

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ ІМЕНІ ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

ФІЗИЧНІ ОСНОВИ КІБЕР-ФІЗИЧНИХ СИСТЕМ. ЧАСТИНА 1 ПРОСТО ПРО СКЛАДНЕ

Навчальний посібник

Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра
за освітніми програмами «Інженерія програмного забезпечення інтелектуальних кібер-
фізичних систем в енергетиці»
спеціальності F2 «Інженерія програмного забезпечення»
та «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології кібер-енергетичних систем»
спеціальності G7 «Автоматизація, комп'ютерно-інтегровані технології та робототехніка»

Укладачі: С. В. Пальцун, О. Ю. Салюк

Електронне мережеве навчальне видання

Київ
КПІ ім. ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО
2026

УДК 531.1 (075.8)
Ф51

Укладачі: *Пальцун Сергій Володимирович*, старший викладач
Салюк Ольга Юріївна, доктор фіз-мат. наук, професор

Рецензент *Товстолиткін О.І.*, доктор фіз-мат. наук, професор, член-кореспондент НАН України, ІМаг НАНУ

Відповідальний редактор *Самар Г.В.*, старший викладач КЗФ КПІ ім. Ігоря Сікорського

*Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
(протокол № 8 від 04.06.2026 р.)
за поданням вченої ради фізико-математичного факультету
(протокол № 4 від 13.05.2026 р.)*

Фізичні основи кібер-фізичних систем. Частина 1. Просто про складне.
Ф51 [Електронний ресурс] : навч. посіб. для здобувачів ступеня бакалавра за освіт. програмою «Інженерія програмного забезпечення інтелектуальних кібер-фізичних систем в енергетиці» спец. F2 «Інженерія програмного забезпечення» та освіт. програмою «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології кібер-енергетичних систем» спец. G7 «Автоматизація, комп'ютерно-інтегровані технології та робототехніка» / КПІ ім. Ігоря Сікорського ; уклад.: С. В. Пальцун, О. Ю. Салюк. – Електрон. текст. дані (1 файл). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2026. – 146 с.

У даному навчальному посібнику викладено основи фізики з орієнтацією на потреби студентів комп'ютерних і технічних спеціальностей. Матеріал охоплює класичну механіку та молекулярну фізику з особливим акцентом на їх зв'язок із обчислювальними процесами та програмуванням. Навчальний посібник спрямований на формування інженерного мислення та розуміння фізичних обмежень і можливостей комп'ютерних систем. Видання містить практичні приклади та задачі.

Посібник призначений для здобувачів ступеня бакалавра за спеціальністю F2 «Інженерія програмного забезпечення» та за спеціальністю G7 «Автоматизація, комп'ютерно-інтегровані технології та робототехніка». Посібник буде також корисним всім, хто прагне поєднати знання основ фізики з сучасними обчислювальними технологіями.

УДК 531.1 (075.8)

Реєстр. № НП 25/26-471. Обсяг 8,5 авт. арк.

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
проспект Берестейський, 37, м. Київ, 03056
<https://kpi.ua>

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру видавців, виготовлювачів
і розповсюджувачів видавничої продукції ДК № 5354 від 25.05.2017 р.

© КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2026

ЗМІСТ

Вступ	6
Предмет і методи фізики	8
Механіка	10
Розділи механіки	11
Наукові абстракції у механіці	12
Основні види механічного руху	13
Кінематика	14
Рух матеріальної точки по колу	20
Плоский рух твердого тіла	23
Динаміка матеріальної точки та поступального руху твердого тіла	26
Перший закон Ньютона	27
Другий закон Ньютона	28
Третій закон Ньютона	29
Закон збереження імпульсу. Центр мас	30
Рух тіла змінної маси	33
Енергія, робота, потужність	35
Потужність	37
Кінетична енергія	38
Потенціальна енергія	39
Зв'язок між силою та потенціальною енергією	40
Оператор Гамільтона (для довідки)	41
Види ударів	43
Динаміка обертального руху твердого тіла	45
Момент сили	45
Пара сил. Момент пари сил	47
Момент імпульсу	49
Кінетична енергія тіла, яке обертається. Момент інерції	50

Основний закон динаміки обертального руху твердого тіла	53
Кінетична енергія тіла при плоскому русі	53
Гіроскопи	54
Приклади знаходження моментів інерції	57
Моменти інерції деяких тіл правильної геометричної форми	60
Відповідності між поступальним та обертальним рухом	61
Неінерціальні системи відліку	62
Поступальна сила інерції	63
Сили інерції, що діють на тіло, яке покоїться в обертовій системі відліку	63
Сили інерції, що діють на тіло, яке рухається в обертовій системі відліку	64
Елементи механіки суцільного середовища	67
Теорема про нерозривність струменя	68
Рівняння Бернуллі	70
Формула Торічеллі	72
Реальні рідини та гази	73
Режими течії реальної рідини	74
Формула Пуазейля	76
Рух тіл в рідинах та газах	78
Основи молекулярної фізики і термодинаміки	81
Молекулярно-кінетична теорія ідеальних газів	84
Розподіл енергії газу по ступенях свободи (вільності)	89
Рівноважний розподіл молекул ідеального газу по швидкостях	91
Рівноважний стан газу в полі сил тяжіння	94
Явища переносу в газах	97
Емпіричні закони явищ переносу	98
Середня довжина вільного пробігу молекул	101

Молекулярно-кінетична теорія явищ переносу в газах	102
Основи термодинаміки	109
Перший закон/принцип/початок термодинаміки	111
Робота газу при зміні об'єму	113
Внутрішня енергія та теплоємність ідеального газу	114
Рівняння адіабати ідеального газу	117
Політропічні процеси	119
Робота ідеального газу при різних процесах	120
Теплові машини. II закон термодинаміки	123
Цикл Карно та його ККД	128
Реальні гази	130
Рівняння Ван-дер-Ваальса	132
Внутрішня енергія газу Ван-дер-Ваальса	135
Ізотерми газу Ван-дер-Ваальса	136
Фазові рівноваги та перетворення	138
Фази. Фазові переходи	138
Приклади фазових переходів. Діаграма стану	140
Список рекомендованої літератури	145

ВСТУП

У сучасному світі комп'ютерні технології пронизують практично всі сфери життя – від побутових пристроїв до складних наукових досліджень. Програмісти, інженери та інші спеціалісти ІТ-галузі часто сприймаються як люди, що працюють виключно з абстрактними структурами – кодом, алгоритмами, даними. Проте, за цією абстракцією стоїть матеріальна основа, тісно пов'язана з фізичними законами. Саме тому знання фізики є важливим, а інколи й необхідним елементом підготовки комп'ютерників.

Передусім фізика лежить в основі апаратного забезпечення комп'ютерів. Будь-який процесор, пам'ять чи носій інформації функціонує завдяки законам електромагнетизму, квантової механіки та термодинаміки. Транзистори – базові елементи сучасних мікросхем – працюють завдяки властивостям напівпровідників, які неможливо зрозуміти без фізичних знань. Розробка нових процесорів, оптимізація їх енергоспоживання, боротьба з перегрівом – усе це безпосередньо пов'язано з фізикою. Навіть якщо програміст не створює «залізо», розуміння принципів його роботи дозволяє ефективніше писати код.

Далі, фізика відіграє важливу роль у сфері комп'ютерної графіки та ігор. Реалістичне відображення світла, тіней, відбиттів і руху об'єктів базується на фізичних моделях. Алгоритми трасування променів, симуляції рідин, тканин або диму спираються на закони оптики, механіки та гідродинаміки. Без розуміння цих принципів складно створити правдоподібні віртуальні світи. Саме тому спеціалісти з графіки часто мають глибокі знання фізики, що дозволяє їм моделювати поведінку світла і матерії з високою точністю.

Ще однією важливою сферою є моделювання і наукові обчислення. Комп'ютери активно використовуються для дослідження фізичних процесів: від кліматичних моделей до астрофізики. Програмісти, які працюють у цих галузях, повинні розуміти фізичну сутність поставлених перед ними задач. Це дозволяє правильно будувати моделі, обирати адекватні чисельні методи та інтерпретувати результати. Без такого розуміння є ризик отримати красиві, але некоректні результати.

Крім того, фізика важлива для розвитку нових технологій у сфері обчислень. Наприклад, квантові комп'ютери базуються на принципах квантової механіки і відкривають нові можливості для обробки інформації. Робота з такими системами вимагає принципово іншого мислення і знання фізичних основ. Аналогічно, розвиток сенсорних систем, робототехніки, інтернету речей також пов'язаний із фізичними процесами – від передачі сигналів до взаємодії з навколишнім середовищем.

Не менш важливим є і загальний світоглядний аспект. Фізика вчить мислити системно, розуміти причинно-наслідкові зв'язки, будувати моделі та перевіряти їх експериментально. Ці навички є універсальними і надзвичайно корисними для програмістів. Вони допомагають не лише в технічних задачах, а й у розв'язанні складних інженерних проблем, де потрібно враховувати багато факторів і обмежень.

Водночас варто зазначити, що рівень необхідних знань фізики може відрізнятися залежно від спеціалізації. Для розробника вебзастосунків достатньо базового розуміння принципів роботи комп'ютера, тоді як інженеру з комп'ютерної графіки, робототехніки чи мікроелектроніки потрібна значно глибша підготовка. Проте, навіть на базовому рівні фізика допомагає краще усвідомити природу технологій, з якими працює фахівець.

Отже, знання фізики є важливим інструментом для комп'ютерників, який розширює їхні можливості та підвищує професійний рівень. Воно дозволяє не лише ефективніше використовувати існуючі технології, а й брати участь у створенні нових. У світі, де межа між програмним і апаратним забезпеченням стає все менш чіткою, фізика залишається фундаментом, на якому будується майбутнє інформаційних технологій.

І, наостанок, про найстрашніше. Хтось може відкрити цей навчальний посібник і тут же перелякано закрити – там формули! Що робити, фізика не лише досліджує навколишній світ, намагаючись зрозуміти закони природи, а й описує відкриті закони за допомогою математики. Без математики, взагалі-то не може обійтись жодна наука, яка насправді є наукою, а не просто збіркою історій. І навіть програмування, яке значною мірою є мистецтвом. Але лякатись не варто. По перше, формули – це красиво, і чим красивіша формула, тим більш імовірно, що вона вірно описує природу. А по-друге, ми не в Хогвартсі, і зубрити формули, як заклинання абсолютно не треба – головне розуміти суть законів, які вони описують.

ПРЕДМЕТ І МЕТОДИ ФІЗИКИ

“Scary” tales for juniors

Слово **фізика** походить від грецького **physis** – природа. Це наука, яка вивчає найпростіші й у той же час найбільш загальні закономірності природних явищ, властивості та будову матерії, закони та форми її руху.

Під *рухом* ми розуміємо будь-яку зміну взагалі.

Поняття та закони фізики лежать в основі всіх *природничих та технічних* наук. В той же час фізика відноситься до наук *точних* і вивчає кількісні закономірності явищ.

Фізика – наука *експериментальна*. Саме з **експерименту**, тобто зі спостереження досліджуваного явища у точно визначених умовах, починається процес пізнання у фізиці.



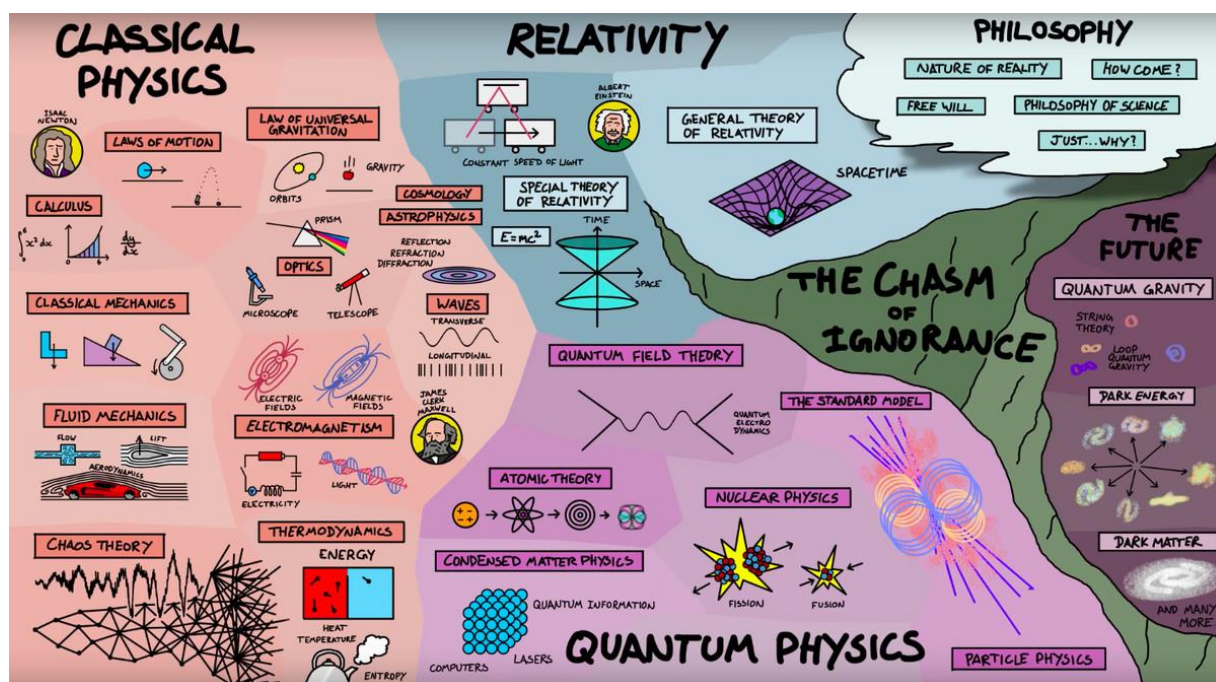
Для пояснення результатів експериментів розробляються **гіпотези** відносно внутрішніх закономірностей даного явища. З гіпотез випливають певні висновки, для перевірки яких ставляться нові **експерименти**.

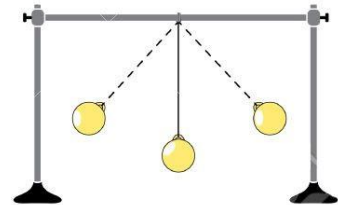
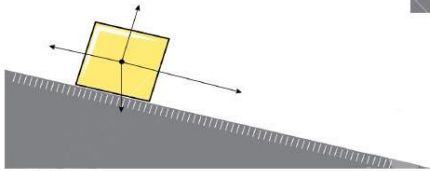
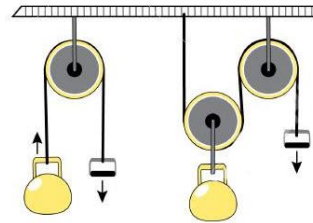
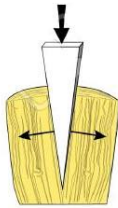
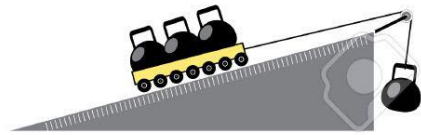
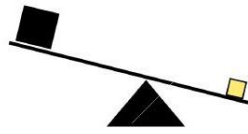
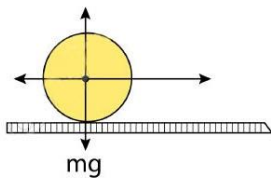
Якщо гіпотеза успішно пройшла перевірку дослідним шляхом, вона стає фізичним **законом**, або **теорією**.

Фізична **теорія** являє собою сукупність ідей, які узагальнюють дослідні факти і відображають об'єктивні природні закономірності. Фізичні закони повинні не тільки пояснювати уже відомі дослідні дані, але і передрікати існування нових фізичних явищ. Критерієм істинності теорії є підтвердження її висновків і передбачень практикою.

Експерименти завжди ставляться у певних умовах (інтервали температур, тисків, величин струмів і т.ін.) і з певною *точністю*, тому будь-який фізичний закон має певну *область придатності*.

При аналізі складних процесів для з'ясування основних причинних зв'язків між фізичними величинами, необхідно виділити головне, визначальне в досліджуваному явищі. Тим самим створюється деяка умовна схема явища, що містить тільки його *істотні особливості*. При створенні такої схеми фізики користуються **науковими абстракціями**. До них відносяться такі поняття як *матеріальна точка*, *ідеальний газ*, *абсолютно тверде тіло* і т.ін. Використання тих або інших абстракцій визначається конкретними умовами досліду. У механіці при вивченні руху, наприклад, Землі навколо Сонця, можна вважати Землю матеріальною точкою, якщо нас не цікавить обертання Землі навколо своєї осі. У той же час не можна вважати Землю матеріальною точкою, якщо необхідно розрахувати орбіту її супутника.





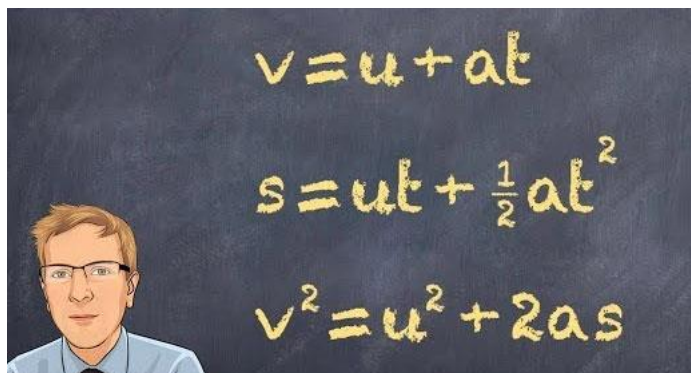
МЕХАНІКА

Механіка це частина фізики, яка вивчає *закономірності механічного руху* і *причини*, які викликають чи змінюють цей рух.

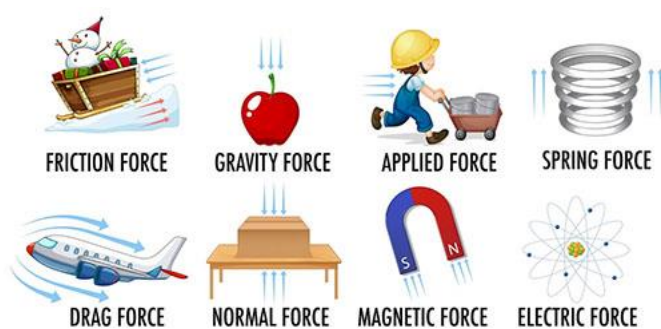
Механічний рух тіла – зміна протягом часу його *положення* у просторі відносно інших тіл.

Класична механіка вивчає закони руху макроскопічних тіл, швидкості яких є малими порівняно зі швидкістю світла у вакуумі c . Закони руху макроскопічних тіл зі швидкостями, близькими до швидкості світла, вивчаються **релятивістською механікою**, яка базується на **спеціальній теорії відносності**, сформульованій Альбертом Ейнштейном. Для опису руху мікроскопічних тіл (окремі атоми і елементарні частинки) використовують закони **квантової механіки**.

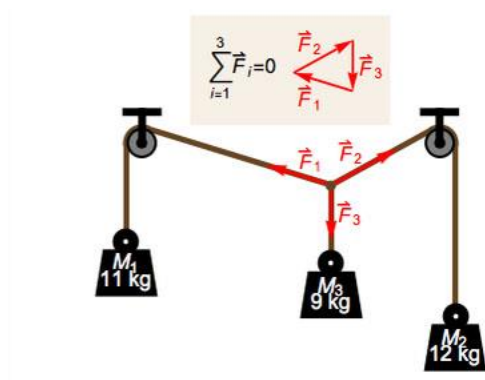
Розділи механіки



Кінематика – розділ механіки, в якому рух тіл розглядається *без з'ясування причин* його виникнення.

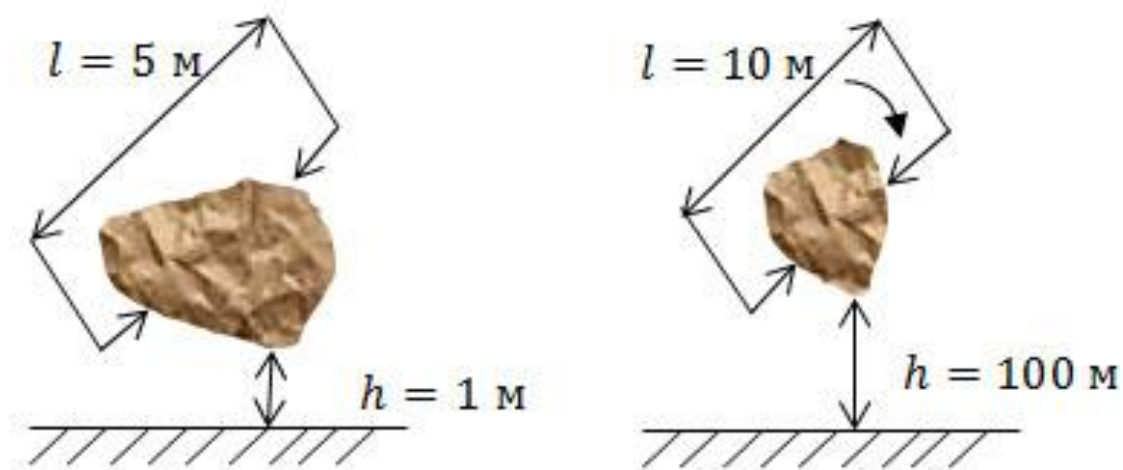


Динаміка – розділ механіки, що вивчає *взаємодію* тіл та її вплив на їх механічний рух.



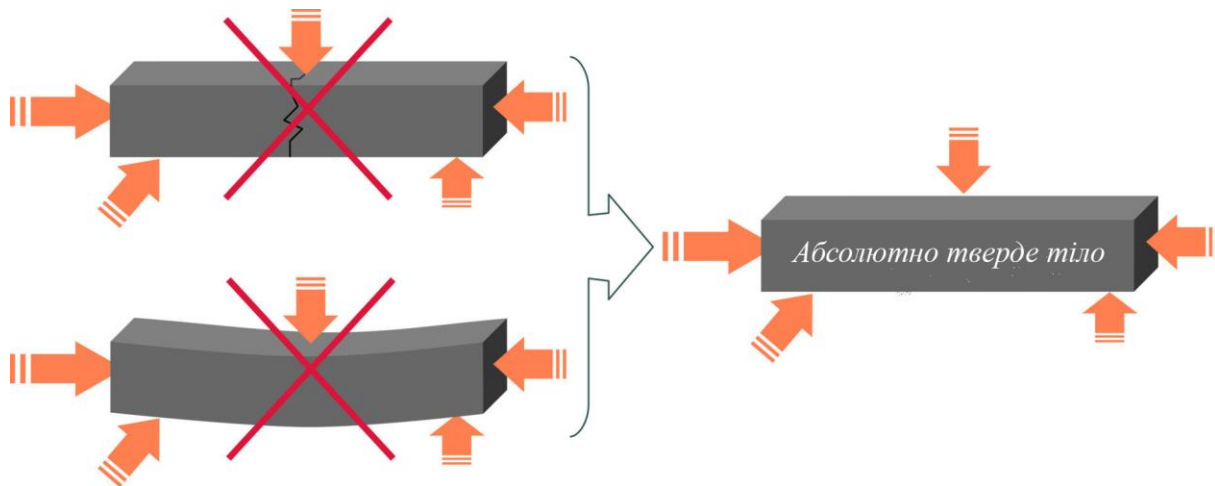
Статика – розділ механіки, що вивчає закони *рівноваги* тіл. Оскільки закони статички можна встановити із законів руху, закони статички розглядаються разом із законами динаміки.

Наукові абстракції у механіці



Матеріальна точка – тіло певної маси, розмірами якого можна знехтувати в умовах даної задачі.

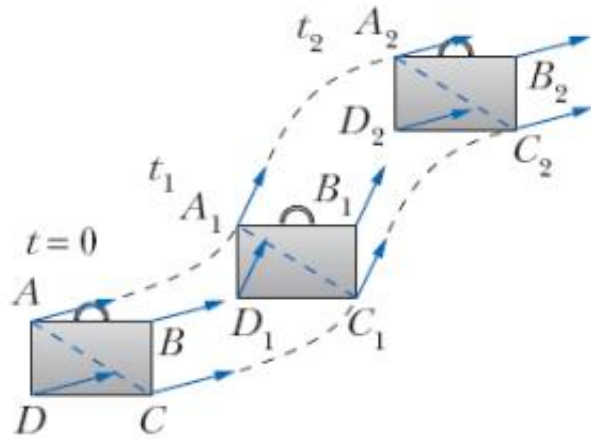
Будь яке тіло, або систему тіл, розмірами яких не можна знехтувати, можна розглядати як **систему матеріальних точок**. Для цього тіло розбивають на таку кількість частинок, що розмірами кожної окремої частинки можна знехтувати в порівнянні з розмірами тіла.



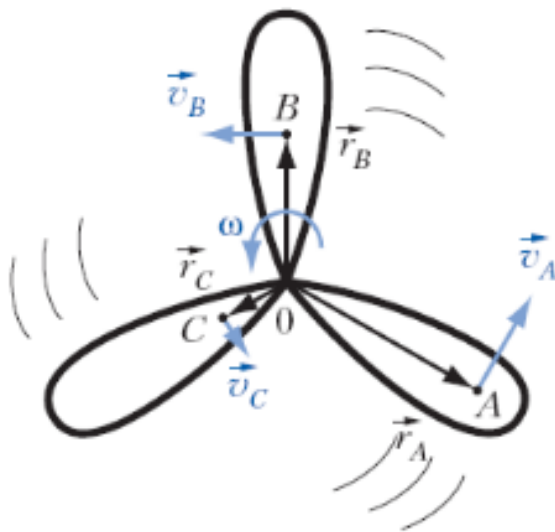
Абсолютно тверде тіло – тіло, яке ні за яких умов не може деформуватись і відстань між будь-якими двома точками (або точніше між двома частинками) цього тіла завжди залишається незмінною.

Основні види механічного руху

Можна виділити два основні види механічного руху:



Поступальний рух – це рух, при якому будь-яка пряма, яка жорстко зв'язана з тілом, при русі тіла залишається паралельною до свого початкового положення.



Обертальний рух – це рух, при якому всі точки тіла рухаються по колам, центри яких лежать на одній і той самій прямій, яка називається віссю обертання.

Довільний рух твердого тіла можна представити як комбінацію поступального та обертального руху.

КІНЕМАТИКА

При слові "кінематика", у багатьох виникає відчуття, що це щось зі шкільного курсу фізики, що залишилося десь у минулому разом із задачами про поїзди. Насправді ж кінематика – це те, з чим програміст працює майже щодня, просто не завжди це усвідомлює.

Уявімо найпростіший приклад – рух об'єкта на екрані. Нехай у нас є персонаж у грі або просто точка. Щоб об'єкт рухався, ми фактично використовуємо одну з базових формул кінематики: нова позиція дорівнює старій плюс швидкість, помножена на час: $x = x_0 + vdt$. Але за цим простим рядком стоїть фізична модель руху. Якщо ми додаємо прискорення, наприклад «гравітацію», з'являється ще один рядок: $v = v_0 + adt$. І ось у нас уже є падіння, стрибок, рух по параболі – тобто поведінка, яку ми сприймаємо як «реалістичну».

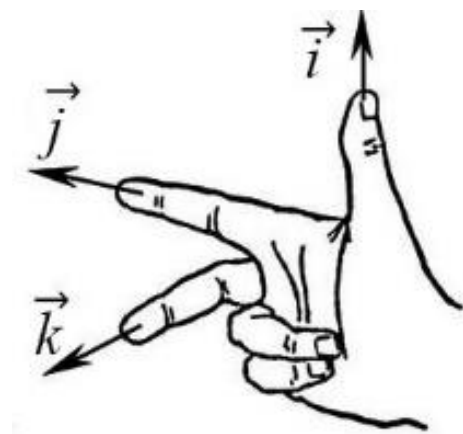
Ще один важливий аспект – залежність руху від часу демонстрації кадру. Якщо ми просто додаємо фіксоване значення до позиції на кожному кадрі, то швидкість руху буде залежати від FPS. Відповідно, на «швидкому» комп'ютері об'єкт рухатиметься швидше, ніж на «повільному». Саме тому в розрахунках вводиться dt – час між кадрами. Це дозволяє зробити рух незалежним від продуктивності системи. І знову ж таки, це не що інше, як застосування фізичного принципу: рух залежить від часу.

Кінематика також лежить в основі взаємодії об'єктів. Наприклад, коли м'яч відскакує від стіни, ми змінюємо напрямок його швидкості. Коли персонаж не може пройти крізь стіну – ми перевіряємо, чи перетинаються об'єкти, і коригуємо його позицію. Це прості, але дуже наочні приклади того, як математичні та фізичні моделі перетворюються на поведінку в програмі.

Якщо піти далі, ті самі принципи використовуються у складніших системах. Наприклад, у мережових іграх комп'ютер часто «вгадує», де буде інший гравець через частку секунди, використовуючи його швидкість і напрямок. Це потрібно через затримки в мережі. Тобто навіть коли ви граєте онлайн, кінематика допомагає приховати фізичні обмеження реального світу – такі як обмежена швидкість передачі сигналу.

Отже, кінематика — це не абстрактна теорія, а практичний інструмент. Вона лежить в основі руху, анімації, взаємодії об'єктів і навіть мережової синхронізації. І кожного разу, коли ви пишете щось на кшталт $x = x_0 + vdt$, ви фактично реалізуєте фізичну модель світу — нехай навіть у спрощеному вигляді.

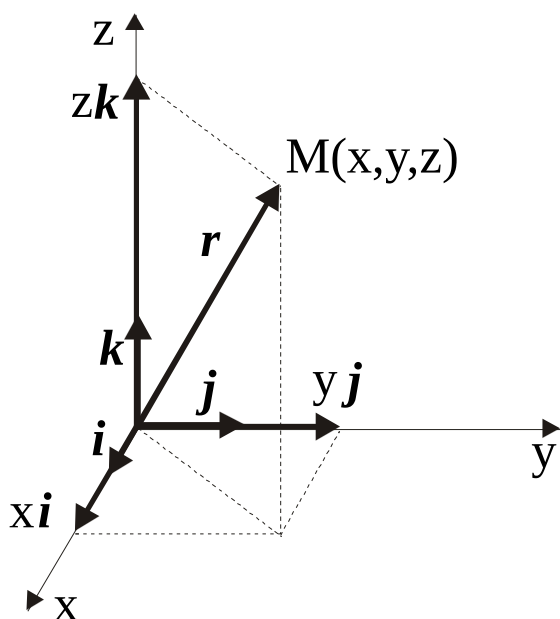
Що ж таке **механічний рух**? Це зміна положення тіла *відносно інших тіл*. Тому механічний рух завжди *відносний*. Положення матеріальної точки визначається по відношенню до іншого, довільно вибраного тіла, яке називають **тілом відліку**. З ним зв'язана **система відліку** – сукупність системи координат і системи відліку часу (годинника), пов'язаних з тілом відліку. В декартовій системі координат положення точки А в даний момент часу по відношенню до цієї системи характеризується трьома координатами x , y та z або радіус-вектором $\vec{r}$, проведеним із початку системи координат в дану точку.



$$\vec{r} = \vec{r}(t), \text{ або } \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

Ці рівняння називаються **кінематичними рівняннями руху точки**.

Ми будемо користуватись **правою** декартовою системою координат. Система координат називається **правою** тому, що взаємна орієнтація векторів $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ співпадає зі взаємною орієнтацією трьох пальців правої руки – великого, вказівного та середнього, якщо розташувати їх взаємно перпендикулярно.



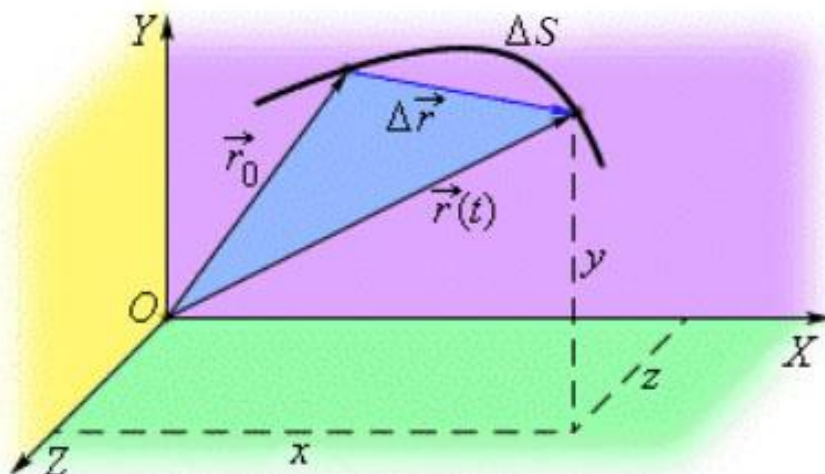
Кожній осі декартової системи координат відповідає співнаправлений з нею вектор одиничної довжини – **орт**. Відповідно орти осей x , y та z позначаються $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

Радіусом-вектором $\vec{r}$ точки називається вектор, проведений з початку координат в цю точку.

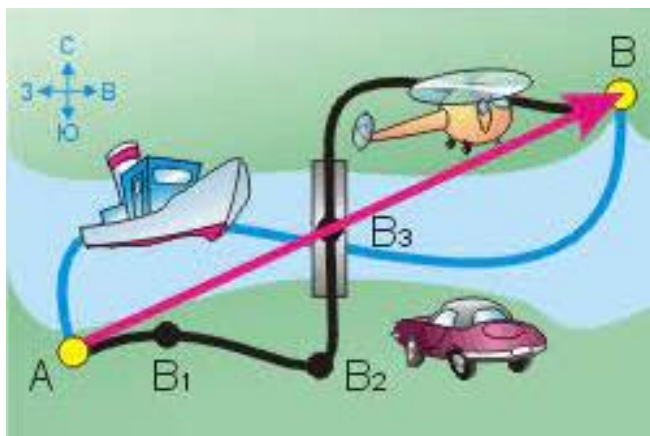
Радіус-вектор $\vec{r}$ можна розкласти по базису $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

Координати x, y, z точки M називаються також **координатами (компонентами) радіуса-вектора $\vec{r}$** , а вектори $x\vec{i}$, $y\vec{j}$ та $z\vec{k}$ – **складовими вектора $\vec{r}$** по осях координат.

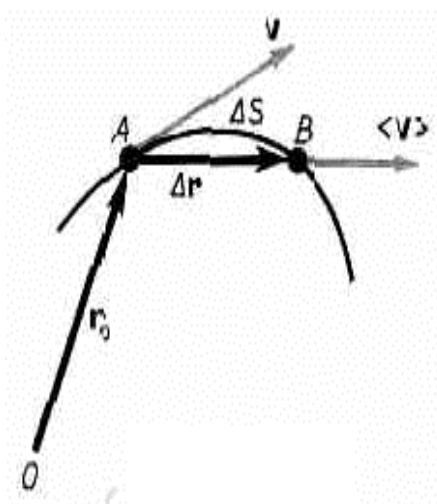


Якщо з кінематичних рівнянь виключити час то отримаємо рівняння **траєкторії** руху матеріальної точки. Траєкторія руху матеріальної точки — лінія, яку описує ця точка у просторі. Траєкторії руху можуть бути прямолінійними або криволінійними.



Довжина ділянки траєкторії, яку пройшла матеріальна точка з моменту початку відліку часу, називається довжиною шляху Δs , і є скалярною функцією часу: $\Delta s = \Delta s(t)$. Вектор $\Delta \vec{r} = \vec{r} - \vec{r}_0$, проведений із початкового положення до положення точки в даний момент, називається **переміщенням**.

При прямолінійному русі вектор переміщення співпадає з відповідною ділянкою траєкторії і модуль переміщення $|\Delta \vec{r}|$ дорівнює пройденому шляху Δs .



Рух матеріальної точки характеризується її **швидкістю**.

Середня шляхова швидкість

$$\langle v \rangle = \frac{\Delta S}{\Delta t}$$

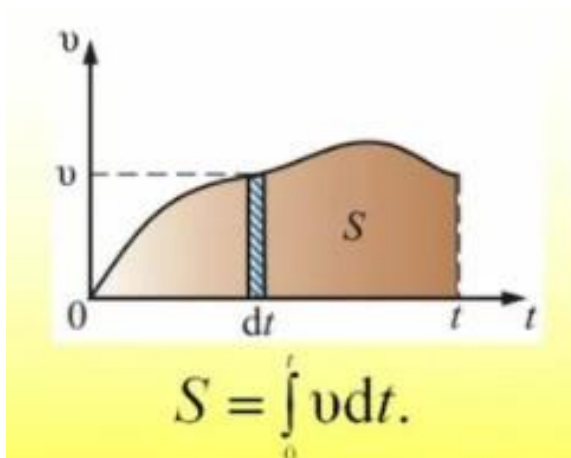
Середня швидкість переміщення (спрямована по січній до траєкторії)

$$\langle \vec{v} \rangle = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

Миттєва швидкість (спрямована по дотичній до траєкторії)

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}} = v \vec{\tau}$$

Видно, швидкість є похідною за часом від радіус-вектора точки, яка рухається.



Якщо відоме значення миттєвої швидкості v_i можна підрахувати шлях, пройдений тілом за певний проміжок часу Δt_i : $\Delta s_i = v_i \cdot \Delta t_i$. Тоді повний шлях та переміщення визначаються інтегруванням:

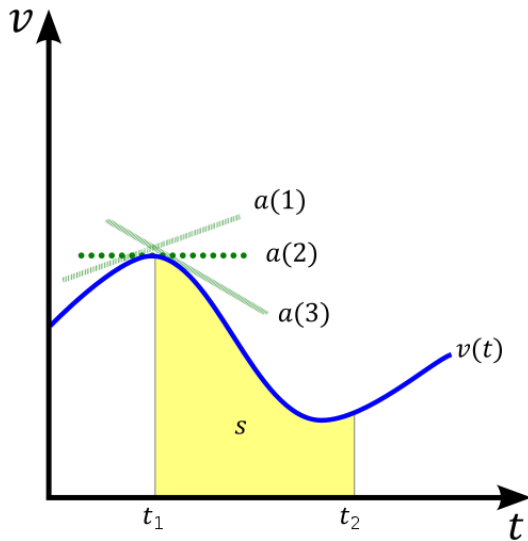
$$s_{12} = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt$$

$$\vec{r}_{12} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{v}(t) dt$$

Середня швидкість

$$\langle v \rangle = \frac{s_{12}}{t_2 - t_1} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} v(t) dt}{t_2 - t_1}$$

$$\langle \vec{v} \rangle = \frac{\vec{r}_{12}}{t_2 - t_1} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} \vec{v}(t) dt}{t_2 - t_1}$$



При будь-якому русі точки, крім рівномірного прямолінійного, її швидкість змінюється.

Векторна величина $\vec{a}$, що дорівнює першій похідній швидкості $\vec{v}$ точки за часом t називається **прискоренням** цієї точки.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

Відповідно

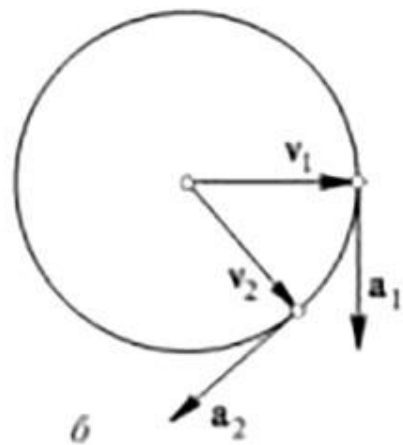
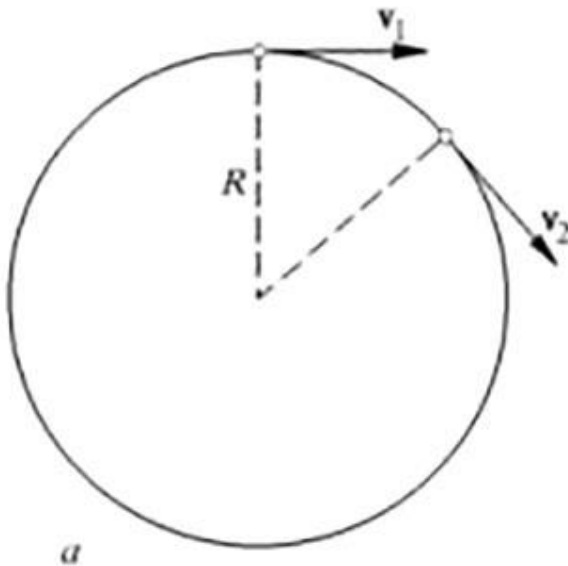
$$\Delta\vec{v} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{a}(t) dt$$

Знайдемо прискорення точки, яка рухається по колу радіуса R . Швидкість спрямована по дотичній до кола.

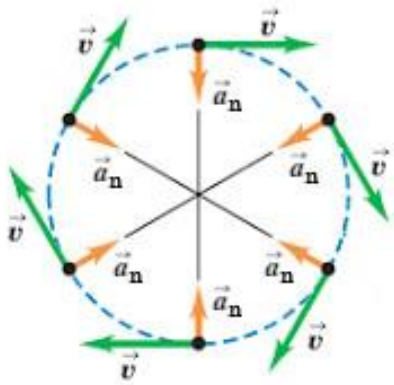
$$\vec{v} = v\vec{\tau}$$

де $\vec{\tau}$ – орт дотичної до траєкторії.

Модуль швидкості $v = \frac{2\pi R}{T}$, де T – період обертання.



Годограф швидкостей являє собою коло радіуса v . Кінець вектора $\vec{v}$ описує повне коло за той же час T . Прискорення спрямовано по дотичній до годографа і, як видно з малюнка весь час спрямовано до центру траєкторії точки.



За аналогією з формулою для швидкості можна записати

$$a = \frac{2\pi v}{T} = \frac{v^2}{R}$$

У векторній формі

$$\vec{a} = \frac{v^2}{R} \vec{n}$$

де $\vec{n}$ – одиничний вектор нормалі до траєкторії руху точки, спрямований до центру кривизни траєкторії.

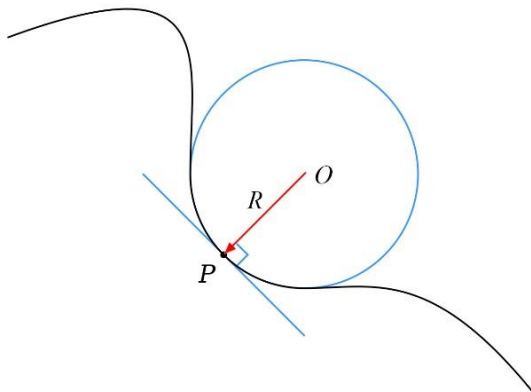
Оскільки швидкість змінюється лише за напрямком, то

$$\vec{a} = \frac{d(v\vec{\tau})}{dt} = v \frac{d\vec{\tau}}{dt}$$

З двох попередніх рівнянь видно, що

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{v}{R} \vec{n}$$

Бачимо, що похідна вектора сталої довжини спрямована перпендикулярно до вектора.



Якщо частинка рухається по криволінійній траєкторії, то в будь-якій її точці можна побудувати так зване стичне коло. Центр стичного кола називають центром кривизни, а радіус – радіусом кривизни R кривої в даній точці. В кожній точці такої траєкторії швидкість може змінюватись як за величиною, так і за напрямком. Відповідно прискорення частки складається з двох складових:

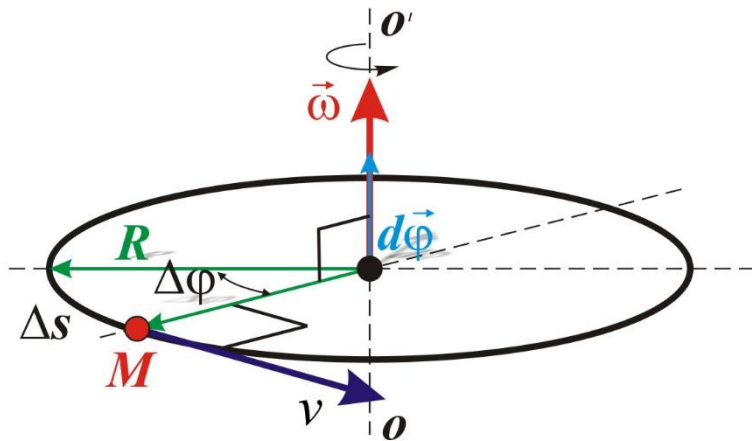
$$\vec{a} = \frac{d(v\vec{\tau})}{dt} = \frac{dv}{dt} \vec{\tau} + v \frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{dv}{dt} \vec{\tau} + \frac{v^2}{R} \vec{n} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$$

де $\vec{a}_\tau$ – тангенціальне прискорення, спрямоване по дотичній до траєкторії, а $\vec{a}_n$ – нормальне прискорення, спрямоване до центру кривизни траєкторії.

Тангенціальне прискорення змінює швидкість тільки за модулем, а нормальне – тільки за напрямком.

Модуль повного прискорення: $a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$

Рух матеріальної точки по колу



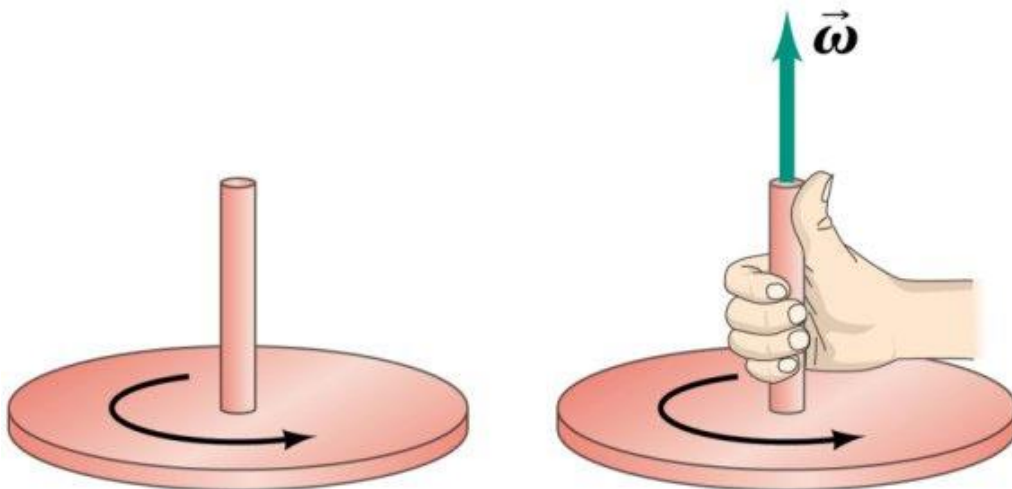
При обертанні частки навколо деякої осі зручніше характеризувати її переміщення за допомогою кута повороту $d\varphi$ радіус-вектора цієї точки $\vec{R}$. Кут повороту $d\varphi$ можна задати, наприклад, у вигляді відрізка, довжина якого дорівнює $d\varphi$, а напрямок

збігається з віссю. Для визначеності звичайно домовляються зв'язувати напрямок обертання і напрямок цього відрізка правилом **правого гвинта**, тобто напрямок відрізка має бути таким, щоб дивлячись вздовж нього ми бачили обертання правого гвинта за годинниковою стрілкою.

Таким чином, повороту радіус-вектора точки можна приписати чисельне значення і напрямок. Такі вектори, напрямок яких зв'язаний з напрямком обертання називаються **аксіальними або псевдовекторами**.

Кутовою швидкістю називається векторна величина, яка дорівнює першій похідній від кута повороту за часом:

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$$



Вектор $\vec{\omega}$ має той же напрямок, що і вектор $\Delta\vec{\varphi}$, тобто є аксіальним вектором. Якщо обертання відбувається з незмінною кутовою швидкістю, воно називається **рівномірним**.

Розмірність кутової швидкості:

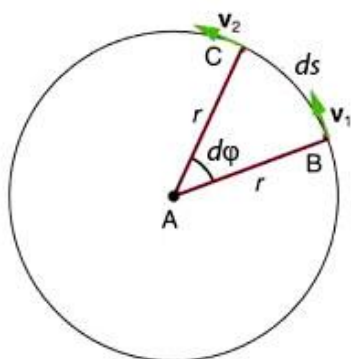
$$[\omega] = \frac{\text{рад}}{c} = \frac{1}{c} = c^{-1}$$

Рівномірне обертання крім кутової швидкості $\vec{\omega}$ характеризують також періодом обертання T . **Період обертання** це час, за який тіло робить повний оберт, тобто повертається на кут 2π (360°). Відповідно:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

звідки

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

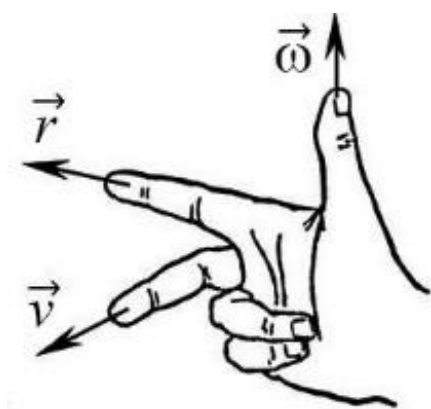


Число обертів за одиницю часу ν , або частота обертання (величина, що найчастіше застосовується як характеристика обертального руху у техніці), очевидно, дорівнює:

$$\nu = 1/T = \omega/2\pi$$

Розмірність частоти обертання:

$$[\nu] = \frac{\text{об}}{c} = \frac{1}{c} = c^{-1}$$



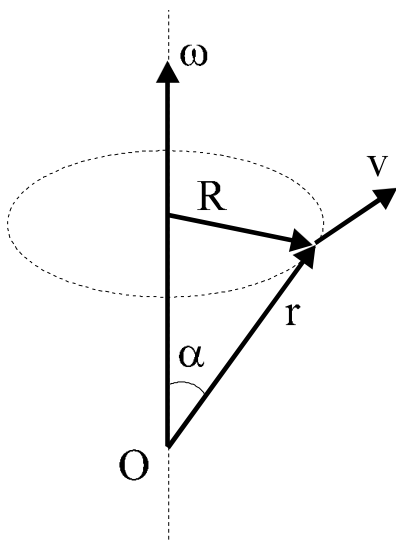
Кутова швидкість $\vec{\omega}$ зв'язана з лінійною швидкістю $\vec{v}$. За час dt точка проходить вздовж дуги кола шлях $ds = vdt$. При цьому радіус-вектор повертається на кут $d\varphi$. Оскільки $ds = R d\varphi$, то $vdt = R d\varphi$, звідки

$$v = R \frac{d\varphi}{dt} = R\omega$$

У векторній формі: $\vec{v} = [\vec{\omega} \times \vec{r}]$

Модуль векторного добутку:

$$v = \omega \cdot r \cdot \sin \alpha = R\omega$$



Кутовим прискоренням називається векторна величина, яка дорівнює першій похідній від кутової швидкості за часом:

$$\vec{\beta} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

Розмірність кутового прискорення:

$$[\beta] = \frac{rad}{c^2} = \frac{1}{c^2} = c^{-2}$$

Лінійне прискорення частки зв'язане з кутовими величинами.

Нормальне прискорення:

$$a_n = \frac{v^2}{R},$$

$$\text{або } a_n = \omega^2 R, .$$

$$\text{або } a_n = v\omega$$

У векторному вигляді:

$$\vec{a}_n = -\omega^2 \vec{R},$$

де $\vec{R}$ — перпендикулярний до осі обертання вектор, проведений в дану точку тіла.

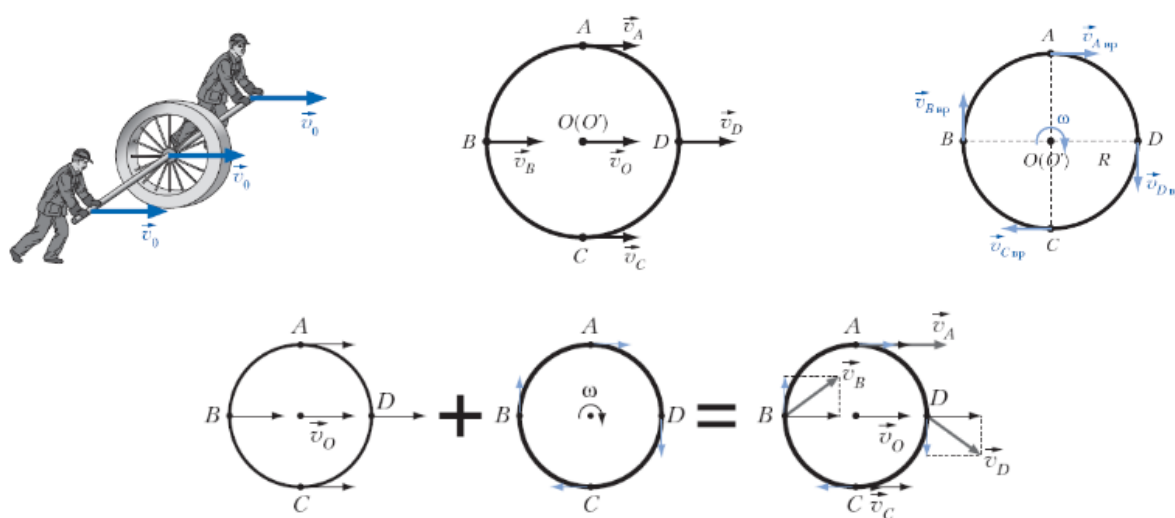
Тангенціальне прискорення:

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(\omega R) = R \frac{d\omega}{dt} = R\beta$$

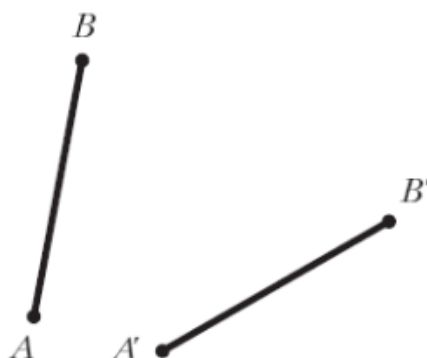
Плоский рух твердого тіла

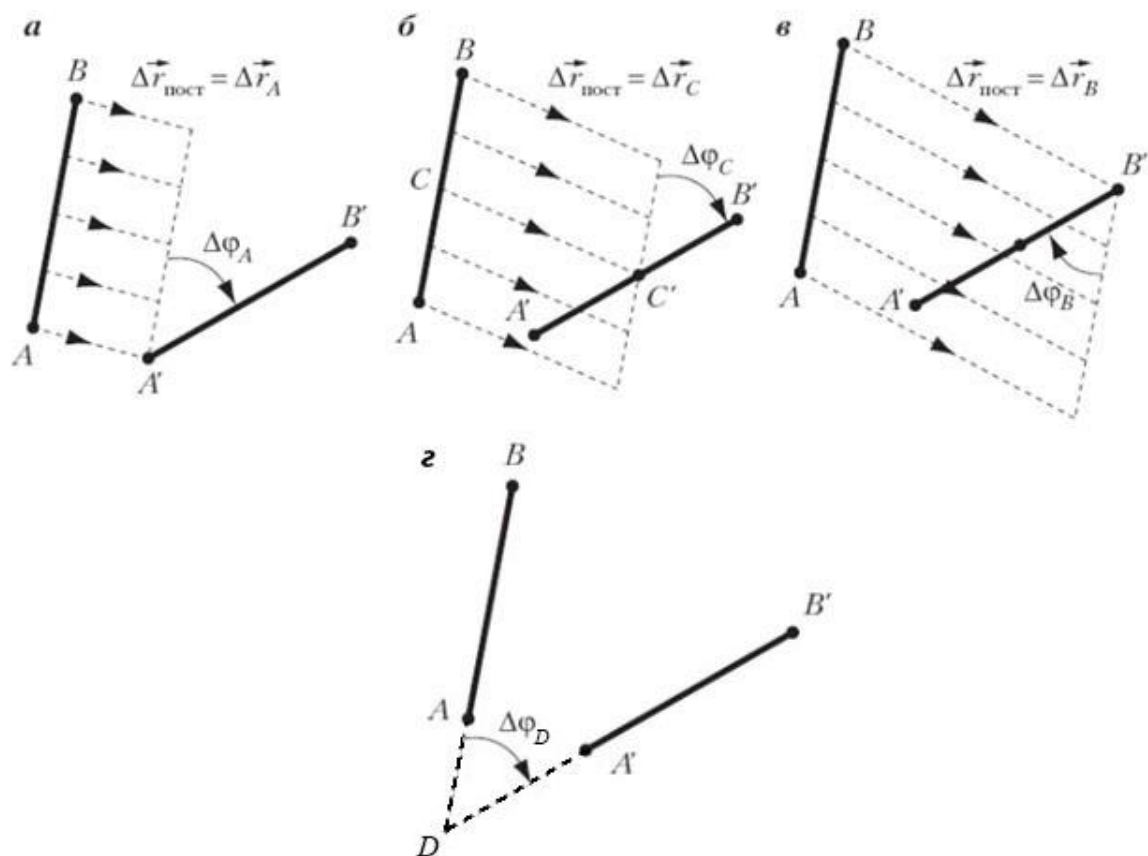
Будь-який рух твердого тіла завжди можна представити як суму поступального, та обертального рухів. Для опису поступального руху досить описати рух однієї точки тіла (наприклад центру його інерції). Для опису обертального руху необхідно задати миттєві осі та миттєві кутові швидкості в кожний момент часу.

При **плоскому русі** всі точки тіла рухаються в паралельних площинах

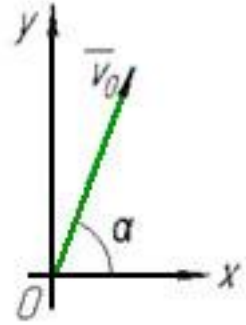


При будь-якому розкладі плоского руху тіла на поступальний та обертальний, поворот тіла за проміжок часу Δt буде відбуватися на один і той самий кут $\Delta\varphi$ (кути $\Delta\varphi_A$, $\Delta\varphi_B$ і $\Delta\varphi_C$ на рис.). Отже, кутова швидкість ω обертання твердого тіла буде однаковою. Швидкості поступального руху твердого тіла при різних розкладах його плоского руху будуть відрізнятися як за модулем, так і за напрямом. Плоский рух твердого тіла в кожний момент часу можна представити як чисто обертальний, який здійснюється навколо миттєвої осі обертання.





Приклад задачі з кінематики: Тіло кинуте зі швидкістю v_0 під кутом α до горизонту. Знайти координати (x, y) , швидкість $\vec{v}$, нормальне a_n , тангенціальне a_τ та повне $\vec{a}$ прискорення тіла через час t після початку руху. Знайти радіус R траєкторії тіла у цей момент часу.



$$v_x = v_0 \cos \alpha$$

$$v_y = v_0 \sin \alpha - gt$$

$$x = v_0 t \cos \alpha$$

$$y = v_0 t \sin \alpha - \frac{gt^2}{2}$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

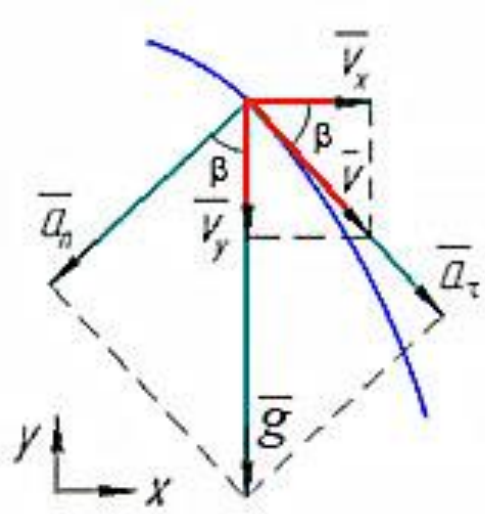
$$\operatorname{tg} \beta = \frac{v_y}{v_x} = \frac{a_\tau}{a_n}$$

$$a = g$$

$$a_\tau = g \sin \beta$$

$$a_n = g \cos \beta$$

$$R = \frac{v^2}{a_n}$$



ДИНАМІКА МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ ТА ПОСТУПАЛЬНОГО РУХУ ТВЕРДОГО ТІЛА

Якщо кінематика описує, як рухається об'єкт, то динаміка відповідає на запитання, чому він рухається саме так. Для програміста це означає перехід від простого «задання руху» до моделювання причин – сил, взаємодій і обмежень. І саме тут з'являється можливість створювати більш реалістичні та гнучкі системи. Наприклад, замість того щоб просто задати швидкість персонажа, ми можемо описати сили, які на нього діють: тяжіння, тертя та ін. В результаті поведінка стає природнішою і легше масштабується – змінюючи сили, ми автоматично змінюємо весь рух.

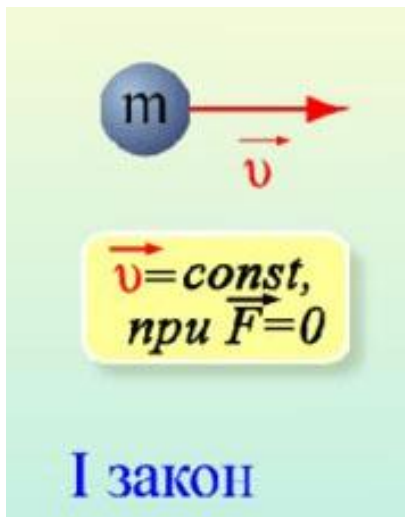
Динаміка особливо важлива у фізичних симуляціях. У сучасних іграх чи інженерних програмах об'єкти не просто рухаються за наперед заданими траєкторіями, а взаємодіють між собою: штовхаються, падають, ковзають, обертаються. Усе це базується на другому законі Ньютона – зв'язку між силою, масою і прискоренням. Для програміста це означає, що замість жорстко прописаної логіки можна будувати універсальні системи: додали силу – отримали новий ефект. Саме тому фізичні рушії дозволяють створювати складну поведінку на базі відносно простих правил.

Ще один важливий аспект – це контроль і передбачуваність. Коли система побудована на динаміці, її легше аналізувати і налагоджувати. Наприклад, якщо об'єкт рухається «дивно», можна подивитися, які сили на нього діють, чи правильно врахована маса, чи не занадто велике тертя. Це ближче до інженерного мислення, ніж до «підбору коефіцієнтів методом титру». Такий підхід особливо корисний у робототехніці, симуляціях або фізично коректній анімації.

Нарешті, динаміка формує інший стиль мислення. Вона вчить не просто задавати результат, а моделювати процес. Це важливо не лише у фізичних задачах: багато складних систем у програмуванні теж можна описати через «сили» і взаємодії. Тому розуміння динаміки розширює інструментарій програміста і дозволяє підходити до задач більш гнучко та системно.

Що ж таке динаміка? **Динаміка** – це розділ фізики, який вивчає взаємодію тіл та її вплив на їхній механічний рух.

В основі класичної динаміки лежать три закони Ньютона які є узагальненням результатів спостережень і спеціально поставлених експериментів і не виводяться з якихось більш простих принципів.



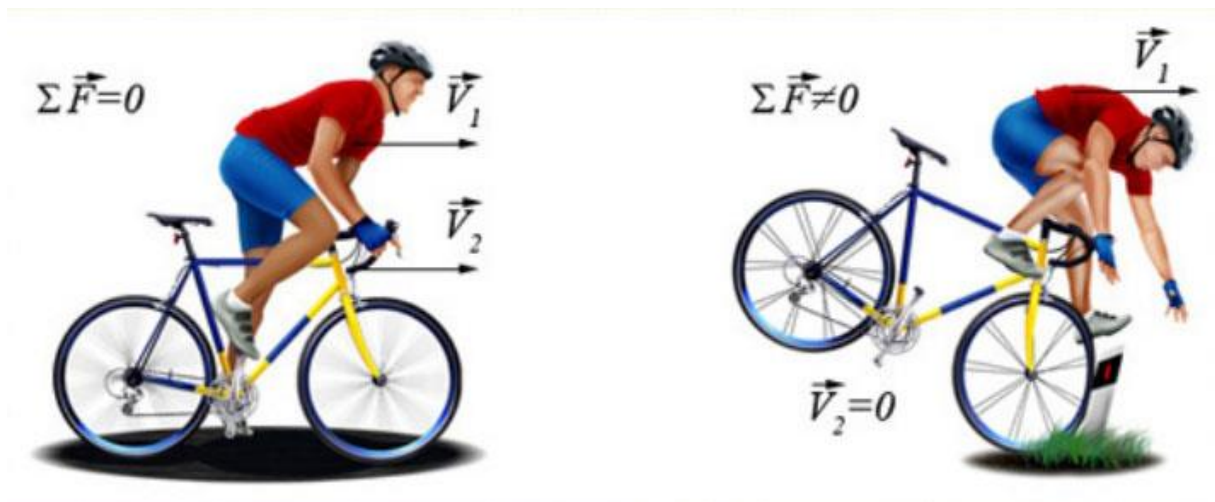
Перший закон Ньютона – будь-яке тіло знаходиться у стані спокою, або рівномірного прямолінійного руху доти, доки інші тіла не змусять його змінити цей стан.

Перший закон Ньютона називають також **законом інерції**.

Інерція це явище збереження швидкості руху тіла за відсутності дії на нього інших тіл.

Інертність – це властивість тіла змінювати стан свого руху внаслідок дії невідновленої сили поступово, а не миттєво.

Механічний рух є відносним, і його характер залежить від системи відліку. Ті системи, в яких виконується перший закон Ньютона, називаються **інерціальними системами відліку**.



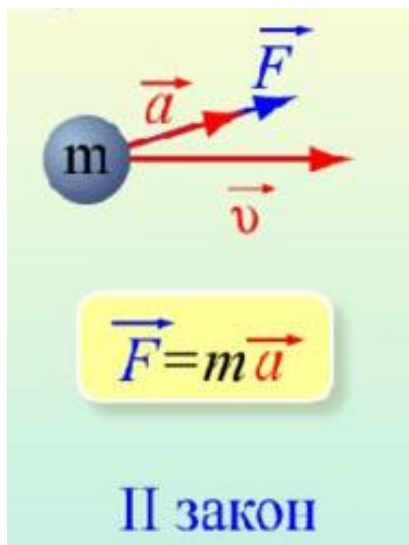
Інерціальною системою відліку є така система, яка або знаходиться у стані спокою, або рухається прямолінійно та рівномірно відносно іншої інерціальної системи відліку. *Перший закон Ньютона постулює існування інерціальних систем відліку.*

При однакових впливах різні тіла неоднаково змінюють швидкість руху, тобто отримують різні прискорення. Прискорення залежить не тільки від величини впливу, але і від властивостей самого тіла (його *маси*).

Маса тіла – фізична величина, яка визначає інертні (**інертна маса**) і гравітаційні (**гравітаційна маса**) властивості речовини. Зараз можна вважати доведеним, що інертна та гравітаційна маса дорівнюють одна одній з точністю не менше ніж 10^{-12} їх значення.

Сила – векторна величина, яка є мірою механічного впливу на тіло з боку інших тіл або полів, в результаті якого тіло набуває прискорення або змінює свою форму та розміри.

Другий закон Ньютона



Другий закон Ньютона – основний закон динаміки поступального руху – показує, як змінюється механічний рух матеріальної точки (тіла) під дією прикладених до неї сил.

Прискорення, якого набуває тіло, завжди прямо пропорційне рівнодійній прикладених сил та обернено пропорційне до маси тіла.

Оскільки сила та прискорення є векторними величинами, можна записати

$$\vec{a} = k \frac{\vec{F}}{m}$$

Це співвідношення виражає **другий закон Ньютона** – прискорення, якого набуває матеріальна точка (тіло), пропорційне силі, що його обумовлює, співпадає з нею за напрямом та обернено пропорційне масі матеріальної точки (тіла).

В СІ коефіцієнт $k = 1$. Тоді

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}, \text{ або } \vec{F} = m\vec{a}$$

Оскільки маса матеріальної точки (тіла) в класичній механіці є величиною сталою, можна записати:

$$\vec{F} = m\vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Векторна величина, яка чисельно дорівнює добутку маси матеріальної точки (тіла) на її швидкість і має напрям швидкості, називається **імпульсом (кількістю руху)** цієї матеріальної точки (тіла).

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

Вираз $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ відповідає більш загальному формулюванню другого закону Ньютона: швидкість зміни імпульсу матеріальної точки (тіла) дорівнює силі, що діє на неї.

Цей вираз називається **рівнянням руху матеріальної точки**.

Другий закон Ньютона можна також записати у виді:

$$d\vec{p} = \vec{F}dt$$

Величина $\vec{F}dt$ називається імпульсом сили за час dt . Таким чином другий закон Ньютона можна сформулювати й так: *приріст імпульсу тіла за певний проміжок часу дорівнює імпульсу сили, що діє на тіло протягом цього часу*.

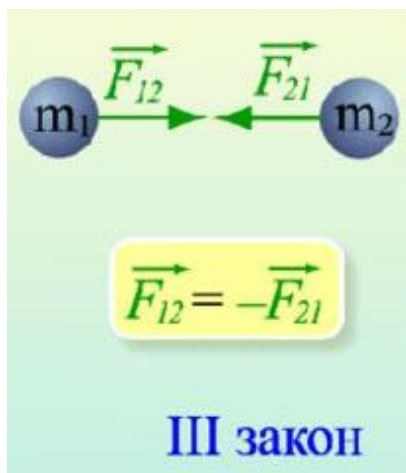
$$\Delta \vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt$$

Одиниця сили в СІ – ньютон (Н): 1 Н – сила, яка масі в 1 кг надає прискорення 1 м/с^2 в напрямку дії сили:

$$1 \text{ Н} = 1 \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2}$$

Другий закон Ньютона справедливий лише в *інерціальних* системах відліку.

Якщо на матеріальну точку діють одночасно декілька сил, то відповідно до принципу суперпозиції (принципу незалежності дії сил), під $\vec{F}$ в другому законі Ньютона розуміють результуючу (рівнодійну) силу.

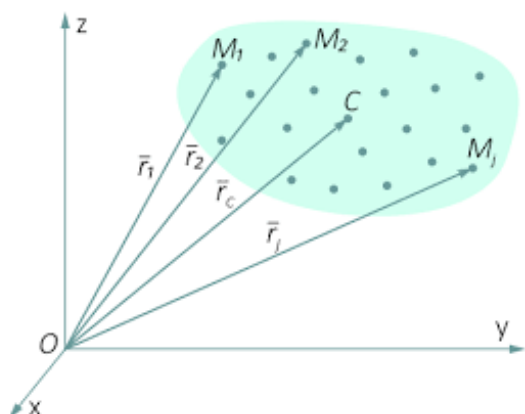


Третій закон Ньютона – будь-яка дія матеріальних точок (тіл) одна на одну носить характер взаємодії. Сили, з якими діють одна на одну матеріальні точки (тіла), завжди рівні за модулем, протилежні за напрямком і діють вздовж прямої, яка з'єднує ці точки.

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

де $\vec{F}_{12}$ – сила, яка діє на першу матеріальну точку (тіло) з боку другої; $\vec{F}_{21}$ – сила, яка діє на другу матеріальну точку (тіло) з боку першої. Ці сили прикладені до різних матеріальних точок (тіл), завжди діють парами і є силами однієї природи.

Закон збереження імпульсу. Центр мас



Сукупність матеріальних точок (тіл), які розглядаються як одне ціле, називається **механічною системою**.

Сили взаємодії між матеріальними точками механічної системи називаються **внутрішніми силами**.

Сили, з якими на матеріальні точки системи діють зовнішні тіла, називаються **зовнішніми силами**.

Механічна система тіл, на яку не діють зовнішні сили, називається **замкненою або ізольованою**.

Для механічної системи, яка складається із багатьох тіл, геометрична сума внутрішніх сил дорівнює нулю, оскільки за третім законом Ньютона, сили, які діють між цими тілами, будуть рівними за модулем і протилежні за напрямом.

Розглянемо ізольовану систему, що складається з n матеріальних тіл з масами $m_1, m_2, \dots, m_n$. Позначимо швидкості цих тіл відповідно $v_1, v_2, \dots, v_n$. Нехай $F_1^{внутр}, F_2^{внутр}, \dots, F_n^{внутр}$ – рівнодійні внутрішніх сил, які діють на кожне з цих тіл, а $F_1^{зовн}, F_2^{зовн}, \dots, F_n^{зовн}$ – рівнодійні зовнішніх сил. На підставі другого закону Ньютона запишемо рівняння для кожного з тіл системи:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d}{dt}(m_1 \vec{v}_1) &= \vec{F}_1^{\text{внутр}} + \vec{F}_1^{\text{зовн}} \\ \frac{d}{dt}(m_2 \vec{v}_2) &= \vec{F}_2^{\text{внутр}} + \vec{F}_2^{\text{зовн}} \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{d}{dt}(m_n \vec{v}_n) &= \vec{F}_n^{\text{внутр}} + \vec{F}_n^{\text{зовн}} \end{aligned} \right.$$

Додаючи почленно ці рівняння отримаємо:

$$\frac{d(m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + \dots + m_n\vec{v}_n)}{dt} = \vec{F}_1^{\text{внутр}} + \vec{F}_1^{\text{зовн}} + \vec{F}_2^{\text{внутр}} + \vec{F}_2^{\text{зовн}} + \dots + \vec{F}_n^{\text{внутр}} + \vec{F}_n^{\text{зовн}}$$

Оскільки геометрична сума внутрішніх сил механічної системи за третім законом Ньютона дорівнює нулю, то

$$\frac{d(m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 + \dots + m_n \vec{v}_n)}{dt} = \vec{F}_1^{\text{зовн}} + \vec{F}_2^{\text{зовн}} + \dots + \vec{F}_n^{\text{зовн}}$$

або

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^{\text{зовн}}$$

де $\vec{p} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i$ – імпульс системи.

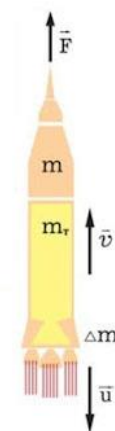
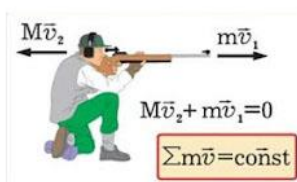
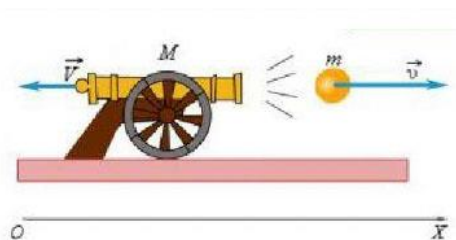
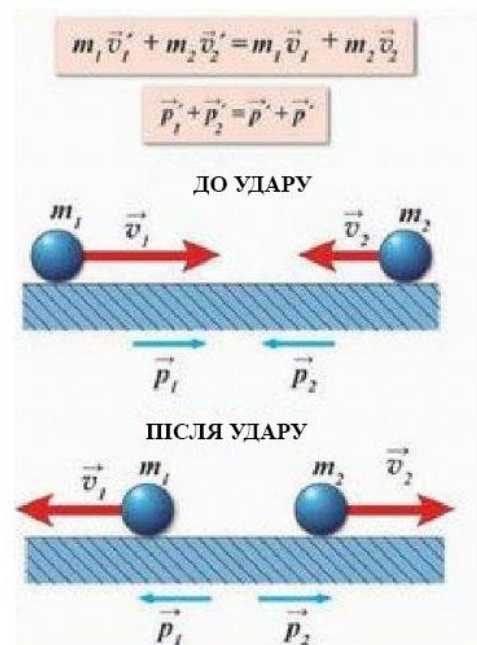
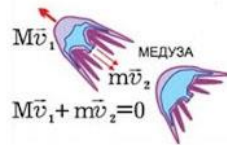
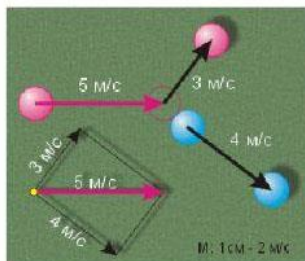
Таким чином похідна за часом від імпульсу механічної системи дорівнює геометричній сумі зовнішніх сил, що діють на систему.

У відсутності зовнішніх сил (замкнена система)

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = 0, \text{ тобто } \vec{p} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i = \text{const}$$

Закон збереження імпульсу – імпульс замкненої системи зберігається, тобто не змінюється протягом часу.

Закон збереження імпульсу справедливий не лише в класичній фізиці. Це фундаментальний закон природи.



Внаслідок того, що в класичній механіці маса не залежить від швидкості, імпульс системи можна виразити через швидкість її центру мас.

Центром інерції, або **центром мас** системи матеріальних точок називається уявна точка C , положення якої характеризує розподіл маси цієї системи. Її радіус-вектор визначається таким чином:

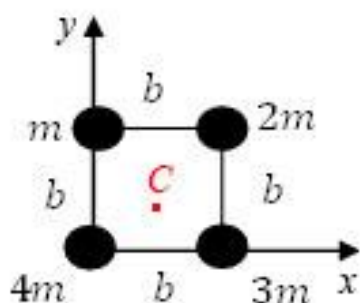
$$\vec{r}_C = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + \dots + m_n \vec{r}_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{m}$$

де m_i та r_i – відповідно маса і радіус-вектор i -ї матеріальної точки, n – кількість матеріальних точок в системі, $m = \sum m_i$ – загальна маса всієї системи.

Відповідно декартові координати центра мас:

$$x_C = \frac{\sum m_i x_i}{m}, \quad y_C = \frac{\sum m_i y_i}{m}, \quad z_C = \frac{\sum m_i z_i}{m}$$

Приклад: знайти центр мас системи, зображеної на рисунку.



$$x_C = \frac{3mb + 2mb}{m + 2m + 3m + 4m} = \frac{5mb}{10m} = 0,5b$$

$$y_C = \frac{mb + 2mb}{10m} = \frac{3mb}{10m} = 0,3b$$

Швидкість центра мас

$$\vec{v}_C = \frac{d\vec{r}_C}{dt}$$

Таким чином

$$\vec{p} = \frac{d}{dt} \sum m_i \vec{r}_i = m \frac{d\vec{r}_C}{dt} = m \vec{v}_C$$

тобто імпульс системи часток може бути представлений, як добуток маси системи на швидкість центра мас системи.

Якщо на систему діють зовнішні сили, то

$$m \frac{d\vec{v}_c}{dt} = \vec{F}^{\text{зовн}}$$

тобто центр мас системи рухається, як матеріальна точка, в якій зосереджена вся маса системи і на яку діє сила, що дорівнює геометричній сумі всіх зовнішніх сил, прикладених до системи. Цей вираз є **законом руху центра мас**.

Із закону збереження імпульсу випливає, що *центр мас замкненої системи або рухається рівномірно і прямолінійно, або залишається нерухомим*.

Рух тіла змінної маси

Досі ми припускали, що маса тіла під час руху залишається незмінною. Але це не завжди так. Наприклад, під час руху ракети, з сопла двигуна викидаються продукти згорання палива і відповідно маса ракети зменшується.

Виведемо рівняння руху тіла змінної маси на прикладі руху ракети.

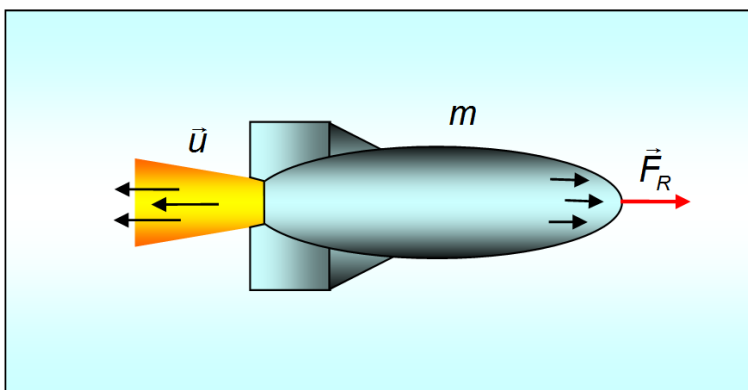
Якщо в момент часу t маса ракети m , а її швидкість $\vec{v}$, то через проміжок часу dt її маса зменшиться на dm , а швидкість збільшиться на $d\vec{v}$. Відповідно зміна імпульсу системи за проміжок часу dt :

$$d\vec{p} = [(m - dm)(\vec{v} + d\vec{v}) + dm(\vec{v} + \vec{u})] - m\vec{v}$$

де $\vec{u}$ – швидкість витоку газів відносно ракети.

Знехтувавши добуток $dm d\vec{v}$ отримуємо:

$$d\vec{p} = m d\vec{v} + \vec{u} dm$$



Якщо на систему діють зовнішні сили, то $d\vec{p} = \vec{F} dt$, тому

$$\vec{F} dt = m d\vec{v} + \vec{u} dm$$

або

$$\frac{m d\vec{v}}{dt} = \vec{F} - \frac{\vec{u} dm}{dt}$$

Доданок $\vec{F}_R = \vec{u} \frac{dm}{dt}$ це **реактивна сила** – додаткова сила, зумовлена змінністю маси тіла.

Якщо напрям $\vec{u}$ протилежний $\vec{v}$, то ракета прискорюється, а якщо співпадає з $\vec{v}$, то гальмує.

Таким чином, рівняння руху **тіла змінної маси**, або рівняння Мещерського:

$$m\vec{a} = \vec{F}^{зовн} + \vec{F}_R$$

Якщо на ракету не діють зовнішні сили і швидкість витоку газів відносно ракети незмінна (ракета рухається прямолінійно)

$$\frac{mdv}{dt} = -\frac{udm}{dt}$$

звідки

$$v = -u \int \frac{dm}{m} = -u \ln m + C$$

Значення сталої інтегрування визначимо з початкових умов. Якщо в початковий момент часу швидкість ракети дорівнювала нулю, а її стартова маса m_0 , то $C = -u \ln m_0$. Отже

$$v = -u \ln \frac{m}{m_0}$$

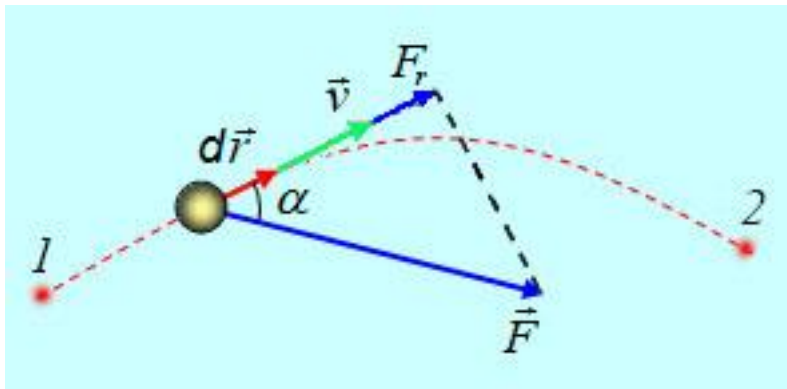
Цей вираз називається **формулою Ціолковського**. Вона показує, що:

- 1) чим більше кінцева маса ракети m , тим більше має бути стартова маса ракети m_0 ;
- 2) чим більше швидкість витоку газів u , тим більшою може бути кінцева маса при даній стартовій масі ракети.

ЕНЕРГІЯ, РОБОТА, ПОТУЖНІСТЬ

Для того, щоб кількісно характеризувати різні форми руху матерії та взаємодії, що цим формам руху відповідають, вводиться скалярна величина, що називається **енергією**, тобто **енергія** – універсальна міра різних форм руху та взаємодії.

Оскільки рух – невід'ємна властивість матерії, будь яке тіло, або система тіл і полів мають енергію. Енергія системи показує які види перетворень руху можливі внаслідок взаємодії частин системи між собою та взаємодії системи з зовнішнім середовищем. Для різних форм руху, та відповідних взаємодій вводяться різні види (форми) енергії – механічна, теплова (внутрішня), електромагнітна, ядерна і т.ін.



Зміна механічного руху тіла викликається силами, які діють на нього з боку інших тіл. Мірою такої дії є відповідні сили. Тобто, під впливом прикладених сил відбувається зміна механічної енергії тіла.

Для того, щоб кількісно охарактеризувати процес обміну енергією між тілами, що взаємодіють, в механіці вводиться поняття **роботи сили**.

Сила може змінюватись як за модулем, так і за напрямом. Для елементарного переміщення $d\vec{r}$, силу $\vec{F}$ можна вважати постійною, а рух точки її прикладання – прямолінійним.



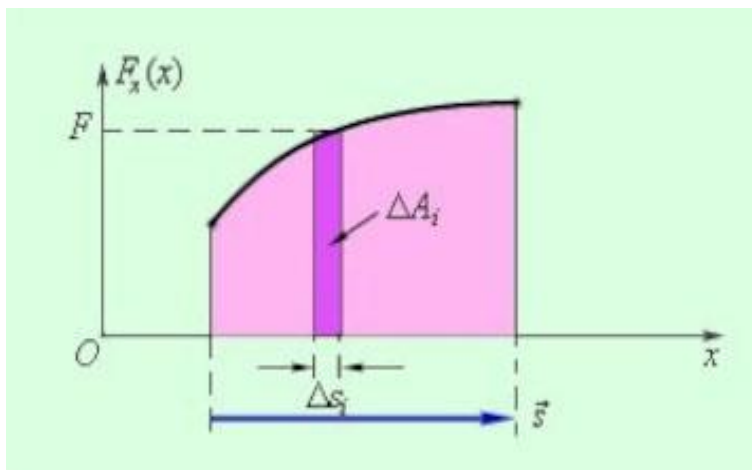
Елементарною роботою dA сили $\vec{F}$ на переміщенні $d\vec{r}$ називається *скалярний добуток* $\vec{F}$ на $d\vec{r}$

$$dA = \vec{F} d\vec{r} = F dr \cos \alpha = F_r dr,$$

де α – кут між векторами $\vec{F}$ і $d\vec{r}$; $dr = |d\vec{r}|$ – модуль елементарного переміщення; F_r – проекція вектора $\vec{F}$ на вектор $d\vec{r}$.

Робота сили на ділянці траєкторії від точки 1 до точки 2 дорівнює алгебраїчній сумі елементарних робіт на окремих нескінченно малих ділянках шляху.

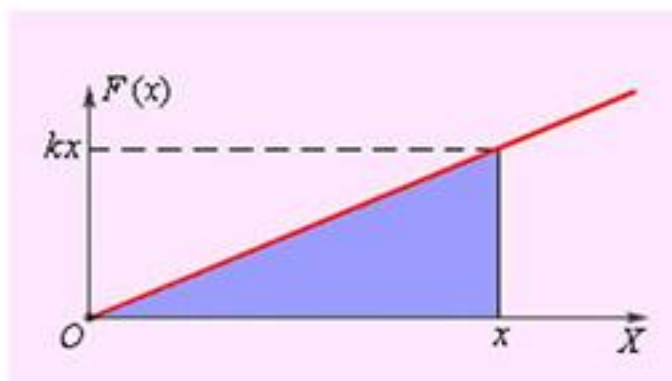
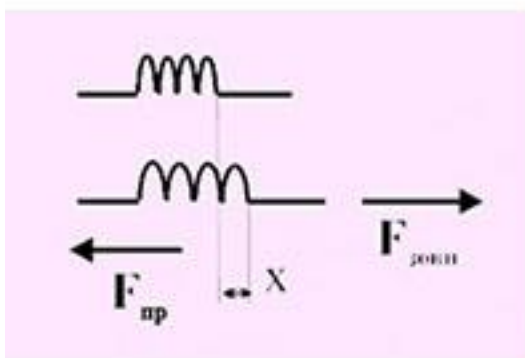
$$A = \int_1^2 F_r dr$$



Якщо залежність сили F_s від шляху s вздовж траєкторії 1—2 представлена графічно, тоді робота A визначається площею зафарбованої фігури.

Робота – величина скалярна. Одиниця роботи – **джоуль (Дж)**: 1 Дж – робота, що здійснюється силою в 1 Н на шляху в 1 м (1 Дж = 1 Н·м).

Приклад: Робота пружної сили.



Знайдемо роботу, яку виконує зовнішня сила $F_{зовн}$ під час деформації, що описується законом Гука (наприклад пружини):

$$F_{np} = -kx,$$

де x – видовження пружини.

Розтягувати пружину будемо повільно, щоб $F_{зовн}$ весь час дорівнювала F_{np} . Робота сили пружності при цьому буде від'ємною, а зовнішньої сили – додатною.

$$A_{зовн} = \int_0^x kx dx = \frac{kx^2}{2}$$

Потужність

Потужністю називається робота, яка виконується за одиницю часу. Потужність характеризує швидкість виконання роботи.

Середня потужність дорівнює відношенню роботи до часу, за який вона виконана:

$$N = \frac{A}{t}$$

Миттєва потужність дорівнює добутку вектора сили на вектор швидкості, з якою рухається точка прикладання цієї сили:

$$N = \frac{dA}{dt} = \frac{\vec{F}d\vec{r}}{dt} = \vec{F}\vec{v}$$

Потужність – величина скалярна. Одиниця потужності – ватт ($Вт$): $1 Вт$ – потужність, при якій за час $1 с$ здійснюється робота в $1 Дж$ ($1 Вт = 1 Дж/с$).

Позасистемна одиниця потужності «кінська сила» дорівнює приблизно $736 Вт$.

Кінетична енергія

В механіці розрізняють два види енергії: кінетичну та потенціальну.

Кінетична енергія механічної системи це енергія *механічного руху* цієї системи.

Сила $\vec{F}$, яка діє на нерухоме тіло і викликає його рух, здійснює роботу, а енергія тіла, що рухається, зростає на величину виконаної роботи. Таким чином, робота dA сили $\vec{F}$ на шляху, який тіло пройшло за час зростання швидкості від 0 до v , іде на збільшення кінетичної енергії dT тіла, тобто $dA = dT$.

$$dA = \vec{F} d\vec{r} = m \vec{a} d\vec{r} = m \frac{d\vec{v}}{dt} d\vec{r} = m \frac{d\vec{r}}{dt} d\vec{v} = m \vec{v} d\vec{v} = dT$$

$$T = \int_0^v m \vec{v} d\vec{v} = \frac{mv^2}{2}$$

Ця величина і є кінетична енергія.

Для двох довільних значень швидкості:

$$A_{12} = \int_1^2 d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = \Delta T = T_2 - T_1$$

Таким чином, робота результуючої всіх сил, що діють на тіло йде на приріст кінетичної енергії тіла. Якщо $\Delta T < 0$, то тіло виконує роботу над зовнішніми тілами за рахунок своєї кінетичної енергії.

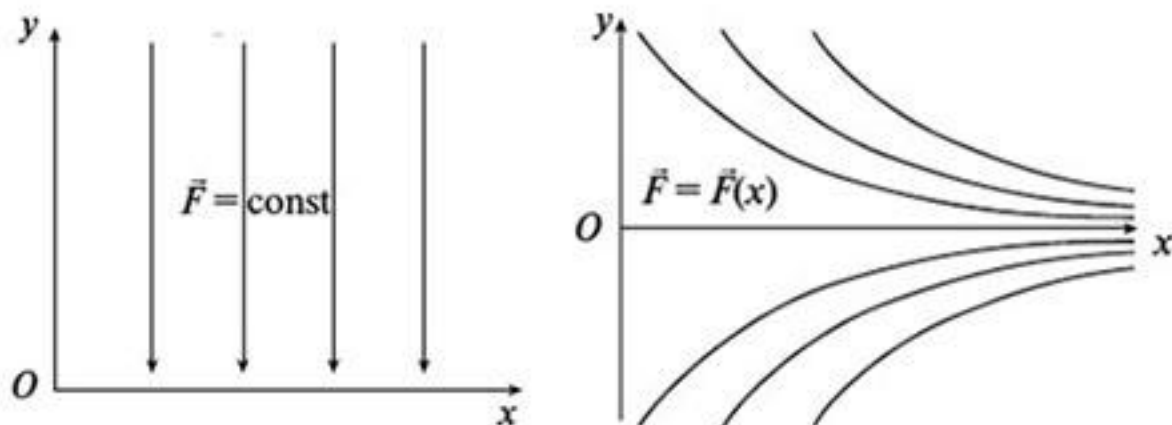
Кінетична енергія залежить від вибору системи відліку. У фізичних експериментах завжди визначається різниця енергій, тобто енергію можна визначити з точністю до певної сталої величини (константи).

Очевидно, що енергія вимірюється в тих самих одиницях, що й робота, тобто в СІ – у джоулях.

Потенціальна енергія

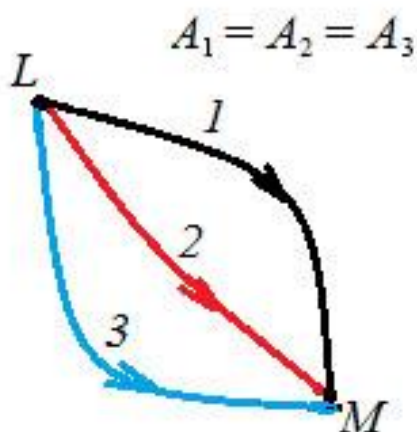
Потенціальна енергія – механічна енергія системи тіл, яка визначається їх взаємним розташуванням та характером сил взаємодії між ними.

Якщо на частку в кожній точці простору діє певна сила, то всю цю сукупність сил називають **силовим полем**.



Якщо робота сил поля при переміщенні тіл з одного положення в інше не залежить від виду шляху, по якому відбувається переміщення, а визначається тільки положенням початкової і кінцевої точок переносу, то такі сили називаються **консервативними**, або **потенціальними**, а поле **потенціальним**.

Якщо робота сили залежить від траєкторії переміщення тіла із одного положення в друге, то така сила називається **дисипативною** (сила тертя).



Тіло, що знаходиться в потенціальному полі сил, має потенціальну енергію Π . Робота консервативних сил при елементарній (нескінченно малій) зміні конфігурації системи дорівнює приросту потенціальної енергії, взятому зі знаком мінус, оскільки робота здійснюється за рахунок зменшення потенціальної енергії.

$$dA = -d\Pi$$

Робота при переміщенні точки з положення 1 у 2 дорівнює:

$$A_{12} = \Pi_1 - \Pi_2,$$

де Π_1 і Π_2 - значення потенціальної енергії в положеннях 1 і 2. Тобто робота консервативних сил дорівнює зменшенню потенціальної енергії тіла.

При переміщенні тіла в потенціальному полі під дією сил цього поля роботу можна звичайним чином зв'язати зі зміною кінетичної енергії і одержати рівність:

$$T_2 - T_1 = \Pi_1 - \Pi_2, \text{ або } T_2 + \Pi_2 = T_1 + \Pi_1$$

Цей результат означає, що величина $E = T + \Pi$ для тіла, що знаходиться у потенціальному полі є величиною незмінною. Ця величина називається **повною механічною енергією** тіла, а отримане співвідношення – **законом збереження механічної енергії**.

Закон збереження механічної енергії справедливий для будь-якої замкненої системи в якій діють лише консервативні сили і разом із законом збереження імпульсу є одним із найважливіших законів механіки.

Потенціальна енергія, як і кінетична визначається з точністю до константи. Це зв'язано з довільністю вибору точки початку відліку.

Зв'язок між силою та потенціальною енергією

Знайдемо зв'язок між силою та потенціальною енергією. Робота сил поля при переміщенні матеріальної точки дорівнює $-d\Pi$, а з іншого боку $\vec{F}d\vec{r}$:

$$\vec{F}d\vec{r} = -d\Pi$$

Запишемо це співвідношення через компоненти:

$$F_x = -\frac{\partial \Pi}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial \Pi}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial \Pi}{\partial z}$$

Знак мінус означає, що сила спрямована в бік убування потенціальної енергії.

Відповідно, вектор сили:

$$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k} = -\left[\frac{\partial \Pi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \Pi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \Pi}{\partial z} \vec{k} \right] = -\overrightarrow{\text{grad}} \Pi = -\nabla \Pi$$

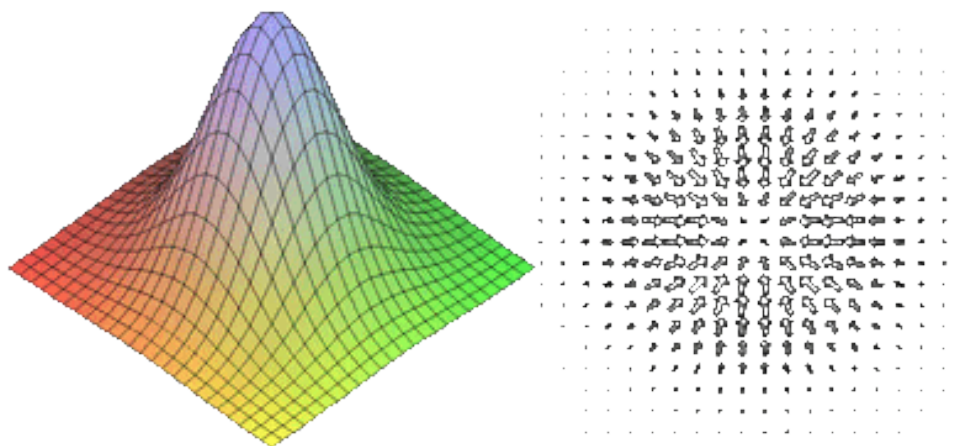
Тобто сила є градієнтом потенціальної енергії зі знаком мінус.

Оператор Гамільтона (для довідки)

Значок ∇ називається **оператором набла**. Він введений в ужиток Гамільтоном тому називається також оператором Гамільтона, або гамільтоніаном.

$$\nabla \equiv \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$$

Оператор це певний набір операцій. Для його застосування слід формально перемножити функцію на оператор.

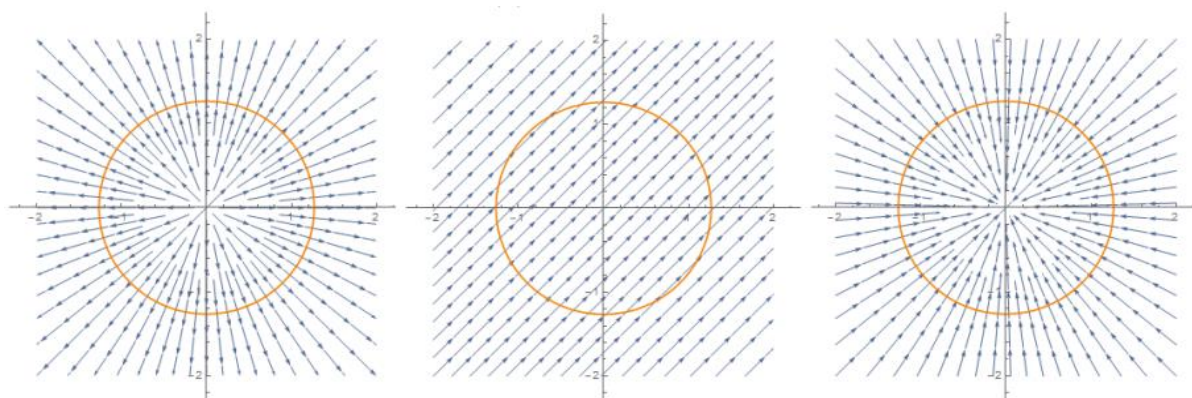


Якщо оператор Гамільтона помножити на скалярну функцію, одержуємо **градієнт**. Градієнт – це вектор, що визначає напрямок найбільш швидкої зміни (зростання) функції та швидкість цього зростання.

Якщо застосувати гамільтоніан до векторної функції перемноживши їх скалярно одержимо **дивергенцію**.

$$\nabla \cdot \vec{A} = \text{div} \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

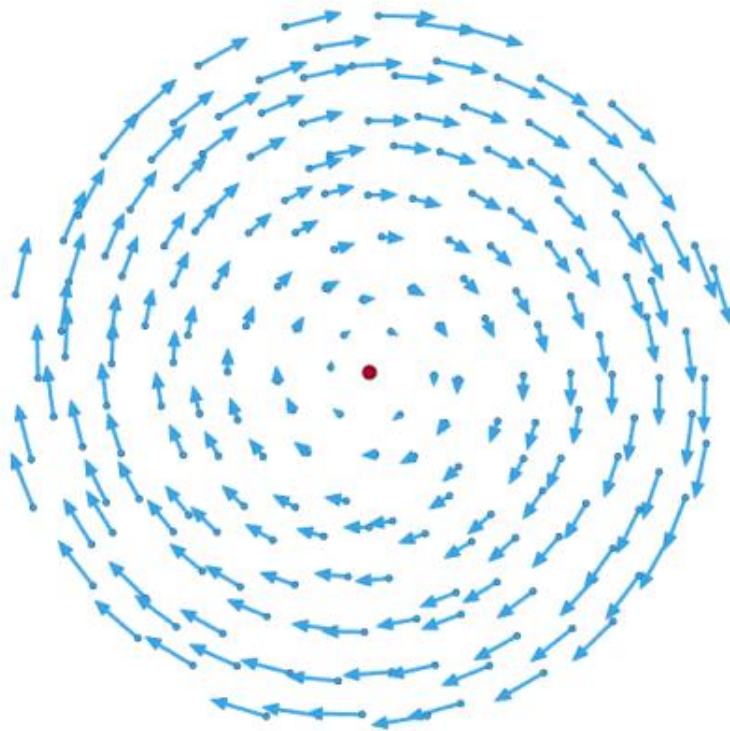
Дивергенція характеризує розбіжність векторного поля.



Якщо гамільтоніан векторно перемножити на векторну функцію, одержимо **ротор**.

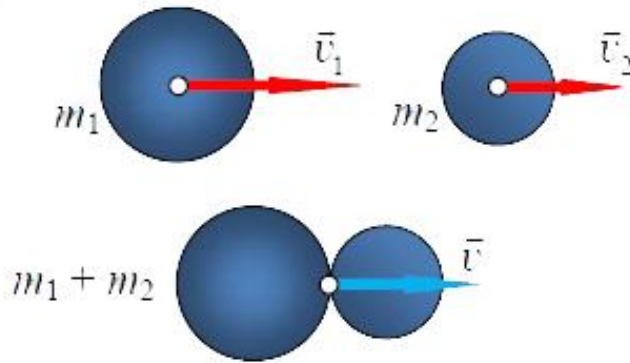
$$[\nabla \times \vec{A}] = \text{rot} \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

Ротор характеризує вихруватість векторного поля, показує можливість існування замкнених силових ліній



Види ударів

а) Абсолютно непружний удар двох тіл.



Якщо після удару обидва тіла мають однакову швидкість $\vec{v}$, то такий удар називається **абсолютно непружним**. При абсолютно непружному ударі виконується лише закон збереження імпульсу, а механічна енергія не зберігається, бо частково переходить у внутрішню

енергію тіл, які співударяються.

Визначимо швидкість і кінетичну енергію тіл після удару. Нехай до удару імпульс першої кулі: $\vec{p}_1 = m_1 \vec{v}_1$, а другої: $\vec{p}_2 = m_2 \vec{v}_2$.

Тоді після удару імпульс буде: $\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$. Напрямок польоту куль зміниться, але імпульс збережеться.

$$(m_1 + m_2) \vec{v} = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2$$

Отже, швидкість куль $\vec{v}$ після удару буде дорівнювати:

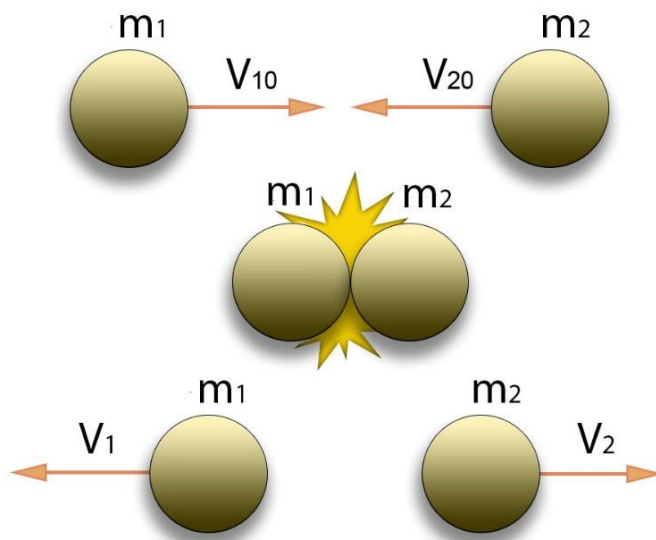
$$\vec{v} = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2}$$

Кінетична енергія куль після удару буде дорівнювати:

$$T = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v^2 = \frac{(m_1 v_1 + m_2 v_2)^2}{2(m_1 + m_2)}$$

б) Центральний абсолютно пружний удар двох куль.

Центральним ударом називається такий удар, при якому швидкості



куль, що співударяються, до удару збігаються по напрямку з лінією, що з'єднує центри куль.

Удар вважається абсолютно пружним, якщо немає переходу механічної енергії в інші види енергії, наприклад теплову, тобто виконується закон збереження повної механічної енергії.

На підставі закону збереження імпульсу і закону збереження енергії можна записати:

$$m_1 \vec{v}_{10} + m_2 \vec{v}_{20} = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2$$

$$\frac{1}{2}(m_1 \vec{v}_{10}^2 + m_2 \vec{v}_{20}^2) = \frac{1}{2}(m_1 \vec{v}_1^2 + m_2 \vec{v}_2^2)$$

де m_1 і m_2 - маси куль, $\vec{v}_{10}$ і $\vec{v}_{20}$ - їхні швидкості до удару, а $\vec{v}_1$ і $\vec{v}_2$ - після удару.

З цієї системи двох рівнянь знаходимо швидкості куль після удару:

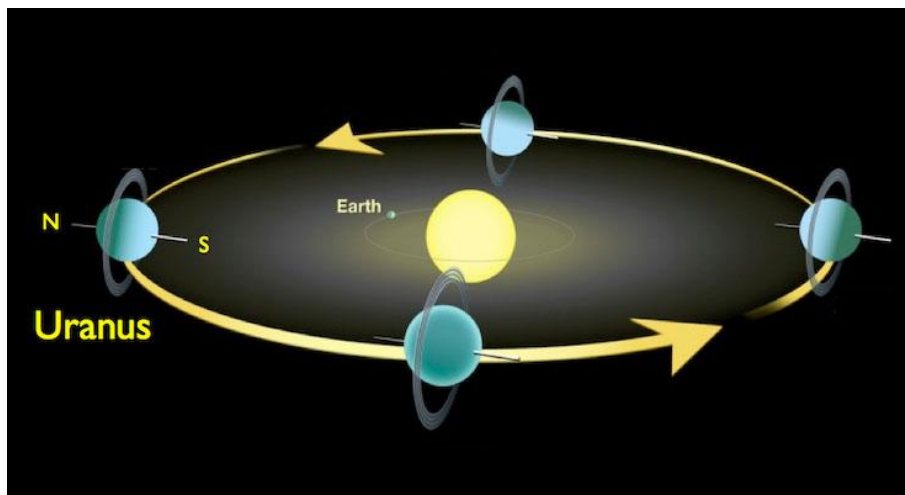
$$\vec{v}_1 = \frac{2m_2 \vec{v}_{20} - (m_2 - m_1) \vec{v}_{10}}{m_1 + m_2}$$

і

$$\vec{v}_2 = \frac{2m_1 \vec{v}_{10} - (m_1 - m_2) \vec{v}_{20}}{m_1 + m_2}$$

ДИНАМІКА ОБЕРТАЛЬНОГО РУХУ ТВЕРДОГО ТІЛА

Нагадаю, що при **обертальному русі** всі точки тіла рухаються по колах, центри яких лежать на одній і тій же прямій, що називається **віссю обертання**. (Ця пряма може як проходити через тіло, так знаходитись поза ним).



Момент сили

Розглянемо обертання тіла під дією зовнішніх сил. Оцінимо потужність джерела, що викликає обертання тіла:

$$N = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

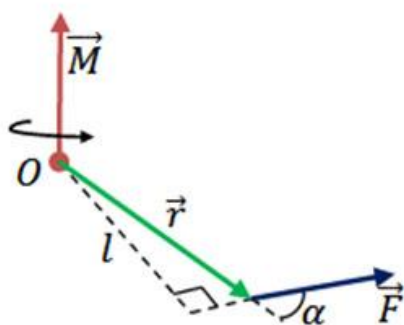
Але швидкість $\vec{v}$ різних точок тіла різна. Тому введемо параметри, однакові для всіх точок.

$$N = \vec{F} \cdot [\vec{\omega} \times \vec{r}]$$

Модуль змішаного добутку векторів дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на цих векторах. Тому припустима циклічна перестановка множників:

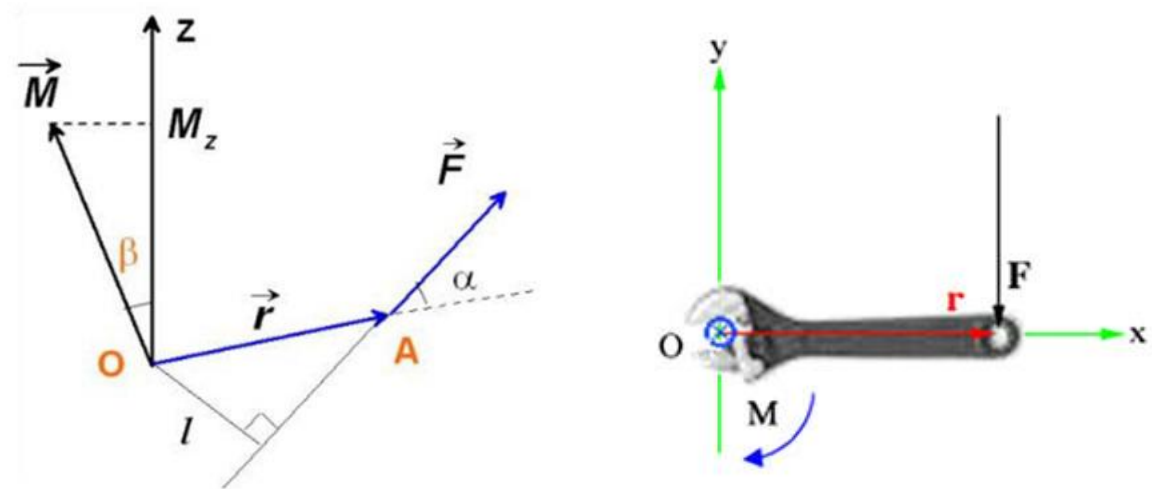
$$N = \vec{F} \cdot [\vec{\omega} \times \vec{r}] = [\vec{F} \times \vec{\omega}] \cdot \vec{r} = [\vec{r} \times \vec{F}] \cdot \vec{\omega} = \vec{M} \cdot \vec{\omega}$$

Величина $\vec{M} = [\vec{r} \times \vec{F}]$ називається *моментом сили* відносно деякої точки.

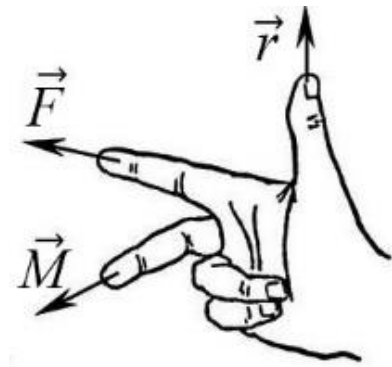


Моментом сили відносно нерухомої точки O називається векторний добуток радіус-вектора, який проведений з цієї точки в точку прикладання сили, на силу.

$$\vec{M} = [\vec{r} \times \vec{F}]$$



За величиною момент сили дорівнює добутку модуля сили на плече: $|\vec{M}| = F \cdot r \cdot \sin \alpha = F \cdot l$. **Плечем сили** називається відстань l від точки O до прямої, уздовж якої діє сила.



Спрямовано вектор $\vec{M}$ перпендикулярно до площини, у якій лежить сила і точка O , причому так, що обертання навколо точки O у напрямку сили і вектор $\vec{M}$ утворюють правогвинтову систему. З визначення випливає, що $\vec{M}$ є аксіальним вектором.

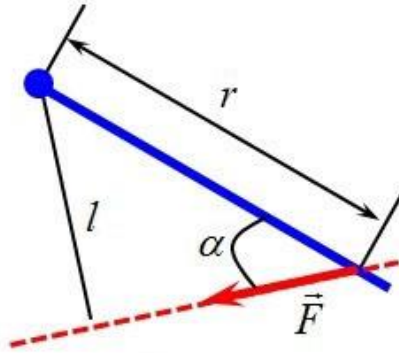
Якщо тіло може обертатися тільки навколо деякої фіксованої осі, здатність сили обертати тіло навколо цієї осі характеризується величиною, що називається **моментом сили відносно осі**.

Моментом сили відносно нерухомої осі OZ називається скалярна величина M_z , яка дорівнює проекції на цю вісь вектора моменту сили $\vec{M}$, визначеного відносно довільної точки O даної осі.

$$M_z = F_{\perp} l,$$

де $F_{\perp}$ – складова сили, перпендикулярна до осі OZ .

Значення моменту M_z не залежить від вибору точки O на осі OZ . Вектор моменту сили відносно осі спрямований вздовж цієї осі



Векторна сума моментів M_i всіх зовнішніх сил, які прикладені до тіла, називається **головним моментом зовнішніх сил, відносно точки O**.

$$\vec{M} = \sum_{i=1}^n \vec{M}_i = \sum_{i=0}^n [\vec{r}_i \times \vec{F}_i]$$

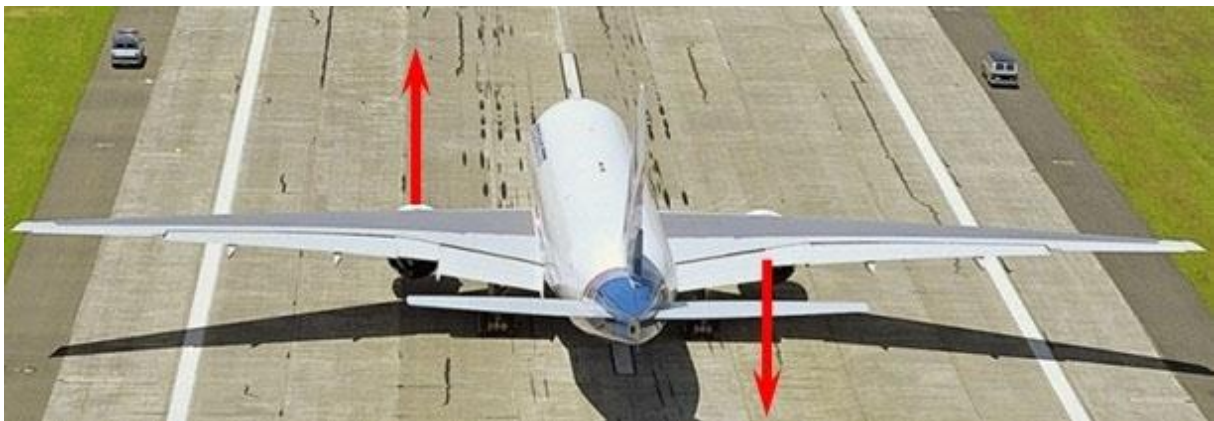
Головний момент сил відносно нерухомої осі OZ системи дорівнює алгебраїчній сумі моментів всіх сил системи відносно цієї осі:

$$M_z = \sum_{i=1}^n M_{zi} = \sum_{i=0}^n F_{\perp i} l_i$$

Пара сил. Момент пари сил

Під дією лише однієї сили тіло не буде лише обертатись. Якщо ми хочемо, щоб тіло лише оберталося, центр мас має бути нерухомим.

$$m_{\Sigma} \vec{a}_{ц.м.} = \vec{F}_{ц.м.}$$



Парою сил називаються дві рівні за величиною протилежно спрямовані сили, що не діють уздовж однієї прямої.

Підрахуємо момент пари сил відносно довільної точки O.

$$\vec{M}_{\Sigma} = [\vec{r}_1 \times \vec{F}_1] + [\vec{r}_2 \times \vec{F}_2]$$

Врахувавши, що $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2 = \vec{F}$, одержуємо:

$$\vec{M}_\Sigma = [\vec{r}_1 \times \vec{F}] - [\vec{r}_2 \times \vec{F}] = [(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F}] = [\vec{r}_{12} \times \vec{F}]$$

Момент пари сил дорівнює:

$$\vec{M} = [\vec{r}_{12} \times \vec{F}]$$

Тобто момент пари сил не залежить від того, відносно якої точки він підраховується, і визначається лише величиною сил та координатами точок їх прикладання. Відстань l між прямими, уздовж яких діють сили,

називається **плечем пари сил**.

Під дією пари неоднакових сил тіло буде обертатись. Нескомпенсована частина $\vec{F}_2 - \vec{F}_1$ буде приводити до поступального руху.

Умова рівноваги тіла тепер має вигляд: $\sum \vec{F}_i = 0$, $\sum \vec{M}_i = 0$ – тобто сума зовнішніх сил прикладених до системи, та їхніх моментів має дорівнювати 0.

Повернемося до формули: $N = \vec{M} \cdot \vec{\omega}$. Оскільки з іншого боку $N = \frac{dA}{dt}$, то елементарна робота сили при обертальному русі:

$$dA = Ndt = \vec{M} \cdot \vec{\omega} dt = \vec{M} d\vec{\varphi}$$

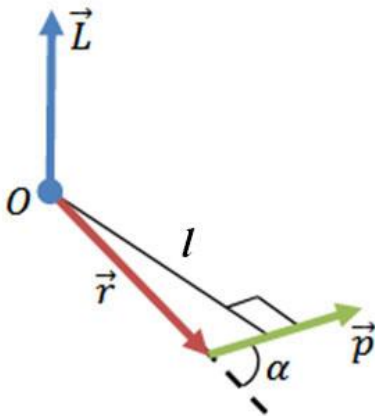


Момент імпульсу

Для обертального руху ми вже ввели замість сили поняття моменту сили. Аналогічно введемо поняття **моменту імпульсу**, який ще називають моментом кількості руху, або механічним моментом:

$$\vec{L} = [\vec{r} \times \vec{p}] \quad \text{або} \quad \vec{L} = [\vec{r} \times m\vec{v}]$$

Моментом імпульсу частки (матеріальної точки) **відносно нерухомої точки О** називається векторний добуток радіус-вектора цієї частки, який проведений з точки О, на імпульс матеріальної точки.



Якщо тверде тіло обертається навколо нерухомої осі OZ , то вводиться поняття **моменту імпульсу відносно нерухомої осі**.

Момент імпульсу частки (матеріальної точки) відносно осі OZ L_z дорівнює проекції на цю вісь вектора моменту імпульсу $\vec{L}$, визначеного відносно довільної точки О даної осі.

Момент імпульсу твердого тіла відносно нерухомої осі дорівнює сумі моментів імпульсів елементарних мас, з яких складається це тіло, відносно вказаної осі.

$$L_z = \sum_{i=1}^n L_{zi}$$

Знайдемо швидкість зміни моменту імпульсу:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt} [\vec{r} \times \vec{p}] = \left[\frac{d\vec{r}}{dt} \times m\vec{v} \right] + \left[\vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} \right] = [\vec{v} \times m\vec{v}] + [\vec{r} \times \vec{F}] = \vec{M}$$

$$\text{або} \quad \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$$

Тобто швидкість зміни моменту імпульсу визначається моментом прикладених сил. Це рівняння називається рівнянням моментів.

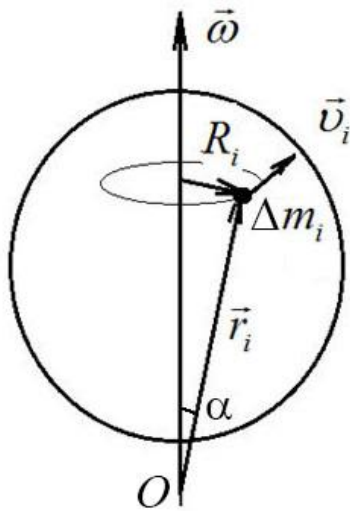
Якщо система замкнена, момент зовнішніх сил дорівнює нулю:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$$

Це означає, що $\vec{L} = \text{const}$ тобто, якщо на систему не діють зовнішні сили, момент імпульсу такої системи залишається незмінним.

Закон збереження моменту імпульсу: момент імпульсу замкненої системи зберігається, тобто не змінюється з часом.

Кінетична енергія тіла, яке обертається. Момент інерції



Знайдемо кінетичну енергію тіла, що обертається.

Повна кінетична енергія тіла:

$$T = \sum_i \frac{\Delta m_i v_i^2}{2}$$

Швидкості всіх точок тіла різні. Виразимо лінійну швидкість через кутову, яка однакова для всіх точок тіла.

$$\vec{v} = [\vec{\omega} \times \vec{r}], \quad v = \omega r \sin \alpha = \omega R$$

$$T = \sum_i \frac{\Delta m_i}{2} \omega^2 R_i^2 = \frac{1}{2} \omega^2 \sum_i \Delta m_i R_i^2$$

Позначимо величину $\sum_i \Delta m_i R_i^2$ буквою I . Вона називається **моментом інерції** системи матеріальних точок. Тоді:

$$T = \frac{I \omega^2}{2}$$

Момент інерції тіла відносно осі це міра інертності тіла при обертальному русі, величина, що характеризує тверде тіло (його розміри, форму і розподіл мас у ньому) і обрану вісь.

Визначення: **моментом інерції системи (тіла)** відносно деякої осі називається сума добутків мас матеріальних точок системи на квадрати їх відстаней до цієї осі:

$$I = \sum_i \Delta m_i R_i^2$$

Це співвідношення тим точніше, чим менше елементарні маси Δm_i . У границі задача визначення моменту інерції зводиться до інтегрування:

$$I = \int r^2 dm$$

$$I = \int_V \rho r^2 dV$$

де ρ – густина тіла в тій точці, де узятий елементарний об'єм dV .

Повернемося до моменту імпульсу. В загальному випадку момент імпульсу $\vec{L}$ не співпадає за напрямком з віссю обертання тіла OZ і повертається разом з тілом навколо цієї осі описуючи конус.

Якщо ж система симетрична, то додаватись будуть лише складові $\vec{L}_{zi}$, паралельні до осі OZ . Компоненти, перпендикулярні до осі OZ , взаємно компенсуються.

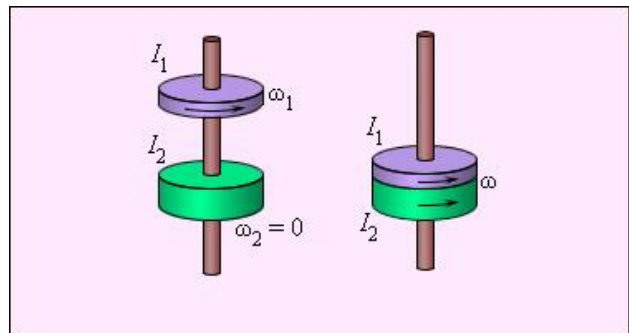
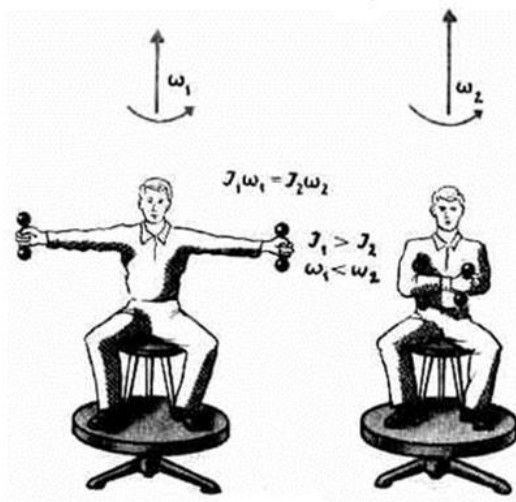
$$L_z = \sum_i L_i \sin \alpha = \sum_i r_i \Delta m_i \omega R_i \sin \alpha = \sum_i \Delta m_i R_i^2 \omega = I \omega$$

Таким чином, у загальному випадку справедливе співвідношення:

$$L_z = I \omega_z$$

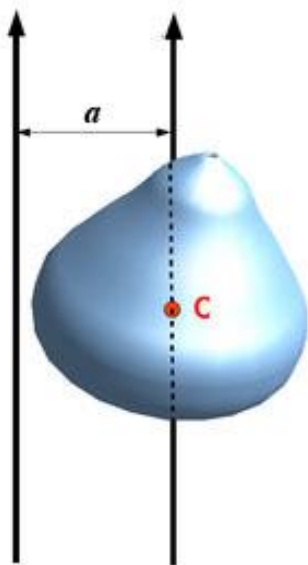
а для однорідного тіла, яке обертається відносно своєї осі симетрії:

$$\vec{L} = I \vec{\omega}$$



Моменти інерції тіл правильної геометричної форми відносно осей симетрії можуть бути досить легко обчислені за допомогою інтегрування.

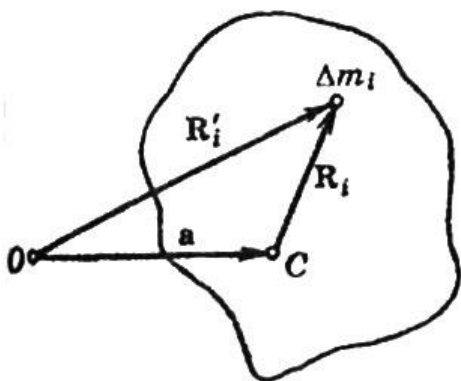
Ця задача стає істотно більш важкою, якщо необхідно обчислити момент інерції тіла відносно якоїсь довільної осі, що проходить всередині або поза тілом



У подібних випадках знаходження моменту інерції значно полегшується, якщо скористатися **теоремою Штейнера**: *момент інерції тіла I відносно довільної осі дорівнює сумі моменту інерції тіла I_0 відносно осі, яка паралельна даній та проходить через центр мас тіла, і добутку маси тіла m на квадрат відстані a між осями:*

$$I = I_0 + ma^2$$

Доведемо цю теорему. Вісь C проходить через центр мас тіла, ось O знаходиться на відстані a від C і паралельна до неї. Вектор $\vec{R}_i$ - перпендикулярний до C вектор, проведений від осі до маси Δm_i . Вектор $\vec{R}'_i$ - вектор аналогічно проведений від осі O . Вектор $\vec{a}$ поєднує відповідні точки осей O і C .



$$\vec{R}'_i = \vec{a} + \vec{R}_i$$

$$\vec{R}'^2 = (\vec{a} + \vec{R}_i)^2 = a^2 + 2\vec{a}\vec{R}_i + \vec{R}_i^2$$

Тоді момент інерції I відносно осі O

$$I = \sum \Delta m_i \vec{R}'^2 = a^2 \sum \Delta m_i + 2\vec{a} \sum \Delta m_i \vec{R}_i + \sum \Delta m_i \vec{R}_i^2$$

Останній доданок це момент інерції тіла I_C відносно осі C . В першому – сума елементарних мас дає масу тіла m . Сума $\sum \Delta m_i \vec{R}_i^2 = m\vec{R}_C$, де $\vec{R}_C$ – вектор проведений від осі C до центру мас тіла, тому другий доданок дорівнює нулю. Таким чином ми прийшли до $I = I_0 + ma^2$.

Момент інерції – величина **адитивна**, тобто момент інерції тіла, яке складається з декількох тіл, дорівнює сумі моментів інерції цих тіл.

Основний закон динаміки обертального руху твердого тіла

Зв'язок між моментом сили, що діє на тіло, і моментом імпульсу цього тіла у випадку обертального руху навколо нерухомої точки:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$$

Оскільки $\vec{L} = I\vec{\omega}$ перепишемо ліву частину цього рівняння

$$\frac{d}{dt}(I\vec{\omega}) = I \frac{d\vec{\omega}}{dt} = I\vec{\beta}$$

Відповідно

$$\vec{M} = I\vec{\beta}$$

Рівняння (5.27) є **основний закон динаміки обертального руху твердого тіла**. Момент сили відносно осі обертання дорівнює добутку моменту інерції тіла на його кутове прискорення.

Кінетична енергія тіла при плоскому русі

Будь який плоский рух можна представити як суму поступального і обертального. Відповідно, швидкість матеріальної точки тіла при плоскому русі дорівнює:

$$\vec{v}_i = \vec{v}_0 + [\vec{\omega} \times \vec{r}_i]$$

де $\vec{v}_0$ – швидкість деякої точки O тіла, $\vec{r}_i$ - радіус-вектор, що визначає положення елементарної маси відносно точки O .

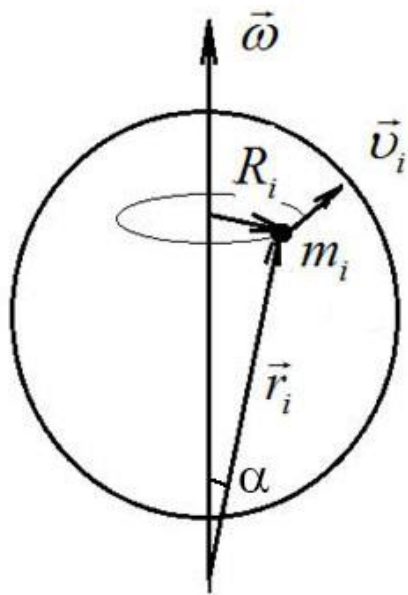
Знайдемо кінетичну енергію елементарної маси:

$$T_i = \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} m_i (\vec{v}_0 + [\vec{\omega} \times \vec{r}_i])^2 = \frac{1}{2} m_i (v_0^2 + 2\vec{v}_0 [\vec{\omega} \times \vec{r}_i] + [\vec{\omega} \times \vec{r}_i]^2)$$

$$T_i = \frac{1}{2} m_i (v_0^2 + 2[\vec{v}_0 \times \vec{\omega}] \vec{r}_i + \omega^2 R_i^2)$$

Щоб знайти кінетичну енергію тіла знайдемо суму по елементарним масам, винісши константи за знаки сум:

$$T = \frac{1}{2} v_0^2 \sum m_i + [\vec{v}_0 \times \vec{\omega}] \sum m_i \vec{r}_i + \frac{1}{2} \omega^2 \sum m_i R_i^2$$



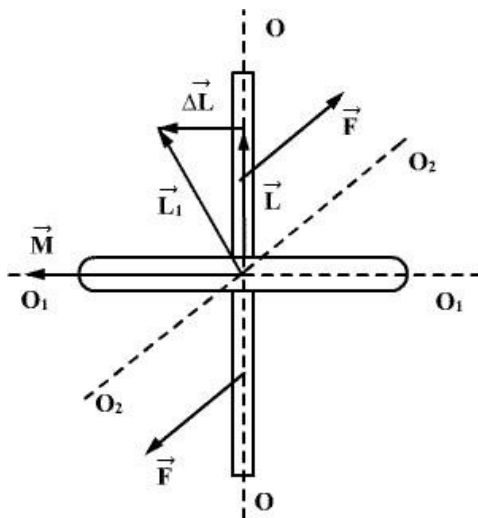
$$T = \frac{1}{2}mv_0^2 + m\vec{r}_C[\vec{v}_0 \times \vec{\omega}] + \frac{1}{2}I_0\omega^2$$

Якщо у якості точки O взяти центр мас тіла C , другий доданок буде дорівнювати нулю. В результаті маємо:

$$T = \frac{mv_C^2}{2} + \frac{I_C\omega^2}{2}$$

Таким чином, кінетична енергія тіла при плоскому русі складається з енергії поступального руху зі швидкістю, що дорівнює швидкості центра мас, і енергії обертального руху навколо осі, що проходить через центр мас тіла.

Гіроскопи



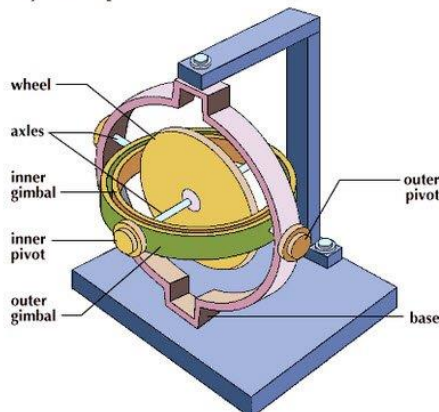
Гіроскопом або дзигою називається масивне симетричне тіло, що з великою кутовою швидкістю обертається навколо своєї осі симетрії, яку ми будемо називати віссю гіроскопа.

Вісь гіроскопа є однією з головних осей інерції, тому, якщо вона не повертається у просторі, момент імпульсу гіроскопа дорівнює:

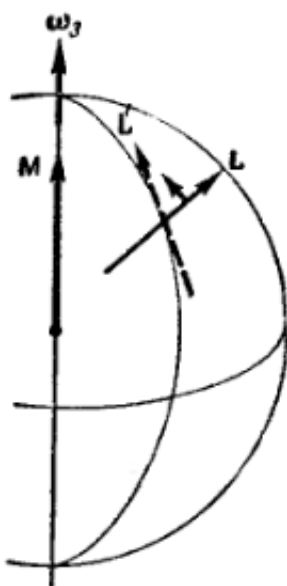
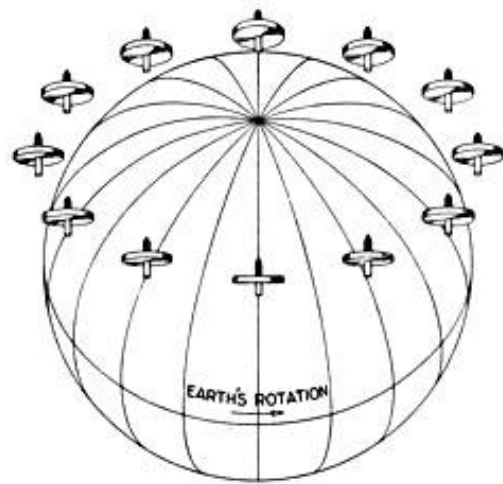
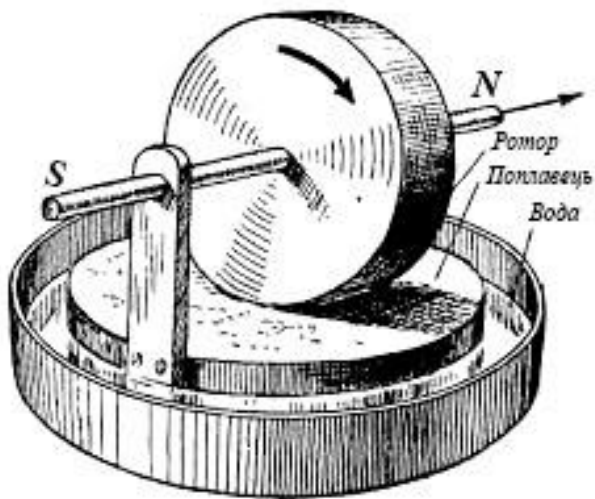
$$\vec{L} = I\vec{\omega}$$

Розглянемо гіроскоп, що може вільно обертатись в трьох взаємно перпендикулярних напрямках (має три ступені свободи). Він обертається навколо осі OO , $\vec{L}$ та $\vec{\omega}$ спрямовані вздовж цієї осі. Тепер прикладемо до гіроскопа пару сил, намагаючись повернути гіроскоп навколо осі O_1O_1 . При цьому гіроскоп розвернеться навколо осі O_2O_2 . Це явище називається **гіроскопічним ефектом**.

Gyroscope

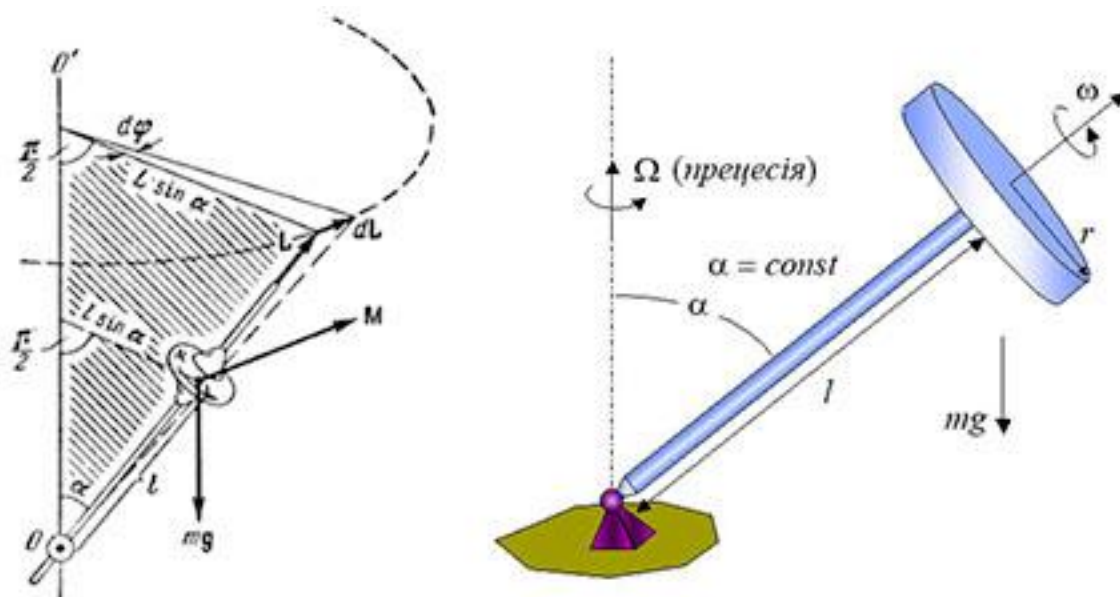


Пояснимо гіроскопічний ефект. Момент пари сил $\vec{M} = [\vec{r} \times \vec{F}]$ спрямований вздовж осі O_1O_1 . За проміжок часу dt момент імпульсу $\vec{L}$ отримає приріст $d\vec{L} = \vec{M}dt$, спрямований вздовж тієї ж осі. Через час dt момент імпульсу гіроскопа буде дорівнювати $\vec{L}_1 = \vec{L} + d\vec{L}$. $\vec{L}_1$ за напрямком буде збігатись з новим напрямком осі гіроскопа. Таким чином, вісь обертання гіроскопа повернеться навколо прямої O_2O_2 , причому так, що кут між векторами $\vec{M}$ і $\vec{L}$ зменшується. Якщо діяти на гіроскоп протягом довгого часу постійним за напрямком моментом зовнішніх сил $\vec{M}$, то вісь гіроскопу встановлюється так, що напрям власного обертання співпадає з віссю та напрямом обертання під дією зовнішніх сил (вектор $\vec{L}$ співпадає за напрямом з вектором $\vec{M}$).



Гіроскопічний компас – гіроскоп, вісь якого може вільно обертатись в горизонтальній площині. Внаслідок добового обертання Землі гіроскопічний компас перебуває під дією сил, які намагаються обертати його навколо земної осі (подібно до того, як пара сил, намагається повернути гіроскоп навколо прямої O_1O_1). В результаті вісь гіроскопа повертається, доки кут між вектором моменту імпульсу гіроскопа $\vec{L}$ та вектором кутової швидкості обертання Землі ω_z не стане мінімальним, тобто доки вісь гіроскопа не встановиться вздовж меридіану.

Розглянемо рух **гіроскопічного маятника** – гіроскопа, вісь якого може вільно повертатись навколо однієї точки O у полі сил тяжіння.



Момент сил, що прикладені до гіроскопа:

$$M = mgl \sin \alpha$$

Момент сил $\vec{M}$ направлений перпендикулярно до вертикальної площини, в якій лежить вісь гіроскопа. Приріст моменту імпульсу $d\vec{L} = \vec{M}dt$ спрямований перпендикулярно до $\vec{L}$ і викликає обертання осі гіроскопа так, що кут α не змінюється. Гіроскоп у полі сил тяжіння буде обертатись зі сталою кутовою швидкістю Ω , описуючи конус. Такий рух гіроскопа називається **прецесією**. За час dt вісь гіроскопа повернеться на кут

$$d\varphi = \frac{|d\vec{L}|}{L \sin \alpha} = \frac{Mdt}{I\omega \sin \alpha} = \frac{mgl \sin \alpha dt}{L \sin \alpha}.$$

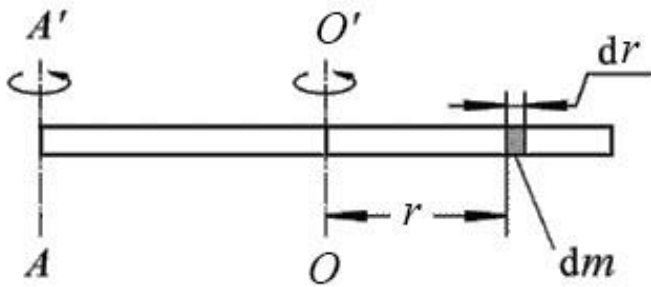
$$\Omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{mgl \sin \alpha}{L \sin \alpha} = \frac{mgl}{I\omega}$$

Видно, що кутова швидкість прецесії не залежить від кута нахилу осі гіроскопа відносно вертикалі α . Завдяки незмінності періоду обертання гіроскопічного маятника і незалежності його від кута α , його можна використовувати як еталон часу.

Приклади знаходження моментів інерції

Приклад 1

Знайдемо момент інерції стержня масою m і довжиною l відносно осі OO' , яка проходить через центр мас перпендикулярно до стержня.



Розіб'ємо стержень на частинки нескінченно малої товщини dr . Момент інерції кожної частинки

$$dI = r^2 dm,$$

де dm – маса частинки. Об'єм частинки $dV = Sdr$, де S – площа перерізу стержня. Відповідно $dm = \rho dV = \rho Sdr$

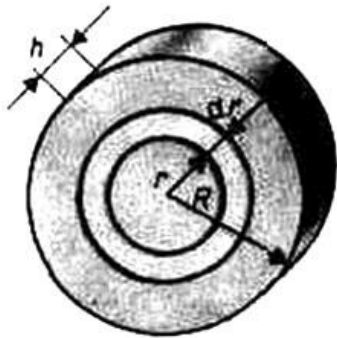
(ρ – густина матеріалу стержня). Тепер можна інтегрувати по r . Оскільки стержень симетричний відносно осі обертання, то можна взяти інтеграл від 0 до $l/2$ (l – довжина стержня) і помножити його на два:

$$I = 2\rho S \int_0^{l/2} r^2 dr = \frac{2\rho S r^3}{3} \Big|_0^{l/2} = \frac{\rho S l^3}{12} = \left[m = \rho S l \right] = \frac{ml^2}{12}$$

Тепер знайдемо момент інерції стержня відносно осі AA' , яка проходить через його край перпендикулярно до стержня. Його можна знайти взявши подібний інтеграл від 0 до l , а можна скористатись теоремою Штейнера. Оберемо другий варіант. Момент інерції відносно осі OO' нам відомий. Відстань між осями $l/2$. Відповідно, за теоремою Штейнера:

$$I = \frac{ml^2}{12} + \frac{ml^2}{4} = \frac{ml^2}{3}$$

Приклад 2

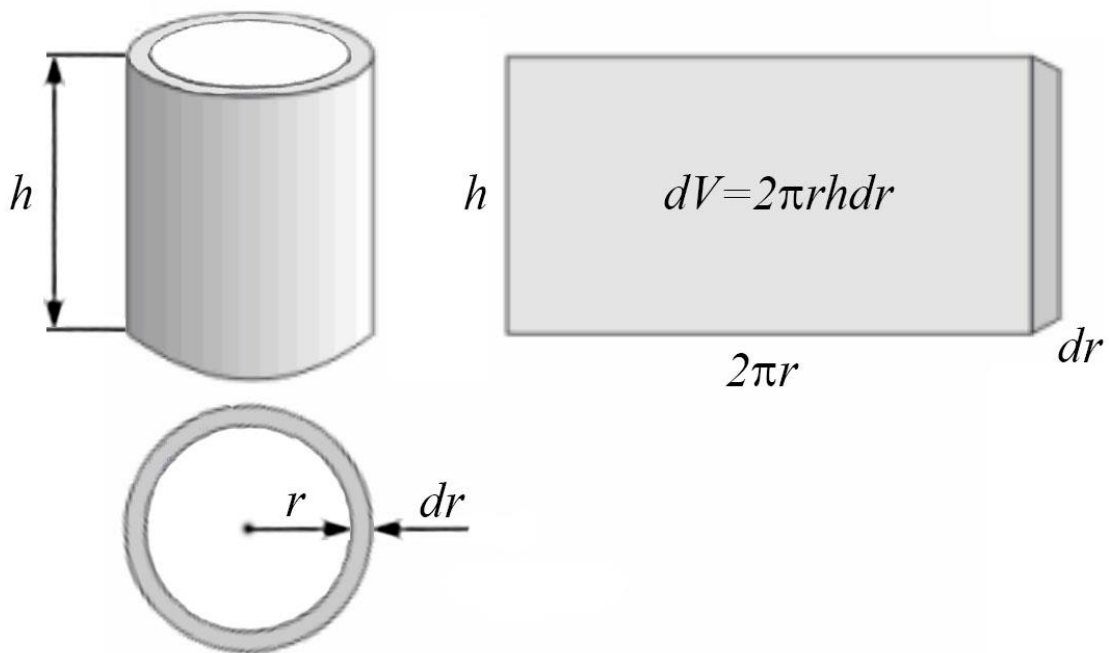


Знайдемо момент інерції однорідного суцільного циліндра масою m , висотою h і радіусом R відносно його осі симетрії.

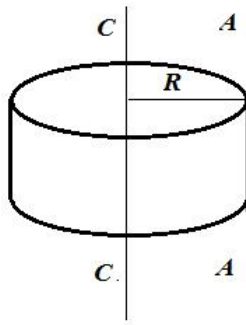
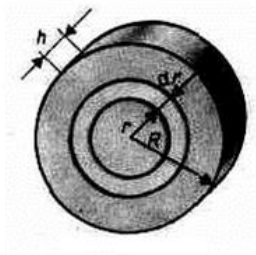
Розіб'ємо циліндр на концентричні циліндричні шари нескінченно малої товщини dr з внутрішнім радіусом r і зовнішнім $r + dr$. Момент інерції кожного циліндричного шару:

$$dI = r^2 dm,$$

де dm – маса циліндричного шару. Об'єм шару $dV = 2\pi r h dr$. Відповідно $dm = \rho dV = 2\pi \rho h r dr$ (ρ – густина матеріалу стержня). Тоді момент інерції суцільного циліндра:



$$I = 2\pi\rho h \int_0^R r^3 dr = \frac{2\pi\rho h r^4}{4} \Big|_0^R = \frac{\pi\rho h R^4}{2} =]m = \pi R^2 h \rho \Big[= \frac{m R^2}{2}$$

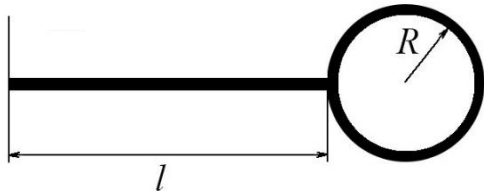


Тепер знайдемо момент інерції циліндра відносно осі, що проходить через його край, паралельно до осі циліндра. Використаємо теорему Штейнера. Момент інерції відносно осі циліндра ми вже знайшли. Відстань між осями R . Відповідно:

$$I = \frac{mR^2}{2} + mR^2 = \frac{3mR^2}{2}$$

Приклад 3

Знайдемо момент інерції системи, що складається з тонкого стержня масою m_1 та довжиною l і кулі масою m_2 і радіусом R відносно осі, яка проходить через кінець стержня.



Момент інерції стержня: $I_c = \frac{m_1 l^2}{3}$

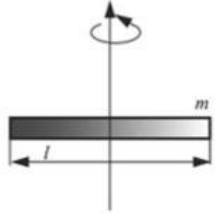
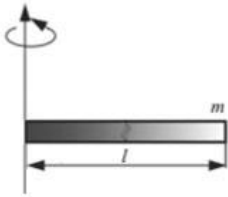
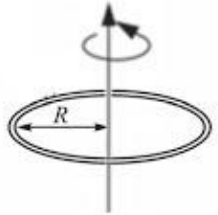
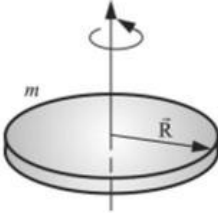
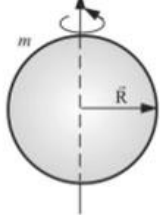
Момент інерції кулі відносно її осі симетрії: $I_{K0} = \frac{2m_2 R^2}{5}$

За теоремою Штейнера момент інерції кулі відносно осі, що проходить через кінець стержня:

$$I_K = \frac{2m_2 R^2}{5} + m_2 (R + l)^2$$

Момент інерції системи знайдемо додавши I_c і I_K .

$$I = I_c + I_K = \frac{2m_2 R^2}{5} + m_2 (R + l)^2 + \frac{m_1 l^2}{3} = \frac{7m_2 R^2}{5} + 2m_2 Rl + \frac{(m_1 + 3m_2)l^2}{3}$$

Моменти інерції деяких тіл правильної геометричної форми		
Тіло	Відносно якої осі	Момент інерції
 Однорідний тонкий стержень масою m і довжиною l	Відносно осі, що проходить через центр мас стержня перпендикулярно до нього	$\frac{ml^2}{12}$
 Однорідний тонкий стержень масою m і довжиною l	Відносно осі, що проходить через кінець стержня перпендикулярно до нього	$\frac{ml^2}{3}$
 Тонке кільце, обруч, труба, масою m і радіусом R	Відносно осі, що проходить через центр кільця перпендикулярно до його площини	mR^2
 Однорідний диск (циліндр) масою m і радіусом R	Відносно осі, що проходить через центр диска перпендикулярно до його площини	$\frac{mR^2}{2}$
 Однорідна куля масою m і радіусом R	Відносно осі, що проходить через центр кулі	$\frac{2mR^2}{5}$

Відповідності між поступальним та обертальним рухом

Поступальний рух	Обертальний рух
$\vec{r}$ – переміщення [м]	$\vec{\varphi}$ – кут повороту [рад]
$\vec{v}$ – лінійна швидкість [м/с]	$\vec{\omega}$ – кутова швидкість [рад/с=1/с=c ⁻¹]
$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ – лінійне прискорення [м/с ²]	$\vec{\beta} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$ – кутове прискорення [рад/с ² =1/с ² =c ⁻²]
m – маса [кг]	I – момент інерції [кг·с ²]
$\vec{p} = m\vec{v}$ – імпульс [кг·м/с]	$\vec{L} = I\vec{\omega}$ – момент імпульсу [Дж·с]
$\vec{F}$ – сила [Н]	$\vec{M}$ – момент сили [Н·м]
Основний закон динаміки	
$\vec{F} = m\vec{a}$ $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$	$\vec{M} = I\vec{\beta}$ $\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$
Закон збереження	
імпульсу	моменту імпульсу
$\sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i = \text{const}$	$\sum_{i=1}^n I_i \vec{\omega}_i = \text{const}$
Робота й потужність	
$dA = \vec{F} d\vec{r}$ $N = \vec{F} \vec{v}$	$dA = \vec{M} d\vec{\varphi}$ $N = \vec{M} \vec{\omega}$
Кінетична енергія	
$T = \frac{mv^2}{2}$	$T = \frac{I\omega^2}{2}$

НЕІНЕРЦІАЛЬНІ СИСТЕМИ ВІДЛІКУ

Раніше зазначалося, що закони Ньютона сформульовані для інерціальних систем відліку. Системи відліку, що рухаються відносно інерціальної системи з прискоренням, називаються **неінерціальними**. В неінерціальних системах закони Ньютона, взагалі кажучи, несправедливі. Однак закони динаміки можна застосовувати і для них, якщо крім сил, обумовлених впливом тіл один на одного, ввести в розгляд сили особливого роду – так звані **сили інерції**.

Якщо врахувати сили інерції, то другий закон Ньютона буде справедливий для будь-якої системи відліку: добуток маси тіла на прискорення в даній системі відліку дорівнює сумі всіх сил, що діють на дане тіло (включаючи і сили інерції). Сили інерції при цьому повинні бути такими, щоб разом з силами, обумовленими впливом тіл один на одного, вони надавали тілу прискорення, яке воно має в неінерціальних системах відліку $\vec{a}_n$.

Позначимо різницю прискорень тіла в інерціальній та неінерціальній системах через $\vec{a}_0$:

$$\begin{aligned}\vec{a}_0 &= \vec{a}_i - \vec{a}_n \\ m\vec{a}_0 &= m\vec{a}_i - m\vec{a}_n\end{aligned}$$

За другим законом Ньютона:

$$m\vec{a}_i = \vec{F}$$

Відповідно

$$m\vec{a}_n = \vec{F} - m\vec{a}_0$$

Це рівняння другого закону Ньютона в неінерціальній системі відліку.

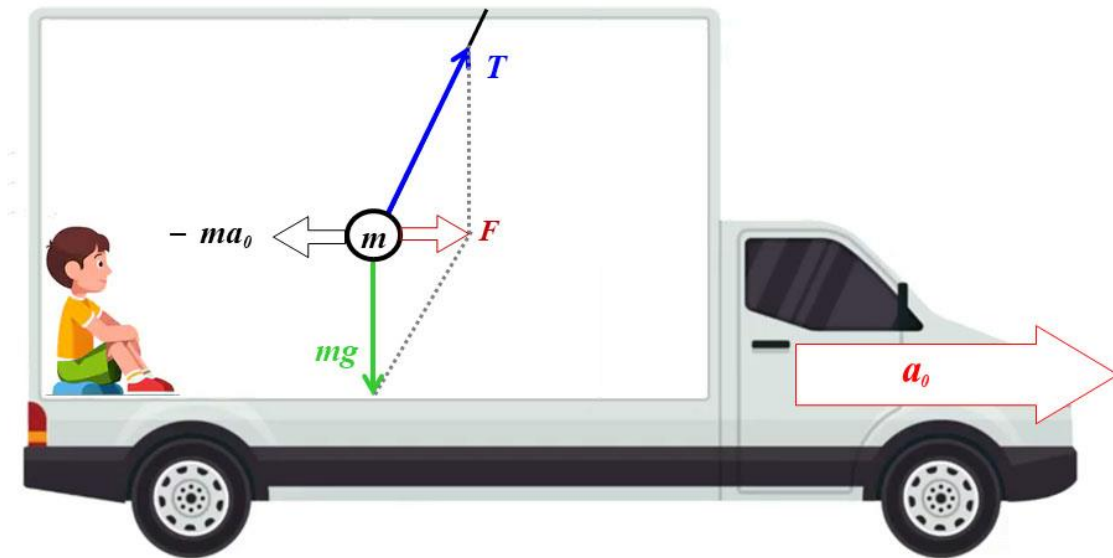
Сила, що дорівнює взятому з оберненим знаком добутку маси об'єкта на різницю його прискорень по відношенню до інерціальної та неінерціальної систем відліку – $m\vec{a}_0$ називається **силою інерції**.

Сили інерції зумовлені прискоренням рухом системи відліку, тому в загальному випадку потрібно враховувати наступні випадки прояву цих сил:

- 1) сили інерції при прискореному поступальному русі системи відліку,
- 2) сили інерції, що діють на тіло, яке покоїться в обертовій системі відліку;
- 3) сили інерції, що діють на тіло, яке рухається в обертовій системі відліку.

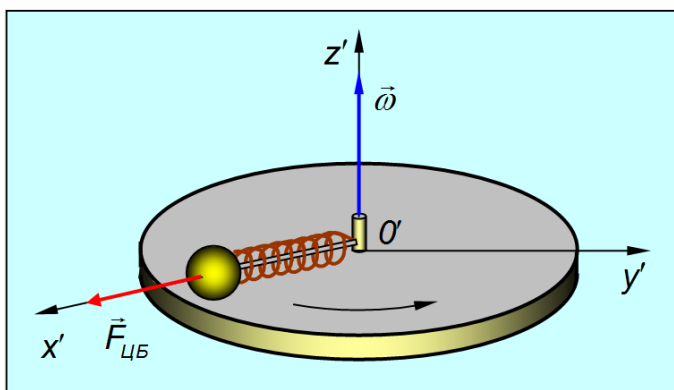
Розглянемо їх.

Поступальна сила інерції



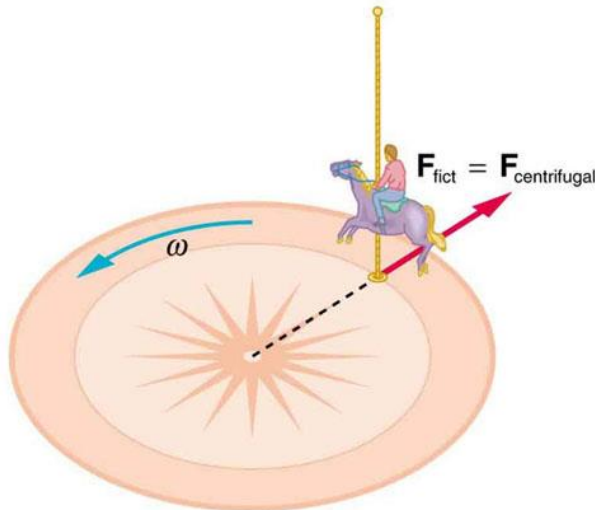
Приклад: до стелі всередині фургону підвішений на нитці тягарець. Поки фургон знаходиться у стані спокою, або рухається без прискорення, нитка розташована вертикально і сила тяжіння врівноважена реакцією нитки. Якщо привести фургон у поступальний рух із прискоренням $\vec{a}_0$, то нитка відхилиться на деякий кут α . Відносно системи відліку, зв'язаної з фургоном, вантаж знаходиться у стані спокою, незважаючи на те, що результуюча сил тяжіння та натягу нитки не дорівнює нулю. Відсутність прискорення тягарця відносно цієї системи відліку можна формально пояснити тим, що крім сил $m\vec{g}$ і $\vec{T}$ на тіло діє ще й сила інерції. $\vec{F}_{np} = -m\vec{a}_0$

Сили інерції, що діють на тіло, яке покоїться в обертовій системі відліку



Приклад: візьмемо диск, що рівномірно обертається зі сталою кутовою швидкістю ω відносно осі, яка проходить вертикально через його центр. До центру диска прикріпимо кульку на пружинці. При зміні кутової швидкості кулька буде рухатись вздовж радіуса диска.

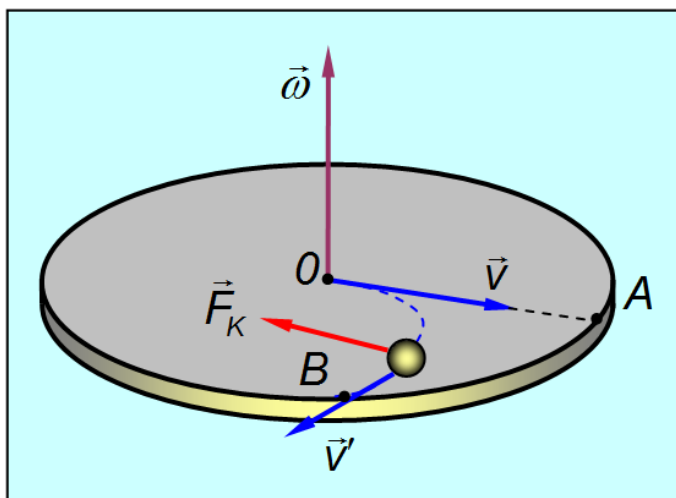
При цьому вона разом з диском буде рівномірно обертатись навколо його осі. Отже, на неї діє сила інерції $\vec{F}_{\text{иц}} = m\omega^2 \vec{R}$. Ця сила називається відцентровою силою інерції і спрямована по радіусу диска від його центру. Їй відповідає доцентрове прискорення, спрямоване до центру диска $\vec{a}_{\text{иц}} = -\omega^2 \vec{R}$.



З наведеної формули випливає, що відцентрова сила інерції, що діє на тіла в обертових системах відліку в напрямку радіусу від осі обертання, залежить від кутової швидкості обертання системи відліку і радіуса R , але не залежить від швидкості тіл відносно обертових систем відліку. Отже, відцентрова сила інерції діє в обертових системах відліку на всі тіла, віддалені від осі обертання на кінцеву відстань, незалежно від

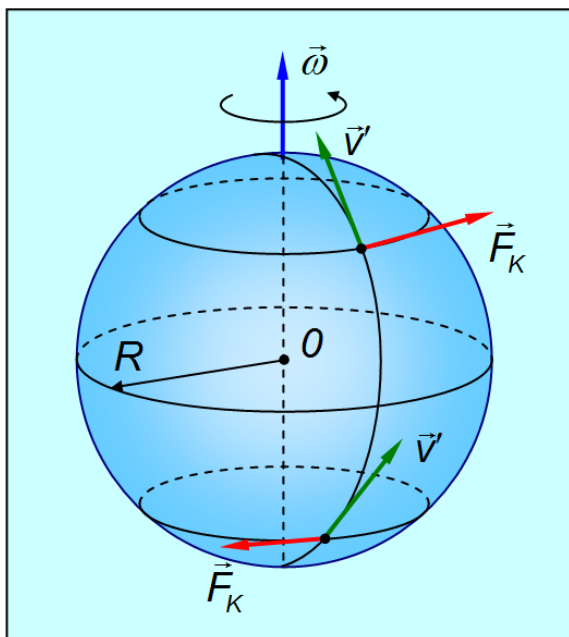
того, покоються вони в цій системі (як ми припускали до цього часу) або рухаються відносно неї з якоюсь швидкістю.

Сили інерції, що діють на тіло, яке рухається в обертовій системі відліку



Нехай кулька масою m рухається з постійною швидкістю $\vec{v}'$ вздовж радіусу диска. Якщо диск не обертається, то кулька рухається по радіусу і потрапляє в точку А, якщо ж диск почати обертати, то кулька котиться по кривій ОВ, причому її швидкість відносно диска змінює свій напрямок. Це можливо лише тоді, якщо на кульку діє сила,

перпендикулярна до швидкості. Для того щоб змусити кульку котитися по



диску, що обертається, вздовж радіуса, можна використати жорстко укріплений уздовж радіуса диска стрижень, на якому кулька рухається без тертя рівномірно і прямолінійно зі швидкістю $\vec{v}'$. При відхиленні кульки стрижень діє на неї з деякою силою $\vec{F}$. Відносно диска (обертової системи відліку) кулька рухається рівномірно і прямолінійно, що можна пояснити тим, що сила F врівноважується прикладеною до кульки силою інерції $\vec{F}_k$, перпендикулярною до швидкості $\vec{v}'$. Ця сила називається **коріолісовою силою інерції**.

Можна показати, що сила Коріоліса:

$$\vec{F}_k = 2m[\vec{v}' \times \vec{\omega}]$$

Сила Коріоліса діє тільки на тіла, що рухаються відносно обертової системи відліку, наприклад Землі. Тому дією цих сил пояснюється ряд явищ, що спостерігаються на Землі. Так, якщо тіло рухається в північній півкулі на північ, то діюча на нього сила Коріоліса буде направлена вправо по відношенню до напрямку руху, тобто тіло трохи відхилиться на схід. Якщо тіло рухається на південь, то сила Коріоліса також діє вправо, якщо дивитися у напрямку руху, тобто тіло відхилиться на захід. Тому в північній півкулі спостерігається більш сильне підмивання правих берегів річок; праві рейки залізничних колій по руху зношуються швидше, ніж ліві, і т. д. Аналогічно можна показати, що в південній півкулі сила Коріоліса, що діє на рухомі тіла, буде спрямована вліво по відношенню до напрямку руху.



Завдяки силі Коріоліса тіла, що падають на поверхню Землі, відхиляються на схід (на широті 60° це відхилення має становити 1 см при падінні з висоти 100 м). З силою Коріоліса пов'язана поведінка маятника Фуко, що стало свого часу одним із доказів обертання Землі. Якби цієї сили не було, то площина коливань маятника, який коливається поблизу поверхні Землі, залишалася б незмінною (відносно Землі). Дія сил Коріоліса призводить до обертання площини коливань навколо вертикального напрямку.

Тепер ми можемо записати **основний закон динаміки для неінерціальних систем** відліку, в який, крім старої рівнодіючої сили $\vec{F}$, входять три нові сили, що називаються силами інерції:

$$m\vec{a}_n = \vec{F} + \vec{F}_{np} + \vec{F}_{вц} + \vec{F}_k$$

Сили інерції реально діють на тіло в неінерціальній системі відліку і їх можна виміряти, але для них не можна вказати тіл, взаємодією яких вони були б обумовлені. Вони викликані *не взаємодією тіл, а прискореним рухом системи відліку*. Отже, для цих сил не можна застосувати третій закон Ньютона. Фактично, сили інерції не можна називати силами, але вони вводяться для того, щоб привести рівняння відносного руху до виду, що відповідає другому закону Ньютона.

Для будь-якого з тіл, що знаходяться в неінерціальній системі відліку, сили інерції є зовнішніми, отже, тут немає замкнутих систем. Це означає, що в неінерціальних системах відліку не виконуються закони збереження імпульсу, механічної енергії і моменту імпульсу. Таким чином, сили інерції діють тільки в неінерціальних системах. В інерціальних системах відліку таких сил не існує.

Сили інерції, що діють на тіла в неінерціальній системі відліку, пропорційні їх масам і при інших рівних умовах надають цим тілам однакові прискорення. Тому в «полі сил інерції» ці тіла рухаються абсолютно однаково, якщо тільки однакові початкові умови. Таку ж властивість мають тіла, які знаходяться під дією сил поля тяжіння.

При деяких умовах сили інерції і сили тяжіння неможливо розрізнити. Наприклад, рух тіл в рівноприскореному ліфті відбувається точно так само, як і в нерухомому ліфті, що висить в однорідному полі тяжіння. Ніякий експеримент, виконаний всередині ліфта, не може відрізнити однорідне поле тяжіння від однорідного поля сил інерції.

Аналогія між силами тяжіння і силами інерції лежить в основі **принципу еквівалентності гравітаційних сил і сил інерції (принципу еквівалентності Ейнштейна)**: всі фізичні явища в полі тяжіння відбуваються абсолютно так само, як і у відповідному полі сил інерції. Цей принцип є основою **загальної теорії відносності**.

ЕЛЕМЕНТИ МЕХАНІКИ СУЦІЛЬНОГО СЕРЕДОВИЩА

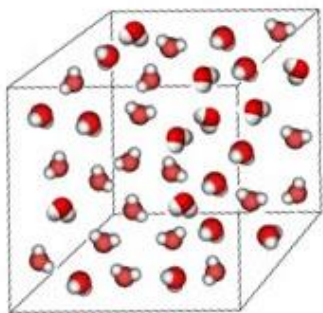
Фізика суцільного середовища (рідини, газу, деформівні тіла) може здатися далекою від програмування, але на практиці вона лежить в основі багатьох сучасних технологій. Для програмістів це насамперед інструмент моделювання складних, «живих» систем, де поведінка не зводиться до руху окремих точок. Наприклад, вода, дим, тканина чи навіть натовп людей у симуляціях описуються як безперервні середовища з певними властивостями.

У комп'ютерній графіці та іграх фізика суцільних середовищ використовується для створення реалістичних ефектів: хвиль, течій, вибухів, хмар, полум'я. Програміст працює не з окремими об'єктами, а з полями швидкостей, тиску, щільності. Навіть якщо застосовуються спрощені моделі, розуміння базових принципів – таких як збереження маси чи імпульсу – дозволяє отримувати переконливий результат і уникати “дивної” поведінки системи.

Ці знання особливо важливі у наукових обчисленнях і інженерних задачах. Моделювання погоди, аеродинаміки, поширення забруднень або тепла – усе це задачі фізики суцільних середовищ, які розв'язуються за допомогою програм. У таких випадках програміст має розуміти не лише алгоритми, а й фізичний зміст рівнянь, щоб правильно обрати методи та інтерпретувати результати.

Нарешті, фізика суцільних середовищ розвиває системне мислення. Вона вчить працювати з розподіленими величинами і взаємодіями, де локальні зміни впливають на всю систему. Це корисно не лише для графіки чи науки, а й для складних програмних систем загалом, де важливо розуміти динаміку процесів і їх взаємозв'язки.

Розділ механіки, в якому досліджуються закони руху рідини та її взаємодії з тілами, які вона обтікає називається **гідродинамікою**. Рух рідини називається **течією**, а сукупність часток рідини, що рухаються – **поток**.

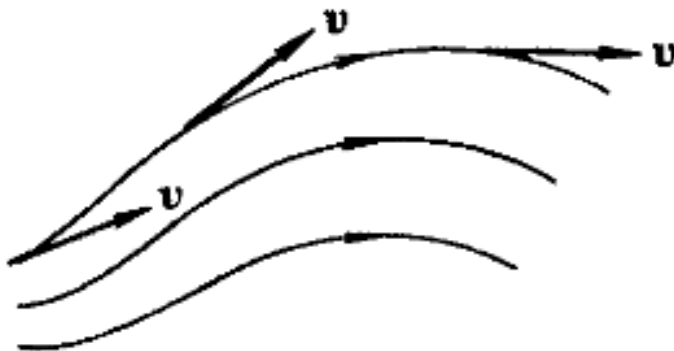


У гідродинаміці абстрагуються від молекулярної будови рідини і розглядають її як **суцільне середовище**, що безперервно розподілене по зайнятій ним частині простору. При цьому **часткою середовища** вважають фізично малий об'єм середовища, розміри якого набагато перевершують міжмолекулярні відстані,

але досить малі, щоб у його межах всі параметри потоку (тиск, швидкість і т.ін.) можна було б вважати однаковими.

Густина рідини практично не залежить від тиску. Тому в гідродинаміці рідина вважається **нестисливою**.

Ідеальною рідиною називають таку нестисливу рідину, у якій частки не взаємодіють між собою, тобто відсутнє внутрішнє тертя, або в'язкість.

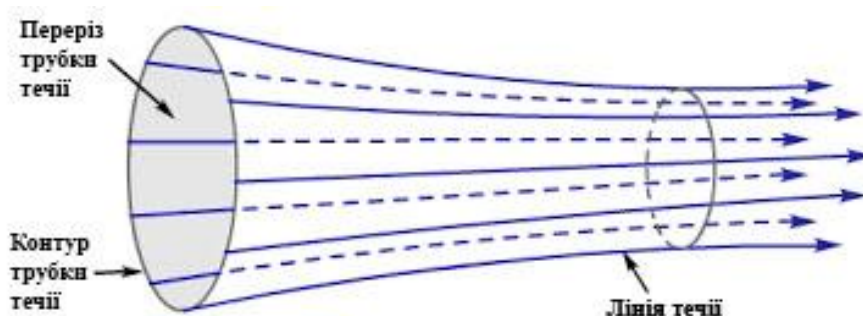


Сукупність векторів швидкості, заданих в кожній точці простору, утворюють так зване **поле швидкостей**, яке відображають за допомогою ліній течії.

Лініями течії називаються лінії, дотичні до яких в кожній точці визначають напрям вектора

швидкості, а їх густина – модуль цього вектора.

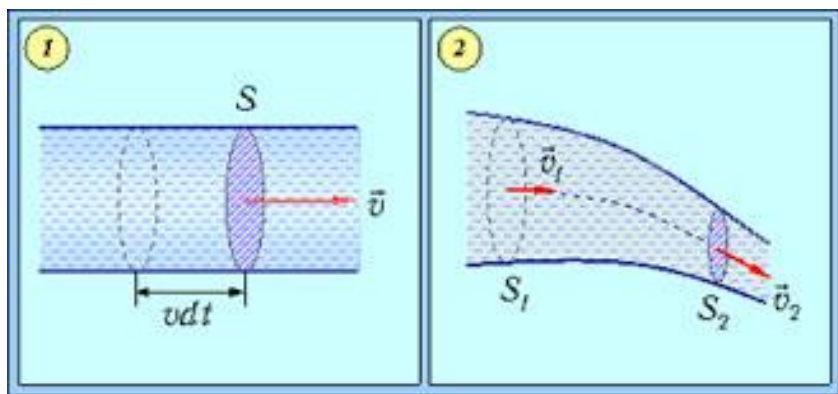
Якщо вектор швидкості в кожній точці простору залишається незмінним протягом часу, течія потоку називається **стаціонарною**.



Сукупність ліній течії, що проходять через кожную точку деякого замкненого контуру називається **трубкою течії**. Частинки рідини при своєму русі не перетинають стінки трубки течії.

Теорема про нерозривність струменя

Розглянемо деяку трубку течії, достатньо тонку, щоб швидкість течії в кожному її перерізі вважати сталою. Візьмемо переріз трубки течії S , який перпендикулярний до напрямку швидкості. За час dt через цей переріз пройде об'єм рідини $Svdt$.



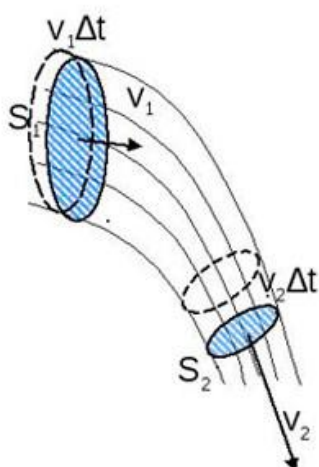
Якщо по кожному перерізу швидкість рідини однакова і рідина зберігає свій об'єм, то кількість рідини між перерізами S_1 і S_2 буде залишатися незмінною, тобто об'єми рідини, що

протікають за одиницю часу через перерізи S_1 і S_2 мають бути однаковими:

$$v_1 S_1 dt = v_2 S_2 dt,$$

або

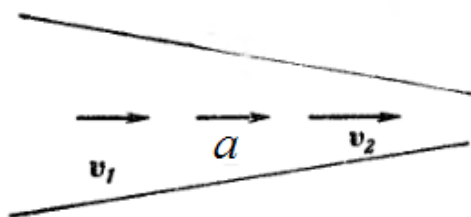
$$v_1 S_1 = v_2 S_2 = \text{const}$$



Ця формула виражає **теорему про нерозривність струменя**: для нестисливої рідини при стаціонарній течії, величина Sv (добуток швидкості на величину перпендикулярного до неї перерізу – секундна миттєва витрата рідини) для будь-якого перерізу однієї й тієї ж трубки течії є сталою величиною.

Формально переріз можна оголосити вектором з напрямком, перпендикулярним до його площини. Тоді теорема має вигляд:

$$\vec{v} \cdot \vec{S} = \text{const}$$

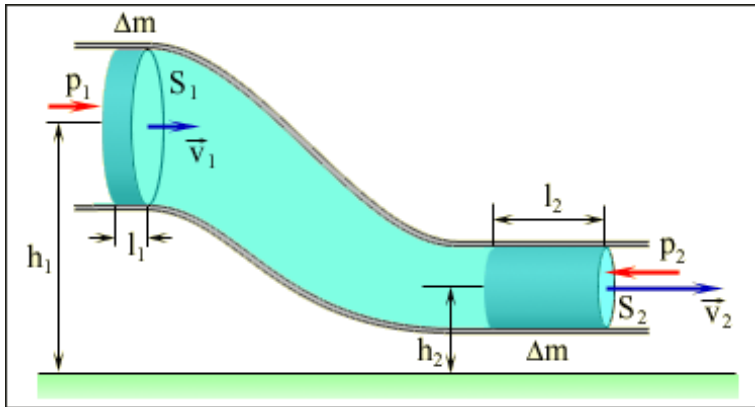


При змінному перерізі трубки течії частинки ідеальної рідини рухаються з прискоренням. В горизонтальній трубці течії це прискорення може бути обумовлене тільки неоднаковістю тиску вздовж осі трубки. Там, де швидкість потоку менше, тиск більший, і навпаки.

Теорема про нерозривність струменя застосовна і для реальних рідин і навіть газів у тому випадку, коли стисливістю можна знехтувати (при русі рідин або газів зі швидкостями, меншими ніж швидкість звуку).

Рівняння Бернуллі

Розглянемо стаціонарний рух ідеальної рідини по не горизонтальній трубці течії в полі сил тяжіння.



Виділимо частину рідини, обмежену стінками трубки течії та перпендикулярними перерізами S_1 та S_2 . За час Δt ця рідина переміститься вздовж трубки течії і буде замкнена між новими положеннями цих перерізів. Внаслідок нероз-

ривності струменя об'єми замкнені між старим і новим положеннями перерізів будуть однаковими: $S_1 \cdot l_1 = S_2 \cdot l_2 = \Delta V$. Вважаючи, що перерізи S_1 та S_2 і відрізки l_1 та l_2 досить малі, щоб виділеним об'ємам ΔV можна було приписати одне й те ж значення швидкості v , тиску p та висоти h , розглянемо зміну енергії об'єму ΔV ($m = \rho \Delta V$ – маса рідини у об'ємі ΔV):

$$\Delta E = \left(\frac{\rho \Delta V v_2^2}{2} + \rho \Delta V g h_2 \right) - \left(\frac{\rho \Delta V v_1^2}{2} + \rho \Delta V g h_1 \right)$$

Енергія змінюється за рахунок роботи ΔA , що виконується над об'ємом ΔV зовнішніми силами. Оскільки в ідеальній рідині сили тертя відсутні, роботу виконують сили тиску. Оскільки сили тиску, що діють на бічну поверхню трубки, роботи не виконують (вони перпендикулярні до напрямку руху часток рідини) всю роботу виконують сили тиску, прикладені до перерізів S_1 та S_2 :

$$\Delta A = F_1 l_1 - F_2 l_2 = p_1 S_1 l_1 - p_2 S_2 l_2 = (p_1 - p_2) \Delta V$$

З двох останніх рівнянь одержуємо:

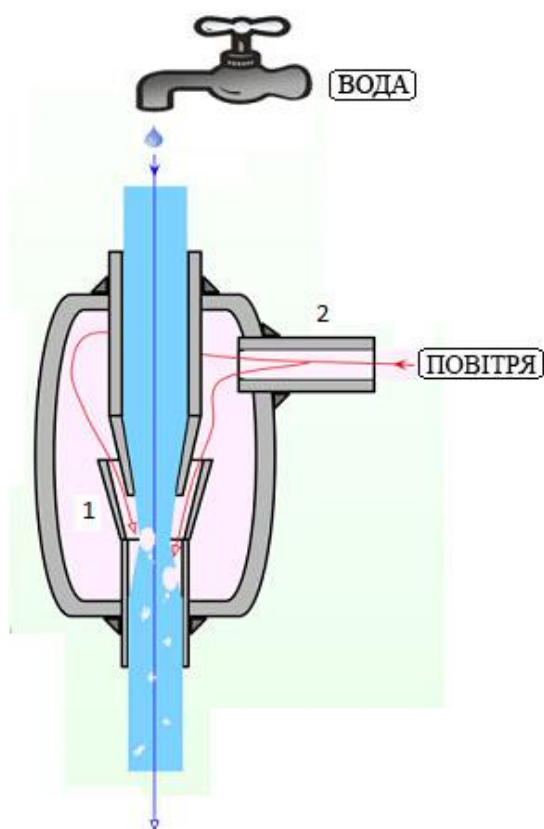
$$\frac{\rho \Delta V v_2^2}{2} + \rho \Delta V g h_2 - \frac{\rho \Delta V v_1^2}{2} - \rho \Delta V g h_1 = p_1 \Delta V - p_2 \Delta V$$

$$\frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g h_1 + p_1 = \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g h_2 + p_2$$

А оскільки перерізи S_1 та S_2 було взято цілком довільно, то:

$$\frac{\rho v^2}{2} + \rho g h + p = \text{const}$$

Величину $\rho gh + p$ називають **статичним тиском**, а величину $\frac{\rho v^2}{2}$ – **динамічним напором** (швидкісним напором), або динамічним тиском. Їх сума називається повним тиском.



Цей результат можна сформулювати так: при стаціонарній течії ідеальної рідини сума статичного та динамічного тисків у будь-якому перерізі однакова.

Останні два вирази і є **рівняння Бернуллі**.

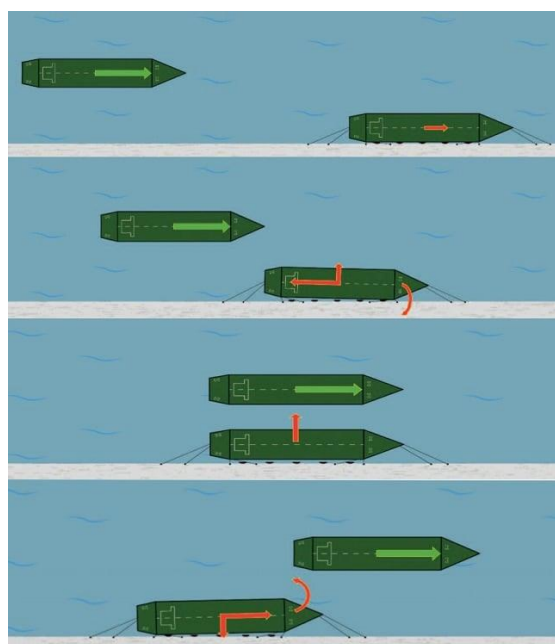
Якщо швидкість рідини в усіх точках однакова (в тому числі дорівнює нулю) для двох довільних точок будь-якої трубки потоку виконується рівність

$$p_1 - p_2 = \rho g(h_2 - h_1)$$

Для горизонтальної трубки потоку тиск менше там, де швидкість більше.

$$\frac{\rho v_1^2}{2} + p_1 = \frac{\rho v_2^2}{2} + p_2$$

Цей ефект використовується у *водоструменевому насосі*. Струмінь води подається у трубку, яка відкривається в атмосферу, так що на виході з трубки тиск дорівнює атмосферному. В трубці є звуження, по якому вода тече з більшою швидкістю, внаслідок чого тиск в цьому місці менший за атмосферний. Такий самий тиск встановлюється в камері насоса. Повітря, що відкачується, захоплюється струменем води і викидається в атмосферу. Такий насос дозволяє отримати тиск до 100 мм.рт.ст.



Наслідком цього явища є також "присмоктування" кораблів при протіканні між ними води.

Формула Торічеллі



Розглянемо витікання рідини з невеликого отвору у широкій відкритій посудині. Виділимо у рідині трубку течії, що має два перерізи: відкриту поверхню рідини в посудині і отвір, через який рідина витікає. Запишемо для цієї трубки рівняння Бернуллі:

$$\frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g h_1 + p_1 = \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g h_2 + p_2$$

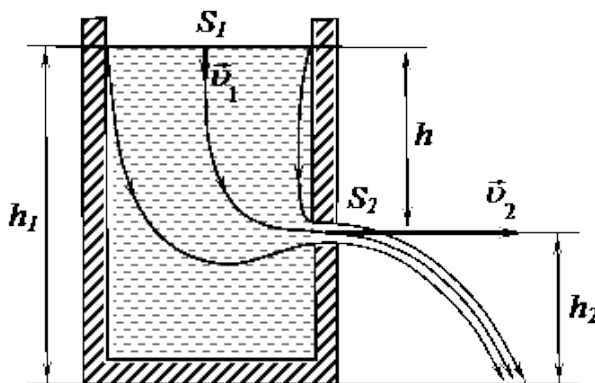
Тиск в обох перерізах дорівнює атмосферному, тому рівняння спроститься:

$$\frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g h_1 = \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g h_2$$

Запишемо для цієї трубки рівняння за теоремою про нерозривність струменя:

$$v_1 S_1 = v_2 S_2$$

Площа відкритої поверхні рідини значно більше площі отвору: $S_1 \gg S_2$. Відповідно швидкість опускання рівня води значно менша швидкості витікання води з отвору $v_1 \ll v_2$ і можна знехтувати доданком, який містить її квадрат. Тоді рівняння Бернуллі матиме вид:



$$\rho g h_1 = \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g h_2$$

Звідси

$$\frac{v_2^2}{2} = g(h_1 - h_2)$$

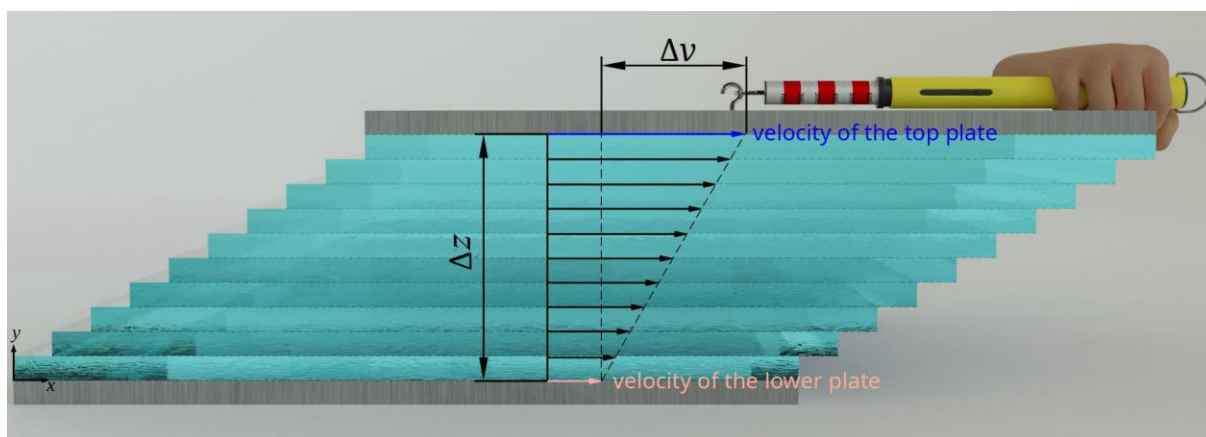
$$v = \sqrt{2gh},$$

де $h = h_1 - h_2$, $v = v_2$.

Ця формула називається **формулою Торічеллі**. З неї видно, що рідина, виходячи з отвору, має таку саму швидкість, яку мала б вільно падаючи з висоти h . Цей результат відноситься до ідеальних рідин. Для реальних швидкість витікання буде меншою і залежатиме від внутрішнього тертя рідини.

Реальні рідини та гази

На відміну від ідеальної рідини, реальним рідинам і газам властиве **внутрішнє тертя** або **в'язкість**. В'язкість проявляється в тому, що рух, що виникає в рідині або газі, після зникнення причин, які його викликали, поступово припиняється.



Розглянемо в'язке середовище, що знаходиться між двома паралельними плоскими пластинами. Нехай одна пластина знаходиться в стані спокою, а друга рухається паралельно до неї зі сталою швидкістю v_0 . Для переміщення цієї пластини треба прикласти до неї силу F , яка дорівнює за величиною і протилежна за напрямком силі опору в'язкого середовища, що називається силою внутрішнього тертя F_{TP} . Варіюючи швидкість пластини v_0 , площу пластин S та відстань між ними d , можна показати, що

$$F_{TP} = \eta \frac{v_0}{d} S$$

Або у більш загальному вигляді, формулу експериментально одержаному Ньютоном:

$$F_{TP} = \eta \left| \frac{dv}{dz} \right| S$$

де S - площа поверхні дотику шарів рідини, що прилягають один до одного, $|dv/dz|$ - модуль градієнта швидкості рідини (показує, як швидко змінюється швидкість у напрямі z), η - **коефіцієнт внутрішнього тертя**, або **коефіцієнт в'язкості**, або просто **в'язкість (динамічна)** рідини, або газу.

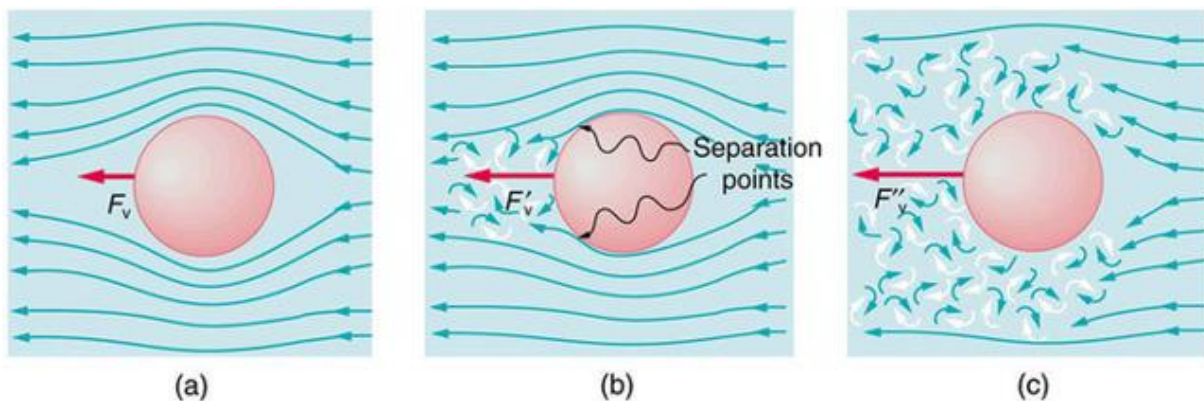
Одиницею в'язкості у СІ є така в'язкість, при якій градієнт з модулем, що дорівнює $1\text{ м/с на }1\text{ м}$ призводить до виникнення сили внутрішнього тертя в 1 Н на 1 м^2 поверхні дотику шарів. Називається така одиниця **паскаль-секунда** ($\text{Па} \cdot \text{с}$).

У рідин коефіцієнт в'язкості сильно зменшується з підвищенням температури. У газів коефіцієнт в'язкості збільшується з підвищенням температури. Різний характер температурної залежності вказує на різні механізми внутрішнього тертя в рідинах та газах.

Режими течії реальної рідини

В природі спостерігається два види течії рідини або газу.

Ламінарна течія (а) має стаціонарну шарувату структуру, тобто характеризується стаціонарним полем швидкостей. При цьому рідина наче розділяється на шари, що ковзають відносно один одного не перемішуючись.



Турбулентна течія (b, c) виникає при збільшенні швидкості, або поперечних розмірів потоку і характеризується активним перемішуванням шарів рідини або газу. У турбулентній течії спостерігаються вихорі і вона є нестаціонарною, тобто швидкість часток у кожній її точці змінюється хаотично.

Спробуємо визначити критерій, що характеризує характер течії.

Стаціонарність потоку підтримується силами внутрішнього тертя. Робота сил тертя A пропорційна $|dv/dz|$. Зі зростанням швидкості зростає кінетична енергія T . Вона зростає швидше (пропорційно v^2) ніж спрямована на її зменшення робота сил тертя A .

Спробуємо грубо оцінити кінетичну енергію та роботу сил тертя, для об'єму рідини з характерним розміром l :

$$T = \frac{mv^2}{2} = \frac{\rho l^3 v^2}{2}$$

$$A = F_{TP} \cdot l = \eta \frac{v}{l} l^2 \cdot l = \eta v l^2$$

$$\text{Re} = \frac{T}{A} = \frac{\rho v l}{\eta}$$

Величина Re називається **критерієм (числом) Рейнольдса** (на честь англійського фізики Рейнольдса, що її ввів). За порядком величини число Рейнольдса дорівнює відношенню кінетичної енергії рідини до її втрати, що обумовлена роботою сил в'язкості на характерній довжині.

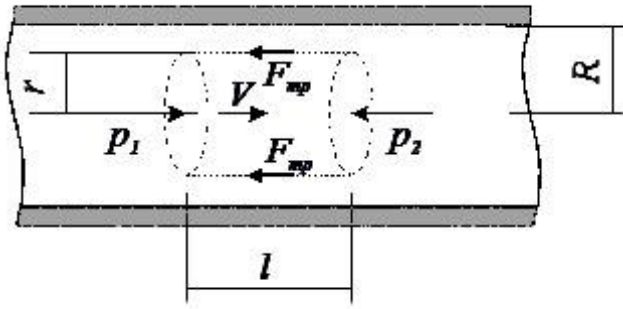
Число Рейнольдса визначає характер течії. Якщо воно менше критичного – течія ламінарна, якщо більше – турбулентна. Для круглої труби критичне значення числа Рейнольдса $\text{Re}_{кр} = 1000$.

Число Рейнольдса може бути критерієм подібності для течії рідини у трубах, каналах та ін. Характер течії різних рідин та газів у трубах з різними перерізами буде однаковим, якщо течіям відповідає однакове значення числа Рейнольдса. Це використовується для випробувань на моделях властивостей технічних об'єктів, що мають працювати в суцільних середовищах.



Формула Пуазейля

Розглянемо течію рідини в такому поширеному об'єкті, як кругла труба. Визначено, що швидкість руху рідини біля стінок дорівнює нулю, а на осі труби максимальна. Знайдемо закон залежності швидкості рідини від відстані r від осі труби. Для цього виділимо у рідині циліндричний об'єм з радіусом r та довжиною l .



Якщо течія стаціонарна, сума всіх сил, прикладених до цього об'єму дорівнює нулю. На основі циліндра діють сили тиску: $(p_1 - p_2)\pi r^2$. На бічну поверхню циліндра діє сила тертя: $\eta |dv/dr| \cdot 2\pi r l$. Запишемо умову стаціонарності:

$$(p_1 - p_2)\pi r^2 = \eta |dv/dr| \cdot 2\pi r l$$

Оскільки швидкість зменшується з відстанню від осі труби $dv/dr < 0$:

$$-\frac{dv}{dr} = \frac{(p_1 - p_2)r}{2\eta l},$$

$$dv = -\frac{p_1 - p_2}{2\eta l} r dr$$

Після інтегрування маємо:

$$v = -\frac{p_1 - p_2}{4\eta l} r^2 + C$$

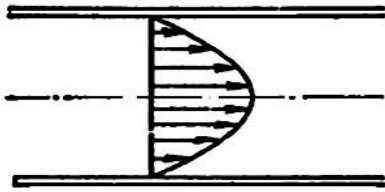
Константу інтегрування знаходимо з тієї умови, що швидкість рідини на стінках труби ($r = R$) дорівнює нулю:

$$C = v_0 = v(0) = \frac{p_1 - p_2}{4\eta l} R^2$$

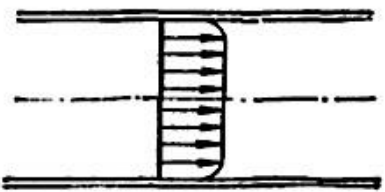
Підставивши C у попередню формулу одержуємо:

$$v(r) = \frac{p_1 - p_2}{4\eta l} (R^2 - r^2) = \frac{p_1 - p_2}{4\eta l} R^2 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) = v_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$$

Видно, що при ламінарній течії швидкість змінюється з відстанню від осі труби за параболічним законом. При турбулентній течії швидкість в кожній точці змінюється хаотично і при незмінних зовнішніх умовах незмінною виявляється середня (за часом) швидкість в кожній точці труби.



Визначимо потік рідини Q (об'єм рідини, що протікає через переріз труби за одиницю часу) вважаючи течію ламінарною. Для цього розіб'ємо переріз на

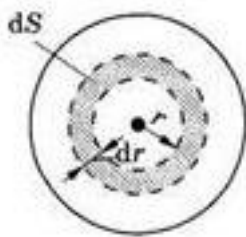


кільця шириною dr . Через кільце з радіусом r за час Δt пройде об'єм рідини: $V = v(r) \cdot 2\pi r dr \cdot \Delta t$. Підставивши отриману раніше функцію залежності швидкості від відстані до осі труби отримаємо:

$$dQ = \frac{V}{\Delta t} = v_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \cdot 2\pi r dr$$

Інтегруючи від 0 до R одержуємо:

$$Q = \int_0^R v_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \cdot 2\pi r dr = \frac{1}{2} \pi R^2 v_0$$

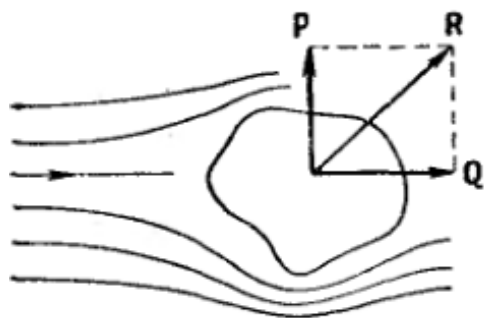


або

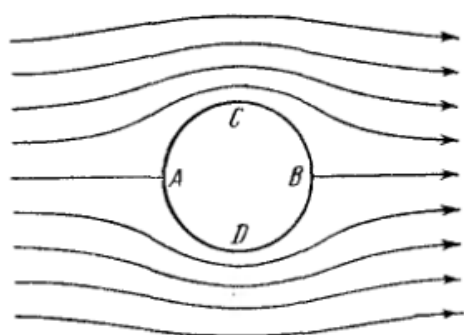
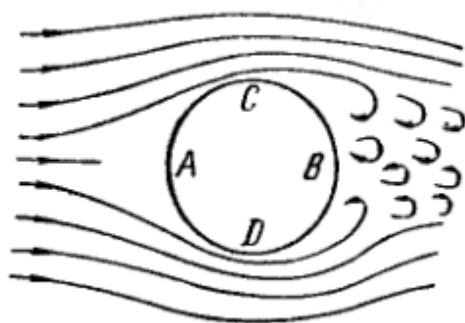
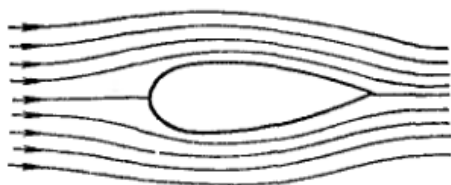
$$Q = \frac{(p_1 - p_2) \pi R^4}{8\eta l}$$

Ця формула називається **формулою Пуазейля**. Вона використовується для визначення в'язкості рідин. Для цього рідину пропускають через капіляр відомого радіусу і вимірюють різницю тисків на кінцях капіляра, та потік Q .

Рух тіл в рідинах та газах



На тіло, що рухається у рідині чи газі, діють дві сили. Сила $\vec{Q}$ спрямована в сторону, протилежну руху тіла (або в сторону руху потоку, що набігає на тіло) називається **лобовим опором**. Сила $\vec{P}$, перпендикулярна до напрямку руху називається **підйомною силою**.



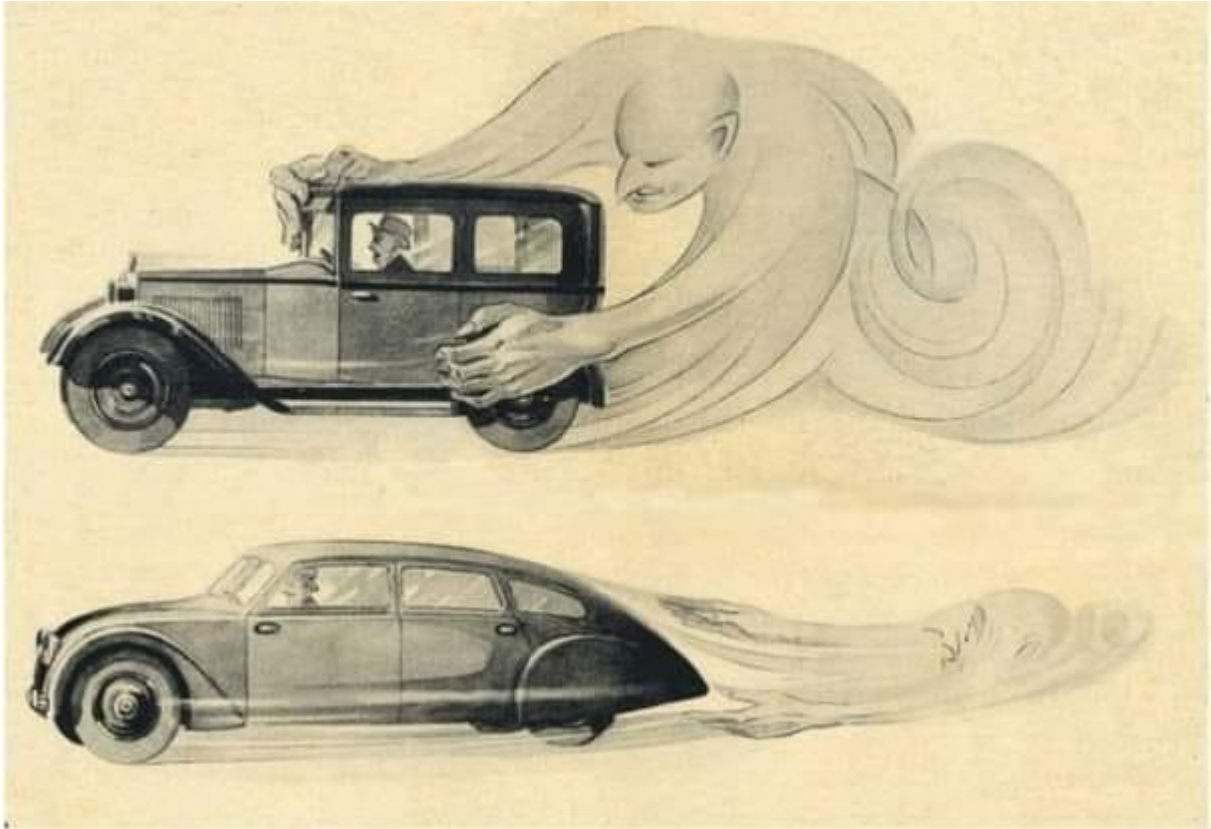
Лобовий опір складається з опору тертя та опору тиску. Опір тертя виникає внаслідок того, що тонкий шар рідини прилипає до поверхні тіла і рухається з ним як одне ціле. Він захоплює наступний шар і т.д. Таким чином тіло виявляється оточеним шаром рідини, у якому наявний градієнт швидкості. Цей шар називається **пограничним шаром**. В ньому діють сили тертя, що приводять до виникнення лобового опору. Опір тиску виникає при турбулентній течії через виникнення вихорів позаду тіла. Тиск в області вихорів стає пониженим, тому результуюча сил тиску ненульова, що теж приводить до виникнення лобового опору.

Очевидно симетричне тіло в потоці ідеальної речовини не відчувало б лобового опору і не захоплювалось би потоком. Цей висновок називається **парадоксом Ейлера**.

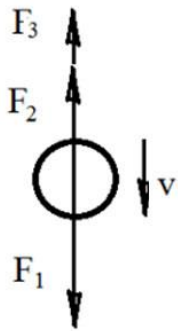
При малих значеннях числа Рейнольдса, тобто невеликих швидкостях і розмірах тіла, опір середовища обумовлений практично лише силами тертя. Стокс встановив, що сила опору в такому випадку пропорційна в'язкості рідини, характерному розміру тіла, та швидкості руху тіла відносно рідини. Для кулі сила опору:

$$F = 6\pi\eta r v$$

Цей вираз називається **формулою Стокса**.



Приклад: кулька тоне в рідині.



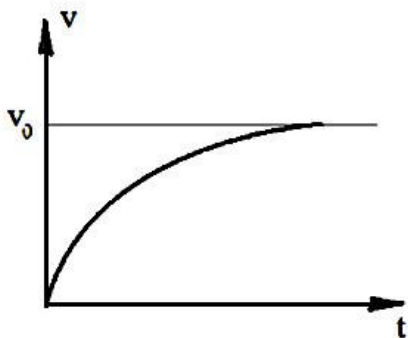
$$F_1 = mg = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho g$$

$$F_2 = F_{\text{Арх}} = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho_0 g$$

$$F_3 = 6\pi\eta r v$$

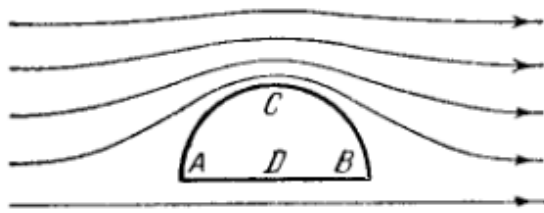
$$\frac{4}{3} \pi r^3 \rho g - \frac{4}{3} \pi r^3 \rho_0 g - 6\pi\eta r v = ma$$

$$m \frac{dv}{dt} + 6\pi\eta r v - \frac{4}{3} \pi r^3 g (\rho - \rho_0) = 0$$

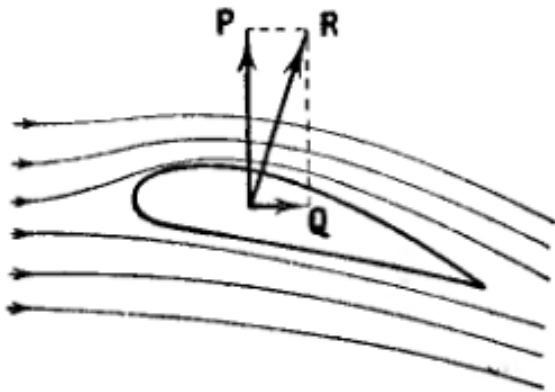


Якщо вирішити це диференціальне рівняння, то з'ясується, що швидкість кульки залежить від часу експоненціально і з часом стає сталою v_0

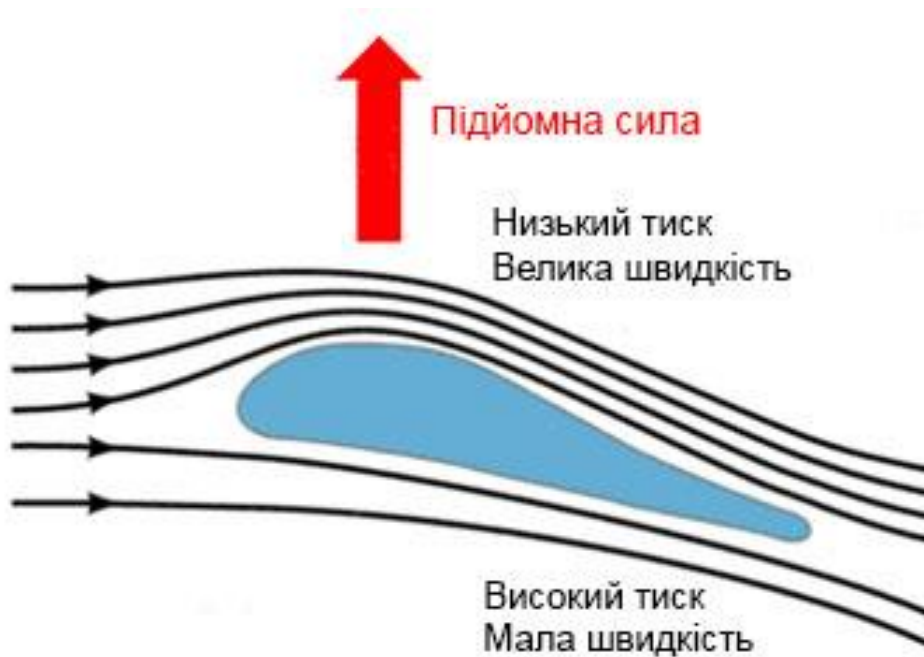
$$v_0 = \frac{2(\rho - \rho_0)gr^2}{9\eta} \quad (\text{при } a = 0)$$



Для виникнення **підйомної сили** в'язкість ролі не грає. На рисунку показані лінії течії при обтіканні напівциліндра рідиною. Видно, що біля верхньої частини напівциліндра лінії течії більш густі, тому тиск там буде менше, ніж біля нижньої поверхні, внаслідок чого виникне підйомна сила.



При проектуванні літаків треба добитись, щоб сила лобового опору була якомога менше, а підйомна сила – більше. Для цього фюзеляжу і крилам надають обтічну форму і спеціально розраховують профіль крила.



ОСНОВИ МОЛЕКУЛЯРНОЇ ФІЗИКИ

I ТЕРМОДИНАМІКИ

Молекулярна фізика та термодинаміка можуть здатися значно віддаленішими від повсякденних задач програміста, ніж, наприклад, кінематика, однак вони лежать в основі роботи будь-якої обчислювальної техніки. Усі комп'ютери – це фізичні системи, де передача й обробка інформації пов'язані з рухом електронів, енергією та теплом, що виділяється. Розуміння того, що обчислення супроводжуються енергетичними витратами і нагріванням, допомагає програмісту усвідомлювати обмеження продуктивності та ефективності систем.

Термодинаміка особливо важлива у контексті оптимізації. Кожна операція в процесорі споживає енергію і виділяє тепло, а отже ефективність алгоритмів має не лише часовий, а й енергетичний вимір. Це стає критичним у мобільних пристроях, дата-центрах і високопродуктивних обчисленнях, де питання енергоспоживання прямо впливає на вартість і стабільність роботи систем. Таким чином, програміст, який думає не тільки про швидкість, а й про ефективність, фактично працює з прикладними аспектами термодинаміки.

Молекулярна фізика важлива для програмістів не лише як основа розуміння матеріальної природи комп'ютерів, а й через свій статистичний характер. На відміну від класичної механіки, де можна точно передбачити рух окремого об'єкта, у молекулярній фізиці йдеться про величезну кількість частинок, поведінку яких описують імовірносно. Температура, тиск чи ентропія – це не властивості окремої молекули, а статистичні характеристики великої системи. Такий підхід дуже близький до багатьох задач у програмуванні, де також доводиться працювати не з детермінованими значеннями, а з розподілами, випадковістю і великими обсягами даних.

Молекулярна фізика також дає розуміння явищ шуму, похибок і випадковості. На рівні мікроскопічних процесів неможливо повністю уникнути флуктуацій, і це проявляється у вигляді помилок зчитування, нестабільності сигналів або обмежень точності обчислень. Для програміста це означає необхідність будувати системи, стійкі до випадкових збоїв: використовувати перевірки, дублювання, ймовірнісні алгоритми. У цьому сенсі надійність програмного забезпечення часто досягається не за рахунок повного контролю, а через правильну роботу з невизначеністю.

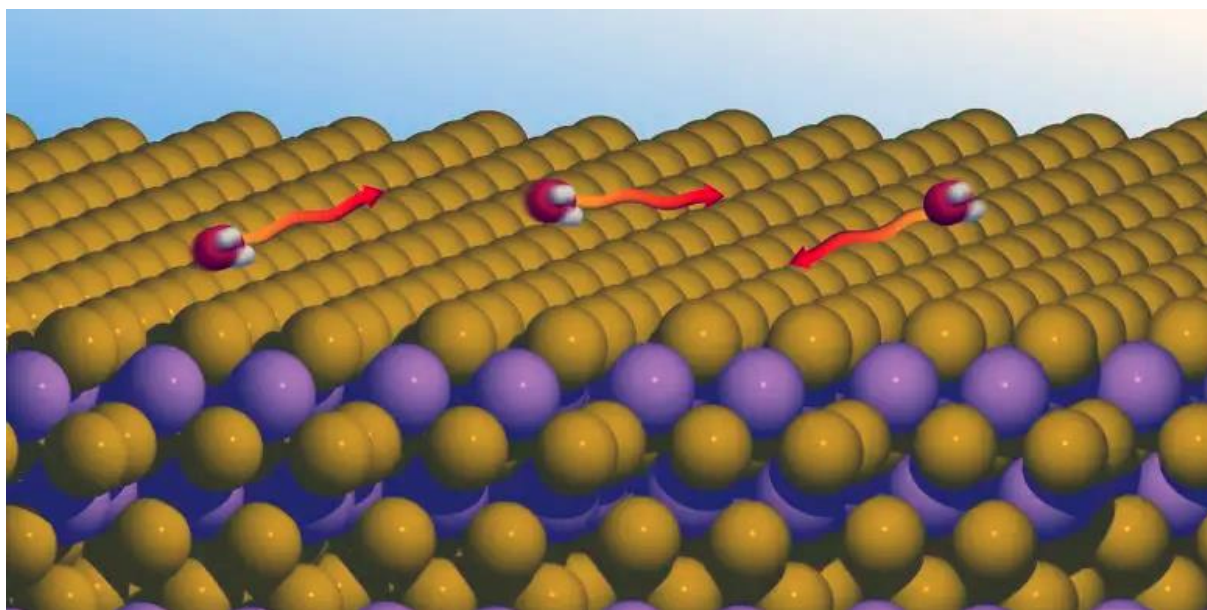
Нарешті, статистична логіка молекулярної фізики формує важливий стиль мислення: замість пошуку точного результату – розуміння типових

сценаріїв і меж можливого. Це особливо корисно в сучасному ІТ, де багато систем є складними, розподіленими і частково непередбачуваними. Таким чином, ідеї молекулярної фізики допомагають програмістам не лише краще розуміти техніку, а й ефективніше працювати з даними, випадковістю та складними системами.

Крім того, молекулярна фізика та термодинаміка сприяють розвитку інженерного мислення. Вони вчать бачити систему як таку, що має обмежені ресурси, схильна до втрат і неідеальностей. Це допомагає будувати більш надійні та ефективні програми, особливо у сферах, де важлива стабільність – від вбудованих систем до великих обчислювальних інфраструктур.

Молекулярна фізика та термодинаміка – розділи фізики, які вивчають одне й те ж коло явищ, а саме **макроскопічні** процеси в тілах, тобто процеси, які пов'язані з величезною кількістю атомів і молекул, з яких ці тіла складаються. Молекулярна фізика і термодинаміка взаємодоповнюють одна одну, відрізняючись підходом до досліджуваних явищ. В основі молекулярної фізики лежить **статистичний** (молекулярно-кінетичний) метод, а в основі термодинаміки – **термодинамічний** метод.

Термодинаміка – це наука про теплоту, про зв'язок теплоти з рухом. Вона вивчає загальні властивості макроскопічних систем, які знаходяться в стані термодинамічної рівноваги, і процеси переходу між цими станами. Термодинаміка не висуває гіпотез про будову речовини, чи фізичну природу теплоти. Її висновки ґрунтуються на двох загальних **принципах**, або **початках**, що є узагальненням дослідних даних. Термодинаміка розглядає теплоту як різновид якогось внутрішнього руху (**тепловий рух**), але не конкретизує, що це за рух.



Молекулярна фізика, яку ще називають **молекулярно-кінетичною теорією** будови речовини, на відміну від термодинаміки, виходить з уявлення про **атомно-молекулярну** будову речовини і розглядає теплоту як енергію неупорядкованого руху атомів і молекул. Вона вивчає **рух матерії** у більш складній, ніж механічна формі. У русі беруть участь не **матеріальна точка**, або **абсолютно тверде тіло**, а система молекул. В одному кубічному метрі газу при звичайних тисках і температурах міститься 10^{25} молекул, а в рідких та твердих тілах – 10^{28} молекул.

Закони поведінки величезного числа молекул, вивчаються за допомогою **статистичного методу**. Цей метод заснований на тому, що властивості макроскопічної системи визначаються властивостями часток системи, особливостями їх руху і усередненими значеннями динамічних характеристик цих часток (швидкості, енергії і т.д.). Макроскопічні характеристики тіл мають фізичний смисл лише у випадку великого числа молекул.

Закони механіки входять у молекулярну фізику. Рух окремих молекул описується законами механіки. У більшості випадків нам вистачить законів класичної механіки. Лише для уточнення певних моментів може знадобитись квантова, чи релятивістська механіка. Але молекулярну фізику не можна звести лише до механічних законів. Часто механічний опис систем, які розглядає молекулярна фізика, неможливий. Неможливо написати та розв'язати систему рівнянь для всіх молекул, що входять навіть в один кубічний сантиметр газу. Та це й не потрібно, оскільки у молекулярній фізиці з'ясовуються нові, більш загальні закономірності і нові поняття, незастосовні до окремих молекул. Наприклад, газ це сукупність величезної кількості молекул, але ми характеризуємо його стан не набором радіус-векторів $\vec{r}_i$ та швидкостей $\vec{v}_i$ окремих молекул, а зовсім новими параметрами: тиском P , об'ємом V та температурою T . Ці параметри незастосовні до окремих молекул, але якимось чином характеризують їхній стан.

Молекулярно-кінетична теорія і термодинаміка взаємно доповнюють одна одну, створюючи єдине ціле, але відрізняючись різними методами дослідження.

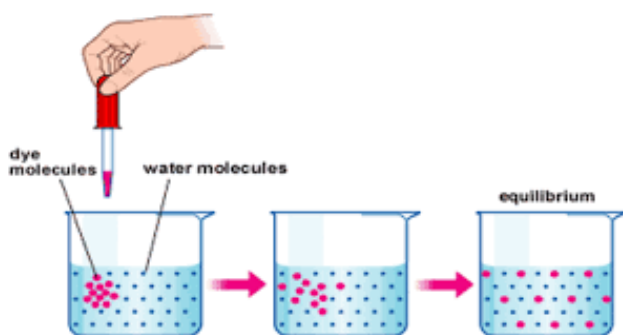
МОЛЕКУЛЯРНО-КІНЕТИЧНА ТЕОРІЯ ІДЕАЛЬНИХ ГАЗІВ

Основні уявлення молекулярної фізики (молекулярно-кінетичної теорії).

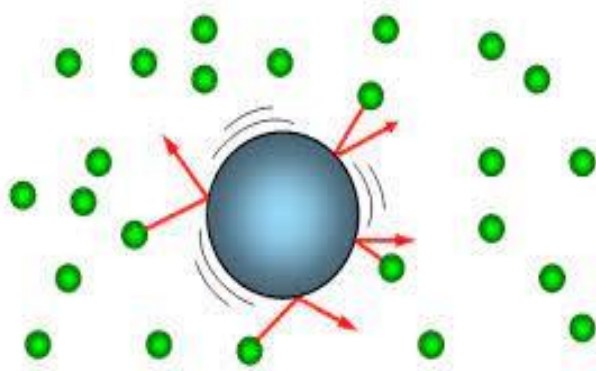
1. Всі тіла складаються з дуже дрібних часток – атомів і молекул.
2. Атоми та молекули знаходяться у стані безперервного руху, який не припиняється ні за яких умов.
3. Молекули різних речовин по різному взаємодіють між собою. Ця взаємодія залежить від типу молекул і відстані між ними. Цією закономірністю пояснюється різниця між агрегатними станами: газом, рідиною, твердим тілом.

Явища, спостереження яких привело до появи молекулярно-кінетичних уявлень.

1. Висока стисливість газів, яка свідчить про великі відстані між **частками речовини** – молекулами.
2. Намагання газу зайняти будь-який об'єм, яким би великим він не був. Це свідчить про **рух** часток.



3. Взаємне проникнення – **дифузія** – газів (а також рідин і твердих тіл, але повільніше). Це свідчить, що молекули однієї речовини рухаються у "порожнинах" між молекулами іншої. Про це ж свідчить перемішування рідин та розчинення твердих тіл.



4. **Броунівський рух.** Англійський ботанік Броун побачив, що пилок рослин у рідині рухається хаотично, невпорядковано. Це пояснюється тим, що для маленьких часток сума ударів молекул з різних сторін урівноважується в середньому, але не в кожному окремий момент часу.

5. І, нарешті, відомий з хімії закон Дальтона – **закон кратних співвідношень**: при сполученні різних елементів кількості речовин, що сполучуються, не довільні, а співвідносяться як невеликі цілі числа. Наприклад, азот поєднується з киснем у таких пропорціях: на 7 вагових частин азоту може припадати (1-5)х4 вагових частин кисню.

7 грамів N	4 грами O	закис азоту
7 грамів N	8 грамів O	окис азоту
7 грамів N	12 грамів O	азотистий ангідрид
7 грамів N	16 грамів O	двоокис азоту
7 грамів N	20 грамів O	азотний ангідрид

Це легко пояснити, якщо виходити з того, що атоми не однакові за масою і певна структура молекул речовини відповідає пропорціям атомів.

У молекулярно-кінетичної теорії користуються ідеалізованою моделлю **ідеального газу**, відповідно до якої:

- 1) власний об'єм молекул газу є нехтовно малим у порівнянні з об'ємом посудини;
- 2) між молекулами газу відсутні сили взаємодії;
- 3) зіткнення молекул газу між собою і зі стінками посудини абсолютно пружні.

Модель ідеального газу можна використовувати при вивченні реальних газів, оскільки вони в умовах, близьких до нормальних, а також при низькому тиску і високих температурах близькі за своїми властивостями до ідеального газу. Крім того, якщо ввести поправки, що враховують власний об'єм молекул газу і молекулярні сили, можна перейти до теорії реальних газів.

Стан ідеального газу описується емпіричним **рівнянням Менделєєва-Клапейрона**:

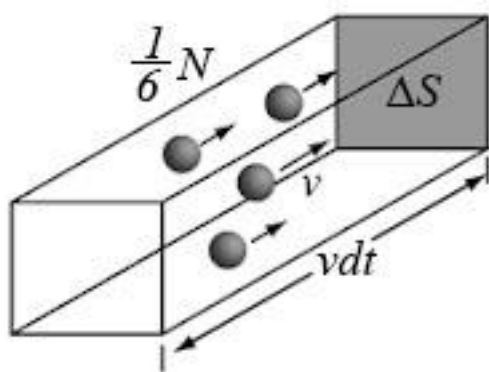
$$PV = \frac{m}{\mu} RT = \frac{N}{N_A} RT = \nu RT,$$

де $R = 8,31 \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{K})$ – універсальна газова стала, m – маса газу, μ – молярна маса газу, p – тиск, V – об'єм, T – абсолютна температура газу, N – кількість молекул газу, $N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$ – число Авогадро, ν – кількість речовини газу.

А тепер отримаємо **основне рівняння молекулярно-кінетичної теорії ідеальних газів**.

Розглянемо одноатомний ідеальний газ. Вважаємо, що молекули газу рухаються хаотично, число взаємних зіткнень між молекулами газу є нехтовно малим у порівнянні з числом ударів о стінки, а зіткнення молекул зі стінками абсолютно пружні.

Визначимо тиск газу на стінку



Виділимо біля стінки посудини об'єм з площею основи ΔS . Всього молекул в цьому об'ємі $N = nV = nv\Delta S\Delta t$ (де v – швидкість молекули). Оскільки до стінки рухається $1/6$ частина молекул, за проміжок часу Δt об неї вдариться $\frac{1}{6}nv\Delta S\Delta t$ молекул. Будемо вважати удари абсолютно пружними. Тоді зміна імпульсу кожної з часток буде

$-2mv$. Відповідно, повна зміна імпульсу всіх молекул за час Δt :

$$\Delta p = -(2mv) \cdot \frac{1}{6}nv\Delta S\Delta t = -\frac{1}{3}mnv^2\Delta S\Delta t$$

За II законом Ньютона:

$$\Delta p = F\Delta t,$$

де F – сила, що діє з боку стінки на молекули в середньому за час Δt . Але за III законом Ньютона ця сила дорівнює силі, що діє на стінку з боку газу

$$F = P\Delta S,$$

де P – тиск.

З останніх трьох формул отримуємо:

$$P = \frac{1}{3}nmv^2 = \frac{2}{3}n\varepsilon,$$

де $\varepsilon = \frac{mv^2}{2}$ – кінетична енергія поступального руху одної молекули.

Це рівняння називається **основним рівнянням молекулярно-кінетичної теорії газу**, або рівнянням Клаузіуса.

Згадаємо рівняння стану ідеального газу (Менделєєва-Клапейрона)

$$PV = \frac{N}{N_A} RT$$

$$P = \frac{N}{VN_A} RT = nkT,$$

де $k = \frac{R}{N_A} = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К}$ – стала Больцмана.

$$P = \frac{2}{3} n\varepsilon = nkT$$

Звідки

$$\varepsilon = \frac{3}{2} kT$$

Як видно, середня кінетична енергія поступального руху молекули ідеального газу не залежить від маси і прямо пропорційна абсолютній температурі газу.

Таким чином, виявляється, що **абсолютна температура** тіла – це кількісна міра енергії теплового руху молекул, з яких складається тіло.

Тепер більш докладно зупинимося на тому, як її вимірювати. Розглянемо дві системи, що складаються з великої кількості молекул (газ, рідина, тверде тіло). Приведемо їх у дотик так, щоб між ними не було **хімічних реакцій**; не відбувався **перенос речовини**; не було обміну **механічною енергією** макроскопічних рухів. Це можна зробити, наприклад, розділивши їх тонкою непроникною перегородкою і виключивши удари та ін.

В такому випадку залишається можливість обміну енергією через **мікроскопічні** рухи. Молекули одного тіла, що рухаються з більшою енергією, будуть передавати енергію **молекулам** другого. При цьому центри мас кожного з тіл залишатимуться на місці.

Такий процес називається обміном **внутрішньої енергії** систем, що дотикаються одна до одної. Внутрішня енергія – це енергія хаотичного руху молекул.

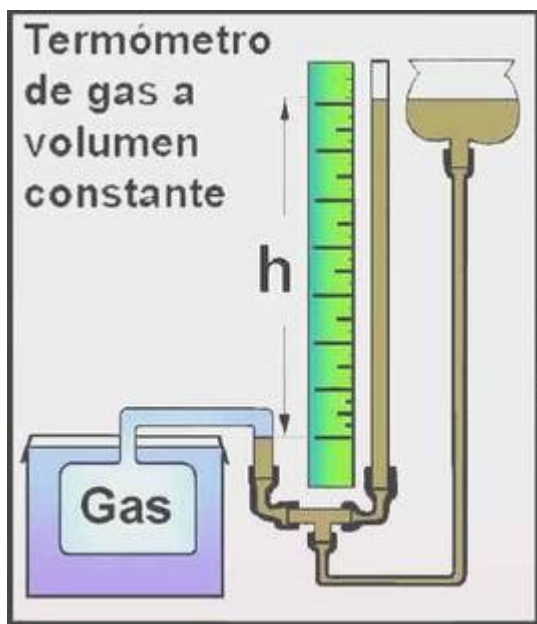
Ми вже домовились зв'язувати такий рух з тепловими характеристиками. Дотик – це **тепловий контакт**. Енергію, яку одне тіло передає іншому називають **кількістю переданої теплоти**.

Якщо збільшується температура тіла, збільшується кінетична енергія хаотичного руху його молекул, тобто внутрішня енергія. Вона передається від тіла з більшою енергією до тіла з меншою, тобто тіло з більшою температурою втрачає тепло (внутрішню енергію), а тіло з меншою температурою – отримує. При цьому змінюються фізичні характеристики системи (для газу – тиск і об'єм).

Звідси можна зробити висновок: *дві системи мають однакові температури, якщо при тепловому контакті їхній стан не змінюється.*

Якщо ми приведемо у тепловий контакт дві системи з різною температурою, то тепло буде перетікати до тих пір, поки не встановиться теплова рівновага. При цьому і температура вирівнюється.

Ще один висновок. *Якщо два тіла окремо знаходяться у тепловій рівновазі з третім тілом, то вони будуть знаходитись у тепловій рівновазі і між собою.* ($T_1 = T_3$ і $T_2 = T_3 \Rightarrow T_1 = T_2$).



Таким чином ми можемо встановити рівність температур двох тіл за допомогою третього тіла – **термометра**, у якого яка-небудь фізична характеристика змінюється пропорційно до зміни температури.

На рисунку зображено газовий термометр, за допомогою якого можна градуювати інші термометри.

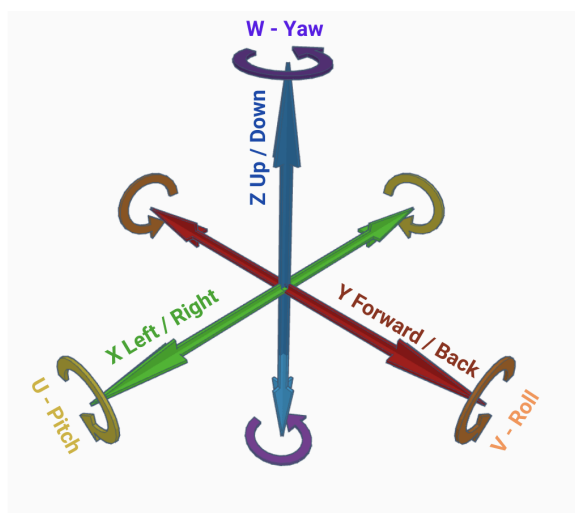
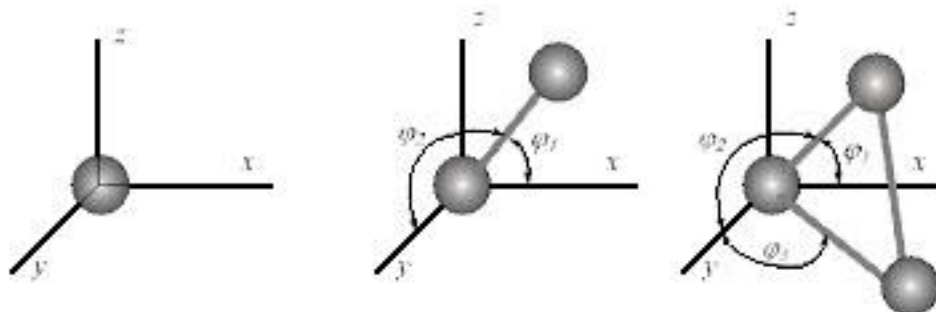
З отриманих раніше рівнянь $P = \frac{2}{3}n\varepsilon = nkT$ та $\varepsilon = \frac{3}{2}kT$ видно, що при прямуванні температури до **абсолютного нуля** середня кінетична енергія поступального руху молекул, та

тиск ідеального газу прямують до нуля, тобто поступальний рух молекул припиняється. Але припиняється не будь-який рух. Електрони в атомах продовжують здійснювати обертовий рух, атоми в кристалах – коливальний.

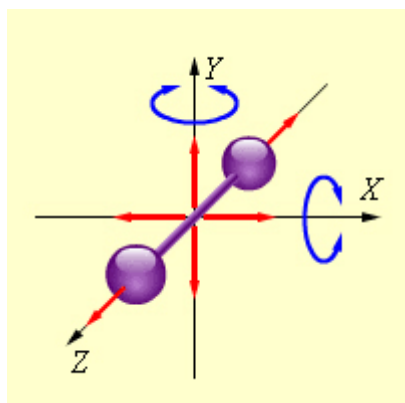
Тобто **абсолютний нуль** це не відсутність будь-якого руху, але такий стан при якому подальше зменшення інтенсивності цього руху за рахунок віддачі його енергії оточуючим тілам неможливе. Енергія при абсолютному нулі **найменша** з можливих.

Розподіл енергії газу по ступенях свободи (вільності)

Число ступенів свободи механічної системи – це кількість незалежних величин, за допомогою яких можна задати положення системи.



Для матеріальної точки існують три ступені свободи (координати x , y , z). Для системи з двох жорстко зв'язаних матеріальних точок (двохатомна молекула) ступенів свободи п'ять (три поступальних та дві обертальних). Для системи з трьох жорстко зв'язаних матеріальних точок (або твердого тіла) ступенів свободи шість (три поступальних, та три обертальних).



Взагалі система з N матеріальних точок без жорстких зв'язків має $3N$ ступенів свободи. Будь-який жорсткий зв'язок зменшує число ступенів свободи на одну, оскільки координати двох точок тепер будуть зв'язані співвідношенням:

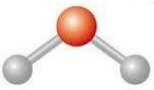
$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = \text{const}.$$

Ідеальний газ складається з матеріальних точок. Найближче до них – одноатомні молекули. Оскільки всі ступені свободи однаково ймовірні на один ступінь свободи поступального руху припадає енергія $\frac{1}{2}kT$.

Якщо зв'язок не жорсткий, а пружний, то додається ще один ступінь свободи – коливальний, на який припадає вдвічі більше енергії – kT – оскільки коливальний рух зв'язаний не лише з кінетичною, але й з потенціальною енергією.

В статистичній фізиці виводиться **закон рівного розподілу**, згідно з яким на кожний ступінь свободи молекули припадає в середньому однакова кінетична енергія, що дорівнює $\frac{1}{2}kT$.

Відповідно, для двохатомних молекул з жорстким зв'язком, що мають п'ять ступенів свободи: $\varepsilon = \frac{5}{2}kT$. Для трьохатомних молекул існує ще один обертальний ступінь свободи і відповідно $\varepsilon = 3kT$ (для лінійної трьохатомної молекули $\varepsilon = \frac{5}{2}kT$).

Жорсткі молекули	Одноатомна (Ne...)	Двохатомна (HCl...)	Трьохатомна лінійна (CO ₂ ...)	Трьохатомна нелінійна (H ₂ O...)
				
$n_{\text{пост}}$	3	3	3	3
$n_{\text{оберт}}$	0	2	2	3

Таким чином, середня кінетична енергія молекули дорівнює:

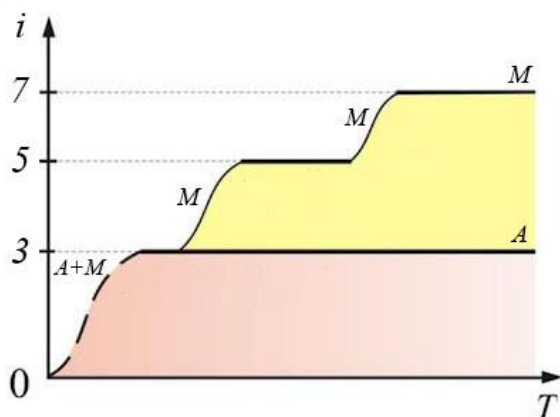
$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{i}{2}kT,$$

де i – число ступенів свободи.

Якщо говорити не лише про кінетичну, а про **повну** енергію, то коливальні ступені свободи слід рахувати двічі.

$$i = n_{\text{пост}} + n_{\text{оберт}} + 2n_{\text{колив}}$$

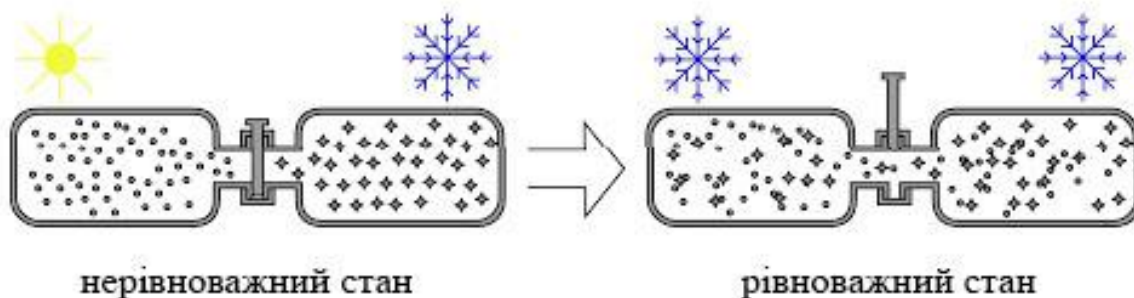
У реальних газів кількість ступенів свободи атома/молекули залежить від температури. На рисунку зображено залежність кількості ступенів свободи водню від температури. Крива А відповідає атомарному водню (H), крива М – молекулярному (H₂). Видно, що для реальних газів кількість ступенів свободи атома/молекули залежить від температури. На ділянці А+М і атомарний і молекулярний водень мають три поступальні ступені свободи. Зі зростанням температури для молекулярного водню додаються



обертальні ступені свободи, а потім ще й два коливальні. В проміжках між горизонтальними ділянками в досить широких інтервалах є перехідні ділянки, обумовлені тим, що молекули при тій же температурі мають різні швидкості.

Рівноважний розподіл молекул ідеального газу по швидкостях

Досі ми говорили лише про середню кінетичну енергію. А наскільки відрізняються від середньої енергії різних молекул? Наскільки відрізняються швидкості молекул від середньої? В принципі, навіть при однаковій середній енергії можуть бути різні варіанти. Але ситуацію можна спростити: ізолювати газ від оточуючого середовища і почекати достатньо довгий час. В загальному випадку система молекул прийде в рівновагу. Виникне **рівноважний стан**, або **стан термодинамічної рівноваги**. При цьому певній температурі відповідає певний розподіл молекул по швидкостях та по енергіях.



Знайдемо розподіл молекул газу по швидкостях. Середню квадратичну швидкість визначимо з рівняння для кінетичної енергії:

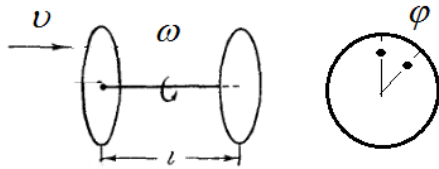
$$\frac{mv^2}{2} = \frac{3}{2}kT$$

$$v_{\text{кв}} = \sqrt{v^2} = \sqrt{\frac{3kT}{m}},$$

або, врахувавши, що $m = \frac{\mu}{N_A}$ і $R = kN_A$, отримаємо

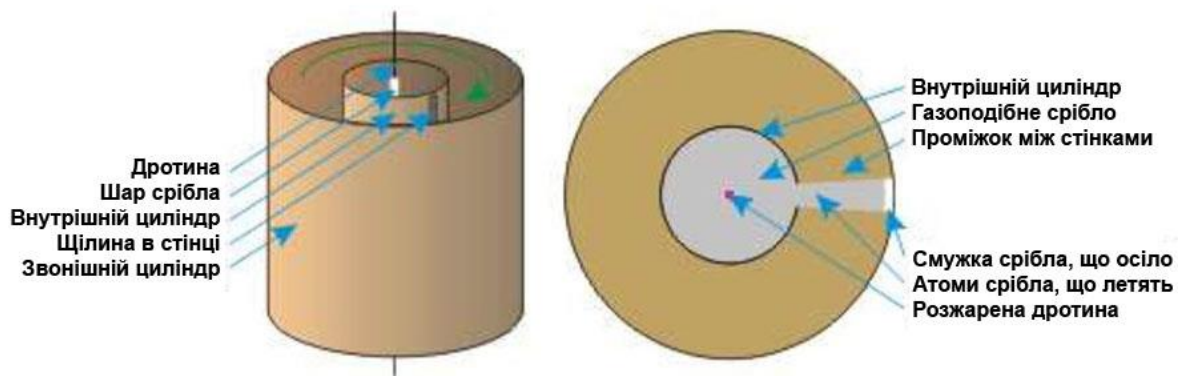
$$v_{\text{кв}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}$$

Для кисню при $T = 300\text{K}$ $v_{\text{кв}} = 480\text{м/с}$, для водню, маса якого в чотири рази менше, $v_{\text{кв}} \approx 2\text{км/с}$. Як же виміряти такі швидкості? Можна

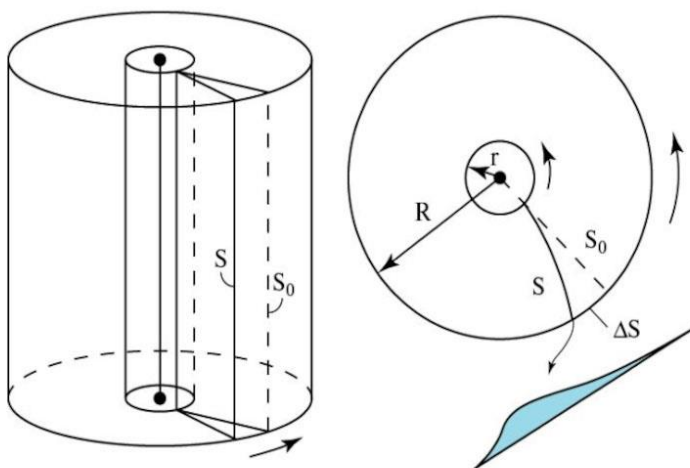


$$\begin{cases} l = v \cdot t \\ \varphi = \omega \cdot t \end{cases} \quad \frac{l}{\varphi} = \frac{v}{\omega} \quad \varphi = \frac{\omega \cdot l}{v}$$

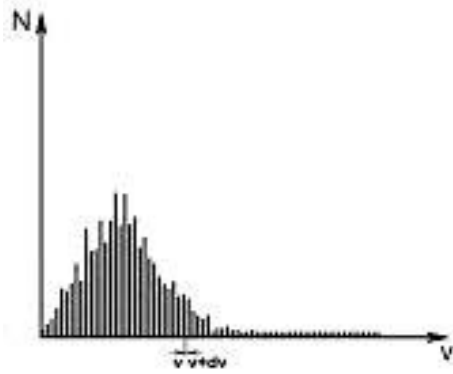
скористатись ідеєю, що використана для вимірювання швидкості рушничних куль. Два диска обертаються з кутовою швидкістю ω . Кут між дірками від кулі у першому і другому дисках $\Delta\varphi = \omega\Delta t = \omega l/v$, де l – відстань між дисками, v – швидкість кулі. Тоді $v = \omega l / \Delta\varphi$. При частоті обертання дисків 50 об/с , відстані $l = 1\text{ м}$ і швидкості кулі 1000 м/с , $\Delta\varphi \approx 20^\circ$. Такий кут легко виміряти.



Подібну ідею покладено в основу дослідів Штерна (1920 р.), по визначенню швидкості теплового руху молекул. Два коаксіальних циліндри обертаються з кутовою швидкістю ω . По осі приладу натягнуто платинову нитку, вкриту сріблом. Її нагрівають електричним струмом до 1200°C ,

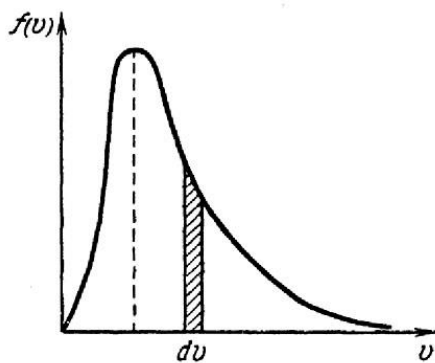


внаслідок чого срібло випаровується. Атоми срібла розлітаються приблизно з тією ж швидкістю, що й молекули ідеального газу при тій же температурі (пари срібла можна розглядати, як одноатомний газ). Повітря між циліндрами відкачують, щоб не було розсіювання молекул.



Кут, на який відхиляться атоми срібла: $\varphi = \omega t = \omega l / v$, звідки $v = \omega l / \varphi$. Така ж формула, як і для кулі. На поверхні зовнішнього циліндра осідає стрічка срібла неоднорідної товщини. Її можна розбити на інтервали по $\Delta\varphi$, яким відповідають інтервали Δv . Товщина ділянки пропорційна кількості молекул ΔN_v , швидкість яких лежить в інтервалі Δv .

За цими даними можна побудувати гістограму. Площа кожного стовпчика гістограми дорівнює числу молекул зі швидкостями, що відповідають даному інтервалу. Перейшовши до границі одержуємо



функцію розподілу: $f(v) = \frac{dN_v}{dv}$. Інтеграл від

цієї функції $\int f(v) dv = \int dN = N$. Тобто площа під цією кривою дорівнює загальній кількості часток (молекул).

У 1860 році Максвел, а пізніше Больцман обґрунтували цю залежність більш точно за допомогою статистичних методів:

$$dN_v = f(v)dv = N \cdot \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \cdot \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT} \right) \cdot 4\pi v^2 dv$$

де N – повне число молекул, m – маса однієї молекули. Величина dN_v / N – це ймовірність того, що швидкість молекули знаходиться в певному діапазоні.

Видно, що функція прямує до нуля, коли швидкість прямує до нуля, або до нескінченності. Вона має максимум при v_e – **найбільш ймовірній швидкості**. Це означає, що молекул зі швидкостями близькими до v_e більше всього. Цю швидкість можна знайти взявши похідну і прирівнявши її до нуля. В результаті одержимо:

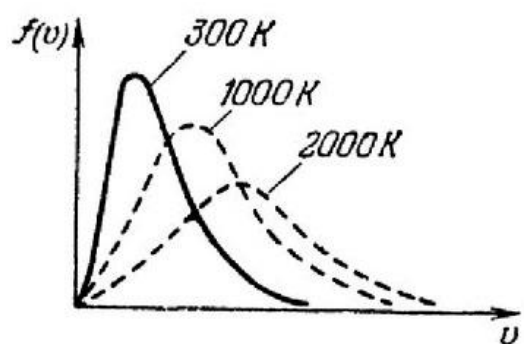
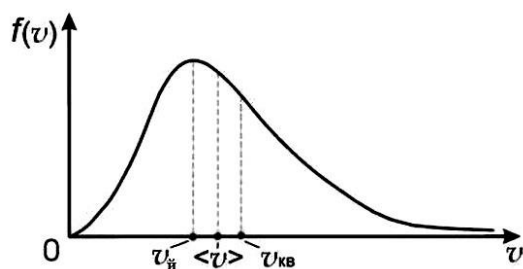
$$v_e = \sqrt{\frac{2kT}{m}}$$

Видно, що найбільш ймовірна швидкість в $\sqrt{1,5}$ рази менша ніж середня квадратична.

Є ще середня арифметична швидкість:

$$\langle v \rangle = \frac{\int v \cdot dN_v}{\int dN_v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$$

$$v_{\text{ср}} : \langle v \rangle : v_{\text{кв}} = 1 : 1,13 : 1,22$$



Зі зростанням температури всі ці швидкості зростають як $\sqrt{T}$. Розподіл зсувається вправо і знижується, оскільки площа під кривою дорівнює N . При цьому число повільних молекул зменшується, а швидких збільшується.

Подивившись на криві ми бачимо, що завжди є якась кількість молекул з енергією, що значно перевищує середню. Їх мало, але можуть відігравати найважливішу роль (наприклад у хімічних реакціях).

Число молекул у хвості зі

швидкістю $v > v_1 \left(\varepsilon > \frac{mv_1^2}{2} = \varepsilon_1 \right)$.

$$N_1 = \int_{v_1}^{\infty} dN_v = N \cdot \exp(-\varepsilon_1/kT)$$

Рівноважний стан газу в полі сил тяжіння

Досі ми вважали, що на молекули газу не діють зовнішні сили. Тому можна було припускати, що молекули газу заповнюють посудину рівномірно. Але в дійсності це не зовсім так, оскільки молекули будь-якого газу знаходяться у полі сил тяжіння Землі. Якби не було теплового руху молекул, вони б попадали на Землю, а якби не було тяжіння, атмосферне повітря розсіялося б по всьому Всесвіту. Спільна дія поля тяжіння та теплового руху молекул приводить до того, що концентрація молекул газу зменшується з висотою, відповідно зменшується і тиск ($P = nkT$).

Знайдемо закон зміни тиску ідеального газу з висотою в однорідному полі тяжіння $P(h)$ – **барометричну формулу**.

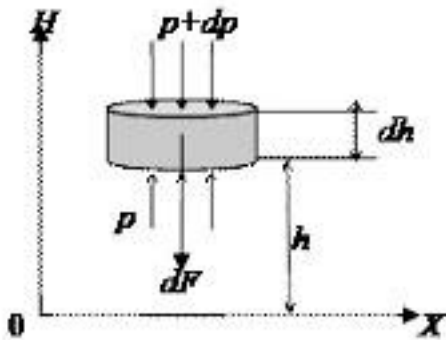
Точно врахувати всі умови важко, тому введемо деякі спрощення.

1. Сталість прискорення вільного падіння g . Це виправдано тим, що товщина атмосфери Землі (менше 100 км) значно менша від радіуса Землі ($R_3 = 6370 \text{ км}$).

2. Повітря вважаємо ідеальним газом, оскільки тиск невеликий. Масу молекул повітря вважаємо однаковою (основні компоненти повітря: азот (78,08 % об, $\mu_{N_2} = 28 \text{ г/моль}$) та кисень (20,95 % об, $\mu_{O_2} = 32 \text{ г/моль}$) мають приблизно однакову масу).

3. Вважаємо, що температура не змінюється з висотою $T = \text{const}$ (ізотермічна атмосфера). Це найбільша неточність, але важко врахувати реальний розподіл температури за висотою, оскільки на нього впливає багато випадкових факторів.

Виділимо в атмосфері горизонтальний шар повітря товщиною dh та площею S . Тиск на нижню поверхню цього шару P , на верхню: $P + dP$ ($dP < 0$). Число молекул у цьому шарі: $N = nSdh$. Сумарна сила тяжіння, що діє на всі ці молекули: $dF = mgnSdh$. За II законом Ньютона:



$$mgnSdh + (P + dP)S = PS$$

$$-dP = nmgdh = \frac{P}{kT} mgdh$$

$$\frac{dP}{P} = -\frac{mg}{kT} dh$$

Інтегруємо обидві частини

$$\ln P = -\frac{mgh}{kT} + \ln C$$

Потенціюємо

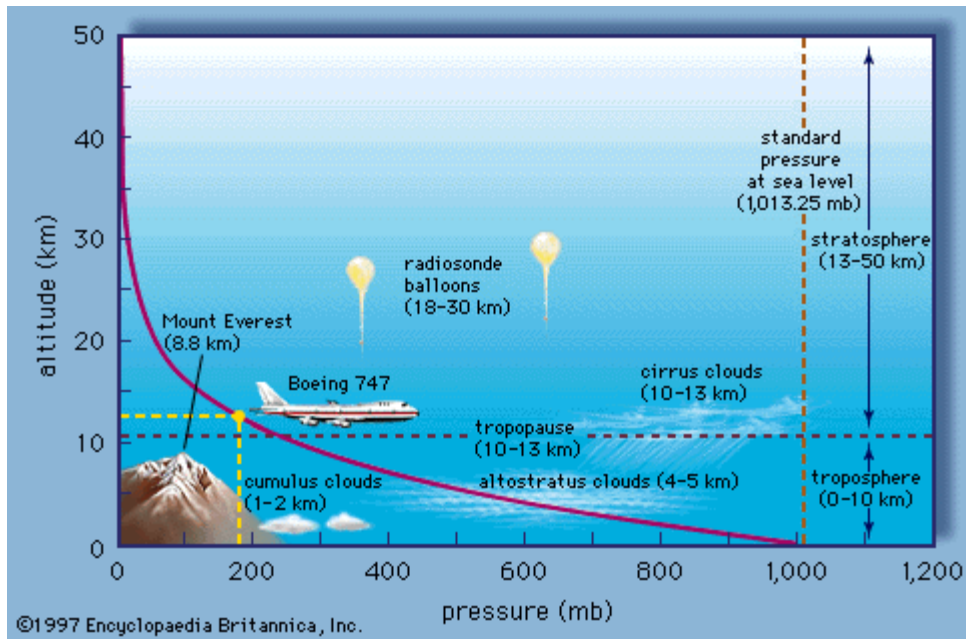
$$P = C \exp\left(-\frac{mgh}{kT}\right)$$

На висоті $h = 0$ тиск $P = P_0$. З урахуванням цього

$$P = P_0 \exp\left(-\frac{mgh}{kT}\right)$$

Це і є **барометрична формула**. Її можна переписати у вигляді:

$$P = P_0 \exp\left(-\frac{\mu gh}{RT}\right)$$



Врахувавши, що $P = nkT$ (відповідно $P_0 = n_0 kT$) отримуємо:

$$n = n_0 \exp\left(-\frac{mgh}{kT}\right)$$

$$n = n_0 \exp\left(-\frac{\mu gh}{RT}\right)$$

У цій формулі n – концентрація молекул на висоті h , а n_0 – концентрація молекул на висоті $h_0 = 0$. Якщо позначити $mgh = \Pi$ – потенціальна енергія молекул, одержуємо:

$$n = n_0 \exp\left(-\frac{\Pi}{kT}\right)$$

Видно, що у показнику експоненти стоїть співвідношення між потенціальною енергією молекул, та кінетичною енергією їх поступального руху. Цей вираз називається **розподілом Больцмана** і є справедливим не лише у випадку потенціального поля сил земного тяжіння, але й для будь-якого потенціального поля сил для сукупності будь-яких однакових часток, що знаходяться у стані теплового хаотичного руху.

ЯВИЩА ПЕРЕНОСУ В ГАЗАХ

Досі ми розглядали гази, що знаходяться у рівноважному стані, тобто всі фізичні характеристики системи (енергія, швидкість, маса молекул, якщо є –заряд) були розподілені рівномірно. Але ж можливі і відхилення від рівноважного стану. Їх можна характеризувати модифікувавши функцію розподілу по швидкостях, або розподілу Больцмана.

Але можливий ще й інший підхід: під час руху часток відбувається перенос через якусь площину маси, кількості, заряду, енергії, імпульсу... В рівноважному стані через будь-яку площину переноситься однакова кількість будь-якого параметру.

Потоком якої-небудь величини будемо називати її кількість, що переноситься за одиницю часу через одиницю поверхні.

$$\Phi = \frac{\Delta A}{\Delta t}$$

Такі потоки, що виникають при нерівноважних станах газу є основою особливих процесів, що носять назву **явища переносу**.

Явища переносу спостерігаються за наявності неоднорідності фізичних умов у молекулярній системі і проявляються в наявності потоку якого-небудь фізичного параметру, зв'язаного з молекулами (кількості, маси, енергії, заряду і т. ін.) через відповідно зорієнтовану площину у просторі. Мірою неоднорідності величини в певному напрямку служить *градієнт* (градієнт має бути перпендикулярним до згаданої площини).

Для кількісного опису явищ переносу необхідно конкретизувати модель "молекулярної системи".

Для розгляду явищ переносу суттєвим є наявність зіткнень між молекулами, оскільки швидкість *переносу* значно менша від швидкості теплового руху молекул. Необхідно також враховувати розмір молекул.

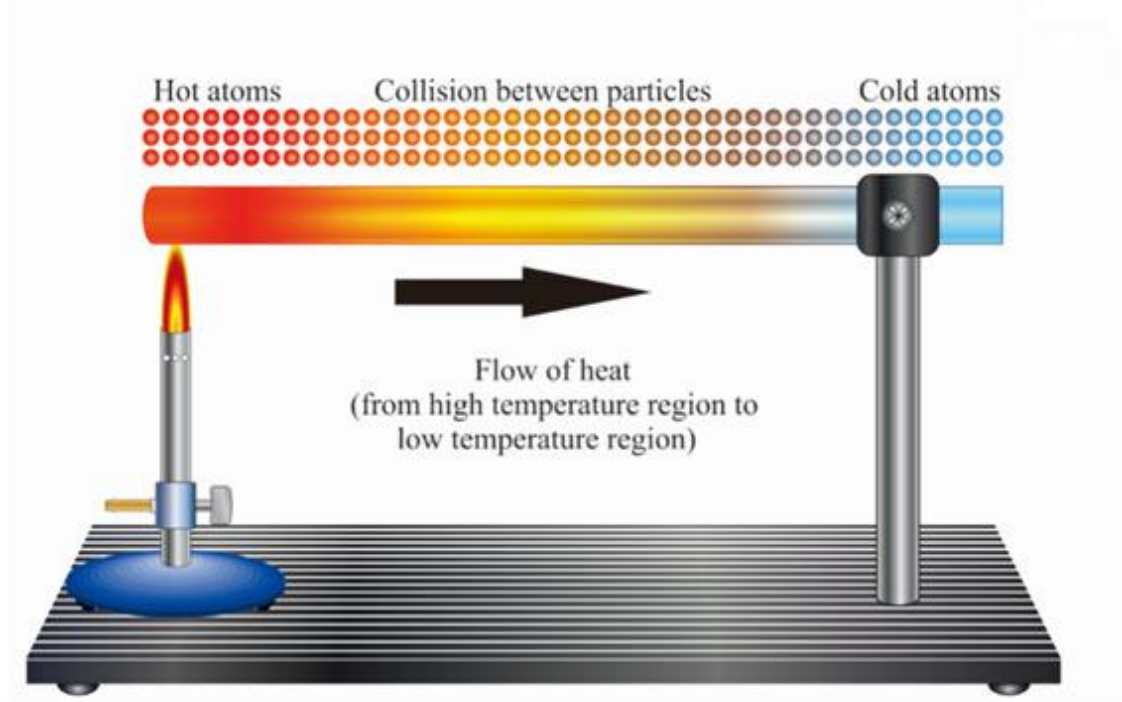
У загальному випадку потік може бути неоднорідним, якщо в різних точках інтенсивність перенесення не однакова. Тому для опису переносу в кожній точці вводять *густину потоку*:

$$j = \frac{\Delta \Phi}{\Delta S_{\perp}},$$

де $\Delta S_{\perp}$ – елементарна площадка, перпендикулярна до напрямку переносу.

Емпіричні закони явищ переносу

Теплопровідність виникає за наявності різниці температур, що викликана якимись зовнішніми факторами. При цьому молекули газу в різних місцях його об'єму мають різну середню кінетичну енергію і

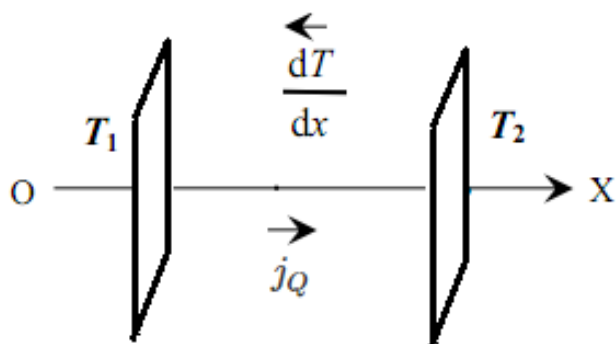


хаотичний тепловий рух молекул приводить до *направленого переносу внутрішньої енергії газу*. Для теплопровідності існує емпіричний **закон Фур'є**:

$$j_Q = -\kappa \frac{dT}{dx},$$

де j_Q – густина потоку теплоти через поверхню S , розташовану перпендикулярно до осі x , κ – коефіцієнт теплопровідності ($Bm/m \cdot K$).

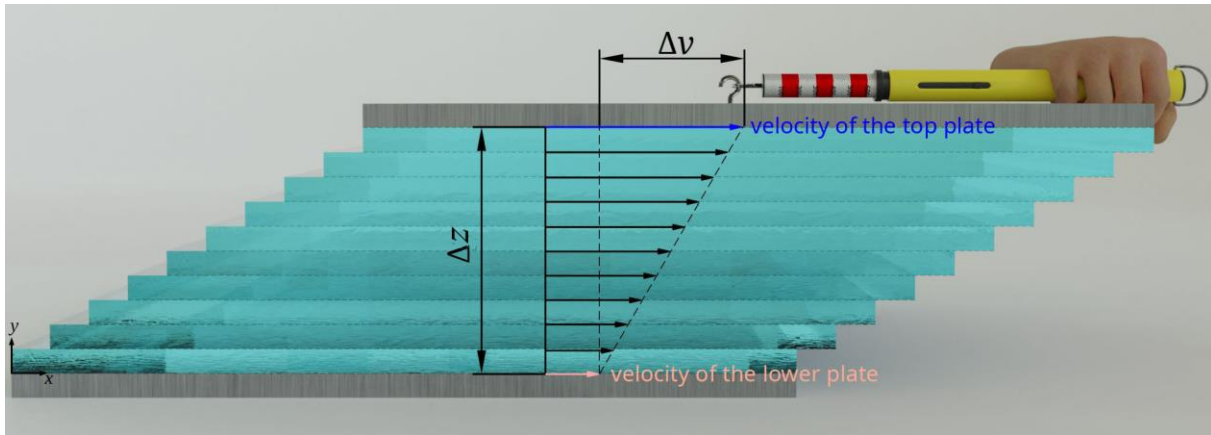
Знак "–" означає, що тепло тече в напрямку зменшення температури.



Відповідно, кількість теплоти ΔQ , що переноситься через ділянку перерізу потоку площею ΔS за час Δt дорівнює:

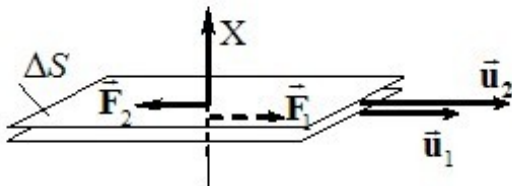
$$\Delta Q = -\kappa \frac{dT}{dx} \Delta S \Delta t$$

Внутрішнє тертя (в'язкість) зв'язане з виникненням сил тертя між шарами газу, що переміщуються паралельно один до одного з різними швидкостями. З молекулярно-кінетичної точки зору причиною в'язкості є



накладання впорядкованого руху молекул газу з різними швидкостями та хаотичного теплового руху молекул. Молекули, що переходять із шару в шар, "переносять" імпульси свого впорядкованого руху. Так, молекула з більш швидкого шару, переходячи в повільніший прискорює його молекули і навпаки.

Рівняння Ньютона для внутрішнього тертя, яке ми розглядали раніше,



$$F = \eta \left| \frac{dv}{dx} \right| \Delta S$$

можна переписати у вигляді:

$$p = -\eta \frac{dv}{dx} \Delta S \Delta t$$

де p – імпульс, що передається за час Δt від шару до шару через поверхню ΔS , тобто потік імпульсу через ΔS ($\text{кг} \cdot \text{м} / \text{с}^2$). Знак "-" означає, що імпульс "перетікає" у напрямку зменшення швидкості.

Поділивши це рівняння на ΔS та Δt отримаємо ще одну форму **рівняння Ньютона** для внутрішнього тертя.

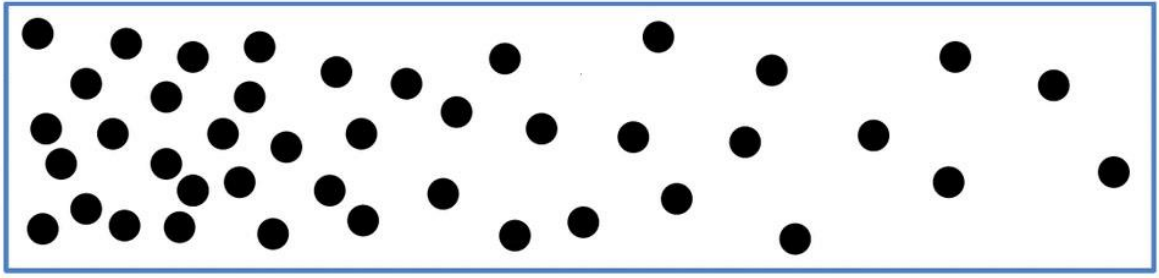
$$f = -\eta \frac{dv}{dx},$$

де f – сила внутрішнього тертя на одиницю площі дотику шарів, або

$$j_p = -\eta \frac{dv}{dx}$$

де j_p – густина потоку імпульсу.

Дифузією називається явище самовільного проникнення та перемішування часток двох газів, що дотикаються один до одного. За сталої

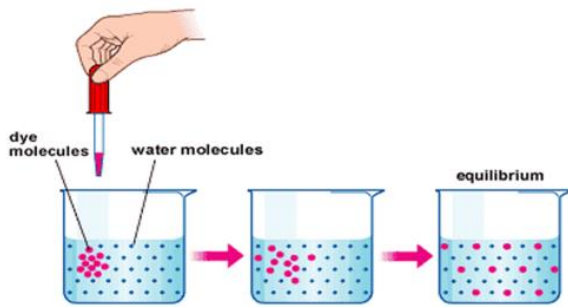


x —————→

температури дифузія полягає в переносі маси газу з місць з більшою його концентрацією в місця з меншою.

$$N = -D \frac{dn}{dx} \Delta S \Delta t,$$

де N – кількість часток, що проходять за час Δt крізь поверхню ΔS , перпендикулярну до напрямку потоку. D – коефіцієнт дифузії. Знак "–" означає, що молекули "перетікають" у напрямку зменшення концентрації. Відповідно, густина потоку часток $j = N/(\Delta S \Delta t)$ визначається рівнянням



$$j_n = -D \frac{dn}{dx},$$

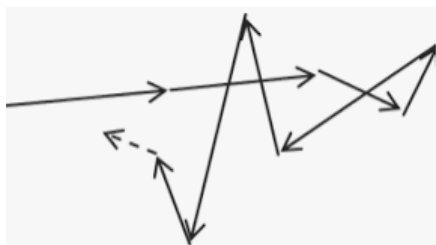
яке називають рівнянням дифузії, або **рівнянням Фіка**.

Якщо обидві частини цього рівняння помножити на масу однієї молекули m_0 і врахувати, що $\rho = nm_0$ – густина речовини, то в правій частині отримаємо градієнт густини, а в лівій – густину потоку маси. Відтак отримаємо рівняння густини потоку маси:

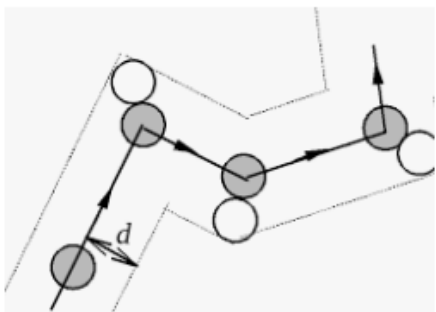
$$j_m = -D \frac{d\rho}{dx}$$

Середня довжина вільного пробігу молекул

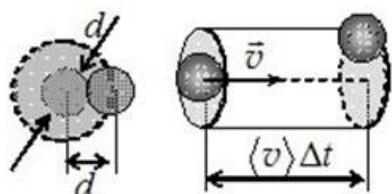
Вирівнювання характеристик ізольованої системи по всьому її об'єму обумовлюється тим, що молекули безперервно стикаються одна з одною і переходять з одних місць в інші. При цьому кожна молекула між двома послідовними зіткненнями проходить певну відстань, яка називається



довжиною вільного пробігу. Через хаотичність і велику швидкість теплового руху ця відстань не прогнозовано змінюється від зіткнення до зіткнення. Тому мірою вільного руху молекул в системі є *середня довжина вільного пробігу* λ .



Оцінімо її величину в ідеальному газі. Для цього будемо розглядати молекули як пружні кульки, і уявимо, що рухається лише одна молекула, а інші перебувають у спокої. За час Δt ця молекула проходить середню відстань $\Delta l = \langle v \rangle \Delta t$, де $\langle v \rangle$ – середня арифметична швидкість молекули. При цьому дана молекула стикається з усіма молекулами, центри яких потраплять у циліндр висоти Δl і радіуса d , який дорівнює діаметру молекули.



За таких умов середня кількість зіткнень z за час Δt дорівнює кількості молекул у вказаному циліндрі:

$$z = nV = n\pi d^2 \langle v \rangle \Delta t$$

де n – концентрація молекул.

В дійсності рухається не одна, в всі молекули, тому ймовірність зіткнення даної молекули з якоюсь іншою визначається їхньою середньою відносною швидкістю, яка в $\sqrt{2}$ разів більша за середню арифметичну швидкість $\langle v \rangle$ (див. Додаток 1). Відповідно:

$$z = \sqrt{2} n \pi d^2 \langle v \rangle \Delta t = \sqrt{2} n \sigma \langle v \rangle \Delta t$$

де $\sigma = \pi d^2$ – так званий ефективний переріз молекули.

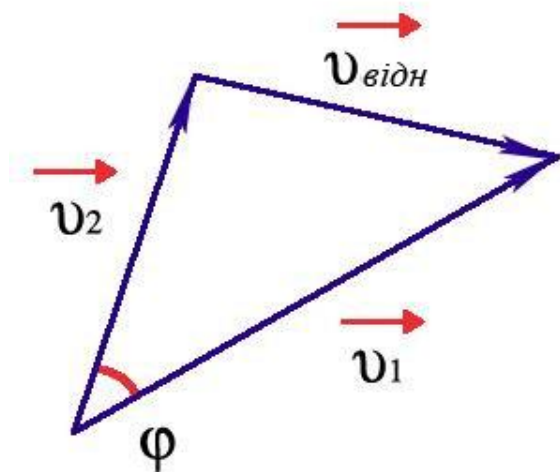
Якщо на відстані Δl відбувається z зіткнень даної молекули з іншими, то середня довжина вільного пробігу $\lambda = \Delta l / z$ і

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2} \pi d^2 n} = \frac{1}{\sqrt{2} \pi \sigma n}$$

Скориставшись формулою Клаузіуса $P = nkT$, можна перейти до макроскопічних параметрів, які безпосередньо вимірюються:

$$\lambda = \frac{kT}{\sqrt{2}P\pi d^2}$$

З цієї формули видно, що при зміні тиску змінюється довжина вільного пробігу молекул (при сталій температурі). Коли ця довжина досягає розмірів посудини, ми вважаємо, що отримали **вакуум**. Зіткнення молекул між собою припиняються, молекули зіштовхуються лише зі стінками посудини. Таким чином, виявляється, що вакуум залежить від розмірів посудини. При розмірі посудини 10 см, $P_g \approx 10^{-6} \text{ атм}$. При цьому $n = 10^{19} \text{ м}^{-3}$, але ми вже маємо вакуум.



Додаток 1: відносна швидкість (див. рисунок)

$$v_{\text{відн}}^2 = v_1^2 + v_2^2 - 2v_1v_2 \cos \varphi$$

Нас цікавлять середні значення:

$$\langle v \rangle_{\text{відн}}^2 = \langle v \rangle_1^2 + \langle v \rangle_2^2 - 2\langle v \rangle_1 \langle v \rangle_2 \langle \cos \varphi \rangle$$

За випадкових хаотичних відхилень всі кути рівноймовірні, тому $\langle \cos \varphi \rangle = 0$, $\langle v \rangle_1^2 = \langle v \rangle_2^2 = \langle v \rangle^2$.

Врахувавши це, отримаємо:

$$\langle v \rangle_{\text{відн}} = \sqrt{2} \langle v \rangle.$$

Молекулярно-кінетична теорія явищ переносу в газах

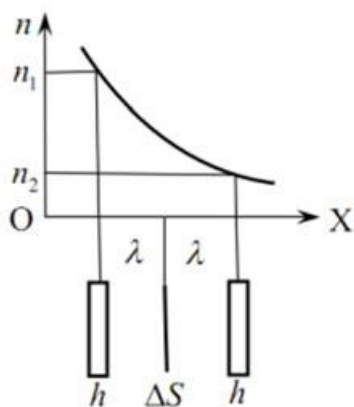
Дифузія (самодифузія). Раніше ми вже записали рівняння Фіка

$$j_n = -D \frac{dn}{dx}$$

Виведемо його, виходячи з уявлень молекулярно-кінетичної теорії.

Нехай у газі підтримується незалежний від часу нерівномірний розподіл концентрації молекул у напрямку осі ОХ.

За таких умов в напрямку осі ОХ створюється стаціонарний потік молекул. Визначимо густину цього потоку в довільній точці x . Для цього виділимо в газі два тонкі шари на відстані вільного пробігу молекул від точки x . Товщина кожного шару $h \ll \lambda$, а площа ΔS .



Можна вважати, що крізь площадку ΔS проходять всі молекули кожного шару, які вилітають в її напрямку паралельно до осі. Враховуючи однакову ймовірність всіх напрямків теплового руху молекул, можна вважати, що в цьому напрямку рухається $1/6$ всіх молекул газу. Для виділених шарів це складає, відповідно

$$N_1 = \frac{1}{6} n_1 \Delta S h \text{ і } N_2 = \frac{1}{6} n_2 \Delta S h.$$

Політ цих молекул крізь площину ΔS триває протягом часу $\Delta t = h / \langle v \rangle$, який потрібен, щоб найвіддаленіші з них подолали відстань між стінками шару при середній швидкості руху $\langle v \rangle$. Відповідно для густини потоку молекул отримуємо:

$$j = \frac{N}{\Delta S \Delta t} = \frac{1}{6} n \langle v \rangle$$

Густина зустрічних потоків молекул крізь площину ΔS буде, відповідно,

$$j_1 = \frac{1}{6} n_1 \langle v \rangle \text{ і } j_2 = \frac{1}{6} n_2 \langle v \rangle, \text{ а}$$

результуюча густина потоку дифузії:

$$j_n = \frac{1}{6} (n_1 - n_2) \langle v \rangle = -\frac{1}{6} \Delta n \langle v \rangle,$$

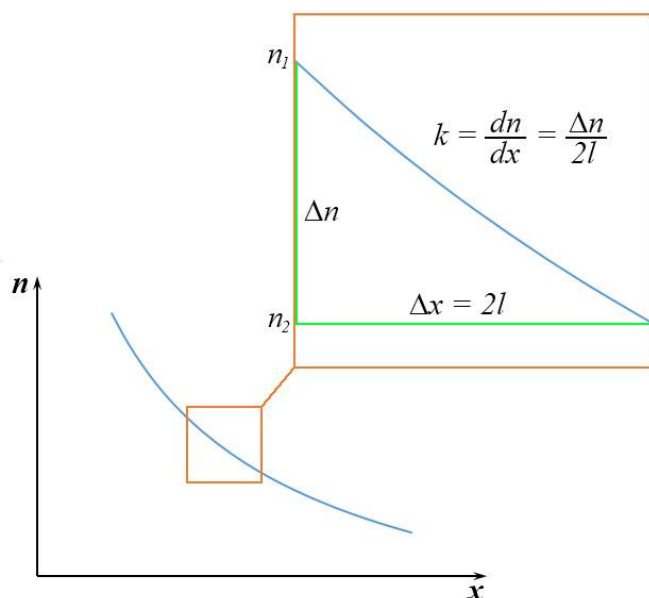
де Δn – приріст концентрації молекул вздовж осі ОХ на відстані 2λ .

Оскільки λ дуже мала величина, можна записати

$$\Delta n = \frac{dn}{dx} \Delta x = 2\lambda \frac{dn}{dx}$$

Відповідно, для густини потоку частинок при самодифузії отримаємо:

$$j_n = -\frac{1}{3} \lambda \langle v \rangle \frac{dn}{dx}$$



Порівнявши з рівнянням Фіка, бачимо, що коефіцієнт дифузії

$$D = \frac{1}{3} \lambda \langle v \rangle$$

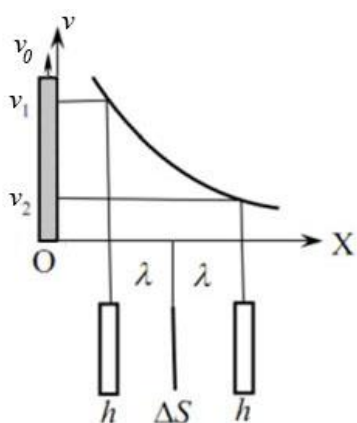
Таким чином, коефіцієнт дифузії це величина, що чисельно дорівнює потоку часток через одиничний переріз за одиницю часу при одиничному градієнті концентрації.

Швидкість дифузійного потоку прямо пропорційна до градієнту концентрації часток і спрямована в бік, протилежний напрямку градієнта.

В'язкість. Згадаємо формулу Ньютона для внутрішнього тертя:

$$f = -\eta \frac{dv}{dx}$$

Нехай у газі, що знаходиться в стані спокою, перпендикулярно до осі ОХ рухається пластина. Швидкість пластини v_0 . Шар повітря, що прилягає до пластини рухається з тією ж швидкістю (молекули "прилипають" до пластини, отримують швидкість v_0 і "відлипають"). Швидкість пластини значно менша від середньої швидкості хаотичного руху молекул газу ($v_0 \ll \langle v \rangle$). Шар газу, що прилягає до згаданого шару також частково захоплюється і починає рухатись і т.д.



Як і в попередньому випадку виділимо в газі два тонкі шари на відстані вільного пробігу молекул від точки x . Товщина кожного шару $h \ll \lambda$, а площа ΔS . Швидкості впорядкованого руху молекул у шарах, відповідно, v_1 і v_2 . Концентрація і середня швидкість теплового руху молекул в обох цих шарах однакова, відповідно однакова і густина потоку молекул:

$$j = \frac{1}{6} n \langle v \rangle$$

Але при цьому потік імпульсу крізь площину ΔS з різних боків буде різний: $j_1 = \frac{1}{6} n \langle v \rangle m v_1$ і $j_2 = \frac{1}{6} n \langle v \rangle m v_2$, де m – маса молекули. Відповідно густина потоку імпульсу крізь цю площину:

$$j_p = \frac{1}{6} n \langle v \rangle m (v_1 - v_2) = -\frac{1}{6} n \langle v \rangle m \Delta v = -\frac{1}{3} \lambda \langle v \rangle n m \frac{dv}{dx}$$

Врахувавши, що $m n = \rho$ – густина газу, отримаємо рівняння густини потоку імпульсу:

$$j_p = -\frac{1}{3} \lambda \langle v \rangle \rho \frac{dv}{dx}$$

Порівнявши його з формулою Ньютона отримаємо вираз для коефіцієнта внутрішнього тертя:

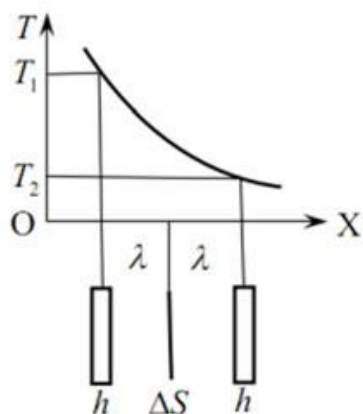
$$\eta = \frac{1}{3} \lambda \langle v \rangle \rho$$

Теплопровідність. Пригадаємо закон Фур'є

$$j_Q = -\kappa \frac{dT}{dx}$$

Розглянемо газ, що знаходиться між двома стінками з різними температурами T_1 і T_2 (відповідно, у ньому існує градієнт температур). Знайдемо швидкість переносу тепла.

При цьому будемо вважати, що а) середня кінетична енергія $\langle \varepsilon \rangle$ залежить від координати x , але середня швидкість руху молекул у сусідніх шарах $\langle v \rangle$ однакова; б) будемо також вважати, що концентрація молекул в сусідніх шарах однакова.



Скористаємось тією ж схемою, що і в попередніх двох випадках. Виділимо в газі два тонкі шари на відстані вільного пробігу молекул від точки x . Товщина кожного шару $h \ll \lambda$, а площа ΔS . Можна вважати, що крізь площадку ΔS проходять всі молекули кожного шару, які вилітають в її напрямку паралельно до осі. При цьому молекули з першого шару більш "гарячі", ніж молекули з другого шару, і, відповідно переносять з собою більшу кінетичну енергію.

Тому зустрічний рух двох пучків молекул супроводжується перенесенням теплової енергії від гарячих до холодних зон. Розрахуємо потік цієї енергії.

Очевидно, густина потоку енергії крізь площадку ΔS дорівнює $j(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)$, де ε – середня кінетична енергія однієї молекули, j – густина потоку молекул, вираз для якої ми отримали раніше. Енергія молекули визначається за формулою $\varepsilon = \frac{i}{2} kT$, відповідно:

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = \frac{ik}{2}(T_1 - T_2) = \frac{ik}{2}\Delta T = -\frac{ik}{2} \cdot 2\lambda \frac{dT}{dx}$$

Вираз для густини потоку ми отримали раніше: $j = \frac{1}{6}n\langle v \rangle$. Відповідно, густина теплового потоку при теплопровідності:

$$j_Q = -\frac{1}{3}\lambda\langle v \rangle \cdot \frac{ikn}{2} \cdot \frac{dT}{dx}$$

У множнику $\frac{ikn}{2}$ можна домножити чисельник і знаменник на сталу Авогадро N_A і масу молекули m . Тоді, врахувавши, що $mn = \rho$ – густина газу, $mN_A = \mu$ – молярна маса газу, а також $R = N_A k$, $C_v = \frac{i}{2}R$ – молярна теплоємність газу за сталого об'єму і $c_v = \frac{C_v}{\mu}$ – питома теплоємність газу за сталого об'єму, отримаємо:

$$j_Q = -\frac{1}{3}\lambda\langle v \rangle \rho c_v \cdot \frac{dT}{dx}$$

Порівнявши цей вираз з законом Фур'є, отримаємо вираз для коефіцієнту теплопровідності:

$$\kappa = \frac{1}{3}\lambda\langle v \rangle \rho c_v$$

Тепер можемо порівняти формули і коефіцієнти для трьох явищ переносу:

Назва явища	Формула	Коефіцієнт
Дифузія	$j_n = -D \frac{dn}{dx}$	$D = \frac{1}{3}\lambda\langle v \rangle$
В'язкість	$j_p = -\eta \frac{dv}{dx}$	$\eta = \frac{1}{3}\lambda\langle v \rangle \rho$
Теплопровідність	$j_Q = -\kappa \frac{dT}{dx}$	$\kappa = \frac{1}{3}\lambda\langle v \rangle \rho c_v$

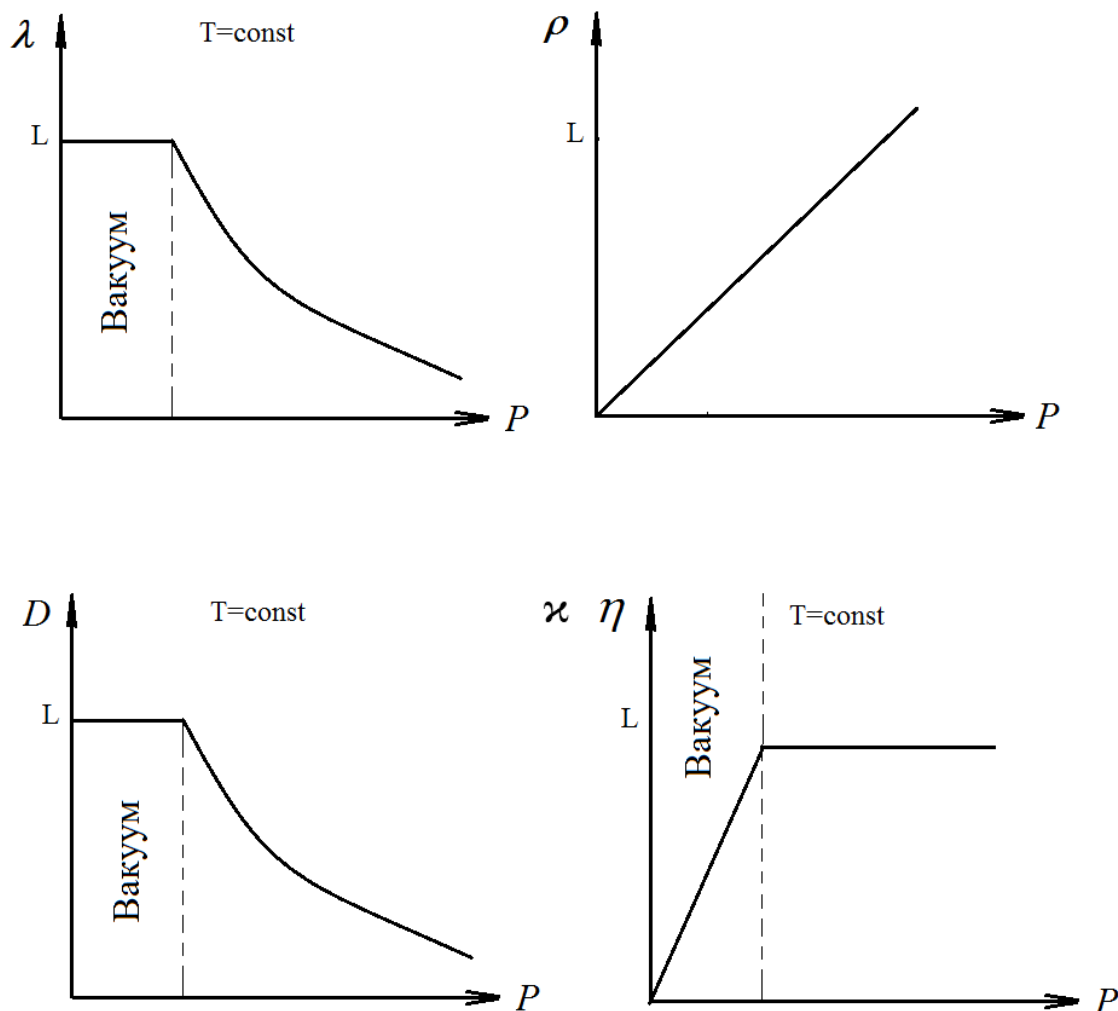
Очевидно, що коефіцієнти зв'язані між собою

$$\eta = D\rho$$

$$\kappa = D\rho c_v = \eta c_v$$

Зазначимо, що формула для довжини вільного пробігу $\lambda = \frac{kT}{\sqrt{2}P\pi d^2}$ справедлива тоді, коли молекули співударяються між собою частіше, ніж зі стінками посудини. В цьому випадку при незмінній температурі λ обернено пропорційна до тиску $\lambda \sim \frac{1}{P}$ (густини газу $\lambda \sim \frac{1}{\rho}$).

Якщо молекули частіше співударяються зі стінками посудини, ніж між собою, довжина вільного пробігу перестає залежати від густини і визначається характерним розміром посудини. Незалежність довжини вільного пробігу молекул від густини визначає одне із понять вакууму.



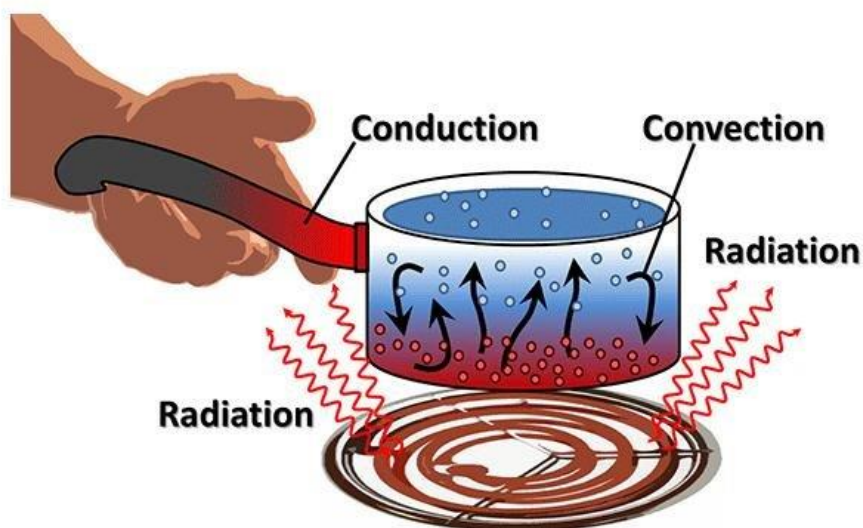
Додаток 2. Способи передачі теплоти.

Існує три способи передачі теплоти від одного тіла до іншого.

Теплове випромінювання – перенос енергії електромагнітними хвилями. Одне тіло випромінює хвилі, а інше поглинає.

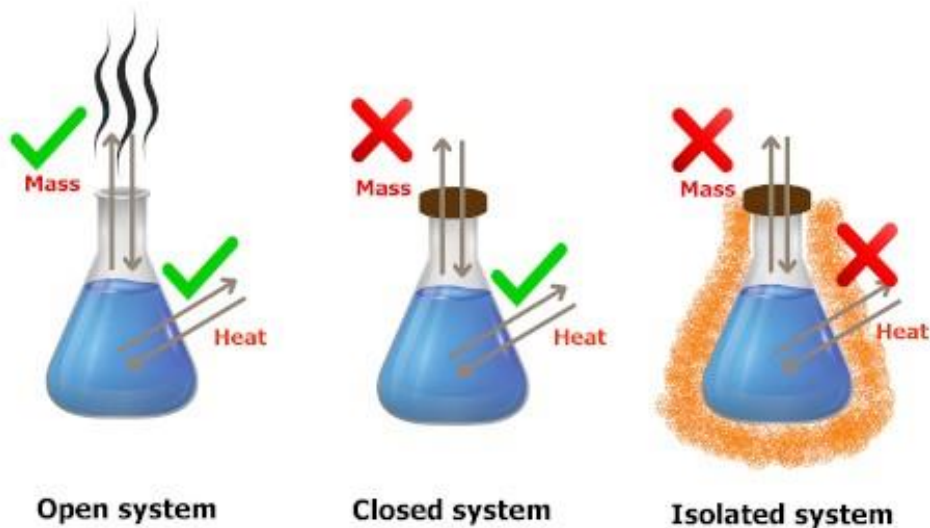
Конвекція – перенос теплоти потоками речовини. Можлива лише у газоподібних, рідких та сипучих середовищах.

Теплопровідність – процес передачі теплоти від більш нагрітого тіла до менш нагрітого (або від більш нагрітої частини тіла до менш нагрітої) за рахунок хаотичного теплового руху молекул. Перенос речовини при цьому не відбувається.

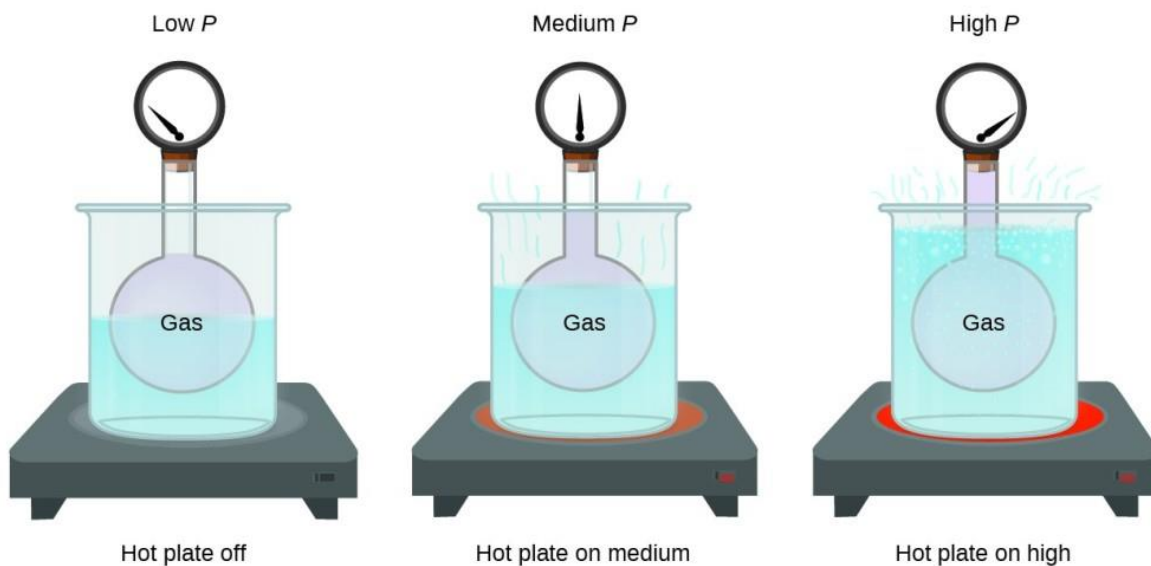


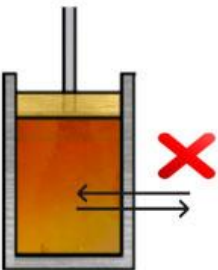
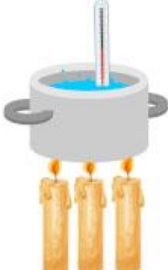
ОСНОВИ ТЕРМОДИНАМІКИ

Термодинамічна система – сукупність макроскопічних тіл, які взаємодіють і обмінюються енергією та/або масою як між собою, так і з іншими тілами (зовнішнім середовищем). Основа **термодинамічного методу** – визначення стану термодинамічної системи.

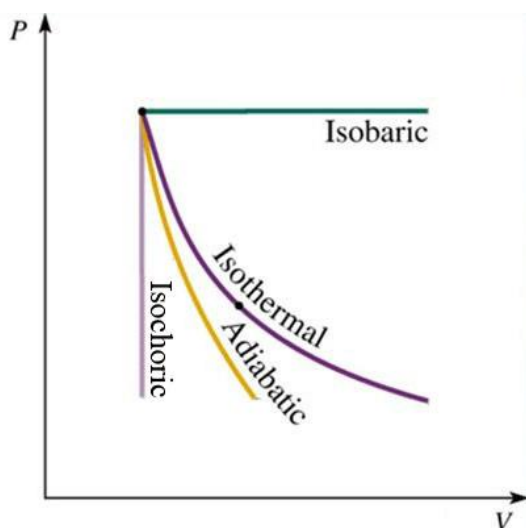


Стан системи задається **термодинамічними параметрами (параметрами стану)** – сукупністю фізичних величин, що характеризують властивості термодинамічної системи. Зазвичай в якості параметрів стану вибирають температуру, тиск і об'єм (T , P , V).



Ізобарний процес  $P = const$ Процес, в ході якого тиск не змінюється	Ізохорний процес  $V = const$ Процес, в ході якого об'єм не змінюється
Адіабатний процес  $S = const$ Процес, в ході якого немає теплообміну з зовнішнім середовищем	Ізотермічний процес  $T = const$ Процес, в ході якого температура не змінюється

Параметри стану системи можуть змінюватися. Будь-яка зміна в термодинамічній системі, пов'язана зі зміною хоча б одного з її термодинамічних параметрів, називається **термодинамічним процесом**. Макроскопічна система перебуває в термодинамічній рівновазі, якщо її стан з часом не змінюється (вважається, що зовнішні умови даної системи при цьому не змінюються). Такий стан системи називається **рівноважним**. Якщо параметри стану в різних частинах системи відрізняються, такий стан називається **нерівноважним**.



Перехід з нерівноважного стану в рівноважний називається **процесом релаксації**, або просто **релаксацією**.

Якщо по координатних осях системи координат відкладати значення яких-небудь двох параметрів, то будь-який рівноважний стан можна буде зобразити точкою на координатній площині. Нерівноважний стан таким чином відобразити не можна, тому що в такому стані хоча б один з параметрів не буде мати визначеного значення.

Рівноважний процес – це процес, що складається з безперервної послідовності рівноважних станів. Рівноважний процес можна провести в зворотному напрямку, причому система буде проходити ті ж стани, що і при прямому ході, але у зворотній послідовності. Тому такі процеси називають також **оборотними**.

Оборотний процес можна зобразити на координатній площині відповідною кривою.

Взагалі всі кількісні співвідношення термодинаміки точно застосовні лише до рівноважних процесів.

Перший закон/принцип/початок термодинаміки

Внутрішньою енергією тіла називається енергія цього тіла за вирахуванням кінетичної енергії тіла як цілого і потенціальної енергії тіла у зовнішньому полі сил. Вона складається з кінетичної енергії хаотичного руху молекул, потенціальної енергії їхньої взаємодії та внутрішньомолекулярної енергії.

Внутрішня енергія є *функцією стану* системи. Це означає, що вона залежить від параметрів системи (P, V, T) і не залежить від її передісторії. Відповідно, при переході системи з одного стану в інший *зміна* внутрішньої енергії не залежить від способу, яким цей перехід було здійснено.



Внутрішню енергію тіла можна змінити двома способами: а) виконанням над тілом *роботи* A' ; і б) передачею тілу *тепла* Q .

При виконанні над тілом роботи механічна енергія руху зовнішніх тіл переходить у енергію хаотичного руху молекул.

Так, наприклад, поршень насоса, стискаючи газ, виконує над ним роботу A' . За третім законом Ньютона газ при цьому виконує над поршнем роботу $A = -A'$.

Передача тілу тепла не зв'язана з переміщенням зовнішніх тіл і, відповідно, з виконанням макроскопічної роботи. В цьому випадку енергія передається за рахунок обміну ударами молекул тіл, що дотикаються. Крім того енергія передається за рахунок випромінювання. Сукупність мікроскопічних процесів, що приводять до передачі енергії від тіла до тіла називається **теплопередачею**.

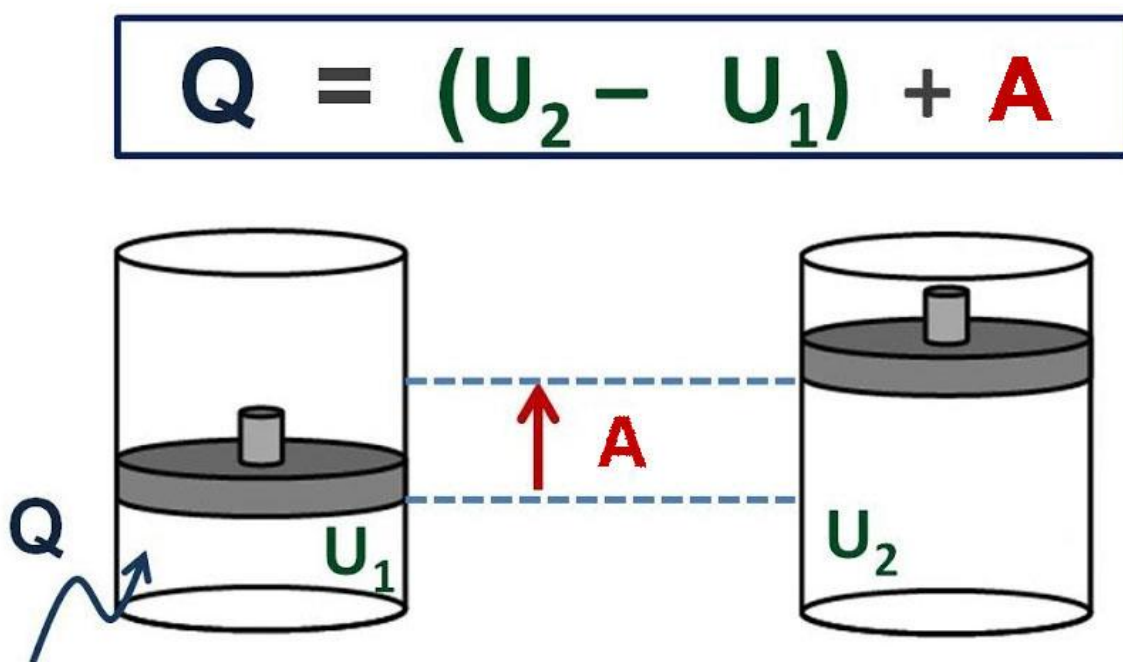
Внаслідок закону збереження енергії приріст внутрішньої енергії системи дорівнює сумі виконаної над системою роботи та кількості переданого системі тепла:

$$U_2 - U_1 = Q + A',$$

де U_1 і U_2 – початкове та кінцеве значення внутрішньої енергії системи.

Замість роботи A' , що виконується над системою, можна ввести роботу A , яку система виконує над зовнішніми тілами.

$$Q = U_2 - U_1 + A$$



Це співвідношення називається **першим законом (принципом) термодинаміки**. Словами його можна виразити так: *кількість теплоти, передана системі, йде на приріст внутрішньої енергії системи та на виконання системою роботи над зовнішніми тілами*.

Всі величини, що входять в це рівняння алгебраїчні і можуть мати будь-який знак. Наприклад, може бути $A > Q$, тоді $U_2 < U_1$ – тобто система виконує роботу за рахунок внутрішньої енергії. Якщо $Q < 0$ – система не отримує теплоту, а віддає.

Теплота вимірюється в одиницях роботи – Джоулях (СІ). Раніше використовувалась одиниця теплоти калорія – кількість теплоти необхідна для нагрівання 1 грама води на 1 градус. (1 кал = 4,18 Дж).

Щоб провести обчислення для різних процесів, переходять до диференціалів:

$$d'Q = dU + d'A$$

Внутрішня енергія U – функція стану, яка однозначно визначає стан і не залежить від виду переходу. Штрих позначає, що A і Q – не функції стану, а якраз залежать від виду переходу, тобто не можна, наприклад, записати $\int_1^2 d'A = A_2 - A_1$, оскільки такий запис означав би, що робота, яку виконала система, дорівнює різниці "запасів" роботи в другому і першому станах

Після інтегрування отримуємо:

$$Q = (U_2 - U_1) + A$$

Робота газу при зміні об'єму

Взаємодію тіла з навколишніми тілами можна охарактеризувати тиском, який воно на них здійснює. Це стосується і газів і твердих, чи рідких тіл. Сили тиску приводять до переміщення границь (тобто зміни об'єму).

Переміщення під дією сили означає роботу. Відповідно робота може бути виражена через тиск та зміну об'єму тіла.

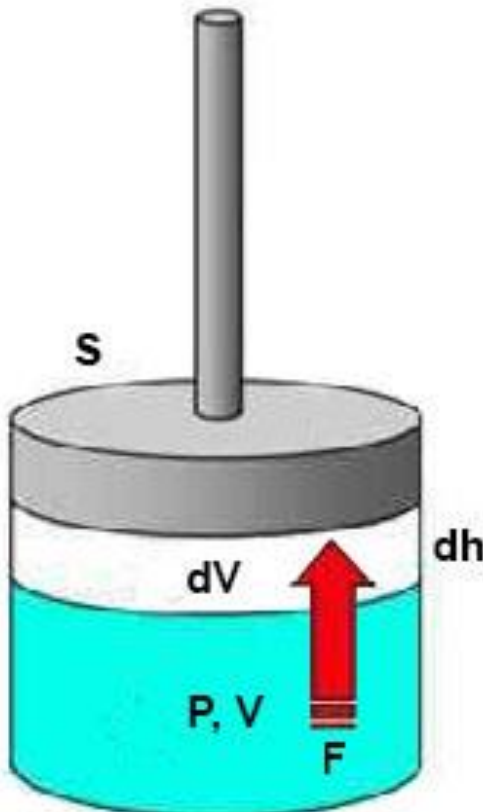
Щоб знайти цей вираз, розглянемо приклад. Якщо газ, що знаходиться під поршнем, почне розширюватись він виконає над поршнем роботу:

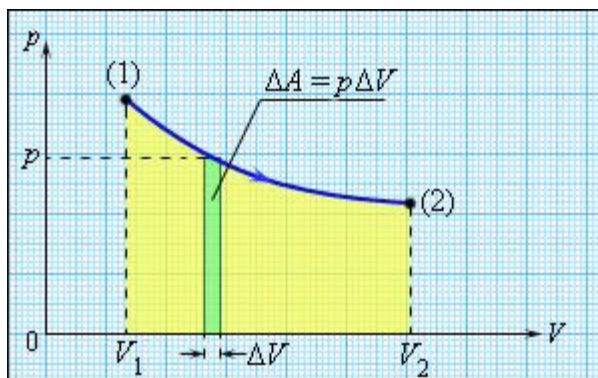
$$\Delta'A = F\Delta h = PS\Delta h = P\Delta V$$

Величина $\Delta'A$ є алгебраїчною, тобто може бути позитивною та негативною (коли напрямки сили та переміщення протилежні). Цей вираз справедливий лише для рівноважних процесів.

Якщо тиск газу сталий (змінюється температура), то при зміні об'єму робота дорівнює:

$$A_{12} = P(V_2 - V_1)$$





Якщо тиск змінюється, то ця формула справедлива лише для досить малих ΔV . Повну роботу знаходимо шляхом інтегрування:

$$A_{12} = \int_{V_1}^{V_2} P dV$$

Ці вирази для роботи справедливі за будь-яких змін об'єму твердих, рідких та газоподібних тіл.

Для знаходження роботи, що виконується при якомусь процесі, зручно використовувати діаграму (P, V) . Тоді робота на ділянці 1-2 (від V_1 до V_2) дорівнює площі під кривою. Тепер можна переписати рівняння I закону термодинаміки:

$$d'Q = dU + PdV$$

Внутрішня енергія та теплоємність ідеального газу

Теплоємністю тіла називається величина, що дорівнює кількості теплоти, яку треба передати тілу, щоб збільшити його температуру на один кельвін.

$$C_{\text{тіла}} = \frac{d'Q}{dT} \quad [C_{\text{тіла}}] = \frac{\text{Дж}}{\text{К}}$$

Теплоємність одиниці маси речовини називається **питомою теплоємністю**. Будемо позначати її c .

$$c = \frac{C_{\text{тіла}}}{m} = \frac{1}{m} \frac{d'Q}{dT} \quad [c] = \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$$

Теплоємність моля речовини, називається **молярною теплоємністю**. Будемо позначати її C .

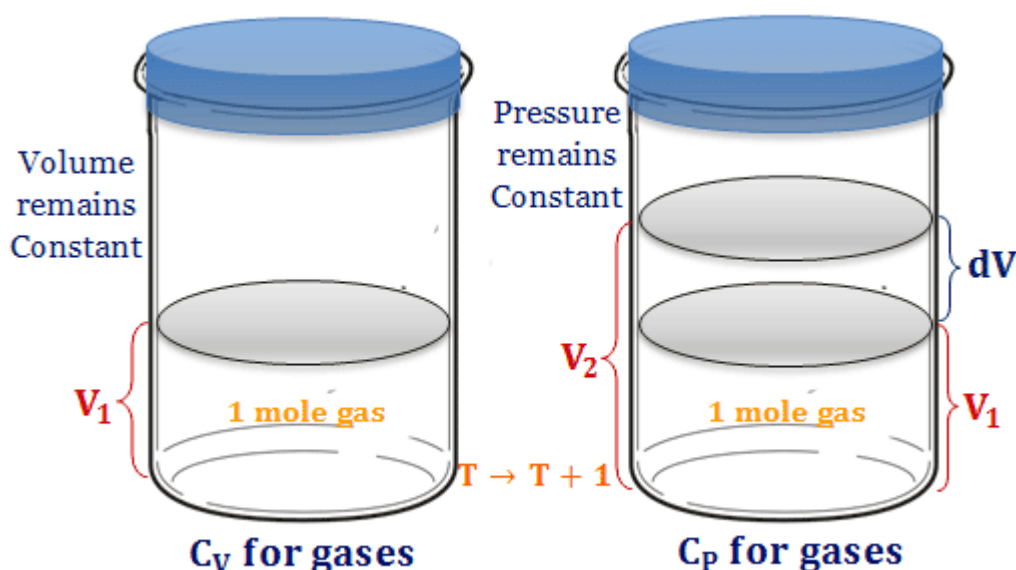
$$C = \frac{C_{\text{тіла}}}{\nu} = \frac{\mu}{m} C_{\text{тіла}} = \frac{\mu}{m} \frac{d'Q}{dT} \quad [C] = \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$$

Між молярною та питомою теплоємністю існує співвідношення:

$$c = \frac{C}{\mu},$$

де μ – молярна маса.

Величина теплоємності залежить від умов за яких відбувається нагрівання. Найбільш цікавими є випадки, коли нагрівання відбувається за



сталого об'єму, та за сталого тиску. Відповідні теплоємності називаються: теплоємність за сталого об'єму (C_v) та теплоємність за сталого тиску (C_p).

При нагріванні за сталого об'єму, тіло не здійснює роботи над зовнішніми тілами, тому:

$$d'Q_v = dU$$

Відповідно

$$C_v = \frac{\mu}{m} \frac{d'Q}{dT} = \frac{\mu}{m} \frac{dU}{dT} = \frac{\mu}{m} \frac{d}{dT} \left(\frac{i}{2} \frac{m}{\mu} RT \right) = \frac{i}{2} R$$

Видно, що *теплоємність за сталого об'єму* для даного газу стала величина, що не залежить від жодних параметрів, і ми можемо записати:

$$U_M = C_v T,$$

або, для довільної кількості газу:

$$U = \frac{m}{\mu} C_v T$$

Якщо нагрівати газ за сталого тиску, він буде розширюватись, виконуючи роботу над зовнішніми тілами. Тому для підвищення його температури на 1 К знадобиться більше тепла, ніж при нагріванні за сталого об'єму. Відповідно й *теплоємність за сталого тиску* C_p має бути більшою, ніж теплоємність за сталого об'єму C_v .

$$C_p = \frac{\mu}{m} \frac{d'Q}{dT} = \frac{\mu}{m} \frac{dU + d'A}{dT} = \frac{\mu}{m} \frac{dU + PdV}{dT} = C_v + \frac{\mu}{m} P \frac{dV}{dT}$$

Продиференціюємо рівняння Менделєєва-Клапейрона ($P = \text{const}$)

$$PV = \frac{m}{\mu} RT$$

$$PdV = \frac{m}{\mu} R dT$$

$$\frac{dV}{dT} = \frac{m}{\mu} \frac{R}{P}$$

Відповідно $\frac{\mu}{m} P \frac{dV}{dT} = R$ і

$$C_p = C_v + R = \frac{i}{2} R + R = \frac{i+2}{2} R$$

Теплоємність при ізотермічному процесі ($T = \text{const}$, $dT = 0$)

$$C_T = \frac{\mu}{m} \frac{d'Q}{dT} \rightarrow \infty$$

Теплоємність при адіабатному процесі ($d'Q = 0$)

$$C_a = \frac{\mu}{m} \frac{d'Q}{dT} = 0$$

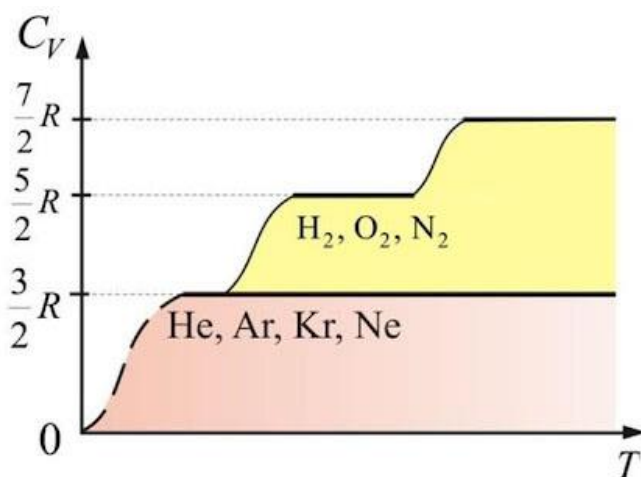
Відношення теплоємностей C_p/C_v позначається γ і являє собою величину характерну для кожного окремого газу:

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{i+2}{i}$$

Число атомів	Зв'язок	i	γ
1	-	3	1,67
2	жорсткий	5	1,40
2	пружний	7	1,29
3	жорсткий	6	1,33

Формули для теплоємностей одержані нами для ідеального газу. Для реального газу, як з'ясувалося, теплоємність залежить від температури.

На рисунку зображено залежність теплоємності C_v одного моля водню від температури. Крива над червоною областю відповідає атомарному водню, а крива над жовтою і червоною областями –



молекулярному водню. Видно, що теплоємність не залежить від температури лише в певних інтервалах температур. Ці ділянки відповідають різній кількості ступенів свободи у молекул. При низьких температурах – лише поступальні ступені свободи, потім додаються обертальні, потім – коливальні. В проміжках між горизонтальними ділянками

спостерігається монотонне зростання теплоємності, обумовлене тим, що молекули/атоми при тій же температурі мають різні швидкості..

Такий вид кривої показує, що з підвищенням температури змінюється характер руху молекул, причому *не всі* молекули одразу залучаються до такого руху. Пояснюється така поведінка теплоємності на основі квантової механіки, згідно з якою енергія обертального та коливального рухів виявляється квантованою, тобто може змінюватись лише дискретними порціями.

Рівняння адіабати ідеального газу

В ході різних процесів газ, крім рівняння стану, підпорядковується ще й додатковим умовам, що визначають характер процесу. Так, при **ізобарному** процесі виконується умова $P = const$, при **ізохорному** – $V = const$, при **ізотермічному** – $T = const$.

Адіабатичний процес – це процес, що протікає без теплообміну з зовнішнім середовищем.

Знайдемо рівняння, що зв'язує параметри газу при такому процесі.

Зразу виникають ускладнення – для *адіабатичності* треба, щоб процес відбувався швидко, а, щоб вести розмову про параметри, треба, щоб процес був рівноважним, тобто повільним. Простіше за все примирити ці суперечності коли у нас малий об'єм.

Запишемо рівняння першого закону термодинаміки, підставивши замість dU її вираз для ідеального газу ($d'Q = 0$):

$$d'Q = \frac{m}{\mu} C_V dT + PdV = 0$$

Виразимо P з рівняння Менделєєва-Клапейрона і підставимо в це рівняння:

$$P = \frac{m}{\mu} \frac{RT}{V}$$

$$C_V dT + RT \frac{dV}{V} = 0$$

$$\frac{dT}{T} = -\frac{R}{C_V} \frac{dV}{V}$$

Проінтегрувавши це рівняння, отримуємо

$$\ln T = -\frac{R}{C_V} \ln V + \ln A,$$

де $\ln A$ – стала інтегрування.

$$\ln T + \frac{R}{C_V} \ln V = \ln A$$

Ми знаємо, що $R = C_p - C_v$, тому $R/C_v = \gamma - 1$.

$$\ln T + (\gamma - 1) \ln V = \ln A$$

Підставивши це в формулу і потенціюючи отримуємо:

$$TV^{\gamma-1} = \text{const}$$

Це і є рівняння адіабати у координатах T, V . Скориставшись

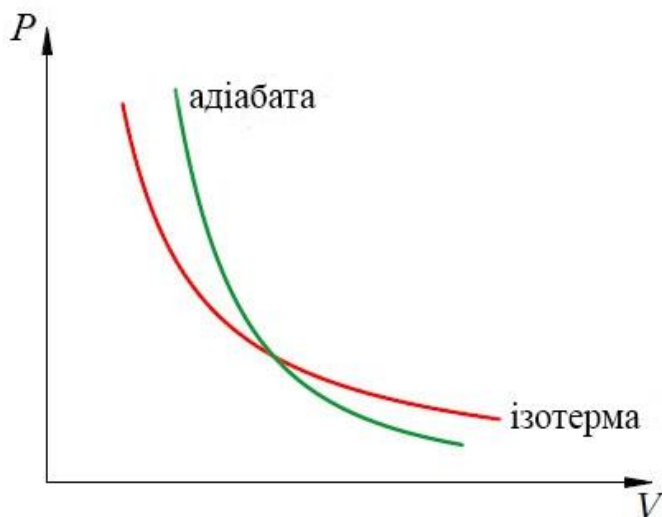
рівнянням Менделєєва-Клапейрона і замінивши у ньому $T = \frac{\mu}{m} \frac{PV}{R}$, отримуємо:

$$PV^\gamma = \text{const}$$

Це рівняння адіабати ідеального газу в координатах P, V . Воно називається **рівнянням Пуасона**.

Графік адіабати у координатах P, V більш крутий, ніж графік ізотерми.

Його кутовий коефіцієнт dP/dV в γ разів більше.



Щоб отримати рівняння адиабати в координатах T, P виразимо з рівняння Менделєєва-Клапейрона об'єм $V = \frac{m}{\mu} \frac{RT}{P}$ і, підставивши до рівняння Пуасона, одержимо:

$$T^\gamma P^{1-\gamma} = \text{const}$$

або

$$TP^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = \text{const}$$

Політропічні процеси

Політропічні процеси – це процеси при яких теплоємність залишається сталою ($C = \text{const}$).

Знайдемо рівняння політропи ідеального газу. Запишемо рівняння першого закону термодинаміки для одного моля газу, підставивши $d'Q = CdT$ і $dU = C_v dT$:

$$CdT = C_v dT + PdV$$

Виключимо T , диференціюючи рівняння Менделєєва-Клапейрона для одного моля газу: $PV = RT$:

$$PdV + VdP = RdT$$

Отримуємо:

$$\begin{aligned} \frac{C - C_v}{R} (PdV + VdP) &= PdV \\ (C - C_v - R)PdV + (C - C_v)VdP &= 0 \\ \left(\frac{C - C_p}{C - C_v} \right) \frac{dV}{V} + \frac{dP}{P} &= 0 \end{aligned}$$

Позначимо $n = \frac{C - C_p}{C - C_v}$ – показник політропи і проінтегруємо:

$$n \ln V + \ln P = 0$$

Рівняння політропи ідеального газу

$$PV^n = \text{const}$$

Всі відомі нам ізопроцеси є політропічними:

- 1) ізобарний $PV^0 = \text{const}$, $n = 0$;
- 2) ізотермічний $PV = \text{const}$, $n = 1$;
- 3) адіабатичний $PV^\gamma = \text{const}$, $n = \gamma$;
- 4) ізохорний $V = \text{const}$, $n = \infty$.

З визначення показника політропи можна знайти теплоємність при політропічному процесі:

$$C = \frac{nC_V - C_P}{n - 1}$$

Робота ідеального газу при різних процесах

При проектуванні різноманітних теплових машин важливо знати яка робота виконується ідеальним газом при різних процесах.

Вираз для роботи газу при ізобарному процесі ми вже отримали раніше:

$$A_{12} = P(V_2 - V_1)$$

Крім того, ми отримали загальний вираз для роботи, що виконується при переході системи зі стану 1 у стан 2:

$$A_{12} = \int_{V_1}^{V_2} P dV$$

Знайдемо вираз для роботи при ізотермічному процесі. Замінімо тиск під інтегралом його виразом з рівняння Менделєєва-Клапейрона:

$$P = \frac{m}{\mu} \frac{RT}{V}$$

$$A_{12} = \frac{m}{\mu} RT \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = \frac{m}{\mu} RT (\ln V_2 - \ln V_1) = \frac{m}{\mu} RT \ln \frac{V_2}{V_1}$$

$$A_{12} = \frac{m}{\mu} RT \ln \frac{V_2}{V_1}$$

А тепер отримаємо загальний вираз для роботи при будь-якому політропічному процесі, крім ізотермічного.

Для того, щоб провести інтегрування слід виразити P через V . Для цього скористаємося рівнянням політропи:

$$PV^n = P_1V_1^n = P_2V_2^n$$

Звідси: $P = \frac{P_1V_1^n}{V^n}.$

Відповідно:

$$A_{12} = P_1V_1^n \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V^n}$$

Якщо $n \neq 1$,

$$\int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V^n} = \frac{1}{n-1} \left(\frac{1}{V_1^{n-1}} - \frac{1}{V_2^{n-1}} \right)$$

Відповідно:

$$A_{12} = \frac{P_1V_1}{n-1} \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{n-1} \right]$$

Оскільки рівняння Менделєєва-Клапейрона $P_1V_1 = \frac{m}{\mu}RT_1$ справедливе за будь-яких процесів, можемо переписати останнє рівняння у формі:

$$A_{12} = \frac{m}{\mu} \frac{RT_1}{n-1} \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{n-1} \right]$$

Вираз для роботи при ізобарному процесі ми вже знаємо. При ізохорному робота дорівнює нулю. При адіабатному процесі робота:

$$A_{12} = \frac{P_1V_1}{\gamma-1} \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} \right]$$

або

$$A_{12} = \frac{m}{\mu} \frac{RT_1}{\gamma-1} \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} \right]$$

Крім того, роботу при адіабатному процесі можна знайти з першого закону термодинаміки:

$$Q = U_2 - U_1 + A$$

$$A = U_1 - U_2 \quad (Q = 0)$$

$$U = \frac{m}{\mu} C_v T$$

$$A = \frac{m}{\mu} C_v (T_1 - T_2)$$

Щоб знайти роботу при інших, не політропічних, процесах, зазвичай використовується перший закон термодинаміки. Окремо обраховується кількість отриманої теплоти Q та зміна внутрішньої енергії ΔU , а потім робота, як їх різниця.

Приклад. Визначити, яку роботу A виконує моль ідеального газу ($\gamma = 1,4$) при нагріванні від $T_1 = 200 \text{ K}$ до $T_2 = 544 \text{ K}$, якщо полярна теплоємність цього газу змінюється в ході процесу за законом $C = 200 + \frac{500}{T} \left(\frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{K}} \right)$.

Оскільки теплоємність газу змінюється з температурою, процес не політропічний і роботу будемо шукати, використовуючи перший закон термодинаміки. Спочатку знайдемо теплоту Q , яку отримав газ в ході процесу:

$$\begin{aligned} Q &= \nu \int_{T_1}^{T_2} C dT = \int_{200}^{544} \left(200 + \frac{500}{T} \right) dT = 200 \cdot \int_{200}^{544} dT + \int_{200}^{544} \frac{500}{T} dT = \\ &= 200 \cdot T \Big|_{200}^{544} + 500 \ln T \Big|_{200}^{544} = 7380 \text{ Дж} = 7,38 \text{ кДж} \end{aligned}$$

Знайдемо приріст внутрішньої енергії газу в ході процесу:

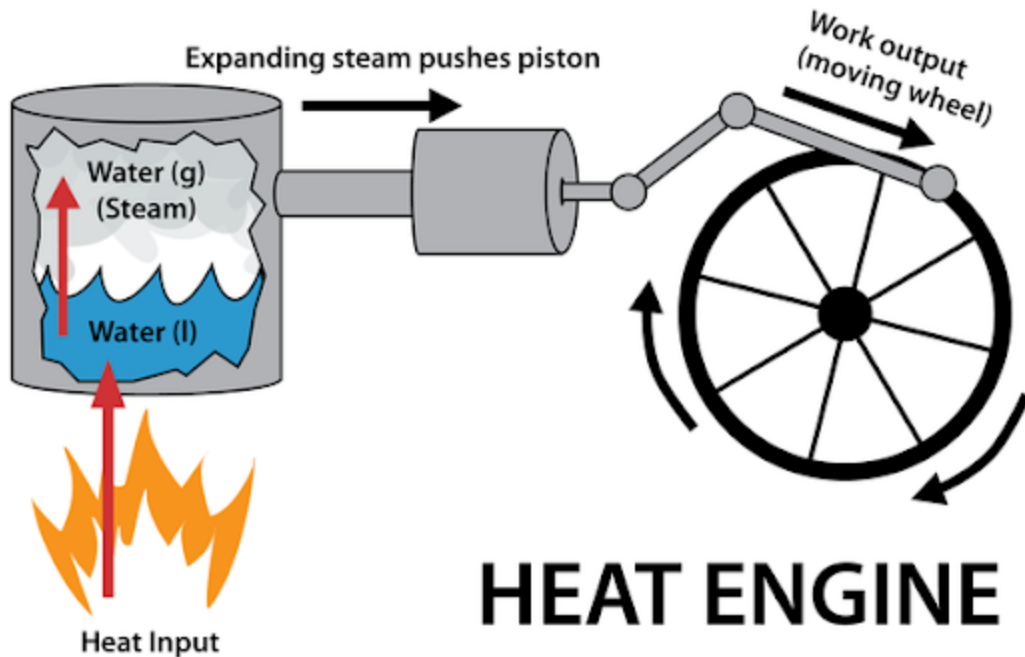
$$\Delta U = \frac{1}{\gamma - 1} \nu R (T_2 - T_1) = \frac{1}{0,4} 8,31 \cdot (544 - 200) = 7147 \text{ Дж} = 7,15 \text{ кДж}$$

За першим законом термодинаміки знайдемо роботу газу в ході процесу:

$$A = Q - \Delta U = 233 \text{ Дж} = 0,23 \text{ кДж}$$

ТЕПЛОВІ МАШИНИ. II ЗАКОН ТЕРМОДИНАМІКИ

Термодинаміка виникла, як наука про перетворення теплоти в роботу. Машина, яка здійснює перетворення теплоти в роботу називається **тепловою машиною**. Інше визначення: **теплова машина** – це періодично діючий двигун, що виконує роботу за рахунок отриманого ззовні тепла.



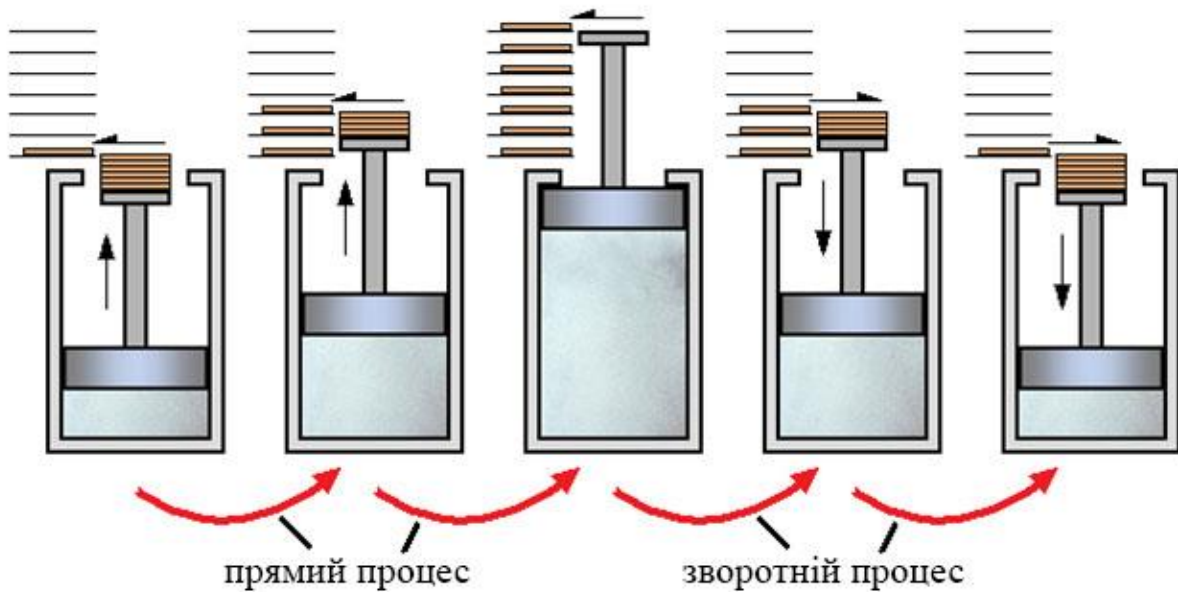
При розгляді теплових машин застосовуються поняття оборотного та необоротного процесів. На попередній лекції ми вже згадували про них.

Оборотним процесом називається процес, який можна провести у зворотному напрямку таким чином, що система буде проходити через ті ж самі стани, що й при прямому проходженні, але у зворотній послідовності.

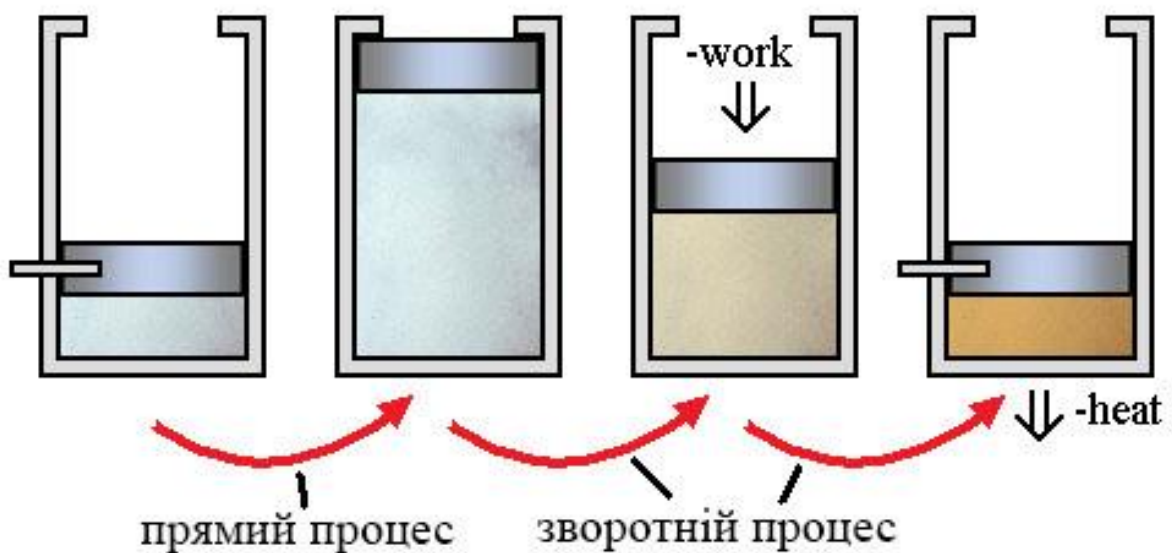
Ясно, що оборотний процес може бути лише рівноважним процесом, оскільки лише для такого процесу можна казати про послідовність рівноважних станів.

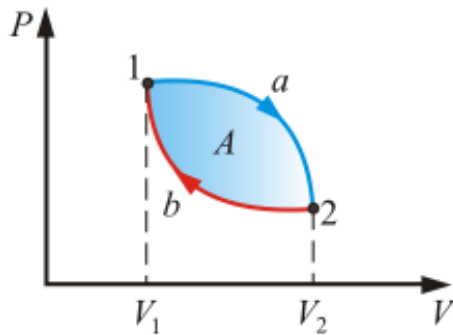
З визначення оборотного процесу витікає, що коли на якій-небудь елементарній ділянці процесу система *отримує* теплоту $d'Q$ і *виконує* роботу $d'A$, то в зворотному ході будуть брати участь ті ж самі елементарні величини, але з протилежним знаком, тобто система *віддає* теплоту $d'Q$ і *над нею виконується* робота $d'A' = d'A$.

Якщо система проходить і прямому і в зворотному напрямку по одному шляху, то в тілах, що оточують систему не повинно відбутись жодних змін.



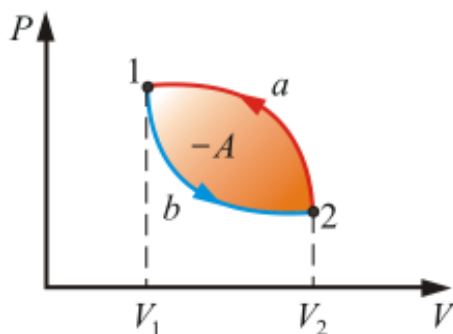
Відповідно **необоротний процес** – це процес, який не може протікати у зворотному напрямку таким чином, щоб система пройшла через ті ж самі проміжні стани, без будь-яких залишкових змін в стані зовнішніх тіл, з якими взаємодіє система.





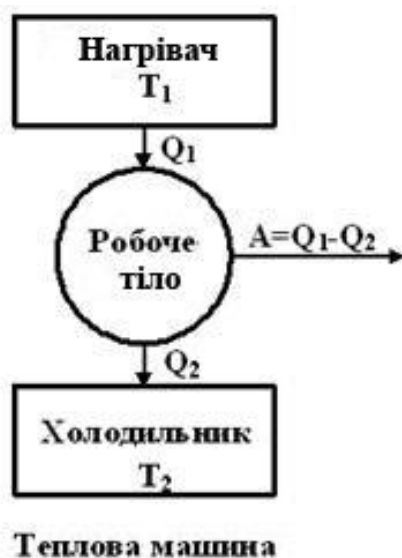
Коловий процес (цикл) – це процес, при якому система після ряду змін повертається у вихідний стан. Відповідно всі функції стану на початку і в кінці циклу мають однакові значення.

На графіку цикл зображується замкненою кривою. У координатах P, V робота, що виконується під час циклу, чисельно дорівнює площі, що охоплюється цією кривою.



Якщо за **цикл** здійснюється позитивна робота (цикл протікає за годинниковою стрілкою), то він називається **прямим**, якщо за цикл здійснюється негативна робота (цикл протікає проти годинникової стрілки), то він називається **зворотним**.

Ясно, що для того, щоб робота була позитивною, при розширенні P для кожного V має бути більшим, ніж при стисканні. Відповідно при розширенні має бути більшою температура. Значить при розширенні робочому тілу слід передавати теплоту, а при стисканні – її відбирати. Інакше робота дорівнюватиме нулю.



Так ми приходимо до схеми теплової машини нагрівач – робоче тіло – охолоджувач. Запишемо рівняння за I законом термодинаміки для такої машини окремо для ділянок 1-2 та 2-1.

1-2: $Q_1 = U_2 - U_1 + A_1$ (тіло отримує теплоту Q_1 і виконує роботу A_1).

2-1: $-Q_2 = U_1 - U_2 + A_2$ (тіло віддає теплоту Q_2 і виконує роботу A_2).

Додамо ці рівняння: $Q_1 - Q_2 = A_1 + A_2 = A$, де A – повна робота за цикл. Звичайно $A_2 < 0$ і A – це площа циклу.

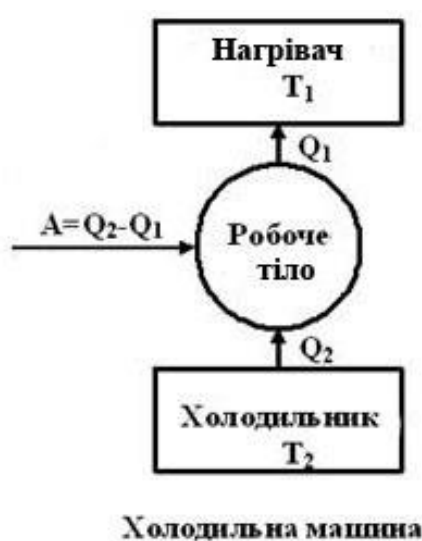
Таким чином, частину одержаної теплової енергії теплова машина перетворює в роботу, залишок віддає охолоджувачу. Це є основною ознакою теплової машини, як пристрою, що здійснює роботу за рахунок отриманого ззовні тепла.

Видно, що без охолоджувача цикл неможливий, оскільки його неможливо замкнути. Чим менша кількість теплоти Q_2 , що віддається охолоджувачу, тим вигідніша машина. Введемо кількісну характеристику теплової машини – коефіцієнт корисної дії.

Коефіцієнт корисної дії (к.к.д.) теплової машини це відношення виконаної за цикл роботи A до отримуваної за цикл теплоти Q_1 :

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}$$

Видно, що к.к.д. не може бути більшим одиниці.



Існують ще **холодильні машини** – пристрої що працюють по зворотному циклу. Холодильна машина за цикл відбирає у охолоджувача теплоту Q_2 і віддає тілу з більш високою температурою теплоту Q_1 . При цьому над робочим тілом здійснюється робота A . Ефективність роботи холодильних машин характеризується **коефіцієнтом холодопродуктивності** (**холодильним коефіцієнтом**), який дорівнює відношенню відібраного від охолоджуваного тіла тепла Q_2 до витраченої механічної роботи A :

$$\varepsilon_x = \frac{Q_2}{A}$$

Холодильна машина може бути використана не тільки для охолодження різних тіл, але і для опалення приміщень. Дійсно, навіть звичайний побутовий холодильник, охолоджуючи поміщені в ньому продукти, одночасно нагріває повітря в кімнаті.

Принцип дії, що лежить в основі сучасних **теплових насосів**, полягає в використанні оборотного циклу теплової машини для перекачування теплоти з довкілля в опалювальне приміщення. Основна відмінність теплового насоса від холодильної машини полягає в тому, що теплота підводиться до тіла, що нагрівається, наприклад, до повітря опалюваного приміщення, а теплота віднімається від менш нагрітого довкілля.

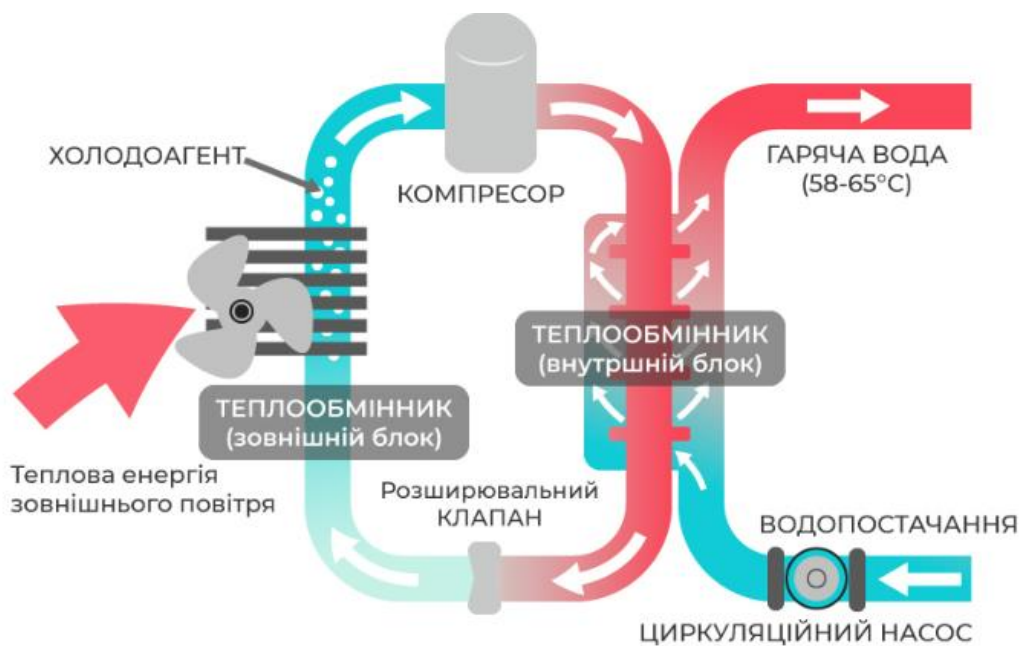
Ефективність теплового насоса характеризується коефіцієнтом перетворення (трансформації) або, як часто називають, **опалювальним коефіцієнтом** ε_o , який визначається як відношення отриманою тілом, що нагрівається, теплоти, до витраченої для цього механічної роботи, або роботи електричного струму:

$$\varepsilon_o = \frac{Q_1}{A}$$

Враховуючи, що , встановлюємо зв'язок між опалювальним і холодильним коефіцієнтами установки:

$$\varepsilon_o = \varepsilon_x + 1$$

Оскільки теплота, що відводиться від навколишнього середовища, завжди відмінна від нуля, то ефективність теплового насоса, відповідно до її визначення, буде більше одиниці. Цей результат не суперечить другому закону термодинаміки, який забороняє повне перетворення тепла в роботу, але не забороняє зворотний процес – повного перетворення роботи в тепло. Перевага теплового насоса порівняно з електронагрівачем полягає в тому, що на нагрів приміщень використовується не тільки перетворена в теплоту електроенергія, але і теплота, відібрана від довкілля. З цієї причини ефективність теплових насосів може бути набагато вище звичайних електронагрівачів.

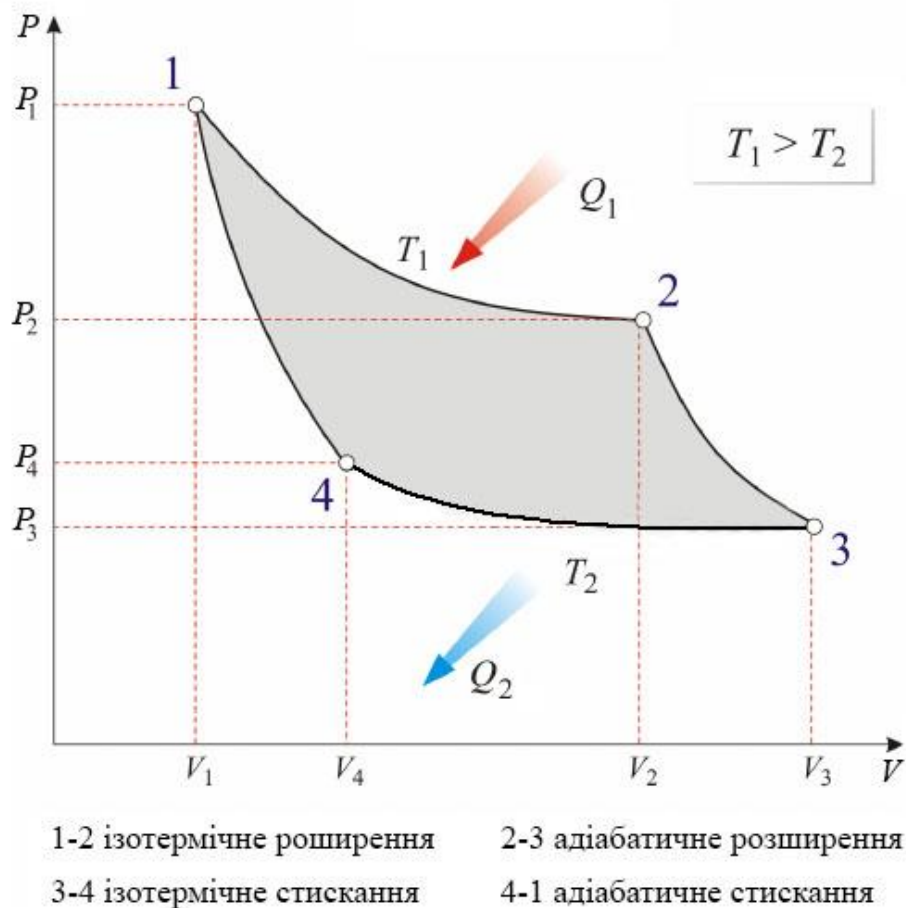


Вся система теплообмінника ізолювана, що є її плюсом. Зовнішнє повітря надходить до теплообмінника, де знаходиться рідкий холодоагент, температура якого завжди нижче зовнішнього повітря. Холодоагент закипає і надходить до компресора, де він піддається стисненню. Стиснутий холодоагент рухається до теплообмінника, де і віддає своє тепло системі опалення. Так механічна енергія компресора перетворюється у теплову. Охолоджуючись, холодоагент через розширювальний клапан проходить до теплообмінника, і цикл повторюється. У цьому коротко полягає принцип роботи теплового насоса.

Цикл Карно та його ККД

Як вже було сказано, теплова машина складається з нагрівача, робочого тіла та охолоджувача. Нагрівач віддає тепло робочому тілу, охолоджувач – відбирає. Вони будуть ідеально виконувати свої функції, якщо матимуть *нескінченно велику теплоємність*. Це означає, що віддаючи та одержуючи тепло вони не змінюватимуть своєї температури (відповідно T_1 і T_2).

Виконуючи цикл, робоче тіло по черзі обмінюється теплом то з нагрівачем, то з охолоджувачем. Ці процеси (етапи циклу) *повинні бути ізотермічними*. В іншому випадку вони не будуть рівноважними і, відповідно, оборотними. (Справді, якщо в ході теплообміну, температура тіла помітно відрізняється від температури нагрівача, чи охолоджувача, то при протіканні цього процесу у зворотному напрямку ця різниця температур змінить знак, тобто процес не буде оборотним).



Два ізотермічні процеси не можуть дати цикл з площею, що не дорівнює нулю. Потрібні ще якісь процеси, щоб переходити з однієї ізотерми на іншу. У *найпростішій* машині не може бути інших тіл, що

віддають, або відбирають тепло, крім нагрівача і охолоджувача. Відповідно ці процеси мають іти без теплообміну, тобто бути *адіабатичними*.

Таким чином **цикл Карно** складається з двох ізотерм, та двох адіабат. Він за визначенням є оборотним, оскільки складається лише з оборотних процесів.

Підрахуємо к.к.д. циклу Карно для ідеального газу:

$$\text{процес 1-2: } Q = A, \quad A_{12} = \frac{m}{\mu} RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1};$$

$$\text{процес 3-4: } Q = A, \quad A_{34} = \frac{m}{\mu} RT_2 \ln \frac{V_3}{V_4};$$

процеси 2-3 і 4-1: адіабати $TV^{\gamma-1} = \text{const}$

$$T_1 V_2^{\gamma-1} = T_2 V_3^{\gamma-1};$$

$$T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_4^{\gamma-1}.$$

З двох останніх рівнянь отримуємо:

$$\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma-1} = \left(\frac{V_3}{V_4}\right)^{\gamma-1} \Rightarrow \frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4}$$

Підрахуємо к.к.д.:

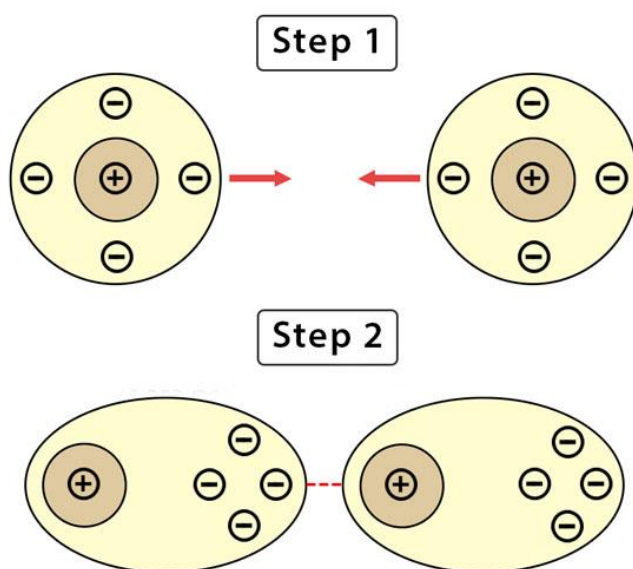
$$\eta = \frac{\frac{m}{\mu} RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} - \frac{m}{\mu} RT_2 \ln \frac{V_3}{V_4}}{\frac{m}{\mu} RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1}} = \frac{T_1 - T_2}{T_1},$$

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$$

Таким чином к.к.д. циклу Карно для ідеального газу залежить лише від температур нагрівача та охолоджувача.

РЕАЛЬНІ ГАЗИ

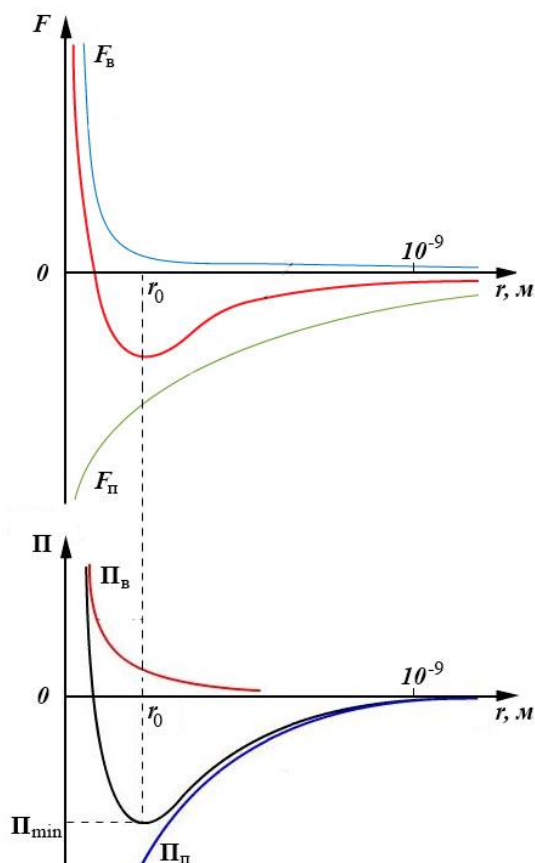
Модель ідеального газу, яка використовується в молекулярно-кінетичній теорії газів, дозволяє описувати поведінку розріджених реальних газів за досить високих температур і низьких тисків. Виводячи рівняння стану ідеального газу нехтують розмірами молекул і їх взаємодією одна з одною. Підвищення тиску призводить до зменшення середньої відстані між молекулами, тому необхідно враховувати об'єм молекул і взаємодію між ними. Так, в 1 м^3 газу за нормальних умов міститься $2,68 \cdot 10^{25}$ молекул, які займають об'єм приблизно 10^{-4} м^3 (радіус молекули приблизно 10^{-10} м), яким в порівнянні з об'ємом газу (1 м^3) можна знехтувати. За тиску 500 МПа об'єм молекул складе вже половину усього об'єму газу. Таким чином, за високих тисків і низьких температур вказана модель ідеального газу непридатна.



Відхилення від законів ідеальних газів зв'язані з тим, що між молекулами газу діють сили, які не беруться до уваги в теорії ідеальних газів. Ці сили мають електричну природу. Як відомо, атом складається з ядра ($10^{-13} - 10^{-14}\text{ м}$) та електронної оболонки ($\sim 10^{-10}\text{ м}$). Атом в цілому електронейтральний, але заряди, з яких він складається, можуть зміщуватись, при чому атом набуває дипольних

властивостей. Такі диполі взаємодіють між собою, повертаючись один до одного протилежно зарядженими сторонами і взаємно притягаються. Ці сили називаються *силами Ван-дер-Ваальса*.

Коли атоми зближуються на таку відстань, що електронні оболонки взаємодіючих часток починають перекриватись, сили притягання замінюються силами відштовхування. На рисунку наведена якісна залежність сил міжмолекулярної взаємодії від відстані r між молекулами, де F_o і F_{π} – відповідно сили відштовхування і притягання, а F – їх результуюча. Сили притягання вважаються *негативними*, а сили відштовхування – *позитивними*.



На відстані $r = r_0$ результуюча сила $F = 0$, тобто сили притягання і відштовхування врівноважують одна одну. Таким чином, відстань r_0 відповідає рівноважній відстані між молекулами, на якій би вони знаходились у відсутності теплового руху. При $r < r_0$ переважають сили відштовхування ($F_v > 0$), при $r > r_0$ – сили притягання ($F_p < 0$). На відстанях $r > 10^{-9}$ м міжмолекулярні сили взаємодії практично відсутні ($F \rightarrow 0$).

Елементарна робота dA сили F при збільшенні відстані між молекулами на dr здійснюється за рахунок зменшення взаємної потенціальної енергії молекул, тобто

$$dA = Fdr = -d\Pi$$

З аналізу якісної залежності потенціальної енергії взаємодії молекул від відстані між ними (нижня

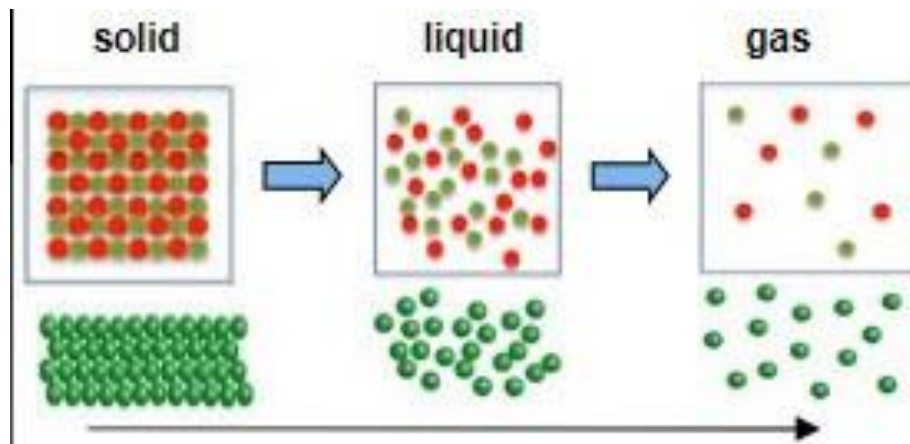
крива на рисунку) витікає, що якщо молекули знаходяться одна від одної на відстані, на якій міжмолекулярні сили взаємодії не діють ($r \rightarrow \infty$), то $\Pi = 0$. При поступовому зближенні молекул між ними з'являються сили притягання ($F_p < 0$), які здійснюють позитивну роботу ($dA = Fdr > 0$). Тоді потенціальна енергія взаємодії зменшується, досягаючи мінімуму при $r = r_0$. При $r < r_0$ зі зменшенням r сили відштовхування ($F_v > 0$) різко зростають і виконується проти них робота негативна ($dA = Fdr < 0$). Потенціальна енергія теж починає різко зростати і стає позитивною. З даної потенціальної кривої виходить, що система з двох взаємодіючих молекул у стані стійкої рівноваги ($r = r_0$) має мінімальну потенціальну енергію.

Критерієм різних агрегатних станів речовини є співвідношення величин $\Pi_{\min}$ і kT . $\Pi_{\min}$ – найменша потенціальна енергія взаємодії молекул – визначає роботу, яку треба виконати проти сил притягання для того, щоб роз'єднати молекули, які знаходяться в рівновазі ($r = r_0$); kT характеризує середню енергію хаотичного теплового руху молекул.

Якщо $\Pi_{\min} \ll kT$, то речовина знаходиться в *газоподібному стані*, оскільки інтенсивний тепловий рух молекул перешкоджає об'єднанню молекул, що зблизилися до відстані r_0 , тобто ймовірність утворення агрегатів з молекул досить мала.

Якщо $\Pi_{\min} \gg kT$, то речовина знаходиться в *твердому стані*, оскільки молекули, притягуючись одна до одної, не можуть віддалитися на значні відстані і коливаються біля положення рівноваги, яке визначається r_0 .

Якщо $\Pi_{\min} \approx kT$, то речовина знаходиться в *рідкому стані*, оскільки в результаті теплового руху молекули переміщуються в просторі, обмінюючись місцями, але не розходячись на відстань, що перевищує r_0 .



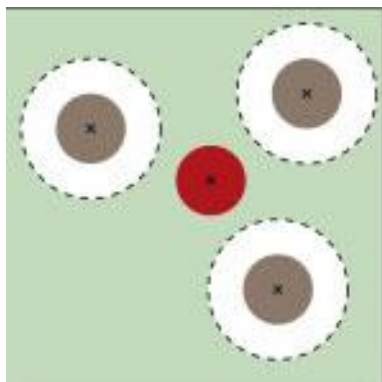
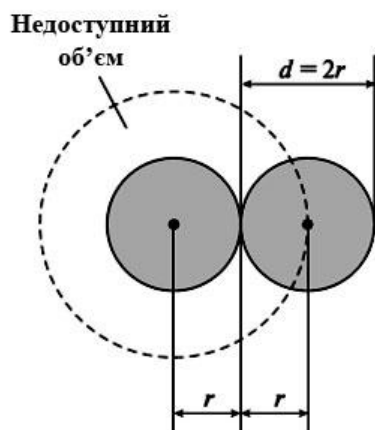
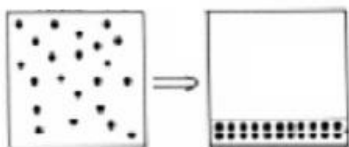
Таким чином, будь-яка речовина залежно від температури може знаходитися в газоподібному, рідкому або твердому агрегатному стані, причому температура переходу з одного агрегатного стану в інший залежить від значення $\Pi_{\min}$ для даної речовини. Наприклад, у інертних газів $\Pi_{\min}$ мала, а у металів – велика, тому при звичайних (кімнатних) температурах вони знаходяться відповідно в газоподібному та твердому станах.

Рівняння Ван-дер-Ваальса

За звичайних умов поведінка реальних газів добре описується рівнянням Менделєєва-Клапейрона яке стає непридатним при високих тисках і низьких температурах.

$$PV = \frac{m}{\mu} RT = \nu RT$$

Ван-дер-Ваальс ввів у рівняння Менделєєва-Клапейрона дві поправки, які враховують власний об'єм молекул та сили міжмолекулярної взаємодії.



1) Поправка на *недоступний об'єм*. Знаходячись у якій-небудь посудині, молекули можуть переміщатись не всюди, оскільки частину об'єму займають інші молекули.

Якщо характеризувати положення молекули координатами центру, то для будь-якої з N молекул "недоступним" буде об'єм, який займають інші $N-1$ молекула. Якщо діаметр молекули d , то молекула не може потрапити всередину $N-1$ сфер радіусом d . Замість V в рівнянні Менделєєва-Клапейрона слід писати $V - b$. Недоступним для 1-ї молекули є об'єм $\frac{4}{3}\pi d^3(N-1) = 8 \cdot \frac{4}{3}\pi r^3(N-1) = 8V_0(N-1)$. Для великої кількості молекул можна $N-1$ замінити на N . Крім того, суму об'ємів слід розділити на 2, оскільки кожна з зображених пунктирних сфер недоступна для пари молекул (перша не може проникнути всередину другої, а друга – всередину першої).

Таким чином для одного моля недоступний об'єм:

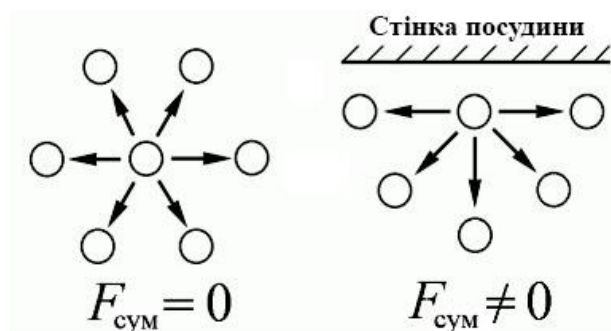
$$b = 4N_A V_0 = 4N_A \frac{4\pi r^3}{3} = 4N_A \frac{\pi d^3}{6}$$

Відповідно рівняння Менделєєва-Клапейрона для одного моля:

$$P = \frac{RT}{V_M - b}$$

Одиниця вимірювання b – $\text{м}^3/\text{моль}$.

2) Поправка на *міжмолекулярне притягання* (внутрішній тиск). Якщо молекули притягаються між собою, то в шарі біля стінки (товщиною близько довжини вільного пробігу) всі молекули знаходяться під дією сил притягання *всередину* від стінки. Всередині це не так, оскільки там з усіх боків молекули газу. Внаслідок цього зменшується енергія руху молекул зовнішнього шару ε_k (рухаючись до стінки вони виконують роботу проти сил притягання). Ми знаємо, що ця енергія пропорційна тиску, тому тиск зменшується.



Зменшення енергії руху пропорційне до концентрації, оскільки *кожну* молекулу 1-го шару притягають *всі* молекули 2-го, а їх кількість пропорційна до n . Відповідно $\Delta\varepsilon \sim n$.

Тиск пропорційний до концентрації та енергії $P \sim n\varepsilon$, відповідно $\Delta P \sim n\Delta\varepsilon \sim n^2$. Оскільки $n \sim \frac{N}{V}$, поправка пропорційна $\frac{1}{V^2}$.

Маємо:

$$P' = \frac{a}{V^2}$$

$$\text{Розмірність } a - \text{Па} \cdot \text{м}^6 / \text{моль}^2$$

За даних V і T тиск P на P' менше ніж було б за рівнянням Менделєєва-Клапейрона. З урахуванням поправки b для одного моля маємо:

$$P = \frac{RT}{V_M - b} - \frac{a}{V_M^2}$$

або

$$\left(P + \frac{a}{V_M^2} \right) (V_M - b) = RT$$

Це і є рівняння Ван-дер-Ваальса для одного моля газу. Для ν молів воно переписеться:

$$\left(P + \frac{\nu^2 a}{V^2} \right) (V - \nu b) = \nu RT$$

Поправки a і b – сталі для кожного газу величини, що визначаються дослідним шляхом.

Внутрішня енергія газу Ван-дер-Ваальса

Внутрішня енергія газу Ван-дер-Ваальса крім кінетичної енергії руху молекул має включати в себе ще й енергію взаємодії між молекулами. Щоб її знайти скористаємося тим фактом, що робота, яка здійснюється при розширенні газів проти сил взаємного притягання молекул, дорівнює приросту енергії взаємодії: $d'A = d\Pi$. Сили взаємного притягання враховані у рівнянні Ван-дер-Ваальса (для одного моля газу) додавкою до тиску $\frac{a}{V_M^2}$.

Відповідно роботу проти цих сил можна представити, як $\frac{a}{V_M^2} dV_M$. Таким чином:

$$d\Pi = \frac{a}{V_M^2} dV_M$$

Звідки

$$\Pi = -\frac{a}{V_M} + const$$

Оскільки внутрішня енергія газу залежить, як від об'єму, так і від температури, можна записати:

$$U_M = f(T) - \frac{a}{V_M}$$

Якщо об'єм прямує до нескінченності, цей вираз має переходити у вираз для внутрішньої енергії ідеального газу. Відповідно $f(T) = C_V T$.

Таким чином внутрішня енергія газу Ван-дер-Ваальса для одного моля газу визначається за формулою:

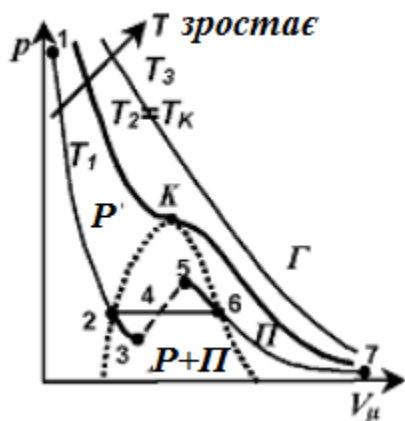
$$U_M = C_V T - \frac{a}{V_M}$$

або для ν молів

$$U_M = \nu C_V T - \frac{\nu^2 a}{V}$$

Ізотерми газу Ван-дер-Ваальса

При високих температурах ізотерма реального газу відрізняється від ізотерми ідеального газу тільки трохи іншою формою.



При деякій температурі T_k – критичній температурі – на ізотермі з'являється точка перегину K – критична точка. Відповідно, об'єм V_k і тиск P_k у цій точці називаються критичними. Ізотерма при T_k називається критичною ізотермою. Експериментальні

ізотермою. Експериментальні докритичні ізотерми реального газу мають вигляд 1-2-6-7 і є кривими безперервного переходу речовини з газоподібного стану (ділянка 6-7) у рідкий (ділянка 2-1). Горизонтальні ділянки знаходять з ізотерм Ван-дер-

Ваальса за правилом площин. Ділянка 6-2 відповідає рівноважному співіснуванню рідини і газу. Речовина у станах, що відповідають ділянці 2-4 називається *перегрітою рідиною*, а ділянці 4-6 – *пересиченою парою* (існування цих станів дає можливість створювати детектори частинок – бульбашкову камеру та камеру Вільсона).

Для пояснення вигляду ізотерм Ван-дер-Ваальса приведемо рівняння Ван-дер-Ваальса до виду:

$$PV_M^3 - (RT + Pb)V_M^2 + aV_M - ab = 0$$

Це рівняння при заданих P і T є рівнянням третього ступеня відносно V_m ; отже, воно може мати або три дійсних корені, або один дійсний і два уявних, причому фізичний смисл мають лише дійсні позитивні корені. Тому першому випадку відповідають ізотерми при низьких температурах (три значення об'єму газу V_1 , V_2 і V_3 відповідають одному значенню тиску p_1), другому випадку – ізотерми при високих температурах.

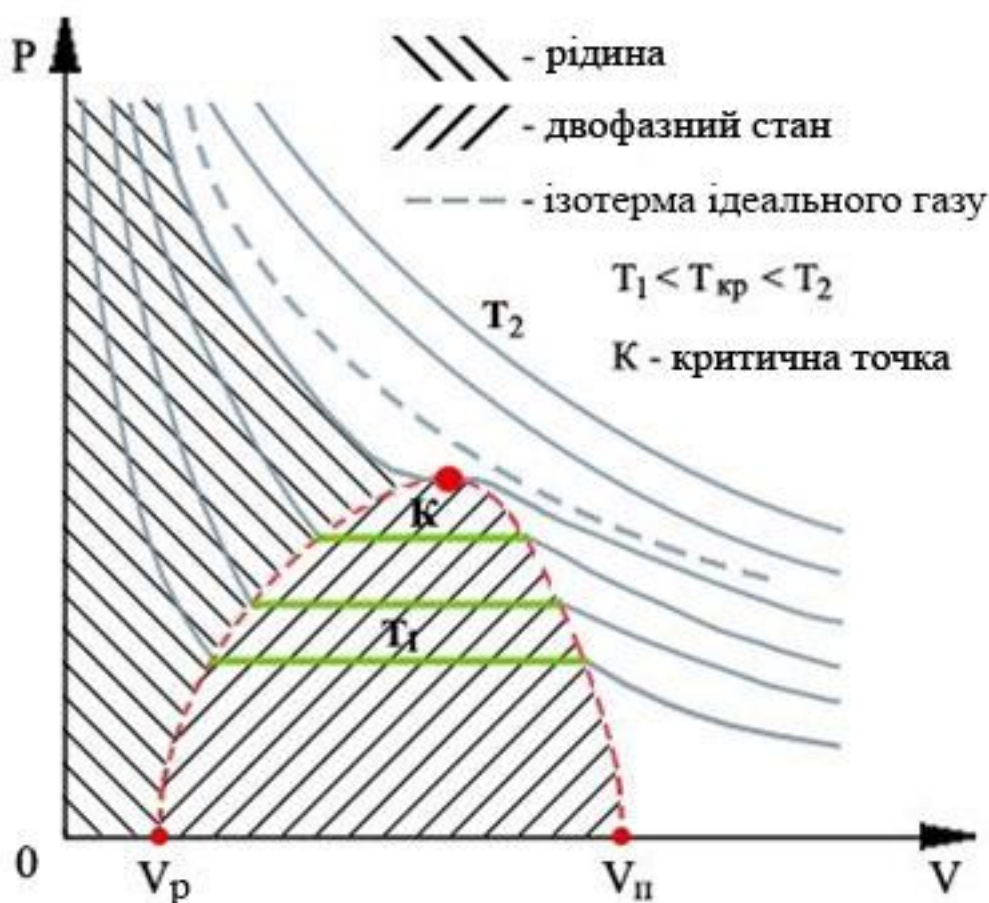
Для знаходження критичних параметрів застосовується наведене вище рівняння. Оскільки всі три корені в цьому випадку однакові, воно має приводитись до виду:

$$P_K(V_M - V_K)^3 = 0$$

Далі розкриваємо скобку і порівнюємо коефіцієнти при невідомих відповідних ступенів. Вирішивши отримані три рівняння одержимо критичні параметри (параметри критичної точки):

$$V_K = 3b; \quad P_K = \frac{a}{27b^2}; \quad T_K = \frac{8a}{27Rb}$$

Якщо через крайні точки горизонтальних ділянок сімейства ізоTERM провести лінію, то вийде дзвоноподібна крива, що обмежує область двофазних станів речовини. Ця крива і критична ізоTерма ділять діаграму p, V_m під ізоTермою на три області: під дзвоноподібною кривою знаходиться область двофазних станів (рідина і насичена пара), зліва від неї знаходиться область рідкого стану, а справа – область пари. Пара відрізняється від інших газоподібних станів тим, що при ізоTермічному стисканні зріджується. Газ же при температурі вище критичної не може бути перетворений на рідину ні за якого тиску.



ФАЗОВІ РІВНОВАГИ ТА ПЕРЕТВОРЕННЯ

Фази. Фазові переходи

Фазою називається термодинамічно рівноважний стан речовини, що відрізняється за фізичними властивостями від інших можливих рівноважних станів тієї ж речовини. Всі частини системи, які відносяться до однієї фази, мають однаковий хімічний склад, знаходяться в однаковому агрегатному стані і обмежені поверхнями розділу.

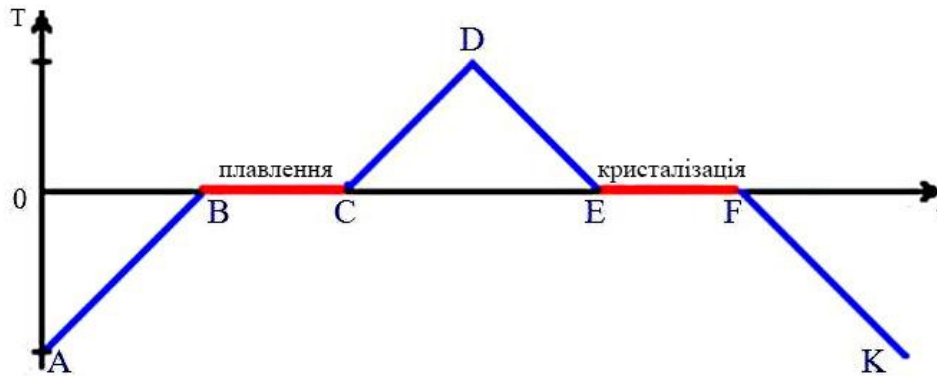


Якщо, наприклад, в закритій посудині знаходиться вода, то ця система є *двофазною*: рідка фаза – вода; газоподібна фаза – суміш повітря з водяною парою. Якщо у воду кинути шматочки льоду, то ця система стане трифазною, в якій лід є твердою фазою. Часто поняття "фаза" вживається в смислі агрегатного стану, проте потрібно враховувати, що воно

ширше, ніж поняття "агрегатний стан". В межах одного агрегатного стану речовина може знаходитися в декількох фазах, що відрізняються за своїми властивостями, складом і будовою (лід, наприклад, зустрічається в п'яти різних модифікаціях – фазах). Перехід речовини з однієї фази в іншу – **фазовий перехід** – завжди пов'язаний з якісними змінами властивостей речовини. Прикладом фазового переходу можуть служити зміни агрегатного стану речовини або переходи, пов'язані зі змінами в складі, будові і властивостях речовини (наприклад, перехід кристалічної речовини з однієї модифікації в іншу).

Розрізняють фазові переходи двох родів. **Фазовий перед I роду** (наприклад, плавлення, кристалізація і т. д.) супроводжується поглинанням або виділенням теплоти, яка називається **теплотою фазо-вого переходу**. Фазові пере-ходи I роду характеризуються сталістю температури, змінами ентропії і об'єму. Пояснення цьому можна дати таким чином. Наприклад, при плавленні тілу треба надати певну кількість теплоти, щоб викликати руйнування кристалічної решітки. Теплота, що підводиться при плавленні, йде не на нагрів тіла, а на розрив міжатомних зв'язків, тому плавлення протікає за сталої температури. У подібних переходах – з більш впорядкованого кристалічного стану в менш впорядкований рідкий стан –

міра хаотичності збільшується, тобто, згідно з другим законом термодинаміки, цей процес пов'язаний зі зростанням ентропії системи. Якщо перехід відбувається у зворотному напрямі (кристалізація), то система теплоту виділяє.



Фазові переходи, не зв'язані з поглинанням або виділенням теплоти і зміною об'єму, називаються **фазовими переходами II роду**. Ці переходи характеризуються сталістю об'єму і ентропії, але стрибкоподібною зміною теплоємності. Відповідно до прийнятого зараз трактування, фазові переходи II роду пов'язані зі зміною симетрії: вище точки переходу система, як правило, має більш високу симетрію, ніж нижче точки переходу. Прикладами фазових переходів II роду є: перехід феромагнітних речовин (заліза, нікелю) при певних тиску і температурі в парамагнітний стан; перехід металів і деяких сплавів при температурі, близькій до 0 K, в надпровідний стан, що характеризується стрибкоподібним зменшенням електричного опору до нуля; перетворення звичайного рідкого гелію (гелію I) при $T=2,9$ K в іншу рідку модифікацію (гелій II), що має властивості надплинності.

Головна фізична відмінність фазових переходів I та II роду полягає в *енергії переходу*. При переході I роду утворюється нова фаза, але у вигляді маленького зародку. Потім, в міру надходження енергії, ця фаза розповсюджується на весь об'єм. При переході II роду відмінності якісні, але не такі різкі. Перебудова не потребує енергетичних витрат і відбувається відразу в усьому об'ємі.

Ще одне – при фазовому переході I роду повинна утворюватися *межа поділу* між фазами. Це потребує *додаткової* енергії. Тому зародки нової фази завжди утворюються з деяким *запізненням* (наприклад за температурою): поки зародок надто малий і його поверхнева енергія перевищує об'ємну він не утворюється. При зворотному переході також відбувається запізнення (гістерезис).

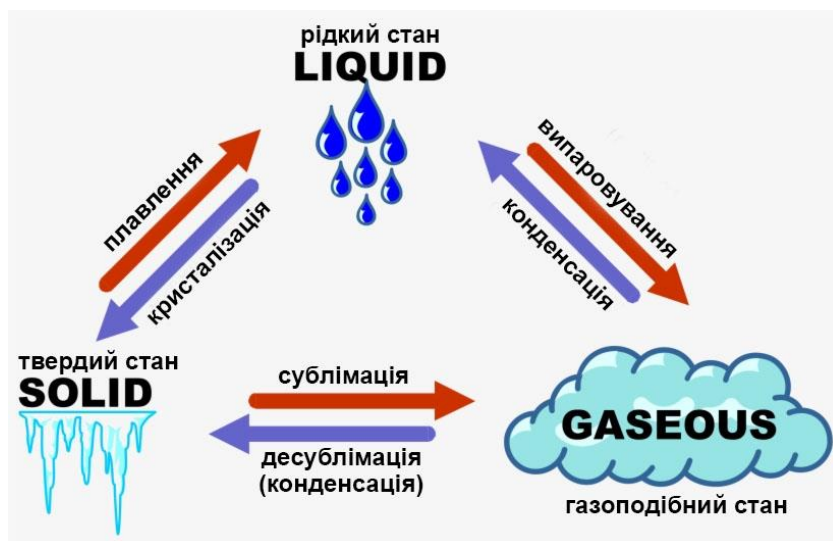
Взагалі, обидва види переходів можна характеризувати яким-небудь *параметром порядку* – властивістю, яка виникає, або щезає при переході (наприклад при кристалізації це кристалічна решітка, при надпровідності –

електропровідність, при переході у феромагнітний стан – магнітна проникність і т.ін.).

Надалі ми будемо розглядати фазові переходи I роду.

Приклади фазових переходів. Діаграма стану

У рідинах, або твердих тілах завжди є якась кількість молекул, що мають енергію достатню для того, щоб перебороти сили притягання до інших молекул і відірвавшись від поверхні рідини, або твердого тіла, перейти в газоподібну фазу. Процес такого переходу у рідин називається *випаровуванням*, а у твердих тіл – *сублімацією*.



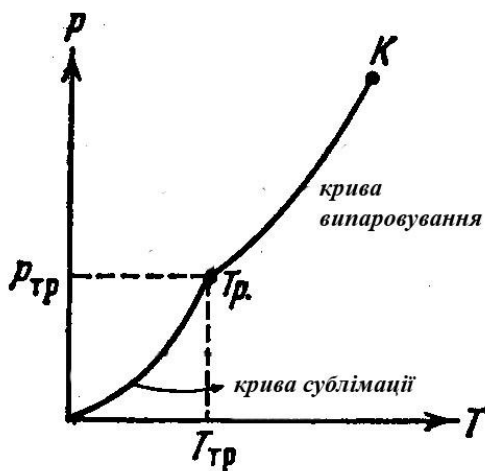
Під час випаровування, чи сублімації тіло залишають найбільш "енергійні" молекули, внаслідок чого знижується середня енергія молекул, що залишилися, і знижується температура тіла. Щоб температура тіла залишалась сталою до нього треба підводити тепло.

Теплота q , яку треба передати одиниці маси речовини, для того, щоб перетворити її на пару, що знаходиться при тій же температурі, яку мала речовина до випаровування, називається **питомою теплотою випаровування (сублімації)**.

Зворотній випаровуванню чи сублімації процес називається *конденсацією*. Як завжди при оборотних процесах та ж сама енергія (теплота), яка при випаровуванні поглиналась, при конденсації виділяється.

Якщо взяти герметичну посудину, частково заповнену рідиною, частина рідини випарується. В той же час молекули пари, хаотично рухаючись, будуть вдарятись об поверхню рідини і переходити у рідку фазу. Чим більшим буде тиск пари, тим більша кількість молекул за даної температури буде переходити у рідину. Коли тиск досягне певного значення, кількість молекул, що залишають рідину стане дорівнювати

кількості молекул, що у неї повертаються. Після цього густина пари перестав зростати і між рідиною та парою встановлюється рівновага.



Пара, що знаходиться в рівновазі зі своєю рідиною називається *насиченою*. Тиск, при якому спостерігається така рівновага називається *тиском насиченої пари*. Що таке критичний тиск, та критична температура ми з'ясували на попередній лекції. T_p – це потрібна точка, про яку ми поговоримо далі.

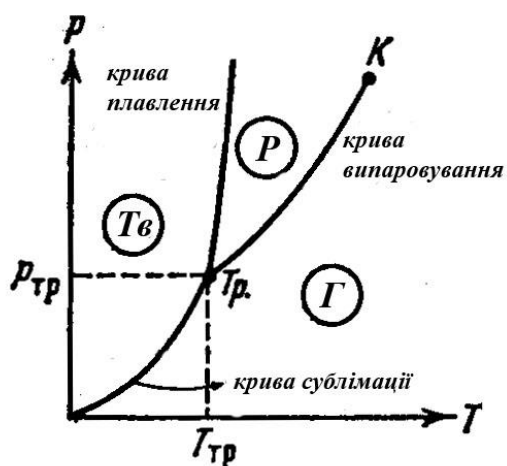
Все сказане про рівновагу рідини та газу стосується також системи тверде тіло-газ.

Перехід твердого тіла у рідкий стан відбувається за характерної для кожної речовини *температури плавлення* і супроводжується поглинанням певної кількості теплоти, що називається *теплотою плавлення*.

Додаткова енергія потрібна для руйнування кристалічної решітки. Зворотний процес – *кристалізація*, відповідно, супроводжується виділенням енергії.

Залежність температури тіла від часу в процесі плавлення була показана раніше. Спочатку при підведенні тепла температура тіла зростає. Після досягнення температури плавлення $T_{пл}$ температура перестав змінюватись і починає знову підвищуватись лише після того, як тіло повністю перейде у рідкий стан.

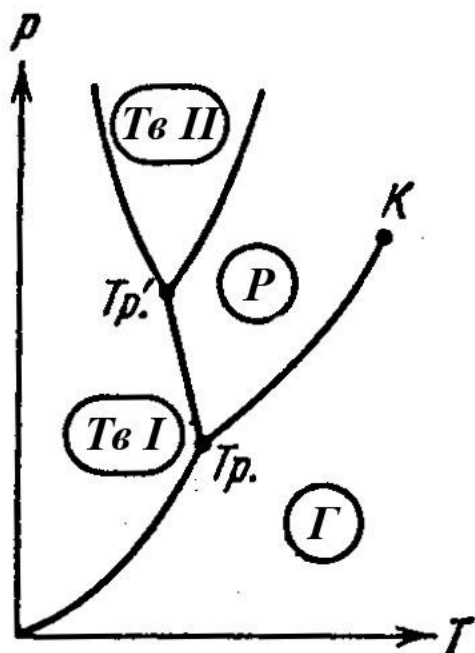
Температура плавлення залежить від тиску. Сукупність значень температури і тиску при яких відбувається плавлення утворює на діаграмі (P, T) криву, яка називається *кривою плавлення*.



Якщо зобразити в координатах (P, T) криві плавлення, випаровування та сублімації, вони розіб'ють координатну площину на три області. Зліва від кривих плавлення та сублімації лежить область твердої фази, між кривими плавлення та випаровування лежить область рідких станів, а справа від кривих випаровування та сублімації лежить область газоподібних станів речовини. Будь-яка точка в одній з цих областей зображує відповідний

однофазний стан речовини. Будь-яка точка, що лежить на одній з цих кривих зображує стан рівноваги двох фаз речовини. Точка, де ці криві перетинаються називається *потрійною точкою* і зображує стан рівноваги трьох фаз. Більше трьох фаз однієї речовини не можуть перебувати в стані рівноваги.

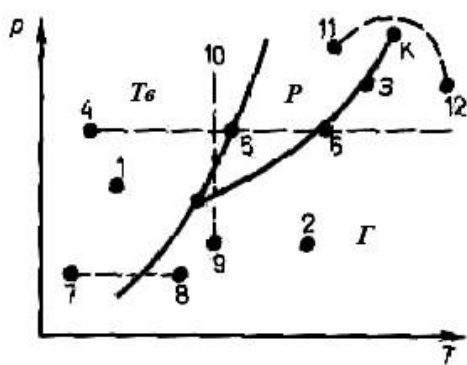
Таким чином, кожна точка на діаграмі зображує певний рівноважний стан речовини. Тому таку діаграму називають *діаграмою стану*.



Якщо речовина має кілька кристалічних модифікацій, діаграма стану матиме інший вигляд. На рисунку зображено таку діаграму для речовини з двома кристалічними модифікаціями. Вона має дві потрійні точки. В першій з них у рівновазі знаходяться рідина, газ та перша кристалічна модифікація, в другій – рідина, та дві кристалічні модифікації.

За діаграмою стану можна передбачити в якому стані буде знаходитись речовина при різних зовнішніх умовах (P і T), а також які перетворення відбуватимуться з нею при різних процесах.

Наприклад, за умов, що відповідають точці 1 (див. рисунок), речовина знаходиться в твердому стані, точці 2 – в газоподібному, а точці 3 – одночасно в рідкому і газоподібному станах. Припустимо, що речовина в твердому стані, що відповідає точці 4, піддається ізобарному нагріванню, зображеному на діаграмі стану горизонтальною штриховою прямою 4-5-6. З малюнка видно, що при температурі, що відповідає точці 5, речовина плавиться, при більш високій температурі, що відповідає точці 6, – починає перетворюватися на газ.



Якщо ж речовина знаходиться в твердому стані, що відповідає точці 7, то при ізобарному нагріванні (штрихова пряма 7-8) кристал перетворюється на газ минувши рідку фазу. Якщо речовина знаходиться у стані, що відповідає точці 9, то при ізотермічному стисканні (штрихова пряма 9-10) воно пройде наступні три стани: газ – рідина – кристалічний стан.

На діаграмі стану видно, що крива випаровування закінчується в критичній точці K . Тому можливий *безперервний* перехід речовини з рідкого стану в газоподібний і назад в обхід критичної точки, без перетину кривої випаровування (перехід 11-12 на рисунку), тобто такий перехід, який не супроводжується фазовими перетвореннями. Це можливо завдяки тому, що відмінність між газом і рідиною є чисто кількісною (обидва ці стани, наприклад, є ізотропними). Перехід же з кристалічного стану (характеризується анізотропією) в рідкий або газоподібний може бути лише стрибкоподібним (в результаті фазового переходу), тому криві плавлення і сублімації не можуть обриватися, як це має місце для кривої випаровування в критичній точці. Крива плавлення йде в нескінченність, крива сублімації йде в точку де тиск та температура дорівнюють нулю, а крива плавлення йде в нескінченність. Крива рівноваги двох кристалічних фаз також йде в нескінченність.

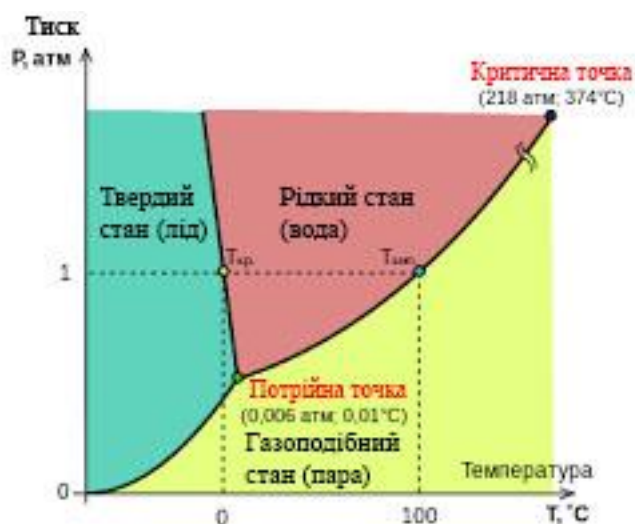
Для кількісного опису діаграми стану використовується *рівняння Клапейрона-Клаузіуса*, яке зв'язує похідну від рівноважного тиску за температурою з теплотою переходу, температурою та різницею питомих об'ємів фаз, що знаходяться у рівновазі:

$$\frac{dP}{dT} = \frac{q_{12}}{T(V_2' - V_1')},$$

де q_{12} – питома теплота фазового переходу зі стану 1 в стан 2 за температури T , V_1' і V_2' – питомі об'єми 1-ї та 2-ї фаз (питомий об'єм – об'єм який займає одиниця маси речовини – величина обернена до густини), T – температура переходу (процес ізотермічний).

Видно, що знак $\frac{dP}{dT}$ залежить від знаку $V_2' - V_1'$ (тобто від того, розширюється, чи стискається речовина при фазовому переході). Частіше за все зі зростанням T при переході об'єм зростає. При *випаровуванні* та *сублімації* так буває завжди, тому $\frac{dP}{dT}$ для кривих випаровування та сублімації може бути лише позитивною.

При плавленні частіше тяж буває так, але у деяких речовин, наприклад у води, чи чавуну, навпаки. Питомий об'єм V_2' води менше ніж питомий об'єм V_1' льоду тому для неї $\frac{dP}{dT}$ менше нуля і при збільшенні тиску зменшується температура плавлення. Збільшуючи тиск на лід можна при



температурі меншій за 273 К викликати його плавлення, що використовується при ковзанні на ковзанах. Відповідно на діаграмі зміниться кут нахилу лінії плавлення.

В такій діаграмі може скластись своєрідна ситуація: якщо $T < T_K$, то газ спочатку переходить у тверде тіло, і лише потім у рідину, а не навпаки, як звичайно буває.

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Кучерук І. М., Горбачук І. Т., Луцик П. П. Загальний курс фізики. : навч. посіб. Київ : Техніка, 1999. Т. 1 : Механіка. Молекулярна фізика і термодинаміка. 536 с.
2. Механіка : підручник / В. Г. Бар'яхтар та ін. ; ред. В. Г. Бар'яхтар. Київ : Наук. думка, 2011. 349 с.
3. Фізика. Механіка : підручник / Ю.І.Горобець та ін. ; уклад. Ю. І. Горобець. Київ : Хімджест, 2018. 192 с.
4. Лінчевський, І. В. Фізика [Електронний ресурс] : навч. посіб. для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти за технічними спеціальностями / І. В. Лінчевський, В. В. Хіст; КПІ ім. Ігоря Сікорського. – Електронні текстові дані (1 файл: 3,5 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2023. – 141 с. <https://ela.kpi.ua/handle/123456789/56864>
5. Загальна фізика. Фізичні основи механіки. Фізика макросистем. Конспект лекцій [Електронний ресурс] : навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра за освітньою програмою «Технічні та програмні засоби автоматизації» спеціальності 174 Автоматизація, комп'ютерно-інтегровані технології та робототехніка та за освітньою програмою «Інформаційні вимірювальні технології» спеціальності 175 Метрологія та інформаційно-вимірювальна техніка / КПІ ім. Ігоря Сікорського ; уклад.: О. М. Генкін – Електронні текстові дані (1 файл: 5,22 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2024. – 147 с. – <https://ela.kpi.ua/handle/123456789/69650>
6. Загальний курс фізики. : 3б. задач / І. П. Гаркуша та ін. ; ред. І. П. Гаркуша. Київ : Техніка, 2003. 560 с.
7. Фізика. Кінематика. Розв'язування задач [Електронний ресурс] : навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра за природничими і технічними спеціальностями / КПІ ім. Ігоря Сікорського ; уклад.: С. В. Пальцун, О. Ю. Салюк. – Електронні текстові дані (1 файл: 1,1 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2024. – 34 с. – <https://ela.kpi.ua/handle/123456789/67669>
8. Загальна фізика. Механіка. Методи розв'язування задач [Електронний ресурс] : навч. посіб. для здобувачів ступеня бакалавра за всіма освітніми програмами природничих та технічних спеціальностей / КПІ ім. Ігоря Сікорського ; уклад.: А. В. Немировський, О. О. Керіта. – Електрон. текст. дані (1 файл: 1,8 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2025. – 119 с. – <https://ela.kpi.ua/handle/123456789/73732>

9. Фізика: вчимося розв'язувати задачі. Компенсаційний курс [Електронний ресурс] : навч. посіб. для здобувачів ступеня бакалавра за освіт. програмою «Моделювання фізичних процесів» спец. 104 Фізика та астрономія / В. П. Бригінець, С. О. Подласов, О. В. Матвійчук ; КПІ ім. Ігоря Сікорського. – 2-ге вид., переробл. та доповн. – Електрон. текст. дані (1 файл: 18,3 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2025. – 796 с. – <https://ela.kpi.ua/handle/123456789/73049>