МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Кратні інтеграли. Елементи теорії поля: виконання типових розрахункових завдань

Навчальний посібник

Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра
за освітньою програмою «Інжиніринг зварювання, лазерних та споріднених технологій» спеціальності 131 Прикладна механіка
та за освітніми програмами «Комп'ютерно-інтегровані технології проектування обладнання хімічної інженерії», «Інжиніринг обладнання виробництва полімерних та будівельних матеріалів і виробів» спеціальності 133 Галузеве машинобудування

Електронне мережне навчальне видання

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2025

УДК 517К(075.8)
В41

Укладачі: *Авдєєва Тетяна Василівна*
Качаєнко Ольга Борисівна, канд. фіз.-мат. наук
Коваль Ольга Олександрівна
Поліщук Олена Борисівна, канд. фіз.-мат. наук
Стогній Валерій Іванович, канд. фіз.-мат. наук

Рецензент *Іллічева Л. М.* канд. фіз.-мат. наук, доц. кафедри прикладної математики факультету комп’ютерних наук та технологій Національного авіаційного університету

Відповідальний редактор *Горбачук В. М.*, д-р фіз.-мат. наук, проф. кафедри математичної фізики та диференціальних рівнянь ФМФ КПІ ім. Ігоря Сікорського

Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
(протокол № 9 від 26.06.2025 р.)
за поданням вченої ради фізико-математичного факультету
(протокол № 7 від 04.06.2025 р.)

В41 Вища математика. Кратні інтеграли. Елементи теорії поля: виконання типових розрахункових завдань [Електрон. ресурс] : навч. посіб. для здобувачів ступеня бакалавра за освіт. програмою «Інжиніринг зварювання, лазерних та споріднених технологій» спец. 131 Прикладна механіка, за освіт. програмами «Комп’ютерно-інтегровані технології проектування обладнання хімічної інженерії», «Інжиніринг обладнання виробництва полімерних та будівельних матеріалів і виробів» спец. 133 Галузеве машинобудування / Т. В. Авдєєва, О. Б. Качаєнко, О. О. Коваль та ін. ; КПІ ім. Ігоря Сікорського.– Електрон. текст. дані (1 файл). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2025. – 106 с.

Навчальний посібник забезпечує освітню компоненту «Вища математика», містить теоретичні питання до розділів «Кратні інтеграли» та «Елементи теорії поля», приклади розв’язування типових задач з обґрунтуваннями, 25 варіантів індивідуальних розрахункових завдань та додатки. що містять довідковий матеріал.

Навчальний посібник буде корисним для студентів технічних спеціальностей Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського» очної, заочної та дистанційної форм навчання, а також може бути використаний викладачами при проведенні практичних занять і контрольних заходів.

УДК 517К(075.8)

Реєстр. № НП 24/25-607. Обсяг 4,8 авт. арк.

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
проспект Берестейський, 37, м. Київ, 03056
https://kpi.ua
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру видавців, виготовлювачів
і розповсюджувачів видавничої продукції ДК № 5354 від 25.05.2017 р.

ВСТУП

Обов'язковою умовою успішного засвоєння освітньої компоненти «Вища математика» є самостійна робота студентів, одним з елементів якої є виконання індивідуальних типових завдань. Навчальний посібник «Кратні інтеграли. Елементи теорії поля: виконання типових розрахункових робіт» забезпечує індивідуальні семестрові завдання, основна мета яких навчити студентів застосовувати набуті знання для самостійного розв'язування запропонованих задач і вміння користуватися додатковою літературою.

Посібник містить теоретичні питання до розділів «Кратні інтеграли» та «Елементи теорії поля», приклади розв'язування типових задач, варіанти завдань розрахункової роботи і додатки. Теоретичні питання є загальними для всіх студентів. Задачі є індивідуальними для кожного студента групи, вони подані у вигляді 25 варіантів (номер варіанта відповідає номеру прізвища студента у списку групи). Кожний варіант містить приклади на зміну порядку інтегрування, безпосереднє обчислення подвійних і потрійних інтегралів, задачі на геометричне і фізичне застосування інтегралів (обчислення площі плоскої області, маси пластини, маси кривої, маси просторового тіла, об'єму просторового тіла), дослідження питання потенціальності та соленоїдальності векторного поля, обчислення роботи сили, обчислення потоку і циркуляції векторного поля. У додатках наведено рівняння і графічні зображення основних поверхонь другого порядку, відомості про криволінійні системи координат на площині та у просторі, а також основні формули, потрібні для розв'язування задач розрахункової роботи.

Для виконання розрахункової роботи доцільно повторити відповідний теоретичний матеріал, використовуючи конспект лекцій та наведену наприкінці науково-методичну літературу.

Посібник призначено для студентів технічних спеціальностей очної, заочної та дистанційної форм навчання.

1. ТЕОРЕТИЧНІ ПИТАННЯ ДО РОЗДІЛУ

«КРАТНІ ІНТЕГРАЛИ»

1. Поняття подвійного інтеграла та умови його існування.
2. Властивості подвійного інтеграла.
3. Обчислення подвійного інтеграла.
4. Теорема про заміну змінних у подвійному інтегралі.
5. Подвійний інтеграл у полярних координатах. Якобіан.
6. Подвійний інтеграл в узагальнених полярних координатах. Якобіан.
7. Застосування подвійних інтегралів до задач геометрії та фізики.
8. Поняття потрійного інтеграла та умови його існування.
9. Властивості потрійного інтеграла.
10. Обчислення потрійного інтеграла.
11. Теорема про заміну змінних у потрійному інтегралі.
12. Потрійний інтеграл у циліндричних координатах. Якобіан.
13. Потрійний інтеграл в узагальнених циліндричних координатах. Якобіан.
14. Потрійний інтеграл у сферичних координатах. Якобіан.
15. Потрійний інтеграл в узагальнених сферичних координатах. Якобіан.
16. Застосування потрійних інтегралів до задач геометрії та фізики.
17. Поняття криволінійного інтеграла першого роду та умови його існування.
18. Властивості криволінійного інтеграла першого роду.
19. Обчислення криволінійного інтеграла першого роду.
20. Застосування криволінійного інтеграла першого роду.
21. Поняття поверхневого інтеграла першого роду, умови його існування.
22. Властивості поверхневого інтеграла першого роду.
23. Обчислення поверхневого інтеграла першого роду.
24. Застосування поверхневого інтеграла першого роду.

2. ТЕОРЕТИЧНІ ПИТАННЯ ДО РОЗДІЛУ

«ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ПОЛЯ»

1. Поняття криволінійного інтеграла другого роду та умови його існування.
2. Властивості криволінійного інтеграла другого роду.
3. Обчислення криволінійного інтеграла другого роду.
4. Криволінійний інтеграл другого роду за замкненим контуром.
5. Формула Гріна.
6. Застосування криволінійних інтегралів другого роду.
7. Умови незалежності криволінійного інтеграла другого роду від форми шляху інтегрування (випадок плоскої кривої).
8. Умови незалежності криволінійного інтеграла другого роду від форми шляху інтегрування (випадок просторової кривої).
9. Знаходження функції за її повним диференціалом.
10. Поняття двосторонньої поверхні. Орієнтація поверхні.
11. Поняття поверхневого інтеграла другого роду та умови його існування.
12. Властивості поверхневого інтеграла другого роду.
13. Обчислення поверхневого інтеграла другого роду.
14. Поняття векторного поля. Приклади векторних полів.
15. Потенціал векторного поля.
16. Робота і циркуляція векторного поля.
17. Дивергенція векторного поля. Соленоїдальне поле.
18. Ротор векторного поля. Потенціальне поле.
19. Потік векторного поля.
20. Формула Остроградського-Гаусса (координатна і векторна форми).
21. Формула Стокса (координатна і векторна форми).

3. ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ТИПОВИХ ЗАВДАНЬ

Завдання 1. На площині Oxy побудувати область інтегрування та змінити порядок інтегрування:

$$\int_0^{\sqrt{3}} dx \int_0^{2-\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy + \int_{\sqrt{3}}^{2} dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy.$$

Розв'язування. Щоб змінити порядок інтегрування потрібно у прямокутній декартовій системі координат зобразити область інтегрування D згідно з межами у подвійних інтегралах, заданих в умові. Виразимо рівняння кривих у зручному для побудови вигляді:

1) $y = 2-\sqrt{4-x^2} \quad \Rightarrow \quad y-2 = -\sqrt{4-x^2}$, звідки $(y-2)^2 = 4-x^2$, тобто $x^2+(y-2)^2 = 4$. Враховуючи додатне значення арифметичного кореня, зауважимо, що $y \le 2$. Отже, геометричним образом розглядуваної функції є півколо $(y \le 2)$ із центром у точці $O_1(0;2)$ і радіусом $R=2$;

2) аналогічно, якщо $y=\sqrt{4-x^2}$, то $\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ y \ge 0 \end{cases}$, тобто отримуємо півколо $(y \ge 0)$ із центром у точці $O\ (0;0)$ й радіусом $R=2$.

Зауважимо, що область знизу обмежена прямою $y=0$ (рис. 1).

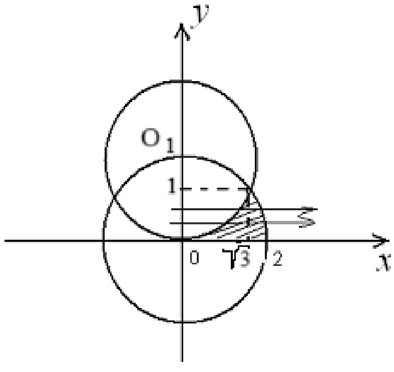


Рис. 1

Неважко переконатись, що одна із точок перетину цих кіл має абсцису $x=\sqrt{3}$.

Справді,

$$\begin{cases} y = 2-\sqrt{4-x^2} \\ y=\sqrt{4-x^2} \end{cases} \Rightarrow 2\sqrt{4-x^2}=2 \quad \Rightarrow \quad 4-x^2=1$$

тобто, $x^2=3 \quad \Rightarrow \quad x=\pm\sqrt{3}$, звідки знаходимо $y\left(\sqrt{3}\right)=1$.

Заштрихована область і є областю D. Для визначення меж у новому інтегралі доцільно запустити в отриману область стрілки, паралельні осі Ox. З рис. 1 стає очевидно, що за $y\in[0;1]$ величина x змінюється від правої частини зміщеного півкола до правої частини кола із центром у початку координат. Щоб записати інтеграл в іншому порядку ще треба виразити рівняння цих функцій як $x=x(y)$, тобто з рівняння $x^2+y^2=4$ маємо $x=\sqrt{4-y^2}$ (оскільки $x\geq 0$), а з рівняння $x^2+(y-2)^2=4$ отримуємо $x=\sqrt{4-(y-2)^2} \Rightarrow x=\sqrt{4y-y^2}$.

Отже, маємо остаточну відповідь:

$$\int_0^{\sqrt{3}}dx\int_0^{2-\sqrt{4-x^2}}f(x,y)dy+\int_{\sqrt{3}}^{2}dx\int_0^{\sqrt{4-x^2}}f(x,y)dy=\int_0^1 dy\int_{\sqrt{4y-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}}f(x,y)dx.$$

Відповідь: $\int_0^1 dy\int_{\sqrt{4y-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}}f(x,y)dx$.

Завдання 2. Обчислити подвійний інтеграл:

а) $\iint\limits_D (x^2 + y)dxdy,$ якщо D – область, обмежена прямими $y = 2x,$ $y = 3 - x,$ $y = 0;$

б) $\iint\limits_D \sqrt{xy}dxdy$, якщо D – область, обмежена кривою $\left(\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3}\right)^4 = \frac{xy}{\sqrt{6}}$, що лежить у першій чверті.

<u>Розв'язування.</u>

а) Щоб з'ясувати межі інтегрування області D, спочатку треба зробити креслення. Область інтегрування D зображено на рис. 2.

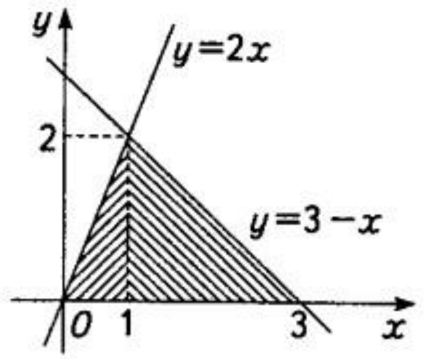


Рис. 2

Перший спосіб. Оскільки верхню межу області D задано двома різними рівняннями, область D потрібно зобразити як суму двох областей $D = D_1 \cup D_2$. Прямою x=1 розділимо область D на дві області D_1 та D_2, тоді перша область D_1 і друга D_2 є правильними у напрямку осі Oy й задаються нерівностями $D_1 = \{0 \le x \le 1, 0 \le y \le 2x\}$, $D_2 = \{1 \le x \le 3, 0 \le y \le 3 - x\}$. Тоді за властивістю адитивності маємо

$$\iint\limits_D (x^2 + y)dxdy = \iint\limits_{D_1} (x^2 + y)dxdy + \iint\limits_{D_2} (x^2 + y)dxdy =$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^{2x} (x^2 + y)\, dy + \int_1^3 dx \int_0^{3-x} (x^2 + y)\, dy =$$

$$= \int_0^1 \left(x^2 y + \frac{y^2}{2} \right) \Big|_0^{2x} dx + \int_1^3 \left(x^2 y + \frac{y^2}{2} \right) \Big|_0^{3-x} dx =$$

$$= \int_0^1 (2x^3 + 2x^2) dx + \int_1^3 \left(3x^2 - x^3 + \frac{(3-x)^2}{2} \right) dx =$$

$$= \left(\frac{1}{2} x^4 + \frac{2x^3}{3} \right) \Big|_0^1 + \left(x^3 - \frac{x^4}{4} - \frac{(3-x)^3}{6} \right) \Big|_1^3 =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + 27 - \frac{81}{4} - 1 + \frac{1}{4} + \frac{4}{3} = 8\frac{1}{2}.$$

Другий спосіб. Подвійний інтеграл можна обчислити більш просто, проаналізувавши зображену область . Область D є правильною у напрямку осі Ox (довільна пряма, яка проходить через внутрішню точку області D паралельно осі Ox , перетинає межу області не більше, ніж у двох точках) (рис. 2): фігура проектується у відрізок $0 \le y \le 2$ й обмежена зліва прямою $y = 2x$, а справа − прямою $y = 3 - x$, тобто $D = \{0 \le y \le 2, \frac{y}{2} \le x \le 3 - y\}$, тоді

$$\iint_D (x^2 + y) dx dy = \int_0^2 dy \int_{\frac{y}{2}}^{3-y} (x^2 + y)\, dx =$$

$$= \int_0^2 \left(\frac{x^3}{3} + xy \right) \Bigg|_{\frac{y}{2}}^{3-y} dy = \int_0^2 \left(\frac{(3-y)^3}{3} + y(3-y) - \frac{y^3}{24} - \frac{y^2}{2} \right) dy =$$

$$= \left(-\frac{(3-y)^4}{12} + 3\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{96} - \frac{y^3}{6} \right) \Bigg|_0^2 = -\frac{1}{12} + 6 - \frac{8}{3} - \frac{1}{6} - \frac{4}{3} + \frac{27}{4} = 8\frac{1}{2}.$$

Відповідь: $8\frac{1}{2}$.

б) Проаналізуємо рівняння кривої, якою обмежено область D. Очевидно, що для побудови кривої зручно перейти до узагальненої полярної системи координат за формулами $x = a\rho\cos\varphi$, $y = b\rho\sin\varphi$, де $a=\sqrt{2}$, $b=\sqrt{3}$. Тоді рівняння кривої набуває вигляду

$$\left(\frac{2\rho^2\cos^2\varphi}{2}+\frac{3\rho^2\sin^2\varphi}{3}\right)^4=\frac{\sqrt{2}\rho\cos\varphi\cdot\sqrt{3}\rho\sin\varphi}{\sqrt{6}},$$

$$\left(\rho^2\left(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\right)\right)^4=\rho^2\cos\varphi\sin\varphi,$$

$$\rho^8=\frac{1}{2}\rho^2\sin 2\varphi \;\Leftrightarrow\; \rho^6=\frac{1}{2}\sin 2\varphi \;\Leftrightarrow\; \rho=\sqrt[6]{\frac{1}{2}\sin 2\varphi}.$$

Рівність $\rho=\sqrt[6]{\frac{1}{2}\sin 2\varphi}$ справедлива для $\sin 2\varphi \ge 0$, розв'язуючи її, маємо $\pi n \le \varphi \le \frac{\pi}{2}+\pi n$, $n \in Z$.

Оскільки за умовою задачі розглядаємо першу чверть, то $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$. Побудуємо криву й зобразимо область D (рис. 3). Для зручності складаємо таблицю значень ρ, φ :

φ	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
ρ	0	$\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\approx 0{,}79$	$\sqrt[4]{\frac{1}{2}}\approx 0{,}84$	$\sqrt[6]{\frac{\sqrt{3}}{4}}\approx 0{,}87$	$\sqrt[6]{\frac{1}{2}}\approx 0{,}89$	$\sqrt[6]{\frac{\sqrt{3}}{4}}\approx 0{,}87$	0

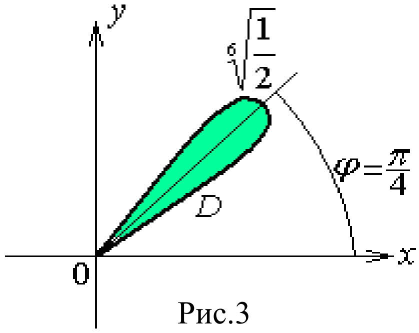


Рис.3

Інтеграл обчислюємо, використовуючи узагальнену полярну систему координат:

$$x=\sqrt{2}\rho\cos\varphi,\quad y=\sqrt{3}\rho\sin\varphi\quad |J|=\sqrt{6}\rho,\quad dxdy=\sqrt{6}\rho d\rho d\varphi.$$

Враховуючи область D, згідно з рис. 3 розставимо межі інтегрування для змінних φ та ρ:

$$0\le\varphi\le\frac{\pi}{2};\ 0\le\rho\le\sqrt[6]{\frac{1}{2}\sin 2\varphi}\ \text{ або }\ 0\le\rho\le\sqrt[6]{\sin\varphi\cos\varphi},$$

тоді

$$\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{xy}\,dxdy=\iint\limits_{D_{\rho\varphi}}\sqrt{\sqrt{2}\rho\cos\varphi\sqrt{3}\rho\sin\varphi}\sqrt{6}\rho\,d\rho\,d\varphi=$$

$$=\sqrt{\sqrt{6}}\cdot\sqrt{6}\iint\limits_{D_{\rho\varphi}}\rho\sqrt{\cos\varphi\sin\varphi}\,\rho d\rho\,d\varphi=\sqrt[4]{6^3}\iint\limits_{D_{\rho\varphi}}\rho^2\sqrt{\cos\varphi\sin\varphi}\,d\rho\,d\varphi=$$

$$=\sqrt[4]{216}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^{\sqrt[6]{\cos\varphi\sin\varphi}}\sqrt{\cos\varphi\sin\varphi}\,\rho^2\,d\rho=\sqrt[4]{216}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sqrt{\cos\varphi\sin\varphi}\left(\frac{\rho^3}{3}\right)\Bigg|_0^{\sqrt[6]{\cos\varphi\sin\varphi}}\right)d\varphi=$$

$$=\frac{1}{3}\sqrt[4]{216}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos\varphi\sin\varphi}\left(\sqrt[6]{\cos\varphi\sin\varphi}\right)^3d\varphi=\frac{1}{3}\sqrt[4]{216}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos\varphi\sin\varphi}\cdot\sqrt{\cos\varphi\sin\varphi}\,d\varphi=$$

$$=\frac{1}{3}\sqrt[4]{216}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\sin\varphi\,d\varphi=\frac{1}{3}\sqrt[4]{216}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\,d(\sin\varphi)=\frac{1}{3}\sqrt[4]{216}\cdot\frac{\sin^2\varphi}{2}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{6}\sqrt[4]{216}.$$

Відповідь: $\frac{1}{6}\sqrt[4]{216}$.

Завдання 3. Обчислити площу області, обмеженої заданими лініями:

а) $x^2+y^2=12$, $y^2=x\sqrt{6}$ $(x\ge 0)$;

б) $x^2+y^2=2y$, $x^2+y^2=4y$, $y=-x\sqrt{3}$, $y=x$.

<u>*Розв'язування.*</u> Площу плоскої області D обчислюємо за формулою

$$S=\iint_D dxdy.$$

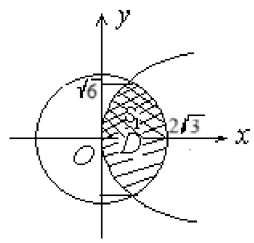


Рис. 4

а) Область D обмежена колом $x^2+y^2=12$ із центром у точці $O\,(0;0)$ радіусом $R=2\sqrt{3}$ і параболою $x=\dfrac{y^2}{\sqrt{6}}$ (рис. 4).

Область D симетрична щодо осі Ox, тому достатньо обчислити площу області D_1 $\left(D_1=\dfrac{1}{2}D,\ y\ge 0\right)$, у результаті чого маємо

$$S=2S_1=2\iint_{D_1} dxdy.$$

Знайдемо точки перетину кола і параболи: підставимо $x=\dfrac{y^2}{\sqrt{6}}$ у рівняння кола $x^2+y^2=12$, звідки $y^4+6y^2-72=0$. Розв'язавши біквадратне рівняння, знайдемо $y=\pm\sqrt{6}$. Отже, точками перетину кола і параболи будуть $\left(\sqrt{6};-\sqrt{6}\right)$, $\left(\sqrt{6};\sqrt{6}\right)$. Розставляючи межі інтегрування у подвійному інтегралі, отримуємо

$$S=2\int_0^{\sqrt{6}}dy\int_{\frac{y^2}{\sqrt{6}}}^{\sqrt{12-y^2}}dx=2\int_0^{\sqrt{6}}dy\left(x\right)\Bigg|_{\frac{y^2}{\sqrt{6}}}^{\sqrt{12-y^2}}=2\int_0^{\sqrt{6}}\left(\sqrt{12-y^2}-\frac{y^2}{\sqrt{6}}\right)dy=$$

$$= 2\int_0^{\sqrt{6}} \sqrt{12 - y^2}\,dy - \frac{2}{\sqrt{6}}\int_0^{\sqrt{6}} y^2 dy = \left| \begin{array}{l} y = \sqrt{12}\sin t \\ dy = \sqrt{12}\cos t dt \\ y = 0 \Rightarrow t = 0 \\ y = \sqrt{6} \Rightarrow t = \frac{\pi}{4} \end{array} \right| =$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{12 - 12\sin^2 t} \cdot \sqrt{12}\cos t dt - \frac{2}{\sqrt{6}} \cdot \frac{y^3}{3}\Bigg|_0^{\sqrt{6}} = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} 12\cos^2 t dt - \frac{2}{\sqrt{6}} \cdot \frac{6\sqrt{6}}{3} =$$

$$= 12\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \cos 2t)dt - 4 = 12\left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} - 4 = 12\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\sin\frac{\pi}{2}}{2}\right) - 4 = 3\pi + 2.$$

Відповідь: $S = 3\pi + 2$.

б) Зобразимо область D, наперед проаналізувавши криві, якими вона обмежена. Виділяючи повні квадрати у рівняннях $x^2 + y^2 = 2y,\ x^2 + y^2 = 4y$ отримуємо

$x^2 + y^2 - 2y = 0 \iff x^2 + (y-1)^2 = 1 -$ коло з центром $O_1(0;1)$ і $R_1 = 1$;

$x^2 + y^2 - 4y = 0 \iff x^2 + (y-2)^2 = 4 -$ коло з центром $O_2(0;2)$ і $R_2 = 2$.

Рівняння $y = x$ та $y = -x\sqrt{3}$ задають прямі, що проходять через початок координат, з відповідними кутовими коефіцієнтами: $k_1 = 1$, $k_2 = -\sqrt{3}$.

У результаті побудови отримуємо фігуру *KLMN* (рис. 5).

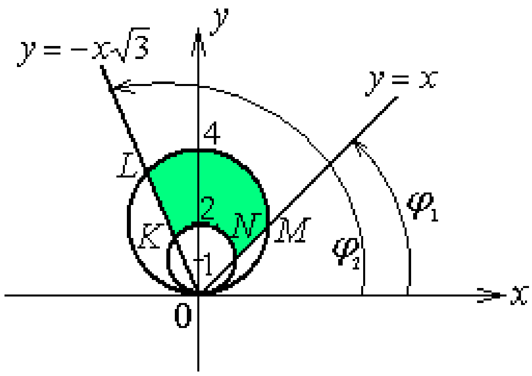


Рис. 5

Очевидно, площу фігури *KLMN* зручно обчислювати в полярних координатах. У рівняннях кривих, що обмежують фігуру *KLMN*, перейдемо до полярних координат за формулами $x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi$:

$$x^2 + y^2 = 2y \Rightarrow \quad \rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi = 2\rho\sin\varphi \quad \Rightarrow \quad \rho^2 = 2\rho\sin\varphi,$$

$$x^2 + y^2 = 4y \Rightarrow \quad \rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi = 4\rho\sin\varphi \quad \Rightarrow \quad \rho^2 = 4\rho\sin\varphi,$$

звідки, відповідно, маємо

$$2\sin\varphi \le \rho \le 4\sin\varphi .$$

Межі інтегрування за змінною φ знаходимо з рівнянь прямих:

$$y = x \Rightarrow \rho\sin\varphi = \rho\cos\varphi \Rightarrow \mathrm{tg}\,\varphi = 1 \Rightarrow \varphi = -\frac{3\pi}{4}, \varphi = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \varphi_1 = \frac{\pi}{4},$$

$$y = -x\sqrt{3} \Rightarrow \rho\sin\varphi = -\sqrt{3}\rho\cos\varphi \Rightarrow \mathrm{tg}\,\varphi = -\sqrt{3} \Rightarrow \varphi = -\frac{\pi}{3}, \varphi = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow \varphi_2 = \frac{2\pi}{3}.$$

Отже

$$\frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{2\pi}{3}.$$

Площу області D у полярній системі координат обчислюємо за формулою

$$S=\iint\limits_{D_{\rho\varphi}}\rho\, d\rho\, d\varphi\,,$$

тоді

$$S=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{2\pi}{3}}d\varphi\int\limits_{2\sin\varphi}^{4\sin\varphi}\rho\, d\rho=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{2\pi}{3}}d\varphi\left(\frac{\rho^2}{2}\right)\Bigg|_{2\sin\varphi}^{4\sin\varphi}=\frac{1}{2}\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{2\pi}{3}}\left(16\sin^2\varphi-4\sin^2\varphi\right)d\varphi=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{2\pi}{3}}\left(12\sin^2\varphi\right)d\varphi=6\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{2\pi}{3}}\sin^2\varphi\, d\varphi=\frac{6}{2}\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{2\pi}{3}}\left(1-\cos2\varphi\right)d\varphi=$$

$$=3\left(\varphi-\frac{\sin2\varphi}{2}\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{2\pi}{3}}=3\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{4}-\frac{\sin\frac{4\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{2}}{2}\right)=3\left(\frac{5\pi}{12}-\frac{\frac{-\sqrt{3}}{2}-1}{2}\right)=$$

$$=3\left(\frac{5\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}+2}{4}\right)=\frac{5\pi+3\sqrt{3}+6}{4}\,.$$

Відповідь: $S=\dfrac{5\pi+3\sqrt{3}+6}{4}$.

Завдання 4. Знайти масу пластинки D, обмеженої кривою $x^2 + y^2 = Rx$ за заданої поверхневої густині $\mu = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$.

Розв'язування. Нагадаємо, що масу пластини знаходимо за формулою

$$m = \iint\limits_D \mu(x, y) dxdy.$$

Виділяючи повний квадрат у рівнянні $x^2 + y^2 = Rx$, отримуємо $\left(x - \frac{R}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{R}{2}\right)^2$.

Отже, область D є кругом з центром $O\left(\frac{R}{2}; 0\right)$ й радіусом $\frac{R}{2}$ (рис. 6).

У задачі доцільно перейти до полярної системи координат, тоді формула для знаходження маси пластини набуває вигляду

$$m = \iint\limits_{D_{\varphi\rho}} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho d\rho d\varphi.$$

Перейдемо в рівнянні кривої, що обмежує область D, і в рівнянні густини до полярних координат за формулами $x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi$, після чого рівняння кола набуває вигляду $\rho = R\cos\varphi$, а $\mu = \sqrt{R^2 - \rho^2}$.

Проаналізуємо область інтегрування.

Неважко побачити, що $\varphi \in \left[-\pi/2; \pi/2\right]$, а відстань ρ змінюється від нуля до точок кола, тобто

$0 \le \rho \le R\cos\varphi.$

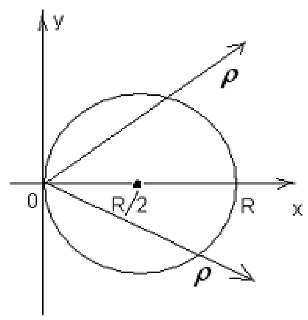


Рис.6

Отже,

$$m=\iint\limits_D \sqrt{R^2-\rho^2}\,\rho d\rho d\varphi=$$

$$=\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{R\cos\varphi} \sqrt{R^2-\rho^2}\,\rho d\rho=-\frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{R\cos\varphi} \sqrt{R^2-\rho^2}\,d\left(R^2-\rho^2\right)=$$

$$=-\frac{1}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left[\left(\sqrt{R^2-\rho^2}\right)^3\Bigg|_0^{R\cos\varphi}\right]d\varphi=-\frac{1}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\left(\sqrt{R^2-R^2\cos^2\varphi}\right)^3-\left(\sqrt{R^2}\right)^3\right)d\varphi=$$

$$=-\frac{R^3}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\left(\sqrt{1-\cos^2\varphi}\right)^3-1\right)d\varphi=-\frac{R^3}{3}\left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left|\sin\varphi\right|^3 d\varphi-\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi\right)=\frac{\pi R^3}{3}-\frac{R^3}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left|\sin^3\varphi\right| d\varphi=$$

Оскільки функція $\left|\sin^3\varphi\right|$ парна, а проміжок $\left[-\pi/2;\pi/2\right]$ симетричний відносно початку координат, то за властивістю визначеного інтеграла від парної функції за симетричним проміжком маємо

$$=\frac{\pi R^3}{3}-\frac{2R^3}{3}\int_0^{\pi/2}\sin^3\varphi d\varphi=\frac{\pi R^3}{3}+\frac{2R^3}{3}\int_0^{\pi/2}\left(1-\cos^2\varphi\right)d\cos\varphi=\frac{\pi R^3}{3}+$$

$$+\frac{2R^3}{3}\left(\cos\varphi\Big|_0^{\pi/2}-\frac{\cos^3\varphi}{3}\Big|_0^{\pi/2}\right)=\frac{\pi R^3}{3}+\frac{2R^3}{3}\left(-1+\frac{1}{3}\right)=\frac{\pi R^3}{3}-\frac{4R^3}{9}=\frac{R^3}{9}(3\pi-4).$$

Відповідь: $m=\dfrac{R^3}{9}(3\pi-4).$

Завдання 5. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint\limits_V zy^2 \operatorname{ch}(xy)dxdydz$, де область V обмежена площинами $x=0$, $y=\dfrac{x}{2}$, $y=1$, $z=0$, $z=2$.

<u>*Розв'язування.*</u> Область V обмежена координатними площинами $x=0$, $z=0$ та площинами $y=\dfrac{x}{2}$, $y=1$, $z=2$ (рис. 7).

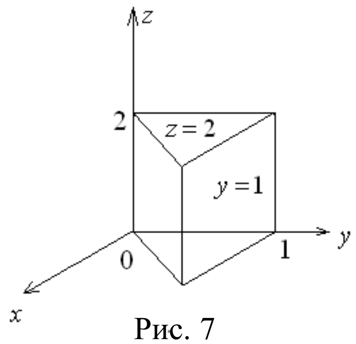


Рис. 7

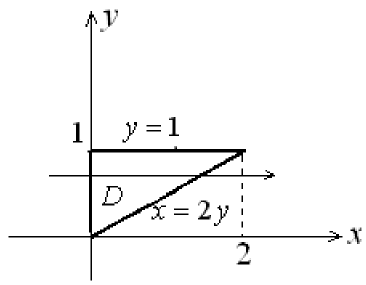


Рис. 8

Область V однозначно проектується на площину Oxy в область D, обмежену прямими $x=0$, $y=1$ і $x=2y$ (рис. 8). Розставимо межі інтегрування. Згідно з рис. 8 області D маємо $0\le y\le 1$, а x змінюється від осі ординат до прямої $x=2y$, тобто $0\le x\le 2y$. З області V (рис. 7) очевидно, що $0\le z\le 2$. Отже, отримуємо

$$\iiint\limits_V zy^2 \operatorname{ch}(xy)dxdydz = \int_0^1 dy\int_0^{2y} y^2 \operatorname{ch} xydx\int_0^2 zdz = \int_0^1 dy\int_0^{2y} y^2 \operatorname{ch} xydx\left(\left.\frac{z^2}{2}\right|_0^2\right) =$$

$$= 2\int_0^1 dy\int_0^{2y} y^2 \operatorname{ch} xydx = 2\int_0^1 y^2dy\int_0^{2y} \operatorname{ch} xydx = 2\int_0^1 y^2\left(\left.\frac{\operatorname{sh} xy}{y}\right|_0^{2y}\right)dy = 2\int_0^1 y\left(\operatorname{sh} 2y^2 - \operatorname{sh} 0\right)dy =$$

$$= 2\int_0^1 y\cdot \operatorname{sh}\left(2y^2\right)dy = 2\cdot\frac{1}{4}\int_0^1 \operatorname{sh}\left(2y^2\right)d\left(2y^2\right) = \left.\frac{1}{2}\operatorname{ch}\left(2y^2\right)\right|_0^1 = \frac{1}{2}\left(\operatorname{ch}2 - \operatorname{ch}0\right) = \frac{\operatorname{ch}2-1}{2}.$$

Відповідь: $\dfrac{\operatorname{ch}2-1}{2}$.

Завдання 6. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями

$$z=\sqrt{36-x^2-y^2}\ ,\ z=\sqrt{\frac{x^2+y^2}{3}}\ .$$

Розв'язування.

Перший спосіб. Зображуємо задані поверхні на рис. 9, наперед проаналізувавши рівняння, якими їх описують. Рівняння $z=\sqrt{36-x^2-y^2}$ описує напівсферу із центром у точці $O(0;0;0)$ радіусом $R=6$ та $z\ge 0$, а рівняння $z=\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{3}}$ визначає конус із вершиною у точці $O(0;0;0)$, $z\ge 0$. Таким чином, треба знайти об'єм тіла Ω, яке вирізане з верхньої півкулі конусом.

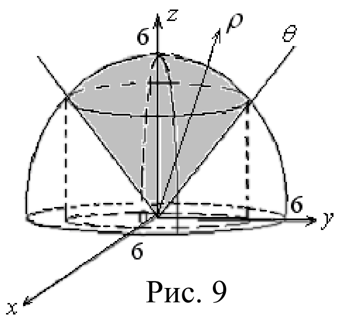


Рис. 9

Використаємо формулу

$$V=\iiint\limits_{\Omega} dxdydz.$$

Спроєктувавши розглядуване тіло на площину $Oxy,$ визначимо межі інтегрування. Для цього розв'яжемо систему рівнянь $\begin{cases} z=\sqrt{36-x^2-y^2}, \\ z=\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{3}} \end{cases}$

або $\begin{cases} z^2+x^2+y^2=36, \\ 3z^2=x^2+y^2, \end{cases}$ звідки маємо $4z^2=36$, $z^2=9$, $z=\pm 3.$

З умов задачі очевидно випливає, що поверхні перетинаються лише за $z=3$ по колу $x^2+y^2=27$.

Проєкцією D тіла Ω на площину Oxy є круг із центром у початку координат і радіусом $3\sqrt{3}$ (рис. 10).

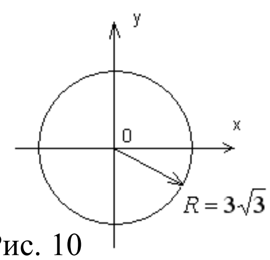


Рис. 10

Об'єм зручно знаходити у циліндричній системі координат за формулою

$$V = \iiint\limits_{\Omega} dxdydz = \iiint\limits_{\Omega_{\rho\varphi z}} \rho d\rho d\varphi dz .$$

Запишемо рівняння поверхонь у ціліндричних координатах, використовуючи заміну $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, $z = z$. Тоді рівняння напівсфери $z = \sqrt{36 - x^2 - y^2}$ набуває вигляду $z = \sqrt{36 - \rho^2}$, а рівняння конуса $z = \sqrt{\dfrac{x^2 + y^2}{3}}$ набуває вигляду $z = \dfrac{\rho}{\sqrt{3}}$. Щоб визначити межі інтегрування для ρ та φ достатньо врахувати, що областю D на площині Oxy є круг радіусом $R = 3\sqrt{3}$ (рис. 10), тому $0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 \le \rho \le 3\sqrt{3}$. Переходячи до трикратного інтеграла із знайденими межами інтегрування, отримуємо

$$V = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{3\sqrt{3}} \rho d\rho \int\limits_{\rho/\sqrt{3}}^{\sqrt{36-\rho^2}} dz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{3\sqrt{3}} \rho \left(z\Big|_{\frac{\rho}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{36-\rho^2}} \right) d\rho =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{3\sqrt{3}} \rho \left(\sqrt{36 - \rho^2} - \rho/\sqrt{3} \right) d\rho = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \left(\int\limits_0^{3\sqrt{3}} \rho\sqrt{36 - \rho^2}\, d\rho - \frac{1}{\sqrt{3}} \int\limits_0^{3\sqrt{3}} \rho^2 d\rho \right) =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \left(\frac{-1}{2} \int\limits_0^{3\sqrt{3}} \left(36 - \rho^2\right)^{\frac{1}{2}} d\left(36 - \rho^2\right) - \frac{\rho^3}{3\sqrt{3}} \Bigg|_0^{3\sqrt{3}} \right) =$$

$$= \left(\varphi\Big|_0^{2\pi} \right) \left(\frac{-1}{2} \cdot \frac{2}{3} \left(36 - \rho^2\right)^{\frac{3}{2}} \Bigg|_0^{3\sqrt{3}} - \frac{\left(3\sqrt{3}\right)^3}{3\sqrt{3}} \right) =$$

$$= 2\pi \left(\frac{-1}{3} \left((36 - 27)^{\frac{3}{2}} - 36^{\frac{3}{2}} \right) - 27 \right) = 2\pi \left(\frac{-1}{3} \left(9^{\frac{3}{2}} - 36^{\frac{3}{2}} \right) - 27 \right) =$$

$$= 2\pi \left(\frac{-1}{3} (27 - 216) - 27 \right) = 2\pi \left(\frac{189}{3} - 27 \right) = 2\pi \cdot 36 = 72\pi .$$

Другий спосіб. Оскільки одна з поверхонь є напівсферою, область D – круг, а твірна конуса дозволяє легко визначити кут із віссю Oz, то об'єм можна також знайти у сферичній системі координат за формулою

$$V = \iiint\limits_{\Omega} dxdydz = \iiint\limits_{\Omega_{\rho\varphi\theta}} \rho^2 \sin\theta d\rho d\varphi d\theta.$$

Запишемо рівняння поверхонь у сферичних координатах, використовуючи заміну $x = \rho\cos\varphi\sin\theta$, $y = \rho\sin\varphi\sin\theta$, $z = \rho\cos\theta$. Тоді рівняння сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 36$ набуває вигляду $\rho = 6$. З рівняння конуса маємо

$$3\rho^2\cos^2\theta = \rho^2\cos^2\varphi\sin^2\theta + \rho^2\sin^2\varphi\sin^2\theta,$$

$$3\rho^2\cos^2\theta = \rho^2\sin^2\theta,\ \mathrm{tg}^2\theta = 3,\ \mathrm{tg}\theta = \pm\sqrt{3},$$

звідки (згідно з умовою $z \ge 0$) отримуємо $\theta = \dfrac{\pi}{3}$.

Щоб визначити межі інтегрування для ρ, достатньо провести радіус-вектор з початку координат через розглядуване тіло (рис. 9). Очевидно, що $0 \le \rho \le 6$. Згідно з визначенням кута θ у сферичній системі координат маємо інші межі: $0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{3}$. Межі для φ знаходимо, враховуючи, що областю D на площині Oxy є круг (рис. 10), тому $0 \le \varphi \le 2\pi$.

Переходячи до трикратного інтеграла із знайденими межами інтегрування, отримуємо

$$V = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi/3} d\theta \int\limits_0^{6} \rho^2 \sin\theta d\rho = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi/3} \sin\theta d\theta \left(\frac{\rho^3}{3}\right)\Bigg|_0^6 = \frac{6^3}{3}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi/3} \sin\theta d\theta =$$

$$= 72\left(\varphi\Big|_0^{2\pi}\right)\left(-\cos\theta\right)\Bigg|_0^{\pi/3} = 72\cdot 2\pi\left(-\frac{1}{2}+1\right) = 72\pi.$$

Відповідь: $V = 72\pi$.

Завдання 7. Знайти масу тіла, обмеженого поверхнями $x^2+y^2+z^2=16$, $x^2+y^2=6z$, $x=0$, $y=0$, $x\ge 0$, $y\ge 0$, $z\ge 0$, якщо густина $\mu(x,y,z)=5z$.

<u>*Розв'язування*</u>. Зображуємо задані поверхні на рис. 11, наперед аналізуючи рівняння, якими їх описують. Рівняння $x^2+y^2+z^2=16$ описує сферу із центром у точці $O(0;0;0)$ радіусом $R=4$, а рівняння $x^2+y^2=6z$ визначає параболоїд з вершиною у точці $O(0;0;0)$.

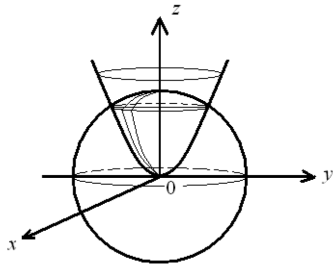


Рис. 11

Таким чином, треба знайти масу тіла, яке вирізане з верхньої півкулі ($z\ge 0$) параболоїдом і міститься у першому октанті ($x\ge 0$, $y\ge 0$) (рис 12).

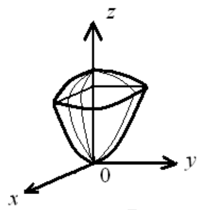


Рис. 12

Спроєктуємо розглядуване тіло на площину Oxy. Для цього розв'яжемо систему рівнянь $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=16, \\ x^2+y^2=6z. \end{cases}$

Звідси маємо $6z+z^2=16$, $z^2+6z-16=0$, $z_1=2$, $z_2=-8$.

З умов задачі очевидно випливає, що поверхні перетинаються лише за $z=2$ по колу $x^2+y^2=12$. Проєкцією D тіла на площину Oxy є четверта частина круга із центром у початку координат і радіусом $2\sqrt{3}$ (рис. 13).

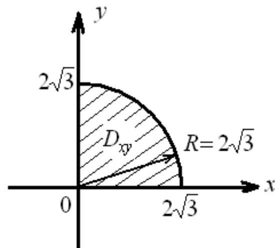


Рис. 13

Щоб знайти масу тіла використаємо формулу

$m=\iiint\limits_{\Omega}\mu(x,y,z)dxdydz$, де $\mu(x,y,z)$ – змінна густина маси тіла.

Згідно з умовою задачі $\mu(x,y,z)=5z$, тоді $m=\iiint\limits_{\Omega}5zdxdydz$.

Оскільки одна з поверхонь – круговий параболоїд, а область D – частина круга, то масу зручно знаходити у циліндричній системі координат за формулою

$$m=\iiint\limits_{V_{xyz}}5zdxdydz=\iiint\limits_{V_{\rho\varphi z}}5z\rho d\rho d\varphi dz\,.$$

Запишемо рівняння поверхонь у циліндричній системі координат, використовуючи заміну $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$, $z=z$. Рівняння сфери $x^2+y^2+z^2=16$ набуває вигляду $\rho^2+z^2=16$, тоді $z=\sqrt{16-\rho^2}$ (рівняння верхньої півсфери), а рівняння параболоїда $x^2+y^2=6z$ набуває вигляду $6z=\rho^2$ або $z=\dfrac{\rho^2}{6}$. Щоб визначити межі інтегрування для ρ та φ достатньо розглянути область D_{xy} (рис. 13), що є проєкцією тіла на площину Oxy. Очевидно, що $0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{2}$, $0\le\rho\le2\sqrt{3}$. Змінна z в тілі змінюється від $z_1=\dfrac{\rho^2}{6}$ до $z_2=\sqrt{16-\rho^2}$.

Переходячи до трикратного інтеграла із знайденими межами інтегрування, отримуємо

$$m=5\int\limits_0^{\pi/2}d\varphi\int\limits_0^{2\sqrt{3}}\rho d\rho\int\limits_{\frac{\rho^2}{6}}^{\sqrt{16-\rho^2}}zdz=5\int\limits_0^{\pi/2}d\varphi\int\limits_0^{2\sqrt{3}}\rho d\rho\left.\left(\frac{\rho^2}{2}\right)\right|_{\frac{\rho^2}{6}}^{\sqrt{16-\rho^2}}=$$

$$=\frac{5}{2}\int\limits_0^{\pi/2}d\varphi\int\limits_0^{2\sqrt{3}}\rho\left(16-\rho^2-\frac{\rho^4}{36}\right)d\rho=$$

$$=\frac{5}{2}\int\limits_0^{\pi/2}d\varphi\int\limits_0^{2\sqrt{3}}\left(16\rho-\rho^3-\frac{\rho^5}{36}\right)d\rho=\frac{5}{2}\left(\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right)\left(8\rho^2-\frac{\rho^4}{4}-\frac{\rho^6}{216}\Bigg|_0^{2\sqrt{3}}\right)=$$

$$=\frac{5}{2}\frac{\pi}{2}\left(8\left(2\sqrt{3}\right)^2-\frac{\left(2\sqrt{3}\right)^4}{4}-\frac{\left(2\sqrt{3}\right)^6}{216}\right)=\frac{5\pi}{4}\left(8\cdot12-36-8\right)=\frac{5\pi}{4}\cdot52=65\pi\,.$$

Відповідь: $m=65\pi$.

Завдання 8. Знайти масу кривої *L*, якщо:

а) L- частина кривої $y=\frac{1}{5}x^5$ від точки $O(0;0)$ до точки $B(2;\,6{,}4)$, лінійна густина матеріалу $\mu(x,y)=12x^7$;

б) L- перша арка однорідної циклоїди $x=t-\sin t,\ y=1-\cos t$;

в) $L: x=b\cos t,\ y=b\sin t,\ z=3t,\ 0\le t\le\pi$, лінійна густина матеріалу

$$\mu(x,y,z)=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

<u>Розв'язування.</u> Масу кривої лінії знаходимо за формулою $m=\int\limits_L \mu(x,y,z)dl$.

а) Криву задано рівнянням у явному вигляді: $y=\frac{1}{5}x^5$ (рис. 14), тому

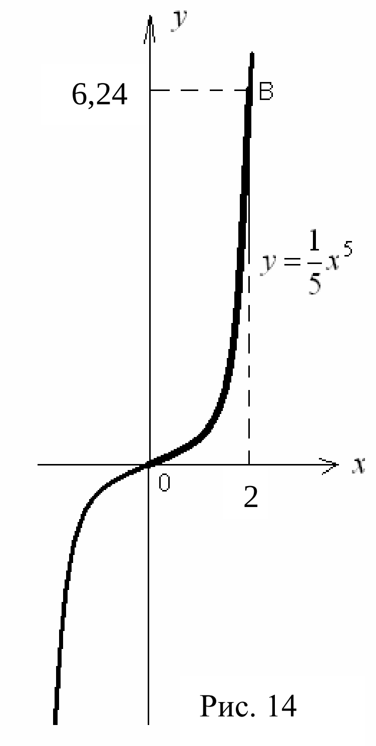


Рис. 14

$dl=\sqrt{1+\left(y'_x\right)^2}\,dx$, а оскільки $y'_x=\frac{1}{5}5x^4=x^4$, то

$$dl=\sqrt{1+x^8}\,dx \text{ й}$$

$$m=\int\limits_L 12x^7\sqrt{1+(x^4)^2}\,dx=12\int\limits_0^2 x^7\sqrt{1+x^8}\,dx=$$

$$=12\cdot\frac{1}{8}\int\limits_0^2\sqrt{1+x^8}\,d(1+x^8)=\left.\left(\frac{3}{2}\frac{\left(1+x^8\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right)\right|_0^2=$$

$$=\left(1+2^8\right)^{\frac{3}{2}}-1=\left(1+256\right)^{\frac{3}{2}}-1=\sqrt{257^3}-1=$$

$$=257\sqrt{257}-1.$$

Відповідь: $m=257\sqrt{257}-1.$

б) Циклоїда – це крива, яку отримують під час руху фіксованої точки кола у процесі його катання без ковзання вздовж прямої. Першу арку циклоїди отримуємо під час зміни параметра t від 0 до 2π (рис. 15).

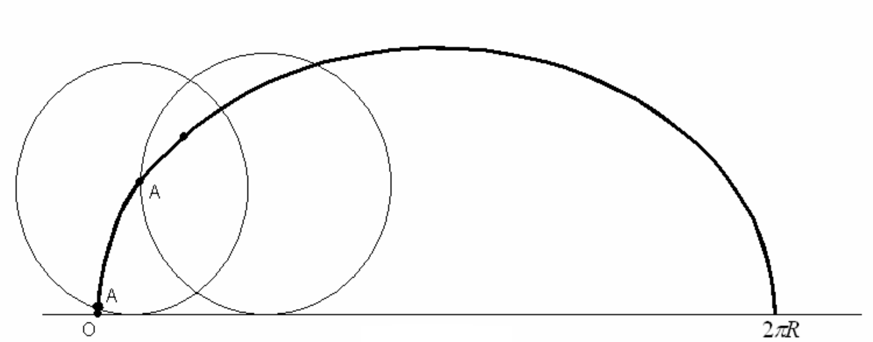


Рис. 15

Оскільки циклоїда однорідна, то формула для маси кривої набуває вигляду

$$m = \int_L dl.$$

Криву задано параметрично рівняннями $x = t - \sin t,\ y = 1 - \cos t$ в Oxy, тому

$$dl = \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2}\, dt.$$

Знайдемо $x_t' = 1 - \cos t,\ y_t' = \sin t$, тоді

$$dl = \sqrt{(1-\cos t)^2 + (\sin t)^2}\, dt = \sqrt{1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t}\,dt = \sqrt{2 - 2\cos t}\,dt.$$

Отже,

$$m = \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos t} \cdot dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2 \cdot 2\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}\, dt = 2\int_0^{2\pi} \left|\sin \frac{t}{2}\right| dt = \left| \begin{matrix} t \in [0, 2\pi] \\ \sin \frac{t}{2} \ge 0 \end{matrix} \right| =$$

$$= 2\int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2}\, dt = -4\cos\frac{t}{2} = -4(\cos\pi - \cos 0) = -4(-1-1) = 8.$$

Відповідь: 8.

в) Просторову криву L задано параметричним рівнянням $x = b\cos t,\ y = b\sin t,\ z = 3t,$ тому

$$dl = \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2 + (z_t')^2}\,dt\,.$$

Знайдемо відповідні похідні $x_t' = -b\sin t,\ y_t' = b\cos t,\ z_t' = 3.$

Маємо

$$dl = \sqrt{(-b\sin t)^2 + (b\cos t)^2 + (3)^2}\,dt = \sqrt{b^2+9}\,dt\,.$$

Отже,

$$m = \int_L \frac{dl}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \int_0^\pi \frac{\sqrt{b^2+9}dt}{\sqrt{(b\cos t)^2 + (b\sin t)^2 + (3t)^2}} = \sqrt{b^2+9}\int_0^\pi \frac{dt}{\sqrt{b^2+(3t)^2}} =$$

$$= \sqrt{b^2+9}\cdot\frac{1}{3}\ln\left|3t+\sqrt{b^2+9t^2}\right|\Bigg|_0^\pi = \frac{\sqrt{b^2+9}}{3}\left(\ln\left|3\pi+\sqrt{b^2+9\pi^2}\right| - \ln|b|\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{b^2+9}}{3}\ln\left|\frac{3\pi+\sqrt{b^2+9\pi^2}}{b}\right|.$$

Відповідь: $m = \dfrac{\sqrt{b^2+9}}{3}\ln\left|\dfrac{3\pi+\sqrt{b^2+9\pi^2}}{b}\right|$.

Завдання 9. Знайти роботу **A** сили $\vec{F}$ під час переміщення матеріальної точки вздовж кривої L від точки A до точки B:

а) $\vec{F}=(2x+y)\vec{i}+(y-x)\vec{j}$, $L:\ y=2x-1$, $A(0;-1)$, $B(2;3)$;

б) $\vec{F}=y\vec{i}+\dfrac{x}{y}\vec{j}$, $L:\ y=e^{-x}$, $A(0;1)$, $B(-1;e)$;

в) $\vec{F}=(y-x)\vec{i}-x\vec{j}$, $L:\ x^2+y^2=9,\quad (y\geq 0)$, $A(-3;0)$, $B(3;0)$.

<u>*Розв’язування.*</u> Щоб обчислити роботу силового поля $\vec{F}=P\vec{i}+Q\vec{j}$, потрібно згадати фізичний зміст криволінійного інтеграла другого роду, а саме –

$$\mathrm{A}=\int_L Pdx+Qdy\,.$$

а) У нашій задачі $P=2x+y$, $Q=y-x$, інтегрування відбувається вздовж прямої $y=2x-1$ від точки $A(0;-1)$ до точки $B(2;3)$. Отже, маємо

$$\mathrm{A}=\int_{AB}(2x+y)dx+(y-x)dy=\int_{AB}(2x+y)dx+\int_{AB}(y-x)dy=\begin{vmatrix} y=2x-1\\ dy=2dx\\ x\in[0;\,2]\end{vmatrix}=$$

$$=\int_0^2(2x+2x-1)dx+\int_0^2(2x-1-x)2dx=$$

$$=\int_0^2(4x-1)dx+2\int_0^2(x-1)dx=\left(4\cdot\frac{x^2}{2}-x+2\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\right)\Bigg|_0^2=$$

$$=(2\cdot 4-2+4-4)=6.$$

Відповідь: 6.

б) За умовою задачі $P=y$, $Q=\dfrac{x}{y}$, інтегрування відбувається вздовж кривої $y=e^{-x}$ від точки $A(0;1)$ до точки $B(-1;e)$. Отже, маємо

$$\mathrm{A}=\int_{AB}ydx+\frac{x}{y}dy=\int_{AB}ydx+\int_{AB}\frac{x}{y}dy\,.$$

Оскільки для $y = e^{-x}$, $dy = -e^{-x}dx$, тоді

$$A = \int_0^{-1} e^{-x}dx + \int_0^{-1} \frac{x}{e^{-x}}\left(-e^{-x}\right)dx = -e^{-x}\Big|_0^{-1} - \int_0^{-1} x\,dx =$$

$$= -\left(e^1 - e^0\right) - \frac{x^2}{2}\Big|_0^{-1} = -(e-1) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - e.$$

Відповідь: $\frac{1}{2} - e$.

в) За умовою задачі $P = y - x$, $Q = -x$, інтегрування відбувається уздовж верхньої частини кола $x^2 + y^2 = 9$ від точки $A(-3;0)$ до точки $B(3;0)$.

У задачі доцільно перейти до параметричного рівняння кола за формулами $\begin{cases} x = 3\cos t, \\ y = 3\sin t. \end{cases}$

Отже, маємо

$$A = \int_{AB} (y - x)dx - x\,dy = \left| \begin{array}{ll} x = 3\cos t, & dx = -3\sin t\,dt \\ y = 3\sin t, & dy = 3\cos t\,dt \\ x_A = -3, & 3\cos t = -3,\ \cos t = -1,\ t_1 = \pi \\ x_B = 3, & 3\cos t = 3,\quad \cos t = 1,\quad t_2 = 0. \end{array} \right| =$$

$$= \int_\pi^0 (3\sin t - 3\cos t)(-3\sin t\,dt) - 3\cos t \cdot 3\cos t\,dt =$$

$$= \int_\pi^0 \left(-9\sin^2 t + 9\cos t \sin t - 9\cos^2 t\right)dt = \int_\pi^0 \left(-9 + \frac{9}{2}\sin 2t\right)dt =$$

$$= \left(-9t + \frac{9}{2} \cdot \frac{-\cos 2t}{2}\right)\Bigg|_\pi^0 = \left(-0 - \frac{9}{4}\cos 0\right) - \left(-9\pi - \frac{9}{4}\cos 2\pi\right) = 9\pi.$$

Відповідь: 9π.

Завдання 10. Знайти градієнт скалярного поля:

а) $z = x^5 y^3 + x - 2y^3 x$ у точці $A(1;\ 2)$;

б) $u = \ln\left(x^2 + y^2 + z^2 + x - y + 2z\right)$.

<u>*Розв'язування.*</u>

а) Оскільки задана функція залежить від двох змінних, то

$$\operatorname{grad} z = \frac{\partial z}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial z}{\partial y}\vec{j}\ .$$

Знаходимо частинні похідні від функції z:

$$z'_x = \left(x^5 y^3 + x - 2y^3 x\right)'_x = 5x^4 y^3 + 1 - 2y^3,$$

$$z'_y = \left(x^5 y^3 + x - 2y^3 x\right)'_y = x^5 \cdot 3y^2 - 6y^2 x,$$

отримуємо

$$\operatorname{grad}\, z = \left(5x^4 y^3 + 1 - 2y^3\right)\vec{i} + \left(3x^5 y^2 - 6y^2 x\right)\vec{j}\ .$$

Підставляємо координати точки у цей вираз:

$$\operatorname{grad}\, z\Big|_A = (5\cdot 1\cdot 8 + 1 - 16)\vec{i} + (3\cdot 1\cdot 4 - 6\cdot 4\cdot 1)\vec{j} = 25\vec{i} - 12\vec{j}\ .$$

Відповідь: $\operatorname{grad}\, z\Big|_A = 25\vec{i} - 12\vec{j}.$

б) Задана функція залежить від трьох змінних, тому

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}\ .$$

Знайдемо частинні похідні від функції u:

$$u'_x = \left(\ln(x^2 - y^2 + z^2 + x - y + 2z)\right)'_x = \frac{\left(x^2 - y^2 + z^2 + x - y + 2z\right)'_x}{x^2 - y^2 + z^2 + x - y + 2z} =$$

$$= \frac{2x + 1}{x^2 - y^2 + z^2 + x - y + 2z},$$

$$u'_y = \left(\ln(x^2 - y^2 + z^2 + x - y + 2z)\right)'_y = \frac{\left(x^2 - y^2 + z^2 + x - y + 2z\right)'_y}{x^2 - y^2 + z^2 + x - y + 2z} =$$

$$= \frac{-2y - 1}{x^2 - y^2 + z^2 + x - y + 2z},$$

$$u'_z = \left(\ln(x^2 - y^2 + z^2 + x - y + 2z)\right)'_z = \frac{\left(x^2 - y^2 + z^2 + x - y + 2z\right)'_z}{x^2 - y^2 + z^2 + x - y + 2z} =$$

$$= \frac{2z + 2}{x^2 - y^2 + z^2 + x - y + 2z}.$$

Тому

$$\operatorname{grad} u = \frac{(2x+1)\vec{i}}{x^2 - y^2 + z^2 + x - y + 2z} - \frac{(2y+1)\vec{j}}{x^2 - y^2 + z^2 + x - y + 2z} + \frac{(2z+2)\vec{k}}{x^2 - y^2 + z^2 + x - y + 2z} =$$

$$= \frac{(2x+1)\vec{i} - (2y+1)\vec{j} + (2z+2)\vec{k}}{x^2 - y^2 + z^2 + x - y + 2z}.$$

Відповідь: $\operatorname{grad} u = \dfrac{(2x+1)\vec{i} - (2y+1)\vec{j} + (2z+2)\vec{k}}{x^2 - y^2 + z^2 + x - y + 2z}$.

Завдання 11. З'ясувати, чи є векторне поле $\vec{F}$ соленоїдальним і потенціальним, якщо $\vec{F} = \left(z + 2x^3\right)\vec{i} + \left(z + y^3\right)\vec{j} + (x + y + 4z)\vec{k}$.

Розв'язування. Векторне поле $\vec{F} = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$ є потенціальним у деякій області $G \subset \mathrm{R}^3$ тоді і тільки тоді, коли в кожній точці області маємо нульовий ротор:

$$\operatorname{rot}\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = 0,$$

і соленоїдальним тоді і тільки тоді, коли

$$\operatorname{div}\vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0$$

у кожній точці цієї області.

Знайдемо ротор і дивергенцію досліджуваного векторного поля:

$$\operatorname{rot}\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ z + 2x^3 & z + y^3 & x + y + 4z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial(x + y + 4z)}{\partial y} - \frac{\partial\left(z + y^3\right)}{\partial z}\right)\vec{i} -$$

$$-\left(\frac{\partial(x + y + 4z)}{\partial x} - \frac{\partial\left(z + 2x^3\right)}{\partial z}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial\left(z + y^3\right)}{\partial x} - \frac{\partial\left(z + 2x^3\right)}{\partial y}\right)\vec{k} =$$

$$= (1 - 1)\vec{i} - (1 - 1)\vec{j} + 0 \cdot \vec{k} = 0.$$

І далі:

$$\operatorname{div}\vec{F} = \frac{\partial\left(z + 2x^3\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(z + y^3\right)}{\partial y} + \frac{\partial(x + y + 4z)}{\partial z} = 6x^2 + 3y^2 + 4 \neq 0.$$

Оскільки $\operatorname{rot}\vec{F} = 0$, то векторне поле є потенціальним, але воно не є соленоїдальним, бо $\operatorname{div}\vec{F} \neq 0$.

Відповідь: Векторне поле $\vec{F} = \left(z + 2x^3\right)\vec{i} + \left(z + y^3\right)\vec{j} + (x + y + 4z)\vec{k}$ потенціальне, але не соленоїдальне.

Завдання 12. Знайти потік векторного поля $\vec{F}=(3x+xy)\vec{i}-2y\vec{j}+z^2\vec{k}$ через замкнену поверхню $S:\ z=3\sqrt{x^2+y^2}$, $z=10-x^2-y^2$.

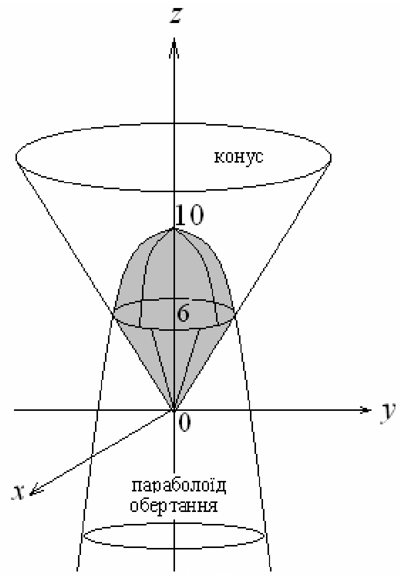


Рис. 16

Розв'язування.

Зображуємо задані поверхні (рис. 16), наперед проаналізувавши рівняння, якими їх описують. Отже, рівняння $z=3\sqrt{x^2+y^2}$ визначає конус з вершиною у точці $O(0;\,0;\,0)$, $z\geq 0$, а рівняння $z=10-x^2-y^2$ задає параболоїд обертання навколо осі Oz з вершиною у точці $(0;\,0;\,10)$, $z\leq 10$. Перетинаючись, конус і параболоїд утворюють замкнену поверхню S.

У випадку замкненої поверхні потік векторного поля $\vec{F}$ зручно знаходити, використовуючи формулу Остроградського-Гаусса:

$$\Pi=\oiint\limits_{S}\left(\vec{F},\vec{n}\right)ds=\iiint\limits_{\Omega}\operatorname{div}\vec{F}dv,$$

де Ω– просторова область, обмежена поверхнею S.

Знайдемо дивергенцію векторного поля $\vec{F}$

$$\operatorname{div}\vec{F}=\frac{\partial(3x+xy)}{\partial x}+\frac{\partial(-2y)}{\partial y}+\frac{\partial\left(z^2\right)}{\partial z}=3+y-2+2z=1+y+2z,$$

тоді

$$\Pi=\iiint\limits_{\Omega}(1+y+2z)dxdydz.$$

Отже, задача зводиться до обчислення потрійного інтеграла за областю Ω від функції $f(x,y,z)=1+y+2z$.

Щоб визначити межі інтегрування, спроектуємо отриману область Ω на площину Oxy. Для цього розв'яжемо систему рівнянь

$$\begin{cases} z = 3\sqrt{x^2 + y^2}, \\ z = 10 - x^2 - y^2, \end{cases}$$

звідки $z = 10 - \dfrac{z^2}{9}$, $z^2 + 9z - 90 = 0$, $z_1 = 6$, $z_2 = -15$.

За умов задачі, очевидно, поверхні перетинаються лише за $z = 6$ по колу $x^2 + y^2 = 4$. Проєкцією D області Ω на площину Oxy є круг з центром у початку координат і радіусом $R = 2$ (рис. 17).

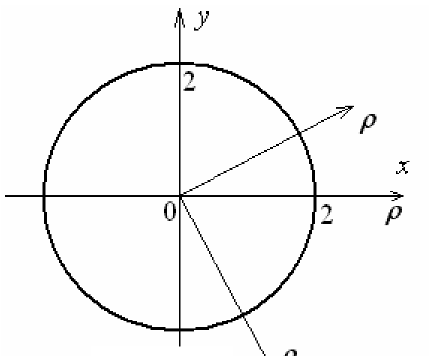


Рис.17

Оскільки рівняння заданих поверхонь містять вираз $x^2 + y^2$ і областю D є круг, то потрійний інтеграл раціонально обчислювати в циліндричній системі координат:

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi, \quad z = z,$$

$$dxdydz = \rho d\rho\, d\varphi\, dz, \text{ звідси}$$

$$\Pi = \iiint\limits_{\Omega_{\rho\varphi}} (1 + \rho\sin\varphi + 2z)\rho\, d\rho\, d\varphi\, dz.$$

Оскільки у циліндричній системі координат $x^2 + y^2 = \rho^2$, тоді рівняння заданих поверхонь набувають вигляду: $z = 3\rho$, $z = 10 - \rho^2$, тоді Враховуючи область D, розставляємо згідно з рис. 16 межі для змінних φ і ρ: $0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 \le \rho \le 2$.

Для визначення меж інтегрування для z слід перетнути фігуру (рис. 16) прямою, паралельною осі Oz. Ця пряма входить у область через поверхню конуса і виходить через поверхню параболоїда, отже, $3\rho \le z \le 10 - \rho^2$.

Переходячи до трикратного інтеграла і розставляючи межі інтегрування, отримуємо

$$\Pi=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^2\rho\,d\rho\int_{3\rho}^{10-\rho^2}(1+\rho\sin\varphi+2z)dz=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^2\rho\,d\rho\left((1+\rho\sin\varphi)z+z^2\right)\Big|_{3\rho}^{10-\rho^2}=$$

$$=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^2\rho\left(10-\rho^2-3\rho+\rho\sin\varphi\left(10-\rho^2-3\rho\right)+\left(10-\rho^2\right)^2-9\rho^2\right)d\rho=$$

$$=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^2\left(\sin\varphi\left(10\rho^2-\rho^4-3\rho^3\right)+\rho^5-30\rho^3-3\rho^2+110\rho\right)d\rho=$$

$$=\int_0^{2\pi}d\varphi\left(\sin\varphi\left(\frac{10\rho^3}{3}-\frac{\rho^5}{5}-\frac{3\rho^4}{4}\right)+\frac{\rho^6}{6}-\frac{30\rho^4}{4}-\frac{3\rho^3}{3}+\frac{110\rho^2}{2}\right)\Bigg|_0^2=$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(\frac{124}{15}\sin\varphi+\frac{308}{3}\right)d\varphi=\left(-\frac{124}{15}\cos\varphi+\frac{308}{3}\varphi\right)\Bigg|_0^{2\pi}=$$

$$=-\frac{124}{15}(\cos 2\pi-\cos 0)+\frac{308}{3}\cdot 2\pi=205\frac{1}{3}\pi\,.$$

Відповідь: $\Pi=205\frac{1}{3}\pi$.

Завдання 13. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a} = y\vec{i} + xz\vec{j} + yz^2\vec{k}$ уздовж контура $\Gamma = \{(x; y; z): z = 9 - 3x^2 - 3y^2, z = x^2 + y^2\}$.

Розв'язування. Зобразимо задані поверхні (рис. 18). Обидві поверхні $z = 9 - 3x^2 - 3y^2$ і $z = x^2 + y^2$ описують параболоїди обертання. Контур Γ, який утворюється в результаті перетину цих параболоїдів, є коло радіусом R в просторі.

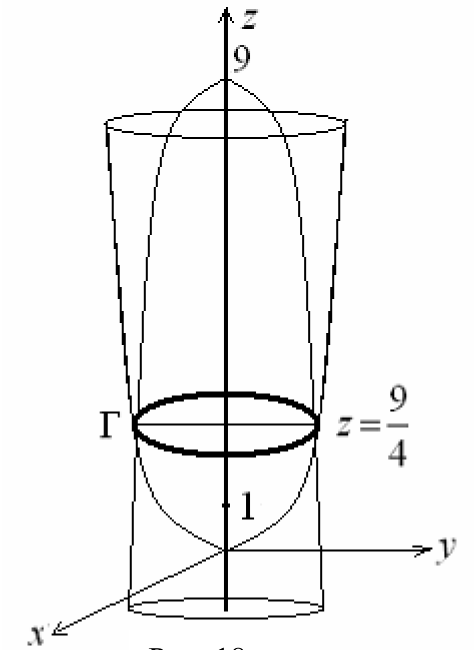


Рис. 18

З'ясуємо за якого значення змінної z параболоїди перетинаються і знайдемо радіус R. Для цього розв'язуємо систему рівнянь

$$\begin{cases} 3(x^2 + y^2) = 9 - z, \\ x^2 + y^2 = z, \end{cases}$$

звідки, $3z = 9 - z$, $4z = 9$, $z = \frac{9}{4}$.

Отже, робимо висновок, що контур Γ – це коло $x^2 + y^2 = \frac{9}{4}$ радіусом $R = \frac{3}{2}$, яке лежить в площині $z = \frac{9}{4}$.

Запишемо параметричні рівняння контура

$$\Gamma: x = \frac{3}{2}\cos t,\ \ y = \frac{3}{2}\sin t,\ \ z = \frac{9}{4},\ \ 0 \le t \le 2\pi.$$

Циркуляція векторного поля $\vec{a} = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$ уздовж замкненого контура Γ обчислюється за формулою

$$Ц = \oint_{\Gamma} \vec{a}\,d\vec{r} = \oint_{\Gamma} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz.$$

Для нашого випадку маємо

$$Ц=\oint\limits_{\Gamma} ydx+xzdy+yz^2dz=$$

$$=\left|\begin{array}{lcr} x=\frac{3}{2}\cos t; & & dx=-\frac{3}{2}\sin t\cdot dt \\ y=\frac{3}{2}\sin t; & & dy=\frac{3}{2}\cos t\cdot dt \\ z=\frac{9}{4}; & 0\le t\le 2\pi & dz=0 \end{array}\right|=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}\left(-\frac{3}{2}\sin t\frac{3}{2}\sin t+\frac{3}{2}\cos t\cdot\frac{9}{4}\cdot\frac{3}{2}\cos t\right)dt=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}\left(-\frac{9}{4}\sin^2 t+\frac{81}{16}\cos^2 t\right)dt=-\frac{9}{4}\int\limits_0^{2\pi}\frac{1-\cos 2t}{2}dt+\frac{81}{16}\int\limits_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2t}{2}dt=$$

$$=-\frac{9}{8}\int\limits_0^{2\pi}(1-\cos 2t)dt+\frac{81}{32}\int\limits_0^{2\pi}(1+\cos 2t)dt=-\frac{9}{8}\left(t-\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{2\pi}+\frac{81}{32}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{2\pi}=$$

$$=-\frac{9}{8}\cdot 2\pi+\frac{81}{32}\cdot 2\pi=-\frac{9}{4}\pi+\frac{81}{16}\pi=\frac{81-36}{16}\pi=\frac{45}{16}\pi=2\frac{13}{16}\pi.$$

Відповідь: $Ц=2\frac{13}{16}\pi$.

Завдання 14. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a}$ уздовж контура Γ:

а) $\vec{a} = (xz + y)\vec{i} + (yz - x)\vec{j} + (x^2 - y^2)\vec{k}$,

$\Gamma = \left\{ (x; y; z): \dfrac{x^2}{36} + \dfrac{y^2}{49} = 1,\ x - 3y + 2z - 6 = 0 \right\}$ (за формулою Стокса);

б) $\vec{a} = 2y\vec{i} - z\vec{j} + x\vec{k}$, $\Gamma = \{(x; y; z): x^2 + y^2 = 1,\ x + y + z = 4\}$

(двома методами: безпосередньо та за формулою Стокса).

Розв'язування.

а) Проаналізуємо рівняння поверхонь, при перетині яких утворюється просторовий контур Γ.

Рівняння $\dfrac{x^2}{36} + \dfrac{y^2}{49} = 1$ описує еліптичний циліндр з параметрами $a = 6$, $b = 7$, а рівняння $x - 3y + 2z - 6 = 0$ визначає площину, рівняння якої у відрізках на осях має вигляді $\dfrac{x}{6} + \dfrac{y}{-2} + \dfrac{z}{3} = 1$.

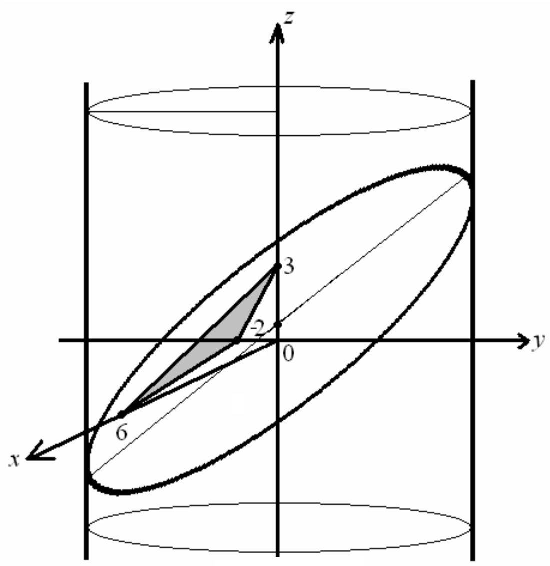


Рис.19

Зобразимо розглядувані поверхні на рис. 19.

При перетині цих поверхонь утворюється контур Γ − еліпс, що лежить у площині $x - 3y + 2z - 6 = 0$, тому за поверхню, що напнули на цей контур візьмемо площину $x - 3y + 2z - 6 = 0$.

Обчислимо циркуляцію векторного поля $\vec{a}$ уздовж контура Γ за формулою Стокса

$$Ц = \iint_{\sigma} \left(\operatorname{rot} \vec{a}, \vec{n} \right) d\sigma .$$

Спочатку знайдемо вектор нормалі $\vec{n}$ до поверхні $\sigma = \{(x;y;z): F(x;y;z)=0\}$ за формулою

$$\vec{n} = \frac{\operatorname{grad} F(x,y,z)}{|\operatorname{grad} F(x,y,z)|} = \frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}\vec{i} + \dfrac{\partial F}{\partial y}\vec{j} + \dfrac{\partial F}{\partial Z}\vec{k}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial F}{\partial z}\right)^2}}.$$

Оскільки в нашому випадку $F(x;y;z) = x - 3y + 2z - 6$, тоді $\dfrac{\partial F}{\partial x} = 1$, $\dfrac{\partial F}{\partial y} = -3$, $\dfrac{\partial F}{\partial z} = 2$, звідки отримаємо

$$\vec{n} = \frac{1\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}}{\sqrt{(1)^2 + (-3)^2 + (2)^2}} = \frac{\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}}{\sqrt{14}} \quad \text{або} \quad \vec{n} = \left\{\frac{1}{\sqrt{14}}; \frac{-3}{\sqrt{14}}; \frac{2}{\sqrt{14}}\right\}.$$

Тепер знайдемо ротор $\vec{a}$

$$\operatorname{rot}\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ xz + y & yz - x & x^2 - y^2 \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i}(-2y - y) - \vec{j}(2x - x) + \vec{k}(-1-1) = -3y\vec{i} - x\vec{j} - 2\vec{k}.$$

Отже

$$\operatorname{rot}\vec{a} = \{-3y; -x; -2\}.$$

Обчислимо скалярний добуток

$$(\operatorname{rot}\vec{a}, \vec{n}) = -3y \cdot \frac{1}{\sqrt{14}} - x \cdot \frac{-3}{\sqrt{14}} - 2 \cdot \frac{2}{\sqrt{14}} = \frac{3x - 3y - 4}{\sqrt{14}},$$

тоді

$$Ц=\iint\limits_{\sigma}\frac{3x-3y-4}{\sqrt{14}}\cdot d\sigma=\left|\begin{array}{c}\sigma: z=-\frac{x}{2}+\frac{3y}{2}+3\\ \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{1}{2},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{3}{2},\\ d\sigma=\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}dxdy=\sqrt{1+\frac{1}{4}+\frac{9}{4}}dxdy=\frac{\sqrt{14}}{2}dxdy\end{array}\right|=$$

$$=\iint\limits_{D_{xy}}\frac{3x-3y-4}{\sqrt{14}}\cdot\frac{\sqrt{14}}{2}dxdy=\frac{1}{2}\iint\limits_{D_{xy}}(3x-3y-4)\cdot dxdy=$$

$$\left|\begin{array}{l}D_{xy}=\{(x,y):\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{49}\le 1\}\,(\text{рис.}20)\\ x=6\rho\cos\varphi,\ y=7\rho\sin\varphi,\\ dxdy=42\rho d\rho d\varphi,\\ \frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{49}=1\to\rho=1,\\ 0\le\rho\le 1,\ 0\le\varphi\le 2\pi\end{array}\right|=$$

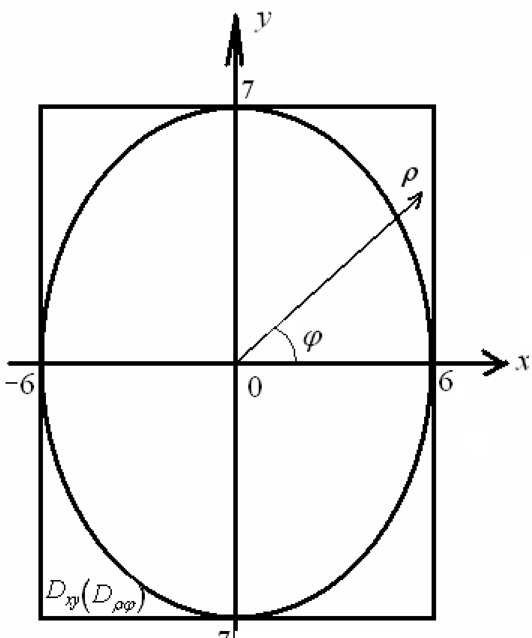


Рис. 20

$$=\frac{1}{2}\iint\limits_{D_{\rho\varphi}}(3\cdot 6\rho\cos\varphi-3\cdot 7\rho\sin\varphi-4)42\rho d\rho d\varphi=$$

$$=21\iint\limits_{D_{\rho\varphi}}\left(18\rho^2\cos\varphi-21\rho^2\sin\varphi-4\rho\right)d\rho d\varphi=$$

$$=21\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1\left(18\rho^2\cos\varphi-21\rho^2\sin\varphi-4\rho\right)d\rho=$$

$$=21\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\left(18\frac{\rho^3}{3}\cos\varphi-21\frac{\rho^3}{3}\sin\varphi-4\frac{\rho^2}{2}\right)\Bigg|_0^1=$$

$$=21\int\limits_0^{2\pi}(6\cos\varphi-7\sin\varphi-2)d\varphi=21(6\sin\varphi+7\cos\varphi-2\varphi)\Big|_0^{2\pi}=21(-2\cdot 2\pi)=-84\pi.$$

Відповідь: $Ц=-84\pi$.

б) Зобразимо на рисунку поверхні, при перетині яких утворюється контур Г. Поверхня $x^2+y^2=1$ представляє собою круговий циліндр одиничного радіуса, твірні якого паралельні осі Oz(рис. 21), а поверхня $x+y+z=4$ – це площина, що перетинає координатні осі в точках (4; 0; 0), (0; 4; 0), (0; 0; 4)(рис. 22) .

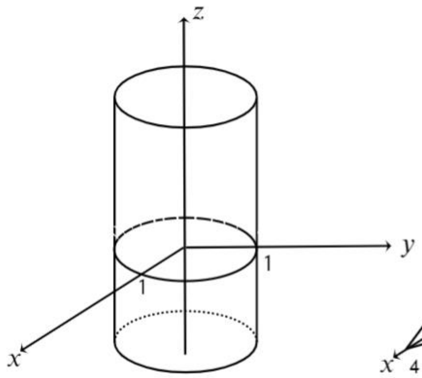


Рис. 21

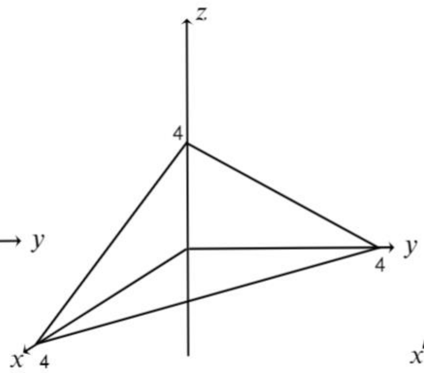


Рис. 22

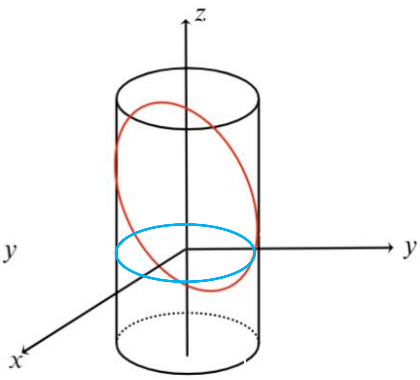


Рис. 23

Площина та циліндр перетинаються по еліпсу (червоний контур), проекцією якого на площину Oxy є коло радіусу $R=1$ (синій контур) (рис. 23).

1) Циркуляція векторного поля $\vec{a}=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$ вздовж замкненого контуру Γ обчислюється за формулою

$$Ц=\oint_{\Gamma}\vec{a}d\vec{r}=\oint_{\Gamma}P(x;y;z)dx+Q(x;y;z)dy+R(x;y;z)dz\,.$$

Задамо контур Г параметрично

$$\Gamma=\{(x;y;z):\ x=\cos t,\ y=\sin t,\ z=4-\cos t-\sin t,\quad 0\le t\le 2\pi\}.$$

Маємо:

$$Ц=\oint_{\Gamma}2ydx-zdy+xdz=\left|\begin{array}{c} x=\cos t,\quad dx=-\sin t dt, \\ y=\sin t,\quad dy=\cos t dt, \\ z=4-\cos t-\sin t,\quad dz=(\sin t-\cos t)dt, \\ 0\le t\le 2\pi \end{array}\right|=$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(2\sin t(-\sin t) - (4 - \cos t - \sin t)\cos t + \cos t(\sin t - \cos t)\right)dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\sin 2t - 4\cos t - 2\sin^2 t\right)dt = \int_0^{2\pi} (\sin 2t - 4\cos t)dt - \int_0^{2\pi} (1 - \cos 2t)dt =$$

$$= \left(-\frac{1}{2}\cos 2t - 4\sin t\right)\Bigg|_0^{2\pi} - \left(t - \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{2\pi} =$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot(\cos 4\pi - \cos 0) - 4(\sin 2\pi - \sin 0) - \left(2\pi - \frac{1}{2}(\sin 4\pi - \sin 0)\right) = -2\pi .$$

2) Знайдемо циркуляцію заданого векторного поля уздовж розглядуваного контуру за формулою Стокса:

$$Ц = \iint_\sigma (\operatorname{rot}\vec{a}, \vec{n})d\sigma ,$$

де $\sigma = \{(x; y; z) : F(x; y; z) = 0\}$ – поверхня, яку напнули на контур Γ, а $\vec{n}$ – вектор нормалі до цієї поверхні, який знаходять за формулою

$$\vec{n} = \frac{\operatorname{grad} F(x, y, z)}{|\operatorname{grad} F(x, y, z)|} = \frac{\frac{\partial F}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial F}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial F}{\partial Z}\vec{k}}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}} .$$

Враховуючи, що

$$F(x; y; z) = x + y + z - 4 \text{ і } \frac{\partial F}{\partial x} = 1,\ \frac{\partial F}{\partial y} = 1,\ \frac{\partial F}{\partial z} = 1,$$

отримуємо

$$\vec{n} = \frac{\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{(1)^2 + (1)^2 + (1)^2}} = \frac{\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{3}} \text{ або } \vec{n} = \left\{\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right\}.$$

Знайдемо ротор вектора $\vec{a}$

$$\operatorname{rot}\vec{a}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ 2y & -z & x\end{vmatrix}=$$

$$=\vec{i}\left(\frac{\partial(x)}{\partial y}-\frac{\partial(-z)}{\partial z}\right)-\vec{j}\left(\frac{\partial(x)}{\partial x}-\frac{\partial(2y)}{\partial z}\right)+\vec{k}\left(\frac{\partial(-z)}{\partial x}-\frac{\partial(2y)}{\partial y}\right)=$$

$$=\vec{i}(0+1)-\vec{j}(1-0)+\vec{k}(0-2)=\vec{i}-\vec{j}-2\vec{k},$$

отже,

$$\operatorname{rot}\vec{a}=\{1;-1;-2\}.$$

Обчислюємо скалярний добуток

$$(\operatorname{rot}\vec{a},\vec{n})=1\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}-1\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}-2\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{1-1-2}{\sqrt{3}}=\frac{-2}{\sqrt{3}}.$$

Тепер знайдемо $d\sigma$, беручи до уваги, що

$$\sigma=\{(x;y;z): z=4-x-y\} \quad \text{і} \quad \frac{\partial z}{\partial x}=-1, \quad \frac{\partial z}{\partial y}=-1,$$

звідки

$$d\sigma=\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}dxdy=\sqrt{1+(-1)^2+(-1)^2}dxdy=\sqrt{1+1+1}dxdy=\sqrt{3}dxdy.$$

Тоді, за формулою Стокса, маємо

$$Ц=\iint\limits_{\sigma}(\operatorname{rot}\vec{a},\vec{n})d\sigma=\iint\limits_{D_{xy}}\frac{-2}{\sqrt{3}}\cdot\sqrt{3}dxdy=-2\iint\limits_{D_{xy}}dxdy.$$

Оскільки область D_{xy}, в яку проектується частина площини σ, обмежена колом $x^2 + y^2 = 1$ (рис. 23), тоді згідно з геометричним змістом подвійного інтеграла:

$$\iint\limits_{D_{xy}} dxdy = S_D .$$

Враховуючи, що площа круга дорівнює πR^2, за $R = 1$ отримаємо

$$Ц = -2\iint\limits_{D_{xy}} dxdy = -2\pi.$$

Зауважимо, що подвійний інтеграл можна було обчислити в інший спосіб, за допомогою полярної системи координат:

$$Ц = -2\iint\limits_{D_{xy}} dxdy = \left| \begin{array}{c} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ dxdy = \rho d\rho d\varphi \\ 0 \le \varphi \le 2\pi, \quad 0 \le \rho \le 1, \end{array} \right| = -2\iint\limits_{D_{\rho\varphi}} \rho d\rho d\varphi = -2\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho d\rho =$$

$$= -2\int_0^{2\pi} d\varphi \left(\frac{\rho^2}{2} \right) \Bigg|_0^1 = -\int_0^{2\pi} d\varphi = -(\varphi) \Big|_0^{2\pi} = -2\pi.$$

Відповідь: $Ц = -2\pi$.

4. ВАРІАНТИ ЗАВДАНЬ РОЗРАХУНКОВОЇ РОБОТИ

Варіант 1

1. На площині Oxy побудувати область інтегрування та змінити порядок інтегрування в інтегралах:

а) $\int\limits_{-2}^{-1} dy \int\limits_{-\sqrt{2+y}}^{0} f(x,y)dx + \int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{-\sqrt{-y}}^{0} f(x,y)dx$;

б) $\int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{x}^{2-x^2} f(x,y)dy$.

2. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_{D} \left(12x^2y^2 + 16x^3y^3\right)dxdy,$ де D – область, обмежена лініями $x=1,\ y=x^2,\ y=-\sqrt{x}$.

3. Обчислити площу області, обмеженої лініями:

а) $y=\dfrac{3}{x},\quad y=4e^x,\quad y=3,\quad y=4$;

б) $y^2-2y+x^2=0,\ y^2-4y+x^2=0,\ y=\dfrac{x}{\sqrt{3}},\ y=\sqrt{3}x$.

4. Знайти масу пластинки D, обмеженої кривими $x=1,\ y=0,\ y^2=4x$, $(y \ge 0)$, із заданою поверхневою густиною $\mu(x,y)=7x^2+y$.

5. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint\limits_{V} 2y^2e^{xy}\,dxdydz$, де V – область, обмежена площинами $x=0,\quad y=1,\quad y=x\ ,\ z=0,\quad z=1.$

6. Обчислити об’єм тіла, обмеженого поверхнями:

а) $x^2+y^2=y,\quad x^2+y^2=4y,\quad z=\sqrt{x^2+y^2},\quad z=0$;

б) $z=\sqrt{9-x^2-y^2},\quad \dfrac{9z}{2}=x^2+y^2$.

7. Обчислити масу тіла, обмеженого поверхнями

$64\left(x^2+y^2\right)=z^2,\ (x\ge 0,\ y\ge 0),\ x^2+y^2=4,\ (x\ge 0,\ y\ge 0),\ y=0,\ z=0,$

якщо об’ємна густина $\mu(x,y,z)=\dfrac{5}{4}\left(x^2+y^2\right)$.

8. Знайти масу частини кривої $L=\{(x;y):\ x=2\cos t,\ y=3\sin t,\ 0\le t\le\pi\}$, якщо лінійна густина матеріалу $\mu(x,y)=x$.

9. Знайти роботу сили $\vec{F}=\left(x^2-2y\right)\vec{i}+\left(y^2-2x\right)\vec{j}$ під час переміщення матеріальної точки вздовж лінії L від точки M до точки N, якщо $L-$ відрізок MN, де $M(-4;0)$, $N(0;2)$.

10. Знайти градієнт $\operatorname{grad} u$ скалярного поля:

а) $u=3x^2+4y^5-2xy+5x-3y$;

б) $u=\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3$ у точці $M_0(1;2;-2)$

11. З'ясувати, чи є векторне поле $\vec{a}$ соленоїдальним і потенціальним, якщо $\vec{a}=(3y-5x)\vec{i}+(6x+5y)\vec{j}+(4z-xy+4)\vec{k}$.

12. Знайти потік векторного поля $\vec{F}$ через замкнену поверхню S (нормаль зовнішня):

а) $\vec{F}=\left(e^z+2x+y\right)\vec{i}+e^x\vec{j}+e^y\vec{k}$,

$S:\ x+y+z=1,\quad x=0,\quad y=0,\quad z=0$;

б) $\vec{F}=(x+z)\vec{i}+(z+y)\vec{k}$,

$S:\ x^2+y^2=9,\quad z=x,\quad z=0\ \ (z\ge 0)$.

13. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a}=\left(x^2-y\right)\vec{i}+x\vec{j}+\vec{k}$ уздовж контура $\Gamma=\left\{(x;y;z):\quad x^2+y^2=1,\ z=1\right\}$.

14. Використовуючи формулу Стокса, знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a}=xy\vec{i}+yz\vec{j}+zx\vec{k}$ уздовж контура $\Gamma=\left\{(x;y;z):\quad x^2+y^2=9,\ x+y+z=1\right\}$.

Варіант 2

1. На площині Oxy побудувати область інтегрування та змінити порядок інтегрування в інтегралах:

а) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{-\sqrt{y}}^{0} f(x,y)dx + \int\limits_1^{\sqrt{2}} dy \int\limits_{-\sqrt{2-y^2}}^{0} f(x,y)dx$;

б) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{y}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx$.

2. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D \left(9x^2y^2 + 48x^3y^3\right)dxdy$, де D – область, обмежена лініями $x=1,\ y=-x^2,\ y=\sqrt{x}$.

3. Обчислити площу області, обмеженої лініями:

а) $6y=-x^2, \quad x^2+y^2=72 \quad (y \le 0)$;

б) $x^2-4x+y^2=0,\ x^2-8x+y^2=0,\ y=0,\ y=\dfrac{x}{\sqrt{3}}$.

4. Знайти масу пластинки D, обмеженої кривими

$$x^2+y^2=1,\ x^2+y^2=4,\ y=0,\ x=0,\ (x \ge 0,\ y \ge 0),$$

із заданою поверхневою густиною $\mu(x,y)=\dfrac{x+y}{x^2+y^2}$.

5. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint\limits_V x^2 z \sin(xyz)dxdydz$, де V – область, обмежена площинами $x=2, \quad y=\pi, \quad z=1, \quad x=0, \quad y=0, \quad z=0$.

6. Обчислити об’єм тіла, обмеженого поверхнями:

а) $x^2+y^2=4\sqrt{2}y, \quad z=x^2+y^2-16, \quad z=0, \quad (z \ge 0)$;

б) $z=\dfrac{15\sqrt{x^2+y^2}}{2}, \quad z=\dfrac{17}{2}-x^2-y^2$.

7. Обчислити масу тіла, обмеженого поверхнями

$x^2+y^2+z^2=4, \quad x^2+y^2=1, \quad (x^2+y^2 \le 1), \quad x=0\ (x \ge 0,\ y \ge 0)$, якщо об’ємна густина $\mu(x,y,z)=4|z|$.

8. Знайти масу частини кривої $L = \{(x; y):\ y = 2x - 8\}$ від точки $A(0;-8)$ до точки $B(4;0)$, якщо лінійна густина розподілу маси $\mu(x, y) = x^2 y^2$.

9. Знайти роботу сили $\vec{F} = (x^2 + 2y)\vec{i} + (y^2 + 2x)\vec{j}$ під час переміщення матеріальної точки вздовж лінії L від точки M до точки N, якщо L визначається рівнянням $y = 2 - \dfrac{x^2}{8}$, а $M(-4;\ 0)$, $N(0;\ 2)$.

10. Знайти градієнт $\operatorname{grad} u$ скалярного поля:

а) $u = 2x^2 y - 4yx^3 + 5y - 2x - 1;$

б) $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ у точці $M_0(-1;\ 2;\ 2)$.

11. З'ясувати, чи є векторне поле $\vec{a}$ соленоїдальним і потенціальним, якщо $\vec{a} = (\cos y + z^2)\vec{i} + (\sin x - 4z)\vec{j} + (x^2 - y)\vec{k}$.

12. Знайти потік векторного поля $\vec{F}$ через замкнену поверхню S (нормаль зовнішня):

а) $\vec{F} = (3z^2 + x)\vec{i} + (e^x - 2y)\vec{j} + (2z - xy)\vec{k}$,

$S:\ x^2 + y^2 = z^2,\quad z = 1,\quad z = 4.;$

б) $\vec{F} = x^2\vec{i} + x\vec{j} + xz\vec{k}$,

$S:\ z = x^2 + y^2,\quad z = 1,\quad x = 0,\ \ y = 0$ (*I октант*).

13. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a} = xz\,\vec{i} - \vec{j} + y\vec{k}$ уздовж контура $\Gamma = \{(x; y; z):\quad z = 5(x^2 + y^2) - 1,\ \ z = 4\}$.

14. Використовуючи формулу Стокса, знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a} = x\,\vec{i} + yz\,\vec{j} + x\vec{k}$ уздовж контура $\Gamma = \{(x; y; z):\quad x^2 + y^2 = 1,\quad x + y + z = 1\}$.

Варіант 3

1. На площині Oxy побудувати область інтегрування та змінити порядок інтегрування в інтегралах:

а) $\int_0^1 dy \int_0^y f(x,y)dx + \int_1^{\sqrt{2}} dy \int_0^{\sqrt{2-y^2}} f(x,y)dx$;

б) $\int_{-2}^{1} dx \int_{x^2}^{2-x} f(x,y)dy$.

2. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D \left(36x^2y^2 - 96x^3y^3\right)dxdy$, де D – область, обмежена лініями $x=1,\ y=-x^3,\ y=\sqrt[3]{x}$.

3. Обчислити площу області, обмеженої лініями:

а) $x=\sqrt{36-y^2}, \quad x=6-\sqrt{36-y^2}$;

б) $y^2-6y+x^2=0,\ y^2-8y+x^2=0,\ y=\dfrac{x}{\sqrt{3}},\ y=\sqrt{3}\,x$.

4. Знайти масу пластинки D, обмеженої кривими $x=1,\ y=0,\ y^2=4x,\ (y\ge 0)$ із заданою поверхневою густиною $\mu(x,y)=\dfrac{7x^2}{2}+5y$.

5. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint\limits_V y^2 ch(2xy)dxdydz$, де V – область, обмежена поверхнями $x=0, \quad y=-2, \quad y=4x, \quad z=0, \quad z=2.$

6. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями:

а) $x^2+y^2+4x=0, \quad z=8-y^2, \quad z=0$;

б) $z=\sqrt{4-x^2-y^2}, \quad z=\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{255}}$.

7. Обчислити масу тіла, обмеженого поверхнями $x^2+y^2=1, \quad x^2+y^2=2z, \quad x=0, \quad y=0, \quad z=0, (x\ge 0,\ y\ge 0)$, якщо об'ємна густина $\mu(x,y,z)=10x$.

8. Знайти масу частини кривої $L = \{(x; y; z):\ x = 4t,\ y = 3\sin t,\ z = 3\cos t\}$, якщо $0 \le t \le \pi$ та лінійна густина розподілу маси $\mu(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)$.

9. Знайти роботу сили $\vec{F} = x^3\vec{i} - y^3\vec{j}$ під час переміщення матеріальної точки вздовж лінії L від точки M до точки N, якщо L визначається рівнянням $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\sin t \end{cases}$, а $M(2;\ 0)$, $N(0;\ 2)$.

10. Знайти градієнт $\operatorname{grad} u$ скалярного поля:

а) $u = 2x^5y^2 + 3xy + x - y^2x + 1$;

б) $u = x + y - z + \ln(z^2 + y^2)$ у точці $M_0(-1;-2;1)$.

11. З'ясувати, чи є векторне поле $\vec{a}$ соленоїдальним і потенціальним, якщо $\vec{a} = (x - y)\vec{i} + (2x + y)\vec{j} + (x^2 + 2z + 4)\vec{k}$.

12. Знайти потік векторного поля $\vec{F}$ через замкнену поверхню S (нормаль зовнішня):

а) $\vec{F} = (\ln y + 7x)\vec{i} + (\sin z - 2y)\vec{j} + (e^y - 2z)\vec{k}$,

$S:\ x^2 + y^2 + z^2 = 2x + 2y + 2z - 2$;

б) $\vec{F} = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} + z\vec{k}$,

$S:\ y = x^2,\ y = 4x^2,\quad y = 1,\quad z = y,\quad z = 0,\ (x \ge 0)$.

13. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a} = yz\vec{i} + 2xz\vec{j} + xy\vec{k}$ уздовж контура $\Gamma = \{(x; y; z):\quad x^2 + y^2 + z^2 = 25,\quad x^2 + y^2 = 9\quad (z > 0)\}$.

14. Використовуючи формулу Стокса, знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a} = -3z\vec{i} + y^2\vec{j} + 2y\vec{k}$ уздовж контура $\Gamma = \{(x; y; z):\quad x^2 + y^2 = 4,\quad x - 3y - 2z = 1\}$.

Варіант 4

1. На площині Oxy побудувати область інтегрування та змінити порядок інтегрування в інтегралах:

а) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{\sqrt{y}} f(x,y)dx + \int\limits_1^2 dy \int\limits_0^{\sqrt{2-y}} f(x,y)dx$;

б) $\int\limits_0^3 dx \int\limits_{3-x}^{\sqrt{9-x^2}} f(x,y)dy$.

2. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D \left(18x^2y^2 + 32x^3y^3\right)dxdy$, де D – область, обмежена лініями $x=1,\ y=x^3,\ y=-\sqrt[3]{x}$.

3. Обчислити площу області, обмеженої лініями:

а) $x = 8 - y^2, \quad x = -2y$;

б) $x^2 - 2x + y^2 = 0,\ x^2 - 4x + y^2 = 0,\ y = 0,\ y = x$.

4. Знайти масу пластинки D, обмеженої кривими

$$x^2 + y^2 = 9,\ x^2 + y^2 = 16,\ y = 0,\ x = 0,\ (x \ge 0,\ y \ge 0)$$

із заданою поверхневою густиною $\mu(x,y) = \dfrac{2x+5y}{x^2+y^2}$.

5. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint\limits_V 8y^2ze^{2xyz}dxdydz$, де V – область, обмежена площинами $x=-1, \quad y=2, \quad z=1, \quad x=0, \quad y=0, \quad z=0.$

6. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями:

а) $x^2 + y^2 = 7x, \quad x^2 + y^2 = 10x, \quad z = \sqrt{x^2+y^2}, \quad z = 0,\ y = 0,\ (y \le 0)$;

б) $z = \sqrt{64 - x^2 - y^2}, \quad z = 1, \quad x^2 + y^2 = 60$ (внутрішня частина циліндра);

7. Обчислити масу тіла, обмеженого поверхнями

$x^2 + y^2 = \dfrac{16}{49}z^2,\ x^2 + y^2 = \dfrac{4}{7}z,\ x = 0, \quad y = 0, (x \ge 0,\ y \ge 0)$, якщо

об'ємна густина $\mu(x,y,z) = 80yz$.

8. Знайти масу частини кривої $L=\left\{(x;y):\ y=\sqrt{x-x^2}-\arccos\sqrt{x}\right\}$ при $0\le x\le\dfrac{1}{4}$, якщо лінійна густина розподілу маси $\mu(x)=\sqrt{x}+3x+1$.

9. Знайти роботу сили $\vec{F}=\left(xy-y^2\right)\vec{i}+x\vec{j}$ під час переміщення матеріальної точки вздовж лінії L від точки M до точки N, якщо L визначається рівнянням $y=2x^2$, а $M(0;\ 0)$, $N(1;\ 2)$.

10. Знайти градієнт $\operatorname{grad} u$ скалярного поля:

а) $u=3x^2y^3+2xy-y^4x+2y-3$;

б) $u=2x+y^2z-\sqrt{xy+z^2}$ у точці $M_0(0;-3;2)$.

11. З'ясувати, чи є векторне поле $\vec{a}$ соленоїдальним і потенціальним, якщо $\vec{a}=(x+2)\vec{i}+(y-8)\vec{j}+(z+6)\vec{k}$.

12. Знайти потік векторного поля $\vec{F}$ через замкнену поверхню S (нормаль зовнішня):

а) $\vec{F}=(\cos z+3x)\vec{i}+(x-2y)\vec{j}+\left(3z+y^2\right)\vec{k}$,

$S:\ 36(x^2+y^2)=z^2,\quad z=6$;

б) $\vec{F}=3x\vec{i}-z\vec{j}$,

$S: z=6-x^2-y^2,\quad z^2=x^2+y^2,\ (z\ge 0)$.

13. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a}=(x-y)\vec{i}+x\vec{j}-z\vec{k}$ уздовж контура $\Gamma=\left\{(x;y;z):\quad x^2+y^2=1,\quad z=5\right\}$.

14. Використовуючи формулу Стокса, знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a}=2y\vec{i}+5z\vec{j}+3x\vec{k}$ уздовж контура

$\Gamma\left\{(x;y;z):2\left(x^2+y^2\right)=1,\ x+y+z=3\right\}$.

Варіант 5

1. На площині Oxy побудувати область інтегрування та змінити порядок інтегрування в інтегралах:

а) $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{-1} dx \int\limits_{-\sqrt{2-x^2}}^{0} f(x,y)dy + \int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{x}^{0} f(x,y)dy$;

б) $\int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{0} f(x,y)dy$.

2. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D \left(27x^2y^2 + 48x^3y^3\right)dxdy$, де D – область, обмежена лініями $x=1,\ y=x^2,\ y=-\sqrt[3]{x}$.

3. Обчислити площу області, обмеженої лініями:

а) $y=\dfrac{3}{x}, \quad y=8e^x, \quad y=3, \quad y=8$;

б) $y^2-8y+x^2=0,\ y^2-10y+x^2=0,\ y=\dfrac{x}{\sqrt{3}},\ y=\sqrt{3}x$.

4. Знайти масу пластинки D, обмеженої кривими

$$x=2,\ y=0,\ y^2=2x\ (y\ge 0),$$

із заданою поверхневою густиною $\mu(x,y)=\dfrac{7}{8}x^2+2y$.

5. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint\limits_V x^2 sh(3xy)dxdydz$, де V – область, обмежена площинами $x=1, \quad y=2x, \quad y=0, \quad z=0, \quad z=36$.

6. Обчислити об’єм тіла, обмеженого поверхнями:

а) $x^2+y^2=8\sqrt{2}x, \quad z=x^2+y^2-64, \quad z=0, \quad (z\ge 0)$;

б) $z=\sqrt{\dfrac{16}{9}-x^2-y^2}, \quad 2z=x^2+y^2$.

7. Обчислити масу тіла, обмеженого поверхнями $x^2+y^2+z^2=1,\quad x^2+y^2=4z^2,\quad x=0,\quad y=0,\ (x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0)$, якщо об'ємна густина $\mu(x,y,z)=20z$.

8. Знайти масу частини кривої $L=\{(x;y):\ y=x^2\}$ від точки $A(0;0)$ до точки $B(1;1)$, якщо лінійна густина розподілу маси $\mu(x,y)=x$.

9. Знайти роботу сили $\vec{F}=\left(x^2+2y\right)\vec{i}+\left(y^2+2x\right)\vec{j}$ під час переміщення матеріальної точки вздовж лінії L від точки M до точки N, якщо L – відрізок MN, де $M(-4;\,0),\quad N(0;\,2)$.

10. Знайти градієнт $\operatorname{grad} u$ скалярного поля:

а) $u=x^3y^5+2xy^3-3x+5y-2$;

б) $u=\sqrt{x^2+y^2}-3zx^2\cos y$ в точці $M_0(3;0;-4)$.

11. З'ясувати, чи є векторне поле $\vec{a}$ соленоїдальним і потенціальним, якщо $\vec{a}=(3x+2y)\vec{i}+(5x-2y)\vec{j}+\left(3z-y^2-3\right)\vec{k}$.

12. Знайти потік векторного поля $\vec{F}$ через замкнену поверхню S (нормаль зовнішня):

а) $\vec{F}=\left(e^{-z}-x\right)\vec{i}+(xz+3y)\vec{j}+(z+x^2)\vec{k}$,

$S:\ 2x+y+z=2,\quad x=0,\quad y=0,\quad z=0;$

б) $\vec{F}=x^2\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$,

$S:\ x^2+y^2=9,\quad z=x,\quad z=0\ \ (z\ge 0)$.

13. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a}=y\vec{i}-x\vec{j}+z^2\vec{k}$ уздовж контура $\Gamma=\left\{(x;y;z):\quad z=3\left(x^2+y^2\right)+1,\quad z=4\right\}$.

14. Використовуючи формулу Стокса, знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a}=4x\vec{i}-yz\vec{j}+x\vec{k}$ уздовж контура $\Gamma=\left\{(x;y;z):\quad x^2+y^2=1,\ x+y+z=1\right\}$.

Варіант 6

1. На площині Oxy побудувати область інтегрування та змінити порядок інтегрування в інтегралах:

а) $\int\limits_0^{1/\sqrt{2}} dy \int\limits_0^{\arcsin y} f(x,y)dx + \int\limits_{1/\sqrt{2}}^{1} dy \int\limits_0^{\arccos y} f(x,y)dx$;

б) $\int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_{x^2}^{4} f(x,y)dy$.

2. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D \left(18x^2y^2 + 32x^3y^3\right)dxdy$,

де D – область, обмежена лініями $x=1,\ y=-x^2,\ y=\sqrt[3]{x}$.

3. Обчислити площу області, обмеженої лініями:

а) $y=\dfrac{1}{2x}, \quad y=\dfrac{\sqrt{x}}{2}, \quad x=16$;

б) $x^2-4x+y^2=0,\ x^2-8x+y^2=0,\ y=0,\ y=x$.

4. Знайти масу пластинки D, обмеженої кривими

$$x^2+y^2=1,\ x^2+y^2=16,\ x=0,\ y=0,\ (x\ge 0,\ y\ge 0),$$

із заданою поверхневою густиною $\mu(x,y)=\dfrac{x+y}{x^2+y^2}$.

5. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint\limits_V y^2 z\cos(xyz)dxdydz$, де V – область, обмежена площинами $x=1, \quad y=\pi, \quad z=2, \quad x=0, \quad y=0, \quad z=0$.

6. Обчислити об’єм тіла, обмеженого поверхнями:

а) $x^2+y^2=2y, \quad z=\dfrac{9}{4}-x^2, \quad z=0$;

б) $z=3\sqrt{x^2+y^2}, \quad z=10-x^2-y^2$.

7. Обчислити масу тіла, обмеженого поверхнями $36\left(x^2+y^2\right)=z^2,\quad x^2+y^2=1,\quad x=0,\quad z=0,\left(x\geq 0,\, z\geq 0\right),$ якщо об'ємна густина $\mu(x,y,z)=\frac{5}{6}\left(x^2+y^2\right).$

8. Знайти масу кривої $L: y=3x+6$ від точки $A(-2;0)$ до точки $B(0;6)$, якщо лінійна густина розподілу маси $\mu(x,y)=x^2y$.

9. Знайти роботу сили $\vec{F}=(x+y)\vec{i}+(x-y)\vec{j}$ під час переміщення вздовж лінії L від точки M до точки N, якщо L визначається рівнянням $x=\cos t,\quad y=3\sin t$, а $M(1;0),\quad N(0;3)$.

10. Знайти градієнт $\operatorname{grad} u$ скалярного поля:

а) $u=x^4+y^3+3xy-5y^2x+2$;

б) $u=\sin xy+e^{zx}+x^2z$ у точці $M_0(1;-1;2)$.

11. З'ясувати, чи є векторне поле $\vec{a}$ соленоїдальним і потенціальним, якщо $\vec{a}=\left(y^2-z^2\right)\vec{i}+(z+\cos x)\vec{j}+(x-4y)\vec{k}$.

12. Знайти потік векторного поля $\vec{F}$ через замкнену поверхню S (нормаль зовнішня):

а) $\vec{F}=(6x-\cos y)\vec{i}-\left(e^x+z\right)\vec{j}-(2y+3z)\vec{k}$,

$S:\ x^2+y^2=z^2,\quad z=1,\quad z=2$;

б) $\vec{F}=x\vec{i}-(x+2y)\vec{j}+y\vec{k}$,

$S:\ x^2+y^2=1,\quad x+2y+3z=6,\quad z=0$.

13. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a}=yz\,\vec{i}+2xz\,\vec{j}+y^2\vec{k}$ уздовж контура $\Gamma=\left\{(x;y;z):\quad x^2+y^2+z^2=25,\quad x^2+y^2=16\quad (z>0)\right\}.$

14. Використовуючи формулу Стокса, знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a}=(2-xy)\,\vec{i}-yz\,\vec{j}-xz\vec{k}$ уздовж контура $\Gamma=\left\{(x;y;z):\quad x^2+y^2=4,\quad x+y+z=1\right\}.$

Варіант 7

1. На площині Oxy побудувати область інтегрування та змінити порядок інтегрування в інтегралах:

а) $\int\limits_{-2}^{-1} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{2+y}} f(x,y)dx + \int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{-y}} f(x,y)dx$;

б) $\int\limits_{-2}^{0} dy \int\limits_{y^2-4}^{0} f(x,y)dx$.

2. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D \left(18x^2y^2 + 32x^3y^3\right)dxdy$,

де D – область, обмежена лініями $x=1,\ y=x^3,\ y=-\sqrt{x}$.

3. Обчислити площу області, обмеженої лініями:

а) $x = 5 - y^2, \quad x = -4y$;

б) $y^2 - 4y + x^2 = 0,\ y^2 - 6y + x^2 = 0,\ y = x,\ x = 0$.

4. Знайти масу пластинки D, обмеженої кривими

$$x = 2,\ y = 0,\ y^2 = \frac{x}{2},\ (y \ge 0),$$

із заданою поверхневою густиною $\mu(x,y) = \dfrac{7x^2}{2} + 6y$.

5. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint\limits_V y^2 \cos\left(\dfrac{\pi}{4}xy\right)dxdydz$, де V – область, обмежена площинами

$$x=0, \quad y=-1, \quad y=\frac{x}{2}, \quad z=0, \quad z=-\pi^2.$$

6. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями:

а) $x^2 + y^2 = 5y, \quad x^2 + y^2 = 8y, \quad z = \sqrt{x^2+y^2}, \quad z = 0$;

б) $z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}, \quad z = \sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{99}}$.

7. Обчислити масу тіла, обмеженого поверхнями $x^2 + y^2 + z^2 = 16, \quad x^2 + y^2 = 4, \quad \left(x^2 + y^2 \le 4\right)$, якщо об'ємна густина $\mu(x,y,z) = 2|z|$.

8. Знайти масу кривої $L: y = x^3$ від точки $A(-1;-1)$ до точки $B(1;1)$, якщо лінійна густина розподілу маси $\mu(x, y) = y$.

9. Знайти роботу сили $\vec{F} = (xy - x)\vec{i} + \frac{x^2}{2}\vec{j}$ під час переміщення вздовж лінії L від точки M до точки N, якщо L визначається рівнянням $y = 2\sqrt{x}$, а $M(0; 0)$, $N(1; 2)$.

10. Знайти градієнт $\operatorname{grad} u$ скалярного поля:

а) $u = -3x^2y^4 + xy + 2y^3x - 1$;

б) $u = \sqrt{xyz} + \cos(x - y) + z^2$ у точці $M_0(2;-2;-1)$.

11. З'ясувати, чи є векторне поле $\vec{a}$ соленоїдальним і потенціальним, якщо $\vec{a} = (3x - 4y)\vec{i} + (3y - x)\vec{j} + (xy - 2z + 4)\vec{k}$.

12. Знайти потік векторного поля $\vec{F}$ через замкнену поверхню S (нормаль зовнішня):

а) $\vec{F} = (4x - 2y^2)\vec{i} + (\ln z - 4y)\vec{j} + (x + \frac{3z}{4})\vec{k}$,

$S:\ x^2 + y^2 + z^2 = 2x + 3$;

б) $\vec{F} = 3x\vec{i} + z\vec{j} - y\vec{k}$,

$S:\ z = 4 - 2(x^2 + y^2),\quad z = 2(x^2 + y^2)$.

13. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a} = y\vec{i} + (1 - x)\vec{j} - z\vec{k}$ уздовж контура $\Gamma = \{(x; y; z):\ \ x^2 + y^2 + z^2 = 4,\ \ x^2 + y^2 = 1\ \ (z > 0)\}$.

14. Використовуючи формулу Стокса, знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a} = 3z\vec{i} - 2y\vec{j} + 2y\vec{k}$ уздовж контура $\Gamma = \{(x; y; z):\ \ x^2 + y^2 = 4,\ \ 2x - 3y - 2z = 1\}$.

Варіант 8

1. На площині Oxy побудувати область інтегрування та змінити порядок інтегрування в інтегралах:

а) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{-\sqrt{y}}^{0} f(x,y)dx + \int\limits_1^e dy \int\limits_{-1}^{-\ln y} f(x,y)dx;$

б) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x^2} f(x,y)dy.$

2. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D \left(27x^2y^2 + 48x^3y^3\right)dxdy,$

де D – область, обмежена лініями $x=1,\ y=-x^3,\ y=\sqrt{x}$.

3. Обчислити площу області, обмеженої лініями:

а) $x^2+y^2=12,\quad x^2=-\sqrt{6}y\quad (y\le 0);$

б) $x^2-2x+y^2=0,\ x^2-10x+y^2=0,\ y=0,\ y=\sqrt{3}x.$

4. Знайти масу пластинки D, обмеженої кривими

$$x^2+y^2=4,\ x^2+y^2=25,\ y=0,\ x=0,\ (x\ge 0,\ y\le 0),$$

із заданою поверхневою густиною $\mu(x,y)=\dfrac{2x-3y}{x^2+y^2}$.

5. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint\limits_V x^2 z \sin\dfrac{xyz}{4}\,dxdydz$, де V – область, обмежена площинами $x=1,\quad y=2\pi,\quad z=4,\quad x=0,\quad y=0,\quad z=0.$

6. Обчислити об’єм тіла, обмеженого поверхнями:

а) $x^2+y^2+2\sqrt{2}x=0,\quad z=x^2+y^2-4,\quad z=0,\quad (z\ge 0);$

б) $z=\sqrt{100-x^2-y^2},\quad z=6,\quad x^2+y^2=51$ (внутрішня частина циліндра).

7. Обчислити масу тіла, обмеженого поверхнями $x^2+y^2=4,\quad x^2+y^2=8z,\quad x=0,\quad y=0,\quad z=0,(x\ge 0,\ y\ge 0),$ якщо об’ємна густина $\mu(x,y,z)=5x$.

8. Знайти масу кривої $L: x = \cos t + t\sin t,\ y = \sin t - t\cos t,\ z = 2$, якщо $0 \le t \le 2\pi$ та лінійна густина розподілу маси $\mu(x, y) = \left(x^2 + y^2\right)$.

9. Знайти роботу сили $\vec{F} = x^2 y\vec{i} - y\vec{j}$ під час переміщення вздовж лінії L від точки M до точки N, якщо L – відрізок MN, де $M(-1;\,0),\quad N(0;\,1)$.

10. Знайти градієнт $\operatorname{grad} u$ скалярного поля:

а) $u = -2xy^5 + 7y^2 + x - y^3 - xy$;

б) $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z} + xyz^2$ у точці $M_0(1;-2;4)$.

11. З'ясувати, чи є векторне поле $\vec{a}$ соленоїдальним і потенціальним, якщо $\vec{a} = (x-4)\vec{i} + (y+7)\vec{j} + \cos z\vec{k}$.

12. Знайти потік векторного поля $\vec{F}$ через замкнену поверхню S (нормаль зовнішня):

а) $\vec{F} = \left(1 + \sqrt{z}\right)\vec{i} + \left(4y - \sqrt{x}\right)\vec{j} + xy\vec{k}$,

$S:\ 4(x^2 + y^2) = z^2,\quad z = 3;$

б) $\vec{F} = zx\vec{i} + z\vec{j} + y\vec{k}$,

$S:\ x^2 + y^2 = 1 - z,\quad z = 0$.

13. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a} = y\vec{i} - x\vec{j} + z^2\vec{k}$ уздовж контура $\Gamma = \left\{(x;\,y;\,z):\quad x^2 + y^2 = 1,\quad z = 4\right\}$.

14. Використовуючи формулу Стокса, знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a} = xy\vec{i} + yz\vec{j} + zx\vec{k}$ уздовж контура

$$\Gamma = \left\{(x;\,y;\,z):\quad \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1,\quad 2x - 3y + z = 6\right\}.$$

Варіант 9

1. На площині Oxy побудувати область інтегрування та змінити порядок інтегрування в інтегралах:

а) $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{-1} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)dy + \int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{0}^{x^2} f(x,y)dy$;

б) $\int\limits_{0}^{2} dy \int\limits_{2-y}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)dx$.

2. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_{D} \left(4xy + 3x^2y^2\right)dxdy$, де D – область, обмежена лініями $x=1,\ y=x^2,\ y=-\sqrt{x}$.

3. Обчислити площу області, обмеженої лініями:

а) $y=\sqrt{12-x^2}, \quad y=2\sqrt{3}-\sqrt{12-x^2}, \quad x=0 \quad (x\geq 0)$;

б) $y^2-6y+x^2=0,\ y^2-10y+x^2=0,\ y=x,\ x=0$.

4. Знайти масу пластинки D, обмеженої кривими

$$x=1,\ y=0,\ y^2=4x,\ (y\geq 0),$$

із заданою поверхневою густиною $\mu(x,y)=x+3y^2$.

5. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint\limits_{V} y^2 e^{-xy}dxdydz$, де V – область, обмежена площинами $x=0, \quad y=-2, \quad y=4x, \quad z=0, \quad z=1.$

6. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями:

а) $x^2+y^2=2y, \quad z=\frac{9}{4}-x^2, \quad z=0$;

б) $z=21\sqrt{\frac{x^2-y^2}{4}}, \quad z=\frac{23}{2}-x^2-y^2$.

7. Обчислити масу тіла, обмеженого поверхнями $x^2+y^2=\frac{4}{25}z^2, \quad x^2+y^2=\frac{2}{5}z, \quad x=0, \quad y=0, (x\geq 0,\ y\geq 0)$, якщо об'ємна густина $\mu(x,y,z)=28xz$.

8. Знайти масу кривої $L: x = 2(\cos t + t\sin t),\ y = 2(\sin t - t\cos t)$, якщо $0 \le t \le \dfrac{\pi}{4}$ та лінійна густина розподілу маси $\mu(t) = 3 + t$.

9. Знайти роботу сили $\vec{F} = (2xy - y)\vec{i} + (x^2 + x)\vec{j}$ під час переміщення вздовж лінії L від точки M до точки N, якщо L визначається рівнянням $x = 3\cos t,\quad y = 3\sin t$, а $M(3;\ 0),\quad N(0;\ 3)$.

10. Знайти градієнт $\operatorname{grad} u$ скалярного поля:

а) $u = x^3 y^3 + xy^4 - x + 2xy - 3$;

б) $u = \cos y + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - x^3$ у точці $M_0(3;0;-4)$.

11. З'ясувати, чи є векторне поле $\vec{a}$ соленоїдальним і потенціальним, якщо $\vec{a} = (-x - 2y)\vec{i} + (x + 2y)\vec{j} + (3z - 2xy + 9)\vec{k}$.

12. Знайти потік векторного поля $\vec{F}$ через замкнену поверхню S (нормаль зовнішня):

а) $\vec{F} = (\sqrt{z} - x)\vec{i} + (x - y)\vec{j} + (y^2 - z)\vec{k}$,

$S:\ 3x - 2y + z = 6,\quad x = 0,\quad y = 0,\quad z = 0$;

б) $\vec{F} = 6x\vec{i} - 2y\vec{j} - z\vec{k}$,

$S: z = 3 - 2(x^2 + y^2),\ \ z^2 = x^2 + y^2,\ \ (z \ge 0).$.

13. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a} = 4x\vec{i} + 2\vec{j} - xy\vec{k}$ уздовж контура $\Gamma = \{(x;y;z):\quad z = 2(x^2 + y^2) + 1,\quad z = 9\}$.

14. Використовуючи формулу Стокса, знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a} = -3z\vec{i} + y^2\vec{j} + 2y\vec{k}$ уздовж контура $\Gamma = \left\{(x;y;z):\quad \dfrac{x^2}{49} + \dfrac{y^2}{9} = 1,\quad -2x + 4y - z - 8 = 0\right\}$.

Варіант 10

1. На площині Oxy побудувати область інтегрування та змінити порядок інтегрування в інтегралах:

а) $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{1-x^2}^{1} f(x,y)dy + \int\limits_{1}^{e} dx \int\limits_{\ln x}^{1} f(x,y)dy$;

б) $\int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy$.

2. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_{D} \left(12xy + 9x^2y^2\right)dxdy$, де D – область, обмежена лініями $x=1$, $y=-x^2$, $y=\sqrt{x}$.

3. Обчислити площу області, обмеженої лініями:

а) $y=\dfrac{3}{2x}$, $\quad y=\dfrac{3}{2}\sqrt{x}$, $\quad x=9$;

б) $x^2-2x+y^2=0$, $x^2-4x+y^2=0$, $y=\sqrt{3}\,x$, $y=\dfrac{x}{\sqrt{3}}$.

4. Знайти масу пластинки D, обмеженої кривими:

$$x^2+y^2=1,\ x^2+y^2=9,\ y=0,\ x=0,\ (x\ge 0,\ y\le 0),$$

із заданою поверхневою густиною $\mu(x,y)=\dfrac{x-y}{x^2+y^2}$.

5. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint\limits_{V} 2y^2ze^{xyz}\,dxdydz$, де V – область, обмежена площинами $x=1$, $\quad y=1$, $\quad z=1$, $\quad x=0$, $\quad y=0$, $\quad z=0$.

6. Обчислити об’єм тіла, обмеженого поверхнями:

а) $x^2+y^2=10x,\ x^2+y^2=13x,\ z=\sqrt{x^2+y^2},\ z=0,\ y=0,\ (y\ge 0)$;

б) $z=\sqrt{16-x^2-y^2}$, $\quad 6z=x^2+y^2$.

7. Обчислити масу тіла, обмеженого поверхнями $x^2+y^2+z^2=4$, $\quad x^2+y^2=z^2$, $\quad x=0$, $\quad y=0,\ (x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0)$, якщо об’ємна густина $\mu(x,y,z)=6z$.

8. Знайти масу кривої $L: y=\ln(x^2-1)+1$ від точки $A(2;1+\ln 3)$ до точки $B(5;1+\ln 24)$, якщо лінійна густина розподілу маси $\mu(x,y)=x+1$.

9. Знайти роботу сили $\vec{F}=(x+y)\vec{i}+(x-y)\vec{j}$ під час переміщення вздовж лінії L від точки M до точки N, якщо L визначається рівнянням $y=x^2$, а $M(-1;1)$, $N(2;4)$.

10. Знайти градієнт $\operatorname{grad} u$ скалярного поля:

а) $u=x^5y^4+xy^3-xy+2y-6$;

б) $u=\ln(x+y+3z)-x^3+yz$ у точці $M_0(1;-2;3)$.

11. З'ясувати, чи є векторне поле $\vec{a}$ соленоїдальним і потенціальним, якщо $\vec{a}=(z+\sin y)\vec{i}+(x^2-z^2)\vec{j}+\sin x\vec{k}$.

12. Знайти потік векторного поля $\vec{F}$ через замкнену поверхню S (нормаль зовнішня):

а) $\vec{F}=(yz+x)\vec{i}+(x^2+y)\vec{j}+(xy^2+z)\vec{k}$,

$S: x^2+y^2+z^2=2z$;

б) $\vec{F}=(x+z)\vec{i}+(z+y)\vec{k}$,

$S: 4z=x^2+y^2,\ z=4$.

13. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a}=2y\vec{i}-3x\vec{j}+z^2\vec{k}$ уздовж контура $\Gamma=\{(x;y;z):\quad z=x^2+y^2,\quad z=1\}$.

14. Використовуючи формулу Стокса, знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a}=2y\vec{i}+5z\vec{j}+3x\vec{k}$ уздовж контура $\Gamma=\left\{(x;y;z):\quad \frac{x^2}{81}+\frac{y^2}{9}=1,\quad 2x-y+z=4\right\}$.

Варіант 11

1. На площині Oxy побудувати область інтегрування та змінити порядок інтегрування в інтегралах:

а) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{\sqrt[3]{y}} f(x,y)dx + \int\limits_1^2 dy \int\limits_0^{2-y} f(x,y)dx;$

б) $\int\limits_0^4 dx \int\limits_{3x^2}^{12x} f(x,y)dy.$

2. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D \left(8xy + 9x^2y^2\right)dxdy$, де D – область, обмежена лініями $x=1,\ y=-x^3,\ y=\sqrt[3]{x}$.

3. Обчислити площу області, обмеженої лініями:

а) $y=\sqrt{24-x^2},\quad x^2=2\sqrt{3}y,\quad x=0 \quad (x\geq 0);$

б) $y^2-2y+x^2=0,\ y^2-4y+x^2=0,\ y=\sqrt{3}\,x,\quad x=0.$

4. Знайти масу пластинки D, обмеженої кривими $x=1,\ y=0,\ y^2=x,\ (y\geq 0)$ із заданою поверхневою густиною $\mu(x,y)=3x+6y^2$.

5. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint\limits_V y^2 ch(2xy)dxdydz$, де V – область, обмежена площинами $\begin{cases} x=0, \quad y=1, \quad y=x, \\ z=0, \quad z=8. \end{cases}$.

6. Обчислити об’єм тіла, обмеженого поверхнями

а) $x^2+y^2=2\sqrt{2}x,\quad z=x^2+y^2-4,\quad z=0,\quad (z\geq 0);$

б) $z=\sqrt{9-x^2-y^2},\quad z=\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{80}};$

7. Обчислити масу тіла, обмеженого поверхнями $25\left(x^2+y^2\right)=z^2,\quad x^2+y^2=4,\quad x=0,\quad y=0,\quad z=0, (x\geq 0,\ y\geq 0, z\geq 0)$, якщо об’ємна густина $\mu(x,y,z)=2\left(x^2+y^2\right)$.

8. Знайти масу кривої $L: x = \cos t + t\sin t,\ y = \sin t - t\cos t,\ z = 2$, якщо $0 \le t \le 2\pi$ та лінійна густина розподілу маси $\mu(x, y) = \left(x^2 + y^2\right)$.

9. Знайти роботу сили $\vec{F} = (x + y)^2\vec{i} - \left(x^2 + y^2\right)\vec{j}$ під час переміщення вздовж лінії L від точки M до точки N, якщо L – відрізок MN, де $M(1;\,0),\quad N(0;\,1)$.

10. Знайти градієнт $\operatorname{grad} u$ скалярного поля:

а) $u = x^2y^5 + 2xy^4 - 3xy + 2y - 5$;

б) $u = \cos\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - y^3 + 2xz$ у точці $M_0(1;0;-1)$.

11. З'ясувати, чи є векторне поле $\vec{a}$ соленоїдальним і потенціальним, якщо $\vec{a} = (7x + 5y)\vec{i} + (8x - y)\vec{j} + (3xy - 2z - 2)\vec{k}$.

12. Знайти потік векторного поля $\vec{F}$ через замкнену поверхню S (нормаль зовнішня):

а) $\vec{F} = \left(e^{2y} + x\right)\vec{i} + (x - 2y)\vec{j} + (y^2 + 3z)\vec{k}$,

$S:\ x - y + z = 1,\quad x = 0,\quad y = 0,\quad z = 0$;

б) $\vec{F} = 3xz\vec{i} - 2x\vec{j} + y\vec{k}$,

$S:\ x + y + z = 2,\quad x = 1,\quad x = 0,\ y = 0,\quad z = 0$.

13. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a} = 2y\vec{i} + \vec{j} - 2yz\vec{k}$ уздовж контура $\Gamma = \left\{(x; y; z):\quad x^2 + y^2 - z^2 = 0,\quad z = 2\right\}$.

14. Використовуючи формулу Стокса, знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a} = 4x\vec{i} - yz\vec{j} + x\vec{k}$ уздовж контура

$$\Gamma = \left\{(x; y; z):\quad \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1,\quad 6x - y + 3z = 6\right\}.$$

Варіант 12

1. На площині Oxy побудувати область інтегрування та змінити порядок інтегрування в інтегралах:

а) $\int\limits_0^{\pi/4} dy \int\limits_0^{\sin y} f(x,y)dx + \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} dy \int\limits_0^{\cos y} f(x,y)dx$;

б) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{2x^2}^{3-x} f(x,y)dy$.

2. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D (24xy + 18x^2y^2)dxdy$, де D – область, обмежена лініями $x = 1,\ y = x^3,\ y = -\sqrt[3]{x}$.

3. Обчислити площу області, обмеженої лініями:

а) $y = \sin x, \quad y = \cos x, \quad x = 0 \quad (x \geq 0)$;

б) $x^2 - 2x + y^2 = 0,\ x^2 - 6x + y^2 = 0,\ y = \dfrac{x}{\sqrt{3}},\ y = \sqrt{3}x$.

4. Знайти масу пластинки D, обмеженої кривими

$$x^2 + y^2 = 9,\ x^2 + y^2 = 25,\ y = 0,\ x = 0,\ (x \leq 0,\ y \geq 0),$$

із заданою поверхневою густиною $\mu(x,y) = \dfrac{2y - x}{x^2 + y^2}$.

5. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint\limits_V x^2 z sh(xyz)dxdydz$, де V – область, обмежена площинами $x = 2, \quad y = 1, \quad z = 1, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0$

6. Обчислити об’єм тіла, обмеженого поверхнями:

а) $x^2 + y^2 = 4x, \quad z = 10 - y^2, \quad z = 0$;

б) $z = \sqrt{81 - x^2 - y^2}, \quad z = 5, \quad x^2 + y^2 = 45$ (внутрішня частина циліндра).

7. Обчислити масу тіла, обмеженого поверхнями $x^2 + y^2 + z^2 = 9, \quad x^2 + y^2 = 4, \quad (x^2 + y^2 \leq 4), \quad y = 0\ (y \geq 0)$, якщо об’ємна густина $\mu(x,y,z) = |z|$.

8. Знайти масу кривої $L: x = 2t + 2,\ y = t^2 - 1,\ z = 4t - 3$, якщо $0 \le t \le 1$ та лінійна густина розподілу маси $\mu(x, y, z) = x + z$.

9. Знайти роботу сили $\vec{F} = -y\vec{i} + x\vec{j}$ під час переміщення вздовж лінії L від точки M до точки N, якщо L визначається рівнянням $y = x^3$, а $M(0;\ 0),\quad N(2;\ 8)$.

10. Знайти градієнт $\operatorname{grad} u$ скалярного поля:

а) $u = x^2 y^6 + 5x - 2y^3 + yx$;

б) $u = xy^{3z} + 2\cos xy - z$ у точці $M_0(0;1;-2)$.

11. З'ясувати, чи є векторне поле $\vec{a}$ соленоїдальним і потенціальним, якщо $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + (\sin z)\vec{k}$.

12. Знайти потік векторного поля $\vec{F}$ через замкнену поверхню S (нормаль зовнішня):

а) $\vec{F} = \left(\sqrt{z} - 2x\right)\vec{i} + \left(e^x + 3y\right)\vec{j} + \sqrt{y + x}\,\vec{k}$,

$S:\ x^2 + y^2 = z^2,\quad z = 2,\quad z = 5$;

б) $\vec{F} = (y + 2z)\vec{i} - y\vec{j} + 3z\vec{k}$,

$S:\ 3z = 27 - 2(x^2 + y^2),\quad z^2 = x^2 + y^2\ \ (z \ge 0)$.

13. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a} = (x - y)\vec{i} + x\vec{j} + z^2\vec{k}$ уздовж контура $\Gamma = \left\{(x;\, y;\, z):\quad x^2 + y^2 - 4z^2 = 0,\quad z = \dfrac{1}{2}\right\}$.

14. Використовуючи формулу Стокса, знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a} = (2 - xy)\vec{i} - yz\vec{j} - xz\vec{k}$ уздовж контура $\Gamma = \left\{(x;\, y;\, z):\quad \dfrac{x^2}{121} + \dfrac{y^2}{144} = 1,\quad x + 3y - z = 6\right\}$.

Варіант 13

1. На площині Oxy побудувати область інтегрування та змінити порядок інтегрування в інтегралах:

а) $\int\limits_{-2}^{-1} dx \int\limits_{-(2+x)}^{0} f(x,y)dy + \int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{\sqrt[3]{x}}^{0} f(x,y)dy$;

б) $\int\limits_{-1}^{\frac{3}{2}} dy \int\limits_{2y^2}^{y+3} f(x,y)dx$.

2. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_{D} \left(12xy + 27x^2y^2\right)dxdy$, де D – область, обмежена лініями $x = 1,\ y = x^2,\ y = -\sqrt[3]{x}$.

3. Обчислити площу області, обмеженої лініями:

а) $y = 20 - x^2, \quad y = -8x$;

б) $y^2 - 4y + x^2 = 0,\ \ y^2 - 6y + x^2 = 0,\ \ x = 0,\ \ y = \sqrt{3}x$.

4. Знайти масу пластинки D, обмеженої кривими

$$x = 2,\ y = 0,\ y^2 = \frac{x}{2}, (y \geq 0),$$

із заданою поверхневою густиною $\mu(x,y) = 2x + 3y^2$.

5. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint\limits_{V} y^2 e^{\frac{xy}{2}} dxdydz$, де V – область, обмежена площинами $x = 0, \quad y = 2, \quad y = 2x, \quad z = 0, \quad z = -1.$

6. Обчислити об’єм тіла, обмеженого поверхнями:

а) $x^2 + y^2 = 2y, \quad x^2 + y^2 = 5y, \quad z = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad z = 0$;

б) $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}, \quad \frac{3z}{2} = x^2 + y^2$.

7. Обчислити масу тіла, обмеженого поверхнями $x^2 + y^2 = 1, \quad x^2 + y^2 = 6z, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0, (x \geq 0,\ y \geq 0),$ якщо об’ємна густина $\mu(x,y,z) = 90y$.

8. Знайти масу кривої $L: y = 3 - x^2$ від точки $A(0;3)$ до точки $B(2;-1)$, якщо лінійна густина розподілу маси $\mu(x, y) = x$.

9. Знайти роботу сили $\vec{F} = y\vec{i} - x\vec{j}$ під час переміщення вздовж лінії L від точки M до точки N, якщо L визначається рівнянням $x^2 + y^2 = 1, \quad (y \ge 0), \; M(1;\,0), \quad N(-1;\,0)$.

10. Знайти градієнт $\operatorname{grad} u$ скалярного поля:

а) $u = x^5 y^4 + \sin x - 2y^3 + x - 7$;

б) $u = (x + 2y - z)^3 + 2x - 4y$ в точці $M_0(1;2;2)$.

11. З'ясувати, чи є векторне поле $\vec{a}$ соленоїдальним і потенціальним, якщо $\vec{a} = (2x - 3y)\vec{i} + (5z - 4y)\vec{j} + (6z - 2y^2 - 6)\vec{k}$.

12. Знайти потік векторного поля $\vec{F}$ через замкнену поверхню S (нормаль зовнішня):

а) $\vec{F} = \left(e^z + \dfrac{x}{4}\right)\vec{i} + \left(\ln x + \dfrac{y}{4}\right)\vec{j} + \dfrac{z}{4}\vec{k}$,

$S:\; x^2 + y^2 + z^2 = 2x + 2y - 2z - 2$;

б) $\vec{F} = y\vec{i} + 5y\vec{j} + z\vec{k}\; \vec{F} = (x + z)\vec{i} + (z + y)\vec{k}$,

$S: x^2 + y^2 = 1, \quad z = x, \quad z = 0 \quad (z \ge 0)$.

13. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a} = xz\,\vec{i} - \vec{j} + y\vec{k}$ уздовж контура $\Gamma = \{(x;y;z):\quad x^2 + y^2 + z^2 = 4, \quad z = 1\}$.

14. Використовуючи формулу Стокса, знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a} = (3y + z)\,\vec{i} + (2 - y)\,\vec{j} - 2x\vec{k}$ уздовж контура

$$\Gamma = \left\{(x;y;z):\quad \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{64} = 1, \quad -2x + 3y - 6z - 12 = 0\right\}.$$

Варіант 14

1. На площині Oxy побудувати область інтегрування та змінити порядок інтегрування в інтегралах:

а) $\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} f(x,y)dx + \int_1^e dy \int_{\ln y}^1 f(x,y)dx$;

б) $\int_0^3 dx \int_{8-3x}^{8-x^2} f(x,y)dy$.

2. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D \left(8xy + 18x^2y^2\right)dxdy$, де D – область, обмежена лініями $x=1,\ y=-x^2,\ y=\sqrt[3]{x}$.

3. Обчислити площу області, обмеженої лініями:

а) $y=\sqrt{18-x^2}, \quad y=3\sqrt{2}-\sqrt{18-x^2}$;

б) $x^2-2x+y^2=0,\ x^2-8x+y^2=0,\ y=\sqrt{3}x,\ y=\dfrac{x}{\sqrt{3}}$.

4. Знайти масу пластинки D, обмеженої кривими

$$x^2+y^2=4,\ x^2+y^2=16,\ y=0,\ x=0,\ (x\le 0,\ y\ge 0),$$

із заданою поверхневою густиною $\mu(x,y)=\dfrac{2y-3x}{x^2+y^2}$.

5. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint\limits_V y^2 z\cos\dfrac{xyz}{3}dxdydz$, де V – область, обмежена площинами $x=3, \quad y=1, \quad z=2\pi, \quad x=0, \quad y=0, \quad z=0.$

6. Обчислити об’єм тіла, обмеженого поверхнями:

а) $x^2+y^2=8\sqrt{2}y, \quad z=x^2+y^2-64, \quad z=0, \quad (z\ge 0)$;

б) $z=6\sqrt{x^2+y^2}, \quad z=16-x^2-y^2$.

7. Обчислити масу тіла, обмеженого поверхнями $x^2+y^2=\dfrac{1}{25}z^2, \quad x^2+y^2=\dfrac{z}{5}, \quad x=0, \quad y=0, (x\ge 0,\ y\ge 0)$, якщо об’ємна густина $\mu(x,y,z)=14yz$.

8. Знайти масу кривої $L: x = 6\cos^3 t,\ y = 6\sin^3 t$, якщо $0 \le t \le \dfrac{\pi}{3}$ та лінійна густина розподілу маси $\mu(x, y) = y$.

9. Знайти роботу сили $\vec{F} = \left(x^2 + y^2\right)\vec{i} + \left(x^2 - y^2\right)\vec{j}$ під час переміщення вздовж лінії L від точки M до точки N, якщо L визначається рівнянням $\begin{cases} x, & 0 \le x \le 1 \\ 2 - x, & 1 \le x \le 2, \end{cases}$, а $M(2;\,0)$, $\quad N(0;\,0)$.

10. Знайти градієнт $\operatorname{grad} u$ скалярного поля:

а) $u = x^7 y^3 + xy^4 - xy + 3y - 2$;

б) $u = \ln\left(1 + x^2 + y^2\right) - z^2 + y$ в точці $M_0(-1;3;1)$.

11. З'ясувати, чи є векторне поле $\vec{a}$ соленоїдальним і потенціальним, якщо $\vec{a} = \left(\cos z + y^2\right)\vec{i} + (\cos x)\vec{j} + \left(x - 5y^2\right)\vec{k}$.

12. Знайти потік векторного поля $\vec{F}$ через замкнену поверхню S (нормаль зовнішня):

а) $\vec{F} = (3x - 2z)\vec{i} + (z - 2y)\vec{j} + (1 + 2z)\vec{k}$,

$S:\ 4(x^2 + y^2) = z^2, \quad z = 2$;

б) $\vec{F} = x^3\vec{i} + y^3\vec{j} + z^3\vec{k}$,

$S:\quad x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

13. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a} = 2yz\,\vec{i} + xz\,\vec{j} - x^2\vec{k}$ уздовж контура $\Gamma = \left\{(x;\,y;\,z):\quad x^2 + y^2 + z^2 = 25, \quad x^2 + y^2 = 9 \quad (z > 0)\right\}$.

14. Використовуючи формулу Стокса, знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a} = 3(x - 2z)\,\vec{i} + (x - 2y)\,\vec{j} + 2x\vec{k}$ **у**здовж контура

$$\Gamma = \left\{(x;\,y;\,z):\quad \frac{x^2}{625} + \frac{y^2}{4} = 1, \quad x - y + z = 3\right\}.$$

Варіант 15

1. На площині Oxy побудувати область інтегрування та змінити порядок інтегрування в інтегралах:

а) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{-\sqrt{y}}^{0} f(x,y)dx + \int\limits_1^2 dy \int\limits_{-\sqrt{2-y}}^{0} f(x,y)dx$;

б) $\int\limits_0^4 dx \int\limits_{\frac{x^2}{2}}^{4\sqrt{x}} f(x,y)dy$.

2. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D \left(\frac{4}{5}xy + \frac{9}{11}x^2y^2\right)dxdy$, де D – область, обмежена лініями $x=1,\ y=x^3,\ y=-\sqrt{x}$.

3. Обчислити площу області, обмеженої лініями:

а) $y = 32 - x^2, \quad y = -4x$;

б) $y^2 - 2y + x^2 = 0,\ y^2 - 6y + x^2 = 0,\ y = \frac{x}{\sqrt{3}},\ x = 0$.

4. Знайти масу пластинки D, обмеженої кривими $x = \frac{1}{2},\ y = 0,\ y^2 = 8x, (y \ge 0)$, із заданою поверхневою густиною $\mu(x,y) = 7x + 3y^2$.

5. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint\limits_V y^2 \cos\frac{\pi xy}{2} dxdydz$, де V – область, обмежена площинами $x=0, \quad y=-1, \quad y=x, \quad z=0, \quad z=2\pi^2$.

6. Обчислити об’єм тіла, обмеженого поверхнями:

а) $x^2 + y^2 = 2x, \quad z = \frac{21}{4} - y^2, \quad z = 0$;

б) $z = \sqrt{36 - x^2 - y^2}, \quad z = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{63}}$.

7. Обчислити масу тіла, обмеженого поверхнями $x^2 + y^2 + z^2 = 4, \quad x^2 + y^2 = 9z^2, \quad x = 0, \quad y = 0, (x \ge 0,\ y \ge 0, z \ge 0)$, якщо об’ємна густина $\mu(x,y,z) = 10z$.

8. Знайти масу кривої $L: y = 2 + x^3$ від точки $A(0;2)$ до точки $B(-2;-6)$, якщо лінійна густина розподілу маси $\mu(x, y) = x^3$.

9. Знайти роботу сили $\vec{F} = xy\vec{i} + 2y\vec{j}$ під час переміщення вздовж лінії L від точки M до точки N, якщо L визначається рівнянням $x = \cos t, \quad y = \sin t$, а $M(1; 0), \quad N(0; 1)$.

10. Знайти градієнт $\operatorname{grad} u$ скалярного поля:

а) $u = x^3y^5 + xy^4 - 2x + 5y + 7$;

б) $u = 2arctgx + \sin y - y^2 + z^3$ у точці $M_0(1;0;-3)$.

11. З’ясувати, чи є векторне поле $\vec{a}$ соленоїдальним і потенціальним, якщо $\vec{a} = (6x + 5z)\vec{i} + (3x - y)\vec{j} + (2y^2 - z + 4)\vec{k}$.

12. Знайти потік векторного поля $\vec{F}$ через замкнену поверхню S (нормаль зовнішня):

а) $\vec{F} = (e^y + 2x)\vec{i} + (x - y)\vec{j} + (2z - 1)\vec{k}$,

$S: x + 2y + z = 2, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0$;

б) $\vec{F} = z\vec{i} + (3y - x)\vec{j} - z\vec{k}$,

$S:\ x^2 + y^2 = 1, \quad z = x^2 + y^2 + 2, \quad z = 0$.

13. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a} = -y\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ уздовж контура $\Gamma = \{(x; y; z):\quad x^2 + y^2 - z^2 = 1, \quad z = 1\}$.

14. Використовуючи формулу Стокса, знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a} = 3x\vec{i} - 2z\vec{j} + 2(y + x + 3z)\vec{k}$ уздовж контура $\Gamma = \left\{(x; y; z):\quad \dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{49} = 1, \quad 4x + y + z = 4\right\}$.

Варіант 16

1. На площині Oxy побудувати область інтегрування та змінити порядок інтегрування в інтегралах:

а) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{-y}^{0} f(x,y)dx + \int\limits_1^{\sqrt{2}} dy \int\limits_{-\sqrt{2-y^2}}^{0} f(x,y)dx;$

б) $\int\limits_0^3 dx \int\limits_{x^2-3}^{3x-3} f(x,y)dy.$

2. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D \left(\frac{4}{5}xy + 9x^2y^2\right)dxdy$, де D – область, обмежена лініями $x=1,\ y=-x^3,\ y=\sqrt{x}$.

3. Обчислити площу області, обмеженої лініями:

а) $y=\frac{2}{x},\quad y=5e^x,\quad y=2,\quad y=5;$

б) $x^2-2x+y^2=0,\ x^2-4x+y^2=0,\ y=0,\ y=\frac{x}{\sqrt{3}}$.

4. Знайти масу пластинки D, обмеженої кривими

$$x^2+y^2=9,\ x^2+y^2=16,\ x=0,\ y=0,\ (x\le 0,\ y\ge 0),$$

із заданою поверхневою густиною $\mu(x,y)=\frac{2y-5x}{x^2+y^2}$.

5. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint\limits_V 2x^2 z sh(xyz)dxdydz$, де V – область, обмежена площинами $x=1,\quad y=-1,\quad z=1,\quad x=0,\quad y=0,\quad z=0$.

6. Обчислити об’єм тіла, обмеженого поверхнями:

а) $x^2+y^2=2\sqrt{2}y,\quad z=x^2+y^2-4,\quad z=0,\quad (z\ge 0);$

б) $z=\sqrt{64-x^2-y^2},\quad z=4,\quad x^2+y^2=39$ (внутрішня частина циліндра).

7. Обчислити масу тіла, обмеженого поверхнями $9(x^2+y^2)=z^2,\quad x^2+y^2=4,\quad x=0,\quad y=0,\quad z=0,(x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0),$

якщо об’ємна густина $\mu(x,y,z)=\frac{5}{3}(x^2+y^2).$

8. Знайти масу кривої $L: x = 4\cos^3 t,\ y = 4\sin^3 t$, якщо $0 \le t \le \frac{\pi}{4}$ та лінійна густина розподілу маси $\mu(x, y) = x$.

9. Знайти роботу сили $\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j}$ під час переміщення вздовж лінії L від точки M до точки N, якщо L – відрізок MN, де $M(1;\ 0)$, $N(0;\ 3)$.

10. Знайти градієнт $\operatorname{grad} u$ скалярного поля

а) $u = x^5 - 4y^3 + xy^3 + 2x - 3y + 1$;

б) $u = \cos 2z - \sin 3xz + y^3 - x$ у точці $M_0(-4;2;0)$.

11. З'ясувати, чи є векторне поле $\vec{a}$ соленоїдальним і потенціальним, якщо $\vec{a} = 5x\vec{i} + 6y\vec{j} - 11z\vec{k}$.

12. Знайти потік векторного поля $\vec{F}$ через замкнену поверхню S (нормаль зовнішня):

а) $\vec{F} = \left(x + y^2\right)\vec{i} + (xz + y)\vec{j} + \left(\sqrt{x^2 + 1} + z\right)\vec{k}$,

$S:\ x^2 + y^2 = z^2,\quad z = 2,\quad z = 3$;

б) $\vec{F} = y\vec{i} + (x + 2y)\vec{j} + x\vec{k}$,

$S:\ x^2 + y^2 = 2x,\quad z = x^2 + y^2,\quad z = 0$.

13. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a} = y\vec{i} + 3x\vec{j} + z^2\vec{k}$ вздовж контуру $\Gamma = \{(x; y; z):\quad z = x^2 + y^2 - 1,\quad z = 3\}$.

14. Використовуючи формулу Стокса, знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a} = (3x - z)\vec{i} + (2x - z)\vec{j} - y\vec{k}$ вздовж контуру

$$\Gamma = \left\{(x; y; z):\quad \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1,\quad 3x + 2y - 6z = 6\right\}.$$

Варіант 17

1. На площині Oxy побудувати область інтегрування та змінити порядок інтегрування в інтегралах:

а) $\int_0^1 dy \int_0^{y^2} f(x,y)dx + \int_1^2 dy \int_0^{2-y} f(x,y)dx$;

б) $\int_0^6 dx \int_{\frac{x^2}{4}}^{\frac{3x}{2}} f(x,y)dy$.

2. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D \left(24xy - 48x^3y^3\right)dxdy$, де D – область, обмежена лініями $x=1, y=x^2, y=-\sqrt{x}$.

3. Обчислити площу області, обмеженої лініями:

а) $x^2 + y^2 = 36, \quad 3\sqrt{2}y = x^2 \quad (y \ge 0)$;

б) $y^2 - 2y + x^2 = 0,\ y^2 - 10y + x^2 = 0,\ y = \dfrac{x}{\sqrt{3}},\ y = \sqrt{3}x$.

4. Знайти масу пластинки D, обмеженої кривими

$$x=1,\ y=0,\ y^2 = 4x,\ (y \ge 0),$$

із заданою поверхневою густиною $\mu(x,y) = 7x^2 + 2y$.

5. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint\limits_V y^2\cos(\pi xy)dxdydz$, де V – область, обмежена площинами $x=0, \quad y=1, \quad y=2x, \quad z=0, \quad z=\pi^2$

6. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями:

а) $x^2 + y^2 + 2\sqrt{2}y = 0, \quad z = x^2 + y^2 - 4, \quad z = 0, \quad (z \ge 0)$;

б) $z = \sqrt{144 - x^2 - y^2}, \quad 18z = x^2 + y^2$.

7. Обчислити масу тіла, обмеженого поверхнями $x^2 + y^2 + z^2 = 4, \quad x^2 + y^2 = 1, \quad \left(x^2 + y^2 \le 1\right)$, якщо об'ємна густина $\mu(x,y,z) = 6|z|$.

8. Знайти масу фрагмента кривої $L: x^2 + y^2 = 4$ від точки $A(2;0)$ до точки $B(0;2)$, $x \geq 0$, якщо лінійна густина розподілу маси $\mu(x, y) = xy^2$.

9. Знайти роботу сили $\vec{F} = -x\vec{i} + y\vec{j}$ під час переміщення вздовж лінії L від точки M до точки N, якщо L визначається рівнянням $x^2 + \dfrac{y^2}{9} = 1, \quad (x \geq 0,\ y \geq 0)$, а $M(1;\ 0)$, $\quad N(0;\ 3)$.

10. Знайти градієнт $\operatorname{grad} u$ скалярного поля:

а) $u = -2x^5y^2 + xy^3 + 5x - 2y + 7$;

б) $u = x^2 - y^2z + z^2 + (\ln xyz)^3$ у точці $M_0(1;2;1)$.

11. З'ясувати, чи є векторне поле $\vec{a}$ соленоїдальним і потенціальним, якщо $\vec{a} = (y - 2x)\vec{i} + (4x + 3y)\vec{j} + (3z - 2y^2 + 9)\vec{k}$.

12. Знайти потік векторного поля $\vec{F}$ через замкнену поверхню S (нормаль зовнішня):

а) $\vec{F} = (e^y + 2x)\vec{i} + (zx - y)\vec{j} + \dfrac{1}{4}(e^{xy} - z)\vec{k}$,

$S:\ x^2 + y^2 + z^2 = 2y + 3$;

б) $\vec{F} = x^2\vec{i} + xy\vec{j} + 3z\vec{k}$,

$S:\ x^2 + y^2 = z^2, \quad z = 4$.

13. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a} = 2yz\,\vec{i} + xz\,\vec{j} + y^2\vec{k}$ уздовж контура $\Gamma = \{(x; y; z): \quad x^2 + y^2 + z^2 = 25, \quad x^2 + y^2 = 16 \quad (z > 0)\}$.

14. Використовуючи формулу Стокса, знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a} = -xz\,\vec{i} + (5 + y)\vec{j} - 7y\vec{k}$ уздовж контура

$$\Gamma = \left\{(x; y; z): \quad \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{121} = 1, \quad x + 3y - 3z = 6\right\}.$$

Варіант 18

1. На площині Oxy побудувати область інтегрування та змінити порядок інтегрування в інтегралах:

а) $\int\limits_{-2}^{-1} dy \int\limits_{-(2+y)}^{0} f(x,y)dx + \int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{\sqrt[3]{y}}^{0} f(x,y)dx$;

б) $\int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{2x^2}^{3+x} f(x,y)dy$.

2. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D \left(6xy + 24x^3y^3\right)dxdy$, де D – область, обмежена лініями $x=1,\ y=-x^2,\ y=\sqrt{x}$.

3. Обчислити площу області, обмеженої лініями:

а) $y=\dfrac{3}{x},\quad y=3\sqrt{x},\quad x=4$;

б) $x^2-2x+y^2=0,\ x^2-6x+y^2=0,\ y=0,\ y=\dfrac{x}{\sqrt{3}}$.

4. Знайти масу пластинки D, обмеженої кривими

$$x^2+y^2=1,\ x^2+y^2=16,\ y=0,\ x=0,\ (x\ge 0,\ y\ge 0),$$

із заданою поверхневою густиною $\mu(x,y)=\dfrac{x+3y}{x^2+y^2}$.

5. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint\limits_V 2x^2 z sh(2xyz)dxdydz$, де V – область, обмежена площинами $x=2,\quad y=\dfrac{1}{2},\quad z=\dfrac{1}{2},\quad x=0,\quad y=0,\quad z=0$

6. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями:

а) $x^2+y^2=4x,\quad z=10-y^2,\quad z=0$;

б) $z=\dfrac{3}{2}\sqrt{x^2+y^2},\quad z=\dfrac{5}{2}-x^2-y^2$.

7. Обчислити масу тіла, обмеженого поверхнями $x^2+y^2=1,\quad x^2+y^2=z,\quad x=0,\quad y=0,\quad z=0,\ (x\ge 0,\ y\ge 0)$, якщо об'ємна густина $\mu(x,y,z)=10y$.

8. Знайти масу кривої $L: x = \cos 2t,\ y = \sin 2t,\ z = \frac{1}{3}t^3$, якщо $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$ та густина розподілу маси $\mu(x, y, z) = z(x^2 + y^2)$.

9. Знайти роботу сили $\vec{F} = xy\vec{i}$ під час переміщення вздовж лінії L від точки M до точки N, якщо L визначається рівнянням $y = \sin x$, а $M(\pi; 0),\quad N\left(\frac{\pi}{2}; 1\right)$.

10. Знайти градієнт $\operatorname{grad} u$ скалярного поля:

а) $u = x^2 y^6 + 4x - 3y^3 x + 7y - 11$;

б) $u = x^2 + 2\sqrt{y^2 + z^2} - z^3$ у точці $M_0(1; 4; -3)$.

11. З'ясувати, чи є векторне поле $\vec{a}$ соленоїдальним і потенціальним, якщо $\vec{a} = (2y + 4z)\vec{i} + (\sin x)\vec{j} + (y^2 - x^2)\vec{k}$.

12. Знайти потік векторного поля $\vec{F}$ через замкнену поверхню S (нормаль зовнішня):

а) $\vec{F} = (\sqrt{z} + y)\vec{i} + 3x\vec{j} + (3z + 5x)\vec{k}$,

$S:\ 8(x^2 + y^2) = z^2,\quad z = 2$;

б) $\vec{F} = (x + y + z)\vec{i} + (2y - x)\vec{j} + (3z + y)\vec{k}$,

$S:\ y = x,\quad y = 2x,\quad x = 1,\quad z = x^2 + y^2,\quad z = 0$.

13. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a} = -y\vec{i} + x\vec{j} + 3z^2\vec{k}$ уздовж контура $\Gamma = \{(x; y; z):\quad x^2 + y^2 + z^2 = 9,\quad x^2 + y^2 = 1\quad (z > 0)\}$.

14. Використовуючи формулу Стокса, знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a} = (3x - z)\vec{i} + 5y\vec{j} + zy\vec{k}$ уздовж контура $\Gamma = \left\{(x; y; z):\quad \frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{16} = 1,\quad -3x + 5y + 5z = 15\right\}$.

Варіант 19

1. На площині Oxy побудувати область інтегрування та змінити порядок інтегрування в інтегралах:

а) $\int_0^1 dy \int_0^y f(x,y)dx + \int_1^e dy \int_{\ln y}^1 f(x,y)dx;$

б) $\int_0^1 dy \int_{2y^2}^{3-y} f(x,y)dx.$

2. Обчислити подвійний інтеграл $\iint_D \left(4xy + 16x^3y^3\right)dxdy$, де D – область, обмежена лініями $x=1,\ y=-x^3,\ y=\sqrt[3]{x}$.

3. Обчислити площу області, обмеженої лініями:

а) $y = 6-\sqrt{36-x^2}, \quad y=\sqrt{36-x^2}, \quad x=0 \quad (x \ge 0);$

б) $y^2 - 4y + x^2 = 0,\ y^2 - 10y + x^2 = 0,\ y = \frac{x}{\sqrt{3}},\ y = \sqrt{3}x.$

4. Знайти масу пластинки D, обмеженої кривими

$$x=2,\ y=0,\ y^2=2x, (y \ge 0),$$

із заданою поверхневою густиною $\mu(x,y) = \frac{7x^2}{4} + \frac{y}{2}$.

5. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint_V x^2 sh(2xy)dxdydz$, де V – область, обмежена площинами $x=-1, \quad y=x, \quad y=0, \quad z=0, \quad z=8.$

6. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями:

а) $x^2+y^2=9x,\ x^2+y^2=12x,\ z=\sqrt{x^2+y^2},\ y=0,\ z=0, (y \ge 0);$

б) $z=\sqrt{9-x^2-y^2}, \quad z=\sqrt{\frac{x^2+y^2}{35}}.$

7. Обчислити масу тіла, обмеженого поверхнями $x^2+y^2=\frac{1}{49}z^2, \quad x^2+y^2=\frac{z}{7}, \quad x=0, \quad y=0, (x \ge 0,\ y \ge 0),$ якщо об'ємна густина $\mu(x,y,z)=10xz$.

8. Знайти масу кривої $L: y=\frac{2}{3}(\sqrt{x})^3$ від точки $A(0;0)$ до точки $B(9;18)$, якщо лінійна густина розподілу маси $\mu(x,y)=x+1$.

9. Знайти роботу сили $\vec{F}=y^2\vec{i}-x^2\vec{j}$ під час переміщення вздовж лінії L від точки M до точки N, якщо L визначається рівнянням $x=3\cos t,\quad y=3\sin t$, а $M(3;\,0),\quad N(0;\,3)$.

10. Знайти градієнт $\operatorname{grad} u$ скалярного поля:

а) $u=x^2y+y^3x-2y^2+5x-12$;

б) $u=\sin^3 x+xy^2-yz^2$ у точці $M_0(0;4;-1)$.

11. З'ясувати, чи є векторне поле $\vec{a}$ соленоїдальним і потенціальним, якщо $\vec{a}=(5x+4y)\vec{i}+(7x-2y)\vec{j}+(2xy+z-4)\vec{k}$.

12. Знайти потік векторного поля $\vec{F}$ через замкнену поверхню S (нормаль зовнішня):

а) $\vec{F}=(8yz-x)\vec{i}+(x^2-1)\vec{j}+(xy-2z)\vec{k}$,

$S:\ 2x+3y-z=6,\quad x=0,\quad y=0,\quad z=0$;

б) $\vec{F}=x\vec{i}-2y\vec{j}+3z\vec{k}$,

$S:\ x^2+y^2=z,\quad z=2x..$

13. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a}=y\vec{i}-x\vec{j}+2z\vec{k}$ уздовж контура $\Gamma=\left\{(x;y;z):\quad x^2+y^2=\frac{z^2}{4},\quad z=2\right\}$.

14. Використовуючи формулу Стокса, знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a}=(-x-3z)\vec{i}-(2z+y)\vec{j}+2y\vec{k}$ уздовж контура $\Gamma=\left\{(x;y;z):\quad \frac{x^2}{256}+\frac{y^2}{36}=1,\quad -5x+2y+10z=10\right\}$.

Варіант 20

1. На площині Oxy побудувати область інтегрування та змінити порядок інтегрування в інтегралах:

а) $\int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x,y)dy + \int_1^{\sqrt{2}} dx \int_0^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)dy$;

б) $\int_{-\frac{3}{2}}^{0} dx \int_{2x^2}^{3-x} f(x,y)dy$.

2. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D \left(4xy + 16x^3y^3\right)dxdy$, де D – область, обмежена лініями $x = 1,\ y = x^3,\ y = -\sqrt[3]{x}$.

3. Обчислити площу області, обмеженої лініями:

а) $y = \frac{25}{4} - x^2, \quad y = x - \frac{5}{2}$;

б) $x^2 - 2x + y^2 = 0,\ x^2 - 6x + y^2 = 0,\ y = 0,\ y = x$.

4. Знайти масу пластинки D, обмеженої кривими

$$x^2 + y^2 = 1,\ x^2 + y^2 = 4,\ x = 0,\ y = 0,\ (x \geq 0,\ y \geq 0),$$

із заданою поверхневою густиною $\mu(x,y) = \frac{x + 2y}{x^2 + y^2}$.

5. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint\limits_V x^2 z \sin\frac{xyz}{2} dxdydz$, де V – область, обмежена площинами $x = 1, \quad y = 4, \quad z = \pi, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0$.

6. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями:

а) $x^2 + y^2 = 6\sqrt{2}y, \quad z = x^2 + y^2 - 36, \quad z = 0, \quad (z \geq 0)$;

б) $z = \sqrt{49 - x^2 - y^2}, \quad z = 3, \quad x^2 + y^2 = 33$ (внутрішня частина циліндра).

7. Обчислити масу тіла, обмеженого поверхнями $x^2 + y^2 + z^2 = 4, \quad x^2 + y^2 = 4z^2, \quad x = 0, \quad y = 0, (x \geq 0,\ y \geq 0, z \geq 0)$, якщо об'ємна густина $\mu(x,y,z) = 10z$.

8. Знайти масу кривої $L: x = 3t,\ y = \dfrac{3t^2}{\sqrt{2}},\ z = t^3$, якщо $0 \le t \le 1$ та лінійна густина розподілу маси $\mu(x, y, z) = x + z$.

9. Знайти роботу сили $\vec{F} = \left(x^2 + y^2\right)\vec{i} + y^2\vec{j}$ під час переміщення вздовж лінії L від точки M до точки N, якщо L – відрізок MN, де $M(2;\,0)$, $N(0;\,2)$.

10. Знайти градієнт $\operatorname{grad} u$ скалярного поля:

а) $u = x^5y^3 + \cos x - y^3 - x + 3$;

б) $u = \sin^2 x + y^2 z + xz^2 - \ln z$ у точці $M_0\left(\dfrac{\pi}{4};2;1\right)$.

11. З'ясувати, чи є векторне поле $\vec{a}$ соленоїдальним і потенціальним, якщо $\vec{a} = 6\vec{i} + 8y\vec{j} - 8z\vec{k}$.

12. Знайти потік векторного поля $\vec{F}$ через замкнену поверхню S (нормаль зовнішня):

а) $\vec{F} = \left(y + z^2\right)\vec{i} + \left(x^2 + 3y\right)\vec{j} + xy\vec{k}$,

$S:\ x^2 + y^2 + z^2 = 2x$;

б) $\vec{F} = y^2x\vec{i} + z^2y\vec{j} + x^2z\vec{k}$,

$S:\ x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

13. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a} = x^2\,\vec{i} + yz\,\vec{j} + 2z\vec{k}$ уздовж контура $\Gamma = \left\{(x;\,y;\,z):\ x^2 + y^2 + z^2 = 25,\ \ z = 4\right\}$.

14. Використовуючи формулу Стокса, знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a} = (xy + 3x - z)\,\vec{i} - (xy + z - 2y)\,\vec{j} + (x - y - 2z)\vec{k}$ уздовж контура $\Gamma = \left\{(x;\,y;\,z):\ \dfrac{x^2}{81} + \dfrac{y^2}{49} = 1,\ \ 2x + 4y - 3z = 12\right\}$.

Варіант 21

1. На площині Oxy побудувати область інтегрування та змінити порядок інтегрування в інтегралах:

а) $\int_0^{\pi/4} dx \int_0^{\sin x} f(x,y)dy + \int_{\pi/4}^{\pi/2} dx \int_0^{\cos x} f(x,y)dy$;

б) $\int_0^1 dx \int_{-1}^{x^2+1} f(x,y)dy$.

2. Обчислити подвійний інтеграл $\iint_D \left(44xy + 16x^3y^3\right)dxdy$, де D – область, обмежена лініями $x=1,\ y=x^2,\ y=-\sqrt[3]{x}$.

3. Обчислити площу області, обмеженої лініями:

а) $y=\frac{1}{x}, \quad y=\sqrt{x}, \quad x=16$;

б) $y^2-2y+x^2=0,\ y^2-4y+x^2=0,\ y=x,\ x=0$.

4. Знайти масу пластинки D, обмеженої кривими

$$x=2,\ y=0,\ y^2=2x,\ (y\ge 0),$$

із заданою поверхневою густиною $\mu(x,y)=\frac{7x^2}{4}+y$.

5. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint_V y^2 ch(xy)dxdydz$, де V – область, обмежена площинами $x=0, \quad y=-1, \quad y=x, \quad z=0, \quad z=2$.

6. Обчислити об’єм тіла, обмеженого поверхнями:

а) $x^2+y^2=2y, \quad z=\frac{13}{4}-x^2, \quad z=0$;

б) $z=\sqrt{36-x^2-y^2}, \quad 9z=x^2+y^2$.

7. Обчислити масу тіла, обмеженого поверхнями $16\left(x^2+y^2\right)=z^2, \quad x^2+y^2=1, \quad x=0, \quad y=0, \quad z=0, (x\ge 0,\ y\ge 0, z\ge 0)$, якщо об’ємна густина $\mu(x,y,z)=5\left(x^2+y^2\right)$.

8. Знайти масу кривої $L: x = 4\cos^3 t,\ y = 4\sin^3 t$, якщо $0 \le t \le \frac{\pi}{4}$ та лінійна густина розподілу маси $\mu(x, y) = y$.

9. Знайти роботу сили $\vec{F} = y\vec{i} - x\vec{j}$ під час переміщення вздовж лінії L від точки M до точки N, якщо L визначається рівнянням $x^2 + y^2 = 4, \quad (y \ge 0)$, а $M(0;\ 2), \quad N(-2;\ 0)$.

10. Знайти градієнт $\operatorname{grad} u$ скалярного поля:

а) $z = -x^4 y^6 + x^3 - yx + 2y - 1;$

б) $u = \ln\left(x^2 + z^2\right) - y^3 x + 5z$ у точці $M_0(-1;3;-2)$.

11. З'ясувати, чи є векторне поле $\vec{a}$ соленоїдальним і потенціальним, якщо $\vec{a} = (2x - z)\vec{i} + (2y - xz)\vec{j} + (4 - 2x)\vec{k}$.

12. Знайти потік векторного поля $\vec{F}$ через замкнену поверхню S (нормаль зовнішня):

а) $\vec{F} = (2yz - x)\vec{i} + (xz + 2y)\vec{j} + (x^2 + z)\vec{k}$,

$S:\ y - x + z = 1, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0;$

б) $\vec{F} = (2x + y)\vec{i} + (y + 2z)\vec{k}$,

$S:\ z = 2 - 4(x^2 + y^2), \quad z = 4(x^2 + y^2).$

13. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a} = y\vec{i} - 2x\vec{j} + z^2\vec{k}$ уздовж контура $\Gamma = \left\{(x; y; z): \quad z = 4\left(x^2 + y^2\right) + 2, \quad z = 6\right\}$.

14. Використовуючи формулу Стокса, знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a} = -2y\vec{i} + z\vec{j} - 7y\vec{k}$ уздовж контура

$$\Gamma = \left\{(x; y; z): \quad \frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{9} = 1, \quad 5x + 2y + z = 10\right\}.$$

Варіант 22

1. На площині Oxy побудувати область інтегрування та змінити порядок інтегрування в інтегралах:

а) $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{-1} dy \int\limits_{-\sqrt{2-y^2}}^{0} f(x,y)dx + \int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{y}^{0} f(x,y)dx$;

б) $\int\limits_{-1}^{4} dx \int\limits_{-\sqrt{1+x}}^{\sqrt{1+x}} f(x,y)dy$.

2. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D \left(4xy + 176x^3y^3\right)dxdy$, де D – область, обмежена лініями $x=1,\ y=-x^2,\ y=\sqrt[3]{x}$.

3. Обчислити площу області, обмеженої лініями:

а) $y=\dfrac{2}{x}, \quad y=7e^x, \quad y=2, \quad y=7$;

б) $x^2-2x+y^2=0,\ x^2-4x+y^2=0,\ y=\sqrt{3}\,x,\ y=0$.

4. Знайти масу пластинки D, обмеженої кривими

$$x^2+y^2=1,\ x^2+y^2=9,\ x=0,\ y=0,\ (x\ge 0,\ y\le 0),$$

із заданою поверхневою густиною $\mu(x,y)=\dfrac{2x-y}{x^2+y^2}$.

5. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint\limits_V y^2 z\,ch(xyz)dxdydz$, де V – область, обмежена площинами $x=1, \quad y=1, \quad z=1, \quad x=0, \quad y=0, \quad z=0$.

6. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями:

а) $x^2+y^2=3y, \quad x^2+y^2=6y, \quad z=\sqrt{x^2+y^2}, \quad z=0$;

б) $z=9\sqrt{x^2+y^2}, \quad z=22-x^2-y^2$.

7. Обчислити масу тіла, обмеженого поверхнями $x^2+y^2+z^2=16, \quad x^2+y^2=4, \quad \left(x^2+y^2\le 4\right)$, якщо об'ємна густина $\mu(x,y,z)=|z|$.

8. Знайти масу однорідної кривої

$$L=\left\{(x;y):x=\left(t^2-2\right)\sin t+2t\cos t,\ y=\left(2-t^2\right)\cos t+2t\sin t,\ 0\le t\le\frac{\pi}{2}\right\}.$$

9. Знайти роботу сили $\vec{F}=x^2\vec{j}$ під час переміщення вздовж лінії L від точки M до точки N, якщо L визначається рівнянням $x=4\cos t,\quad y=4\sin t$, а $M(4;\,0),\quad N(0;\,4)$.

10. Знайти градієнт $\operatorname{grad} u$ скалярного поля:

а) $u=3x^5-y^3x+2y^2+5x-3$;

б) $u=2tgx-zy^3+\ln(y-2)$ у точці $M_0(0;4;-2)$.

11. З'ясувати, чи є векторне поле $\vec{a}$ соленоїдальним і потенціальним, якщо $\vec{a}=(z-6y)\vec{i}+\left(x^2-y\right)\vec{j}+(\sin x-y)\vec{k}$.

12. Знайти потік векторного поля $\vec{F}$ через замкнену поверхню S (нормаль зовнішня):

а) $\vec{F}=(\sin z+2x)\vec{i}+(\sin x-3y)\vec{j}+(\sin y+2z)\vec{k}$,

$S:\ x^2+y^2=z^2,\ z=3$;

б) $\vec{F}=(2y-3z)\vec{i}+(3x+2z)\vec{j}+(x+y+z)\vec{k}$,

$S: x^2+y^2=1,\quad z=4-x-y,\quad z=0$.

13. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a}=(x+y)\vec{i}-x\vec{j}+6\vec{k}$ уздовж контура $\Gamma=\{(x;y;z):\quad x^2+y^2=1,\quad z=2\}$.

14. Використовуючи формулу Стокса, знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a}=5z\,\vec{i}+4y\vec{j}-2y\vec{k}$ уздовж контура

$$\Gamma=\left\{(x;y;z):\quad \frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}=1,\quad 2x+5y-4z=20\right\}.$$

Варіант 23

1. На площині Oxy побудувати область інтегрування та змінити порядок інтегрування в інтегралах:

а) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{x^3} f(x,y)dy + \int\limits_1^2 dx \int\limits_0^{2-x} f(x,y)dy$;

б) $\int\limits_{-1}^{2} dx \int\limits_{x^2-1}^{x+1} f(x,y)dy$.

2. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D \left(xy - 4x^3y^3\right)dxdy$, де D – область, обмежена лініями $x=1, y=x^3, y=-\sqrt{x}$.

3. Обчислити площу області, обмеженої лініями:

а) $x = 27 - y^2, \quad x = -6y$;

б) $y^2 - 6y + x^2 = 0, \ y^2 - 8y + x^2 = 0, \ y = x, \ x = 0$.

4. Знайти масу пластинки D, обмеженої кривими

$$x = 2, y = 0, y^2 = \frac{x}{2}, (y \ge 0),$$

із заданою поверхневою густиною $\mu(x,y) = \frac{7x^2}{2} + 8y$.

5. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint\limits_V x^2 \sin\frac{\pi xy}{2} dxdydz$, де V – область, обмежена площинами $x = 2, \quad y = x, \quad y = 0, \ z = 0, \quad z = \pi$.

6. Обчислити об’єм тіла, обмеженого поверхнями:

а) $x^2 + y^2 = 4\sqrt{2}x, \quad z = x^2 + y^2 - 16, \quad z = 0, \quad (z \ge 0)$;

б) $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}, \quad z = \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{15}}$.

7. Обчислити масу тіла, обмеженого поверхнями $x^2 + y^2 = 4, \quad x^2 + y^2 = 4z, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0, (x \ge 0, \ y \ge 0)$, якщо об’ємна густина $\mu(x,y,z) = 5y$.

8. Знайти масу частини кривої $L: y = 2x + 1$ від точки $A(-1;-1)$ до точки $B(0;1)$, якщо лінійна густина розподілу маси $\mu(x, y) = xy$.

9. Знайти роботу сили $\vec{F} = (xy - x^2)\vec{i} + x\vec{j}$ під час переміщення вздовж лінії L від точки M до точки N, якщо L визначається рівнянням $y = 2x^2$, а $M(-1;\ 2)$, $N(0;\ 0)$.

10. Знайти градієнт $\operatorname{grad} u$ скалярного поля:

а) $u = -x^2 y^6 + 5x - 3y^2 x^3 + 2y - 1$;

б) $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} + 3x - 2y$ у точці $M_0(-1;-2;2)$.

11. З'ясувати, чи є векторне поле $\vec{a}$ соленоїдальним і потенціальним, якщо $\vec{a} = (x + 2z)\vec{i} + (y - xz)\vec{j} + (3 - 2z)\vec{k}$.

12. Знайти потік векторного поля $\vec{F}$ через замкнену поверхню S (нормаль зовнішня):

а) $\vec{F} = \left(\cos z + \dfrac{x}{4}\right)\vec{i} + (e^x + \dfrac{y}{4})\vec{j} + (\dfrac{z}{4} - 1)\vec{k}$,

$S:\ x^2 + y^2 + z^2 = 2z + 3$;

б) $\vec{F} = 3x^2\vec{i} - 2x^2 y\vec{j} + (2x - 1)z\vec{k}$,

$S:\ x^2 + y^2 = 4, \quad z = 0, \quad z = 1$.

13. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a} = 4\vec{i} + 3x\vec{j} + 3xz\vec{k}$ уздовж контура $\Gamma = \{(x; y; z):\quad x^2 + y^2 - z^2, \quad z = 3\}$.

14. Використовуючи формулу Стокса, знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a} = 3z\vec{i} + 3y\vec{j} + y\vec{k}$ уздовж контура

$$\Gamma = \left\{(x; y; z):\quad \frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{81} = 1, \quad -x + 2y + 6z - 6 = 0\right\}.$$

Варіант 24

1. На площині Oxy побудувати область інтегрування та змінити порядок інтегрування в інтегралах:

а) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{-\sqrt{x}}^{0} f(x,y)dy + \int\limits_1^2 dx \int\limits_{-\sqrt{2-x}}^{0} f(x,y)dy;$

б) $\int\limits_0^4 dx \int\limits_{2\sqrt{x}}^{8-x} f(x,y)dy.$

2. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D \left(4xy + 176x^3y^3\right)dxdy$, де D – область, обмежена лініями $x=1,\ y=-x^3,\ y=\sqrt{x}$.

3. Обчислити площу області, обмеженої лініями:

а) $6x = y^2, \quad x = \sqrt{72 - y^2}, \quad y = 0 \quad (y \geq 0);$

б) $x^2 - 4x + y^2 = 0,\ x^2 - 8x + y^2 = 0,\ y = \sqrt{3}\,x,\ y = 0.$

4. Знайти масу пластинки D, обмеженої кривими

$$x^2 + y^2 = 1,\ x^2 + y^2 = 25,\ x = 0,\ y = 0,\ (x \geq 0,\ y \leq 0),$$

із заданою поверхневою густиною $\mu(x,y) = \dfrac{x - 4y}{x^2 + y^2}$.

5. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint\limits_V y^2 z \cos\dfrac{xyz}{9}\,dxdydz$, де V – область, обмежена площинами $x = 9, \quad y = 1, \quad z = 2\pi, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0.$

6. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями:

а) $x^2 + y^2 = 4x, \quad z = 12 - y^2, \quad z = 0;$

б) $z = \sqrt{36 - x^2 - y^2}, \quad z = 2, \quad x^2 + y^2 = 27$ (внутрішня частина циліндра).

7. Обчислити масу тіла, обмеженого поверхнями $x^2 + y^2 = z^2, \quad x^2 + y^2 = z, \quad x = 0, \quad y = 0, (x \geq 0,\ y \geq 0)$, якщо об'ємна густина $\mu(x,y,z) = 35yz$.

8. Знайти масу кривої $L: y = 2x^2$ від точки $A(-1;2)$ до точки $B(2;8)$, якщо лінійна густина розподілу маси $\mu(x, y) = x$.

9. Знайти роботу сили $\vec{F} = \frac{y}{x}\vec{i} + x\vec{j}$ під час переміщення вздовж лінії L від точки M до точки N, якщо L визначається рівнянням $y = \ln x$, а $M(1;\,0)$, $N(e;\,1)$.

10. Знайти градієнт $\operatorname{grad} u$ скалярного поля:

а) $u = 2x^3y^2 + \cos y - y^2x - 3y + 2$;

б) $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} + e^{3z}$ у точці $M_0(-3;0;2)$.

11. З'ясувати, чи є векторне поле $\vec{a}$ соленоїдальним і потенціальним, якщо $\vec{a} = (z + y)\vec{i} + 2z\vec{j} + 3y\vec{k}$.

12. Знайти потік векторного поля $\vec{F}$ через замкнену поверхню S (нормаль зовнішня):

а) $\vec{F} = \left(\sqrt{z} + 1 + x\right)\vec{i} + (2x + y)\vec{j} + (\sin x + z)\vec{k}$,

$S:\ x^2 + y^2 = z^2, \quad z = 1$;

б) $\vec{F} = -2x\vec{i} + z\vec{j} + (x + y)\vec{k}$,

$S:\ x^2 + y^2 = 2y, \quad z = x^2 + y^2, \quad z = 0$.

13. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a} = -y\vec{i} + x\vec{j} + 3z^2\vec{k}$ уздовж контура $\Gamma = \left\{(x; y; z):\ \ x^2 + y^2 + z^2 = 9,\ \ x^2 + y^2 = 1\ \ (z > 0)\right\}$.

14. Використовуючи формулу Стокса, знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a} = 3z\vec{i} - 2y\vec{j} + 2y\vec{k}$ уздовж контура

$$\Gamma = \left\{(x; y; z):\ \ \frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{81} = 1,\ \ -x + 2y + 6z - 6 = 0\right\}.$$

Варіант 25

1. На площині Oxy побудувати область інтегрування та змінити порядок інтегрування в інтегралах:

а) $\int_0^1 dx \int_0^x f(x,y)dy + \int_1^{\sqrt{2}} dx \int_0^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)dy$;

б) $\int_0^1 dx \int_x^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)dy$.

2. Обчислити подвійний інтеграл $\iint_D \left(6x^2y^2 + \frac{25}{3}x^4y^4\right)dxdy$,

де D – область, обмежена лініями $x=1,\ y=x^2,\ y=-\sqrt{x}$.

3. Обчислити площу області, обмеженої лініями:

а) $y=\sqrt{6-x^2},\quad y=\sqrt{6}-\sqrt{6-x^2}$;

б) $y^2-4y+x^2=0,\ y^2-8y+x^2=0,\ y=x,\ x=0$.

4. Знайти масу пластинки D, обмеженої кривими

$$x=1,\ y=0,\ y^2=4x,\ (y\ge 0)$$

із заданою поверхневою густиною $\mu(x,y)=6x+3y^2$.

5. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint_V x^2\sin(\pi xy)dxdydz$, де V – область, обмежена площинами $x=1,\quad y=2x,\quad y=0,\quad z=0,\quad z=4\pi$.

6. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями:

а) $x^2+y^2=4y,\quad x^2+y^2=7y,\quad z=\sqrt{x^2+y^2},\quad z=0$;

б) $z=\sqrt{\frac{4}{9}-x^2-y^2},\quad z=x^2+y^2$.

7. Обчислити масу тіла, обмеженого поверхнями $x^2+y^2+z^2=1,\quad x^2+y^2=z^2,\quad x=0,\quad y=0,(x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0)$, якщо об'ємна густина $\mu(x,y,z)=32z$.

8. Знайти масу кривої $L: x = 6\cos^3 t,\ y = 6\sin^3 t$, якщо $0 \le t \le \dfrac{\pi}{3}$ та лінійна густина розподілу маси $\mu(x, y) = x$.

9. Знайти роботу сили $\vec{F} = \left(x^2 - y\right)\vec{i} - \left(x - y^2\right)\vec{j}$ під час переміщення вздовж лінії L від точки M до точки N, якщо L визначається рівнянням $x = 5\cos t,\quad y = 5\sin t$, а $M(5;\ 0),\quad N(0;\ 5)$.

10. Знайти градієнт $\operatorname{grad} u$ скалярного поля:

а) $z = x^5 y^4 + x^3 - xy + 2y - 12x + 3$;

б) $u = x\sqrt{y^2 + z^2} - y\sqrt{x^2 + z^2} - y^3$ у точці $M_0(3;-1;0)$.

11. З'ясувати, чи є векторне поле $\vec{a}$ соленоїдальним і потенціальним, якщо $\vec{a} = (2x - z)\vec{i} + (2y - xz)\vec{j} + (3 + x)\vec{k}$.

12. Знайти потік векторного поля $\vec{F}$ через замкнену поверхню S (нормаль зовнішня):

а) $\vec{F} = (5x - 6y)\vec{i} + (11x^2 + 2y)\vec{j} + (x^2 - 4z)\vec{k}$,

$S:\ x + y + 2z = 2,\quad x = 0,\quad y = 0,\quad z = 0$;

б) $\vec{F} = (x + y)\vec{i} + (y + z)\vec{j} + (z + x)\vec{k}$,

$S:\ y = 2x,\quad y = 4x,\quad x = 1,\quad z = y^2,\quad z = 0$.

13. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a} = yz\,\vec{i} - xz\,\vec{j} + xy\vec{k}$ уздовж контура $\Gamma = \left\{(x; y; z):\quad x^2 + y^2 + z^2 = 9,\quad x^2 + y^2 = 9\right\}$.

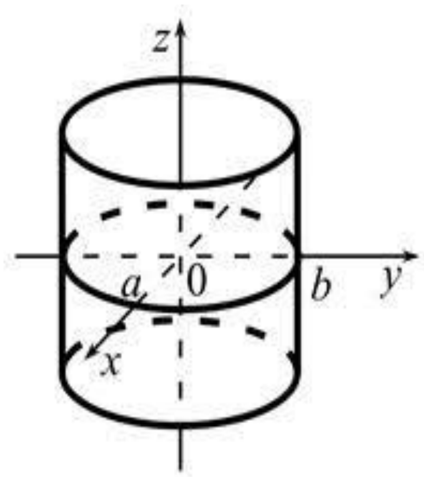
14. Використовуючи формулу Стокса, знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a} = 3z\,\vec{i} - 2y\,\vec{j} + 2y\vec{k}$ уздовж контура

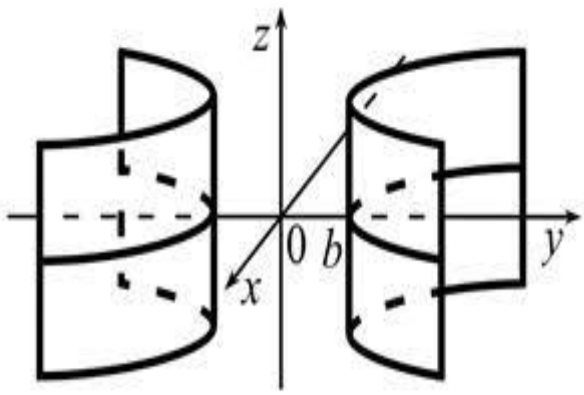
$$\Gamma = \left\{(x; y; z):\quad \frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{144} = 1,\quad 2x - y + 6z = 6\right\}.$$

ДОДАТКИ

Додаток 1.

Деякі поверхні другого порядку та їх рівняння



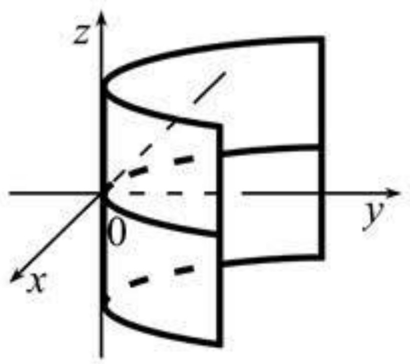


Еліптичний циліндр

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

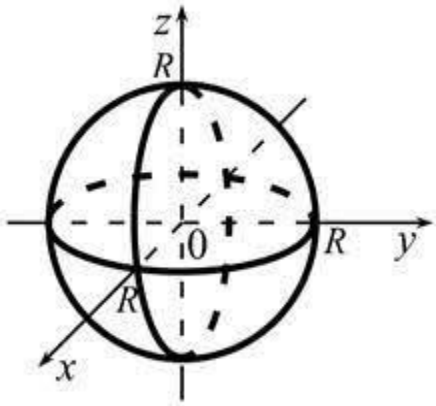
Гіперболічний циліндр

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$$



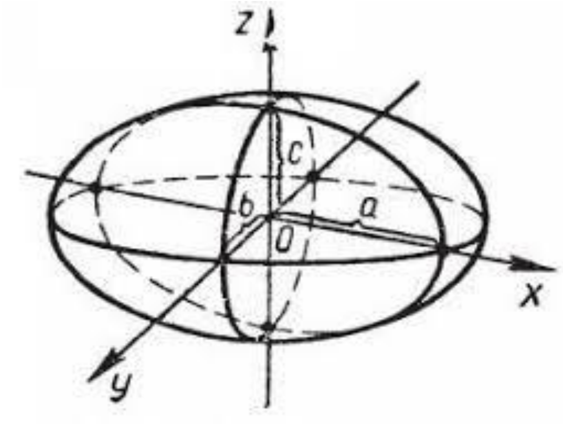
Параболічний циліндр

$$x^2=2py$$



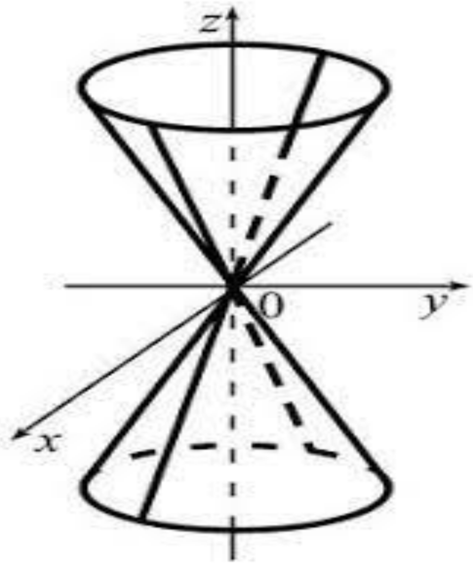
Сфера

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$



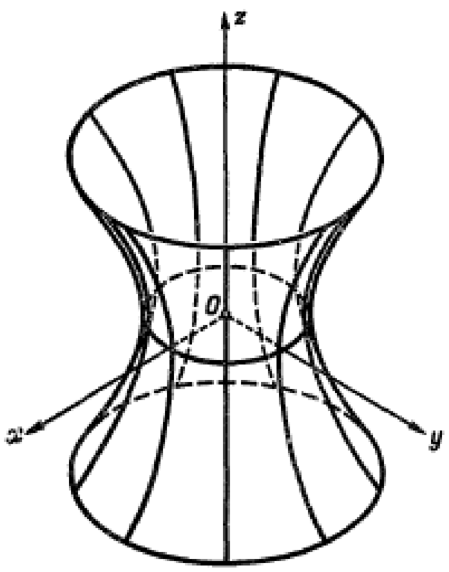
Еліпсоїд

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$



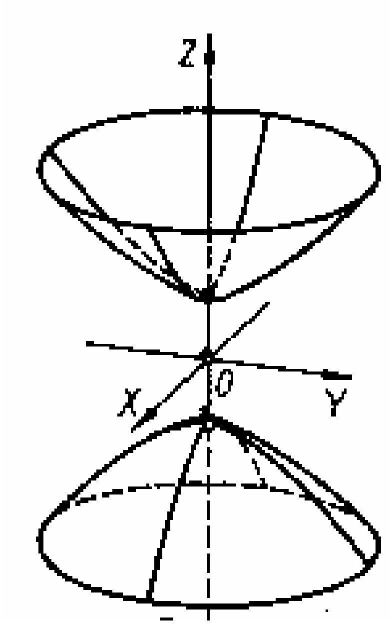
Еліптичний конус

$$\frac{z^2}{c^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$



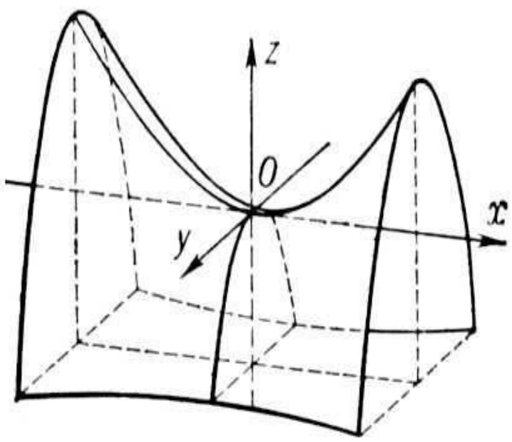
Однопорожнинний гіперболоїд

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$



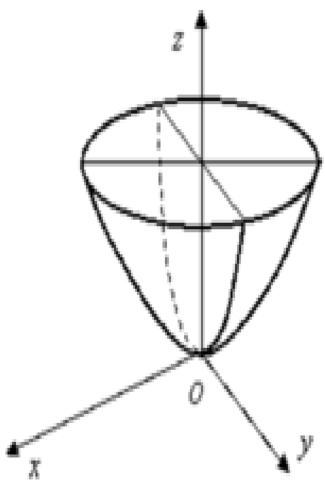
Двопорожнинний гіперболоїд

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$



Гіперболічний параболоїд («сідло»)

$$z=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$$



Еліптичний параболоїд

$$z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$$

Додаток 2.

Криволінійні системи координат

Деякі задачі математики зручно розв'язувати в інших, криволінійних, системах координат, до яких належать полярна, циліндрична, сферична тощо.

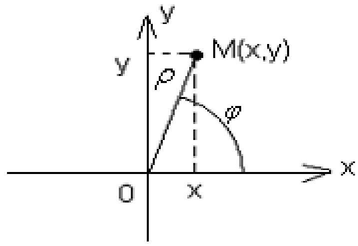
Полярна система координат

Полярну систему координат (ПСК) задають полюсом точкою O і полярною віссю OP. Координати довільної точки M у цій системі визначають парою чисел (ρ,φ), де ρ (полярний радіус) – відстань від полюса до заданої точки, φ (полярний кут) – кут між полярною віссю і полярним радіусом, причому $0 \le \rho < +\infty$, $0 \le \varphi < 2\pi$. Якщо полюс ПСК сумістити з початком ПДСК, а полярну вісь – з додатним напрямком осі абсцис, то отримаємо зв'язок між полярною і декартовою системами координат:

$$x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi,$$

модуль якобіана $|J| = \rho$, $dxdy = \rho d\rho d\varphi$.

Рівняння кола $x^2 + y^2 = R^2$ в ПСК набуває вигляду $\rho = R.$



Узагальнена полярна система координат

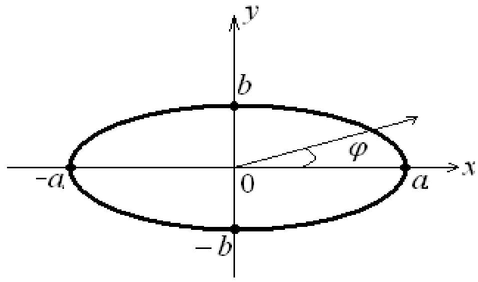
Узагальнену полярну систему координат (УПСК) вводять на площині Oxy аналогічно до ПСК. Зв'язок між УПСК і ПДСК задають формулами:

$$x = a\rho\cos\varphi,\ y = b\rho\sin\varphi,$$

модуль якобіана $|J| = ab\rho$, $dxdy = ab\rho d\rho d\varphi$.

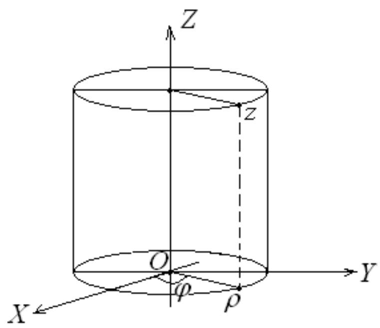
Зауважимо, що $0 \le \rho < +\infty$, $0 \le \varphi < 2\pi$.

Рівняння еліпса $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ в УПСК набуває вигляду $\rho = 1$.



Циліндрична система координат

Циліндричну систему координат (ЦСК) задають полюсом, точкою O, полярною віссю OP і віссю аплікат Oz. Координати довільної точки простору M визначають трійкою чисел (ρ, φ, z).

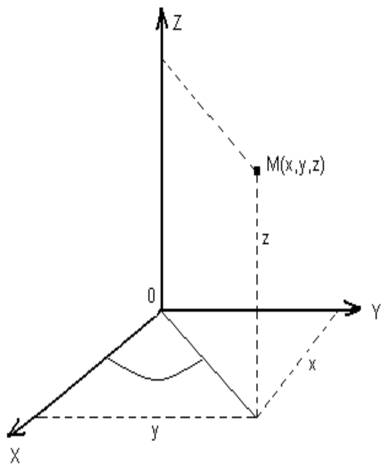


Якщо полюс ЦСК сумістити з початком O ПДСК, полярну вісь – з додатним напрямком осі абсцис, то отримаємо координати точки $M(\varphi, \rho, z)$ в ЦСК. Формули переходу від ПДСК до ЦСК мають вигляд:

$$x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi,\ z = z,$$

модуль якобіана $|J| = \rho$, $dxdydz = \rho d\rho d\varphi dz$.

Рівняння кола $x^2 + y^2 = R^2$ в ЦСК набуває вигляду $\rho = R.$



Узагальнена циліндрична система координат

Узагальнену циліндричну систему координат (УЦСК) вводять у просторі $Oxyz$ аналогічно до ЦСК, але для еліптичних циліндричних поверхонь. Зв’язок між УЦСК і ПДСК задають формулами

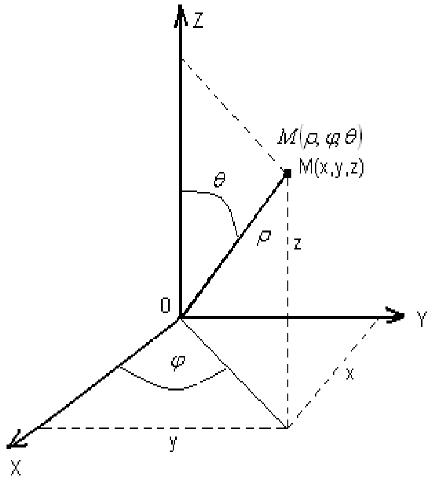
$x = a\rho\cos\varphi, \quad y = b\rho\sin\varphi, \quad z = z,$ модуль якобіана $|J| = ab\rho$,

$$dxdydz = ab\rho d\rho d\varphi dz.$$

Зауважимо, що в УЦСК $0 \le \rho < +\infty$, $0 \le \varphi < 2\pi$, $-\infty < z < +\infty$. Рівняння еліптичного циліндра $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ в УЦСК набуває вигляду $\rho = 1$.

Сферична система координат

Сферичну систему координат (ССК) задають полюсом – точкою O, полярною віссю OP і полярною півплощиною, прилеглою до полярної осі. Якщо полюс ССК сумістити з початком O системи $Oxyz$, полярну вісь – з віссю Oz, а полярну півплощину – з півплощиною Ozx, то координати довільної точки M простору визначаються трійкою чисел (ρ,φ,θ), де $\rho-$ відстань від полюса O до точки M; $\varphi-$ кут між віссю Ox і проекцією радіуса-вектора OM на площину Oxy; $\theta-$ кут між променем OM і полярною віссю Oz, причому $0\le\rho<+\infty$, $0\le\varphi<2\pi$, $0\le\theta\le\pi$.



Зв'язок між ССК і ПДСК задають формулами

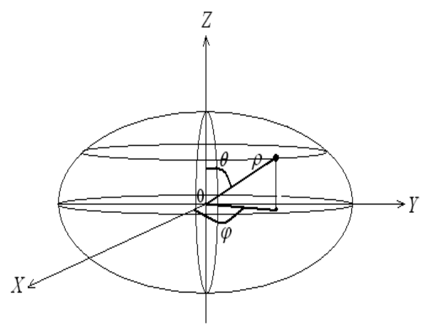
$$x=\rho\cos\varphi\sin\theta,\ y=\rho\sin\varphi\sin\theta,\ z=\rho\cos\theta,$$

$$|J|=\rho^2\sin\theta,\ dxdydz=\rho^2\sin\theta d\rho d\varphi d\theta.$$

Рівняння сфери $x^2+y^2+z^2=R^2$ в ССК набуває вигляду $\rho=R.$.

Узагальнена сферична система координат

Узагальнену сферичну систему координат (УССК) вводять у просторі $Oxyz$ аналогічно до ССК, але для еліпсоїда. Зв'язок між УССК і ПДСК задають формулами



$$x=a\rho\cos\varphi\sin\theta,\quad y=b\rho\sin\varphi\sin\theta,\quad z=c\rho\cos\theta,$$

$$|J|=abc\rho^2\sin\theta,\ dxdydz=abc\rho^2\sin\theta d\rho d\varphi dz.$$

Зауважимо, що в УССК $0\le\rho<+\infty$,

$0\le\varphi<2\pi$, $0\le\theta\le\pi$. Рівняння еліпсоїда $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ в УССК набуває вигляду $\rho=1$.

Додаток 3.

Основні формули

1. Площа плоскої області D в ПДСК і ПСК

$$S = \iint\limits_{D_{xy}} dxdy = \iint\limits_{D_{\rho\varphi}} \rho d\rho d\varphi .$$

2. Об'єм тіла в ПДСК, ЦСК, ССК:

$$V = \iiint\limits_{V_{xyz}} dxdydz = \iiint\limits_{V_{\rho\varphi z}} \rho d\rho d\varphi dz = \iiint\limits_{V_{\rho\varphi\theta}} \rho^2 \sin\theta d\rho d\varphi d\theta .$$

3. Маса пластинки D з поверхневою густиною $\mu = \mu(x, y)$

$$m = \iint\limits_{D} \mu(x, y) dxdy .$$

4. Маса тіла V з густиною $\mu = \mu(x, y, z)$

$$m = \iiint\limits_{V} \mu(x, y, z) dxdydz.$$

5. Маса дуги кривої L з лінійною густиною $\mu = \mu(x, y)$

$$m = \int\limits_{L} \mu(x, y) dl ,$$

де dl – елемент дуги кривої, який обчислюють за формулами залежно від виду задання кривої:

а) криву L задано в ПДСК: $L = \{(x; y) : y = y(x), x_1 \le x \le x_2\}$, тоді

$$dl = \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx ;$$

б) криву L задано параметрично $L = \{(x; y) : x = x(t)\ y = y(t), t_1 \le t \le t_2\}$, тоді

$$dl = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt ;$$

в) криву L задано в ПСК $L = \{(\rho; \varphi) : \rho = \rho(\varphi), \varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2\}$, тоді

$$dl = \sqrt{(\rho(\varphi))^2 + (\rho'(\varphi))^2} d\varphi .$$

6. Елементи теорії поля.

6.1. Задано скалярне поле $u = u(x, y, z)$:

а) градієнт скалярного поля

$$\operatorname{grad} u(x, y, z) = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k};$$

б) одиничний вектор нормалі до поверхні $\sigma : F(x, y, z) = 0$

$$\vec{n} = \frac{\operatorname{grad} F(x, y, z)}{|\operatorname{grad} F(x, y, z)|} = \frac{\frac{\partial F}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial F}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial F}{\partial z}\vec{k}}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}}.$$

6.2. Задано векторне поле $\vec{a} = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$:

а) ротор векторного поля: $\operatorname{rot}\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$;

б) дивергенція векторного поля:

$$\operatorname{div}\vec{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z};$$

в) умова потенціальності векторного поля: $\operatorname{rot}\vec{a} = \vec{0}$;

г) умова соленоїдальності векторного поля: $\operatorname{div}\vec{a} = 0$;

д) умови гармонічності векторного поля:

$$\operatorname{rot}\vec{a} = \vec{0} \text{ та } \operatorname{div}\vec{a} = 0;$$

е) потік векторного поля $\vec{a}$ через поверхню σ за напрямком одиничного вектора нормалі $\vec{n}$ до поверхні σ:

$$\Pi = \iint_{\sigma} \left(\vec{a}, \vec{n}\right) d\sigma ,$$

де $\left(\vec{a},\ \vec{n}\right)$ – скалярний добуток векторів;

ж) формула Остроградського-Гаусса для обчислення потоку векторного поля через замкнену поверхню σ в напрямку зовнішньої нормалі $\vec{n}$:

$$\Pi = \oiint_{\sigma} \left(\vec{a}, \vec{n}\right) d\sigma = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{a}\, dxdydz ,$$

де $\left(\vec{a},\ \vec{n}\right)$ – скалярний добуток векторів;

з) циркуляція векторного поля $\vec{a}$ вздовж замкненого контура Γ:

$$Ц = \oint_{\Gamma} \vec{a} d\vec{r} = \oint_{\Gamma} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz ;$$

и) формула Стокса для обчислення циркуляції векторного поля $\vec{a}$:

$$Ц = \iint_{\sigma} \left(\operatorname{rot} \vec{a}, \vec{n}\right) d\sigma ,$$

де $\left(\operatorname{rot}\vec{a},\ \vec{n}\right)$ – скалярний добуток векторів;

к) робота А силового поля

$$\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$$

у разі переміщення матеріальної точки уздовж кривої L:

$$A = \int_{L} \left(\vec{F},\ d\vec{r}\right) = \int_{L} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz .$$

Додаток 4.

Правила оформлення титульної сторінки

Національно технічний університет України
«Київський політехнічний інститут ім. Ігоря Сікорського»
ІНЖЕНЕРНО-ХІМІЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Розрахункова робота з вищої математики
студента І курсу групи ЛП–51
Антоненка Сергія Івановича

Тема: КРАТНІ ІНТЕГРАЛИ ТА ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ПОЛЯ

Варіант № 2

Протокол виконання роботи

1		2	3		4	5	6		7	8	9	10		11	12		13	14
а	б		а	б			а	б				а	б		а	б		

Роботу перевірив викладач
кафедри математичної фізики
та диференціальних рівнянь
доцент
Войтенко Іван Сергійович

Київ 2025

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ТА РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Герасимчук В. С. Вища математика. Повний курс у прикладах і задачах. Кратні, криволінійні та поверхневі інтеграли. Елементи теорії поля. Ряди. Прикладні задачі : навч. посіб. / В. С. Герасимчук, Г. С. Васильченко, В. І. Кравцов. – Київ : Книги України ЛТД, 2009. – 400 с.

2. Дубовик В. П. Вища математика: навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл. / В. П. Дубовик, І. І. Юрик. – Київ: Ігнатекс–Україна, 2013. – 648 с.

3. Дудкін М. Є. Вища математика [Електрон. ресурс]: підруч. для здобувачів ступеня бакалавра за інженер. спец. / М. Є. Дудкін, О. Ю. Дюженкова, І. В. Степахно; КПІ ім. Ігоря Сікорського. – Електрон. текстові дані (1файл: 10,96 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2022. – 449 с. – Назва з екрана. – Режим доступу: https://ela.kpi.ua/handle/123456789/51064

4. Кушлик-Дивульська О. І. Вища математика. Теорія поля. Числові ряди [Електрон. ресурс]: навч. посіб. для студ. спец. 186 «Видавництво та поліграфія» / КПІ ім. Ігоря Сікорського; уклад.: О. І. Кушлик-Дивульська, Н. В. Поліщук, Н. П. Селезньова. – Електрон. текстові дані (1 файл: 3,2 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2023. – 162 с. – Назва з екрана. – Режим доступу: https://ela.kpi.ua/handle/123456789/62615

5. Призва Г. Й. Вища математика: підручник. У 2-х кн. – Кн. 1. Основні розділи / Г. Й. Призва, В. В. Плахотник, Л. Д. Гординський та ін.; за ред. Г. Л. Кулініча. – Київ: Либідь, 2003. – 400 с.

ЗМІСТ

Вступ……………………………………………………….……………..…3

1. Теоретичні питання до розділу «Кратні інтеграли»……………………..….4

2. Теоретичні питання до розділу «Елементи теорії поля»…..……………..5

3. Приклади розв'язування типових завдань………………………………..6

Завдання 1 (зміна порядку інтегрування у подвійному інтегралі)………..6

Завдання 2 (обчислення подвійного інтеграла)…………………...........8

Завдання 3 (обчислення площі області, обмеженої заданими лініями)….12

Завдання 4 (знаходження маси пластинки, обмеженої кривою)…………16

Завдання 5 (обчислення потрійного інтеграла)……………………………18

Завдання 6 (знаходження об'єму тіла за допомогою потрійного інтеграла)……………………………………………………..19

Завдання 7 (знаходження маси тіла за допомогою потрійного інтеграла).22

Завдання 8 (знаходження маси кривої за допомогою криволінійного інтеграла)…………………………………………………….…24

Завдання 9 (знаходження роботи силового поля)……………………..…27

Завдання 10 (знаходження градієнта скалярного поля)…………………...29

Завдання 11 (дослідження векторного поля на потенціальність та соленоїдальність)…………………………………..…31

Завдання 12 (знаходження потоку векторного поля)..…..………………32

Завдання 13 (знаходження циркуляції векторного поля)………………….35

Завдання 14 (знаходження циркуляції векторного поля за формулою Стокса)…………………………………………………….37

4. Варіанти завдань розрахункової роботи……………......……………44

Додатки………………………………………………………….........94

Додаток 1. Деякі поверхні другого порядку та їх рівняння……………94

Додаток 2. Криволінійні системи координат ……………………………97

Додаток 3. Основні формули…………………………………..………100

Додаток 4. Правила оформлення титульної сторінки………………...103

Список використаної та рекомендованої літератури…………………....104