МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

А. Я. Карвацький

МЕХАНІКА СУЦІЛЬНИХ СЕРЕДОВИЩ – 2. НЕЛІНІЙНІ ЗАДАЧІ МЕХАНІКИ СУЦІЛЬНИХ СЕРЕДОВИЩ

Конспект лекцій з навчальної дисципліни

*Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для студентів, які навчаються за спеціальністю
133 «Галузеве машинобудування», спеціалізації «Інжиніринг, комп'ютерне моделювання та проектування обладнання виробництв полімерних і будівельних матеріалів і виробів»*

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2018

Рецензент: *Ладієва Л. Р.,* к-т техн. наук, доц.

Відповідальний редактор *Мікульонок І. О.,* д-р техн. наук, проф.

Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського (протокол № 10 від 21.06.2018 р.) за поданням Вченої ради інженерно-хімічного факультету (протокол № 5 від 29.05.2018 р.)

Навчальний посібник

Карвацький Антон Янович, д-р техн. наук, проф.

МЕХАНІКА СУЦІЛЬНИХ СЕРЕДОВИЩ – 2. НЕЛІНІЙНІ ЗАДАЧІ МЕХАНІКИ СУЦІЛЬНИХ СЕРЕДОВИЩ

Конспект лекцій з навчальної дисципліни

Механіка суцільних середовищ – 2. Нелінійні задачі механіки суцільних середовищ. Конспект лекцій з навчальної дисципліни [Електронний ресурс]: навч. посіб. для студ. спеціальності 133 «Галузеве машинобудування», спеціалізації «Інжиніринг, комп’ютерне моделювання та проектування обладнання виробництв полімерних і будівельних матеріалів і виробів» / А. Я. Карвацький. – Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2018. –94 с.

Подано теоретичні основи з таких розділів механіки суцільного середовища (МСС) як: рівняння МСС в криволінійних системах координат; стаціонарні і нестаціонарні нелінійні задачі МСС. Розглянуто: формулювання систем рівнянь тепло-гідродинаміки для стаціонарних і нестаціонарних задач МСС для нестисливих і стисливих рідин, зокрема, ідеальної стисливої рідини у випадку баротропних процесів, турбулентний рух суцільних середовищ, класичні моделі турбулентності для напружень Рейнольдса, моделі Прандтля і Прандтля-Колмогорова з одним рівнянням, а також модель ізотропної турбулентності з двома рівняннями.

Для студентів вищих навчальних закладів, які навчаються за спеціальностями «Прикладна механіка» і «Галузеве машинобудування» та інших споріднених спеціальностей: теплоенергетики, будівельної та нафтопереробної галузей промисловості.

УДК 531/534(075.8)

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ, СИМВОЛІВ, ОДИНИЦЬ, СКОРОЧЕНЬ

B^{ijmn} –	компоненти тензора 4-го рангу в'язкості рідини, Па·с;
$\overset{4}{\hat{\mathbf{C}}} = C^{ijkl}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\mathbf{e}_k\mathbf{e}_l$ –	тензор 4-го рангу фізичних констант або пружності, Па;
C_v –	об'ємна ізохорна теплоємність, Дж/(м^3·К);
$\hat{\mathbf{c}} = c_i^{j'}\mathbf{e}^i\mathbf{e}_{j'}$ –	тензор перетворення координат;
c_{p} –	масова ізобарна теплоємність, Дж/(кг·К);
c_v –	масова ізохорна теплоємність, Дж/(кг·К);
E –	модуль пружності під час розтягу, Па;
E^n –	n – вимірний евклідовий простір;
$\mathbf{e}_i,\ i = 1, 2, 3$ –	базис евклідового простору – тріедр;
$\mathbf{f} = f^m\mathbf{e}_m$ –	вектор об'ємного навантаження, Па/м;
g_{ij} –	набір скалярних добутків коваріантних базисів – коваріантні компоненти метричного тензора;
g^{ij} –	контраваріантні компоненти метричного тензора;
$\mathbf{g}$ –	вектор гравітації, м/с^2;
$\mathbf{I}$ –	одиничний тензор 2-го рангу;
J_2 –	другий інваріант тензора девіацій напруження, Па^2;
K –	модуль об'ємного стискання, Па;
k –	масова турбулентна кінетична енергія, Дж/кг;
m –	маса, кг;
$\mathbf{n} = n_i\mathbf{e}^i$ –	вектор нормалі до поверхні тіла;
$\mathbf{p} = p^i\mathbf{e}_i$ –	зовнішнє зусилля, вектор напруження Па;
p –	гідростатичний тиск, Па;
$\mathbf{q} = q_i\mathbf{e}^i$ –	вектор густини теплового потоку, Вт/м^2;
q_v –	об'ємна густина внутрішнього джерела теплоти, що спричинена джерелом будь-якої немеханічної природи, Вт/м^3;
R –	універсальна газова стала, Дж/(кг·К);
$S_{ij}\quad i, j = \overline{1,3}$ –	компоненти тензора девіаторних напружень, Па;
T –	абсолютна температура, К;
t –	час, с;
$\mathbf{u} = u^i\mathbf{e}_i$ –	вектор переміщення, м;

V –	об’єм, м^3;
$\mathbf{v} = v_i \mathbf{e}^i$ –	вектор швидкості, м/с;
$v_{\Phi i}, i = 1,2,3$ –	фізичні коваріантні компоненти вектора $\mathbf{v}$;
ν –	коефіцієнт Пуассона;
x,y,z –	декартові координати, м;
$\left(x^1; x^2; x^3\right)$ –	компоненти вектора $\mathbf{r}$;
α –	коефіцієнт лінійного температурного розширення матеріалу, К$^{-1}$; коефіцієнт тепловіддачі, Вт/(м^2·К);
β –	коефіцієнт об’ємного температурного розширення, К$^{-1}$;
χ_i –	швидкість зміни маси m_i i-ї компоненти суміші в одиницю часу на одиницю об’єму за рахунок хімічної реакції, кг/с;
δ_i^k –	символ Кронекера;
ε –	швидкість дисипації турбулентної кінетичної енергії, Дж/(кг·с);
$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \varepsilon_{ij} \mathbf{e}^i \mathbf{e}^j$ –	тензор деформацій 2-го рангу;
$\hat{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}} = \dot{\varepsilon}_{ij} \mathbf{e}^i \mathbf{e}^j$ –	тензор швидкості деформацій 2-го рангу, с$^{-1}$;
ε_{ij}^e –	компоненти тензора пружних деформацій;
$\dot{\varepsilon}_{ij}^{ep}$ –	компоненти тензора швидкості в’язко-пластичної деформації, с$^{-1}$;
ε_{ijk} –	тензор 3-го рангу Леві-Чевіти;
ε_{ij}^T –	компоненти тензора теплових деформацій 2-го рангу;
$\Gamma_{ij;k} \equiv [ij;k]$ –	трисимвольні символи Кристофеля 1-го роду;
$\Gamma_{ij}^k \equiv \left\{ \begin{matrix} k \\ i \quad j \end{matrix} \right\}$ –	трисимвольні символи Кристофеля 2-го роду;
λ –	коефіцієнт теплопровідності, Вт/(м·К); коефіцієнт Ламе, Па;
μ –	коефіцієнт динамічної в’язкості, Па·с; коефіцієнт Ламе, Па;
μ_t –	коефіцієнт турбулентної в’язкості, Па·с;
θ –	повна об’ємна деформація;
ρ –	густина, кг/м^3;
$\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \sigma^{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j$ –	тензор напруження 2-го рангу, Па;
$\dot{\sigma}^{ij}$ –	компоненти тензора швидкості зміни напруження, Па/с;
σ_{Π} –	границя пластичності матеріалу, Па.

Основні індекси:

0 –	стосується початкового значення;
$\wedge$ –	стосується тензора 2-го рангу;
р –	стосується рідини, навколишнього середовища;
сер –	стосується середнього значення.

Інші символи:

$D \equiv \dfrac{d}{dx}$ –	оператор диференціювання (абсолютний диференціал);
div –	оператор дивергенції;
grad –	оператор градієнта;
rot –	оператор ротора;
Δ –	оператор Лапласа;
∇ –	оператор Гамільтона (“набла”);
$\cdot$ –	оператор скалярного добутку;
$\times$ –	оператор векторного добутку;
$\otimes$ –	оператор тензорного добутку;
: –	оператор подвійного скалярного добутку двох тензорів. Якщо тензори мають однаковий ранг, то результат добутку є скаляр, в протилежному випадку – вектор.

Основні скорочення:

SIMPLE –	Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations або напівнеявний метод розв’язку рівнянь, які зв’язують тиск;
ГУ –	граничні умови;
МСО –	метод скінченних об’ємів;
МСС –	механіка суцільних середовищ;
НДР –	науково-дослідна робота;
СРС –	самостійна робота студентів;
СПЗ –	спеціалізоване програмне забезпечення;
ФМ –	феноменологічний метод.

ВСТУП

Дисципліна «Механіка суцільних середовищ – 2. Нелінійні задачі механіки суцільних середовищ» (МСС-2) належить до циклу професійної підготовки студентів.

Предметом навчальної дисципліни ММС-2 є дослідження напружено-деформованого стану твердих, рідких та газоподібних тіл при їх взаємодії між собою та фізичними полями різної фізичної природи – гравітаційними, тепловими, електромагнітними, променевими тощо.

Дисципліна МСС-2 є найважливішою ланкою, яка логічно об’єднує розрізнені знання, здобуті студентами при вивченні окремих дисциплін, в єдину систему знань, що забезпечує високу якість при виконанні наукових та прикладних проектно-конструкторських розробок, носить теоретично-практичне спрямування при навчанні фахівців, що спеціалізуються в галузі машинобудування. Дисципліні МСС-2 передують такі навчальні дисципліни: «Математика», «Фізика», «Хімія», «Інформатика», «Інженерна та комп'ютерна графіка», «Опір матеріалів», «Деталі машин», «Теорія механізмів і машин», «Теоретична механіка», «Матеріалознавство», «Механіка твердого деформованого тіла», «Теоретичні основи теплотехніки», «Джерела енергії і енергозбереження», «Сучасні методи розрахунку процесів і апаратів», «Процеси, апарати і машини галузі»; «Механіка суцільних середовищ – 1. Механіка суцільних середовищ в інженерних розрахунках».

Метою дисципліни є формування у студентів таких здатностей:

- здатність до аналізу науково-технічної інформації, вітчизняного і зарубіжного досвіду з техніки і технології хімічних виробництв і підприємств будівельних матеріалів;
- здатність пропонувати концепції, моделі, винаходити й апробувати способи й інструменти професійної діяльності з використанням природничих наук;
- здатність до систематичного вивчення та аналізу науково-технічної інформації, вітчизняного й закордонного досвіду з відповідного профілю підготовки;
- здатність розробляти фізичні й математичні моделі досліджуваних машин, приводів, систем, процесів, явищ і об’єктів у професійній сфері, розробляти методики та організовувати проведення експериментів з аналізом результатів;
- здатність створювати та використовувати математичні моделі технічних систем та процесів;
- здатність виконувати наукові дослідження, включаючи обчислювальні;

– здатність до самостійної, індивідуальної роботи, прийняття рішень в рамках своїх задач професійної діяльності;
– здатність представляти отримані результати самостійної роботи з їх публікацією та публічним захистом.

Після засвоєння дисципліни МСС-2 студенти мають продемонструвати такі результати навчання:

знання :

– законів, методів і методик проведення наукових та прикладних досліджень;
– базові знання фундаментальних розділів математики, в обсязі, необхідному для володіння математичним апаратом системних наук;
– основ теоретичних досліджень на основі моделей механіки суцільних середовищ теплового, механічного та гідравлічного стану машин та апаратів хімічних виробництв;
– методів математичного моделювання з використанням сучасних програмно-технічних засобів;
– знання та розуміння загальних принципів функціонування та архітектури комп'ютерних систем, володіння системним та прикладним програмним забезпеченням;
– знання та розуміння загальних принципів узагальнення результатів наукових досліджень на підставі аналізу виконаних досліджень;

уміння :

– здійснювати збір, обробку і систематизацію науково-технічної інформації використовуючи інформаційні технології, сучасні інтегровані середовища;
– проводити комп'ютерні експерименти за заданими методиками з обробкою й аналізом результатів;
– застосовувати методи комп'ютерного інжинірингу з використанням спеціального програмного забезпечення при проектуванні машин та апаратів хімічних виробництв;
– забезпечувати моделювання технічних об'єктів і технологічних процесів з використанням стандартних пакетів і засобів автоматизації інженерних розрахунків;
– вибирати і обґрунтовувати рівняння стану конструкційних матеріалів та матеріалів, що знаходяться в стадії переробки використовуючи результати аналізу умов роботи конструкції і враховуючи особливості технологічних процесів, що протікають в обладнанні, на основі відомих фізичних закономірностей та математичних залежностей;

– вибирати математичні моделі фізичних полів та середовищ, що взаємодіють з конструкціями використовуючи результати аналізу умов роботи конструкції за допомогою відомих фізичних та математичних залежностей;
– визначати для конструкції початкові і граничні умови та схему навантажень використовуючи розроблені математичні моделі за допомогою методів числового аналізу, програмного забезпечення;
– складати розрахункову модель конструкції при статичних та динамічних термосилових навантаженнях використовуючи результати аналізу дії на конструкції зовнішніх фізичних полів та середовищ і враховуючи відомі рівняння стану;
– виконувати тривимірне зображення геометричного об’єкта в умовах проектування виробу, використовуючи графічні методи розв’язання позиційних і метричних інженерно-геометричних задач, за допомогою засобів САПР;
– розробляти скінченно-елементну модель конструкції використовуючи складену розрахункову модель конструкції з врахуванням її взаємодії з фізичними полями та середовищами за допомогою існуючої довідкової інформації та програмного забезпечення;
– визначати напружено-деформований стан конструкції при статичних та динамічних термосилових навантаженнях використовуючи скінченно-елементну модель конструкції з врахуванням рівнянь стану конструкційних матеріалів, за допомогою спеціалізовано програмного забезпечення;
– визначати термосилові навантаження, які виникають у елементах технологічного обладнання використовуючи закони механіки та опору матеріалів, враховуючи особливості технологічних процесів хімічних виробництв і підприємств будівельних матеріалів;
– виконувати розрахунки елементів технологічного обладнання хімічних виробництв і підприємств будівельних матеріалів на міцність і жорсткість користуючись числовими методиками, відомими аналітичними залежностями;
– визначати поля напружень в елементах технологічного обладнання від експлуатаційних навантажень в умовах проектно-конструкторського бюро, використовуючи числові методи;
– визначати розподіл температур в елементах технологічного обладнання, виникаючих при їх експлуатації умовах проектно-конструкторського бюро, використовуючи числові методи;
– виконувати узагальнення результатів наукових досліджень на підставі аналізу виконаних досліджень.

У додатках наведені питання для самоконтролю по кожній лекції та самостійної підготовки студентів.

ТЕМА 1 РІВНЯННЯ МСС В КРИВОЛІНІЙНИХ СИСТЕМАХ КООРДИНАТ

Лекція 1.1(1) **Криволінійні координати, основні визначення. Основний та взаємний векторні базиси криволінійних систем координат. Представлення векторів і тензорів у криволінійних координатах. Метричний тензор та тензор перетворення координат**

Криволінійні координати, основні визначення. Основний та взаємний векторні базиси криволінійних систем координат.)[1]

Хоч в евклідовому просторі)[2] завжди можна ввести декартову систему координат, при розв'язанні задач механіки часто використовують криволінійні системи координат. Зазвичай це пов'язано з симетрією задачі. Наприклад, описати поведінку вісесиметричного тіла під дією вісесиметричного навантаження зручніше в циліндричній системі координат.

Розглянемо системи координат і локальні базиси. Система координат в евклідовому тривимірному просторі встановлює відповідність $\mathbf{r} \leftrightarrow \left(x^1; x^2; x^3\right)$)[3] між векторами і трійками чисел; говорять також про точку з координатами $\left(x^1; x^2; x^3\right)$. Тільки в спеціальних прямолінійних системах координат трійка чисел $x^1; x^2; x^3$ є компонентами вектора $\mathbf{r}$.

Якщо в просторі задана криволінійна система координат, то через кожну точку можна провести координатні лінії – тобто лінії, вздовж яких дві координати постійні.

Система координат визначає в кожній точці $\left(x^1; x^2; x^3\right)$ локальний – відповідний цій точці – базис евклідового простору $\mathbf{e}_i$ (трієдр)[4]

$$\mathbf{e}_i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^i}. \tag{1.1}$$

[1] Механика сплошных сред в задачах. Т. 1,2 / Под. ред. М. Э. Эглит. — М. : «Московский Лицей», 1996. — с. 396, 394.

[2] **Евклідовий простір** — простір, властивості якого описуються аксіомами евклідової геометрії. В цьому випадку вважається, що простір має розмірність 3. Зазвичай n – вимірний евклідовий простір позначається E^n, хоч часто використовується не зовсім прийнятне позначення R^n.

[3] **Координати** зазвичай нумеруються верхніми індексами і позначаються x^i, $i = 1, 2, 3$. декартові координати часто позначаються через x, y, z, іноді x^i; Лагранжеві координати – ξ^i.

[4] **Трієдр** *(від грец. tri-, в складних словах — три і hédra — основа, грань)* — система трьох взаємно перпендикулярних одиничних векторів, які виходять із одної точки. Спеціальним чином вибрані трієдри грають важливу роль в механіці (при вивченні відносного руху), в диференціальній геометрії кривих і поверхонь. В теорії просторових кривих велике значення мають рухомі трієдри кривої, які будуються так, що один вектор *t* направлений по дотичній до кривої, другий *n* — по головній нормалі, а третій *b* — по бінормалі.

Вектори $\mathbf{e}_i$ направлені по дотичних до координатних ліній. Базис $\mathbf{e}_i$ називають коваріантним.)[5] Цей базис також називають основним векторним базисом криволінійної системи координат.

Взаємним базису $\mathbf{e}_i$ називається базис $\mathbf{e}^k$, який задовольняє співвідношенням

$$\mathbf{e}^k \cdot \mathbf{e}_i = \delta_i^k, \tag{1.2}$$

де $\delta_i^k = \begin{cases} 1 \text{ при } i = k, \\ 0 \text{ при } i \neq k, \end{cases}$ – символ Кронекера.

Тут $\mathbf{e}^k \cdot \mathbf{e}_i$ скалярний добуток векторів $\mathbf{e}^k$ і $\mathbf{e}_i$. Він існує і є єдиним і ефективно знаходиться.)[6] Базис $\mathbf{e}^k$ називають контраваріантним)[5].

Якщо g_{ij} – набір скалярних добутків коваріантних базисів

$$g_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j, \tag{1.3}$$

а g^{ij} – набір елементів матриці $\left\| g^{ij} \right\|$, яка є оберненою до матриці $\left\| g_{ij} \right\|$, то справедливі такі співвідношення

$$\mathbf{e}^i = g^{ik}\mathbf{e}_k, \qquad \mathbf{e}_j = g_{jk}\mathbf{e}^k, \qquad g^{ij} = \mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}^j)^7. \tag{1.4}$$

Матриця (тензор) $g_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$, $(i, j = 1,\ 2,\ 3)$ є симетричною матрицею виду

$$\begin{Vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{12} & g_{22} & g_{23} \\ g_{13} & g_{23} & g_{33} \end{Vmatrix} = \left\| \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_k \right\| = \left\| (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_k) \right\|,$$

а її компоненти є з коефіцієнтами квадратичної форми диференціалів dx^i.

---

[5] **Коваріантність і контраваріантність** — математичне і фізичне поняття, яке описує те, як величини змінюються при перетворенні системи координат. Координати геометричного вектора вимірюються в будь-якій конкретній системі координат. Зв'язок між коваріантними і контраваріантними координатами тензора можлива тільки в метричному просторі, тобто в просторі, де заданий **метричний тензор**. Контраваріантні координати тензора прийнято записувати з верхнім індексом, на відміну від запису з нижнім індексом для коваріантних координат тензора.

[6] **Взаємний базис** можна шукати у вигляді $\mathbf{e}^k = X^{kj}\mathbf{e}_j$. Коефіцієнти X^{kj} визначаються із умов $\mathbf{e}^k \cdot \mathbf{e}_i = \delta_i^k$.

[7] $\mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}^j = g^{ik}\mathbf{e}_k \cdot g^{jl}\mathbf{e}_l = g^{ik}g^{jl}\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_l = g^{ik}g^{jl}g_{kl} = g^{ij}$.

Представлення векторів і тензорів у криволінійних координатах.

Розглянемо векторні і тензорні поля. Векторна функція на області (поверхні, кривій) називається *векторним полем* або частіше – просто вектором. Якщо вибрана система координат $\left(x^i\right)$, то векторне поле представляють, використовуючи при цьому, локальні базиси $\mathbf{e}_i$ або взаємні базиси $\mathbf{e}^j$ у вигляді

$$\mathbf{v} = v^i \mathbf{e}_i = v_j \mathbf{e}^j, \tag{1.5}$$

де $v^i = g^{ik} v_k, \;\; v_j = g_{jk} v^k.$ (1.6)

Величини v^i називають *контраваріантними* компонентами векторного поля $\mathbf{v}$ в системі координат $\left(x^i\right)$, величини v_j – його *коваріантними* компонентами. Для позначення контраваріантних компонент індекси ставляться зверху, коваріантних компонент – внизу. У випадку ортогональної криволінійної системи координат часто використовуються також фізичні компоненти.

Розмірності компонент вектора в криволінійній системі координат можуть бути різними на відміну від декартових. Для того щоб уникнути цього у криволінійній ортогональній системі координат $\left(\mathbf{e}_i \perp \mathbf{e}_j \text{ при } i \neq j\right)$, вводять так звані фізичні *контраваріантні* компоненти $v^i_\Phi = \tilde{v}^i$ вектора $\mathbf{v}$:

$$v^1_\Phi = \tilde{v}^1 = v^1\sqrt{g_{11}},\; v^1_\Phi = v^2\sqrt{g_{22}},\; v^3_\Phi = v^3\sqrt{g_{33}} \tag{1.7}$$

або через *коваріантні* компоненти $v_{\Phi 1} = v_1\left|\mathbf{e}^1\right|,\; v_{\Phi 2} = v_2\left|\mathbf{e}^2\right|,\; v_{\Phi 3} = v_3\left|\mathbf{e}^3\right|.$

Вектор при цьому представляється у виді

$$\mathbf{v} = v_{\Phi 1}\frac{\mathbf{e}_1}{\left|\mathbf{e}_1\right|} + v_{\Phi 2}\frac{\mathbf{e}_2}{\left|\mathbf{e}_2\right|} + v_{\Phi 3}\frac{\mathbf{e}_3}{\left|\mathbf{e}_3\right|}, \tag{1.8}$$

де $\dfrac{\mathbf{e}_1}{\left|\mathbf{e}_1\right|} = \dfrac{\mathbf{e}^1}{\left|\mathbf{e}^1\right|},\;\; \dfrac{\mathbf{e}_2}{\left|\mathbf{e}_2\right|} = \dfrac{\mathbf{e}^2}{\left|\mathbf{e}^2\right|},\;\; \dfrac{\mathbf{e}_3}{\left|\mathbf{e}_3\right|} = \dfrac{\mathbf{e}^3}{\left|\mathbf{e}^3\right|}.$

Ця трійка векторів називається фізичним базисом, який пов'язаний з криволінійною системою координат, що розглядається.

Якщо поряд з системою координат $\left(x^i\right)$ розглядається система координат $\left(x^{k'}\right)$, то її базис, взаємний базис і компоненти векторного поля $\mathbf{v}$ в системі координат $\left(x^{k'}\right)$ (відмічені штрихами) зв’язані з базисами $\mathbf{e}_i, \mathbf{e}^j$

і компонентами векторного поля **v** в системі координат $\left(x^i\right)$ співвідношеннями або законами перетворення типу (1.9) і (1.10)

$$\mathbf{e}_{i'} = \frac{\partial x^k}{\partial x^{i'}}\mathbf{e}_k, \quad v_{i'} = \frac{\partial x^k}{\partial x^{i'}}v_k \qquad \text{(коваріантний закон)} \tag{1.9}$$

$$\mathbf{e}^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^k}\mathbf{e}^k, \quad v^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^k}v^k \qquad \text{(контраваріантний закон).} \tag{1.10}$$

Справедливі також співвідношення вигляду

$$\mathbf{e}_i = \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^i}\mathbf{e}_{k'}, \quad v_i = \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^i}v_{k'},$$

$$\mathbf{e}^i = \frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}}\mathbf{e}^{k'}, \quad v^i = \frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}}v^{k'},$$

$$\frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}}\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^j} = \delta^i_j, \quad \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^k}\frac{\partial x^k}{\partial x^{j'}} = \delta^{i'}_{j'}.$$

Тензорна функція на області (поверхні, кривій) називається тензорним полем на області (поверхні, кривій) або часто – просто тензором. Якщо вибрана система координат $\left(x^i\right)$, то тензорне поле представляється, наприклад, у випадку тензорів другого рангу у вигляді

$$\hat{\mathbf{t}} = t^{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j = t_{k\cdot}^{\cdot j}\mathbf{e}^k\mathbf{e}_j = t^{i\cdot}_{\cdot l}\mathbf{e}_i\mathbf{e}^l = t_{kl}\mathbf{e}^k\mathbf{e}^l. \tag{1.11}$$

Числові коефіцієнти називаються компонентами тензора в системі координат $\left(x^i\right)$: t^{ij} – контраваріантними, $t^{i\cdot}_{\cdot l}$ і $t_{k\cdot}^{\cdot j}$ – змішаними, t_{kl} – коваріантними. Точки у виразах $t_{k\cdot}^{\cdot j}$, $t^{i\cdot}_{\cdot l}$ і аналогічних виразах вказують на порядок індексів. Наприклад, в виразі $A^{i\cdot}_{\cdot k}$ індекс i – перший, k – другий, і набір чисел $A^{i\cdot}_{\cdot k}$ можна представити у вигляді матриці.

Компоненти тензора в системі координат $\left(x^{k'}\right)$ зв'язані з його компонентами в системі координат $\left(x^i\right)$ так званим *тензорним законом перетворення*: для кожного нижнього індексу використовується коваріантний, для кожного верхнього контраваріантний закон перетворення (див. формули (1.9), (1.10)), наприклад

$$t^{i'j'\cdot}_{\cdot\cdot k'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^p}\frac{\partial x^{j'}}{\partial x^q}\frac{\partial x^r}{\partial x^{k'}}t^{pq\cdot}_{\cdot\cdot r}. \tag{1.12}$$

Якщо $\left(x^{i}\right)$ і $\left(x^{k'}\right)$ – дві системи координат, то $t^{pq\cdot}_{\cdot\cdot r}$ і $t^{i'j'\cdot}_{\cdot\cdot k'}$ – компоненти тензора $\mathbf{t}$ в цих системах координат, якщо і тільки тоді, коли вони зв'язані тензорним законом перетворення (1.12). Тензор третього рангу розглянутий тут у якості прикладу, сформульоване твердження справедливе для випадку будь-якого рангу тензора.

Метричний тензор та тензор перетворення координат.

Метричний тензор g_{ij} або фундаментальний тензор простору g_{ij} було введено формулою (1.3). Величини

$$g_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j, \qquad g_{i\cdot}^{\cdot j} = g_{\cdot i}^{j\cdot} = \delta_i^j \qquad g^{ij} = \mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}^j, \tag{1.13}$$

де $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j$ – скалярний добуток базисних коваріантних векторів $\mathbf{e}_i$ і $\mathbf{e}_j$ є компонентами тензора другого рангу, який називається *метричним*.)[8]

Квадрат довжини елемента дуги ds^2 (– інваріант)[9] визначається співвідношенням

$$ds^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = g_{ij} dx^i dx^j. \tag{1.14}$$

Матриця $\left\| g^{ij} \right\|$ обернена до матриці $\left\| g_{ij} \right\|$. Справедливі співвідношення між основними і взаємними базисами векторів (коваріантними і контраваріантними) виду

$$\mathbf{e}^i = g^{ik}\mathbf{e}_k, \qquad \mathbf{e}_j = g_{jk}\mathbf{e}^k. \tag{1.15}$$

Із формул (1.15) витікає, що матриці $g_* = \left\| g_{ik} \right\|$ і $g^* = \left\| g^{ik} \right\|$ взаємно обернені. Відповідно,

$$g_1 = \frac{1}{g}, \tag{1.16}$$

де $g_1 = \left|\left(\mathbf{e}^i, \mathbf{e}^k\right)\right| = \left|\mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}^k\right|$, $g = \left|\left(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_k\right)\right| = \left|\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_k\right|$, $\quad \left(i, k = 1,\ 2,\ 3\right)$.

Контраваріантні і коваріантні компоненти вектора зв'язані законом (1.5), а для тензора другого рангу – *тензорним законом перетворення* виду:

---

[8] **Метричний тензор** або **метрика** — це симетричне тензорне поле другого рангу на гладкій багатостатності, за допомогою якого задаються скалярний добуток векторів в дотичному просторі, довжина кривих, кути між кривими та ін.

[9] **Інваріант** в математиці — це властивість деякого класу (множини) математичних об'єктів лишатися незмінними при перетвореннях певного типу, наприклад, систем координат.

$$t^{i\cdot}_{\cdot j} = g^{ik} t_{kj}, \qquad t^{\cdot i}_{j\cdot} = g_{ik} t^{kj}, \qquad t^{ij} = g^{ik} g^{jl} t_{kl}. \tag{1.17}$$

Аналогічні формули справедливі і для тензора будь-якого рангу, наприклад

$$t^{ijq\cdot}_{\cdots l} = g^{qk} t^{ij\cdot\cdot}_{\cdot\cdot kl},$$

індекс піднімається або опускається так само, якби він був єдиним (див. (1.5)).

Розглянемо тепер формули перетворення координат при переході від одної системи координат до іншої на прикладі тривимірного простору)[10]. Відомо, що координати простору, координатні лінії, векторні тріедри $\mathbf{e}_i$ і $\mathbf{e}^i$, і пов’язані з ними величини, залежать від вибору системи координат.

Нехай задано дві системи координат K і K'. В системі K координати точок простору позначені через x^1, x^2, x^3, а в системі K' – через y^1, y^2, y^3 і задані функції

$$y^i = y^i\left(x^1, x^2, x^3\right) \ \ (i = 1, 2, 3), \tag{1.18}$$

Далі припустимо, що функції $y^i\left(x^1, x^2, x^3\right)$ неперервні, диференціюються і визначають взаємно однозначну відповідність в областях, що розглядаються.

Як відомо, в цьому випадку якобіани перетворення відмінні від нуля:

$$\Delta = \left|\frac{\partial y^i}{\partial x^k}\right| \neq 0 \qquad \text{і} \qquad \Delta^{-1} = \left|\frac{\partial y^i}{\partial x^k}\right| \neq 0. \tag{1.19}$$

Причому матриці, що відповідають цим детермінантам, взаємно обернені. Формули (1.18) можуть бути розв’язані в малому околу будь-якої точки вказаних областей і представлені у вигляді

$$x^i = x^i\left(y^1, y^2, y^3\right) \ \ (i = 1, 2, 3).$$

Нехай $\mathbf{e}_i$ і $\mathbf{e}_{i'}$ $(i = 1, 2, 3)$ – вектори координатних реперів у точці M відповідно в системах координат K і K'. Для будь-якого вектора переміщення $d\mathbf{r}$ справедлива рівність

$$d\mathbf{r} = dx^1\mathbf{e}_1 + dx^2\mathbf{e}_2 + dx^3\mathbf{e}_3 = dy^1\mathbf{e}_{1'} + dy^2\mathbf{e}_{2'} + dy^3\mathbf{e}_{3'}.$$

Звідси легко отримати формули, що зв’язують $\mathbf{e}_i$ і $\mathbf{e}_{i'}$. Тому що

[10] Седов Л.И. Введение в механику сплошной среды. — М.: Изд-во физ-мат. лит., 1962. — 284 с.

$$dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial y^\alpha} dy^\alpha \qquad \text{і} \qquad dy^i = \frac{\partial y^i}{\partial x^\alpha} dx^\alpha . \tag{1.20}$$

де по α виконується підсумовування, то

$$dy^m \frac{\partial x^n}{\partial y^m} \mathbf{e}_n = dy^m \mathbf{e}_{m'} \qquad \text{і} \qquad dx^m \mathbf{e}_m = dx^m \frac{\partial y^n}{\partial x^m} \mathbf{e}_{n'} .$$

Звідки отримуємо формули

$$\mathbf{e}_{m'} = \frac{\partial x^n}{\partial y^m} \mathbf{e}_n , \qquad \mathbf{e}_m = \frac{\partial y^n}{\partial x^m} \mathbf{e}_{n'} . \tag{1.21}$$

Позначимо через A матрицю перетворення, тобто (розгорнутий якобіан)

$$A = \left\| a^{i\cdot}_{\cdot k} \right\| = \left\| \frac{\partial x^i}{\partial y^k} \right\| = \left\| \begin{matrix} \frac{\partial x^1}{\partial y^1} & \frac{\partial x^1}{\partial y^2} & \frac{\partial x^1}{\partial y^3} \\ \frac{\partial x^2}{\partial y^1} & \frac{\partial x^2}{\partial y^2} & \frac{\partial x^2}{\partial y^3} \\ \frac{\partial x^3}{\partial y^1} & \frac{\partial x^3}{\partial y^2} & \frac{\partial x^3}{\partial y^3} \end{matrix} \right\| , \text{ тоді } A^{-1} = \left\| b^{i\cdot}_{\cdot k} \right\| = \left\| \frac{\partial y^i}{\partial x^k} \right\| ,$$

перший індекс i дає номер рядка, а другий – k – номер стовпця. Формули (1.20) і (1.21) символічно можна записати у формі:

$$dx^i = a^{i\cdot}_{\cdot k} dy^k , \quad \mathbf{e}_k = \mathbf{e}_{i'} A^{-1} \qquad \text{і} \qquad dy^i = b^{i\cdot}_{\cdot k} dx^k \qquad \mathbf{e}_{m'} = \mathbf{e}_i A. \tag{1.22}$$

У формулах (1.22) необхідно звернути увагу на порядок множників. У сумах $a^{i\cdot}_{\cdot k} dy^k$ згортка по dy^1, dy^2, dy^3 відбувається з різними членами фіксованого рядка (підсумовування за нижнім індексом) матриці A; у сумах $\mathbf{e}_i A^{-1}$ згортка тріедра $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ виконується з фіксованими членами стовпця (підсумовування по верхньому індексу) матриці A.

Ми встановили формули для перетворення контраваріантних компонент dx^i, dy^i вектора $d\mathbf{r}$ і коваріантних векторів базисного репера $\mathbf{e}_i$ і $\mathbf{e}_{i'}$.

Також можна отримати формули перетворення коваріантних компонент dx_i, dy_i та контраваріантних векторів базису $\mathbf{e}^i$ і $\mathbf{e}^{i'}$:

$$dx_k = dy_i b^{i\cdot}_{\cdot k} , \qquad \mathbf{e}^i = A \mathbf{e}^{k'} \qquad \text{і} \qquad dy_k = dx_i a^{i\cdot}_{\cdot k} \qquad \mathbf{e}^{i'} = A^{-1} \mathbf{e}^k . \tag{1.23}$$

У формулах (1.23) порядок множників має той же зміст, що і в формулах (1.22).

Формули (1.22) і (1.23) дають повну систему формул прямого і зворотного перетворення для компонент вектора переміщення і векторів координатного базису. Симетрія і відмінність законів перетворення для коваріантних і контраваріантних величин очевидні із будови цих формул.

Лекція 1.2 (2) **Диференціювання базисних векторів криволінійних координат. Символи Кристофеля, основні позначення. Похідні від компонент метричного тензора та тензора перетворень. Залежності між символами Кристофеля і компонентами метричного тензора**

Диференціювання базисних векторів криволінійних координат. Символи Кристофеля, основні позначення.

Розглянемо спочатку диференціювання вектора $\mathbf{w}$ та його компонент в декартовій системі координат x^1, x^2, x^3

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial x^i}\left(w^k \mathbf{e}_k\right) = \frac{\partial w^k}{\partial x^i}\mathbf{e}_k + w^k \frac{\partial \mathbf{e}_k}{\partial x^i} = \frac{\partial w^k}{\partial x^i}\mathbf{e}_k, \tag{2.1}$$

тому що базисні вектори $\mathbf{e}_1 = \mathbf{i}$, $\mathbf{e}_2 = \mathbf{j}$, $\mathbf{e}_3 = \mathbf{k}$ не змінюються від точки до точки, тобто є константами і не залежать від координат x^1, x^2, x^3, і тому похідна від константи дорівнює нулю $\frac{\partial \mathbf{e}_k}{\partial x^i} = 0$.

Інша ситуація спостерігається у довільній криволінійній системі координат η^1, η^2, η^3. Тут вектори базису $\mathbf{e}_i$ (тріедра) є змінними, тобто $\frac{\partial \mathbf{e}_k}{\partial \eta^i} \neq 0$, і тому справедливо записати

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \eta^i} = \frac{\partial}{\partial \eta^i}\left(w^k \mathbf{e}_k\right) = \frac{\partial w^k}{\partial \eta^i}\mathbf{e}_k + w^k \frac{\partial \mathbf{e}_k}{\partial \eta^i}. \tag{2.2}$$[11]

[11] За визначенням похідні $\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \eta^i}$ векторного поля по координатах виражаються через компоненти деякого тензора другого рангу $\nabla \mathbf{w}$, компоненти якого мають спеціальні позначення $(\nabla \mathbf{w})_{k\cdot}^{\cdot i} = \nabla_k w^i$ і $(\nabla \mathbf{w})_{kj} = \nabla_k w_j$ і тому можна записати, що $\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \eta^i} = \left(\nabla_k w^i\right)\mathbf{e}_i = \left(\nabla_k w_j\right)\mathbf{e}^j$. Величини $\nabla_k w^i$,

Очевидно, що за визначенням можна прийняти, що похідна від *базисних векторів криволінійних координат* $\dfrac{\partial \mathbf{e}_k}{\partial \eta^i}$ також представляє собою вектор, який характеризує властивості криволінійної системи координат. Розкладемо цей вектор по базису $\mathbf{e}_j$ і позначимо компоненти цього розкладу символами Γ_{ki}^j. В результаті отримуємо

$$\frac{\partial \mathbf{e}_k}{\partial \eta^i} = \Gamma_{ki}^j \mathbf{e}_j . \tag{2.3}$$

Величини Γ_{ki}^j є функціями координат η^1, η^2, η^3 і називаються символами Кристофеля 2-го роду або коефіцієнтами зв'язаності.

Підставляючи (2.3) в (2.2) отримуємо

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \eta^i} = \frac{\partial w^k}{\partial \eta^i} \mathbf{e}_k + w^k \Gamma_{ki}^j \mathbf{e}_j . \tag{2.4}$$

Другий член (2.4) праворуч від знаку рівності $w^k \Gamma_{ki}^j \mathbf{e}_j$ представляє собою суму по k і j. Зробимо в ній заміну індексів підсумовування k на j і навпаки j на k. Тоді (2.4) можна переписати у вигляді

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \eta^i} = \frac{\partial w^k}{\partial \eta^i} \mathbf{e}_k + w^j \Gamma_{ji}^k \mathbf{e}_k = \left(\frac{\partial w^k}{\partial \eta^i} + w^j \Gamma_{ji}^k \right) \mathbf{e}_k . \tag{2.5}$$

Коефіцієнти при $\mathbf{e}_k$, тобто $\left(\dfrac{\partial w^k}{\partial \eta^i} + w^j \Gamma_{ji}^k \right)$, з двома індексами i, k мають спеціальні позначення)[2] $\nabla_i w^k$; вони, як вище відмічалось, називаються коваріантними похідними контраваріантних компонент вектора (векторного поля) $\mathbf{w}$

$$\nabla_i w^k = \frac{\partial w^k}{\partial \eta^i} + w^j \Gamma_{ji}^k . \tag{2.6}$$

Встановимо властивості $\nabla_i w^k$.

$\nabla_k w_j$ називаються коваріантні похідні відповідно контраваріантних і коваріантних компонент векторного поля $\mathbf{w}$.

В декартовій системі координат $\left(\eta^i = x^i\right)$, тому що $\dfrac{\partial \mathbf{e}_k}{\partial x^i} = 0$, тобто $\Gamma^k_{ji} = 0$, маємо, що

$$\nabla_i w^k = \frac{\partial w^k}{\partial \eta^i} = \frac{\partial w^k}{\partial x^i},$$

коваріантна похідна співпадає зі звичайною похідною компонент вектора по координаті.

Коваріантні похідні утворюють компоненти тензора. Насправді, нехай ξ^1, ξ^2, ξ^3 – нова, а η^1, η^2, η^3 – стара система координат. Тоді можна записати, що

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \xi^k} = \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \eta^i}\frac{\partial \eta^i}{\partial \xi^k},$$

і звідки видно, що, оскільки $\mathbf{w}$ інваріантний об’єкт, то $\dfrac{\partial \mathbf{w}}{\partial \eta^i}$ перетворюється, як коваріантні компоненти вектора. Тому

$$\hat{\mathbf{T}} = \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \eta^i}\mathbf{e}^i$$

представляє собою інваріантний об’єкт; але з (2.5) і (2.6) маємо, що

$$\hat{\mathbf{T}} = \nabla_i w^k \mathbf{e}_k \mathbf{e}^i,$$

тобто $\hat{\mathbf{T}}$ є тензором)[12] другого рангу, змішаними компонентами якого є коваріантні похідні $\nabla_i w^k$.

Відмітимо, що похідні $\dfrac{\partial w^k}{\partial \eta^i}$ не є компонентами тензора. Дійсно, якщо під знак похідної $\dfrac{\partial}{\partial \eta^i}$ підставити замість w^k їх вираз в новій системі координат

[12] **Тензор** (від лат. *tensus*, «напружений») — об’єкт лінійної алгебри, який лінійно перетворює елементи одного лінійного простору в елементи другого. Окремими випадками тензорів є скаляри, вектори, білінійні форми та ін.

$$w^k = w^{j'} \frac{\partial \eta^k}{\partial \xi^j},$$

то по η^i треба буде диференціювати і $\frac{\partial \eta^k}{\partial \xi^j}$, і ми не отримаємо тензорного закону перетворення для $\frac{\partial w^k}{\partial \eta^i}$.

Із визначення коваріантної похідної очевидно, що коваріантні похідні від скаляра φ співпадають зі звичайними похідними

$$\nabla_i \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial \eta^i}$$

і визначає вектор, який є вектором-градієнтом скалярного поля φ.

Розглянемо питання про коваріантне диференціювання у тому випадку, коли вектор задано не контраваріантними, а коваріантними компонентами. Нехай

$$\mathbf{w} = w_j \mathbf{e}^i$$

і необхідно визначити $\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \eta^i}$. Тоді

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \eta^i} = \frac{\partial w_j}{\partial \eta^i} \mathbf{e}^j + w_j \frac{\partial \mathbf{e}^j}{\partial \eta^i} \quad . \tag{2.7}$$

Очевидно, $\frac{\partial \mathbf{e}^j}{\partial \eta^i}$, також як і $\frac{\partial \mathbf{e}_j}{\partial \eta^i}$, буде вектором; розкладемо його за базисом $\mathbf{e}^k$. У випадку евклідового простору і в більш загальному випадку ріманового простору)[13] вірна формула

[13] **Геометрія Рімана** (еліптична геометрія) – одна з трьох «великих геометрій» (Евкліда, Лобачевського і Рімана). Якщо геометрія Евкліда реалізується на поверхнях з постійною нульовою гаусовою кривизною, Лобачевського – з постійною від'ємною, то геометрія Рімана реалізується на поверхнях з постійною позитивною гаусовою кривизною, тобто, на сферах. Історично геометрія Рімана з'явилась пізніше двох інших геометрій (у 1854 р.).
В геометрії Рімана пряма визначається двома точками, площина – трьома, дві площини перетинаються по прямій і т.д., але через дану точку неможливо провести до прямої жодної паралельної. В геометрії Рімана, як і в сферичній геометрії, справедливо твердження: сума кутів трикутника більше двох прямих, має місце формула $\Sigma = \pi + S / r^2$, де Σ – сума кутів трикутника, r – радіус сфери, на якій реалізована геометрія.

$$\frac{\partial \mathbf{e}^j}{\partial \eta^i} = -\Gamma^j_{ki}\mathbf{e}_k\,, \tag{2.8}$$

де Γ^j_{ki} – введені раніше символи Кристофеля 2-го роду. Для вставлення справедливості (2.8) скористуємось скалярним добутком

$$\mathbf{e}^j \cdot \mathbf{e}_k = \delta^j_k$$

і виконаємо диференціювання цієї рівності, яка вірна у всіх точках простору, по координаті $\partial\eta^i$ з врахуванням (2.3)

$$\frac{\partial \mathbf{e}^j}{\partial \eta^i}\cdot \mathbf{e}_k + \mathbf{e}^j \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_k}{\partial \eta^i} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \mathbf{e}^j}{\partial \eta^i}\cdot \mathbf{e}_k + \mathbf{e}^j \cdot \left(\Gamma^l_{ki}\mathbf{e}_l\right) = 0\,.$$

В останній формулі відмінний від нуля тільки той член, в якому $l = j$, тому

$$\frac{\partial \mathbf{e}^j}{\partial \eta^i}\cdot \mathbf{e}_k = -\Gamma^j_{ki}\,.$$

Очевидно, що ця формула рівносильна (2.8). Формула (2.7) з врахуванням (2.8) приймає вигляд

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \eta^i} = \frac{\partial w_j}{\partial \eta^i}\mathbf{e}^j - w_j\Gamma^j_{ki}\mathbf{e}^k\,.$$

Після заміни в останній сумі індексів підсумовування j на k, а k на j, отримуємо

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \eta^i} = \left(\frac{\partial w_j}{\partial \eta^i} - w_k\Gamma^k_{ji}\right)\mathbf{e}^j = \nabla_i w_j \mathbf{e}^j\,.$$

Вираз $\left(\frac{\partial w_j}{\partial \eta^i} - w_k\Gamma^k_{ji}\right)$ визначає коваріантну похідну від коваріантних компонент вектора

$$\nabla_i w_j = \frac{\partial w_j}{\partial \eta^i} - w_k\Gamma^k_{ji}\,.$$

Аналогічно можна ввести коваріантну похідну від коваріантних компонент будь-якого тензора.

Замітимо, що $\nabla_i w_j$ є коваріантними, а $\nabla_i w^j$ – змішаними компонентами одного й того ж тензора другого рангу

$$T = \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \eta^i}\mathbf{e}^i = \nabla_i w_j \mathbf{e}^j \mathbf{e}^i = \nabla_i w^j \mathbf{e}_j \mathbf{e}^i .$$

Наприклад, в ріманову просторі $x^1, x^2, \dots x^n$ розрізняють трисимвольні символи Кристофеля 1-го роду, які позначаються як $\Gamma_{ij;k} \equiv [ij;k] \equiv \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right)$, і 2-го роду, які позначаються як $\Gamma_{ij}^k \equiv \left\{\begin{matrix} k \\ i \quad j \end{matrix}\right\} \equiv g^{kh}[ij;h]$ (таблиця 2.1)[14]. Тут g_{ik} і g^{ik} – компоненти фундаментального метричного тензора ріманового (евклідового) простору.

Похідні від компонент метричного тензора та тензора перетворень.

З останнього виразу витікає, що компоненти метричного тензора g_{ij} і g^{ij}, не дивлячись на те, що вони залежать від η^1, η^2, η^3, повинні вести себе по відношенню до коваріантного диференціювання як постійні величини. Інакше кажучи, не змінюючи результату, їх можна вносити і виносити за знак ∇_i. Дійсно, між $\nabla_i w^j$ і $\nabla_i w_k$, як між різними компонентами одного і того ж тензора, існує зв'язок

$$\nabla_i w^j = g^{jk} \nabla_i w_k , \tag{2.9}$$

але

$$w^j = g^{jk} w_k , \tag{2.10}$$

і, відповідно,

$$\nabla_i \left(g^{jk} w_k\right) = g^{jk} \nabla_i w_k ,$$

тобто похідна $\nabla_i g^{jk} = 0$. Аналогічно, можна отримати, що

$$\nabla_i g_{jk} = 0 ,$$

якщо замість (2.9) взяти $\nabla_i w_k = g_{kj} \nabla_i w^j$, а замість (2.10) $w_k = g_{kj} w^j$.

Тобто $\nabla_i \left(g_{kj} w^j\right) = g_{kj} \nabla_i w^j$.

[14] Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн. — М. : Наука, 1984. — 831 с. (с. 186–187)

Визначимо тепер коваріантну похідну контраваріантних компонент тензора. Візьмемо для конкретності тензор другого рангу $\hat{H} = H^{jk}\mathbf{e}_j\mathbf{e}_k$ і проведемо обчислення таким чином

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{H}}}{\partial \eta^i} = \frac{\partial H^{jk}}{\partial \eta^i}\mathbf{e}_j\mathbf{e}_k + H^{jk}\frac{\partial \mathbf{e}_j}{\partial \eta^i}\mathbf{e}_k + H^{jk}\mathbf{e}_j\frac{\partial \mathbf{e}_k}{\partial \eta^i} =$$
$$= \frac{\partial H^{jk}}{\partial \eta^i}\mathbf{e}_j\mathbf{e}_k + H^{jk}\Gamma^l_{ji}\mathbf{e}_l\mathbf{e}_k + H^{jk}\mathbf{e}_j\Gamma^l_{ki}\mathbf{e}_l.$$

В другій сумі замінимо позначення індексів підсумовування l і j, а в третій l і k, тоді отримаємо

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{H}}}{\partial \eta^i} = \left(\frac{\partial H^{jk}}{\partial \eta^i} + H^{lk}\Gamma^j_{li} + H^{jl}\Gamma^k_{li}\right)\mathbf{e}_j\mathbf{e}_k = \nabla_i H^{jk}\mathbf{e}_j\mathbf{e}_k,$$

де за визначенням

$$\nabla_i H^{jk} = \frac{\partial H^{jk}}{\partial \eta^i} + H^{lk}\Gamma^j_{li} + H^{jl}\Gamma^k_{li}$$

називається коваріантною похідною контраваріантних компонент тензора другого рангу $\hat{\mathbf{H}} = H^{jk}\mathbf{e}_j\mathbf{e}_k$. Тобто похідні будь-якого тензорного поля по координатах виражаються через компоненти деякого тензора, на одиницю більшого, який позначається $\nabla\hat{\mathbf{H}}$. Нескладно побачити, що за допомогою диференціювання тензора другого рангу $\hat{\mathbf{H}}$ можна ввести тензори третього рангу за формулами

$$\overset{3}{\hat{\mathbf{T}}}_1 = \frac{\partial \hat{\mathbf{H}}}{\partial \eta^i}\mathbf{e}^i = \nabla_i H^{jk}\mathbf{e}_j\mathbf{e}_k\mathbf{e}^i,$$

або

$$\overset{3}{\hat{\mathbf{T}}}_2 = \nabla_i H^{jk}\mathbf{e}^i\mathbf{e}_j\mathbf{e}_k,$$

або

$$\overset{3}{\hat{\mathbf{T}}}_3 = \nabla_i H^{jk}\mathbf{e}_j\mathbf{e}^i\mathbf{e}_k.$$

Очевидно, що тензори $\overset{3}{\hat{\mathbf{T}}}_1, \overset{3}{\hat{\mathbf{T}}}_2, \overset{3}{\hat{\mathbf{T}}}_3$ взагалі є різними.

Аналогічним чином можна побудувати коваріантну похідну від контраваріантних похідних тензорів будь-якого рангу.

Із визначення коваріантної похідної (її лінійності по компонентах вектора) ясно, що коваріантна похідна від суми контраваріантних компонент дорівнює сумі коваріантних похідних

$$\nabla_i\left(v^k + w^k\right) = \nabla_i v^k + \nabla_i w^k .$$

Властивості символів Кристофеля. Залежності між символами Кристофеля і компонентами метричного тензора. Розглянемо обчислення символів Кристофеля в метричному евклідовому просторі і з'ясуємо властивості цих символів. Відмітимо, що існують більш складні простори, ніж евклідові або ріманові простори, в яких символи Кристофеля не обчислюються, а задаються, і спосіб їх завдання входить у визначення простору.

Символи Кристофеля не є компонентами будь-якого тензора. Це видно, наприклад, із того, що в одному й тому ж просторі вони в декартовій системі координат дорівнюють нулю (тому що $\dfrac{\partial \mathbf{e}_k}{\partial x^i} = 0$), а в криволінійній – відмінні від нуля. Очевидно, що компоненти тензора таких властивостей мати не можуть.

В евклідовому просторі символи Кристофеля симетричні по нижніх індексах

$$\Gamma^i_{kj} = \Gamma^i_{jk} .$$

Покажемо це. У евклідовому просторі завжди існує радіус вектор $\mathbf{r}\left(\eta^1, \eta^2, \eta^3\right)$ і $\mathbf{e}_j = \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial \eta^j}$, а

$$\frac{\partial \mathbf{e}_j}{\partial \eta^k} = \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial \eta^k \partial \eta^j} = \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial \eta^j \partial \eta^k} = \frac{\partial \mathbf{e}_k}{\partial \eta^j}, \tag{2.11}$$

звідки

$$\Gamma^i_{jk}\mathbf{e}_i = \Gamma^i_{kj}\mathbf{e}_i .$$

Напишемо формули для визначення символів Кристофеля за компонентами метричного тензора $\hat{g}$ або *залежності між символами Кристофеля і компонентами метричного тензора.*

Скористуємось співвідношенням, враховуючи що $g_{js} = \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_s$

$$\frac{\partial g_{js}}{\partial \eta^k} = \frac{\partial \mathbf{e}_j}{\partial \eta^k} \cdot \mathbf{e}_s + \frac{\partial \mathbf{e}_s}{\partial \eta^k} \cdot \mathbf{e}_j$$

і з нього отримаємо

$$\frac{\partial g_{js}}{\partial \eta^k} - \frac{\partial \mathbf{e}_s}{\partial \eta^k} \cdot \mathbf{e}_j = \Gamma^l_{jk} \mathbf{e}_l \cdot \mathbf{e}_s = \Gamma^l_{jk} g_{ls}$$

і аналогічно

$$\frac{\partial g_{ks}}{\partial \eta^j} - \frac{\partial \mathbf{e}_s}{\partial \eta^j} \cdot \mathbf{e}_k = \Gamma^l_{kj} \mathbf{e}_l \cdot \mathbf{e}_s = \Gamma^l_{kj} g_{ls}.$$

Складемо ці дві рівності і скориставшись симетрією символів Кристофеля по нижніх індексах, і рівністю (2.11) і тим, що

$$\frac{\partial \mathbf{e}_k}{\partial \eta^s} \cdot \mathbf{e}_j + \frac{\partial \mathbf{e}_j}{\partial \eta^s} \cdot \mathbf{e}_k = \frac{\partial g_{jk}}{\partial \eta^s},$$

отримаємо

$$\frac{\partial g_{is}}{\partial \eta^k} + \frac{\partial g_{ks}}{\partial \eta^j} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial \eta^s} = 2\Gamma^l_{jk} g_{ls}.$$

Згорнувши останнє співвідношення з $\frac{1}{2} g^{is}$, отримаємо *залежності між символами Кристофеля і компонентами метричного тензора*

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2} g^{is} \left(\frac{\partial g_{js}}{\partial \eta^k} + \frac{\partial g_{ks}}{\partial \eta^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial \eta^s} \right). \tag{2.12}$$

Формули перетворення символів Кристофеля. Символи Кристофеля Γ^k_{ij} як відомо не є компонентами будь-якого тензора, у тривимірному просторі вони утворюють екстенсив з 27 величин. Символи Кристофеля зв'язані з компонентами метричного тензора формулами (2.12)

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2} g^{ks} \left(\frac{\partial g_{is}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{js}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^s} \right). \tag{2.13}$$

Позначимо символи Кристофеля в системі координат η^i через Γ'^k_{ij}, а в системі координат ξ^i через Γ^k_{ij} і встановимо формули перетворення символів Кристофеля при переході від системи координат ξ^i до η^i.

Очевидно, що

$$\mathbf{e}_{i'} = \mathbf{e}_{\alpha} \frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial \eta^{i}};$$

виконавши диференціювання цієї рівності по η^{i} і враховуючи, що

$$\frac{\partial \mathbf{e}_{i'}}{\partial \eta^{j}} = \Gamma'^{\alpha}_{ij} \mathbf{e}_{\alpha'}, \qquad \frac{\partial \mathbf{e}_{\alpha}}{\partial \xi^{\beta}} = \Gamma^{\omega}_{\alpha\beta} \mathbf{e}_{\omega} = \Gamma^{\omega}_{\alpha\beta} \frac{\partial \eta^{\gamma}}{\partial \xi^{\omega}} \mathbf{e}_{\gamma'},$$

тому що $\mathbf{e}_{\omega} = \dfrac{\partial \eta^{\gamma}}{\partial \xi^{\omega}} \mathbf{e}_{\gamma'}$, отримаємо

$$\Gamma'^{\alpha}_{ij} \mathbf{e}_{\alpha'} = \left[\Gamma^{\omega}_{\alpha\beta} \frac{\partial \eta^{\gamma}}{\partial \xi^{\omega}} \frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial \eta^{i}} \frac{\partial \xi^{\beta}}{\partial \eta^{j}} + \frac{\partial^{2} \xi^{\omega}}{\partial \eta^{i} \partial \eta^{j}} \frac{\partial \eta^{\gamma}}{\partial \xi^{\omega}} \right] \mathbf{e}_{\gamma'}.$$

Помножимо обидві частини цієї рівності скалярно на $\mathbf{e}_{\gamma'}$, будемо мати шукану формулу

$$\Gamma'^{\gamma}_{ij} = \left(\Gamma^{\omega}_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial \eta^{i}} \frac{\partial \xi^{\beta}}{\partial \eta^{j}} + \frac{\partial^{2} \xi^{\omega}}{\partial \eta^{i} \partial \eta^{j}} \right) \frac{\partial \eta^{\gamma}}{\partial \xi^{\omega}}.$$

Таблиця 2.1 – Векторні формули в сферичних та циліндричних координатах

	Сферичні координати $r, \vartheta, \varphi (r \ge 0, 0 \le \vartheta \le \pi)$	Циліндричні координати $\rho, \varphi, z (\rho \ge 0)$
Координатні поверхні	$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ (сфери) $x^2 + y^2 - z^2 \mathrm{tg}^2 \vartheta = 0$ (конуси круглі) $y = x \mathrm{tg} \varphi$ (напівплощини, що проходять через вісь Oz)	$x^2 + y^2 = \rho^2$ (циліндри круглі прямі) $y = x \mathrm{tg} \varphi$ (напівплощини, що проходять через вісь Oz) $z = z$ (площини, що паралельні площині Oxy)
Перетворення координат $(x, y, z$ – прямокутні декартові координати$)$	$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \vartheta = \mathrm{ar}\cos \dfrac{z}{r} \\ \mathrm{tg} \varphi = \dfrac{y}{x} \left(\sin \varphi = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \end{cases}$ $\begin{cases} x = r \sin \vartheta \cos \varphi \\ y = r \sin \vartheta \sin \varphi \\ z = r \cos \vartheta \end{cases}$	$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \mathrm{tg} \varphi = \dfrac{y}{x} \left(\sin \varphi = \dfrac{y}{\rho} \right) \\ z = z \end{cases}$ $\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \\ z = z \end{cases}$
Перетворення диференціалів координат	$dx = \sin \vartheta \cos \varphi dr + r \cos \vartheta \cos \varphi d\vartheta - r \sin \vartheta \sin \varphi d\varphi$ $dy = \sin \vartheta \sin \varphi dr + r \cos \vartheta \sin \varphi d\vartheta + r \sin \vartheta \cos \varphi d\varphi$ $dz = \cos \vartheta dr - r \sin \vartheta d\vartheta$	$dx = \cos \varphi d\rho - \rho \sin \varphi d\varphi$ $dy = \sin \varphi d\rho + r \cos \varphi d\varphi$ $dz = dz$
Квадрат елемента довжини $ds^2 = (dr)^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ $g_{ii} = \lvert \mathbf{e}_i \rvert^2$	$ds^2 = dr^2 + r^2 d\vartheta^2 + r^2 \sin^2 \vartheta d\varphi^2$ $g_{rr} = 1,\ g_{\vartheta\vartheta} = r^2,\ g_{\varphi\varphi} = \mathrm{r}^2 \sin^2 \vartheta$	$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 + dz^2$ $g_{\rho\rho} = 1,\ g_{\varphi\varphi} = \rho^2,\ g_{zz} = 1$

Продовження таблиці 2.1

	Сферичні координати $r, \vartheta, \varphi (r \ge 0, 0 \le \vartheta \le \pi)$	Циліндричні координати $\rho, \varphi, z (\rho \ge 0)$
$\sqrt{g} = \sqrt{g_{11} g_{22} g_{33}}$	$\sqrt{g} = \dfrac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \vartheta, \varphi)} = r^2 \sin\vartheta$	$\sqrt{g} = \dfrac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \varphi, z)} = \rho$
Трьохіндексні символи Крістофеля (символи що не приведені тотожно дорівнюють нулю)	$\{\vartheta\vartheta; r\} = -r;\ \{\varphi\varphi; r\} = -r\sin^2\vartheta;\ \{\varphi\varphi; \vartheta\} =$ $= -r^2 \sin\vartheta\cos\vartheta$ $\{r\vartheta; \vartheta\} = r;\ \{r\varphi; \varphi\} = r\sin^2\vartheta;\ \{\vartheta\varphi; \varphi\} = r^2 \sin\vartheta\cos\vartheta$ $\begin{Bmatrix} r \\ \vartheta\vartheta \end{Bmatrix} = -r;\ \begin{Bmatrix} r \\ \varphi\varphi \end{Bmatrix} = -r\sin^2\vartheta;\ \begin{Bmatrix} \vartheta \\ \varphi\varphi \end{Bmatrix} = -\sin\vartheta\cos\vartheta$ $\begin{Bmatrix} \vartheta \\ r\vartheta \end{Bmatrix} = \dfrac{1}{r};\ \begin{Bmatrix} \varphi \\ r\varphi \end{Bmatrix} = \dfrac{1}{r};\ \begin{Bmatrix} \varphi \\ \vartheta\varphi \end{Bmatrix} = \mathrm{ctg}\vartheta;$	$\{\varphi\varphi; \rho\} = -\rho;\ \{\rho\varphi; \varphi\} = \rho$ $\begin{Bmatrix} \rho \\ \varphi\varphi \end{Bmatrix} = -\rho;\ \begin{Bmatrix} \varphi \\ \rho\varphi \end{Bmatrix} = \dfrac{1}{\rho}$
Перетворення фізичних координат	$\hat{F}_r = F_x \sin\vartheta\cos\varphi + F_y \sin\vartheta\sin\varphi + F_z \cos\vartheta$ $\hat{F}_\vartheta = F_x \cos\vartheta\cos\varphi + F_y \cos\vartheta\sin\varphi - F_z \sin\vartheta$ $\hat{F}_\varphi = -F_x \sin\varphi + F_y \cos\varphi$ $F_x = \hat{F}_r \sin\vartheta\cos\varphi + \hat{F}_\vartheta \cos\vartheta\cos\varphi - \hat{F}_\varphi \sin\varphi$ $F_y = \hat{F}_r \sin\vartheta\sin\varphi + \hat{F}_\vartheta \cos\vartheta\sin\varphi + \hat{F}_\varphi \cos\varphi$ $F_z = \hat{F}_r \cos\vartheta - \hat{F}_\vartheta \sin\vartheta$	$\hat{F}_\rho = F_x \cos\varphi + F_y \sin\varphi$ $\hat{F}_\varphi = -F_x \sin\varphi + F_y \cos\varphi$ $\hat{F}_z = F_z$ $F_x = \hat{F}_\rho \cos\varphi - \hat{F}_\varphi \sin\varphi$ $F_y = \hat{F}_\rho \sin\varphi + \hat{F}_\varphi \cos\varphi$ $F_z = \hat{F}_z$
Градієнт у фізичних координатах $\nabla\Phi = \dfrac{\partial\Phi}{\partial x}\mathbf{i} + \dfrac{\partial\Phi}{\partial y}\mathbf{j} + \dfrac{\partial\Phi}{\partial z}\mathbf{k}$	$\dfrac{\partial\Phi}{\partial r}\mathbf{e}_r + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\Phi}{\partial\vartheta}\mathbf{e}_\vartheta + \dfrac{1}{r\sin\vartheta}\dfrac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\mathbf{e}_\varphi$	$\dfrac{\partial\Phi}{\partial\rho}\mathbf{e}_\rho + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial\Phi}{\partial\vartheta}\mathbf{e}_\varphi + \dfrac{\partial\Phi}{\partial z}\mathbf{e}_z$

Лекція 1.3(3) **Операція диференціювання тензорів в криволінійних координатах. Абсолютна похідна від тензора. Коваріантні похідні від компонент тензора. Теорема Річчі. Оператор Гамільтона. Абсолютна похідна від вектора переміщень в криволінійних координатах. Скалярний та векторний добуток оператора Гамільтона на тензор. Оператори дивергенції, градієнта та ротора**

Операція диференціювання тензорів в криволінійних координатах (див. Лекцію №2). Операція диференціювання тензора, наприклад, 2-го рангу $\hat{T} = T^{jk}\mathbf{e}_j\mathbf{e}_k$ в криволінійній системі координат $\left(\eta^1, \eta^2, \eta^3\right)$ полягає у визначенні як звичайної похідної $\dfrac{\partial T^{jk}}{\partial \eta^i}$, так і похідних від локальних базисів криволінійних координат $\dfrac{\partial \mathbf{e}_k}{\partial \eta^i} \neq 0$. У зв'язку з цим, наприклад, коваріантна похідна від контраваріантних компонент тензора $\hat{T} = T^{jk}\mathbf{e}_j\mathbf{e}_k$ визначається таким чином

$$\begin{aligned}\frac{\partial \hat{\mathbf{T}}}{\partial \eta^i} &= \frac{\partial T^{jk}}{\partial \eta^i}\mathbf{e}_j\mathbf{e}_k\mathbf{e}^i + T^{jk}\frac{\partial \mathbf{e}_j}{\partial \eta^i}\mathbf{e}_k\mathbf{e}^i + T^{jk}\mathbf{e}_j\frac{\partial \mathbf{e}_k}{\partial \eta^i}\mathbf{e}^i = \\ &= \frac{\partial T^{jk}}{\partial \eta^i}\mathbf{e}_j\mathbf{e}_k\mathbf{e}^i + T^{jk}\Gamma^l_{ji}\mathbf{e}_l\mathbf{e}_k\mathbf{e}^i + T^{jk}\mathbf{e}_j\Gamma^l_{ki}\mathbf{e}_l\mathbf{e}^i,\end{aligned} \tag{3.1}$$

де Γ^l_{ji} – символи Кристофеля (в декартовій системі координат $\dfrac{\partial \mathbf{e}_k}{\partial x^i} = 0$, тобто $\Gamma^l_{ji} = 0$).

Після заміни індексів підсумовування у другому доданку (3.1) l і j, а у третьому l і k, отримаємо

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{T}}}{\partial \eta^i} = \left(\frac{\partial T^{jk}}{\partial \eta^i} + T^{lk}\Gamma^j_{li} + T^{jl}\Gamma^k_{li}\right)\mathbf{e}_j\mathbf{e}_k\mathbf{e}^i = \nabla_i T^{jk}\mathbf{e}_j\mathbf{e}_k\mathbf{e}^i, \tag{3.2}$$

де за визначенням

$$\nabla_i T^{jk} = \frac{\partial T^{jk}}{\partial \eta^i} + T^{lk}\Gamma^j_{li} + T^{jl}\Gamma^k_{li} = T^{jk}_{,i} \tag{3.3}$$

називається коваріантною похідною контраваріантних компонент тензора другого рангу. В результаті застосування *операції диференціювання до* *тензора* 2-го рангу T^{jk} отримали тензор 3-го рангу $T^{jk}_{,i}$. Тут кома вказує на диференціювання по η^i.

Абсолютна похідна від тензора.)[15] *Коваріантні похідні від компонент тензора.* Абсолютний диференціал будь-якого тензора **A** (наприклад, другого рангу A_i^l) є тензором того ж рангу й типу, причому його компоненти DA_i^{α} визначаються такими рівняннями:

$$\left.\begin{aligned} d\hat{\mathbf{A}} = d\left(A_i^l \mathbf{e}_l \mathbf{e}^i\right) = DA_i^l \mathbf{e}_l \mathbf{e}^i; \\ DA_i^l \equiv A_{i,j}^l dx^j, \end{aligned}\right\} \tag{3.4}$$

де $A_{i,j}^l \equiv \dfrac{D}{\partial x^j} A_i^l \equiv \dfrac{\partial A_i^l}{\partial x^j} - \Gamma_{ij}^k A_k^l + \Gamma_{kj}^l A_i^k$. Тут кома вказує на диференціювання по x^j.

Тензор $\nabla\hat{\mathbf{A}}$ (а інколи, також кожну його окрему компоненту) називають коваріантною похідною тензора $\hat{A}$; для компонент тензора $\hat{A}$ використовують також позначення

$$\nabla_j A_i^l \equiv \frac{D}{\partial x^j} A_i^l \equiv A_{i,j}^l. \tag{3.5}$$

Правила коваріантного диференціювання. Застосування тензорного аналізу часто спрощується завдяки тому, що звичайні правила диференціювання суми і добутки лишаються справедливими для коваріантного диференціювання:

$$\left.\begin{aligned} \frac{D}{\partial x^j}\left(A_i^l + B_i^l\right) = A_{i,j}^l + B_{i,j}^l; \\ \frac{D}{\partial x^j}\left(A_i^l B_i^l\right) = A_{i,j}^l B_i^l + A_i^l B_{i,j}^l; \\ \frac{D}{\partial x^j} A_i^l = A_{i,j}^l \,(\textit{правило згортки}). \end{aligned}\right\}. \tag{3.6}$$

Останні два правила застосовуються також для коваріантного диференціювання внутрішнього добутку.

Абсолютні (внутрішні) похідні і похідні за напрямком. Якщо в рімановому просторі задана регулярна крива

$$x^i = x^i(t) \quad \left(t_1 \le t \le t_2\right), \tag{3.7}$$

[15] Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн. — М. : Наука, 1984. — 831 с. (с. 513–516)

то компоненти dx^i / dt визначають контраваріантний простір $d\mathbf{r}/dt$, «направлений» по дотичній до даної кривої. Абсолютною (внутрішньою) похідною $d\hat{\mathbf{A}}/dt$ тензора $\hat{A}$ (2-го рангу з компонентами, що диференціюються) за параметром t вздовж даної кривої називається тензор тієї ж ваги, типу й рангу, як і $\hat{A}$

$$\frac{d\hat{\mathbf{A}}}{dt} = \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\cdot\nabla\right)\hat{\mathbf{A}}; \tag{3.8}$$

компоненти тензора $\dfrac{d\hat{\mathbf{A}}}{dt}$ дорівнюють

$$\frac{D}{dt}A_i^l \equiv A_{i,j}^l \frac{dx^j}{dt}. \tag{3.9}$$

Якщо компоненти тензора $\hat{A}$ залежать від t не тільки через координати x^1, x^2, x^3, але й явно, то

$$\frac{d\hat{\mathbf{A}}}{dt} = \frac{\partial\hat{\mathbf{A}}}{\partial t} + \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\cdot\nabla\right)\hat{\mathbf{A}}, \tag{3.10}$$

$$\frac{DA_i^l}{dt} = \frac{\partial A_i^l}{\partial t} + A_{i,j}^l \frac{dx^j}{dt}, \tag{3.11}$$

або $$\frac{DA_i^l}{dt} = \frac{\partial A_i^l}{\partial t} + \left(\frac{\partial A_i^l}{\partial x^j} - \Gamma_{ij}^k A_k^l + \Gamma_{kj}^l A_i^k\right)\frac{dx^j}{dt}. \tag{3.12}$$

Похідною за напрямком $d\hat{\mathbf{A}}/ds$ тензора $\hat{\mathbf{A}}$ в напрямку даної кривої $(ds \neq 0)$ називається абсолютна похідна тензора $\hat{\mathbf{A}}$ по довжині дуги s вздовж кривої

$$\frac{DA_i^l}{ds} = \frac{\partial A_i^l}{\partial s} + A_{i,j}^l \frac{dx^j}{ds} = \frac{\partial A_i^l}{\partial s} + \left(\frac{\partial A_i^l}{\partial x^j} - \Gamma_{ij}^k A_k^l + \Gamma_{kj}^l A_i^k\right)\frac{dx^j}{ds}. \tag{3.13}$$

Абсолютна (або внутрішня[16] – Мак-Коннелл) *похідна* від тензора T_{mn} з коваріантними компонентами за параметром s позначається через $\frac{\delta T_{mn}}{\delta s}$)[17] і записується у вигляді співвідношення

$$\frac{\delta T_{mn}}{\delta s} = \frac{dT_{mn}}{ds} - \Gamma^{\alpha}_{ml} T_{\alpha n} \frac{dx^l}{ds} - \Gamma^{\alpha}_{nl} T_{m\alpha} \frac{dx^l}{ds}. \tag{3.14}$$

Розглянемо тензорне поле в деякому просторі. Якщо в ньому візьмемо яку-небудь криву, яка проходить через будь-яку точку цього простору, то вираз (3.14) вздовж цієї кривої буде тензором.

Враховуючи те, що

$$\frac{dT_{mn}}{ds} = \frac{\partial T_{mn}}{\partial x^{\beta}} \frac{dx^{\beta}}{ds},$$

формулі (3.14) надаємо вигляд

$$\frac{\delta T_{mn}}{\delta s} = \left(\frac{\partial T_{mn}}{\partial x^{\beta}} - \Gamma^{\alpha}_{m\beta} T_{\alpha n} - \Gamma^{\alpha}_{n\beta} T_{m\alpha} \right) \frac{dx^{\beta}}{ds}. \tag{3.15}$$

Приймаючи до уваги, що (3.15) представляє собою тензор і $\frac{dx^{\beta}}{ds}$ є довільний контраваріантний вектор, на підставі визначення тензора робимо висновок, що вираз у дужках є тензор, який має на один коваріантний індекс більше, чим T_{mn}; цей тензор називається коваріантною похідною тензора T_{mn} і позначається через $T_{mn,\beta}$. Тут кома вказує на диференціювання по x^{β}, отже,

$$T_{mn,\beta} = \frac{\partial T_{mn}}{\partial x^{\beta}} - \Gamma^{\alpha}_{m\beta} T_{\alpha n} - \Gamma^{\alpha}_{n\beta} T_{m\alpha}. \tag{3.16}$$

Вказаним способом можна обчислити абсолютну і коваріантну похідні тензора будь-якого типу і якого завгодно високого рангу. Так, наприклад, якщо тензор задано контраваріантними компонентами T^{mn}, то маємо

[16] Сокольников И.С. Тензорный анализ. Теория и применение в геометрии и механике сплошных сред. / И.С. Сокольников ; пер. с англ. В. И. Контовта ; под ред. В. В. Лохина. — М. : Наука, 1971. — 376 с. (див. §66, стор. 194–196)

[17] Амензаде Ю.А. Теория упругости / Амензаде Ю.А. ; [учебн. для универс. Изд. 3-е доп.]. — М. : Высш. школа, 1976. — 272 с.

$$T^{mn}_{,\beta} = \frac{\partial T^{mn}}{\partial x^{\beta}} + \Gamma^{m}_{\alpha\beta} T^{\alpha n} + \Gamma^{n}_{\alpha\beta} T^{m\alpha}. \quad (3.17)$$

Теорема Річчі.)[18] Покажемо, що фундаментальні метричні тензори g_{ij} і g^{ij} ведуть себе при коваріантному диференціюванні так, якби вони були б постійними величинами. Ця їх властивість витікає з теореми Річчі.

Терема Річчі. Коваріантна похідна кожного з двох фундаментальних тензорів (g_{ij} і g^{ij}) дорівнює нулю.

Доведення. Розглянемо спершу тензор g_{ij} і утворимо

$$g_{ij,l} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^{l}} - g_{\alpha j}\Gamma^{\alpha}_{il} - g_{i\alpha}\Gamma^{\alpha}_{jl},$$

або враховуючи, що $\Gamma^{k}_{ij} \equiv \begin{Bmatrix} & k & \\ i & & j \end{Bmatrix}$, отримаємо

$$g_{ij,l} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^{l}} - g_{\alpha j}\begin{Bmatrix} & \alpha & \\ i & & l \end{Bmatrix} - g_{i\alpha}\begin{Bmatrix} & \alpha & \\ j & & l \end{Bmatrix}.$$

Перша частина цього виразу перетворюється в нуль тотожно в силу

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^{l}} = g_{\alpha j}\begin{Bmatrix} & \alpha & \\ i & & l \end{Bmatrix} + g_{i\alpha}\begin{Bmatrix} & \alpha & \\ j & & l \end{Bmatrix}, \text{ тому } g_{ij,l} = 0.$$

Подібне обчислення можна провести і для тензора g^{ij}, скориставшись при цьому результатом диференціювання виразу $g^{i\alpha} g_{\alpha j} = \delta^{i}_{j}$. В результаті чого отримуємо, що

$$g^{i\alpha}_{,l} g_{\alpha j} + g^{i\alpha} g_{\alpha j,l} = \delta^{i}_{j,l},$$

і, оскільки, $\delta^{i}_{j,l} = 0$, приходимо до висновку, що

$$g_{\alpha j} g^{i\alpha}_{,l} = 0.$$

Оскільки, $\left| g_{\alpha j} \right| \neq 0$, то єдиним рішенням системи однорідних рівнянь буде $g^{i\alpha}_{,l} = 0$.

[18] Сокольников И.С. Тензорный анализ. Теория и применение в геометрии и механике сплошных сред. / И.С. Сокольников ; пер. с англ. В. И. Контовта ; под ред. В. В. Лохина. — М. : Наука, 1971. — 376 с.

У якості безпосереднього наслідку теореми Річчі є те, що фундаментальні метричні тензори можуть бути винесені за знак коваріантного диференціювання (див. лекцію №2), у зв'язку з чим операції опускання і підняття індексів набувають властивість комутативності з коваріантним диференціюванням. Це можна проілюструвати відповідною формулою

$$\left(g_{\alpha i} A^{\alpha}_{jk}\right)_{,l} = g_{\alpha i} A^{\alpha}_{jk,l} . \tag{3.18}$$

Оператор Гамільтона. Оператор Гамільтона ∇ або «набла», наприклад, в ортогональній декартовій системі координат записується як

$$\nabla_k = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right)^T ,$$

$$\text{або } \nabla = \mathbf{e}_k \nabla_k \equiv \mathbf{e}_k \frac{\partial}{\partial x_k} = \mathbf{e}_k \partial_k , \left(\nabla_k \equiv \frac{\partial}{\partial x_k} = \partial_k \right), \tag{3.19}$$

або по)[19]

$$\nabla \equiv \mathbf{e}^j \frac{D}{\partial x^j} = \mathbf{e}^j \nabla_j , \tag{3.20}$$

де $D \equiv \dfrac{d}{dx}$ – оператор диференціювання (абсолютний диференціал).

Абсолютна похідна від вектора переміщень в криволінійних координатах.)[20] Для вектора переміщень $\mathbf{u}$ у криволінійній системі координат η^1, η^2, η^3 можна записати абсолютну похідну з контраваріантними і коваріантними компонентами у вигляді

$$\begin{aligned} d\mathbf{u} &= d\left(u^i \mathbf{e}_i\right) = \mathbf{e}_i du^i + u^i d\mathbf{e}_i = u^i_{,j}\left(\eta^1, \eta^2, \eta^3\right) d\eta^j \mathbf{e}_i = \\ &= d\left(u_i \mathbf{e}^i\right) = \mathbf{e}^i du_i + u_i d\mathbf{e}^i = u_{i,j}\left(\eta^1, \eta^2, \eta^3\right) d\eta^j \mathbf{e}^i , \end{aligned} \tag{3.21}$$

тобто компоненти вектора $d\mathbf{u}$ дорівнюють

$$Du^i \equiv u^i_{,j} d\eta^j \text{ або } Du_i \equiv u_{i,j} d\eta^j ,$$

де

[19] Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн. — М. : Наука, 1984. — 831 с. (с. 516, табл. 16.10-1)

[20] Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн. — М. : Наука, 1984. — 831 с. (с. 511)

$$u^i_{,j} \equiv \frac{\partial u^i}{\partial \eta^j} + \Gamma^l_{kj} u^k, \qquad u_{i,j} \equiv \frac{\partial u_i}{\partial \eta^j} - \Gamma^k_{ij} u_k \equiv g_{ik} u^k_{,j} \tag{3.22}$$

Формули (3.21) і (3.22) визначають кожну компоненту абсолютного диференціала $d\mathbf{u}$ як суму «відносних диференціалів» du^i або du_i і членів, які утворюються в результаті зміни базисних векторів при переході від точки до точки (і, відповідно, зміною метрики при цьому переході).

Похідні $\dfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial \eta^j}$ вектора $\mathbf{u}$ можна визначати співвідношенням

$$d\mathbf{u} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \eta^j} d\eta^j. \tag{3.23}$$

При цьому

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \eta^j} &= \frac{\partial}{\partial \eta^j}\left(u^i \mathbf{e}_i\right) = \frac{\partial u^i}{\partial \eta^j} \mathbf{e}_i + u^i \frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial \eta^j} = u^i_{,j} \mathbf{e}_i = \\ &= \frac{\partial}{\partial \eta^j}\left(u_i \mathbf{e}^i\right) = \frac{\partial u_i}{\partial \eta^j} \mathbf{e}^i + u_i \frac{\partial \mathbf{e}^i}{\partial \eta^j} = u_{i,j} \mathbf{e}^i \end{aligned}, \tag{3.24}$$

де $\dfrac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial \eta^j} = \Gamma^k_{ij} \mathbf{e}_k = \dfrac{\partial \mathbf{e}_j}{\partial \eta^i}, \qquad \dfrac{\partial \mathbf{e}^i}{\partial \eta^j} = -\Gamma^i_{kj} \mathbf{e}^k.$ (3.25)

Формули (3.21)–(3.25) необхідні при отриманні тензора швидкості деформації.

Добуток оператора Гамільтона ∇_k на тензор другого рангу $T_{ij}(\mathbf{x}, t)$ у тензорній формі записується як

$$\nabla_k T_{ij} \equiv \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_k} \Rightarrow \nabla_k T_{ij} \mathbf{e}_k \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = T_{ij,k}, \tag{3.26}$$

а у векторній формі – $\nabla \mathbf{T}(\mathbf{x}, t)$. Тут кома вказує на диференціювання по x_k. ∇_k – тензорний оператор 1-го рангу, $\mathbf{x}$ – вектор координат, t – час.

Тобто застосування оператора Гамільтона до тензора 2-го рангу призводить до тензору 3-го рангу (тобто, ранг тензора збільшується на одиницю).

Аналогічно можна записати скалярний добуток для тензора n-го рангу

$$\nabla_j P_{ik\ldots m} \equiv \frac{\partial P_{ik\ldots m}}{\partial x_j}. \qquad (3.27)$$

Оператор Гамільтона може бути застосований до тензора декілька разів, що в результаті кожний раз підвищує ранг тензора, який отримують

$$\nabla_k \nabla_m T_{ij} \equiv \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_k \partial x_m} \Rightarrow \nabla_k \nabla_m T_{ij} \mathbf{e}_k \mathbf{e}_m \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = T_{ij,km}. \qquad (3.28)$$

Скалярний та векторний добуток оператора Гамільтона на тензор. Скалярний добуток оператора Гамільтона ∇_j на тензор 2-го рангу T_{ij} зменшує його ранг на одиницю

$$\nabla_j T_{ij} = \nabla \cdot \hat{T} \equiv \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} \Rightarrow \nabla_j T_{ij} \mathbf{e}_i \left(\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_j\right) = T_{ij,j}.$$

Векторний добуток оператора Гамільтона ∇_k на вектор $\mathbf{v}(\mathbf{x},t)$ у тензорній формі має вигляд

$$[\nabla \times \mathbf{v}]_k = \varepsilon_{kij} \nabla_k v_j, \qquad (3.29)$$

де ε_{ijk} – тензор 3-го рангу Леві-Чевіти, який має 27 компонент і в будь-якій ортогональній системі координат визначається у такій формі:

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } i,j,k \text{ дають парну перестановку із } 1,2,3; \\ -1, & \text{якщо } i,j,k \text{ дають непарну перестановку із } 1,2,3; \\ 0, & \text{у всіх інших випадках } (i = j, \text{ або } j = k, \text{ або } k = i). \end{cases}$$

Тобто, скориставшись рисунком 3.1 нескладно записати для компонент ε_{ijk}

$$\varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = 1,$$
$$\varepsilon_{321} = \varepsilon_{132} = \varepsilon_{213} = -1, \qquad (**)$$

а всі інші 18 компонент, у яких індекси повторюються, дорівнюють нулю.

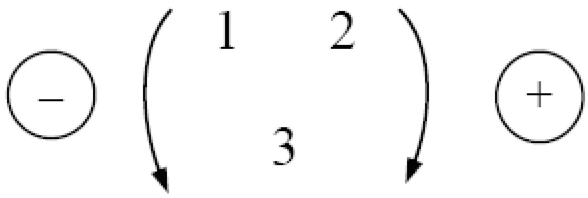

Рисунок 3.1 – до визначення ε_{ijk}

Векторний добуток оператора Гамільтона ∇_k на вектор $\mathbf{v}$ (тензорне поле 1-го рангу) також можна представити у вигляді

$$\left[\nabla\times\mathbf{v}\right]=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial}{\partial x_1}\\ \dfrac{\partial}{\partial x_2}\\ \dfrac{\partial}{\partial x_3}\end{pmatrix}\times\mathbf{v}=\begin{vmatrix}\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3\\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3}\\ v_1 & v_2 & v_3\end{vmatrix}. \qquad (3.30)$$

Частинне диференціювання по змінній x_i (можна також записувати через оператор Гамільтона ∇) іноді зображають нижнім індексом після коми, як показано в наступних прикладах (див. також скалярний добуток ∇ на тензор))[21]:

$$а)\ \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}=\varphi_{,i},\ \varphi - \text{скаляр}; \qquad г)\ \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j\partial x_k}=v_{i,jk};$$

$$б)\ \frac{\partial v_i}{\partial x_i}=v_{i,i},\ v_i - \text{вектор}; \qquad д)\ \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_k}=T_{ij,k};$$

$$в)\ \frac{\partial v_i}{\partial x_j}=v_{i,j}; \qquad е)\ \frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial x_k\partial x_m}=T_{ij,km}.$$

Тут кома вказує на диференціювання по x_i.

Ці приклади показують, що при диференціюванні оператор ∂_i призводить до тензору на один порядок вищому за вихідний, якщо індекс i лишається вільним індексом (випадки «*а*» і «*в*»), і до тензора на один порядок нижчого вихідного, якщо індекс i стає індексом підсумовування (випадок «*б*»).

Оператори градієнта, дивергенції, ротора і Лапласа.

Приведемо деякі важливі диференціальні оператори, які часто використовуються в механіці суцільного середовища для ортогональної декартової системи координат)[22]:

– оператор градієнта

$$\mathrm{grad}\varphi=\nabla\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}\mathbf{e}_i, \qquad \text{або} \qquad \partial_i\varphi=\varphi_{,i},$$

– оператор дивергенції

[21] Мейз Дж. Теория и задачи механики сплошных сред / Дж. Мейз ; пер. с англ. В. И. Свешниковой ; под ред. М. Е. Еглит. — М., Мир. — 1974. — 319 с.

[22] Мейз Дж. Теория и задачи механики сплошных сред / Дж. Мейз ; пер. с англ. В. И. Свешниковой ; под ред. М. Е. Еглит. — М., Мир. — 1974. — 319 с.

$$\mathrm{div}\mathbf{v} = \nabla \cdot \mathbf{v}, \qquad \text{або} \quad \partial_i v_i = v_{i,i},\ \partial_i v^i = v^i_{,i},$$

– оператор ротора

$$\mathrm{rot}\mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{v}, \qquad \text{або} \quad \varepsilon_{ijk}\partial_j v_k = \varepsilon_{ijk} v_{k,j},$$

– оператор Лапласа

$$\Delta\varphi = \nabla^2\varphi = \nabla \cdot \nabla\varphi, \qquad \text{або} \quad \partial_{ii}\varphi = \varphi_{,ii}.$$

Приведемо диференціальні інваріанти, які визначені у ріманових просторах.)[23]

Градієнт (абсолютного) скаляра φ є абсолютний вектор

$$\nabla\varphi = \mathbf{e}^j \frac{\partial\varphi}{\partial x^j} = \mathbf{e}_i g^{ji} \frac{\partial\varphi}{\partial x^j}. \tag{3.31}$$

Коваріантна похідна $\nabla\mathbf{v}$ (абсолютного) вектора $\mathbf{v}$ називається градієнтом вектора $\mathbf{v}$ (див. лекцію №2). Дивергенція (абсолютного) вектора $\mathbf{v}$ є (абсолютним) скаляром $\nabla \cdot \mathbf{v}$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \nabla_i v^i \equiv \frac{Dv^i}{\partial x^i} = \frac{\partial v^i}{\partial x^i} + v^k \Gamma^i_{ki} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{|g|}v^i\right). \tag{3.32}$$

Оператор Лапласа $\Delta \equiv \nabla \cdot \nabla$ є інваріантним скалярним оператором $g^{ik} \frac{D}{\partial x^i} \frac{D}{\partial x^k} \equiv g^{ik}\nabla_i \nabla_k$. Зокрема, лапласіан $\nabla^2\varphi$ (абсолютного) скаляра φ має вигляд

$$g^{ik} \frac{D}{\partial x^i} \frac{\partial\varphi}{\partial x^k} \equiv g^{ik}\nabla_i \frac{\partial\varphi}{\partial x^k} \equiv g^{ik}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^i \partial x^k} - \Gamma^j_{ik}\frac{\partial\varphi}{\partial x^j}\right) \equiv \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial x^i}\left(g^{ik}\sqrt{|g|}\frac{\partial\varphi}{\partial x^k}\right). \tag{3.33}$$

Якщо (абсолютний) вектор $\mathbf{v}$ задано компонентами v_i, то антисиметричний (абсолютний) тензор з компонентами

$$c_{ij} \equiv \frac{Dv_i}{\partial x^j} - \frac{Dv_j}{\partial x^i} \equiv \nabla_j v_i - \nabla_i v_j \equiv \frac{\partial v_i}{\partial x^j} - \frac{\partial v_j}{\partial x^i} \tag{3.34}$$

тотожно перетворюється в нуль в тому і тільки в тому випадку, якщо $\mathbf{v}$ є градієнтом (абсолютного) скаляра.

---

[23] Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн. — М. : Наука, 1984. — 831 с. (с. 516, табл. 16.10-1)

Для тривимірного простору можна визначити ротор (абсолютного) вектора $\mathbf{v}$ як (абсолютний) вектор $\nabla \times \mathbf{v}$ з компонентами

$$\frac{1}{\sqrt{|g|}}\frac{Dv_j}{\partial x^i}\varepsilon^{ijk} \equiv \frac{1}{\sqrt{|g|}}\nabla_i v_j \varepsilon^{ijk} \equiv \frac{1}{2\sqrt{|g|}}\left(\frac{Dv_j}{\partial x^i}-\frac{Dv_i}{\partial x^j}\right)\varepsilon^{ijk} = \frac{1}{2\sqrt{|g|}}\left(\frac{\partial v_j}{\partial x^i}-\frac{\partial v_i}{\partial x^j}\right)\varepsilon^{ijk}. \quad (3.35)$$

Лекція 1.4(4) **Закономірності перетворення компонент тензорів при зміні координат. Тензор перетворення координат і його властивості. Визначення тензора через формули перетворення його компонент. Визначення матриці тензору перетворення координат. Перетворення вектора переміщень u і тензора напружень $\hat{\sigma}$ з декартової системи координат в циліндричну і навпаки**

Закономірності перетворення компонент тензорів при зміні координат. Нехай маємо дві системи координат $\left(x^k\right)$ і $\left(x^{i'}\right)$, то основні та взаємні базиси і компоненти векторного поля $\mathbf{v}$ в системі координат $\left(x^{i'}\right)$ зв’язані з відповідними базисами і компонентами вектора $\mathbf{v}$ в системі координат $\left(x^k\right)$ певними законами перетворення:

– коваріантний закон

$$\mathbf{e}_{i'} = \frac{\partial x^k}{\partial x^{i'}}\mathbf{e}_k, \quad v_{i'} = \frac{\partial x^k}{\partial x^{i'}}v_k; \quad (4.1)$$

– контраваріантний закон

$$\mathbf{e}^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^k}\mathbf{e}^k, \quad v^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^k}v^k. \quad (4.2)$$

Справедливі також зворотні співвідношення законів перетворення:

$$\begin{aligned} &\mathbf{e}_i = \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^i}\mathbf{e}_{k'}, \quad v_i = \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^i}v_{k'}, \\ &\mathbf{e}^i = \frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}}\mathbf{e}^{k'}, \quad v^i = \frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}}v^{k'}, \\ &\frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}}\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^j} = \delta^i_j, \quad \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^k}\frac{\partial x^k}{\partial x^{j'}} = \delta^{i'}_{j'}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Компоненти будь-якого тензора в системі координат $\left(x^k\right)$ зв'язані з його компонентами в системі координат $\left(x^{i'}\right)$ так званим *тензорним законом перетворення*: для кожного нижнього індексу використовується коваріантний, для кожного верхнього контраваріантний закон перетворення, наприклад:

$$T^{i'j'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^p}\frac{\partial x^{j'}}{\partial x^q}T^{pq}; \tag{4.4}$$

$$S_{m'n'} = \frac{\partial x^k}{\partial x^{m'}}\frac{\partial x^l}{\partial x^{n'}}S_{kl}. \tag{4.5}$$

Тензор перетворення координат і його властивості. Тензор *перетворення координат* називається тензор, компоненти якого утворені базисними векторами різних систем координат, наприклад, $\left(x^1, x^2, x^3\right)$ і $\left(x_{1'}, x_{2'}, x_{3'}\right)$

$$\hat{\mathbf{c}} = c_i^{j'}\mathbf{e}^i\mathbf{e}_{j'} = c_{j'}^{i}\mathbf{e}_i\mathbf{e}^{j'}; \tag{4.6}$$

Компоненти тензора перетворення координат визначаються із скалярного добутку основного і взаємного базисів двох різних систем координат, тобто із (4.1), (4.2):

$$\begin{aligned} c_i^{j'} &= \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}^{j'} = \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^i}; \\ c_{i'}^{j} &= \mathbf{e}_{i'} \cdot \mathbf{e}^{j} = \frac{\partial x^{j}}{\partial x^{i'}}. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Властивості. Компоненти тензора перетворення координат можуть бути як змішаними, так і коваріантними та контраваріантними компонентами

$$c_m^{n'} = c_{n'}^{m} = c_{mn'} = c^{mn'} = \cos\alpha_{mn'},$$

де $\cos\alpha_{mn'}$ – косинус кута між відповідними ортами, скалярний добуток яких (4.7) і визначає компоненти перетворення координат.

Зв'язок між компонентами тензорів перетворення координат в прямому $c_{i'}^{j}$ і зворотному $c_i^{j'}$ напрямках встановлюється через обернену матрицю

$$\left[c_{i'}^{j}\right]=\left[c_{i}^{j'}\right]^{-1}. \qquad (4.8)$$

За допомогою тензора перетворення координат можна визначити основні і взаємні базиси при переході від однієї системи координат (з індексом i) в іншу (з індексом i') і, навпаки

$$\mathbf{e}_{i'}=c_{i'}^{m}\mathbf{e}_{m}, \qquad \mathbf{e}_{m}=c_{m}^{s'}\mathbf{e}_{s'}, \qquad (4.9)$$

$$\mathbf{e}^{i'}=c_{n}^{i'}\mathbf{e}^{n}, \qquad \mathbf{e}^{n}=c_{s'}^{n}\mathbf{e}^{s'}. \qquad (4.10)$$

З використанням тензора перетворення координат виконується перехід від компонент вектора з одної системи координат в іншу, наприклад, для вектора $\mathbf{b}$ будемо мати

$$\mathbf{b}=b_{i}\mathbf{e}^{i}=\left|\mathbf{e}^{i}=c_{k'}^{i}\mathbf{e}^{k'}\right|=\underline{b_{i}c_{k'}^{i}}\mathbf{e}^{k'}=\left|b_{i}c_{k'}^{i}=b_{k'}\right|=b_{k'}\mathbf{e}^{k'}, \qquad (4.11)$$

де $b_{k'}=b_{i}c_{k'}^{i}$;
і також виконується зворотне перетворення компонентів будь-якого вектора

$$b_{i}=b_{k'}c_{i}^{k'}. \qquad (4.12)$$

Через тензор перетворення координат також неважко записати вираз для компонент будь-якого тензора для переходу з однієї системи координат в іншу. Наприклад, візьмемо тензор 2-го рангу для переходу від системи координат з індексами $(i', j'=1,2,3)$ до другої системи з індексами $(p, q=1,2,3)$

$$T^{pq}=S^{i'j'}c_{i'}^{p}c_{j'}^{q} \quad \text{(9 компонент).} \qquad (4.13)$$

Формула (4.13) також використовується для доведення твердження про те, що компоненти якоїсь заданої величини є компонентами тензора і це витікає із визначення тензора. *Тензором* називається геометрична величина, яка має n^{r} компонент (де n – розмірність простору, а r – ранг тензора), який при зміні координатної системи перетворюється у відповідності до формул:

$$a^{i}=a^{m'}c_{m'}^{i}; \qquad (4.14)$$

$$b^{kl}=b^{s't'}c_{s'}^{k}c_{t'}^{l}. \qquad (4.15)$$

Співвідношення (4.15) є необхідною і достатньою умовою для визначення тензора.

Компоненти метричного тензора при переході до нової системи координат визначаються через компоненти тензора перетворень координат:

– коваріантні $g_{ij} = g_{k'l'} c_i^{k'} c_j^{l'}$, (4.16)

– контраваріантні $g^{ij} = g^{k'l'} c_{k'}^{i} c_{l'}^{j}$. (4.17)

У формулі перетворення символів Кристофеля 2-го роду при переході від одної системи координат до іншої також використовується тензор перетворення координат

$$\frac{\partial c_n^{k'}}{\partial x^m} c_{k'}^{i} + c_n^{s'} c_m^{p'} c_{k'}^{i} \delta_{q'}^{k'} \Gamma_{s'p'}^{k'} = \Gamma_{mn}^{i}. \quad (4.18)$$

Із (4.18) витікає такий висновок. У результаті перетворення згідно до формул перетворень (4.1), (4.2), (4.4), (4.5) можна зробити висновок про те, що другий доданок на лівій стороні формули (4.18) $\left(c_n^{s'} c_m^{p'} c_{k'}^{i} \delta_{q'}^{k'} \Gamma_{s'p'}^{k'}\right)$ відповідає закону перетворення компонент тензора, а перший доданок – не відповідає. Якби в (4.18) був би тільки другий доданок, то Γ були б компонентами тензора 3-го рангу. Але оскільки крім другого доданку є і перший (4.17) $\left(\frac{\partial c_n^{k'}}{\partial x^m} c_{k'}^{i}\right)$, то Γ не є компонентами тензора.

Визначення тензора через формули перетворення його компонент наведені у виразах (4.1)–(4.5), (4.10)–(4.14). Визначення тензора: геометрична величина є тензором тоді і тільки тоді, коли її компоненти при зміні координатної системи перетворюється у відповідності до формул (4.1), (4.2), (4.4), (4.5).

Розглянемо деякі приклади перетворення тензорів. *Приклад на визначення матриці тензору перетворення координат* для випадку (рисунок 4.1), коли одна система координат є декартовою. Цей випадок є менш загальним, але він має велике практичне застосування, тому що на практиці в якості однієї з координатних систем найчастіше вибирають декартову систему координат.

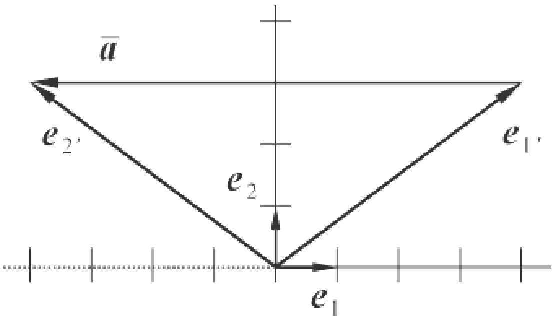

Рисунок 4.1 – Перетворення компонент вектора **a** з декартової в нову систему координат

Нехай в якості основної системи координат є декартова система з базисними векторами $\mathbf{e}^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ і $\mathbf{e}^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ (див. рис. 4.1), а $\mathbf{e}_{1'}$ і $\mathbf{e}_{2'}$ – базисні вектори нової системи координат, координати яких відносно старої (декартової) системи координат нам відомі (див. рис. 4.1):

$$\mathbf{e}_{1'} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{e}_{2'} = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix}. \tag{4.19}$$

Напишемо матрицю координат вектора **a** в декартовій системі координат

$$\mathbf{a} = [a_i] = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}. \tag{4.20}$$

З координат базисних векторів нової системи координат нескладно скласти матрицю тензора перетворення координат (4.7) для переходу з нової системи координат в декартову

$$\left[c_i^{j'}\right] = \left[\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}^{j'}\right] = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}. \tag{4.21}$$

В нашому випадку матриці $[a_i]$ і $\left[c_i^{j'}\right]$ збігаються між собою (див. рисунок 4.1).

Скориставшись (4.8) визначимо компоненти тензора перетворень координат при переході від декартової системи координат в іншу

$$\left[c_{i'}^{j}\right] = \left[c_i^{j'}\right]^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{8} & \dfrac{1}{6} \\ -\dfrac{1}{8} & \dfrac{1}{6} \end{bmatrix}.$$

Тепер використовуючи формулу для перетворення компонент вектора виду $a_{i'} = a_j c_{i'}^j$, отримаємо компоненти вектора **a** в новій координатній системі з базисами $\mathbf{e}_{1'}$ і $\mathbf{e}_{2'}$

$$[a_{i'}] = [a_j][c_{i'}^j] = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{8} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{8} & \frac{1}{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Дивлячись на рисунок 4.1, неважко впевнитись, що саме такі координати має вектор **a** в новій координатній системі з базисами $\mathbf{e}_{1'}$ і $\mathbf{e}_{2'}$.

Перетворення вектора переміщень **u** *з декартової системи координат в циліндричну і навпаки.* Напишемо матриці тензора перетворення координат від декартової в циліндричну (див. лекцію №2, таблицю 2.1)

$$[c_{i'}^j] = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

і навпаки

$$[c_i^{j'}] = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Вектор переміщень в декартовій системі координат

$$\mathbf{u} = [u_1 \quad u_2 \quad u_3].$$

Отримаємо вектор переміщень в циліндричній системі координат

$$[u_{i'}] = [u_j][c_{i'}^j] = [u_1 \quad u_2 \quad u_3] \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= [u_1 \cos\varphi - u_2 \sin\varphi \quad u_1 \sin\varphi + u_2 \cos\varphi \quad u_3] = [u_r \quad u_\varphi \quad u_z].$$

Звідки можна записати формули перетворення компонент вектора переміщень з декартової системи в циліндричну:

$$u_r = u_1\cos\varphi + u_2\sin\varphi;$$
$$u_\varphi = -u_1\sin\varphi + u_2\cos\varphi;$$
$$u_z = u_3.$$

Тепер виконаємо зворотне перетворення – з циліндричної в декартову систему координат

$$[u_j] = [u_{i'}][c_j^{i'}] = [u_1\cos\varphi - u_2\sin\varphi \quad u_1\sin\varphi + u_2\cos\varphi \quad u_3]\begin{bmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi & 0\\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} =$$
$$= \left[u_1\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right) \quad u_2\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right) \quad u_3\right] = [u_1 \quad u_2 \quad u_3].$$

Тобто отримали вихідну форму вектора переміщень.

Формули перетворення компонент вектора переміщень з циліндричної системи в декартову:

$$u_1 = u_r\cos\varphi - u_\varphi\sin\varphi;$$
$$u_2 = u_r\sin\varphi + u_\varphi\cos\varphi;$$
$$u_3 = u_z.$$

Аналогічні дії проведемо для тензора напружень $\hat{\sigma}$. Тензор напружень в декартовій системі координат

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \begin{bmatrix}\sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13}\\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23}\\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33}\end{bmatrix}.$$

Отримаємо тензор напружень в циліндричній системі координат

$$[\sigma_{m'n'}] = [\sigma_{ij}][c_{m'}^{i}][c_{n'}^{j}] = \begin{bmatrix}\sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13}\\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23}\\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\varphi & +\sin\varphi & 0\\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi & 0\\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix}\sigma_{11}(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) - 2\sigma_{12}\cos\varphi\sin\varphi & \sigma_{12}(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) + 2\sigma_{11}\cos\varphi\sin\varphi & \sigma_{13}\\ \sigma_{21}(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) - 2\sigma_{22}\cos\varphi\sin\varphi & \sigma_{22}(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) + 2\sigma_{21}\cos\varphi\sin\varphi & \sigma_{23}\\ \sigma_{31}(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) - 2\sigma_{32}\cos\varphi\sin\varphi & \sigma_{32}(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) + 2\sigma_{31}\cos\varphi\sin\varphi & \sigma_{33}\end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix}\sigma_{rr} & \sigma_{r\varphi} & \sigma_{rz}\\ \sigma_{\varphi r} & \sigma_{\varphi\varphi} & \sigma_{\varphi z}\\ \sigma_{zr} & \sigma_{z\varphi} & \sigma_{zz}\end{bmatrix}.$$

Тепер виконаємо зворотне перетворення – з циліндричної в декартову систему координат

$$[\sigma_{ij}] = [\sigma_{m'n'}][c_i^{m'}][c_j^{n'}] =$$

$$= \begin{bmatrix} \sigma_{11}(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) - 2\sigma_{12}\cos\varphi\sin\varphi & \sigma_{12}(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) + 2\sigma_{11}\cos\varphi\sin\varphi & \sigma_{13} \\ \sigma_{21}(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) - 2\sigma_{22}\cos\varphi\sin\varphi & \sigma_{22}(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) + 2\sigma_{21}\cos\varphi\sin\varphi & \sigma_{23} \\ \sigma_{31}(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) - 2\sigma_{32}\cos\varphi\sin\varphi & \sigma_{32}(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) + 2\sigma_{31}\cos\varphi\sin\varphi & \sigma_{33} \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}.$$

Тобто отримали вихідну форму тензора напружень в циліндричній системі координат.

Лекція 1.5(5) **Тензори напружень, деформацій, швидкості деформацій та теплового розширення (теплових деформацій). Тензори четвертого рангу пружності, пружно-пластичності, в'язкості та пружно-в'язко-пластичності. Формулювання нелінійних законів стану в інваріантному вигляді**

Тензори напружень, деформацій, швидкості деформацій та теплового розширення (теплових деформацій). Тензор напружень $\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \sigma^{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j$ є симетричним тензором другого рангу (де $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ – векторний (символьний) запис тензора напружень)

$$\sigma^{ij} = \sigma^{ji}. \tag{5.1}$$

Користуючись властивостями метричного тензора $\mathbf{e}_i = g_{ij}\mathbf{e}^i$ можна опустити індекси тензора напружень

$$\sigma^{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j = \sigma^{ij}g_{im}\mathbf{e}^m g_{jn}\mathbf{e}^n = \underline{\sigma^{ij}g_{im}g_{jn}}\mathbf{e}^m\mathbf{e}^n = \sigma_{mn}\mathbf{e}^m\mathbf{e}^n, \tag{5.2}$$

де $\sigma_{mn} = \sigma^{ij}g_{im}g_{jn}$; σ^{ij}, σ_{mn} – контраваріантні і коваріантні компоненти тензора напружень, відповідно; $\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j$, $\mathbf{e}^m\mathbf{e}^n$ – векторний супровід тензора.

Користуючись властивостями тензора перетворення координат $\mathbf{e}_m = c_m^{s'}\mathbf{e}_{s'}$ можна перетворити компоненти σ^{ij} на компоненти іншої системи координат

$$\sigma^{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j = \sigma^{ij}\mathbf{e}_{k'}c_i^{k'}\mathbf{e}_{l'}c_j^{l'} = \underline{\sigma^{ij}c_i^{k'}c_j^{l'}}\mathbf{e}_{k'}\mathbf{e}_{l'} = \sigma^{k'l'}\mathbf{e}_{k'}\mathbf{e}_{l'}, \tag{5.3}$$

де $\sigma^{k'l'} = \sigma^{ij} c_i^{k'} c_j^{l'}$.

Тензор деформацій $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \varepsilon_{ij} \mathbf{e}^i \mathbf{e}^j$ також є симетричним тензором другого рангу (де $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$ – символьний запис тензора деформацій)

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}. \tag{5.4}$$

Тензор деформацій визначається геометричним рівнянням Коші в лагранжевих координатах

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\nabla_i u_j + \nabla_j u_i + \nabla_i u^m \nabla_j u_m\right), \text{ – інваріантна форма} \tag{5.5}$$

де $\nabla_i = \mathbf{e}^i \dfrac{\partial}{\partial x^i}$ – оператор Гамільтона; u_j – компоненти вектора переміщення.

Компоненти тензора ε_{ij} є компонентами тензора скінчених деформацій.

За малих деформацій у виразі (5.5) можна знехтувати членом другого порядку $\nabla_i u^m \nabla_j u_m$, тоді формула (5.5) споститься до вигляду

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\nabla_i u_j + \nabla_j u_i\right) = \frac{1}{2}\left(u_{j,i} + u_{i,j}\right) \text{– інваріантна форма} \tag{5.6}$$

або $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dfrac{1}{2}\left(\vec{\nabla}\mathbf{u} + \mathbf{u}\vec{\nabla}\right)$ – векторна форма.

У декартовій системі координат тензор деформацій приймає вигляд

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x^i} + \frac{\partial u_i}{\partial x^j}\right) \text{ або } \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{j,i} + u_{i,j}\right).$$

Співвідношення (5.6) також отримало назву тензора малих деформацій Коші.

Аналогічно, користуючись властивостями метричного тензора $\mathbf{e}^i = g^{ij}\mathbf{e}_i$, можна підняти індекси тензора деформацій

$$\varepsilon_{ij}\mathbf{e}^i\mathbf{e}^j = \varepsilon_{ij} g^{im}\mathbf{e}_m g^{jn}\mathbf{e}_n = \underline{\varepsilon_{ij} g^{im} g^{jn}}\mathbf{e}_m\mathbf{e}_n = \varepsilon^{mn}\mathbf{e}_m\mathbf{e}_n, \tag{5.7}$$

де $\varepsilon^{mn} = \varepsilon_{ij} g^{im} g^{jn}$; ε_{ij}, ε^{mn} – коваріантні і контраваріантні компоненти тензора деформацій, відповідно; $\mathbf{e}_m \mathbf{e}_n$, $\mathbf{e}^i \mathbf{e}^j$ – векторний супровід тензора деформацій.

Також, користуючись властивостями тензора перетворення координат $\mathbf{e}^n = c^n_{s'} \mathbf{e}^{s'}$, можна перетворити компоненти ε_{ij} на компоненти іншої системи координат

$$\varepsilon_{ij} \mathbf{e}^i \mathbf{e}^j = \varepsilon_{ij} \mathbf{e}^{k'} c^i_{k'} \mathbf{e}^{l'} c^j_{l'} = \underline{\varepsilon_{ij} c^i_{k'} c^j_{l'}} \mathbf{e}^{k'} \mathbf{e}^{l'} = \varepsilon_{k'l'} \mathbf{e}^{k'} \mathbf{e}^{l'}, \qquad (5.8)$$

де $\varepsilon_{k'l'} = \varepsilon_{ij} c^i_{k'} c^j_{l'}$.

Тензор *швидкості деформацій* $\hat{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}} = \dot{\varepsilon}_{ij} \mathbf{e}^i \mathbf{e}^j$ також є симетричним тензором другого рангу (крапка над тензором означає похідну за часом, $\hat{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}$ – векторний запис тензора швидкості деформацій)

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ji}. \qquad (5.9)$$

Тензор *швидкості деформацій* $\hat{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}} = \dot{\varepsilon}_{ij} \mathbf{e}^i \mathbf{e}^j$ також є симетричним тензором другого рангу (крапка над тензором означає похідну за часом, $\hat{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}$ – векторний запис тензора швидкості деформацій)

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{d\varepsilon_{ij}}{dt} = \frac{1}{2}\left(\nabla_i v_j + \nabla_j v_i + \nabla_i v^m \nabla_j v_m\right), \text{ – інваріантна форма} \qquad (5.10)$$

де t – час; $\mathbf{v} = \dfrac{d\mathbf{u}}{dt}$, $v_i = \dfrac{\partial u_i}{\partial t}$ – швидкість деформації у векторній формі і у формі компонент вектора, відповідно.

За малих деформацій вираз (5.10) спрощується до вигляду

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\nabla_i v_j + \nabla_j v_i\right) = \frac{1}{2}\left(v_{j,i} + v_{i,j}\right) \text{ – інваріантна форма} \qquad (5.11)$$

$$\hat{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}} = \frac{1}{2}\left(\vec{\nabla}\mathbf{v} + \mathbf{v}\vec{\nabla}\right) \text{ – векторна форма.}$$

У декартовій системі координат тензор швидкості деформацій приймає вигляд

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_j}{\partial x^i} + \frac{\partial v_i}{\partial x^j}\right) \text{ або } \dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2}\left(v_{j,i} + v_{i,j}\right).$$

Аналогічні операції також можна виконати і для тензора швидкості деформації. Користуючись властивостями метричного тензора $\mathbf{e}^i = g^{ij}\mathbf{e}_i$ можна підняти індекси тензора швидкості деформацій

$$\dot{\varepsilon}_{ij}\mathbf{e}^i\mathbf{e}^j = \dot{\varepsilon}_{ij}g^{im}\mathbf{e}_m g^{jn}\mathbf{e}_n = \underline{\dot{\varepsilon}_{ij}g^{im}g^{jn}}\mathbf{e}_m\mathbf{e}_n = \dot{\varepsilon}^{mn}\mathbf{e}_m\mathbf{e}_n, \tag{5.12}$$

де $\dot{\varepsilon}^{mn} = \dot{\varepsilon}_{ij}g^{im}g^{jn}$; $\dot{\varepsilon}_{ij}$, $\dot{\varepsilon}^{mn}$ – коваріантні і контраваріантні компоненти тензора швидкості деформацій, відповідно; $\mathbf{e}_m\mathbf{e}_n$, $\mathbf{e}^i\mathbf{e}^j$ – векторний супровід тензора швидкості деформацій.

Користуючись властивостями тензора перетворення координат $\mathbf{e}^n = c^n_{s'}\mathbf{e}^{s'}$, можна перетворити компоненти $\dot{\varepsilon}_{ij}$ на компоненти іншої системи координат

$$\dot{\varepsilon}_{ij}\mathbf{e}^i\mathbf{e}^j = \dot{\varepsilon}_{ij}\mathbf{e}^{k'}c^i_{k'}\mathbf{e}^{l'}c^j_{l'} = \underline{\dot{\varepsilon}_{ij}c^i_{k'}c^j_{l'}}\mathbf{e}^{k'}\mathbf{e}^{l'} = \dot{\varepsilon}_{k'l'}\mathbf{e}^{k'}\mathbf{e}^{l'}, \tag{5.13}$$

де $\dot{\varepsilon}_{k'l'} = \dot{\varepsilon}_{ij}c^i_{k'}c^j_{l'}$.

Тензор *теплових деформацій* можна записати через символ Кронекера або через метричний тензор

$$\varepsilon^T_{ij} = \alpha(T_0 - T)\delta_{ij} \text{ або } \varepsilon^T_{ij} = \alpha(T_0 - T)g_{ij}, \tag{5.14}$$

де α – коефіцієнт лінійного температурного розширення матеріалу, К$^{-1}$; T_0 і T – початкова і поточна температура тіла, відповідно, К; δ_{ij} – символ Кронекера.

Перетворення тензорів, що були показані вище, також можна застосувати і до тензора теплових деформацій ε^T_{ij}.

Тензори четвертого рангу пружності, пружно-пластичності, в'язкості та пружно-в'язко-пластичності. Спочатку розглянемо рівняння стану твердих деформованих тіл. Закон Гука встановлює зв'язок між напруженнями $(\hat{\boldsymbol{\sigma}})$ і деформаціями $(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}})$ через тензор 4-го рангу

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \overset{4}{\hat{\mathbf{C}}} : \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}, \tag{5.15}$$

де $\overset{4}{\hat{\mathbf{C}}} = C^{ijkl}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\mathbf{e}_k\mathbf{e}_l$ – тензор 4-го рангу фізичних констант або *пружності*, який має 81 компоненту.

Для *ізотропних* матеріалів тензор пружності здобуває вигляду

$$C^{ijkl} = \mu\left(g^{ik}g^{jl} + g^{il}g^{jk}\right) + \lambda g^{ij}g^{kl}, \tag{5.16}$$

де $\mu = \dfrac{E}{2(1+\nu)}$ і $\lambda = \dfrac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$ коефіцієнти Ламе, Па; E – модуль пружності, Па; ν – коефіцієнт Пуассона; g^{ik} – контраваріантні компоненти метричного тензора.

Для *ізотропно-лінійних* тіл фізичні рівняння термопружного стану представляються в лагранжевих координатах у вигляді узагальненого закону Гука з врахуванням тензора термічних деформацій

$$\sigma^{ij} = C^{ijkl}\left(\varepsilon_{ij}^{e} - \varepsilon_{ij}^{T}\right), \tag{5.17}$$

де C^{ijkl} – компоненти *тензора 4-го рангу пружності* (5.16); ε_{ij}^{e} – компоненти тензора малих пружних деформацій (5.6); ε_{ij}^{T} – компоненти тензора температурних деформацій (5.14).

Для *пружно-пластичних* матеріалів при використанні моделі ізотропного зміцнення маємо, що функція плинності матеріалу згідно з інкрементарною теорії пластичності, за якою настання пластичного стану можна зв'язати з параметром аналогічним часу і всі співвідношення представляти через швидкості, записується таким чином

$$F(\sigma_{ij}, h) = \sigma_e - \sigma_{\Pi}(h) = 0, \tag{5.18}$$

де $\sigma_e = \sqrt{3J_2}$ – еквівалентне напруження за Мізесом, Па; $J_2 = \dfrac{1}{2} S_{ij} S_{ij}$ – другий інваріант тензора девіацій напружень, Па^2; $S_{ij} = \sigma_{ij} - \dfrac{1}{3} I_1 \delta_{ij}$, $i, j = \overline{1,3}$ – тензор девіаторних напружень, Па; $I_1 = \sigma_{kk}$, Па; σ_{Π} – межа пластичності матеріалу, Па.

В цьому випадку закон Гука, який зв'язує напруження з повною пружно-пластичною деформацією приймає вигляд

$$\dot{\sigma}^{ij} = C_{ep}^{ijkl}\left(\sigma^{ij}\right)\dot{\varepsilon}_{ij}, \tag{5.19}$$

де $C_{ep}^{ijkl} = C^{ijkl} - C^{ijmn} \dfrac{\partial F}{\partial \sigma^{mn}} \dfrac{\partial F}{\partial \sigma^{rp}} C^{rpkl} \left(H' + \dfrac{\partial F}{\partial \sigma^{ij}} C^{ijkl} \dfrac{\partial F}{\partial \sigma^{kl}} \right)^{-1}$ – компоненти тензора пружно-пластичних властивостей матеріалу або *тензор 4-го рангу пружно-пластичності*, Па; C^{ijkl} – компоненти *тензора 4-го рангу пружності* (5.16), Па; F – функція умови плинності матеріалу при ізотропному зміцненні (5.18); H' – тангенс кута нахилу дотичної до кривої, яка визначає залежність напруження від деформації при одновісному розтягу; $\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i}\right) = \dot{\varepsilon}_{ij}^{e} - \dot{\varepsilon}_{ij}^{n}$ – тензор повної швидкості деформації; $\dot{\varepsilon}_{ij}^{e}$ – пружна і $\dot{\varepsilon}_{ij}^{n} = \dot{\varepsilon}_{ij}^{p} + \dot{\varepsilon}_{ij}^{T} + \dot{\varepsilon}_{ij}^{I}$ – непружна частини тензора повної швидкості деформації; $\dot{\varepsilon}_{ij}^{p}, \dot{\varepsilon}_{ij}^{T}$ – швидкості пластичної і температурної деформації, відповідно; $\dot{\varepsilon}_{ij}^{I}$ – швидкість початкової деформації, обумовленої іншими причинами.

В'язко-пластичні деформації можуть бути визначені, коли умова текучості приймає вигляд

$$F\left(\sigma^{ij}, h\right) = F_0\left(\sigma^{ij}, h\right) - Y(h) = 0,$$

де $Y(h)$ – межа текучості, яка залежить від функції зміцнення h, Па; $F \le 0$ – відповідає пружному стану, а $F > 0$ – в'язко-пластичному стану (області).

Якщо ввести поняття пластичного потенціалу $Q\left(\sigma^{ij}\right)$, то можна отримати швидкість в'язко-пластичної деформації $\dot{\varepsilon}_{ij}^{ep}$

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{ep} = \left\langle \varphi(F) \right\rangle \frac{\partial Q\left(\sigma^{ij}\right)}{\partial \sigma^{ij}},$$

де $\left\langle \varphi(F) \right\rangle$)[24] – описує в'язко-пластичну течію і залежить від певних параметрів стану: інваріантів деформацій, часу та ін.; $\varphi(F) = \gamma F^{n}$; γ – параметр течії; n – параметр матеріалу.

Якщо передбачається, що пластична течія описується асоціативним законом течії, то $Q = F$, якщо ні, то $Q \ne F$.

Для пружно-в'язко-пластичного стану матеріалу закон Гука можна записати у вигляді

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{ep} = C_{ijkl}^{ep}\left(\sigma^{ij}\right)\dot{\sigma}^{kl}, \tag{5.20}$$

де C_{ijkl}^{ep} – тензор 4-го рангу *пружно-в'язко-пластичності.*

Рівняння (5.20) відрізняється від рівняння (5.19), яке отримано для інкрементарної пружно-пластичності, в одному дуже важливому відношенні, воно задає швидкість в'язко-пластичної деформації – нелінійного деформування, як функцію поточного напруженого стану і не

[24] $\left\langle \varphi(F) \right\rangle$ – означає середня величина функції $\varphi(F)$.

залежить від прирощення напруження як в інкрементарній теорії пластичності.

Перейдемо до розгляду рівнянь стану для рідин та газів. Напруження в рідинах та газах залежать як від швидкості деформації, так від гідростатичного тиску. При цьому зв'язок між напруженнями і швидкостями деформацій та гідростатичним тиском встановлюється *законом Нав'є-Стокса*

$$\sigma^{ij} = B^{ijmn}\left(\xi_{mn} - \xi_{mn}^{T}\right) - pg^{ij}, \tag{5.21}$$

де $B^{ijmn} = \mu_v\left(g^{im}g^{in} + g^{in}g^{im}\right) + \lambda_v g^{ij} g^{mn}$ – компоненти *тензора 4-го рангу в'язкості*, Па·с; ξ_{mn} – компоненти швидкості деформації рідини, с$^{-1}$; $\xi_{mn}^{T} = \alpha \dfrac{\partial T}{\partial t} g_{mn}$ – компоненти тензора швидкості теплової деформації, с$^{-1}$; p – гідростатичний тиск, Па; μ_v, λ_v – коефіцієнти в'язкості першого і другого родів (для нестисливої рідини $\mu_v / \lambda_v \to 0$), Па·с; g^{im} і g_{mn} – контраваріантні і коваріантні компоненти метричного тензора.

Формулювання нелінійних законів стану в інваріантному вигляді. Із розглянутих рівнянь стану у цій лекції лише два рівняння – закон Гука для пружно-пластичних і пружно-в'язко-пластичних матеріалів (5.19), (520) є нелінійними, тому що в них тензор пружно-пластичності залежить від напруження. Однак, якщо в лінійних законах Гука (5.17) і Нав'є-Стокса (5.20) використовувати нелінійні геометричні рівняння Коші для тензора деформацій (5.5) і для тензора швидкості деформацій (5.10) замість лінійних (5.6) і (5.11), то (5.17) і (5.20) стають геометрично нелінійними рівняннями.

Спочатку розглянемо нелінійне рівняння теплового стану, що встановлює зв'язок між густиною теплового потоку і градієнтом температури, яке є математичним записом закону Фур'є

$$q_i(T) = -\lambda(T)\nabla_i T, \text{ – інваріантна форма запису закону} \tag{5.22}$$

де q_i – компоненти вектора густини теплового потоку, Вт/м^2; $\lambda(T)$– коефіцієнт теплопровідності матеріалу, який залежить від температури, Вт/(м·К); $\nabla_i = \mathbf{e}^i \dfrac{\partial}{\partial x^i}$ – оператор Гамільтона, м$^{-1}$; T – абсолютна температура, К.

Рівняння стану (5.22) є *нелінійним за температурою*, оскільки теплопровідність залежить від температури.

За аналогією (5.22) рівняння стану (5.17) і (5.20) також стають нелінійними по температурі, коли їх фізичні константи залежать від температури, що в дійсності і відбувається. Так, наприклад, для закону Гука маємо

$$\sigma^{ij}(T) = C^{ijkl}(T)\left(\varepsilon_{ij}^{e} - \varepsilon_{ij}^{T}\right), \tag{5.23}$$

де $C^{ijkl}(T) = \mu(T)\left(g^{ik}g^{jl} + g^{il}g^{jk}\right) + \lambda(T)g^{ij}g^{kl}$ – компоненти *тензора 4-го рангу пружності*, що залежить від температури, Па; ε_{ij}^{e} – компоненти тензора малих пружних деформацій; $\varepsilon_{ij}^{T} = \alpha(T)(T - T_0)g_{ij}$ – компоненти тензора температурних деформацій.

Для закону Нав'є-Стокса маємо

$$\sigma^{ij}(T) = B^{ijmn}(T)\left(\xi_{mn} - \xi_{mn}^{T}\right) - pg^{ij}, \tag{5.24}$$

де $B^{ijmn}(T) = \mu_v(T)\left(g^{im}g^{in} + g^{in}g^{im}\right) + \lambda_v(T)g^{ij}g^{mn}$ – компоненти *тензора 4-го рангу в'язкості*, що залежить від температури, Па·с; ξ_{mn} – компоненти швидкості деформації рідини, с$^{-1}$; $\xi_{mn}^{T} = \alpha(T)\dfrac{\partial T}{\partial t}g_{mn}$ – компоненти тензора швидкості теплової деформації, с$^{-1}$; p – гідростатичний тиск, Па; $\mu_v(T), \lambda_v(T)$ – коефіцієнти в'язкості першого і другого родів, що залежать від температури, Па·с; g^{im} і g_{mn} – контраваріантні і коваріантні компоненти метричного тензора.

У випадку стисливої рідини до (5.24) необхідно додати замикаюче співвідношення для визначення гідростатичного тиску p. Наприклад, для газів використовується нелінійне рівняння стану ідеального газу (рівняння Клайперона)

$$p = \rho(p, T)RT, \tag{5.25}$$

де $\rho(p, T)$ – густина, що залежить від тиску й температури, кг/м^3; R – універсальна газова стала, Дж/(кг·К); T – абсолютна температура, К.

Для визначення гідростатичного тиску p також можна скористатись нелінійною залежністю тиску від об'ємної деформації

$$p = K(T)\left[\theta - \beta(T)(T - T_0)\right], \tag{5.26}$$

де K – модуль об'ємного стискання, Па; θ – повна об'ємна деформація; β – коефіцієнт об'ємного розширення, К$^{-1}$; T, T_0 – поточна і початкова температура рідини, відповідно, К.

В нелінійних законах (5.23), (5.24) тензори 4-го рангу фізичних властивостей матеріалів $B^{ijmn}(T)$ і $C^{ijkl}(T)$ записані в інваріантній формі, тобто справедливі для будь-якої системи координат (включаючи криволінійну).

Для того, щоб в (5.23), (5.24), наприклад, перейти до декартової системи координат необхідно скористатись співвідношеннями вигляду

$$\begin{aligned} &\delta^{ik} c_i^{p'} c_k^{r'} = g^{p'r'}, \quad \delta^{il} c_i^{p'} c_l^{t'} = g^{p't'}, \quad \delta^{jl} c_l^{q'} c_l^{t'} = g^{q't'}, \\ &\delta^{jk} c_j^{q'} c_k^{r'} = g^{q'r'}, \quad \delta^{ij} c_i^{p'} c_j^{q'} = g^{p'q'}, \quad \delta^{kl} c_k^{r'} c_l^{t'} = g^{r't'}. \end{aligned} \tag{5.27}$$

ТЕМА 2 СТАЦІОНАРНІ І НЕСТАЦІОНАРНІ ЗАДАЧІ МСС

Лекція 2.1(6) **Основні поняття і гіпотези. Два підходи до описання руху суцільного середовища. Розв’язуючі рівняння МСС в переміщеннях та швидкостях для нестаціонарних та стаціонарних задач. Система рівнянь тепло-масопереносу для нестаціонарних задач МСС для стисливих рідин (тіл)**

Основні поняття і гіпотези. МСС базується на *феноменологічному методі* (ФМ), який полягає у встановленні загальних співвідношень у вигляді диференціальних рівнянь у частинних похідних між параметрами, що характеризують явище в цілому, що розглядається. Феноменологічні закони носять загальний характер, а конкретне фізичне середовище враховується коефіцієнтами, що визначаються експериментально. ФМ – працює на макрорівні середовища.

Поняття простору, часу і маси. В МСС використовується класичне розуміння простору, часу і маси, що застосовується в класичній *ньютонівській механіці*. *Простір* – сукупність точок, кожна з яких задається трьома числами, що називаються координатами. Простір будемо вважати Евклідовим, тобто:

– можна ввести, наприклад, єдину декартову систему координат $Oxyz$;

– відстань, між будь-якими двома точками A і B визначається у вигляді

$$r_{AB} = \sqrt{\left(x_A^1 - x_B^1\right)^2 + \left(x_A^2 - x_B^2\right)^2 + \left(x_A^3 - x_B^3\right)^2}\,.$$

Час – абсолютний, тобто тече однаково у всіх системах координат.

Маса – абсолютна, тобто вважається, що для всіх тіл можна ввести масу, яка:

– невід’ємна ($m \ge 0$);

– адитивна $\left(m_{A+B} = m_A + m_B\right)$;

– однакова (інваріантна) у всіх системах координат, тобто є скаляром.

Принцип рівноправності інерційних систем координат. Як всякий рух, рух континуума (суцільного середовища) завжди розглядається по відношенню до деякої системи координат, яка може бути і декартовою і афінною та будь-якою іншою. Вибір системи координат, яка може бути рухомою або нерухомою, залежить від дослідника (Лагранжа або Ейлера).

Особливе значення має розгляд руху відносно інерційних систем координат, що рухаються одна відносно іншої поступально з постійною швидкістю. Наявність інерційних систем координат, що пов'язано з евклідністю фізичного простору і абсолютним часом, – основний постулат ньютонівської механіки і фізики.

Постулат Галілея. Формулювання всіх фізичних законів не залежить від вибору інерційної системи координат.

На практиці в якості інерційної системи координат вибирають одну з декартових систем координат, що зв'язана або з Землею, або з Сонцем, або з зірками, або з літаком, кораблем та ін. Будь-яка з таких систем координат може розглядатися як інерційна з тим або іншим ступенем наближення.

Основні фізичні величини (або термодинамічні параметри), що розглядаються в МСС, включають: напруження, деформації, температуру, переміщення, швидкість переміщення, тиск та ін. Крім того, розглядаються зовнішні та внутрішні (зусилля) сили.

Напруження є відношення внутрішніх сил, що діють на задану площу перерізу тіла до цієї площі, за умови, що площа є нескінченно малою (тобто прямує до нуля), вимірюється в Паскалях (СІ). Розрізняють *нормальні* та *дотичні* напруження. В залежності від дії внутрішніх сил на кожній площині може діяти 1 нормальне і 2 дотичних напруження.

Головним напруженням називають напруження, що діє на головній площині (де дотичні напруження дорівнюють нулю).

Розрізняють три види деформацій: лінійну (безрозмірну); зсуву; об'ємну.

Лінійна деформація – це відношення приросту довжини тіла до його початкової довжини.

Деформація зсуву виникає тоді, коли на тіло, наприклад брусок, діє сила паралельна основі. В цьому випадку виникає зміщення горизонтальних шарів в тілі відносно один одного без зміни їх розмірів. Відносна деформація зсуву визначається за формулою

$$\mathrm{tg}\theta = \frac{\Delta x}{\ell},$$

де Δx – абсолютний зсув паралельних шарів тіла відносно один одного; ℓ – відстань між шарами (для малих кутів справедливо – $\mathrm{tg}\theta = \gamma$).

Кут θ вимірюється в радіанах. *Радіан* – це кут сектора, в якому довжина дуги дорівнює радіусу.

Об’ємна деформація – це відношення зміни об’єму тіла до його початкового значення.

Температура (від лат. temperatura – належне зміщення, нормальний стан) – скалярна фізична величина, яка характеризує середню кінетичну енергію частинок макроскопічної системи (середовища), що припадає на одну ступінь свободи, і знаходиться в стані термодинамічної рівноваги. Вимірюється у системі СІ у Кельвінах (К).

Переміщення (в кінематиці) – це зміна місця положення фізичного тіла в просторі відносно вибраної системи відліку. Також *переміщенням* називають вектор, який характеризує цю зміну і володіє властивостями адитивності. Довжина відрізку – це модуль переміщення, вимірюється в метрах (СІ). Можна визначити переміщення, як зміну радіус-вектора точки: $d\mathbf{r}$.

Швидкість переміщення – це зміна переміщення у часі, вимірюється метрах за секунду в (СІ) – м/с.

Основні гіпотези МСС:

I – гіпотеза суцільності: тіла складаються з нескінченно малих частинок, які суцільно заповнюють заданий об’єм порожнин, розривів та ін. Суцільне середовище це континуум у тривимірному евклідовому просторі E^3);

II – гіпотеза однорідності: властивості тіл не залежать від положення точки (тобто є константами) або, якщо вони змінюються, то змінюються плавно без стрибків таким чином, що функції, які описують зміну властивостей є неперервними і диференційованими функціями.

Ці дві гіпотези дають змогу застосовувати математичний апарат неперервних функцій, диференціальне й інтегральне числення для формулювання математичних моделей і застосування методів розв’язання систем диференціальних рівнянь.

Два підходи до описання руху суцільного середовища. Для описання руху суцільного середовища можливі два підходи або використання двох систем відліку. Один з них називається *лагранжевим*, а другий – *ейлеревим*.

Лагранжевий метод описання руху відноситься до типу відлікових. В деякий (початковий) момент часу t_0 кожна з частинок середовища маркується за допомогою присвоєння їй значень координат в даний момент часу.

У тривимірному декартовому просторі введемо позначення

$$x_0 = a,\ y_0 = b,\ z_0 = c.$$

На далі рух кожної частинки середовища (тобто всіх його частинок) простежується індивідуально. За такого підходу положення частинки в кожний момент часу $t > t_0$ буде залежати від параметрів a, b, c, t, які називаються *змінними Лагранжа*. Можна записати, що вектор положення частинки середовища дорівнює

$$\vec{r} = \vec{r}(a, b, c, t).$$

Швидкість частинки виразиться через похідну радіус-вектора

$$\vec{v}(a, b, c, t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial t},$$

а прискорення через похідну швидкості

$$\vec{a}(a, b, c, t) = \frac{d\vec{v}(a, b, c, t)}{dt} = \frac{d^2\vec{r}(a, b, c, t)}{dt^2} = \frac{\partial^2\vec{r}(a, b, c, t)}{\partial t^2}.$$

В останніх двох формулах при диференціюванні параметри a, b, c є сталими, а $\vec{r}$ і $\vec{v}$ є тільки функціями часу і тому в цьому випадку повний диференціал $\frac{d}{dt}$ і частинна похідна $\frac{\partial}{\partial t}$ є тотожними.

Ейлерів метод описання руху відноситься до типу просторових. У кожній точці простору з координатами x, y, z вивчаються параметри руху в різні моменти часу t. Таким чином, швидкість середовища в різних точках простору повинна бути функцією не одної змінної (часу, як у *Лагранжа*) чотирьох змінних x, y, z, t, які називаються *змінними Ейлера*

$$\vec{v} = \vec{v}(x, y, z, t),$$

а її диференціал

$$d\vec{v} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}dt + \frac{\partial \vec{v}}{\partial x}dx + \frac{\partial \vec{v}}{\partial y}dy + \frac{\partial \vec{v}}{\partial z}dz.$$

В рухомому середовищі прирощення dx, dy, dz не є незалежними, а відповідно дорівнюють

$$dx = V_x dt,\ dy = V_y dt,\ dz = V_z dt.$$

Тому справедлива рівність

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + V_x\frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + V_y\frac{\partial \vec{v}}{\partial y} + V_z\frac{\partial \vec{v}}{\partial z} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v},$$

де $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{k}$.

Це означає, що повне прискорення $\frac{d\vec{v}}{dt}$ індивідуальної частинки середовища, що знаходиться в момент часу t в точці простору з координатами x, y, z, складається з двох частин: *локального прискорення* $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$, обумовленого зміною швидкості у часі в даній точці, і *конвективного прискорення* $(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v}$, обумовленого неоднорідністю поля швидкості в околі доної точки і пов'язаного з цими обставинами конвективного переносу.

Похідна $\frac{d\vec{v}}{dt}$ носить назву індивідуальної або субстанціональної похідної. Якщо $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0$, поле швидкості стаціонарне, однак це ще не означає, що в середовищі відсутні прискорення. Стаціонарність і нестаціонарність поля швидкості залежить від вибору системи координат. Якщо $(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} = 0$, то поле швидкості є однорідним.

Розв'язуючі рівняння МСС в переміщеннях та швидкостях для нестаціонарних та стаціонарних задач. Математичне формулювання задач МСС для твердих тіл включає сукупність всіх диференціальних і алгебраїчних рівнянь разом із властивостями матеріалів, початковими і граничними умовами. Основою математичного формулювання є система диференціальних рівнянь, яка включає: рівняння збереження маси, рівняння руху (збереження кількості руху), рівняння збереження енергії.

Розглянемо запис системи розв'язуючих рівнянь МСС, записаних через *швидкості*, для *нестаціонарних* задач твердих тіл в *лагранжевій* системі відліку:

$$\begin{cases} \frac{d\rho}{dt} + \rho\vec{\nabla} \cdot \mathbf{v} = 0; \\ \rho\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \vec{\nabla} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}} + \mathbf{f}; \\ C_v \frac{dT}{dt} = \hat{\boldsymbol{\sigma}} : \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} + \vec{\nabla} \cdot \left(\lambda\vec{\nabla}T\right) + q_v. \end{cases} \tag{6.1}$$

де ρ – густина, кг/м^3; t – час, с; $\vec{\nabla} = \mathbf{e}^s \frac{\partial}{\partial x^s}$ – оператор Гамільтона, м$^{-1}$; $\mathbf{v} = v^i\mathbf{e}_i$ – вектор швидкості $\left(\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{u}}{dt}\right)$, м/с; $\mathbf{u} = u^i\mathbf{e}_i$ – вектор переміщення, м;

$\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \sigma^{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j$ – тензор напруження, що визначається *фізичним рівнянням* – законом Гука, який встановлює зв'язок між напруженнями і деформаціями $\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \overset{4}{\hat{\mathbf{C}}} : \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$, Па; $\overset{4}{\hat{\mathbf{C}}}$ – тензор 4-го рангу фізичних констант, який у загальному випадку вміщує 81 компоненту, Па; $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \varepsilon_{mn}\mathbf{e}^m\mathbf{e}^n$ – тензор деформацій, який визначається *геометричним рівнянням* Коші $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{1}{2}\left(\vec{\nabla}\mathbf{u} + \left(\vec{\nabla}\mathbf{u}\right)^T + \left(\vec{\nabla}\mathbf{u}\right)^T \cdot \left(\vec{\nabla}\mathbf{u}\right)\right)$; $\dot{\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}} = \frac{d\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}}{dt}$ – тензор швидкості деформації, с$^{-1}$; $\mathbf{f} = f^m\mathbf{e}_m$ – вектор об'ємного навантаження, який у разі гравітаційного навантаження має вигляд $f^m = \rho g^m$, Па/м; g^m – компоненти вектора прискорення вільного падіння, м/с^2; $C_v = c_v\rho$ – об'ємна ізохорна теплоємність середовища, Дж/(м^3·К); c_v – масова ізохорна теплоємність, Дж/(кг·К); T – абсолютна температура, К; λ – коефіцієнт теплопровідності, Вт/(м·К); q_v – об'ємна густина внутрішнього джерела теплоти, що спричинена джерелом будь-якої немеханічної природи, Вт/м^3; $(:)$ – оператор подвійного скалярного добутку.

Невідомими системи рівнянь (6.1) є такі величини: $\rho, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \hat{\boldsymbol{\sigma}}, \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}, T$. Кількість невідомих у системі (6.1) дорівнює: 1+3+3+6+6+1=20. Кількість рівнянь у системі (6.1) разом із фізичним і геометричним рівняннями та рівнянням для швидкості теж дорівнює 20. Тому система рівнянь (6.1) зі вказаними додатковими рівняннями є замкнутою. Систему рівнянь (6.1) з додатковими рівняннями можна записати у векторній формі у вигляді:

$$\begin{cases} \dfrac{d\rho}{dt} + \rho\vec{\nabla}\cdot\mathbf{v} = 0; \\ \rho\dfrac{d\mathbf{v}}{dt} = \vec{\nabla}\cdot\hat{\boldsymbol{\sigma}} + \mathbf{f}; \\ C_v\dfrac{dT}{dt} = \hat{\boldsymbol{\sigma}} : \dot{\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}} + \vec{\nabla}\cdot\left(\lambda\vec{\nabla}T\right) + q_v; \\ \hat{\boldsymbol{\sigma}} = \overset{4}{\hat{\mathbf{C}}} : \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \\ \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dfrac{1}{2}\left(\vec{\nabla}\mathbf{u} + \left(\vec{\nabla}\mathbf{u}\right)^T + \left(\vec{\nabla}\mathbf{u}\right)^T\cdot\left(\vec{\nabla}\mathbf{u}\right)\right); \\ \mathbf{v} = \dfrac{d\mathbf{u}}{dt}. \end{cases} \tag{6.2}$$

Для того, щоб система рівнянь (6.2) була однозначною (тобто мала єдиний розв'язок) до неї треба додати початкові (оскільки рівняння нестаціонарне – динамічне) і граничні умови. Початкові умови включають в себе розподіл польових характеристик твердого тіла (швидкість, температура, переміщення) в початковий момент часу, $t=0$, а граничні умови – умови взаємодії тіла із зовнішнім середовищем на протязі всього процесу, що досліджується.

Тепер розглянемо запис розв'язуючих рівнянь МСС, записаних виключно через *переміщення*, для *нестаціонарних* задач твердих тіл в *лагранжевій* системі відліку. Для цього розглянемо декілька додаткових припущень:

1. Деформації є малі величини і, відповідно, густина матеріалу змінюється слабко, тому рівнянням збереженням маси можна знехтувати в (6.2).
2. Нелінійні члени в геометричному рівнянні Коші малі порівняно з лінійними, тому ними також можна знехтувати і користуватись тензором малих деформацій виду $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{1}{2}\left(\vec{\nabla}\mathbf{u} + \left(\vec{\nabla}\mathbf{u}\right)^T\right)$.
3. Енергія дисипації (член $\hat{\boldsymbol{\sigma}} : \dot{\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}}$) у рівнянні енергії (6.2) теж мала величина і, тому нею також можна знехтувати.

В результаті описаних припущень отримуємо систему *нестаціонарних* диференціальних рівнянь у *лагранжевій* системі відліку, що записуються через *переміщення* у векторній формі:

$$\begin{cases} \rho \dfrac{d^2\mathbf{u}}{dt^2} = \vec{\nabla} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}} + \mathbf{f}; \\ C_v \dfrac{dT}{dt} = \vec{\nabla} \cdot \left(\lambda \vec{\nabla} T\right) + q_v; \\ \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dfrac{1}{2}\left(\vec{\nabla}\mathbf{u} + \left(\vec{\nabla}\mathbf{u}\right)^T\right); \\ \hat{\boldsymbol{\sigma}} = \overset{4}{\hat{\mathbf{C}}} : \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}. \end{cases} \tag{6.3}$$

Невідомими системи рівнянь (6.3) є $\mathbf{u}, \hat{\boldsymbol{\sigma}}, \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}, T$, що відповідає кількості невідомих – 3+6+6+1=16. Система рівнянь (6.3) є замкнутою, тому що кількість невідомих відповідає кількості рівнянь: 3 рівняння руху, 1 – енергії, 6 – деформації і 6 – закона Гука, що разом дорівнює 16.

Аналогічно до (6.1), (6.2) для того, щоб система рівнянь (6.3) була однозначною до неї треба додати початкові й граничні умови.

Оскільки в (6.3) у рівнянні енергії відсутній член $\hat{\boldsymbol{\sigma}} : \dot{\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}}$ (дисипації механічної енергії), то рівняння енергії, що визначає розподіл температури, стає незалежною задачею. Тобто задача (6.3) стає незв'язаною за температурою.

Застосуємо до (6.3) ще одне припущення. Тіло розглядається в стані спокою, тобто всі сили знаходяться в рівновазі. При цьому всі шукані функції $(\mathbf{u}, \hat{\boldsymbol{\sigma}}, \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}, T)$ стають незалежними від часу, тобто переходимо до *стаціонарної задачі*.

Система *стаціонарних* диференціальних рівнянь МСС в *лагранжевій* системі відліку, яка записана через *напруження* і *переміщення,* має вигляд:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}} + \mathbf{f} = 0; \\ \nabla \cdot (\lambda \nabla T) + q_v = 0; \\ \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dfrac{1}{2}\left(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T\right); \\ \hat{\boldsymbol{\sigma}} = \overset{4}{\hat{\mathbf{C}}} : \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}, \end{cases} \tag{6.4}$$

де $C^{ijkl} = \mu\left(g^{ik} g^{jl} + g^{il} g^{jk}\right) + \lambda g^{ij} g^{kl}$ – тензор 4-го рангу пружних властивостей ізотропного матеріалу, що, як правило, справедливо для конструкторських розрахунків, Па; $\mu = \dfrac{E}{2(1+\nu)}$ і $\lambda = \dfrac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$ коефіцієнти Ламе, Па; E – модуль пружності під час одновісного розтягу, Па; ν – коефіцієнт Пуассона.

У випадку термопружної задачі для ізотропного матеріалу закон Гука приймає дещо інший вигляд

$$\sigma^{ij} = C^{ijkl}\left(\varepsilon_{ij}^{e} - \varepsilon_{ij}^{T}\right), \tag{6.5}$$

де C^{ijkl} – компоненти тензора 4-го рангу пружності (5.16), Па; ε_{ij}^{e} – компоненти тензора малих пружних деформацій (5.6); $\varepsilon_{ij}^{T} = \alpha(T - T_0) g_{ij}$ – компоненти тензора температурних деформацій; α – коефіцієнт лінійного температурного розширення матеріалу, К$^{-1}$; T_0 і T – початкова і поточна температура тіла, відповідно, К; g_{ij} – метричний тензор.

Система рівнянь (6.4) є замкнутою, тому що кількість невідомих відповідає кількості рівнянь: 3 рівняння руху, 1 – енергії, 6 – деформації і 6 – закона Гука, що разом дорівнює 16.

Для однозначності системи рівнянь (6.4), (6.5) треба тільки записати граничні умови. При цьому, оскільки, задача стаціонарна, початкові умови відсутні.

Граничні умови для (6.4), (6.5) включають: механічні й теплові граничні умови. Для стаціонарних задач обов'язковим є завдання граничних умов Дирихле, тобто значення польової функції на границі тіла. Для механічних ГУ – це переміщення, а для теплових – це температура (яка присутня в ГУ 1-го і 3-го родів).

Напишемо механічні ГУ для (6.4), (6.5):

– переміщення або защемлення (хоча б в одній точці на поверхні тіла)

$$\mathbf{u}\big|_{S_u} = 0, \tag{6.6}$$

де $\mathbf{u} = u^i \mathbf{e}_i$ – вектор переміщення; S_u – поверхня (або точка поверхні), на якій задано переміщення;

– симетрії

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}\big|_{S_{su}} = 0, \tag{6.7}$$

де $\mathbf{n} = n_i \mathbf{e}^i$ – вектор зовнішньої нормалі до поверхні тіла; S_{su} – поверхня симетрії тіла;

– вектор напруження

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{n}\big|_{S_p} = \mathbf{p}, \tag{6.8}$$

де $\mathbf{p} = p^i \mathbf{e}_i$ – зовнішня сила (вектор напруження), що задана на поверхні S_p, Па;

– зовнішній тиск

$$(\hat{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n}\big|_{S_p} = p,$$

де p – зовнішній тиск, який задано на поверхні S_p, Па.

Напишемо теплові ГУ для (6.4), (6.5):

– ГУ 1-го роду

$$T\big|_{S_T} = T_0, \tag{6.9}$$

де S_T – поверхня (або точка поверхні), на якій задано температуру;

– симетрії (або адіабатні умови, окремий випадок ГУ 2-го роду)

$$\vec{\nabla} T\big|_{S_{sT}} = 0, \tag{6.10}$$

де S_{sT} – поверхня симетрії тіла;

– ГУ 2-го роду (закон Фур'є)

$$\mathbf{q}\cdot\mathbf{n}\big|_{S_q} = -q_s, \tag{6.11}$$

де $\mathbf{q} = q^i \mathbf{e}_i$ – вектор густини теплового потіку, Вт/м^2; S_q – поверхня, на якій задано нормальну густину теплового потоку q_s;

– ГУ 3-го роду (закон Ньютона-Ріхмана)

$$\mathbf{q}\cdot\mathbf{n}\big|_{S_q} = \alpha\left(T - T_p\right), \tag{6.12}$$

де $\mathbf{q} = q^i \mathbf{e}_i$ – вектор густини теплового потіку, Вт/м^2; S_α – поверхня, на якій задано граничні умови конвективного типу; α – коефіцієнт тепловіддачі, Вт/(м^2·К); T_p – температура рідини (оточуючого середовища тіла), К.

Математична постановка (6.4)–(6.13) стаціонарної задачі МСС для твердого тіла в переміщеннях є повним формулюванням задачі.

Систему рівняннь МСС (6.4) також можна записати в інваріантній формі (тобто, в незалежній формі від системи координат)

$$\begin{cases} \nabla_i \sigma^{ij} + f^{\,j} = 0; \\ \nabla_m \left(\lambda \dfrac{\partial T}{\partial x^i} \right) g^{mi} + q_v = 0; \\ \varepsilon_{mn} = \dfrac{1}{2}\left(\nabla_m u_n + \nabla_n u_m\right); \\ \sigma^{mn} = C^{mnqp} \varepsilon_{pq}. \end{cases} \tag{6.13}$$

Система рівнянь тепло-масопереносу для нестаціонарних задач МСС для стисливих рідин (тіл). Система рівнянь тепло-масопереносу для стисливих рідин для нестаціонарних задач включає такі рівняння: збереження маси, руху і енергії. В Ейлеревій системі відліку система рівнянь тепло-масопереносу у векторній формі запису приймає вигляд:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot(\rho \mathbf{v}) = 0; \\ \dfrac{\partial(\rho \mathbf{v})}{\partial t} + \left(\rho \mathbf{v}\cdot\vec{\nabla}\right)\mathbf{v} = \vec{\nabla}\cdot\hat{\boldsymbol{\sigma}} + \mathbf{f}; \\ C_v\left(\dfrac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\vec{\nabla} T \right) = \hat{\boldsymbol{\sigma}} : \left(\vec{\nabla}\mathbf{v}\right) + \vec{\nabla}\cdot\left(\lambda \vec{\nabla} T\right) + q_v, \end{cases} \tag{6.14}$$

де ρ – густина, кг/м^3; t – час, с; $\vec{\nabla} = \mathbf{e}^s \dfrac{\partial}{\partial x^s}$ – оператор Гамільтона, м$^{-1}$; $\mathbf{v} = v^i \mathbf{e}_i$ – вектор швидкості, м/с; $\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \sigma^{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j$ – тензор напруження, що визначається законом Нав'є-Стокса $\sigma^{ij} = \mu \hat{\dot{\varepsilon}} - p$, Па; μ– коефіцієнт динамічної в'язкості, Па·с; $\hat{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}} = \dot{\varepsilon}_{mn} \mathbf{e}^m \mathbf{e}^n$ – тензор швидкості деформації, який визначається геометричним рівнянням Коші і для стисливої рідини має вигляд $\hat{\dot{\varepsilon}} = \dfrac{1}{2}\left(\vec{\nabla}\mathbf{v} + \left(\vec{\nabla}\mathbf{v}\right)^T - \dfrac{2}{3}(\nabla \mathbf{v})\mathbf{I}\right)$, с$^{-1}$; $\mathbf{I}$ – одиничний тензор 2-го рангу; p – гідростатичний тиск, Па; $\mathbf{f} = f^m \mathbf{e}_m$ – вектор об'ємного навантаження, який у разі гравітаційного навантаження приймає вигляд $f^m = \rho g^m$, Па/м; g^m – компоненти вектора прискорення вільного падіння, м/с^2; $C_v = c_v \rho$ – об'ємна ізохорна теплоємність середовища, Дж/(м^3·К); c_v – масова ізохорна теплоємність, Дж/(кг·К); T – абсолютна температура, К; λ – коефіцієнт теплопровідності, Вт/(м·К); q_v – об'ємна густина внутрішнього джерела теплоти, що спричинена джерелом будь-якої немеханічної природи, Вт/м^3; $(:)$ – оператор подвійного скалярного добутку.

Для нестисливої рідини при $\rho = \text{const}$ рівняння збереження маси спрощується до вигляду

$$\vec{\nabla} \cdot \mathbf{v} = 0, \tag{6.15}$$

а рівняння руху переписується у вигляді

$$\rho\left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \left(\mathbf{v} \cdot \vec{\nabla}\right)\mathbf{v}\right] = \vec{\nabla} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}} + \mathbf{f} \,. \tag{6.16}$$

Для однозначності системи рівнянь (6.15) до неї треба додати початкові (оскільки рівняння нестаціонарне) і граничні умови. Початкові умови включають в себе розподіл польових характеристик рідини (швидкість, температура, тиск) в початковий момент часу, $t = 0$:

$$\mathbf{v}\big|_{t=0} = \varphi_v(\mathbf{x});$$
$$T\big|_{t=0} = \varphi_T(\mathbf{x});$$
$$p\big|_{t=0} = \varphi_p(\mathbf{x}),$$

де $\mathbf{v} = v^i \mathbf{e}_i$, $\mathbf{x} = x^i \mathbf{e}_i$.

Граничні умови включають умови взаємодії тіла із зовнішнім середовищем на протязі всього процесу, який досліджується:

– на поверхнях контакту рідини з твердим тілом можуть задаватися умови прилипання і нормальна густина теплового потоку (закон Фур’є)

$$\mathbf{v}\big|_{S_v} = 0, \tag{6.17}$$

$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{q}\big|_{S_q} = q_s, \tag{6.18}$$

де $\mathbf{q}$ – вектор теплового потоку – кількість теплоти, що протікає через одиницю площі в перпендикулярнуому напрямку до неї за одиницю часу; $\mathbf{n} = n_i\mathbf{e}^i$ – вектор нормалі до поверхні;

– на вихідному перетині потоку рідини, як правило, задаються його нормальна швидкість і температура

$$\begin{cases} \mathbf{n}\cdot\mathbf{v} = v_0; \\ T = T_0, \end{cases} \tag{6.19}$$

– на перетині витоку рідини задаються нульові значення градієнтів тиску й температури

$$\begin{cases} \mathbf{n}\cdot\vec{\nabla}p = 0; \\ \mathbf{n}\cdot\vec{\nabla}T = 0. \end{cases} \tag{6.20}$$

Математична постановка (6.15), (6.18)–(6.21) нестаціонарної задачі МСС для стисливої рідини, що записана через швидкості, є повним формулюванням задачі у *ейлеревій* системі відліку.

Систему рівняннь МСС (6.15) також можна записати в інваріантній формі (тобто, в незалежній від системи координат формі)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla_i\left(\rho v^i\right) = 0; \\ \rho\left(\dfrac{\partial v^i}{\partial t} + v^n\nabla_n v^i\right) = \nabla_j\sigma^{ij} + f^i; \\ \sigma^{ij} = \mu\dot{\varepsilon} - p; \qquad\qquad (i, j = 1,2,3) \\ \dot{\varepsilon}_{mn} = \dfrac{1}{2}\left(\nabla_m v_n + \nabla_n v_m - \dfrac{2}{3}\nabla_k v_l g^{kl}\right); \\ c_v\left(\dfrac{\partial T}{\partial t} + v^i\nabla_i T\right) = \sigma^{ij}\nabla_n v^i + \nabla_m\left(\lambda\nabla_n T\right)g^{mn} + q_v. \end{cases} \tag{6.21}$$

Лекція 2.2(7) **Система рівнянь тепло-масопереносу для нестаціонарних задач МСС для нестисливих рідин (тіл)**

Спочатку розглянемо декілька припущень:

– режим течії нестисливої рідини є ламінарним. При цьому закон Нав'є-Стокса спрощується до виду

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \mu\hat{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}} - p = \mu\vec{\nabla}\mathbf{v} - p, \tag{7.1}$$

де $\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \sigma^{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j$ – тензор напруження, Па; μ – коефіцієнт динамічної в'язкості, Па·с; $\hat{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}} = \dot{\varepsilon}_{mn}\mathbf{e}^m\mathbf{e}^n$ – тензор швидкості деформації; p – гідростатичний тиск, Па; $\vec{\nabla} = \mathbf{e}^s\dfrac{\partial}{\partial x^s}$ – оператор Гамільтона, м$^{-1}$; $\mathbf{v} = v^i\mathbf{e}_i$ – вектор швидкості, м/с;

– температурна залежність густини рідини визначається лінійною залежністю виду

$$\rho = \rho_0\left(1 - \beta\Delta T\right), \tag{7.2}$$

де ρ_0 – густина рідини за абсолютної температури T_0, кг/м^3; β – коефіцієнт лінійного температурного розширення, К$^{-1}$; $\Delta T = T - T_0$ – перепад температур між поточним (T) і початковим (T_0) значеннями, К;

– у разі виконання умови $\beta(T - T_0) \ll 1$ можна скористатись спрощеною моделлю Бусінеска)[25] (вважається, що $\rho = \mathrm{const}$), яка полягає у

[25] Берковский Б. М. Вычислительный эксперимент в конвекции / Б. М. Берковский, В. К. Полевиков. — Мн. : Университетское, 1988. — 167 с.

заміні гравітаційного члену (або вектора об'ємного навантаження) в рівнянні збереження кількості руху

$$(\rho-\rho_0)\mathbf{g}\approx\rho_0\beta(T-T_0)\mathbf{g}, \tag{7.3}$$

де $\mathbf{g}$ – вектор прискорення вільного падіння, м/с^2;

– для нестисливої рідини при $\rho=\mathrm{const}$ рівняння збереження маси спрощується до виду

$$\vec{\nabla}\cdot\mathbf{v}=0; \tag{7.4}$$

– енергія дисипації (член $\hat{\boldsymbol{\sigma}}:(\nabla\mathbf{v})$) в рівнянні енергії теж мала величина і, тому нею можна знехтувати.

Згідно розглянутих припущень (наближення Бусінеска) система рівнянь тепло-масопереносу для нестисливих рідин для нестаціонарних задач включає такі рівняння: збереження маси (квазістаціонарне), руху, Нав'є-Стокса і енергії. У ейлеревій системі відліку система рівнянь тепло-масопереносу у векторній формі запису приймає вигляд:

$$\begin{cases}\vec{\nabla}\cdot\mathbf{v}=0;\\ \rho_0\left[\dfrac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}+\left(\mathbf{v}\cdot\vec{\nabla}\right)\mathbf{v}\right]=\vec{\nabla}\cdot\hat{\boldsymbol{\sigma}}+\mathbf{f};\\ \hat{\boldsymbol{\sigma}}=\mu\vec{\nabla}\mathbf{v}-p;\\ c_{\mathrm{p}}\rho_0\left(\dfrac{\partial T}{\partial t}+\mathbf{v}\cdot\vec{\nabla}T\right)=\vec{\nabla}\cdot\left(\lambda\vec{\nabla}T\right)+q_v,\end{cases} \tag{7.5}$$

де $\vec{\nabla}=\mathbf{e}^s\dfrac{\partial}{\partial x^s}$ – оператор Гамільтона, м$^{-1}$; $\mathbf{v}=v^i\mathbf{e}_i$ – вектор швидкості, м/с; ρ_0 – густина рідини за абсолютної температури T_0, кг/м^3; t – час, с; μ– коефіцієнт динамічної в'язкості, Па·с; $\hat{\boldsymbol{\sigma}}=\sigma^{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j$ – тензор напруження, Па; p – зовнішній гідростатичний тиск, Па; $\mathbf{f}=f^m\mathbf{e}_m$ – вектор об'ємного навантаження, який у разі наближення Бусінеска має вигляд $f^m=\rho_0\beta(T-T_0)g^m$, Па/м; g^m – компоненти вектора прискорення вільного падіння, м/с^2; c_{p} – масова ізобарна теплоємність, Дж/(кг·К); T – абсолютна температура, К; λ – коефіцієнт теплопровідності, Вт/(м·К); q_v – об'ємна густина внутрішнього джерела теплоти, що спричинена джерелом будь-якої немеханічної природи, Вт/м^3.

Початкові умови до (7.5):

$$\begin{cases} \mathbf{v}\big|_{t=0} = \varphi_v(\mathbf{x}); \\ T\big|_{t=0} = \varphi_T(\mathbf{x}); \\ p\big|_{t=0} = \varphi_p(\mathbf{x}), \end{cases} \tag{7.6}$$

де $\mathbf{v} = v^i \mathbf{e}_i$, $\mathbf{x} = x^i \mathbf{e}_i$.

Граничні умови включають умови взаємодії тіла із зовнішнім середовищем на протязі всього процесу, який досліджується:

– на поверхнях контакту рідини з твердою поверхнею можуть задаватися умови прилипання (всі компоненти швидкості на поверхні твердого тіла дорівнюють нулю) і нормальна складова густини теплового потоку (закон Фур'є)

$$\mathbf{v}\big|_{S_v} = 0, \tag{7.7}$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{q}\big|_{S_q} = -q_s, \tag{7.8}$$

де $\mathbf{q} = -\lambda \vec{\nabla} T$ – вектор теплового потоку – кількість теплоти, що протікає через одиницю площі площину перпендикулярну до перпендикулярно до неї за одиницю часу, Вт/м^2; λ – коефіцієнт теплопровідності, Вт/(м·К); $\mathbf{n} = n_i \mathbf{e}^i$ – вектор нормалі до поверхні тіла;

– на вихідному перетині потоку рідини, як правило, задаються його нормальна складова швидкісті й температура

$$\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = v_0; \\ T = T_0, \end{cases} \tag{7.9}$$

– на перетині витоку рідини задаються нульові значення градієнтів тиску й температури

$$\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \vec{\nabla} p = 0; \\ \mathbf{n} \cdot \vec{\nabla} T = 0. \end{cases} \tag{7.10}$$

Математична постановка (7.5)–(7.10) нестаціонарної задачі МСС для нестисливої рідини у наближенні Бусінеска, що записана через швидкості, є повним формулюванням задачі у ейлеревій системі відліку.

У декартовій системі координат (x^1, x^2, x^3) система рівнянь МСС (7.5) за умови $\mu, \lambda = \mathrm{const}$ має вигляд:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v^1}{\partial x^1}+\dfrac{\partial v^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial v^3}{\partial x^3}=0; \\ \rho_0\left[\dfrac{\partial v^1}{\partial t}+v^1\dfrac{\partial v^1}{\partial x^1}+v^2\dfrac{\partial v^1}{\partial x^2}+v^3\dfrac{\partial v^1}{\partial x^3}\right]=-\dfrac{\partial p}{\partial x^1}+\mu\left(\dfrac{\partial^2 v^1}{\partial\left(x^1\right)^2}+\dfrac{\partial^2 v^1}{\partial\left(x^2\right)^2}+\dfrac{\partial^2 v^1}{\partial\left(x^1\right)^2}\right)+\rho_0\beta(T-T_0)g^1; \\ \rho_0\left[\dfrac{\partial v^2}{\partial t}+v^1\dfrac{\partial v^2}{\partial x^1}+v^2\dfrac{\partial v^2}{\partial x^2}+v^3\dfrac{\partial v^2}{\partial x^3}\right]=-\dfrac{\partial p}{\partial x^2}+\mu\left(\dfrac{\partial^2 v^2}{\partial\left(x^1\right)^2}+\dfrac{\partial^2 v^2}{\partial\left(x^2\right)^2}+\dfrac{\partial^2 v^2}{\partial\left(x^1\right)^2}\right)+\rho_0\beta(T-T_0)g^2; \\ \rho_0\left[\dfrac{\partial v^3}{\partial t}+v^1\dfrac{\partial v^3}{\partial x^1}+v^2\dfrac{\partial v^3}{\partial x^2}+v^3\dfrac{\partial v^3}{\partial x^3}\right]=-\dfrac{\partial p}{\partial x^3}+\mu\left(\dfrac{\partial^2 v^3}{\partial\left(x^1\right)^2}+\dfrac{\partial^2 v^3}{\partial\left(x^2\right)^2}+\dfrac{\partial^2 v^3}{\partial\left(x^1\right)^2}\right)+\rho_0\beta(T-T_0)g^3; \\ c_p\rho_0\left(\dfrac{\partial T}{\partial t}+v^1\dfrac{\partial T}{\partial x^1}+v^2\dfrac{\partial T}{\partial x^2}+v^3\dfrac{\partial T}{\partial x^3}\right)=\lambda\left(\dfrac{\partial^2 T}{\partial\left(x^1\right)^2}+\dfrac{\partial^2 T}{\partial\left(x^2\right)^2}+\dfrac{\partial^2 T}{\partial\left(x^1\right)^2}\right)+q_v, \end{cases} \quad (7.11)$$

де $\left(v^1,v^2,v^3\right)$ – компоненти вектора швидкості, м/с; $\left(g^1,g^2,g^3\right)$ – компоненти вектора прискорення вільного падіння, м/с^2.

Початкові умови до (7.11):

$$\begin{cases} v^i\big|_{t=0}=\varphi_v\left(x^j\right); \\ T\big|_{t=0}=\varphi_T\left(x^j\right);\ i,j=1,2,3; \\ p\big|_{t=0}=\varphi_p\left(x^j\right). \end{cases} \quad (7.12)$$

Граничні умови включають умови взаємодії тіла із зовнішнім середовищем на протязі всього процесу, який досліджується:

– на поверхнях контакту рідини з твердою поверхнею можуть задаватися умови прилипання (всі компоненти швидкості на поверхні твердого тіла дорівнюють нулю) і нормальна складова густини теплового потоку

$$\left(v^1=v^2=v^3\right)\Big|_{S_v}=0, \quad (7.13)$$

$$\left(n_1q^1+n_2q^2+n_3q^3\right)\Big|_{S_q}=-q_s, \quad (7.14)$$

де $\left(q^1,q^2,q^3\right)$ – компоненти вектора густини теплового потоку, Вт/м^2; $\left(n_1,n_2,n_3\right)$ – компоненти вектора нормалі до поверхні;

– на вихідному перетині потоку рідини, як правило, задаються його нормальна швидкість і температура

$$\begin{cases} n_1v^1+n_2v^2+n_2v^3=v_0; \\ T=T_0, \end{cases} \quad (7.15)$$

– на перетині витоку рідини задаються нульові значення градієнтів тиску і температури

$$\begin{cases} n_1 \dfrac{\partial p}{\partial x^1} + n_2 \dfrac{\partial p}{\partial x^2} + n_3 \dfrac{\partial p}{\partial x^3} = 0; \\ n_1 \dfrac{\partial T}{\partial x^1} + n_2 \dfrac{\partial T}{\partial x^2} + n_3 \dfrac{\partial T}{\partial x^3} = 0. \end{cases} \qquad (7.16)$$

Методика числового розв’язання сформульованих задач МСС базується на методі скінчених об’ємів (МСО)[26]. Алгоритм розв’язання задач називається SIMPLE (Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations або напівнеявний метод розв’язку рівнянь, які зв’язують тиск, який вперше запропонували L. S. Caretto, S. V. Patankar, D. B. Spalding) з використанням неструктурованих тетраедних і гексагедронних сіток.

Лекція 2.3(8) **Рівняння нерозривності суцільного середовища (однорідного і суміші). Закон збереження маси. Ідеальна рідина. Рівняння Ейлера. Повна система рівнянь руху ідеальної нестисливої рідини. Замкнута система рівнянь руху ідеальної стисливої рідини у випадку баротропних процесів. В’язкі рідини. Рівняння Нав’є-Стокса**

Рівняння нерозривності суцільного середовища (однорідного і суміші). Закон збереження маси. Фундаментальним законом ньютонівської механіки є закон збереження маси m будь-якого індивідуального об’єму, тобто, об’єму, який складається з одних і тих самих часток середовища. Одне із основних рівнянь механіки суцільного середовища полягає в тому, що для будь-якого індивідуального об’єму справедливо

$$m = \text{const} \text{ або } \frac{dm}{dt} = 0. \qquad (8.1)$$

Введемо поняття середньої густини

$$\rho_{\text{сер}} = \frac{\Delta m}{\Delta V},$$

де ΔV – об’єм, зайнятий масою Δm.

Істинна густина визначається як границя

[26] Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости / Патанкар С. ; пер. с англ. В. Д. Виленского. — М. : Энергоатомиздат, 1984. — 153 с.

$$\rho = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta V}.$$

В механіці суцільного середовища майже завжди замість маси m розглядають густину ρ. Для малого об'єму ΔV справедлива рівність

$$\Delta m = \rho \Delta V;$$

для скінченого об'єму – рівність

$$m = \int_V \rho dV,$$

де інтеграл взятий по рухомому індивідуальному об'єму.

Таким чином, знаючи ρ, можна знайти m.

Закон збереження маси для індивідуального об'єму суцільного середовища тепер можна записати в інтегральному виді

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho dV = 0, \tag{8.2}$$

де t – час.

Застосувавши правило диференціювання інтеграла, який взято для рухомого об'єму, за умови дотримання закону збереження маси, будемо мати

$$0 = \frac{dm}{dt} = \int_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{v} \right) dV = \int_V \left(\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} \right) dV$$

(тут $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{v} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \operatorname{div} \rho + \rho \operatorname{div} \mathbf{v}$, оскільки $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \operatorname{div} \rho = \frac{d\rho}{dt}$ – матеріальна похідна, то можна записати, що $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{v} = \frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v}$) або, оскільки ця рівність справедлива для будь-якого індивідуального об'єму, отримаємо перше основне диференціальне рівняння механіки суцільного середовища

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \tag{8.3}$$

яке носить назву рівняння нерозривності. Тут $\mathbf{v}$ – вектор швидкості рідини.

Рівняння нерозривності для багатокомпонентної суміші з урахуванням хімічних реакцій має вигляд

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \mathrm{div}\rho_i \mathbf{v}_i = \chi_i, \qquad (8.4)$$

де i – індекс компоненти суміші; χ_i – швидкість зміни маси i-ї компоненти суміші в одиницю часу на одиницю об’єму за рахунок хімічної реакції.

Основний закон хімічних реакцій полягає в тому, що загальна маса суміші лишається постійною, і тому

$$\sum_{i=1}^{n} \chi_i = 0, \qquad (8.5)$$

де n – кількість компонент суміші.

В загальному випадку за наявності хімічної взаємодії і дифузії (8.4) можна переписати у вигляді

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \mathrm{div}\rho_i \mathbf{v}_i = \chi_i - \mathrm{div}\mathbf{I}_i, \qquad (8.6)$$

де $\mathbf{I}_i = \rho_i(\mathbf{v}_i - \mathbf{v})$.

Різниця $\mathbf{v}_i - \mathbf{v}$ є швидкістю i-ї компоненти суміші відносно швидкості середовища в цілому. Члени $\mathrm{div}\mathbf{I}_i$ в рівнянні (8.6) характеризують зміну маси i-ї компоненти суміші в об’ємі, який рухається зі швидкістю $\mathbf{v}$, за рахунок того, що цей об’єм, якщо $\mathbf{v} \neq \mathbf{v}_i$, не є індивідуальним об’ємом i-ї компоненти.

Частинки, які складають i-у компоненту суміші, входять в цей об’єм і виходять з нього. Вектори $\mathbf{I}_i$ носять назву векторів потоку дифузії.

Для обчислення векторів потоку дифузії $\mathbf{I}_i$ використовується умова

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{I}_i = 0. \qquad (8.7)$$

Ідеальна рідина. Диференціальні рівняння МСС виконуються при будь-яких неперервних рухах усіх суцільних середовищ. Однак різні реальні середовища за однакових зовнішніх умов ведуть себе по різному. Таким чином, одних цих рівнянь, навіть з граничними умовами, недостатньо для описання руху конкретного суцільного середовища. Цей факт проявляється в тому, що кількість рівнянь менша за кількість в них невідомих. Тобто система рівнянь є незамкнутою.

Побудова замкнутої системи рівнянь МСС, що описує рух конкретного суцільного середовища, пов’язана з пошуком додаткових співвідношень між параметрами даного суцільного середовища.

Побудувати замкнену систему рівнянь МСС – це значить побудувати математичну модель середовища, що досліджується.

Побудова нових моделей суцільних середовищ (реологія – розділ механіки) пов'язана з експериментальним дослідженням властивостей матеріалів. При цьому завжди необхідно використовувати відомі фізичні принципи, наприклад, термодинаміки.

Визначення. Ідеальною рідиною або ідеальним газом називають суцільне середовище, в якому тензор напруження σ^{ij} в кожній точці рідини є кульовим (тобто відсутнє в'язке тертя між її частинками)

$$\sigma^{ij} = -p\delta^{ij}, \qquad (8.8)$$

де p – тиск рідини.

Зокрема для змішаних компонент σ_k^i можна написати

$$\sigma_k^i = -p\delta_k^i. \qquad (8.9)$$

Компоненти δ_k^i тензора $\delta_k^i \mathbf{e}^k \mathbf{e}_i$ при перетворенні координат не змінюються, і тому формула (8.9) для змішаних компонент тензора напруження в ідеальній рідині вірна не тільки в декартовій, але і в будь-якій іншій криволінійній системі координат.

Контраваріантні компоненти цього тензора мають вигляд

$$\sigma^{ki} = g^{ks}\sigma_s^i = -pg^{ks}\delta_s^i = -pg^{ki}, \qquad (8.10)$$

а коваріантні компоненти будуть мати вид

$$\sigma_{ki} = g_{ks}\sigma_i^s = -pg_{ks}\delta_i^s = -pg_{ki}, \qquad (8.11)$$

де g_{ki} – компоненти метричного тензора.

Отже, тензор напруження в ідеальній рідині задається одним числом p (тиском), а не 9-ю або 6-а компонентами σ^{ki}, як це має місце в загальному випадку.

Для ідеальної рідини справедливо

$$\hat{\sigma} = -p\hat{g},$$

де $\hat{g}$ – метричний тензор.

Відмітимо, що будь-який тензор $\hat{T}$, тензорна поверхня якого є сфера, називається кульовим. Всі кульові тензори мають вид

$$\hat{T} = k\hat{g},$$

де k – скаляр.

Рівняння Ейлера. Рівняння руху суцільного середовища в будь-якій криволінійній системі координат має вигляд

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \nabla_i \sigma^{ki} + \rho F^k, \tag{8.12}$$

де F^k – компоненти вектора об'ємного навантаження.

В силу (8.10) рівняння (8.12) для ідеальної рідини приймає вигляд

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -g^{ki} \nabla_i p + \rho F^k. \tag{8.13}$$

При написанні (8.13) враховано, що компоненти тензора g^{ki} ведуть себе при коваріантному диференціюванні як постійні величини.

Напишемо (8.13) у векторному вигляді. Величини $\nabla_i p$ є коваріантними компонентами вектора градієнта p, а $g^{ki}\nabla_i p$ – його контраваріантними компонентами. Тому рівняння (8.13) у векторній формі має вигляд

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\mathrm{grad} p + \rho \mathbf{F}. \tag{8.14}$$

В проекціях на декартові координати ці рівняння запишуться у такому вигляді:

$$\begin{cases} \dfrac{dv^1}{dt} = F^1 - \dfrac{1}{\rho} \dfrac{\partial p}{\partial x^1}; \\ \dfrac{dv^2}{dt} = F^2 - \dfrac{1}{\rho} \dfrac{\partial p}{\partial x^2}; \\ \dfrac{dv^3}{dt} = F^3 - \dfrac{1}{\rho} \dfrac{\partial p}{\partial x^3}. \end{cases} \tag{8.15}$$

Система рівнянь (8.15) називаються *рівняннями Ейлера*. В цих рівняннях завдяки властивостей ідеальної рідини (8.8) відсутній так званий дифузний член, пов'язаний з другою частинною похідною. З фізичної точки зору в ідеальній рідині відсутні сили в'язкого тертя, тобто в'язкість.

Повна система рівнянь руху ідеальної нестисливої рідини. В деяких випадках можна додатково вважати, що ідеальна рідина, що розглядається, є нестисливою, тобто такою рідиною, густина кожної частинки якої є постійною. Тоді до системи рівнянь руху і нерозривності додається додаткова умова

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\text{grad}\rho = 0\,.$$

Ця умова замикає систему рівнянь, що описують рух ідеальної нестисливої рідини (газу)

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathbf{v}}{dt} = -\dfrac{1}{\rho}\text{grad}\ p + \mathbf{F}; \\ \text{div}\ \mathbf{v} = 0; \\ \dfrac{d\rho}{dt} = 0. \end{cases} \tag{8.16}$$

У випадку однорідної нестисливої рідини густина ρ постійна і однакова для всіх частинок середовища, тому вона перестає бути істотною шуканою функцією. Повна система механічних рівнянь в цьому випадку складається із рівнянь Ейлера і нерозривності (інваріантний вигляд):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v^i}{\partial t} + v^j\nabla_j v^i = F^i - \dfrac{1}{\rho}g^{ij}\nabla_j p; \\ \nabla_k v^k = 0. \end{cases} \tag{8.17}$$

Замкнута система рівнянь руху ідеальної стисливої рідини у випадку баротропних процесів. При русі стисливої рідини в багатьох випадках можна вважати, що

$$p = f(\rho), \tag{8.18}$$

тобто в кожній її частинці тиск залежить тільки від густини.

Процеси, в яких справедлива залежність (8.18) називаються *баротропними*. Прикладом баротропного процесу може слугувати ізотермічний рух газу, який підпорядковується рівнянню Клайперона (рівнянню стану)

$$p = R\rho T\,,$$

де R – газова стала. (В ізотермічних процесах температура T є постійним параметром, однаковим для всіх частинок середовища.)

Очевидно, що умова баротропії дає можливість замкнути систему рівнянь, що описує рух ідеальної стисливої рідини.

У цьому випадку система рівнянь МСС приймає вигляд (інваріантний вигляд):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v^i}{\partial t} + v^j \nabla_j v^i = F^i - \dfrac{1}{\rho} g^{ij} \nabla_j p; \\ \nabla_k v^k = 0; \\ p = f(\rho). \end{cases} \tag{8.18}$$

В'язкі рідини. В'язкою рідиною називається середовище, в якому компоненти тензора напруження представляються у вигляді

$$\sigma^{ij} = -pg^{ij} + \overline{\tau}^{ij}, \tag{8.19}$$

причому

$$\begin{cases} p = p(\rho, T); \\ \overline{\tau}^{ij} = \varphi^{ij}\left(\dot{\varepsilon}_{ij}, g^{ij}, T\right). \end{cases} \tag{8.20}$$

Конкретний вид функцій $\varphi^{ij}\left(\varepsilon_{ij}, g^{ij}, T\right)$ може бути різним для різних конкретних моделей в'язких рідин. В'язкі напруження $\overline{\tau}^{ij}$ і швидкість деформації $\dot{\varepsilon}_{ij}$ в багатьох рідинах, зв'язані між собою законом Нав'є-Стокса

$$\overline{\tau}^{ij} = B^{ijkl} \dot{\varepsilon}_{kl}, \tag{8.21}$$

де B^{ijkl} – тензор 4-го рангу фізичних властивостей рідини.

Рівняння Нав'є-Стокса. Для того щоб написати повну систему рівнянь руху суцільного середовища у випадку в'язкої нестисливої рідини, попередньо введемо рівняння руху в'язкої, власне стисливої рідини, яке задовольняє закону Нав'є-Стокса

$$\sigma^{ij} = -pg^{ij} + \lambda \operatorname{div}\mathbf{v} g^{ij} + 2\mu D_{mn} g^{mi} g^{nj}, \tag{8.22}$$

які називаються рівняннями Нав'є-Стокса і одержуються в результаті підстановки закону Нав'є-Стокса (8.22), в рівняння руху. В (8.22) μ, λ – коефіцієнти першої (динамічної) і другої (зміни об'єму) в'язкості рідини; $D_{ij} = \frac{1}{2}\left(v_{i,j} + v_{j,i}\right)$ – тензор швидкості деформації.

Таким чином рівняння Нав'є-Стокса для стисливої рідини в довільній криволінійній системі координат будуть мати вигляд

$$\frac{dv^i}{dt} = F^i - \frac{1}{\rho} g^{ij} \frac{\partial p}{\partial x^j} + \frac{\lambda + \mu}{\rho} g^{ij} \frac{\partial \mathrm{div}\mathbf{v}}{\partial x^j} + \frac{\mu}{\rho} \Delta v^i . \qquad (8.23)$$

У векторній формі рівняння Нав’є-Стокса для стисливої рідини можна записати у вигляді

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \mathrm{grad}\ p + \frac{\lambda + \mu}{\rho} \mathrm{grad\,div}\ \mathbf{v} + \frac{\mu}{\rho} \Delta \mathbf{v} , \qquad (8.24)$$

де $\Delta = \nabla^2$ – оператор Лапласа.

У випадку нестисливої рідини рівняння Нав’є-Стокса спрощуються до вигляду

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \mathrm{grad}\ p + \frac{\mu}{\rho} \Delta \mathbf{v} . \qquad (8.25)$$

Лекція 2.4.(9) **Турбулентний рух суцільних середовищ. Класичні моделі турбулентності для напружень Рейнольдса. Модель Прандтля, що побудована на алгебраїчному виразі. Модель Прандтля-Колмогорова з одним рівнянням. $k - \varepsilon$ модель ізотропної турбулентності з двома рівняннями**

Турбулентний рух суцільних середовищ. В багатьох випадках під час руху рідини і газу поле швидкості та інших фізичних величин для кожної частинки і в кожній точці об’єму простору зазнає складних пульсацій і зміни в околі деяких середніх значень. Такі рухи називаються турбулентними.

Визначення турбулентності за Ландау. Відповідно до схеми Ландау (запропонованої у 1944 р.), турбулентність є результат послідовної втрати стійкості течії з менш складною структурою з формуванням течії з більш складною структурою.

Досвід і теорія підказує, що ламінарно-регулярні рухи рідини за великих значеннях чисел Рейнольдса, тобто за великої швидкості і великого масштабу, стають нестійкими і переходять у турбулентні рухи з вкрай заплутаними звивистими траєкторіями часток руху рідини.

Детальне вивчення розподілу в просторі і часі миттєвих значень всіх характеристик руху сильно утруднюється, разом з цим у багатьох випадках з практичної точки зору немає потреби в детальному описі таких флуктуаційних нестійких рухів середовища.

У турбулентних рухах рідин і газів доцільно ввести осереднені значення швидкості, густини, тиску, середніх значень пульсацій для різних величин та ін., що плавно змінюються у часі й просторі.

Таким чином, можна ставити задачі про побудову нових моделей континуальних середовищ, для яких можна визначити різні механічні й фізичні характеристики, які можна розглядати як середні величини для відповідних характеристик флуктуаційних рухів континуального (суцільного) середовища із заданими механічними й фізичними властивостями.

Розвиток теорій турбулентних рухів і взагалі побудова різних моделей середовищ для визначення осереднених процесів для деяких класів турбулентних рухів в одному й тому ж середовищі з фіксованими властивостями пов’язано з дослідженням проблеми про способи осереднення і проблеми про встановлення системи функціональних співвідношень та рівнянь для середніх величин.

Найчастіше теоретичні дослідження турбулентних рухів проводились тільки для деяких нестисливих рідин, ідеальних газів, для яких істинні пульсуючі рухи підлягають закону Нав’є-Стокса.

У деяких випадках теорії турбулентних течій рідини і газів будувались з врахуванням електромагнітних ефектів.

Для визначення середніх значень різних величин у пульсуючих потоках необхідно опиратися на експериментальні методи вимірювання середніх значень у відповідних дослідах і на практично істотних властивостях середніх величин у класах механічних задач, що вивчаються.

На практиці метод осереднення за часом в фіксованих точках простору є основним. Для турбулентних рухів, що встановилися в середньому, інтервал часу для осереднення в теорії можна взяти рівним нескінченності. Якщо турбулентний рух в середньому перемінний у часі (нестаціонарний турбулентний рух), то проміжки, за які проводиться осереднення, повинні бути достатньо великими порівняно з часом окремих пульсацій і повинні бути малими порівняно з часом помітної зміни середніх величин.

Можливо також вводити середні величини як середні по деяких об’ємах, достатньо великих порівняно з розмірами області з помітною відмінністю пульсацій і малими порівняно з розмірами об’ємів, в яких відбувається істотна зміна середніх величин.

У ряді випадків можна говорити про збіг вказаних вище середніх значень величин за часом і за об’ємом. Така збіжність є основним змістом ергодичних гіпотез)[27], а в деяких випадках – ергодичних теорем про середні величини.

[27] **Ергодична гіпотеза** - припущення про те, що динамічна система з великою кількістю частинок при своїй еволюції з часом побуває в усіх можливих мікроскопічних станах із однаковою імовірністю. Ергодична гіпотеза є основним припущенням статистичної механіки, яке дозволяє замінити часове усереднення фізичних величин усередненням по ансамблю. В кожному мікроскопічному стані

Для вивчення турбулентних рухів можна використовувати методи і поняття теорії ймовірності. В цьому випадку миттєві значення механічних характеристик розглядаються як випадкові величини, а середні величини визначаються як математичне очікування.

Для використання додаткових гіпотез фізичного характеру, які, як показують дослідження, необхідні для побудови осереднених рухів, розвиток теорії турбулентності можливо виконувати без детальної конкретизації способу визначення середніх величин. Однак спосіб осереднення повинен мати наступні загальні властивості.

Нехай a – миттєве значення деякої характеристики турбулентності руху середовища, середні значення величини прийнято позначати тими ж буквами з рискою зверху. Значення a можна представити у вигляді

$$a = \bar{a} + a', \tag{9.1}$$

де величина a' називається пульсаційною складовою; за визначенням середнє значення величини a' дорівнює нулю

$$\overline{a'} = 0. \tag{9.2}$$

Із визначення середніх, витікає також рівність

$$\bar{\bar{a}} = \bar{a}. \tag{9.3}$$

Нехай b – друга величина тої ж самої природи, що й a, тоді справедливі рівності

$$\overline{a+b} = \bar{a} + \bar{b} \tag{9.4}$$

і

$$\overline{ab} = \bar{a} \cdot \bar{b} + \overline{a'b'}. \tag{9.5}$$

Отже, $\overline{\bar{a}b'} = \overline{\bar{b}a'} = 0$. Із (9.5), зокрема, витікає, що $\overline{a^2} = (\bar{a})^2 + \overline{a'^2}$.

Крім того, необхідно, щоб операції диференціювання за часом і за координатами були б комутативними з операцією осереднення

багаточастинкова динамічна система описується набором координат та імпульсів частинок: q_i та p_i. З часом координати та швидкості частинок змінюються, тобто q_i є функцією часу. Будь-яка характеристика динамічної системи залежить від координат та швидкостей частинок, а з ними й від часу. Для визначення середнього значення цієї характеристики необхідно провести усереднення по часу

$$\bar{A} = \frac{1}{T}\int A[q_i(t), p_i(t)]dt.$$

$$\frac{\overline{\partial a}}{\partial t} = \frac{\partial \overline{a}}{\partial t} \text{ і } \frac{\overline{\partial a}}{\partial x} = \frac{\partial \overline{a}}{\partial x}. \tag{9.6}$$

Якщо середні визначені як математичні очікування, то вказані властивості виконуються точно. Якщо середні визначені як середні за часом, то для нестаціонарних рухів властивості (9.3) і (9.5) виконуються тільки наближено.

Рівняння руху для середніх величин можна отримати шляхом осереднення рівнянь руху для величин, що описують миттєвий стан руху.

Розглянемо осереднені рівняння на прикладі рівнянь Нав’є-Стокса для нестисливої рідини.

За допомогою рівнянь нерозривності для нестисливої рідини $(\rho = \text{const})$

$$\sum_{k=1}^{3} \frac{\partial v_k}{\partial x^k} = 0 \tag{9.7}$$

рівняння Нав’є-Стокса в декартовій системі координат можна записати у формі

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial v_i v_k}{\partial x^k} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x^i} + \frac{\mu}{\rho}\Delta v_i, \ (i = 1,2,3). \tag{9.8}$$

Застосовуючи операцію осереднення до рівнянь (9.7) і (9.8), отримаємо

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial \overline{v_k}}{\partial x^k} = 0; \\ \frac{\partial \overline{v_i}}{\partial t} + \sum_{k=1}^{3} \left(\frac{\partial \overline{v_i v_k}}{\partial x^k} + \frac{\partial \overline{v_i' v_k'}}{\partial x^k} \right) = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \overline{p}}{\partial x^i} + \frac{\mu}{\rho}\Delta \overline{v_i}, \ (i = 1,2,3). \end{cases} \tag{9.9}$$

Під час вивчення істинних рухів рівняння (9.7) і (9.8) утворюють повну систему рівнянь (кількість рівнянь дорівнює кількості невідомих). Система рівнянь для середніх величин (9.9), яка називається системою рівнянь Рейнольдса, не є повною, тому що має новий симетричний тензор

$$\tau_{ik} = \overline{v_i' v_k'},$$

який отримано за рахунок осереднення нелінійних членів.

Таким чином, для вивчення осереднених турбулентних рухів нестисливої рідини одних рівнянь гідромеханіки, які є достатніми для вивчення істинних рухів, недостатньо. Звідси ясно, що детальне теоретичне описання турбулентних рухів можливо тільки на основі деяких додаткових гіпотез, справедливість яких може бути встановлена тільки експериментально.

Практика показує, що такі гіпотези встановлюються стосовно тільки до різних окремих класів рухів.

Класичні моделі турбулентності для напружень Рейнольдса. Буссінеск)[28] запропонував ввести коефіцієнт турбудентної в'язкості μ_t для описання турбулентних напружень Рейнольдса $\overline{\rho v_i' v_k'}$ для ньютонівських рідин
(в тому числі і стисливих), які в декартовій системі координат мають вигляд

$$\overline{\rho v_i' v_k'} = -\mu_t \left(\frac{\partial v_i}{\partial x^j} + \frac{\partial v_j}{\partial x^i} - \frac{2}{3} \delta^{ij} \frac{\partial v_k}{\partial x^k} \right) + \frac{2}{3} \overline{\rho} k , \qquad (9.10)$$

де μ_t – коефіцієнт турбулентної динамічної в'язкості, Па·с, ($\mu_t = \overline{\rho} \nu_t$, де ν_t – коефіцієнт кінематичної турбулентної в'язкості, м^2/с); δ^{ij} – символ Кронекера; $\overline{\rho}$ – осереднена густина рідини, кг/м^3; k – масова турбулентна кінетична енергія, Дж/кг.

Турбулентна кінетична енергія визначається із співвідношення

$$k = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{3} \overline{v_k' v_k'} \; .$$

Тепер для замикання системи рівнянь (9.9), (9.10) треба вирішити питання оцінки коефіцієнта турбулентної в'язкості μ_t. Для цього було запропоновано три основних підходи: алгебраїчний вираз (модель Прандтля), який не потребує ніякого додаткового рівняння балансу; одне і два рівняння для замикання системи (9.9) , (9.10).

Модель Прандтля, що побудована на алгебраїчному виразі. Прандтль запропонував визначати коефіцієнт турбулентної в'язкості через градієнт швидкості, використовуючи для цього алгебраїчне співвідношення вигляду

$$\mu_t = \overline{\rho} l_m^2 \left| \overline{S} \right| , \qquad (9.11)$$

де l_m – довжина шляху перемішування турбулентних потоків; $\overline{S}$ – тензор середньої швидкості деформації, який визначається як

[28] Poinsot T. Theoretical and numerical combustion / Thierry Poinsot, Denis Veynante. — 2nd ed. — Philadelphia : Edwards, 2005. — 522 p.

$$\bar{S}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x^j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x^i}\right). \tag{9.12}$$

Для реалізації цієї моделі було запропоновано різні емпіричні співвідношення для визначення l_m, які сильно залежать від геометрії потоків рідини.

Модель Прандтля-Колмогорова з одним рівнянням. Більш загальна постановка включає в себе рівняння балансу турбулентної кінетичної енергії k. При цьому коефіцієнт турбулентної в’язкості визначається як

$$\mu_t = \bar{\rho} C_\mu l_{pk} \sqrt{k}\,, \tag{9.13}$$

де C_μ – константа моделі (зазвичай приймається як C_μ=0,09); l_{pk} – характерна довжина, для визначення якої також використовуються емпіричні залежності.

$k-\varepsilon$ *модель ізотропної турбулентності з двома рівняннями*. Для замикання невідомих величин у системі рівнянь (9.9), (9.10) треба вибрати яку-небудь модель турбулентності. Якщо, наприклад, вибрати модель з двома рівняннями $-k-\varepsilon$, то за такого підходу коефіцієнт турбулентної в’язкості визначається як

$$\mu_t = \bar{\rho} C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}, \tag{9.14}$$

де масова турбулентна кінетична енергія (k, Дж/кг) і швидкість її дисипації (ε, Дж/(кг·с)) описуються за допомогою двох скалярних рівнянь балансу:

$$\frac{\partial(\bar{\rho}k)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\overline{\rho v_i} k\right) = \frac{\partial}{\partial x^i}\left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_t}\right)\frac{\partial k}{\partial x^i}\right] + P_k - \bar{\rho}\varepsilon\,; \tag{9.15}$$

$$\frac{\partial(\bar{\rho}\varepsilon)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\overline{\rho v_i}\varepsilon\right) = \frac{\partial}{\partial x^i}\left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon}\right)\frac{\partial \varepsilon}{\partial x^i}\right] + C_{\varepsilon 1}\frac{\varepsilon}{k}P_k - C_{\varepsilon 2}\bar{\rho}\frac{\varepsilon^2}{k}. \tag{9.16}$$

Член P_k визначається як

$$P_k = -\overline{\rho v_i' v_j'}\,\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_i}, \tag{9.17}$$

де $\overline{\rho v_i' v_j'}$ – напруження Рейнольдса, які визначаються за допомогою виразу Бусінеска (9.10).

Константи в $k-\varepsilon$ моделі ізотропної турбулентності зазвичай приймають рівними)[29]:

$$C_\mu = 0{,}09;\ \sigma_k = 1{,}0;\ \sigma_\varepsilon = 1{,}3;\ C_{\varepsilon 1} = 1{,}44;\ C_{\varepsilon 2} = 1{,}92.$$

Ця модель користується великою популярністю завдяки своїй простоті й економічній ефективності. Недоліком моделі $k-\varepsilon$ є те, що вона є ізотропною в частині описання турбулентності і розрахована на великі числа Рейнольдса.

Для замикання системи рівнянь (9.9),(9.10) необхідно записати відповідні початкові й граничні умови.

[29] Poinsot T. Theoretical and numerical combustion / Thierry Poinsot, Denis Veynante. — 2nd ed. — Philadelphia : Edwards, 2005. — 522 p.

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Седов Л.И. Механика сплошной среды. — М.: Наука, 1973. — Т.1,2. — 584, 492 с.

2. Жермен П. Курс механики сплошных сред — М. : Высшая школа. 1983 — 399 с.

3. Сахаров О.С., Щербина В.Ю., Гондлях А.В., Сівецький В.І. САПР Інтегрована система моделювання технологічних процесів і розрахунку обладнання хімічної промисловості: Навчальний посібник — К. : ТОВ «Поліграф Консалтінг», 2006. — 156 с.

4. Щербина В.Ю., Сахаров О.С., Сівецький В.І., Васильченко Г. М., Чжан Юлін: Математичне моделювання вихрових процесів в запічних теплообмінниках обертових печей. — К. : НТУУ «КПІ», 2006. — 137 с.

5. Андерсон Д, Таннехилл Дж., Плетчер Р. Вычислительная гидромеханика и теплообмен. — М. : Мир, 1990. Т.I, Т.2. — 726 с.

6. Ильюшин А.А. Механика сплошной среды — М. : МГУ, 1978. — 286 с.

7. Техническая термодинамика / Под общ. ред. Кругова В.И. — М. : Выс. школа. — 1971. — 472 с.

8. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике / О. Зенкевич ; пер. с англ. ; под ред. Б. Е. Победри. — М. : Мир, 1975. — 541 с.

9. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов / Л. Сегерлинд ; пер. с англ. А. А. Шестакова ; под ред. Б. Е. Победри. — М. : Мир, 1979. — 392 с.

10. Зенкевич О., Морган К. Конечные элементы и аппроксимация. — М. : Мир, 1986. — 318 с.

11. ANSYS, Inc. ANSYS FLUENT User's Guide Documentation. (Theory Guide, User Guide, Tutorial Guide), v.13, 2011

Режим доступу :

http://www.ansys.com.

12. Метод. вказівки до викон. завдань з лабораторних робіт з дисципліни «Механіка суцільних середовищ – 1», для студ. спец. 8.05050315, 7.05050315 «Обладнання хімічних виробництв і підприємств будівельних матеріалів» / Уклад.: О.С. Сахаров, А.Я. Карвацький, С.В.Лелека, Т.В.Лазарєв. – К.: НТУУ «КПІ», 2013. – 125 с.

13. Математичне моделювання складного теплообміну повітряних регенераторів [Текст] : моногр. / Є. М. Панов, А. Я. Карвацький, І. Л. Шилович та ін. — К. : НТУУ «КПІ», 2011. — 103 с.

14. Сокольников И.С. Тензорный анализ. Теория и применение в геометрии и механике сплошных сред. / И.С. Сокольников ; пер. с англ. В. И. Контовта ; под ред. В. В. Лохина. — М. : Наука, 1971. — 376 с.

15. Сахаров О. С. Метод. вказ. до виконання лабораторних робіт з курсу «Механіка суцільних середовищ - 2. Нелінійні задачі механіки суцільних середовищ» / О. С. Сахаров, В. Ю. Щербина, О. В. Гондлях, В. І. Сівецький . — К. : НТУУ «КПІ», каф. ХПСМ, 2011. — 53 с.

16. Сахаров О. С. Метод. вказ. до виконання лабораторних робіт з курсу «Механіка суцільних середовищ - 1. Механіка суцільних середовищ в інженерних розрахунках» / О. С. Сахаров, В. Ю. Щербина, О. В. Гондлях, В. І. Сівецький . — К. : НТУУ «КПІ», каф. ХПСМ, 2011. — 53 с.

17. Механика сплошных сред в задачах. Т. 1,2 / Под. ред. М. Э. Эглит. — М. : «Московский Лицей», 1996. — с. 396, 394.

18. Мейз Дж. Теория и задачи механики сплошных сред / Дж. Мейз ; пер. с англ. В. И. Свешниковой ; под ред. М. Е. Еглит. — М., Мир. — 1974. — 319 с.

19. Применение системы ANSYS к решению задач механики сплошной среды. Практическое руководство / Под. ред. проф А. К. Любимова. — Н. Новгород : изд. Нижегородского госуниверситета, 2006. — 227 с.

20. Седов Л.И. Введение в механику сплошной среды. — М.: Изд-во физ-мат. лит., 1962. — 284 с.

21. Метод конечных элементов в механике твердых тел / Под общ. ред. А.С. Сахарова и И.Альтенбаха. — Киев: Вища школа, 1982. — 480 с.

22. Тимошенко С.П., Гере Дж. Механика материалов. — М. : Мир, 1976. — 669 с.

23. Жермен-Лакур П., Жорж П.Л. и др. Математика и САПР в 2 кн. — М. : Мир. 1988, 1989. — 264 с.

24. Ишлинский А.Ю. Прикладные задачи механики. — кн. 1. Механика 1986. — 360 с.

25. Вольмир А.С. Оболочки в потоке жидкости и газа. — М. : Наука, 1976. — 416 с.

26. Левитас В. И. Большие упругопластические деформации материалов при высоком давлении. — К. : Наук. думка, 1987 — 230 с.

27. Хокни Р. Иствуд Дж. Численное моделирование методом частиц. — М. : Мир, 1987. — 638 с.

28. Марчук Г.И., Агошков В.И. Введение в проекционно-сеточные методы. — М. : Наука, 1981. — 416с.

29. Оден Дж. Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред. — М. : Мир, 1976. — 464с.

30. Баженов В.А., Гуляр А.И. [и др.] Полуаналитический метод конечных элементов в механике деформируемых тел. — К. : ВИПОЛ, 1993. — 374 с.

31. Апанович В. Н. Метод внешних конечно-элементных аппроксимаций. — Минск : Вышэйшая школа, 1991. — 172 с.

32. Каплун А. Б. ANSYS в руках инженера / А. Б. Каплун, Е. М. Морозов, М. А. Олферова. — М. : УРСС, 2003. — 270 с.

33. K. Kesava Rao. An Introduction to Granular Flow [Text] / K. Kesava Rao, Prabhu R.Nott. — New York : Publ. in the USA by Cambridge University Press, 2008. — 490 p.

34. Poinsot T. Theoretical and numerical combustion / Thierry Poinsot, Denis Veynante. — 2nd ed. — Philadelphia : Edwards, 2005. — 522 p.

35. Теоретичні та експериментальні дослідження теплоелектричного та механічного стану високотемпературних агрегатів [Текст] : моногр. / А. Я. Карвацький, Є. М. Панов, С. В. Кутузов та ін. — К. : НТУУ «КПІ», 2012. — 352 с.

36. Стренг Г. Теория метода конечных элементов / Стренг Г., Фикс Дж. ; пер. с англ. В. И. Агошкова и др. ; под ред. Г. И. Марчука. — М. : Мир, 1977. — 349 с.

37. Норри Д. Введение в метод конечных элементов / Д. Норри, Ж. де Фриз ; пер. с англ. Г. В. Демидова, А. Л. Урванцева ; под ред. Г. И. Марчука. — М. : Мир, 1981. — 304 с.

38. Ландау Л. Д. Электродинамика сплошных сред : [изд. 4-е, стер.] / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. — М. : Физматлит, 2003. — 656 с. — («Теоретическая физика», Т. VIII).

39. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 2,6,7. — М., 1985.

40. Бреббия К. Методы граничных элементов / К. Бреббия, Ж. Теллес, Л. Вроубел ; пер. с англ. Корнейчука Л. Г. ; под ред. Э. И. Григолюка. — М. : Мир, 1987. — 524 с.

41. Коваленко А. Д. Основы термоупругости / А. Д. Коваленко. — К. : Наукова думка, 1970. — 307 с.

42. Качанов Л. М. Основы теории пластичности / Л. М. Качанов. — М. : Наука, 1969. — 420 с.

43. Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности / Васидзу К. ; пер. с англ. В. В. Кобелева, А. П. Сейраняна ; под ред. Н. В. Баничука. — М. : Мир, 1987. — 542 с.

44. Карвацький А.Я. Метод скінченних елементів у задачах механіки суцільних середовищ. Програмна реалізація та візуалізація результатів [Текст]: навч. посіб. – К.: НТУУ «КПІ» ВПІ ВПК «Політехніка», 2015. – 392 с. Гриф надано Вченою радою НТУУ «КПІ» (Протокол № 4 від 12.05.2015 р.)

45. Карвацький А. Я. Механіка суцільних середовищ. Розв’язання задач [Текст]: навч. посіб. / А. Я. Карвацький — К.: НТУУ «КПІ» Вид-во

«Політехніка», 2016. — 392 с. Гриф надано Вченою радою НТУУ «КПІ» (Протокол № 5 від 11.04.2016 р.)

46. Карвацький А.Я. Механіка суцільних середовищ [Електронний ресурс]: навч. посіб. – К.: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2016. – 290 с. Гриф надано Вченою радою НТУУ «КПІ» (Протокол № 11 від 07.11.2016 р.) – Електронні текстові данні (1 файл: 11,4 Мбайт). – Київ : НТУУ «КПІ», 2016. – 290 с. – Назва з екрана. – Доступ : http://ela.kpi.ua/handle/123456789/18094

ДОДАТОК А

Питання для самоконтролю

Лекція 1.1(1)

1. Опишіть криволінійні координати, дайте основні визначення.
2. Дайте визначення основного та взаємного векторних базисів криволінійних систем координат.
3. Яким чином виконується представлення векторів і тензорів в криволінійних координатах?
4. Дайте визначення метричного тензора та тензора перетворення координат.

Лекція 1.2(2)

1. Яким чином виконується диференціювання базисних векторів криволінійних координат?
2. Опишіть сутність символі Кристофеля, наведіть їх основні позначення.
3. Наведіть похідні від компонент метричного тензора та тензора перетворень.
4. Наведіть залежності між символами Кристофеля і компонентами метричного тензора.

Лекція 1.3(3)

1. Яким чином виконується операція диференціювання тензорів в криволінійних координатах?
2. Що таке абсолютна похідна від тензора?
3. Яким чином знаходяться коваріантні похідні від компонент тензора?
4. Сформулюйте теорема Річчі та виконайте її доведення.
5. Що таке оператор Гамільтона?
6. Дайте визначення абсолютної похідної від вектора переміщень в криволінійних координатах.
7. Наведіть формули скалярного та векторного добутку оператора Гамільтона на тензор.
8. Наведіть формули для визначення операторів дивергенції, градієнта та ротора.

Лекція 1.4(4)

1. Опишіть закономірності перетворення компонент тензорів при зміні координат.
2. Дайте визначення тензора перетворення координат і його властивості.
3. Сформулюйте визначення тензора через формули перетворення його компонент.
4. Дайте визначення матриці тензору перетворення координат.
5. Виконайте перетворення вектора переміщень $\mathbf{u}$ і тензора напружень $\hat{\sigma}$ з декартової системи координат в циліндричну і навпаки.

Лекція 1.5(5)

1. Наведіть формули для тензорів напруження, деформації, швидкості деформації та теплового розширення (теплової деформації).
2. Дайте визначення тензорів четвертого рангу пружності, пружно-пластичності, в’язкості та пружно-в’язко-пластичності.
3. Наведіть формулювання нелінійних законів стану в інваріантному вигляді.

Лекція 2.1(6)

1. Наведіть основні поняття і гіпотези МСС.
2. Опишіть два підходи до описання руху суцільного середовища. В чому вони різняться між собою?
3. Наведіть розв’язуючі рівняння МСС в переміщеннях та швидкостях для нестаціонарних та стаціонарних задач.
4. Запишіть систему рівнянь тепло-масопереносу для нестаціонарних задач МСС для стисливих рідин (тіл).

Лекція 2.2(7)

1. Наведіть систему рівнянь тепло-масопереносу для нестаціонарних задач МСС для нестисливих рідин (тіл).
2. В чому полягає наближення Бусінеска?

Лекція 2.3(8)

1. Запишіть рівняння нерозривності суцільного середовища (однорідного і суміші).
2. Сформулюйте закон збереження маси.
3. В чому полягає наближення ідеальної рідини.
4. Запишіть рівняння Ейлера.
5. Запишіть повну систему рівнянь руху ідеальної нестисливої рідини.
6. Наведіть замкнуту систему рівнянь руху ідеальної стисливої рідини у випадку баротропних процесів.
7. Охарактеризуйте в’язкі рідини.
8. Запишіть систему рівнянь Нав’є-Стокса.

Лекція 2.4(9)

1. Опишіть сутність турбулентного руху суцільних середовищ.
2. Наведіть класичні моделі турбулентності для напружень Рейнольдса.
3. Опишіть модель Прандтля, що побудована на алгебраїчному виразі.
4. Опишіть модель Прандтля-Колмогорова з одним рівнянням.
5. Опишіть $k-\varepsilon$ модель ізотропної турбулентності з двома рівняннями.

ДОДАТОК Б

Завдання для самостійної роботи

1 Залежність компонент метричного тензора та тензора перетворень від криволінійних координат.
2 Формули перетворення символів Кристофеля при зміні координат.
3 Обґрунтування нетензорної природи символів Кристофеля.
4 Формули для компонент деформацій в криволінійних координатах.
5 Формули для компонент деформацій та жорстких поворотів в операторній формі.
6 Співвідношення між коваріантними і контраваріантними компонентами тензора перетворення.
7 Властивості тензорів 2-го рангу.
8 Інваріанти симетричних тензорів 2-го рангу.
9 Теорема про кількість незалежних інваріантів.
10 Розв'язуючі рівняння в напруженнях.
11 Формулювання початкових та граничних умов.
12 Турбулентні течії і дисипативні середовища.
13 $k-\omega$ модель турбулентності з двома рівняннями.
14 Граничні умови в задачах з турбулентними течіями.

Навчальне видання

Карвацький Антон Янович

МЕХАНІКА СУЦІЛЬНИХ СЕРЕДОВИЩ–2. НЕЛІНІЙНІ ЗАДАЧІ МЕХАНІКИ СУЦІЛЬНИХ СЕРЕДОВИЩ

Конспект лекцій з навчальної дисципліни

Навчальний посібник

В авторській редакції