УДК 517.98+515.16

Б.Ю. Митник

ДОСЛІДЖЕННЯ ЛОГАРИФМІЧНОЇ ПОХІДНОЇ МІРИ НА РІМАНОВОМУ МНОГОВИДІ

Вступ

Проблемі вивчення логарифмічної похідної міри було присвячено чимало публікацій. Зокрема, у праці [1] дано визначення логарифмічної похідної міри вздовж векторного поля в банаховому просторі, а в [2] виведено бездивергентний варіант формули Гаусса–Остроградського на нескінченновимірних многовидах, де фігурує логарифмічна похідна міри.

Постановка задачі

Мета даної статті – отримання явної формули для логарифмічної похідної міри в різних випадках, зокрема для скінченновимірних ріманових многовидів та мір, абсолютно неперервних відносно міри об'єму, що дасть змогу знайти відповідні варіанти формули Гаусса–Остроградського.

Загальні відомості

Нехай S – ріманів многовид, $\mathbf{X}$ – гладке векторне поле на S з відповідним потоком $\Phi_t^{\mathbf{X}}$, μ – борелева міра на S. Далі припускаємо, що міра μ_t, яка має вигляд $\mu_t = \mu \circ \Phi_t^{\mathbf{X}} \prec \mu$, і відповідна щільність $\beta(t,\cdot) = \dfrac{d\mu_t}{d\mu}$ диференційовна по t: при $t = 0$ як елемент простору $L_1(S,\mu)$. В [1, с. 34] доведено, що за цих умов існує логарифмічна похідна міри $\rho_\mu^{\mathbf{X}}(\cdot)$ і при цьому $\rho_\mu^{\mathbf{X}}(\cdot) = -\dfrac{d}{dt}\beta(t,\cdot)\Big|_{t=0}$. Крім того, за даних умов існує похідна $\dfrac{d}{dt}\Big|_{t=0}\mu(\Phi_t^{\mathbf{X}}M)$ і $\dfrac{d}{dt}\Big|_{t=0}\mu(\Phi_t^{\mathbf{X}}M) = \int_M \rho_\mu^{\mathbf{X}} d\mu$. У даній статті отримана явна формула для логарифмічної похідної міри, абсолютно неперервної відносно лебегівської, на рімановому многовиді, що покривається однією картою.

Дослідження проблеми у випадку простору $\mathbb{R}^n$ з евклідовою метрикою

Нехай маємо простір $\mathbb{R}^n$ з евклідовою метрикою, $\mathbf{X}(\mathbf{x})$ – гладке векторне поле класу $C^2(\mathbb{R}^n)$, g^t – однопараметрична група дифеоморфізмів на $\mathbb{R}^n$, що породжує векторне поле $\mathbf{X}(\mathbf{x})$: $\dfrac{\partial g^t\mathbf{x}}{\partial t}\Big|_{t=0} = \mathbf{X}(\mathbf{x})$, ν – інваріантна лебегівська міра (об'єм) в $\mathbb{R}^n$.

Лема. Нехай μ – міра, абсолютно неперервна відносно лебегівської: $\mu \prec \nu$, $p(\mathbf{x}) = \dfrac{d\mu}{d\nu}$, причому щільність $p(\mathbf{x})$ має такі властивості:

1) $p(\mathbf{x}) \in C^1(\mathbb{R}^n)$;

2) $\forall\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : p(\mathbf{x}) > 0$.

Тоді логарифмічна похідна міри μ уздовж поля $\mathbf{X}$ має вигляд

$$\rho_\mu^{\mathbf{X}}(\cdot) = \operatorname{tr}\frac{\partial \mathbf{X}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial \ln p(\mathbf{x})}{\partial x^i} X^i(\mathbf{x}).$$

Доведення. Нехай U – область в $\mathbb{R}^n$. Позначимо $\mu^t(U) = \mu(g^tU)$. Тоді матимемо

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\mu^t(U) = \frac{d}{dt}\left(\int_U p(g^t\mathbf{x})\det\frac{\partial g^t\mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}}d\mathbf{x}\right)\Big|_{t=0}.$$

Підінтегральний вираз $p(g^t\mathbf{x})\det\dfrac{\partial g^t\mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}}$ позначимо $F(\mathbf{x},t)$, де $F(\mathbf{x},t) \in C^1(\mathbb{R}^{n+1})$.

Згідно з класичною теоремою про диференціювання інтеграла по параметру отримаємо $\dfrac{d}{dt}\left(\int_U F(\mathbf{x},t)d\mathbf{x}\right)\Big|_{t=0} = \int_U \dfrac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} F(\mathbf{x},t)d\mathbf{x}$, тобто

$$\frac{d}{dt}\left(\int_U p(g^t\mathbf{x})\det\frac{\partial g^t\mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}}d\mathbf{x}\right)\Big|_{t=0} =$$

$$= \int_U \frac{d}{dt}\left(p(g^t\mathbf{x})\det\frac{\partial g^t\mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}}\right)\Big|_{t=0} d\mathbf{x} =$$

$$= \int_U \left(\frac{d}{dt}(p(g^t\mathbf{x}))\Big|_{t=0}\det\frac{\partial g^t\mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}}\Big|_{t=0} + \right.$$

$$\left. + \, p(g^t\mathbf{x})\Big|_{t=0}\frac{d}{dt}\left(\det\frac{\partial g^t\mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}}\right)\Big|_{t=0}\right)dx. \qquad (1)$$

Оскільки $\mathbf{X}(\mathbf{x}) \in C^2(\mathbb{R}^n)$, то $g^t\mathbf{x} \in C^2(\mathbb{R}^n)$ і, як наслідок, $\dfrac{\partial g^t\mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}} \in C^1(\mathbb{R}^n)$.

З [3, с. 61] маємо

$$\frac{d}{dt}\left(\det\frac{\partial g^t\mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}}\right)\Bigg|_{t=0} = \operatorname{tr}\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{x}}.$$

Остаточно отримуємо

$$\frac{d}{dt}\Bigg|_{t=0}\mu^t(U) =$$

$$= \int_U\left(\frac{d}{dt}(p(g^t\mathbf{x}))\Bigg|_{t=0}\det\frac{\partial g^t\mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}}\Bigg|_{t=0} + \right.$$

$$\left. + p(\mathbf{x})\frac{d}{dt}\left(\det\frac{\partial g^t\mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}}\right)\Bigg|_{t=0}\right)dx =$$

$$= \int_U\left(\operatorname{tr}\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{x}} + \left(\frac{1}{p(\mathbf{x})}\frac{\partial p(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}, \mathbf{X}(\mathbf{x})\right)\right)d\mu =$$

$$= \int_U\left(\operatorname{tr}\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial \ln p(\mathbf{x})}{\partial x^i}X^i(\mathbf{x})\right)d\mu, \qquad (2)$$

а це і означає, що $\rho_\mu^{\mathbf{X}}(\cdot) = \operatorname{tr}\dfrac{\partial \mathbf{X}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} + \dfrac{\partial \ln p(\mathbf{x})}{\partial x^i}X^i(\mathbf{x})$.

Лему доведено.

Отже, в просторі R^n з мірою μ, абсолютно неперервною відносно інваріантної міри Лебега, маємо рівність $\rho_\mu^{\mathbf{X}}(\cdot) = \operatorname{tr}\dfrac{\partial \mathbf{X}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} + \dfrac{\partial \ln p(\mathbf{x})}{\partial x^i}X^i(\mathbf{x})$. Зокрема, коли μ – міра об'єму, то $p(\mathbf{x}) \equiv 1$: $\rho_\mu^{\mathbf{X}}(\cdot) = \operatorname{tr}\dfrac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{x}} = \operatorname{div}\mathbf{X}$. Величину $\rho_\mu^{\mathbf{X}}(\cdot)$ можна вважати узагальненою дивергенцією, оскільки в аналогах формули Гаусса–Остроградського (що ми побачимо далі) вона є підінтегральним виразом правої частини. Будемо позначати її ще як $\operatorname{div}_\mu \mathbf{X}$. З посиланням на [2] отримуємо формулу Гаусса–Остроградського для міри, абсолютно неперервної відносно міри об'єму:

$$\int_{\partial U}(\mathbf{X}, \mathbf{n})\,d\sigma = \int_U\left(\operatorname{tr}\frac{\partial \mathbf{X}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial \ln p(\mathbf{x})}{\partial x^i}X^i(\mathbf{x})\right)d\mu;$$

тут $\mu \prec \nu, p(\mathbf{x}) = \dfrac{d\mu}{d\nu}$, де ν – міра об'єму в $\mathbb{R}^n$; σ – міра на ∂U, індукована мірою μ; U – деяка область $U \subset \mathbb{R}^n$ з гладкою межею; $\mathbf{n}$ – поле одиничної зовнішньої нормалі до ∂U; $\mathbf{X}$ – гладке векторне поле класу $C^2(\mathbb{R}^n)$.

Вивчення проблеми у випадку ріманового многовиду

Розглянемо гладкий ріманів многовид M класу C^2 розмірності n з модельним простором $\mathbb{R}^n$, ∇ – симетрична лінійна зв'язність, яка узгоджена з рімановою метрикою g (зв'язність Леві–Чівіта). Нехай многовид M покривається однією картою (φ, M), тобто $\varphi: M \to A \subset \mathbb{R}^n$ – дифеоморфізм. В координатах g являє собою матрицю $g_{ij}(\mathbf{x})$; $i, j = 1, \dots, n$, компоненти якої гладко залежать від точки $\mathbf{x}$.

Позначимо інваріантну лебегівську міру на $\mathbb{R}^n$ через η. Нехай $Q \subset M$, Q – обмежена область. Міра об'єму ν задається рімановою метрикою і індукує борелівську міру ν_φ на $\varphi(M)$ в $\mathbb{R}^n$, таку, що

$$\nu_\varphi \prec \eta,\ \frac{d\nu_\varphi}{d\eta} = \sqrt{\det g_{ij}(\cdot)},$$

$$\nu(Q) = \nu_\varphi(\varphi(Q)) = \int_{\varphi(Q)}\sqrt{\det g_{ij}(\mathbf{x})}\,dx_1 \dots dx_n.$$

Теорема 1. Нехай μ – борелівська міра на M, абсолютно неперервна відносно міри об'єму, $\mu \prec \nu$, $P(\mathbf{x}) = \dfrac{d\mu}{d\nu}$, причому щільність $P(\mathbf{x})$ задовольняє дві умови: 1) $P(\mathbf{x}) \in C^1(M)$; 2) $\forall x \in M: P(\mathbf{x}) > 0$; X – гладке векторне поле на M класу C^2; M покривається однією картою.

Тоді логарифмічна похідна міри вздовж поля X має вигляд

$$\rho_\mu^{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \operatorname{Tr}\nabla_{(\cdot)}\mathbf{X} + \nabla_{\mathbf{X}}\ln P(\mathbf{x}),$$

де $\operatorname{Tr}\nabla_{(\cdot)}\mathbf{X} = (\nabla_{e_k(x)}\mathbf{X}, e_k(\mathbf{x}))$, $e_k(\mathbf{x}), k = 1, \dots, n$, – ортонормований базис у дотичному просторі T_xM.

Доведення. Міра μ на M індукує міру μ_φ на $\mathbb{R}^n$, причому $\dfrac{d\mu_\varphi}{d\nu_\varphi} = P \circ \varphi^{-1}$. Позначимо $p = P \circ \varphi^{-1}$. Тоді з умов теореми маємо $p(\mathbf{x}) \in C^1(\mathbb{R}^n)$; $p(\mathbf{x}) > 0\ \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Щоб обчислити величину похідної міри за напрямом **X**, перейдемо до обчислень у координатах і скористаємось формулою (2). Тут $\Phi_t^{\mathbf{X}}$ – локальний потік, породжений векторним полем $\mathbf{X}$:

$$\frac{d}{dt}(\mu(\Phi_t^{\mathbf{X}}Q))\Big|_{t=0} =$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\int_{\varphi(Q)} \sqrt{\det g_{ij}(\mathbf{x})}p(\mathbf{x})d\mathbf{x}\right)\Bigg|_{t=0} = \int_{\varphi(Q)}\left(\operatorname{tr}\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{x}} +\right.$$

$$\left.+\frac{1}{p(\mathbf{x})\sqrt{\det g_{ij}(\mathbf{x})}}\left(\frac{\partial(p(\mathbf{x})\sqrt{\det g_{ij}(\mathbf{x})})}{\partial x^i}X^i(\mathbf{x})\right)\right)d\mu_\varphi =$$

$$= \int_{\varphi(Q)}\left(\operatorname{tr}\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{x}} + \frac{1}{p(\mathbf{x})\sqrt{\det g_{ij}(\mathbf{x})}}\left(\frac{\partial(p(\mathbf{x}))\sqrt{\det g_{ij}(\mathbf{x})}}{\partial x^i} +\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{p(\mathbf{x})\partial(\sqrt{\det g_{ij}(\mathbf{x})})}{\partial x^i}\right)X^i(\mathbf{x})\right)d\mu_\varphi = \int_{\varphi(Q)}\left(\operatorname{tr}\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{x}} +\right.$$

$$+\frac{1}{p(\mathbf{x})}\left(\frac{\partial(p(\mathbf{x}))}{\partial x^i}\right)\mathbf{X}^i(\mathbf{x}) +$$

$$\left.+\frac{1}{\sqrt{\det g_{ij}(\mathbf{x})}}\frac{\partial\left(\sqrt{\det g_{ij}(\mathbf{x})}\right)}{\partial x^i}X^i(\mathbf{x})\right)d\mu_\varphi =$$

$$= \int_{\varphi(Q)}\left(\operatorname{tr}\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial(\ln\sqrt{\det g_{ij}(x)})}{\partial x^i}X^i(\mathbf{x})\right)d\mu_\varphi +$$

$$+\int_{\varphi(Q)}\frac{\partial \ln p(\mathbf{x})}{\partial x^i}X^i(x)d\mu_\varphi =$$

$$= \int_{\varphi(Q)}\frac{1}{\sqrt{\det g_{ij}(x)}}\frac{\partial\left(\sqrt{\det g_{ij}(x)}X^i(\mathbf{x})\right)}{\partial x^i}d\mu_\varphi +$$

$$+\int_{\varphi(Q)}\frac{\partial \ln p(\mathbf{x})}{\partial x^i}X^i(x)d\mu_\varphi. \qquad (3)$$

Розглянемо перший доданок. Згідно з [4] коваріантна дивергенція, тобто $\operatorname{div}\mathbf{X} = \operatorname{Tr}\nabla_{(\cdot)}\mathbf{X}$, в координатах запишеться так:

$$\nabla_i X^i = \frac{1}{\sqrt{\det g_{ij}}}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{\det g_{ij}}X^i\right).$$

Це не що інше, як підінтегральний вираз першого доданка у формулі (3):

$$\frac{d}{dt}(\mu(\Phi_t^{\mathbf{X}}Q))\Big|_{t=0} =$$

$$= \int_{\varphi(Q)}\nabla_i X^i d\mu_\varphi + \int_{\varphi(Q)}\nabla_i \ln P(x)X^i d\mu_\varphi.$$

В інваріантному записі отримуємо

$$\frac{d}{dt}(\mu(\Phi_t^{\mathbf{X}}Q))\Big|_{t=0} = \int_Q \operatorname{Tr}\nabla_{(\cdot)}\mathbf{X}d\mu + \int_Q \nabla_X \ln P(\mathbf{x})d\mu,$$

тобто логарифмічна похідна міри вздовж поля **X** має такий вигляд:

$$\rho_\mu^{\mathbf{X}}(\cdot) = \operatorname{Tr}\nabla_{(\cdot)}\mathbf{X} + \nabla_{\mathbf{X}}\ln P(\mathbf{x}).$$

Теорему доведено.

***Зауваження* 1.** Формула (4) має місце і у випадку орієнтованого ріманового многовиду, що не покривається однією картою.

Наслідок. Використовуючи результат теореми і бездивергентний варіант формули Гаусса–Остроградського [3], отримуємо таку формулу Гаусса–Остроградського для скінченновимірного ріманового многовиду, що покривається однією картою:

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\int_{\Phi_t^n V}(\mathbf{X}, n)d\mu = \int_V(\operatorname{Tr}\nabla_{(\cdot)}\mathbf{X} + \nabla_{\mathbf{X}}\ln P(\mathbf{x}))d\mu,$$

$$\mu \prec \nu,\ P(\mathbf{x}) = \frac{d\mu}{d\nu},$$

де ν – міра об'єму на M; n – векторне поле, що є продовженням на M поля одиничної зовнішньої нормалі; $\mathbf{X}$ – гладке векторне поле; ∇ – зв'язність Леві–Чівіта, узгоджена з рімановою метрикою g; V – відкритий підмноговид в M.

Зв'язок між логарифмічною похідною міри та похідною Лі за напрямком

Нехай маємо гладкий орієнтований многовид M класу C^2 розмірності n з модельним простором $\mathbb{R}^n$. На M задано векторне поле $\mathbf{X}$ класу гладкості C^2 і нехай $\forall x_0 \in M$ існує окіл U точки x_0, інтервал $I_{x_0} = (-\varepsilon(x_0), \varepsilon(x_0))$ і локальний потік $g^t, t \in I$, що відповідає векторному полю $\mathbf{X}$.

Зафіксуємо точку $x_0 \in M$ та окіл V_{x_0} цієї точки, що повністю покривається деякою картою (U, φ). В околі V_{x_0} існує локальний потік $g^t, t \in I_{x_0}$, де $I_{x_0} = (-\varepsilon(x_0), \varepsilon(x_0))$ — деякий інтервал.

Нехай ω — диференціальна форма порядку n на M, така, що для будь-якої системи координат $x^1, x^2, \ldots, x^n$ виконується рівність

$$\omega(\partial/\partial x^1, \ldots, \partial/\partial x^n) > 0 .$$

Позначимо $\omega_\varphi(\mathbf{x}) = a(\mathbf{x}) dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$ — координатна форма запису ω в карті (U, φ), де $a(\mathbf{x})$ задовольняє такі умови:

1) $a(\mathbf{x}) > 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \varphi(M)$;

2) $a(\mathbf{x}) \in C^1(\varphi(M))$.

Обмеження 1) випливає безпосередньо з вибору форми ω.

Задамо борелівську міру на M як інтеграл від диференціальної форми ω:

$$\mu(A) = \int_A w = \int_{\varphi(A)} a(\mathbf{x}) dx^1 dx^2 \ldots dx^n ,$$

де $A \subset M$.

Оскільки M — орієнтований многовид, то задання міри μ є коректним, тобто міра області не змінюється при зміні системи координат. Отже, має місце теорема.

Теорема 2. Виконується така рівність:

$$\forall x \in V_{x_0} : (L_{\mathbf{X}} \omega)(\mathbf{x}) = \rho_\mu^{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) \omega(\mathbf{x}) .$$

Доведення. Міра μ_φ на $\varphi(U)$ індукована мірою μ. Обчислимо похідну Лі $L_{\mathbf{X}} \omega$ від форми w вздовж векторного поля $\mathbf{X}$

$$(L_{\mathbf{X}} \omega)(\mathbf{x}) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} (g_*^t \omega - \omega)(\mathbf{x}) .$$

Спочатку обчислення проводитимемо в координатах і вважатимемо, що $t \in I_x$:

$$(g_*^t \omega)^\varphi = a(g_\varphi^t \mathbf{x}) \det \frac{\partial g_\varphi^t \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}} dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n .$$

Тут g_φ^t — локальний потік у карті, що відповідає потоку g^t на $U \subset M$:

$$(L_{\mathbf{X}} \omega)^\varphi(\mathbf{x}) =$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{(a(g^t \mathbf{x}) \det \frac{\partial g^t \mathbf{x}}{\partial x} - a(\mathbf{x})) dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n}{t} =$$

$$= \lim_{t \to 0} \left(\frac{a(g^t \mathbf{x}) + a(g^t \mathbf{x}) t \operatorname{tr} \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{x}}}{t} + \right.$$

$$\left. + \frac{a(g^t \mathbf{x}) O(t^2) - a(\mathbf{x})}{t} \right) dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n =$$

$$= \lim_{t \to 0} \left(\frac{a(g^t \mathbf{x}) - a(\mathbf{x})}{t} + a(\mathbf{x}) \operatorname{tr} \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{x}} \right) dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n =$$

$$= \left(\frac{1}{a(\mathbf{x})} \sum_{i=1}^n \frac{\partial a(\mathbf{x})}{\partial x_i} X_i(\mathbf{x}) + \operatorname{tr} \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{x}} \right) a(\mathbf{x}) dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n =$$

$$= \left(\operatorname{tr} \frac{\partial \mathbf{X}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial \ln a(\mathbf{x})}{\partial x^i} X^i(\mathbf{x}) \right) a(\mathbf{x}) dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n,$$

$$(L_X \omega)^\varphi(\mathbf{x}) =$$

$$= \left(\operatorname{tr} \frac{\partial \mathbf{X}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial \ln a(\mathbf{x})}{\partial x^i} X^i(\mathbf{x}) \right) a(\mathbf{x}) dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n.$$

Але згідно з лемою логарифмічна похідна має вигляд

$$\rho_{\mu_\varphi}^{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \operatorname{tr} \frac{\partial \mathbf{X}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial \ln a(\mathbf{x})}{\partial x^i} X^i(\mathbf{x}) .$$

На карті отримуємо формулу

$$(L_X \omega)^\varphi(\mathbf{x}) = \rho_{\mu_\varphi}^{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) \omega^\varphi(\mathbf{x}) .$$

Має місце аналогічна формула і локально на M:

$$\forall x \in V_{x_0} : (L_{\mathbf{X}} \omega)(\mathbf{x}) = \rho_\mu^{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) \omega(\mathbf{x}) .$$

Теорему доведено.

Зауваження 2. У праці [5] було дано визначення дивергенції як функції, що задовольняє рівність (5). Із теореми 2 випливає, що логарифмічна похідна міри об’єму задовольняє рівність (5). Таким чином, можна стверджувати про еквівалентність визначення дивергенції як функції, що задовольняє рівність (5), і як логарифмічної похідної міри об’єму.

Висновки

У статті було отримано вираз для логарифмічної похідної за напрямом певного класу мір, а саме мір абсолютно неперервних відносно міри об'єму, на рімановому многовиді, що покривається однією картою. Отриманий вираз був застосований для виведення аналога формули Гаусса–Остроградського. Також встановлено зв'язок між логарифмічними похідними мір та відповідними похідними Лі.

Б. Ю. Мытник

ИССЛЕДОВАНИЕ ЛОГАРИФМИЧЕСКОЙ ПРОИЗВОДНОЙ МЕРЫ НА РИМАНОВОМ МНОГООБРАЗИИ

Предложен явный вид формулы логарифмической производной мер, абсолютно непрерывных относительно меры объема, на римановом многообразии, что покрывается одной картой.

B.Yu. Mytnyk

THE STUDY OF THE LOGARITHMIC DERIVATIVE TO MEASURE ON RIMAN MANIFOLD

The present paper proposes the formula for calculating the logarithmic measure derivative of the absolutely continuous relative volume on the Riman manifold, covered by one chart.

1. *Далецкий Ю.Л., Белопольская Я.И.* Стохастические уравнения и дифференциальная геометрия. – К.: Вища шк., 1989. – 296 с.
2. *Богданський Ю.В.* Бездивергентний варіант формули Гаусса–Остроградського на нескінченновимірних многовидах // Наукові вісті НТУУ "КПІ". – 2008. – № 4. – С. 132–138.
3. *Арнольд В.И.* Математические методы классической механики. – М.: Наука, 1974. – 432 с.
4. *Новиков С.П., Фоменко А.Т.* Элементы дифференциальной геометрии и топологии. – М.: Наука, 1987. – 430 с.
5. *Кобаяси Ш., Номидзу К.* Основы дифференциальной геометрии. В 2-х томах. – М.: Наука, 1981. – Т.1. – 344 с.

Рекомендована Радою
Навчально-наукового комплексу
"Інститут прикладного системного
аналізу" НТУУ "КПІ"

Надійшла до редакції
20 березня 2009 року