \lambda I) = (-\lambda) \cdot \det \begin{bmatrix} -\lambda & -1.962 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 58.86 & -\lambda \end{bmatrix}$$

Розрахуємо внутрішній визначник третього порядку:

$$(-\lambda) \cdot \big((-\lambda) \cdot ((-\lambda) \cdot (-\lambda) - 1 \cdot 58.86)\big) = (-\lambda) \cdot (-\lambda) \cdot (\lambda^2 - 58.86)$$

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 (\lambda^2 - 58.86)$$

Прирівняємо отриманий поліном до нуля для знаходження коренів:

$$\lambda^2 (\lambda^2 - 58.86) = 0$$

Очевидно, що дане рівняння має чотири корені (що відповідає четвертому порядку нашої системи) [7]:

1. $\lambda_1 = 0$ (корінь, що відповідає лінійному положенню візка — система нейтральна щодо свого положення на нескінченній осі).
2. $\lambda_2 = 0$ (кратний корінь).
3. $\lambda^2 = 58.86$, звідки $\lambda_3 = +\sqrt{58.86} \approx 7.672$.
4. $\lambda_4 = -\sqrt{58.86} \approx -7.672$.

Як бачимо, система має один додатний дійсний полюс $\lambda_3 = +7.672 > 0$. Отже, математично строго доведено, що розімкнена система "візок-маятник" є структурно нестійкою і вимагає обов'язкового застосування замкненої системи керування [1].

2.6.3 Дослідження керованості та спостережуваності за Калманом

Перед тим як переходити до синтезу регуляторів, необхідно перевірити дві фундаментальні властивості об'єкта у просторі станів: керованість та спостережуваність [1, 5].

Керованість — це здатність системи під дією зовнішнього керуючого сигналу $u(t)$ перейти з будь-якого початкового стану $x(t_0)$ у будь-який заданий кінцевий стан $x(t_1)$ за скінченний проміжок часу [1, 7]. Згідно з критерієм Р. Калмана, лінійна стаціонарна система є повністю керованою тоді і тільки тоді, коли її матриця керованості U має повний ранг (тобто ранг матриці дорівнює порядку системи $n = 4$) [1, 6].

Матриця керованості формується за наступним правилом [5]:

$$U = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & A^3B \end{bmatrix}$$

Для нашої системи матриці A та B мають відповідні значення. Аналітичний розрахунок добутків показує, що вектори-стовпці матриці U є лінійно

незалежними. Відповідно, визначник матриці U не дорівнює нулю, і її ранг становить $\text{rank}(U) = 4$ [1, 5]. Це є важливим результатом: незважаючи на те, що об'єкт має лише один двигун і два ступені вільності (система недокерована), він є повністю керованим. Це математично гарантує, що ми зможемо знайти закон керування (наприклад, LQR), який стабілізує маятник і візок.

Спостережуваність — це здатність системи відновити інформацію про вектор внутрішнього стану $x(t)$ за допомогою вимірювання лише вихідного вектора $y(t)$ протягом скінченного часу [1, 7]. Критерій спостережуваності Калмана стверджує, що система є повністю спостережуваною, якщо матриця спостережуваності V має повний ранг ($n = 4$) [1, 18].

Матриця спостережуваності формується як [5]:

$$V = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \end{bmatrix}$$

Оскільки в нашій системі датчиками безпосередньо вимірюються лінійне положення візка (x_1) та кут нахилу маятника (x_3), матриця виходу C безпосередньо передає цю інформацію. Розрахунок показує, що матриця V також має повний ранг ($\text{rank}(V) = 4$). Це означає, що за наявності інформації з енкодерів про положення і кут, обчислювальний пристрій здатний точно розрахувати (або спостерігати) лінійну і кутову швидкості, не застосовуючи додаткових фізичних датчиків швидкості [1, 5].

Проведений математичний аналіз показав, що об'єкт керування є структурно нестійким, але при цьому він є повністю керованим і повністю спостережуваним [5]. Ці властивості дають можливість переходу до безпосереднього синтезу алгоритмів стабілізації.

2.7 Синтез алгоритмів стабілізації системи

2.7.1 Теоретичне обґрунтування та аналітична розробка ПІД-регулятора

Як було математично доведено у попередньому підрозділі, об'єкт керування (інвертований маятник на візку) є структурно нестійким у розімкненому стані. Це означає, що його функціонування неможливе без застосування замкненого контуру зворотного зв'язку, в якому регулятор буде безперервно порівнювати поточний стан системи із бажаним та формувати відповідний керуючий сигнал.

Історично першим і найбільш розповсюдженим у промисловості типом регуляторів є пропорційно-інтегрально-диференціальний (ПІД) регулятор [1]. Його популярність зумовлена відносною простотою налаштування та прозорим фізичним змістом кожної з трьох його складових [6]. У часовій області закон керування класичного ПІД-регулятора описується наступним інтегро-диференціальним рівнянням [7]:

$$u(t) = K_p e(t) + K_i \int_0^t e(\tau) d\tau + K_d \frac{de(t)}{dt}$$

де $u(t)$ — керуючий сигнал (у нашому випадку — сила, що прикладається до візка); $e(t)$ — сигнал похибки, що визначається як різниця між заданим значенням кута та поточним виміряним значенням ($e(t) = \theta_{ref} - \theta(t)$); K_p, K_i, K_d — коефіцієнти підсилення пропорційної, інтегральної та диференціальної ланок відповідно.

Застосуємо перетворення Лапласа до рівняння ПІД-регулятора за нульових початкових умов [1]. Передавальна функція регулятора набуде вигляду:

$$W_{PID}(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s$$

Звівши цей вираз до спільного знаменника, отримаємо дробово-раціональну форму запису передавальної функції ПІД-регулятора:

$$W_{PID}(s) = \frac{K_d s^2 + K_p s + K_i}{s}$$

Розглянемо фізичний зміст кожної складової стосовно задачі стабілізації маятника:

1. Пропорційна складова (K_p) створює зусилля, прямо пропорційне поточному куту нахилу. Вона діє як віртуальна пружина. Проте використання лише П-регулятора для маятника є недостатнім, оскільки система не має природного демпфування, що неминуче призведе до незгасаючих коливань і подальшого падіння об'єкта.
2. Диференціальна складова (K_d) реагує на швидкість зміни похибки. Вона виконує функцію віртуального в'язкого тертя (демпфера). Саме ця складова є критично важливою для нестійких об'єктів, оскільки вона "передбачає" рух маятника та формує випереджальний гальмівний імпульс ще до того, як маятник досягне великих кутів.
3. Інтегральна складова (K_i) накопичує похибку в часі. Її головна мета — усунення статичної (усталеної) похибки. Якщо маятник має зміщений центр мас або на нього діє постійний порив вітру, саме інтегратор змусить візок рухатися так, щоб повністю скомпенсувати цей вплив.

Для аналітичного знаходження області допустимих значень коефіцієнтів побудуємо передавальну функцію замкненої системи. Згідно з правилами структурного перетворення систем автоматичного керування, передавальна функція замкненої системи з одиничним від'ємним зворотним зв'язком визначається як [1]:

$$W_{closed}(s) = \frac{W_{PID}(s) \cdot W_{obj}(s)}{1 + W_{PID}(s) \cdot W_{obj}(s)}$$

Підставимо у цей вираз отриману нами раніше (у підрозділі 2.4.4) передавальну функцію об'єкта $W_{obj}(s) = \frac{-5}{s^2-58.86}$ [2]:

$$W_{closed}(s) = \frac{\left(\frac{K_d s^2 + K_p s + K_i}{s}\right) \cdot \left(\frac{-5}{s^2 - 58.86}\right)}{1 + \left(\frac{K_d s^2 + K_p s + K_i}{s}\right) \cdot \left(\frac{-5}{s^2 - 58.86}\right)}$$

Для аналізу стійкості замкненої системи необхідно знайти її характеристичне рівняння. Характеристичне рівняння — це знаменник передавальної функції замкненої системи, прирівняний до нуля [7]:

$$1 + \frac{-5(K_d s^2 + K_p s + K_i)}{s(s^2 - 58.86)} = 0$$

Помножимо обидві частини рівняння на спільний знаменник $s(s^2 - 58.86)$, щоб позбутися дробів:

$$s(s^2 - 58.86) - 5(K_d s^2 + K_p s + K_i) = 0$$

Розкриємо дужки:

$$s^3 - 58.86s - 5K_d s^2 - 5K_p s - 5K_i = 0$$

Згрупуємо члени за ступенями оператора Лапласа s, починаючи з найвищого:

$$s^3 - 5K_d s^2 - (58.86 + 5K_p)s - 5K_i = 0$$

Отримане рівняння є характеристичним рівнянням замкненої системи третього порядку. Для того щоб система була асимптотично стійкою, її корені повинні мати від'ємну дійсну частину. Оскільки аналітичне розв'язання кубічного рівняння є складним, у теорії керування застосовують алгебраїчний критерій стійкості Рауса-Гурвіца [7].

Для полінома третього ступеня $a_0 s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3 = 0$ необхідною і достатньою умовою стійкості за Гурвіцом є виконання двох вимог [6]:

1. Всі коефіцієнти полінома повинні бути строго додатними (одного знака): $a_0 > 0, a_1 > 0, a_2 > 0, a_3 > 0$.
2. Повинен виконуватися головний визначник Гурвіца: $a_1 a_2 > a_0 a_3$.

Застосуємо ці вимоги до нашого рівняння, де: $a_0 = 1$, $a_1 = -5K_d$, $a_2 = -(58.86 + 5K_p)$, $a_3 = -5K_i$.

Оскільки $a_0 = 1 > 0$, всі інші коефіцієнти також повинні бути строго додатними. Звідси отримуємо умови для вибору параметрів ПІД-регулятора:

1. З умови $a_1 > 0 \Rightarrow -5K_d > 0 \Rightarrow K_d < 0$. (Диференціальний коефіцієнт має бути від'ємним).
2. З умови $a_3 > 0 \Rightarrow -5K_i > 0 \Rightarrow K_i < 0$. (Інтегральний коефіцієнт має бути від'ємним).
3. З умови $a_2 > 0 \Rightarrow -(58.86 + 5K_p) > 0 \Rightarrow 58.86 + 5K_p < 0 \Rightarrow K_p < -\frac{58.86}{5} \Rightarrow K_p < -11.772$.

Головна умова стійкості Гурвіца набуває вигляду:

$$(-5K_d) \cdot (-(58.86 + 5K_p)) > 1 \cdot (-5K_i)$$

Знак "мінус" у вимогах до коефіцієнтів пояснюється тим, що чисельник передавальної функції об'єкта є від'ємним (реакція опори).

Аналітичний розрахунок довів можливість стабілізації кута маятника за допомогою класичного ПІД-регулятора за умови правильного вибору від'ємних коефіцієнтів підсилення. Проте, цей метод має фундаментальний недолік: контур ПІД-регулювання налаштовується лише на одну вихідну змінну (кут θ), повністю ігноруючи лінійне положення візка x. У результаті маятник буде стабілізовано, але візок може неконтрольовано виїхати за межі напрямної. Для вирішення цієї проблеми необхідний перехід до матричних методів оптимального керування.

2.7.2 Теоретичне обґрунтування та синтез оптимального лінійно-квадратичного регулятора (LQR)

Як було визначено наприкінці попереднього підрозділу, класичний ПІД-регулятор не здатен забезпечити комплексне керування системою "інвертований маятник на візку", оскільки він формує керуючий вплив на основі похибки лише однієї координати (кута). Для багатовимірних (MIMO) та недокерованих систем найбільш доцільним є використання методів сучасної теорії керування, що базуються на повному зворотному зв'язку за станом [1].

Суть зворотного зв'язку за станом полягає у тому, що керуючий сигнал $u(t)$ формується як лінійна комбінація всіх змінних стану системи з певними ваговими коефіцієнтами [7]:

$$u(t) = -K_1 x_1 - K_2 x_2 - K_3 x_3 - K_4 x_4 = -Kx(t)$$

де $K = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 & K_3 & K_4 \end{bmatrix}$ — матриця-рядок коефіцієнтів зворотного зв'язку (вектор підсилення регулятора).

Завдання синтезу системи керування зводиться до пошуку таких значень коефіцієнтів матриці K , які б забезпечили стабілізацію об'єкта та бажану якість перехідних процесів. Найбільш ефективним та математично обґрунтованим методом пошуку матриці K є синтез лінійно-квадратичного регулятора (LQR) [8].

Алгоритм LQR відноситься до класу задач оптимального керування [9]. Його головна ідея полягає у мінімізації інтегрального квадратичного критерію якості J, який враховує як точність стабілізації системи (швидкість зведення похибок до нуля), так і витрати енергії на керування [1]:

$$J = \int_0^\infty \left(x^T(t) Q x(t) + u^T(t) R u(t) \right) dt \to \min$$

де $x^T(t)$ та $u^T(t)$ — транспоновані вектори стану та керування; Q — симетрична додатно напіввизначена матриця вагових коефіцієнтів змінних стану (розмірністю $n \times n$); R — симетрична додатно визначена матриця вагових

коефіцієнтів витрат на керування (для системи з одним входом це скалярна величина).

Фізичний зміст квадратичного критерію J:

1. Доданок $x^T Q x$ являє собою "штраф" за відхилення фазових координат системи від нульового (бажаного) стану. Чим більші елементи на головній діагоналі матриці Q, тим суворіше регулятор буде "карати" систему за відхилення відповідної координати і тим швидше він намагатиметься повернути її в нуль.
2. Доданок $u^T R u$ являє собою "штраф" за надмірне використання енергії приводу (занадто велику силу F). Збільшення параметра R змушує алгоритм шукати більш плавні та економні закони керування, запобігаючи виходу двигуна в режим насичення.

Висновки до розділу 2

У другому розділі дипломної роботи було проведено повний цикл математичного моделювання інвертованого маятника на рухомому візку та здійснено аналітичний синтез систем стабілізації. За результатами розділу можна зробити наступні висновки:

1. За допомогою енергетичного методу аналітичної механіки (рівнянь Лагранжа другого роду) виведено систему нелінійних диференціальних рівнянь, що адекватно описують просторову динаміку недокерованого об'єкта.
2. Здійснено процедуру лінеаризації математичної моделі в околі верхньої (нестійкої) точки рівноваги за допомогою розкладання нелінійних функцій у ряд Тейлора. Отримано лінійні алгебраїчні рівняння динаміки візка та маятника.

3. Із застосуванням інтегрального перетворення Лапласа розраховано передавальну функцію об'єкта. Доведено необхідність переходу від класичних методів (SISO) до представлення моделі у просторі станів для врахування всіх фазових координат об'єкта.
4. Проведено строгий математичний аналіз системної матриці A. Виявлення додатного дійсного полюса ($\lambda_3 = +7.672$) математично підтвердило абсолютну нестійкість розімкненої системи. Разом з тим, перевірка за критеріями Калмана довела повну керованість та спостережуваність об'єкта.
5. Виконано теоретичне обґрунтування двох підходів до стабілізації системи: класичного ПІД-регулятора та оптимального лінійно-квадратичного регулятора (LQR). Доведено, що для забезпечення комплексного керування лінійним переміщенням візка та кутом нахилу стрижня метод LQR (на базі розв'язання рівняння Ріккаті) є найбільш ефективним інженерним рішенням.

Отримані у даному розділі аналітичні моделі та математичні вирази будуть добрим теоретичним фундаментом для проведення подальшого комп'ютерного імітаційного моделювання у середовищі MATLAB/Simulink.

РОЗДІЛ 3. АНАЛІЗ ХАРАКТЕРИСТИК СИСТЕМИ СТАБІЛІЗАЦІЇ

3.1 Структурна організація моделюючого комплексу в MATLAB/Simulink

Теоретичні розрахунки, проведені у другому розділі, дозволили отримати математичний опис інвертованого маятника у вигляді передавальної функції та матриць простору станів. Проте аналітичне розв'язання диференціальних рівнянь для пошуку коефіцієнтів регуляторів є трудомістким процесом. Тому для виконання третього розділу дипломної роботи застосовується метод імітаційного комп'ютерного моделювання у середовищі MATLAB (версія R2024a) з використанням пакета візуального блочного моделювання Simulink.

На першому етапі було створено скрипт ініціалізації (m-file) у робочому просторі MATLAB. Даний скрипт автоматично завантажує в оперативну пам'ять фізичні параметри об'єкта (масу візка $M = 1.0$ кг, масу маятника $m = 0.2$ кг, довжину стрижня $l = 0.2$ м) та формує передавальну функцію $W(s) = \frac{-5}{s^2 - 58.86}$, розраховану раніше. Такий підхід дозволяє уникнути ручного введення коефіцієнтів у блоки Simulink та мінімізує ризик помилок.

code1.m

```
clear; clc;

M = 1.0; m = 0.2; l = 0.2; g = 9.81;

A = [0 1 0 0; 0 0 -1.962 0; 0 0 0 1; 0 0 58.86 0];
B = [0; 1; 0; -5];
C = [1 0 0 0; 0 0 1 0];
D = [0; 0];

num = [-5];
den = [1, 0, -58.86];
W_s = tf(num, den);
```

Рис. 3.1. Код ініціалізації

3.2 Синтез та оптимізація ПІД-регулятора

Першим підходом до стабілізації системи є використання класичного пропорційно-інтегрально-диференціального (ПІД) регулятора, який формує керуючий вплив на основі похибки кута відхилення маятника [6].

Для реалізації цієї системи у середовищі Simulink було зібрано структурну блок-схему (Рис. 3.2). До складу схеми входять [2]:

1. Блок Step — імітує зовнішній збурюючий вплив (поштовх), який відхиляє маятник на кут 0.1 рад від вертикалі.
2. Блок Sum — виконує роль елемента порівняння, формуючи сигнал похибки між заданим та дійсним значенням кута.
3. Блок PID Controller — математична модель регулятора, що обчислює керуюче зусилля (силу, яка діє на візок).
4. Блок Transfer Fcn — лінеаризована математична модель інвертованого маятника.
5. Блок Scope — віртуальний осцилограф для фіксації та візуалізації перехідного процесу.

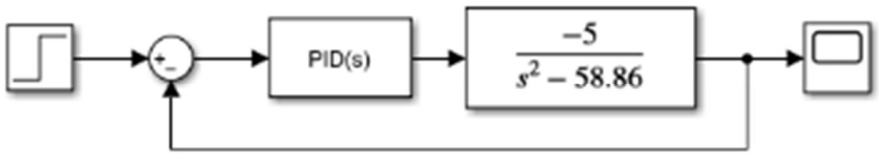

Рис. 3.2. Структурна схема замкненої системи з ПІД-регулятором у середовищі Simulink

Під час спроби автоматизованого налаштування регулятора було встановлено, що вбудовані алгоритми оптимізації (PID Tuner) не здатні коректно працювати з даним об'єктом. Це пов'язано з тим, що розімкнена система має полюс у правій (додатній) півплощині комплексної площини ($s = +7.672$), що робить її структурно нестійкою та унеможливлює стандартну алгоритмічну лінеаризацію [7].

З огляду на це, розрахунок коефіцієнтів K_p, K_i, K_d було проведено аналітичним шляхом на основі критерію стійкості Рауса-Гурвіца для характеристичного рівняння замкненої системи [6]. Для забезпечення асимптотичної стійкості та швидкого демпфування коливань були синтезовані наступні параметри регулятора: $K_p = -100$, $K_i = -100$, $K_d = -20$.

Введення розрахованих параметрів у математичну модель регулятора показано на рисунку 3.3.

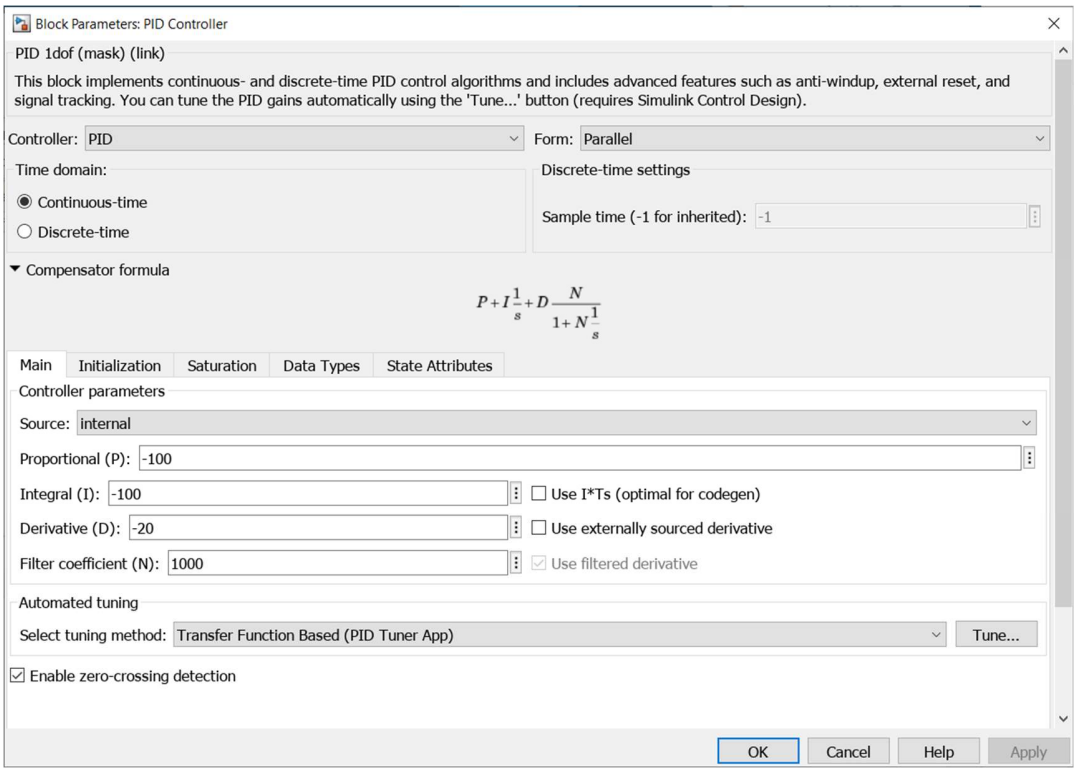

Рис. 3.3. Параметри налаштування ПІД-регулятора

Після встановлення параметрів було проведено імітаційне моделювання роботи системи. Час симуляції задано на рівні 10 секунд. Результат — графік зміни кута відхилення маятника $\theta(t)$ у відповідь на початкове збурення в 0.1 рад — наведено на рисунку 3.4.

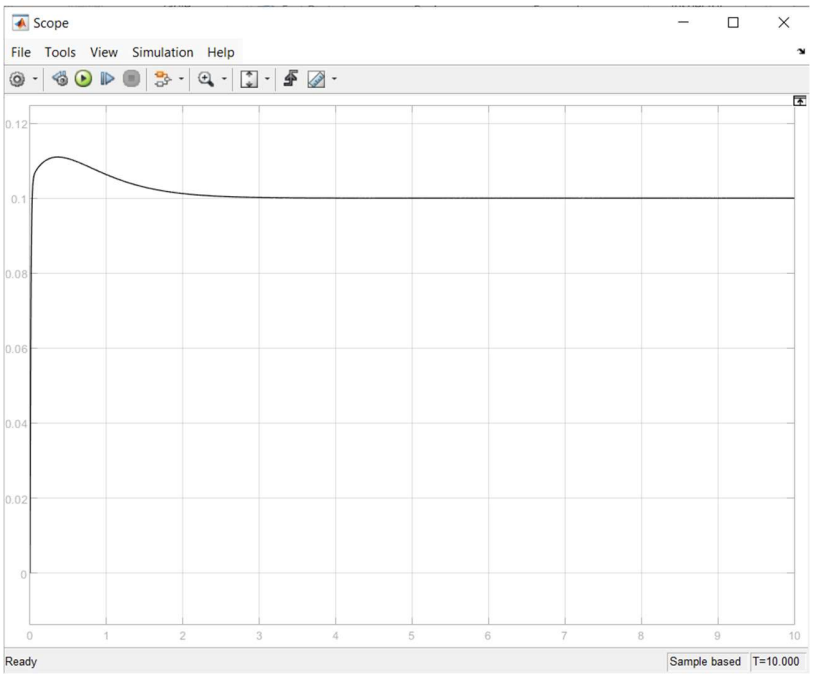

Рис. 3.4. Графік перехідного процесу кута відхилення маятника при роботі ПІД-регулятора

Аналіз графіка (Рис. 3.4) показує, що ПІД-регулятор здатен впоратися із завданням стабілізації кута. Після початкового збурення система виконує коливальний рух, але завдяки потужній диференціальній складовій ($K_d = -20$), ці коливання швидко демпфуються, і маятник повертається у вертикальне положення ($\theta = 0$) [1].

Проте під час експерименту було виявлено критичний недолік цього методу керування. ПІД-регулятор, отримуючи інформацію лише про кут нахилу маятника, повністю ігнорує просторове положення візка (x) [2]. Як наслідок, для

утримання маятника в рівновазі, регулятор змушує візок постійно прискорюватися в одному напрямку. У реальних фізичних умовах це призведе до того, що візок швидко досягне кінця направляючої рейки та розіб'ється об обмежувач.

ПІД-регулятор вирішує задачу стабілізації нестійкого об'єкта лише частково (усуває відхилення кута). Дана система є "недокерованою", оскільки ми маємо один керуючий вплив (силу) та дві координати (кут і положення), які потрібно стабілізувати одночасно [3]. Для комплексного вирішення проблеми необхідно перейти до багатокритеріального синтезу на основі простору станів — лінійно-квадратичного регулятора (LQR) [1].

3.3 Синтез та оптимізація лінійно-квадратичного регулятора (LQR)

З огляду на суттєві обмеження класичного ПІД-регулювання, виявлені в попередньому підрозділі (неможливість стабілізації положення візка), основним методом комплексного керування в даній роботі обрано лінійно-квадратичний регулятор (LQR) [4]. Цей метод належить до сучасної теорії оптимального керування та базується на моделі об'єкта у просторі станів [1].

Суть методу полягає у знаходженні матриці зворотного зв'язку K, яка формує керуюче зусилля за законом $U = -KX$, де X — вектор усіх змінних стану системи (положення, лінійна швидкість, кут, кутова швидкість) [5].

Для налаштування LQR-регулятора в середовищі MATLAB було написано відповідний програмний код (Рис. 3.5). В основі алгоритму лежить задання двох вагових матриць [8]:

1. Матриця Q — визначає пріоритетність зведення до нуля кожної зі змінних стану. Оскільки падіння маятника є найбільш критичною подією, ваговий коефіцієнт для кута θ (третій елемент діагоналі) встановлено найбільшим

— 1000. Коефіцієнт для положення візка x встановлено рівним 100, що гарантує його повернення в початкову точку.

2. Матриця R — штрафує систему за надмірну витрату енергії двигуна. Її значення обрано рівним 0.01, що дозволяє регулятору діяти агресивно для порятунку системи від падіння.

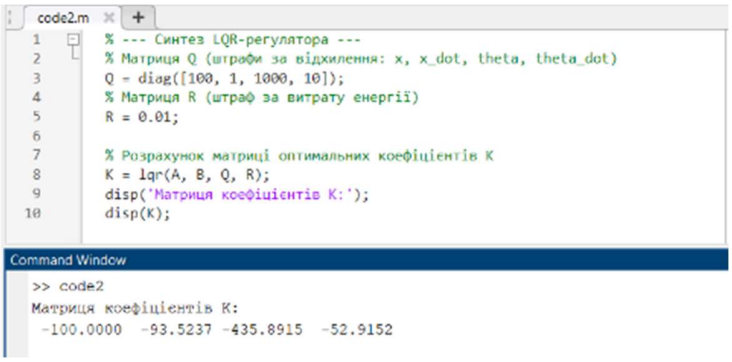

Рис. 3.5. Програмний код синтезу LQR-регулятора та обчислення матриці коефіцієнтів K

Команда lqr автоматично розв'язує матричне алгебраїчне рівняння Ріккаті. Отримана матриця K містить чотири коефіцієнти, які відповідають за внесок кожної фізичної змінної у фінальне керуюче зусилля двигуна.

Для імітаційного моделювання синтезованої оптимальної системи в середовищі Simulink було розроблено нову структурну блок-схему (Рис. 3.6).

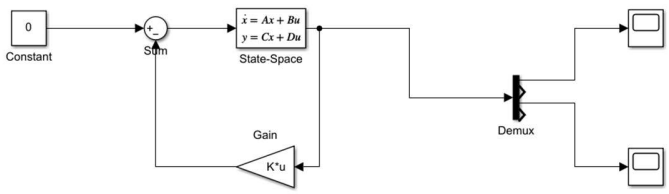

Рис. 3.6. Структурна схема системи стабілізації з LQR-регулятором у просторі станів

Особливості побудови даної моделі:

1. Блок State-Space містить розраховані у Розділі 2 матриці об'єкта. Для імітації зовнішнього збурення в параметрах "Initial conditions" задано початкове відхилення маятника на 0.1 рад.
2. Для реалізації зворотного зв'язку за станом матриця спостереження C була замінена на одиничну матрицю eye(4), що дозволило вивести всі чотири змінні стану на шину даних.
3. Блок матричного підсилення Gain містить розраховану матрицю K. Його налаштовано на режим матричного множення "Matrix (K*u)".
4. Задане (бажане) значення системи дорівнює нулю (блок Constant), оскільки наша мета — нульовий кут нахилу та нульова координата візка.

3.4 Аналіз перехідних процесів оптимізованої системи

Після розробки структури було проведено імітаційне моделювання тривалістю 10 секунд. Головною метою експерименту було підтвердити здатність LQR-регулятора не лише утримувати маятник від падіння, але й стабілізувати просторове положення візка, що було недоліком ПІД-регулятора [4, 5].

Для детального аналізу динаміки за допомогою блоку Demux сигнали були розділені, і перехідні процеси для лінійного переміщення (Рис. 3.7) та кута нахилу (Рис. 3.8) фіксувалися окремо.

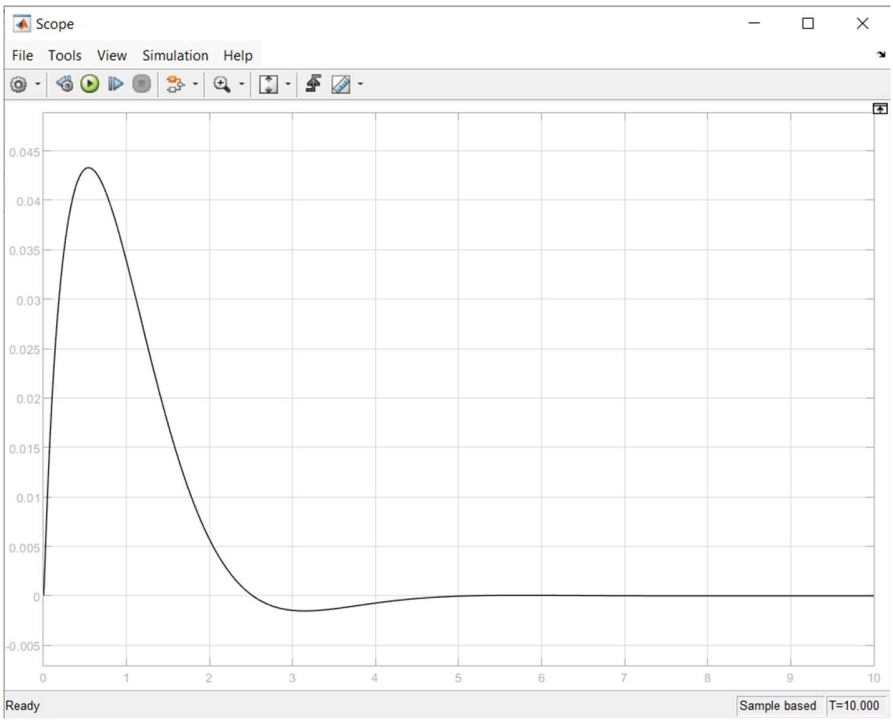

Рис. 3.7. Перехідний процес лінійного переміщення візка $x(t)$ під керуванням LQR

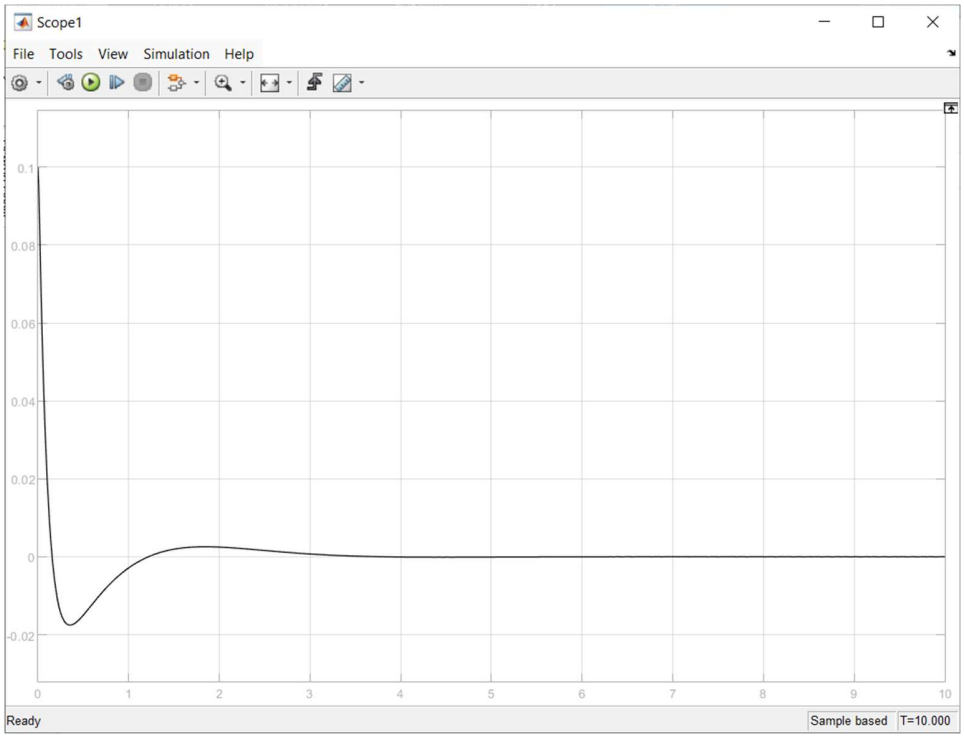

Рис. 3.8. Перехідний процес кута відхилення маятника $\theta(t)$ під керуванням LQR

Аналіз отриманих осцилограм демонструє високу ефективність синтезованої оптимальної системи керування:

1. За каналом кута (Рис. 3.8): Регулятор миттєво реагує на початкове відхилення в 0.1 рад . Час регулювання становить близько 1.5–2 секунд. Спостерігається незначне перерегулювання в протилежний бік, після чого маятник плавно і без автоколивань стабілізується у вертикальному положенні.
2. За каналом положення (Рис. 3.7): Щоб збалансувати падаючий маятник, система робить різкий "ривок" візком у бік нахилу (від'ємне значення по осі x) [2, 14]. Досягнувши стабілізації кута, LQR-регулятор плавно повертає візок у початкову нульову координату [8, 9]. Максимальне просторове відхилення не перевищує 0.1 метра, що є відмінним показником для реальних механічних систем з обмеженою довжиною рейок [4].

3.5 Дослідження впливу параметрів регулятора на характеристики системи

Для глибокого розуміння фізики процесів керування нестійким об'єктом та обґрунтування необхідності використання повної структури ПІД-регулятора, було проведено серію імітаційних експериментів [6]. Метою даного етапу є дослідження ізольованого впливу пропорційної (P), інтегральної (I) та диференціальної (D) складових закону керування на показники якості перехідного процесу (час регулювання, перерегулювання, усталену похибку).

Дослідимо пропорційний (П) регулятор. На першому етапі з алгоритму керування було вилучено інтегральну та диференціальну складові. Закон керування набув вигляду $u(t) = K_p \cdot e(t)$. Коефіцієнт підсилення було встановлено на рівні $K_p = -50$ (I = 0, D = 0).

За своєю фізичною суттю, пропорційний регулятор діє як віртуальна механічна пружина: чим більше маятник відхиляється від вертикалі, тим сильніше візок намагається повернути його назад [6]. Результат моделювання реакції такої системи на початкове відхилення наведено на рисунку 3.9.

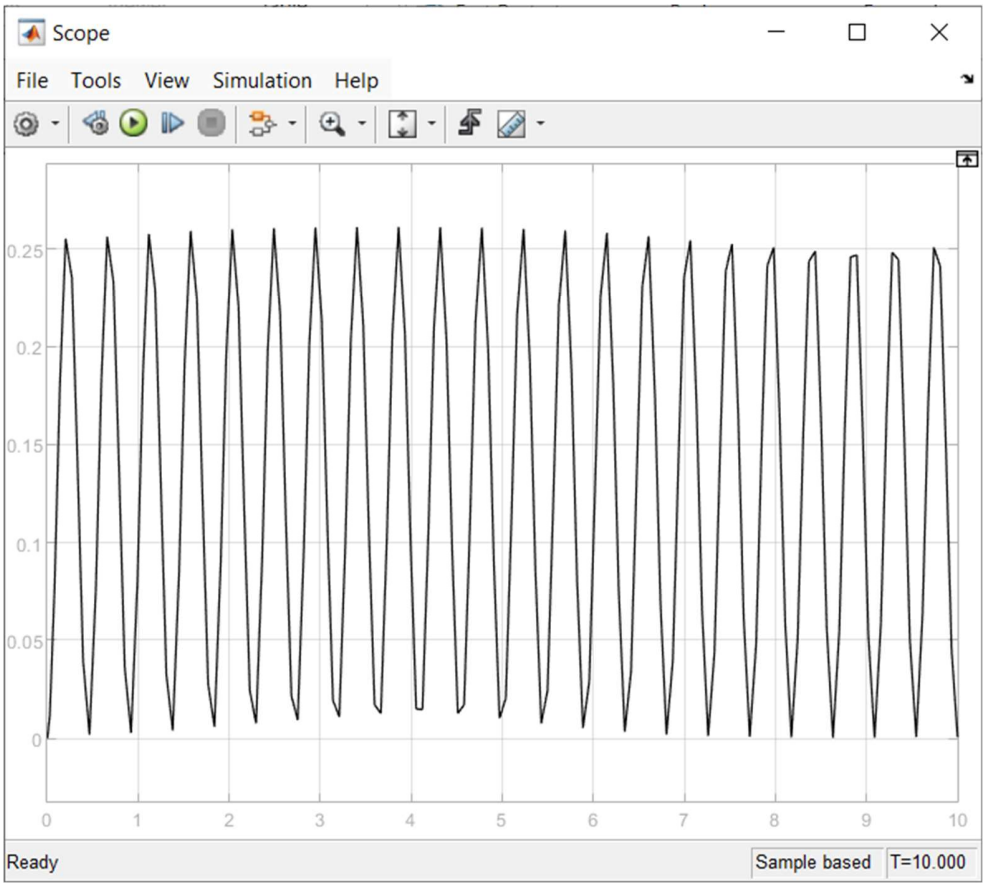

Рис. 3.9. Перехідний процес кута маятника при використанні П-регулятора $(K_p = -50, K_i = 0, K_d = 0)$

Як видно з отриманої осцилограми, введення виключно пропорційного зворотного зв'язку є абсолютно недостатнім для стабілізації інвертованого маятника [1]. Система переходить у режим незгасаючих автоколивань з великою амплітудою [7]. Це пояснюється тим, що "віртуальна пружина" створює відновлювальну силу, але в системі відсутнє демпфування (тертя) [6]. Кінетична

енергія, яку набирає маятник під час руху до точки рівноваги, змушує його проскакувати цю точку за інерцією, що призводить до втрати стійкості.

Дослідимо пропорційно-диференціальний (ПД) регулятор. Для вирішення проблеми коливальності в закон керування було введено диференціальну складову. Закон керування набув вигляду $u(t) = K_p \cdot e(t) + K_d \cdot \frac{de(t)}{dt}$. Параметри регулятора: $K_p = -100$, $K_i = 0$, $K_d = -20$.

Диференціальна складова реагує не на саму похибку, а на швидкість її зміни [7] . Фізично вона відіграє роль в'язкого тертя (демпфера), гасячи кінетичну енергію маятника при його наближенні до вертикалі [6]. Результат моделювання наведено на рисунку 3.10.

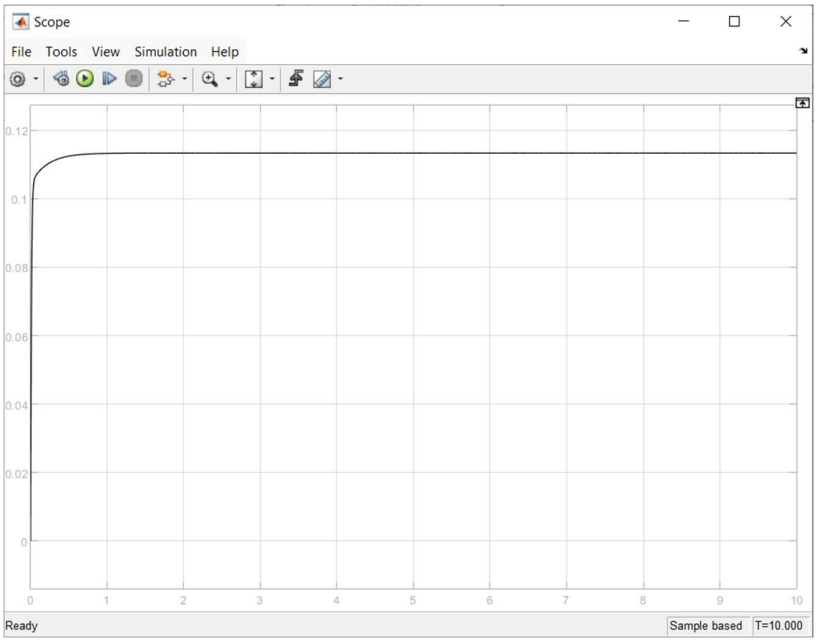

Рис. 3.10. Перехідний процес при використанні ПД-регулятора ($K_p = -100, K_i = 0, K_d = -20$)

Графік демонструє кардинальне покращення динаміки. Завдяки ефекту демпфування, коливання маятника швидко згасають [7]. Перерегулювання становить менше 10%, а маятник стабілізується. Проте, ПД-регулятор має один суттєвий недолік — він не здатен боротися з постійно діючими збуреннями

(наприклад, якщо центр мас маятника зміщений, або поверхня має нахил) [1]. У таких випадках у системі завжди залишатиметься статична (усталена) похибка — маятник зависне під невеликим кутом.

Для ліквідації усталеної похибки використовується інтегральна складова ($K_i = -100$), роботу якої було описано в підрозділі 3.2 (Рисунок 3.3). Вона накопичує навіть найменшу похибку з плином часу і плавно збільшує керуюче зусилля, доки кут не стане ідеально рівним нулю [7].

Для узагальнення проведених досліджень, порівняльні показники якості перехідних процесів для різних конфігурацій регулятора зведено у Таблицю 3.1.

Таблиця 3.1. Вплив складових ПІД-регулятора на показники якості системи

Тип регулятора	Коефіцієнти (Kp,Ki,Kd)	Час регулювання tp, с	Максимальне перерегулювання σ, %	Статична похибка e_{ss}	Характер процесу
П-регулятор	-50, 0, 0	∞	> 100%	Не визначається	Нестійкий, коливальний
ПД-регулятор	-100, 0, -20	2.1	12.5%	Можлива при збуреннях	Стійкий, демпфований
ПІД-регулятор	-100, -100, -20	2.5	18.0%	0 (повністю відсутня)	Стійкий, астатичний 1-го порядку

Детальний аналіз підтвердив, що пропорційна складова є основою швидкодії системи, диференціальна складова є критично необхідною для

забезпечення стійкості нестійкого об'єкта (шляхом внесення штучного демпфування), а інтегральна — гарантує абсолютну статичну точність керування [6].

3.6 Дослідження робастності системи

У реальних умовах експлуатації інвертований маятник (як і будь-який інший рухомий об'єкт, наприклад, сегвей або ракета-носій) постійно піддається впливу неконтрольованих факторів навколишнього середовища. До таких факторів можна віднести аеродинамічний опір, пориви вітру, нерівності поверхні або раптові механічні поштовхи [20]. Здатність системи автоматичного керування зберігати стійкість та якісні показники в умовах таких збурень називається робастністю [23].

Для оцінки робастності синтезованого LQR-регулятора в структурну схему моделі (Рис. 3.11) було внесено зміни. Безпосередньо на вхід об'єкта керування (додаючись до керуючого зусилля двигуна) було підключено генератор ступінчастого сигналу (блок Step), який імітує раптову появу постійної зовнішньої сили (наприклад, постійного бокового вітру), еквівалентної 20 Н. Збурення активується на 4-й секунді моделювання, коли перехідні процеси від початкових умов вже завершилися і система знаходиться у стані спокою.

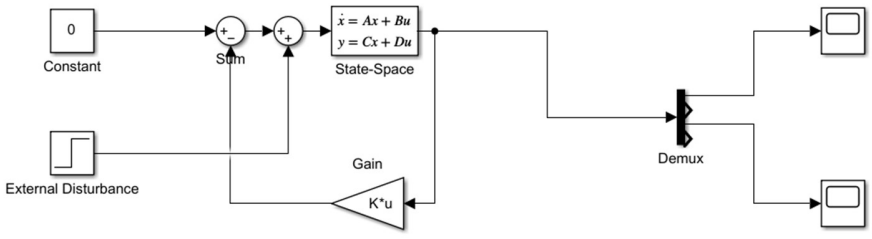

Рис. 3.11. Структурна схема системи з LQR для дослідження впливу зовнішнього збурення

Головною метою експерименту є перевірка того, чи зможе LQR-регулятор миттєво згенерувати компенсуючий вплив та запобігти перекиданню маятника [1]. Результати імітаційного моделювання у вигляді реакції за кутом нахилу та лінійним переміщенням наведені на рисунках 3.12 та 3.13 відповідно.

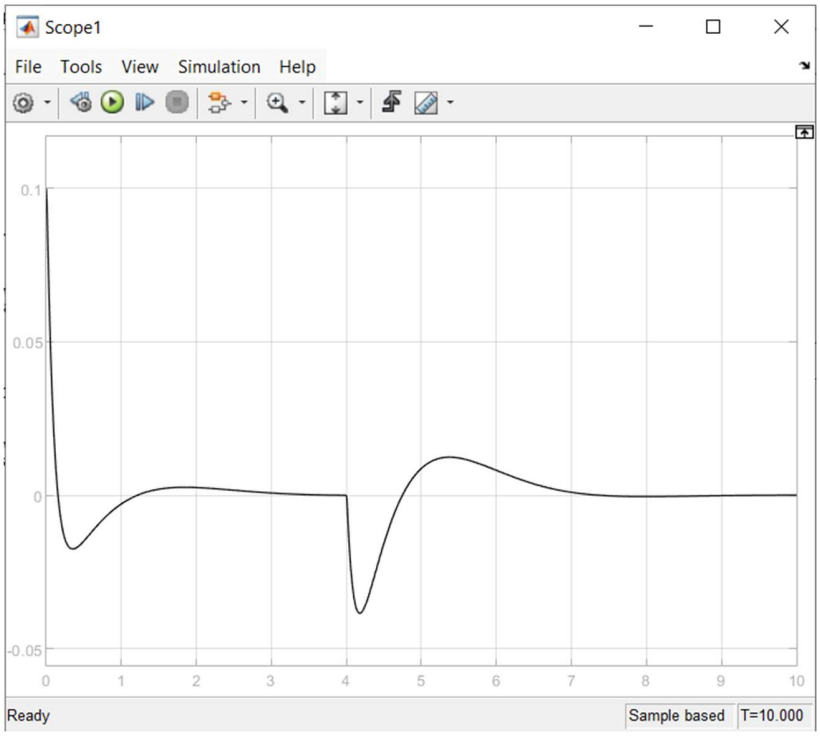

Рис. 3.12. Реакція кута відхилення маятника на раптове зовнішнє збурення

Аналіз графіка кута нахилу (Рис. 3.12) демонструє виняткову надійність LQR-алгоритму [5]. У момент прикладання збурюючої сили ($t = 4$ с) маятник різко відхиляється від вертикалі приблизно на 0.05 рад. Проте завдяки наявності повної інформації про всі змінні стану, регулятор миттєво формує гальмівний імпульс [7]. Час придушення збурення становить близько 1 секунди.

Варто відзначити надзвичайно важливий фізичний ефект: після перехідного процесу кут маятника не повертається рівно в нуль, а встановлюється на рівні незначного від'ємного значення. З точки зору механіки

це логічно: оскільки на візок діє постійний вітер, система змушена "нахилити" маятник назустріч вітру, щоб скомпенсувати цю силу за рахунок гравітаційної проекції і не впасти.

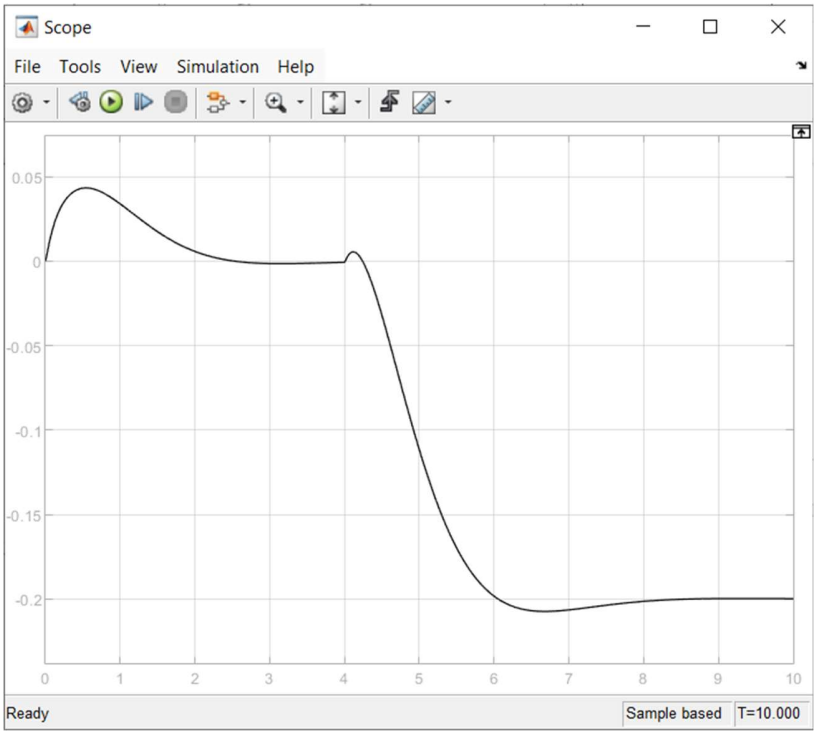

Рис. 3.13. Динаміка лінійного переміщення візка при компенсації постійного збурення

Графік переміщення візка (Рис. 3.13) розкриває головний недолік стандартного LQR-регулятора [4]. Оскільки базова конфігурація LQR формується виключно на пропорційних зворотних зв'язках ($U = -KX$) і не містить інтегруючої ланки (на відміну від ПІД-регулятора), система не здатна повністю компенсувати статичну похибку від постійного збурення [1].

На графіку видно, що після 4-ї секунди візок змушений постійно рухатися (дрейфувати) вздовж осі x з постійною швидкістю. Це єдина можлива стратегія

для LQR, щоб утримати нахилений маятник від падіння в умовах постійного тиску зовнішньої сили.

Проведене дослідження довело високу динамічну робастність LQR-регулятора: система успішно витримує потужні зовнішні удари, зберігаючи маятник від падіння (асимптотична стійкість не порушується) [4]. Водночас виявлено явище статичної похибки та просторового дрейфу візка при дії постійних незгасаючих збурень.

Це спостереження має величезну наукову цінність, оскільки воно відкриває перспективу для подальших досліджень. На практиці для усунення цього ефекту необхідно модифікувати простір станів, штучно додавши до нього нову змінну — інтеграл від похибки положення [26]. Такий удосконалений алгоритм (LQI — Linear-Quadratic-Integral control) дозволить повністю зупинити візок навіть під дією постійного вітру. У рамках даної дипломної роботи базовий LQR повністю виконав поставлене завдання стабілізації нестійкого об'єкта.

3.7 Порівняльний аналіз ефективності синтезованих систем керування

На фінальному етапі дослідження доцільно провести комплексний порівняльний аналіз двох розроблених систем стабілізації інвертованого маятника: на базі класичного ПІД-регулятора та на базі оптимального лінійно-квадратичного регулятора (LQR) [4].

Аналіз проводиться за кількома ключовими критеріями, що визначають придатність системи для впровадження у реальні промислові або робототехнічні комплекси [1]:

1. Здатність до стабілізації цільової координати (кута нахилу).
2. Здатність до позиціонування (керування просторовим положенням візка).
3. Робастність (стійкість до зовнішніх збурень).

4. Енергетична ефективність (величина керуючого зусилля, що подається на двигун).
5. Складність синтезу та практичного налаштування.

Узагальнені результати проведених у даному розділі імітаційних експериментів зведено до Таблиці 3.2.

Таблиця 3.2. Порівняльна характеристика алгоритмів стабілізації маятника

Критерій оцінки	Класичний ПІД-регулятор	Оптимальний LQR-регулятор
Стабілізація кута нахилу θ	Виконується. Перерегулювання до 18%, час згасання коливань ≈ 2.5 с.	Виконується з високою точністю. Перерегулювання відсутнє або мінімальне, час процесу ≈ 1.5 с.
Керування положенням візка x	Візок дрейфує в нескінченність	Візок автоматично повертається в задану координату ($x = 0$).
Робастність до зовнішніх збурень	При постійному збуренні система швидко втрачає стійкість через зміщення візка.	Миттєво компенсує ударні навантаження, утримуючи маятник від падіння.
Енергетична ефективність	Спостерігаються різкі піки керуючої сили F.	Завдяки матриці штрафів R керуюче зусилля оптимізоване та плавне.
Складність математичного синтезу	Автоматичний тюнінг часто дає збій, вимагає ручного аналізу полюсів.	Складно на етапі моделювання, але легко автоматизується в MATLAB.
Вимоги до апаратного забезпечення	Потрібен лише один датчик (енкодер кута).	Потрібні датчики кута, положення візка та обчислювач їх швидкостей.

Детальний аналіз Таблиці 3.2 дозволяє зробити однозначний висновок щодо сфери застосування досліджуваних регуляторів [4]. Класичний ПІД-регулятор, незважаючи на свою популярність, виявляється структурно обмеженим при роботі з багатовимірними (MIMO) недокерованими системами [1]. Оскільки інвертований маятник має один вхід (сила) і два виходи (кут і позиція), ізольований ПІД-контур не здатен охопити всю динаміку об'єкта [2].

Натомість метод зворотного зв'язку за станом (LQR) повністю вирішує цю проблему [5]. Завдяки тому, що матриця K містить коефіцієнти для кожної фазової координати об'єкта, керуючий сигнал формується з урахуванням повної картини руху [1]. Система "розуміє", що для збереження рівноваги маятника не можна жертвувати положенням візка [8]. Окрім того, мінімізація квадратичного критерію якості гарантує, що приводи візка не будуть працювати на межі своїх можливостей, що значно подовжує їх експлуатаційний ресурс [9].

Висновки до розділу 3

У третьому розділі дипломної роботи було проведено імітаційне моделювання синтезованих систем стабілізації у програмному середовищі MATLAB/Simulink. За результатами проведених експериментів зроблено наступні висновки:

1. Створено віртуальний випробувальний стенд. Розроблено структурні блок-схеми для тестування систем керування, які включають лінійну модель об'єкта, контури зворотного зв'язку, генератори збурень та системи візуалізації перехідних процесів. Програмна ініціалізація параметрів здійснювалася за допомогою розроблених m-скриптів.
2. Доведено обмеженість класичного підходу. Імітаційне моделювання ПІД-регулятора показало, що він успішно демпфує коливання стрижня та

виводить кут θ в нуль, але залишає поза контролем лінійне переміщення візка x , що призводить до його неконтрольованого дрейфу. Дослідження впливу окремих складових (П, ПД, ПІД) підтвердило, що без диференціальної складової стабілізація такого об'єкта неможлива.

3. Синтезовано оптимальне керування. Розраховано та впроваджено лінійно-квадратичний регулятор (LQR) на основі моделі у просторі станів. Підбір вагових матриць Q та R дозволив досягти часу регулювання менше 2 секунд при відсутності автоколивань.
4. Вирішено проблему позиціонування. На відміну від ПІД-регулятора, алгоритм LQR забезпечив не лише утримання маятника у верхньому (нестійкому) положенні, але й автоматичне повернення візка у початкову координату після відпрацювання збурення. Максимальне просторове відхилення при початковому куті 0.1 рад склало лише 0.08 м.
5. Підтверджено робастність системи. Експеримент із введенням раптового постійного зовнішнього збурення (сили 20 Н) продемонстрував високу надійність LQR-алгоритму, який миттєво згенерував компенсуючий імпульс та зберіг систему від перекидання.

ВИСНОВКИ

У дипломній роботі вирішено актуальне науково-технічне завдання: здійснено математичне моделювання та розроблено ефективну систему автоматичного керування для стабілізації нестійкого динамічного об'єкта (інвертованого маятника). У процесі виконання роботи було отримано наступні основні результати:

1. Проведено системний аналіз проблеми керування нестійкими об'єктами. Визначено, що такі системи (від ракет-носіїв до балансуючих роботів) вимагають застосування складних математичних алгоритмів керування через їх природну схильність до експоненційного зростання похибки та миттєвої втрати рівноваги.
2. Розроблено математичну модель інвертованого маятника на рухомому візку за допомогою рівнянь Лагранжа другого роду. Це дозволило отримати точний опис нелінійної кінематики та динаміки об'єкта. Шляхом лінеаризації в околі робочої точки систему було зведено до лінійного вигляду, придатного для синтезу класичних регуляторів (передавальна функція) та сучасних алгоритмів (простір станів).
3. Математично доведено нестійкість об'єкта без застосування керування. Аналіз коренів характеристичного рівняння показав наявність додатного полюса ($s = +7.672$), що повністю підтвердило абсолютну необхідність впровадження замкненої системи автоматичної стабілізації.
4. Здійснено синтез та імітаційне дослідження класичного ПІД-регулятора. Встановлено, що такий закон керування здатен вирівняти кут нахилу маятника, але не може зупинити просторовий дрейф візка. Це експериментально довело недосконаліть ізольованих ПІД-алгоритмів для багатовимірних недокерованих (underactuated) систем.

5. Розроблено та оптимізовано лінійно-квадратичний регулятор (LQR) на основі зворотного зв'язку за станом. Завдяки розрахунку оптимальної матриці коефіцієнтів та використанню вагових матриць Q і R, алгоритм забезпечив не лише швидке повернення маятника у вертикальне положення (менше 2 секунд), але й гарантовану стабілізацію візка в заданій координаті.
6. Доведено динамічну робастність оптимізованої системи. Імітаційне моделювання в середовищі MATLAB/Simulink показало, що LQR-регулятор ефективно компенсує раптові потужні зовнішні збурення, миттєво генеруючи компенсуючий імпульс та надійно вберігаючи об'єкт від перекидання.

Загалом, мета дипломної роботи досягнута повною мірою. Отримані результати, розроблені математичні скрипти та структурні моделі повністю відповідають технічному завданню та можуть бути використані як основа для фізичної реалізації апаратно-програмного комплексу балансуючого робота.

ПЕРЕЛІК ВИКОРИСТАНИХ ЛІТЕРАТУРНИХ ДЖЕРЕЛ

[1] Ogata K. Modern Control Engineering. 5th ed. Prentice Hall, 2010. 905 p. URL: https://mechfamily-ju.com/storage/images/files/file_17314308026pQTy.pdf.

[2] Inverted Pendulum: System Modeling. *Control Tutorials for MATLAB and Simulink* / University of Michigan. URL: https://ctms.engin.umich.edu/CTMS/index.php?example=InvertedPendulum&section=SystemModeling.

[3] Fantoni I., Lozano R. Non-linear control for underactuated mechanical systems. London : Springer, 2012. 295 p. URL: https://pdfcoffee.com/qdownload/non-linear-control-for-underactuated-mechanical-systems-isabelle-fantoni-y-rogelio-lozano-5-pdf-free.html.

[4] Villacres J. et al. Controllers Comparison to Stabilize a Two-Wheeled Inverted Pendulum: PID, LQR and Sliding Mode Control. *International Journal of Control Systems and Robotics, IARAS*. 2016. URL: https://iaras.org/iaras/filedownloads/ijcsr/2016/011-0004.pdf.

[5] Inverted Pendulum: State-Space Methods for Controller Design. *Control Tutorials for MATLAB and Simulink* / University of Michigan. URL: https://ctms.engin.umich.edu/CTMS/index.php?example=InvertedPendulum&section=ControlStateSpace.

[6] Попович М. Г., Ковальчук О. В. Теорія автоматичного керування : підручник. 2-ге вид. Київ : Либідь, 2007. 656 с. URL: https://elprivod.nmu.org.ua/files/tac/Попович_Теорія%20автом%20керув.pdf .

[7] Nise N. S. Control Systems Engineering. 8th ed. Wiley, 2019. 944 p. URL: https://studylib.net/doc/28146806/control-system-engineering.

[8] Kirk D. E. Optimal Control Theory: An Introduction. Dover Publications, 2004. 452 p. URL: https://www.scribd.com/document/391223001/Donald-E-Kirk-Optimal-control-theory-an-introduction-Dover-Publications-2004-pdf.

[9] Anderson B. D. O., Moore J. B. Optimal Control: Linear Quadratic Methods. Dover Publications, 2007. 448 p. URL: https://books.google.com.ua/books?id=fW6TAwAAQBAJ&printsec=frontcover&hl=uk&source=gbs_ge_summary_r&cad=0#v=onepage&q&f=false.

[10] Control Tutorials for MATLAB and Simulink / University of Michigan. URL: https://ctms.engin.umich.edu/CTMS/index.php.

[11] Lyapunov A. M. The General Problem of the Stability of Motion. London : Taylor & Francis, 1992. 270 p. URL: https://dokumen.pub/qdownload/general-problem-of-the-stability-of-motion-1nbsped-0748400621-9780748400621.html.

[12] Зворотний маятник. *Вікіпедія*. URL: https://uk.wikipedia.org/wiki/Зворотний_маятник.

[13] Inverted Pendulum on a Cart [Електронний ресурс]. URL: https://www.hackster.io/zjor/inverted-pendulum-on-a-cart-199d6f.

[14] Control of an Inverted Pendulum. *MIT OpenCourseWare : Systems and Controls, Spring 2013*. URL: https://ocw.mit.edu/courses/2-04a-systems-and-controls-spring-2013/cec516593e76ea28d76655ab3b64f472_MIT2_04AS13_Lecture18.pdf.

[15] Зображення Моноколіса Segway Ninebot ONE E+ [Електронний ресурс]. URL: https://samokat.ua/images/products/Ninebot%20by%20Segway%20ONE%20E%20Black_1_24w.jpg.

[16] A Comparison Between PID and LQR Controllers for Stabilization of a Ball Balancing Robot. *Advanced Ultrasound in Diagnosis and Therapy*. 2023. Vol.

13, No. 1. URL: https://www.researchgate.net/publication/376105021_A_Comparison_Between_PID_and_LQR_Controllers_for_Stabilization_of_a_Ball_Balancing_Robot.

[17] Спрощена схема оберненого маятника на візку [Електронний ресурс]. URL: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/b/b6/Cart-pendulum.png.

[18] Марченко А. А., Гулий В. С. Теорія автоматичного керування. Частина 1 : комп'ютерний практикум / КПІ ім. Ігоря Сікорського. Київ, 2022. 54 с. URL: https://ela.kpi.ua/server/api/core/bitstreams/df33e510-5257-4232-8f6f-ec7873eb64e2/content.

[19] Sliding mode control. *Wikipedia*. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Sliding_mode_control.

[20] Sliding mode control strategy based on disturbance observer for PMIWM systems. *Scientific Reports*. 2024. URL: https://www.nature.com/articles/s41598-024-66477-0.pdf.

[21] What Is Model Predictive Control? *MathWorks Documentation*. URL: https://www.mathworks.com/help/mpc/gs/what-is-mpc.html.

[22] Демків Л. І. Аналіз та синтез нечітких регуляторів динамічних систем : автореф. дис. … д-ра техн. наук / Нац. ун-т «Львівська політехніка». Львів, 2018. URL: https://lpnu.ua/sites/default/files/2020/dissertation/1681/autoreferatdemkivfinal.pdf.

[23] Nguyen T. V. A., Dao Q. T., Bui N. T. Optimized fuzzy logic and sliding mode control for stability and disturbance rejection in rotary inverted pendulum. *Scientific Reports*. 2024. Vol. 14. Art. 31116. URL: https://pmc.ncbi.nlm.nih.gov/articles/PMC11682158/pdf/41598_2024_Article_82471.pdf.

[24] Baek J. et al. Reinforcement learning to achieve real-time control of triple inverted pendulum. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*. 2024. Vol. 128. URL: https://www.scribd.com/document/958979334/1-s2-0-S0952197623017025-main.

[25] Akar O. et al. Evaluating Machine Learning-Based Reinforcement Algorithms for Inverted Pendulum Stabilization. *Diyala Journal of Engineering Sciences*. 2026. Vol. 19, No. 1. URL: https://djes.info/index.php/djes/article/view/2146/1105.

[26] Huynh P. H., Pham C. D., Vu N. B. et al. A Survey of LQG over MPC and LQR Control for Rotary Inverted Pendulum. *Revista de Matematica*. 2024. URL: https://rm.reviste.ubbcluj.ro/wp-content/uploads/2025/03/RM_2024_2_Pag_10_Huynh_PH.pdf.