УДК 517.9

В.О. Капустян, П.О. Касьянов, О.П. Когут

ВЛАСТИВОСТІ РОЗВ'ЯЗКІВ КЛАСУ ПАРАМЕТРИЗОВАНИХ ОПЕРАТОРНИХ ВКЛЮЧЕНЬ

Вступ

Операторні включення $A(y) \ni f$ є об'єктом інтенсивних досліджень упродовж останніх десятиліть. Вони застосовуються при розв'язанні задач математичної фізики, диференціальних рівнянь у частинних похідних, диференціальні оператори яких допускають розрив по фазовій змінній, диференціальних рівнянь із розривною правою частиною, задач теорії керування та оптимізації.

Основні результати теорії розв'язності нелінійних операторних рівнянь, породжуючі оператори яких задовольняли властивості монотонності та псевдомонотонності, викладені Ж.-Л. Ліонсом [2], Х. Гаєвським, К. Грегером, К.Захаріасом [3]. Запропонована І.В. Скрипником [4] ідея переходу в класичних означеннях до підпослідовностей, яка була реалізована в працях В.С. Мельника і М.З. Згуровського, дала можливість розглядати більш широкий клас λ_0-псевдомонотонних відображень, замкнений відносно суми відображень, що для класів, які вивчались у [2, 3], було проблематичним. Так, у працях [5–8, 9–11] досліджувались проблеми розв'язності стаціонарних операторних включень, а еволюційні включення розглядалися в [12–14].

Постановка задачі

У даній статті вивчається розв'язність параметризованих операторних включень вигляду $A(y,u) \ni f$ та їх залежність від функціональних параметрів $u \in U$. Мотивацією досліджень є використання таких об'єктів при математичному моделюванні багатьох реальних процесів (див., наприклад, праці А.О. Чикрія [1]).

У статті введено аналог властивості S_k, запропонованої І.В. Скрипником [4], для випадку многозначних операторів (надалі позначатимемо її $\bar{S}_k$). Властивість $\bar{S}_k$ узагальнює клас відображень λ_0-псевдомонотонного типу і на відміну від таких операторів є інваріантною відносно операції множення відображення на (–1). Клас многозначних операторів, які задовольняють властивість $\bar{S}_k$, досі систематично не вивчався. У статті доводиться теорема про розв'язність відповідних операторних включень та досліджуються основні властивості множини їх розв'язків.

Дослідження властивостей розв'язків

Нехай X – рефлексивний банахів простір, X^* – простір, топологічно спряжений до нього, $\langle\cdot,\cdot\rangle_X : X^* \times X \to \mathbb{R}$ – операція канонічного спарювання, 2^{X^*} – сукупність всіх підмножин простору X^*, $A : X \to 2^{X^*}$ – многозначне відображення. Для такого відображення визначимо множини: $\mathrm{Dom}\, A = \{y \in X \,|\, A(y) \neq \varnothing\}$, $\mathrm{gr}\, A = \{(\xi; y) \in X^* \times X \,|\, \xi \in A(y)\}$.

Всюди далі многозначне відображення A, для якого $\mathrm{Dom}\, A = X$, будемо називати строгим і позначати його як $A : X \to 2^{X^*} \setminus \{\varnothing\}$. Із строгим многозначним відображенням A пов'яжемо його верхню $[A(y),\xi]_+ = \sup_{d \in A(y)} \langle d,\xi\rangle_X$ і нижню $[A(y),\xi]_- = \inf_{d \in A(y)} \langle d,\xi\rangle_X$ опорні функції, де $y, \xi \in X$. Будемо пов'язувати з відображенням $A : X \to 2^{X^*} \setminus \{\varnothing\}$ відображення $\mathrm{co} A : X \to 2^{X^*} \setminus \{\varnothing\}$ і $\overline{\mathrm{co}} A : X \to 2^{X^*} \setminus \{\varnothing\}$, які визначені за правилами $(\mathrm{co} A)(y) = \mathrm{co}(A(y))$ і $(\overline{\mathrm{co}} A(y)) = \overline{\mathrm{co}}(A(y))$, відповідно. Тут через $\overline{\mathrm{co}}(A(y))$ позначено слабке замикання в просторі X^* опуклої оболонки множини $A(y)$.

Твердження 1 [15]. Нехай $A, B : X \to 2^{X^*} \setminus \{\varnothing\}$. Тоді для всіх $y, v, v_1, v_2 \in X$ справедливі твердження:

- функціонал $X \ni v \to [A(y),v]_+$ є опуклим, додатно однорідним та напівнеперервним знизу;
- виконуються нерівності

$$[A(y), v_1 + v_2]_+ \le [A(y), v_1]_+ + [A(y), v_2]_+ ,$$

$$[A(y), v_1 + v_2]_- \ge [A(y), v_1]_- + [A(y), v_2]_- ,$$

$$[A(y), v_1 + v_2]_+ \ge [A(y), v_1]_+ + [A(y), v_2]_- ,$$

$$[A(y), v_1 + v_2]_- \le [A(y), v_1]_+ + [A(y), v_2]_- ;$$

- мають місце рівності

$$[A(y) + B(y), v]_+ = [A(y), v]_+ + [B(y), v]_+ ,$$

$$[A(y) + B(y), v]_- = [A(y), v]_- + [B(y), v]_- ,$$

$$\| \overline{\mathrm{co}}^* A(y) \|_+ = \| A(y) \|_+ , \; \| \overline{\mathrm{co}}^* A(y) \|_- = \| A(y) \|_- ,$$

$$[A(y), v]_+ = [\overline{\mathrm{co}}^* A(y), v]_+, \; [A(y), v]_- = [\overline{\mathrm{co}}^* A(y), v]_-;$$

- виконуються нерівності

$$[A(y), v]_+ \le \|A(y)\|_+ \|v\|_X ,$$

$$[A(y), v]_- \le \|A(y)\|_- \|v\|_X ;$$

- будуть справедливі співвідношення

$$d \in \overline{\mathrm{co}}^* A(y) \Leftrightarrow \forall \omega \in X \; [A(y), \omega]_+ \ge \langle d, w \rangle_X .$$

Нехай далі Y – рефлексивний або сепарабельний нормований простір, Y^* – простір, спряжений до нього, U – непорожня, опукла, $*$-слабко замкнена множина в Y^*. Параметризованим операторним включенням будемо називати такий об'єкт:

$$A(y,u) \ni f, \; u \in U, \qquad (1)$$

де $A : X \times U \to 2^{X^*} \backslash \{\varnothing\}$; $f \in X^*$.

Класи відображень

Введемо такі поняття.

***Означення* 1.** Многозначне відображення $A : X \times U \to 2^{X^*} \backslash \{\varnothing\}$ називається λ_0-квазімонотонним, якщо для довільної послідовності $\{y_n, u_n\}_{n\ge1} \subset X \times U$, такої, що для деяких $y_0 \in X$, $u_0 \in U$ $y_n \to y_0$ слабко в X, $u_n \to u_0$ $*$-слабко в Y^*, $d_n \to d$ слабко в X^* ($d_n \in \overline{\mathrm{co}} A(y_n, u_n)$ $\forall n \ge 1$) при $n \to +\infty$, з нерівності

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \langle d_n, y_n - y \rangle_X \le 0$$

випливає існування підпослідовності $\{y_{n_k}, u_{n_k}\}_{k\ge1}$ з $\{y_n, u_n\}_{n\ge1}$, для якої виконується нерівність

$$\underline{\lim_{k\to\infty}} \langle d_{n_k}, y_{n_k} - w \rangle_X \ge [A(y_0, u_0), y_0 - w]_- \quad \forall w \in X.$$

***Означення* 2.** Будемо говорити, що відображення $A : X \times U \to 2^{X^*} \backslash \{\varnothing\}$ задовольняє властивість $\bar{S}_k$, якщо з того, що $y_n \to y_0$ слабко в X, $U \ni u_n \to u_0 \in U$ $*$-слабко в Y^*, $d_n \to d$ слабко в X^* ($d_n \in \overline{\mathrm{co}} A(y_n, u_n)$ $\forall n \ge 1$), та з того, що

$$\langle d_n, y_n - y_0 \rangle_X \to 0 \text{ при } n \to \infty, \qquad (2)$$

випливає $d \in \overline{\mathrm{co}} A(y_0, u_0)$.

***Зауваження* 1.** Якщо $A : X \times U \to 2^{X^*} \backslash \{\varnothing\}$ задовольняє властивість $\bar{S}_k$, то оператор $(-A) : X \times U \to 2^{X^*} \backslash \{\varnothing\}$ також задовольняє дану властивість.

Наступне твердження належним чином впорядковує класи відображень типу $\bar{S}_k$ та λ_0-квазімонотонного типу.

Твердження 2. Многозначне λ_0-квазімонотонне відображення задовольняє властивість $\bar{S}_k$.

Д о в е д е н н я. Розглянемо послідовності $U \ni u_n \to u_0 \in U$ $*$-слабко в Y^* та $y_n \to y_0$ слабко в X, $d_n \to d$ слабко в X^* ($d_n \in \overline{\mathrm{co}} A(y_n, u_n)$ $\forall n \ge 1$), і нехай для них виконується співвідношення (2), а це означає, що $\lim_{n\to\infty} \langle d_n, y_n \rangle = \langle d, y_0 \rangle_X$. Доведемо, що $d \in \overline{\mathrm{co}} A(y_0, u_0)$. З того, що оператор A є λ_0-квазімонотонним, та із співвідношення (2) випливає існування підпослідовності $\{y_m, u_m\}_{m\ge1}$ з $\{y_n, u_n\}_{n\ge1}$, для якої виконується нерівність

$$\underline{\lim_{m\to\infty}} \langle d_m, y_m - w \rangle_X \ge [A(y_0, u_0), y_0 - w]_- \quad \forall w \in X.$$

Перетворимо дану нерівність. Матимемо

$$\forall w \in X \;\; [A(y_0, u_0), y_0 - w]_- \le$$

$$\le \overline{\lim_{x\to\infty}} \langle d_m, y_m \rangle_X - \underline{\lim_{x\to\infty}} \langle d_m, w \rangle_X = \langle d, y_0 - w \rangle_X .$$

Користуючись твердженням 1, отримуємо, що $d \in \overline{\mathrm{co}} A(y_0, u_0)$. Твердження доведене.

***Означення* 3.** Будемо говорити, що відображення $A : X \times U \to 2^{X^*} \backslash \{\varnothing\}$ є демізамкненим, якщо з того, що $y_n \to y_0$ сильно в X,

$U \ni u_n \to u_0 \in U$ $*$-слабко в Y^*, $d_n \to d$ слабко в X^* $(d_n \in \overline{\text{co}} A(y_n, u_n) \quad \forall n \geq 1)$, випливає, що $d \in \overline{\text{co}} A(y_0, u_0)$.

Твердження 3. Многозначне відображення, що задовольняє властивість $\overline{S}_k$, є демізамкненим.

***Означення* 4.** Многозначне відображення $A : X \to 2^{X^*} \backslash \{\varnothing\}$ задовольняє *властивість* (Π): якщо для деякого $k > 0$, деякої обмеженої множини $B \subset X$ та для деякого селектора $d \in A$ виконується нерівність $\langle d(y), y \rangle_X \leq k$ для всіх $y \in B$, то існує таке $C > 0$, що $\| d(y) \|_{X^*} \leq C$ для всіх $y \in B$.

***Зауваження* 2.** Сума многозначних відображень, що задовольняють властивість (Π), теж задовольняє властивість (Π).

***Означення* 5.** Многозначне відображення $A : X \to 2^{X^*} \backslash \{\varnothing\}$ називається:

- локально обмеженим, якщо для довільного фіксованого $y \in X$ існують константи $m > 0$ і $M > 0$, такі, що $\| A(\xi) \|_+ \leq M$, коли $\| y - \xi \|_X \leq m$;
- скінченновимірно локально обмеженим, якщо для довільного скінченновимірного простору $F \subset X$ звуження A на F є локально обмеженим.

Основні результати

***Означення* 6.** Будемо говорити, що $y \in X$ є слабким розв'язком задачі (1) при заданих $f \in X^*$ та $u \in U$, якщо $\overline{\text{co}} A(y, u) \ni f$, тобто якщо $[A(y, u), w]_+ \geq \langle f, w \rangle_X \quad \forall w \in X$.

Для фіксованих $u \in U$, $f \in X^*$ позначимо $K(u, f)$ множину слабких розв'язків включення (1).

Теорема 1. Нехай многозначне відображення $A : X \times U \to 2^{X^*} \backslash \{\varnothing\}$ задовольняє властивість $\overline{S}_k$, $U \ni u_n \to u \in U$ $*$-слабко в Y^*, $f_n \to f$ сильно в X^*. Тоді

$$\bigcap_{n \geq 1} \overline{\bigcup_{m \geq n} K(u_m, f_m)}^w \subset K(u, f), \tag{2}$$

де $\overline{U}^w$ – слабке замикання множини $U \subset X$ в X.

Більше того, якщо існують $u \in U$, $f \in X^*$, $r > 0$, такі, що

$$[A(y, u) - f, y]_+ \geq 0 \quad \forall y \in X : \| y \|_X = r, \tag{3}$$

а відображення $X \ni y \to A(y, u)$ – скінченновимірно локально обмежене і задовольняє властивість (Π), то $K(u, f)$ – непорожня, слабко замкнена множина в X.

Доведення. Нехай $\aleph(X)$ – сукупність всіх скінченновимірних підпросторів простору X, $I_F : F \to X$ – оператор вкладення, $I_F^* : X^* \to F^*$ – спряжений оператор. Для кожного $F \in \aleph(X)$ розглянемо відображення $A_F : F \to F^*$, яке визначається комутативною діаграмою:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{A(\cdot, u)} & X^* \\ \uparrow I_F & & \downarrow I_F^* \\ F & \xrightarrow{A_F} & F^*, \end{array}$$

тобто $A_F(\cdot) = I_F^* A(\cdot, u) I_F$.

Для кожного $F \in \aleph(X)$ покладемо $\overline{A}_F(\cdot) = \overline{I_F^* \overline{\text{co}} A(\cdot, u)} : F \to 2^{F^*} \backslash \{\varnothing\}$. Покажемо, що відображення $\overline{A}_F(\cdot) = \overline{\text{co}} A_F(\cdot)$ набуває опуклих компактних значень. Останнє випливає із скінченновимірної локальної обмеженості відображення $X \ni y \to A(y, u)$ та із справедливості рівності $\overline{\text{co}} I_F^* A(y, u) = I_F^* \overline{\text{co}} A(y, u) \quad \forall y \in F$, яка доводиться в [14].

Далі покажемо, що відображення $\overline{A}_F(\cdot) = \overline{I_F^* \overline{\text{co}} A(\cdot, u)} : F \to 2^{F^*} \backslash \{\varnothing\}$ є напівнеперервним зверху. Множина $\overline{A}_F(x)$ обмежена, а значить, компактна в F^*. Припустимо, що в точці $x_0 \in F$ відображення $\overline{A}_F$ не є напівнеперервним зверху. Тоді знайдеться $\varepsilon > 0$, таке, що в кожній кулі $B_{\frac{1}{n}}(x_0) = \left\{ x \in F \,|\, \| x - x_0 \|_F < \frac{1}{n} \right\}$ можна вибрати точку x_n, таку, що

$$\overline{A}_F(x_n) \not\subset B_\varepsilon(\overline{A}_F(x_0)) =$$
$$= \{z \in F^* \,|\, \mathrm{dist}\,(z, \overline{A}_F(x_0)) < \varepsilon\}.$$

Розглянемо послідовності $\{x_n\}$, $\{z_n\}$, де $z_n \in \overline{A}_F(x_n) \backslash B_\varepsilon(\overline{A}_F(x_0))$, $x_n \in B_{\frac{1}{n}}(x_0)$. Послідовність x_n збігається до x_0 в F, а послідовність z_n обмежена в силу обмеженості відображення $\overline{A}_F$. Не втрачаючи загальності, можемо вважати, що $z_n \to z_0$ в F^*. Згідно з твердженням 3 відображення A демізамкнене, звідки випливає замкненість $\overline{A}_F$. Тому $z_0 \in \overline{A}_F(x_0)$, що суперечить умові $z_n \notin B_\varepsilon(\overline{A}_F(x_0))$.

Для кожного $F \in \aleph(X)$ покладемо $\overline{B}_{r,F} = \overline{B}_r \cap F$, де $\overline{B}_r$ – замкнена куля радіуса r з центром у нулі в просторі X. Тоді

$$[\overline{A}_F(y) - f_F, y]_+ = [A(y,u) - f, y]_+ \ge 0 \quad \forall y \in \partial \overline{B}_{r,F},$$

де $f_F = I_F^* f$.

Отже, для відображення $\overline{A}_F(\cdot) - f_F$ застосуємо наслідок із [14], з якого випливає, що $\forall F \in \aleph(X) \quad \exists y_F \in \overline{B}_{r,F}$, таке, що

$$\overline{A}_F(y_F) \ni f_F. \tag{4}$$

В силу твердження з [14] останнє включення еквівалентно нерівності

$$[\overline{A}_F(y_F), w]_+ \ge \langle f_F, w\rangle_F \quad \forall w \in F. \tag{5}$$

Для довільного $F_0 \in \aleph(X)$ покладемо

$$G_{F_0} = \bigcup_{F \supset F_0} \{y_F \in \overline{B}_{r,F} \,|\, y_F \text{ задовольняє (5)}\}.$$

Очевидно, множина G_{F_0} непорожня і міститься в кулі $\overline{B}_r$. Крім того, для довільного скінченного набору $F_1, ..., F_n \in \aleph(X)$ і $F \in \aleph(X)$ таких, що $\bigcup_{i=1}^n F_i \subset F$, маємо $\varnothing \ne G_F \subset \bigcap_{i=1}^n G_{F_i}$.

Таким чином, система множин $\{\overline{G}_F^w\}$ центрована, де $\overline{G}_F^w$ – слабке замикання множини G_F в X і згідно з теоремою Банаха–Алаоглу для кожного $F \in \aleph(X)$ $\overline{G}_F^w$ – компакт у слабкій топології простору X. Отже, маємо $\bigcap_{F \in \aleph(X)} \overline{G}_F^w \ne \varnothing$.

Розглянемо $y_0 \in \bigcap_{F \in \aleph(X)} \overline{G}_F^w$, зафіксуємо довільне $w \in X$ та виберемо $F_0 \in \aleph(X)$ з умови $y_0, w \in F_0$. Тоді знайдеться підпослідовність $\{y_n\} \in G_{F_0}$, яка слабко збігається до y_0 в просторі X, а також $d'_n \in \overline{A}_{F_n}(y_n)$ $(d'_n = f_n)$, де $y_n \in \overline{B}_r \bigcap F_n$, $F_0 \subset F_n \in \aleph(X)$, $f_n = I_{F_n}^* f$. У такому випадку отримаємо

$$\lim_{n\to\infty} \langle d_n, y_n - y_0\rangle_X = \lim_{n\to\infty} \langle d'_n, y_n - y_0\rangle_{F_n} =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \langle f_n, y_n - y_0\rangle_{F_n} = \lim_{n\to\infty} \langle f, y_n - y_0\rangle_X = 0,$$

де $d'_n = I_{F_n}^* d_n$, $d_n \in \overline{\mathrm{co}} A(y_n, u)$. Звідси, зокрема, випливає, що послідовність $\{\langle d_n, y_n\rangle_X\}_{n\ge 1}$ обмежена зверху. Враховуючи, що відображення $X \ni y \to A(y,u)$ задовольняє властивість (Π), згідно з теоремою Банаха–Алаоглу можемо вважати, що з точністю до підпослідовності $d_n \to d$ $*$-слабко в X^*. Оскільки відображення A задовольняє властивість $\overline{S}_k$, то $d \in \overline{\mathrm{co}} A(y_0, u)$. Далі маємо

$$\langle d, w\rangle_X = \lim_{n\to\infty} \langle d_n, w\rangle_X = \lim_{n\to\infty} \langle d'_n, w\rangle_{F_n} =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \langle f_n, w\rangle_{F_n} = \lim_{n\to\infty} \langle f, w\rangle_X.$$

З довільного вибору $w \in X$ випливає, що $d = f$, а це і доводить, що множина $K(u, f)$ є непорожньою.

Нехай тепер $U \ni u_n \to u \in U$ $*$-слабко в Y^*, $f_n \to f$ сильно в X^*. Перевіримо справедливість включення (2). Припустимо, що множина $\bigcap_{n\ge 1} \overline{\bigcup_{m\ge n} K(u_m, f_m)}^w$ є непорожньою (в іншому випадку включення (2), очевидно, виконується). Тоді якщо $y_0 \in \bigcap_{n\ge 1} \overline{\bigcup_{m\ge n} K(u_m, f_m)}^w$, то існує підпослідовність натуральних чисел $\{n_k\}_{k\ge 1}$, така, що y_0 є слабкою границею в просторі X деякої послідовності $\{y_{n_k}\}_{k\ge 1}$, такої, що $\forall k \ge 1$ $y_{n_k} \in K(u_{n_k}, f_{n_k})$. Відзначимо, що $\langle f_{n_k}, y_{n_k} - y_0 \rangle_X \to 0$ при $k \to \infty$. Тоді з властивості $\bar{S}_k$ оператора A маємо $f \in A(y_0, u)$, тобто $y_0 \in K(u, f)$.

Слабка замкненість $K(u, f)$ випливає з (2). Теорему доведено.

Далі на конкретному прикладі покажемо, що властивість $\bar{S}_k$ є принципово ширшою за властивість λ_0-квазімонотонності. А саме розглянемо обмежене многозначне відображення $A: X \times U \to 2^{X^*} \setminus \{\varnothing\}$, яке задовольняє властивість $(\bar{S}_k)$, є $+$-коерцитивним для всіх $u \in U$, але ні для якого $u \in U$ не є $-$-коерцитивним, не є λ_0-квазімонотонним і $-A$ теж не є λ_0-квазімонотонним.

Приклад. Нехай Ω – відкрита обмежена підмножина в $\mathbb{R}^n$ $(n \ge 2)$ з достатньо регулярною границею $\partial\Omega$ розмірності $n-1$. Нехай ξ_1, ξ_2 – задані функції з $L^\infty(\Omega)$, такі, що

$$0 < \beta \le \xi_1(x) \le \xi_2(x) \text{ майже скрізь (м.с.) в } \Omega.$$

Покладемо

$$U = \left\{ \mathcal{U} = [u_{ij}(x)]_{1\le i,j\le n} \;\middle|\; \begin{array}{l} u_{ji} = u_{ij} \in [L^\infty(\Omega)] \\ \forall i, j = 1, \dots, n, \\ \xi_1(x) \le u_{ij}(x) \le \xi_2(x) \text{ м.с.} \\ \text{в } \Omega,\ \forall i, j = 1, \dots, n, \\ (\eta, \mathcal{U}(x)\eta)_{\mathbb{R}^n} \ge \gamma \|\eta\|^2_{\mathbb{R}^n} \\ \forall \eta \in \mathbb{R}^n, \text{м.с. в } \Omega \end{array} \right\},$$

де $\gamma > 0$. Вважатимемо, що U утворює порожню множину рівномірно обмежених та додатно означених симетричних квадратних матриць. Розглянемо множину

$$V = \{\mathcal{U} = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n] \in [L^\infty(\Omega)]^{n\times n} : \operatorname{div} \mathbf{u}_i = 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, n\},$$

де значення оператора div на векторі $\mathbf{u} \in [L^2(\Omega)]^n$ визначається як елемент простору $H^{-1}(\Omega)$, такий, що

$$\langle \operatorname{div} \mathbf{u}, \phi \rangle_{H_0^1(\Omega)} = -\int_\Omega (\mathbf{u}, \nabla\phi)_{\mathbb{R}^n} dx \quad \forall \phi \in H_0^1(\Omega).$$

Будемо вважати, що функціональний параметр $\mathcal{U}$ є допустимим, якщо $\mathcal{U} \in V \cap U$, де множина U означена вище. Множину всіх допустимих параметрів позначимо U_{sol}.

Нехай $X = H_0^1(\Omega)$ – дійсний простір Соболєва, $Y = [L^1(\Omega)]^{n\times n}$. Тоді $X^* = H^{-1}(\Omega)$, $Y^* = [L^\infty(\Omega)]^{n\times n}$. Нехай $(u, v)_{L_2} = \int_\Omega u(x) v(x) dx$ – скалярний добуток в $L_2(\Omega)$; $((u, v)) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx$ – скалярний добуток в $H_0^1(\Omega)$, $u, v \in H_0^1(\Omega)$; $a \cdot b$ – скалярний добуток векторів $a, b \in \mathbb{R}^n$; $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \sqrt{((u, u))}$, $u \in X$. Розглянемо оператор $A: X \times U_{\text{sol}} \to 2^{X^*} \setminus \{\varnothing\}$, який визначається за правилом

$$A(y, \mathcal{U}) = \{-\operatorname{div}(\alpha \mathcal{U}(x) \nabla y) \mid \alpha \in [-1, 1]\} = \left\{ -\sum_{i,j=1}^n \alpha \frac{\partial}{\partial x_i} \left(u_{ij}(x) \frac{\partial y}{\partial x_j} \right) \middle| \alpha \in [-1, 1] \right\}.$$

Зауважимо, що $\overline{\text{co}} A(y, \mathcal{U}) = A(y, \mathcal{U}) = -A(y, \mathcal{U})$ $\forall y \in X$.

Тепер покажемо, що оператор $A(y, \mathcal{U}) = -\operatorname{div}(\alpha \mathcal{U}(x) \nabla y)$ як відображення $A: H_0^1(\Omega) \times U_{\text{sol}} \to 2^{H^{-1}(\Omega)} \setminus \{\varnothing\}$ задовольняє умову $\bar{S}_k$. Для цього нам будуть потрібні такі допоміжні результати.

Лема 1. U_{sol} – секвенційно компактна множина в $*$-слабкій топології простору $[L^\infty(\Omega)]^{n\times n}$.

Доведення. Нехай $\{\mathcal{U}_k = [\mathbf{u}_{1k}, \mathbf{u}_{2k}, \dots, \mathbf{u}_{nk}]\}_{k=1}^\infty$ – довільна послідовність в U_{sol}. Оскільки $U_{\text{sol}} \subset U$, а множина U – секвенційно $*$-слабко компактна, то можна вважати, що існує матриця $\mathcal{U}_0 \in U$, така, що

$$\int_\Omega (\mathbf{u}_{ik}, \phi)_{\mathbb{R}^n} dx \to \int_\Omega (\mathbf{u}_{i0}, \phi)_{\mathbb{R}^n} dx \quad \forall \phi \in [L^1(\Omega)]^n,$$
$$\forall i = 1, 2, \dots, n.$$

Виберемо як вектор ϕ такий, що $\phi = \nabla p$, де $p \in H_0^1(\Omega)$. Оскільки

$$\int_\Omega (\mathbf{u}_{ik}, \nabla p)_{\mathbb{R}^n} dx = -\langle \operatorname{div} \mathbf{u}_{ik}, p\rangle_{H_0^1(\Omega)} = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

то $\int_\Omega (\mathbf{u}_{i0}, \nabla p)_{\mathbb{R}^n} dx = -\langle \operatorname{div} \mathbf{u}_{i0}, p\rangle_{H_0^1(\Omega)} = 0$ для всіх $i = 1, 2, \dots, n$. Отже, маємо

$$\mathcal{U}_0 = [\mathbf{u}_{10}, \mathbf{u}_{20}, \dots, \mathbf{u}_{n0}] \in U_{\text{sol}},$$

що і треба було встановити.

Лема (про компенсовану компактність) [16]. Нехай p_k, p_0, v_k, v_0 — вектори з $[L^2(\Omega)]^n$, такі, що $p_k \to p_0$ і $v_k \to v_0$ слабко в $[L^2(\Omega)]^n$. Якщо при цьому послідовності $\{\operatorname{div} p_k\}_{k=1}^\infty$ і $\{\operatorname{rot} v_k\}_{k=1}^\infty$ є компактними в $H^{-1}(\Omega)$, то

$$\lim_{k\to\infty} \int_\Omega (p_k, v_k)_{\mathbb{R}^n} \phi dx = \int_\Omega (p_0, v_0)_{\mathbb{R}^n} \phi dx \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Тут для довільної вектор-функції $v \in (L^2(\Omega))^n$ елементи кососиметричної матриці $\operatorname{rot} v$ визначаються як елементи простору $H^{-1}(\Omega)$ за таким правилом:

$$\langle \operatorname{rot} v, \phi\rangle_{H^{-1}(\Omega)}^{ij} = -\int_\Omega \left(v_i \frac{\partial \phi}{\partial x_j} - v_j \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right) dx$$

$$\forall \phi \in H_0^1(\Omega),\ i, j = 1, \dots, n.$$

Покажемо, що оператор A є $+$-коерцитивним для кожного $\mathcal{U} \in U_{\text{sol}}$. Дійсно, ця властивість є безпосереднім наслідком нерівності $[A(y, \mathcal{U}), y]_+ = \sup_{|\alpha|\le 1} \alpha \langle -\operatorname{div}(\mathcal{U}(x)\nabla y), y\rangle \ge \gamma \| y\|_X^2$ $\forall y \in X$. Крім того, A — рівномірно обмежений оператор в тому розумінні, що $\| A(y, \mathcal{U})\|_+ \le$ $\le C\| y\|_X \quad \forall y \in X$, де $C = \|\xi_2(x)\|_{L^\infty(\Omega)}$, тобто константа C не залежить від $\mathcal{U} \in U_{\text{sol}}$, а залежить тільки від самої множини U_{sol}.

***Зауваження* 3.** Для повноти характеристики оператора A необхідно зазначити, що ні для одного $\mathcal{U} \in U_{\text{sol}}$ оператор A не є $-$-коерцитивним, оскільки $A(y, \mathcal{U}) = -A(y, \mathcal{U})$. Більше того, ні A, ні $-A$ не задовольняють властивість λ_0-квазімонотонності. Дійсно, розглянемо довільну ортонормовану систему векторів $\{y_k\}_{k=1}^\infty$ в $X = H_0^1(\Omega)$ та послідовність діагональних матриць $\{\mathcal{U}_k\}_{k=1}^\infty$, де $\mathcal{U}_k = \mathcal{U}^* \in U_{\text{sol}}$ — фіксований елемент $\forall k \ge 1$. Як відомо, $y_k \to \overline{0}$ слабко в X. Нехай

$$d_k = \operatorname{div}(\mathcal{U}_k(x)\nabla y_k) \in A(y_k, \mathcal{U}_k) \quad \forall k \ge 1.$$

Тоді з означення множини U_{sol} випливає, що

$$\langle d_k, y_k - \overline{0}\rangle \le -\gamma \| y_k\|_X^2 = -\gamma < 0 \quad \forall k \ge 1.$$

Проте для довільної підпослідовності $\{y_m, \mathcal{U}_m, d_m\}_{m=1}^\infty \subset \{y_k, \mathcal{U}_k, d_k\}_{k=1}^\infty$ маємо

$$\underline{\lim}_{m\to\infty} \langle d_m, y_m - \overline{0}\rangle < 0 = [A(\overline{0}), \overline{0} - \overline{0}]_-.$$

І щоб показати, що $-A$ теж не є λ_0-квазімонотонним оператором, лишається згадати, що $-A(y, \mathcal{U}) = A(y, \mathcal{U}) \quad \forall y \in X$.

Тепер встановимо основний результат, який стосується даного прикладу.

Теорема 2. Оператор A задовольняє властивість $\overline{S}_k$.

Д о в е д е н н я. Нехай $\{\mathcal{U}_k\}_{k=1}^\infty$ — послідовність в U_{sol}, така, що $\mathcal{U}_k \to \mathcal{U}_0$ $*$-слабко в $[L^\infty(\Omega)]^{n\times n}$. Оскільки множина U_{sol} секвенційно $*$-слабко замкнена, то $\mathcal{U}_0 \in U_{\text{sol}}$. Нехай $\{y_k\}_{k=1}^\infty \subset H_0^1(\Omega)$, така, що $y_k \to y_0$ $*$-слабко в $H_0^1(\Omega)$. І нехай також

$$l_k = -\alpha_k \operatorname{div}(\mathcal{U}_k(x)\nabla y_k) \in A(y_k, \mathcal{U}_k),$$
$$k \in \mathbb{N}, \alpha_k \in [-1, 1],$$

є послідовністю селекторів, такою, що $l_k \to l_0$ слабко в $H^{-1}(\Omega)$ і виконується умова

$$\langle l_k, y_k - y_0\rangle_X \to 0.$$

Необхідно довести, що $l_0 \in A(y_0, \mathcal{U}_0)$. Є дві можливих альтернативи:

1) $\alpha_k \to 0$. Тоді з рівномірної обмеженості оператора $\operatorname{div}(\mathcal{U}_k(x)\nabla y_k)$ отримаємо, що

$l_n \to \overline{0}$ в $H^{-1}(\Omega)$, а $\overline{0} \in A(y_0, \mathcal{U}_0)$, що і треба було довести;

2) існує підпослідовність $\{\alpha_m\}_{m=1}^{\infty} \subset \{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$, така, що $\alpha_k \to \alpha^* \in [-1,1] \setminus \{0\}$.

Перейдемо до послідовності $d_m = \dfrac{l_m}{\alpha_m} = -\operatorname{div}(\mathcal{U}_m(x)\nabla y_m)$. Очевидно, що в цьому випадку $\langle d_m, y_m - y_0 \rangle_X \to 0$, $d_m \to d = -\operatorname{div}(\xi)$ слабко в $H^{-1}(\Omega)$, де ξ є слабкою границею послідовності $\{\mathcal{U}_m \nabla y_m\}_{m=1}^{\infty}$ в просторі $[L^2(\Omega)]^n$. Дійсно, для довільного $\phi \in H_0^1(\Omega)$ маємо

$$\langle -\operatorname{div}(\mathcal{U}_k \nabla y_k), \phi \rangle_{H_0^1(\Omega)} = \int_\Omega (\mathcal{U}_k \nabla y_k, \nabla \phi)_{\mathbb{R}^n} dx \to$$

$$\to \int_\Omega (\xi, \nabla\phi)_{\mathbb{R}^n} dx = \langle -\operatorname{div}\xi, \phi \rangle_{H_0^1(\Omega)} = \langle d, \phi \rangle_{H_0^1(\Omega)}.$$

Покажемо, що в цьому випадку має місце тотожність

$$\xi \equiv \mathcal{U}_0 \nabla y_0. \quad (6)$$

Якщо це так, то $l_m \to \alpha^* d = -\operatorname{div}(\alpha^* \mathcal{U}_0(x) \nabla y_0) \in \in A(y_0, \mathcal{U}_0)$.

Тепер встановимо тотожність (6). Для цього скористаємось лемою про компенсовану компактність. Покладемо $p_k = \mathbf{u}_{ik}$, $p_0 = \mathbf{u}_{i0}$, $v_k = \nabla y_k$, $v_0 = \nabla y_0$. Оскільки $\operatorname{div} p_k = 0$ і $\operatorname{rot} v_k = 0$ $\forall k \in \mathbb{N}$, $\nabla y_k \to \nabla y_0$ слабко в $[L^2(\Omega)]^n$ і $\mathcal{U}_k \to \mathcal{U}_0$ $*$-слабко в $[L^\infty(\Omega)]^{n\times n}$, а отже, слабко в $[L^2(\Omega)]^{n\times n}$, то

$$\lim_{k\to\infty} \int_\Omega (\mathcal{U}_k \nabla y_k, \phi)_{\mathbb{R}^n} dx = \sum_{i=1}^n \lim_{k\to\infty} \int_\Omega (\mathbf{u}_{ik}, \nabla y_k)_{\mathbb{R}^n} \phi_i dx =$$

$$= \sum_{i=1}^n \int_\Omega (\mathbf{u}_{i0}, \nabla y_0)_{\mathbb{R}^n} \phi_i dx = \int_\Omega (\mathcal{U}_0 \nabla y_0, \phi)_{\mathbb{R}^n} dx$$

$$\forall \phi \in [C_0^\infty(\Omega)]^n.$$

Оскільки $C_0^\infty(\Omega)$ щільно в $L^1(\Omega)$, то $\mathcal{U}_k \nabla y_k \to \xi = \mathcal{U}_0 \nabla y_0$ $*$-слабко в $[L^\infty(\Omega)]^n$, що і треба було встановити. Теорему доведено.

Висновки

Розглянута в статті властивість $\overline{S}_k$ для многозначного випадку значно розширює клас λ_0-квазімонотонних відображень. Наведений приклад показує, що існують оператори, які задовольняють властивості $\overline{S}_k$ і $+$-коерцитивності, але які не є λ_0-квазімонотонними і $-$-коерцитивними. Основний результат статті дає можливість стверджувати існування розв'язків параметризованих включень із подібними відображеннями і є узагальненням відомих результатів, які для такого класу операторів не застосовуються. Також показано залежність множин розв'язків таких включень від параметрів. У подальших дослідженнях було б доцільним поширити отримані результати на випадок варіаційних нерівностей.

В.О. Капустян, П.О. Касьянов, О.П. Когут

СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ КЛАССА ПАРАМЕТРИЗИРОВАННЫХ ОПЕРАТОРНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ

Исследуются свойства решений параметризированных операторных включений с многозначными операторами типа $\overline{S}_k$. Доказана теорема о разрешимости таких включений, слабой компактности и зависимости от параметра множеств их решений. Приведен пример, иллюстрирующий полученные результаты.

V.O. Kapustyan, P.O. Kasyanov, O.P. Kogut

SOLUTIONS PROPERTIES FOR ONE CLASS OF PARAMETERIZED OPERATOR INCLUSIONS

This paper provides the insights into the properties of solutions for parameterized operator inclusions with multi-valued maps of $\overline{S}_k$ type. We prove the resolvability of such inclusions, weak compactness and parameter dependence of their solution. Moreover, we provide the example, illustrating the obtained results.

1. *Чикрий А.А.* Конфликтно управляемые процессы. – К.: Наук. думка, 1992. – 382 с.
2. *Лионс Дж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. – М.: Мир, 1972. – 588 с.
3. *Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. – М.: Мир, 1978. – 336с.
4. *Скрыпник И.В.* Методы исследования эллиптических краевых задач. – М.: Наука, 1990. – 442 с.
5. *Згуровский М.З., Мельник В.С.* Метод штрафа для вариационных неравенств с многозначными отображениями. I // Кибернетика и системный анализ. – 2000. – № 4. – С. 57–69.
6. *Згуровский М.З., Мельник В.С.* Неравенство Ки Фаня и операторные включения в банаховых пространствах // Там же. – 2002. – № 2. – С. 70–85.
7. *Згуровский М.З., Мельник В.С.* Нелинейный анализ и управление бесконечномерными системами. – К.: Наук. думка, 1999. – 630 с.
8. *Згуровский М.З., Мельник В.С., Новиков А.Н.* Прикладные методы анализа и управления нелинейными процессами и полями. – К.: Наук. думка, 2004. – 590 с.
9. *Мельник В.С.* О критических точках некоторых классов многозначных отображений // Кибернетика и системный анализ. – 1997. – № 2. – С. 87–98.
10. *Мельник В.С.* Мультивариационные неравенства и операторные включения в банаховых просторанствах с отображениями класса // Укр. мат. журн. – 2000. – **52**, № 11. – С. 1513–1523.
11. *Мельник В.С.* Топологические методы в теории операторных включений в банаховых пространствах // Там же. – 2006. – **58**, № 4. – С. 505–521.
12. *Иваненко В.И., Мельник В.С.* Вариационные методы в задачах управления для систем с распределенными параметрами. – К.: Наук. думка, 1988. – 324 с.
13. *Касьянов П.О., Мельник В.С.* Метод Фаедо–Гальоркіна для диференціально-операторних W_{λ_0}-включень в банахових просторах з відображеннями псевдомонотонного типу // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2005. – **2**, № 1. – С. 103–126.
14. *Kasyanov P.O., Mel'nik V.S., Yasinsky V.V.* Evolution inclusions and inequalities in Banach spaces with W_{λ}-pseudomonotone maps. – К.: Наук. думка, 2007. – 308 с.
15. *Жиков В.В., Козлов С.М., Олейник О.Л.* Усреднение дифференциальных операторов. – М.: Физматлит, 1993. – 456 с.

Рекомендована Радою
Фізико-технічного інституту
НТУУ "КПІ"

Надійшла до редакції
6 березня 2008 року