

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені Ігоря СІКОРСЬКОГО»
Навчально-науковий фізико-технічний інститут
Кафедра математичних методів захисту інформації

«На правах рукопису»

УДК 519.22

«До захисту допущено»

Завідувач кафедри

_____ Сергій ЯКОВЛЄВ

«__» _____ 2025 р.

Магістерська дисертація
на здобуття ступеня магістра
за освітньо-науковою програмою
«Математичні методи криптографічного захисту інформації»

зі спеціальності: 113 Прикладна математика
на тему: «**Задача оцінювання для системи взаємодіючих
осциляторів**»

Виконав:

студент II курсу, групи ФІ-32мн

Карловський Володимир Олександрович

Керівник:

Кандидат фізико-математичних наук, доцент

Ніщенко Ірина Іванівна

Рецензент:

Кандидат фізико-математичних наук, старший
науковий співробітник Інституту математики НАН
України

Рябов Георгій Валентинович

Засвідчую, що у цій магістерській
дисертації немає запозичень
з праць інших авторів без
відповідних посилань.

Студент _____

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені Ігоря СІКОРСЬКОГО»

Навчально-науковий фізико-технічний інститут
Кафедра математичних методів захисту інформації

Рівень вищої освіти — другий (магістерський)
Спеціальність — 113 Прикладна математика,
ОНП «Математичні методи криптографічного захисту інформації»

ЗАТВЕРДЖУЮ

Завідувач кафедри

_____ Сергій ЯКОВЛЄВ

«__» _____ 2025 р.

ЗАВДАННЯ
на магістерську дисертацію

Студент: Карловський Володимир Олександрович

1. Тема роботи: *«Оцінка розподілу системи зв'язаних осциляторів»*, науковий керівник дисертації: Кандидат фізико-математичних наук, доцент Ніщенко Ірина Іванівна,

затверджені наказом по університету №__ від «__» _____ 2025 р.

2. Термін подання студентом роботи: «__» _____ 2025 р.

3. Об'єкт дослідження: *стохастичні процеси в системах зв'язаних осциляторів під дією випадкових збурень.*

4. Предмет дослідження: *моделі та методи оцінювання розподілу системи зв'язаних осциляторів з невідомим коефіцієнтом жорсткості.*

5. Перелік завдань: *побудувати математичну модель системи зв'язаних осциляторів з невідомим коефіцієнтом жорсткості, дослідити властивості тридіагональної матриці, побудувати оцінку невідомого параметра жорсткості, дослідити відстань за варіацією між істинним та оціненим розподілами системи.*

6. Орієнтовний перелік графічного (ілюстративного) матеріалу: *презентація доповіді*

7. Орієнтовний перелік публікацій: *планується доповідь на XXIII Всеукраїнській науково-практичній конференції студентів, аспірантів та молодих вчених «Теоретичні і прикладні проблеми фізики, математики та інформатики» (14-17 травня 2025р., м. Київ Україна.)*

8. Дата видачі завдання: 10 жовтня 2024 р.

Календарний план

№ з/п	Назва етапів виконання магістерської дисертації	Термін виконання	Примітка
1	Узгодження теми роботи із науковим керівником	10-25 жовтня 2024 р.	Виконано
2	Огляд опублікованих джерел за тематикою дослідження	Жовтень-листопад 2024 р.	Виконано
3	Побудова моделі зв'язаних осциляторів	Листопад-Грудень 2024 р.	Виконано
4	Використання властивостей тридіагональної матриці	Січень 2025 р.	Виконано
5	Доведення властивостей рівняння авторегресії	Лютий 2025 р.	Виконано
6	Побудова спрощеного рівняння авторегресії та побудова оцінок	Березень 2025 р.	Виконано
7	Побудова оцінки відстані між реальним та оціненим розподілами	Квітень 2025 р.	Виконано

Студент

_____ Володимир Карловський

Керівник

_____ Ірина Ніщенко

РЕФЕРАТ

Кваліфікаційна робота містить: 49 стор., 1 рисунок, 0 таблиць, 9 джерел.

Метою дослідження є побудова моделі систем зв'язаних осциляторів під дією випадкових збурень. Об'єктом дослідження є стохастичні процеси в системах зв'язаних осциляторів під дією випадкових збурень. Предметом дослідження є моделі та методи оцінювання розподілу системи зв'язаних осциляторів з невідомим коефіцієнтом жорсткості.

У роботі побудовано математичну модель системи зв'язаних осциляторів з невідомим коефіцієнтом жорсткості у вигляді рівняння авторегресії та встановлено умови існування стаціонарного розподілу. Побудовано дві оцінки невідомого параметра: за допомогою методу найменших квадратів та вибіркового другого моменту. Отримано верхню межу математичного сподівання квадрата відстані за варіацією між істинним та оціненим розподілами.

ЗВ'ЯЗАНІ ОСЦИЛЯТОРИ, РІВНЯННЯ АВТОРЕГРЕСІЇ,
ТРИДІАГОНАЛЬНА МАТРИЦЯ

ABSTRACT

The qualification work contains: 49 pages, 1 figure, 0 tables, 9 sources.

The aim of the research is to construct a model of coupled oscillator systems under random perturbations. The object of the research is stochastic processes in coupled oscillator systems under random perturbations. The subject of the research is models and methods for estimating the distribution of a coupled oscillator system with unknown stiffness coefficient. In this work, a mathematical model of a coupled oscillator system with unknown stiffness coefficient is constructed as an autoregression equation, and conditions for the existence of a stationary distribution are established. Two estimates of the unknown parameter are developed: using the least squares method and the sample second moment. An upper bound for the mathematical expectation of the squared total variation distance between the true and estimated distributions is obtained.

COUPLED OSCILLATOR, AUTOREGRESSIVE EQUATION,
TRIDIAGONAL MATRIX

ЗМІСТ

Вступ.....	7
1 Побудова моделі зв'язаних осциляторів	9
1.1 Опис системи зв'язаних осциляторів	9
1.2 Рівняння руху зв'язаних осциляторів як рівняння авторегресії... 11	
1.2.1 Властивості матриці V	11
1.3 Оцінка розподілу системи зв'язаних осциляторів	25
1.3.1 Оцінка найменших квадратів	30
1.3.2 Оцінка через вибіркового другий момент.....	32
Висновки до розділу 1.....	37
2 Відстані між ймовірнісними розподілами	38
2.1 Метрики на просторі ймовірнісних мір	38
2.2 Відстань за варіацією між істинним та оціненим розподілом системи зв'язаних осциляторів	40
Висновки до розділу 2.....	45
Висновки	47
Перелік посилань	48

ВСТУП

Актуальність дослідження. Системи зв'язаних осциляторів є важливими математичними моделями, що описують широкий спектр фізичних, біологічних та інженерних процесів. Вони використовуються для моделювання коливальних процесів у молекулярній фізиці, термодинаміці, механічних системах та багатьох інших областях. Оцінювання параметрів розподілу таких систем має фундаментальне значення для розуміння їхньої поведінки та прогнозування динаміки.

Досліджувана модель представляє випадок, коли система підлягає впливу випадкових збурень, що призводить до стохастичної динаміки. Розробка методів оцінювання розподілу таких систем та кількісна оцінка точності отриманих оцінок є актуальною задачею, яка має як теоретичне, так і практичне значення.

Метою дослідження є розвиток математичної теорії оцінювання розподілів систем зв'язаних осциляторів під дією випадкових збурень. Для досягнення мети необхідно розв'язати задачу дослідження, яка полягає у побудові та аналізі оцінок розподілу системи зв'язаних осциляторів та встановленні кількісних характеристик точності цих оцінок. Для розв'язання задачі необхідно вирішити такі завдання:

- 1) Провести огляд опублікованих джерел за тематикою дослідження систем зв'язаних осциляторів та методів оцінювання їх параметрів;
- 2) Побудувати математичну модель системи зв'язаних осциляторів з невідомим коефіцієнтом жорсткості та дослідити умови існування стаціонарного розподілу;
- 3) Розробити методи оцінювання невідомого параметра системи та дослідити властивості отриманих оцінок;
- 4) Дослідити відстань між істинним та оціненим розподілами системи та встановити верхні межі для цієї відстані.

Об'єктом дослідження є стохастичні процеси в системах зв'язаних

осциляторів під дією випадкових збурень.

Предметом дослідження є моделі та методи оцінювання розподілу системи зв'язаних осциляторів з невідомим коефіцієнтом жорсткості.

При розв'язанні поставлених завдань використовувались такі методи дослідження: методи лінійної алгебри, теорії матриць, теорії ймовірностей, математичної статистики, теорії випадкових процесів, методи аналізу часових рядів.

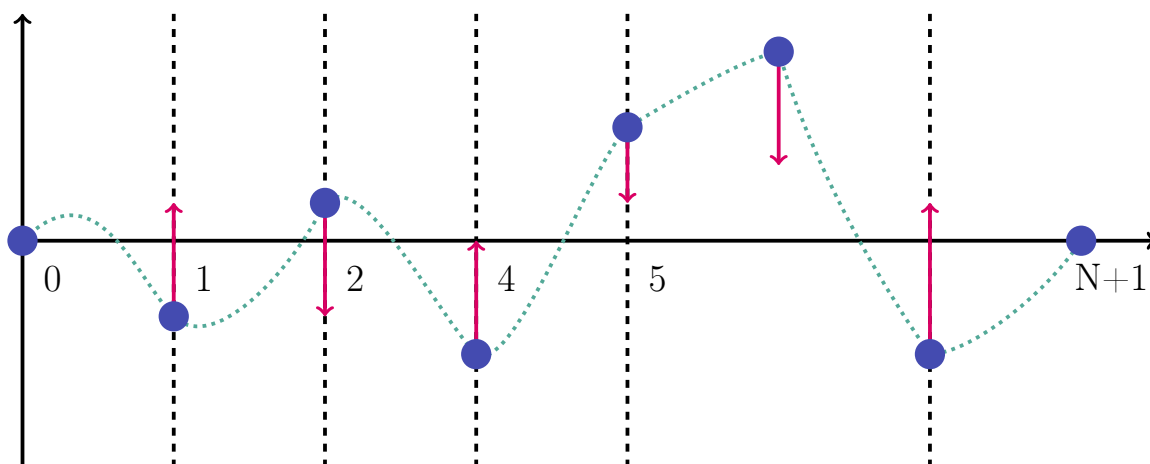
Наукова новизна отриманих результатів полягає в тому, що отримано вираз для верхньої межі математичного сподівання квадрата відстані за варіацією між істинним та оціненим розподілами системи зв'язаних осциляторів, для довільного об'єму вибірки можемо отримати оцінку відстані за варіацією згори.

Практичне значення результатів полягає у можливості їх використання при моделюванні реальних фізичних та біологічних систем, що описуються моделлю зв'язаних осциляторів. Розроблена модель дозволяє дискретизувати модель зв'язаних осциляторів і використовувати наведені оцінки для дискретизованої моделі.

Апробація результатів та публікації. Результати будуть представлено на XXIII Всеукраїнській науково-практичній конференції студентів, аспірантів та молодих вчених «Теоретичні і прикладні проблема фізики, математики та інформатики» (14-17 травня 2025р., м. Київ Україна.)

1 ПОБУДОВА МОДЕЛІ ЗВ'ЯЗАНИХ ОСЦИЛЯТОРІВ

1.1 Опис системи зв'язаних осциляторів



Мережі зв'язаних осциляторів слугують моделями систем, динаміка яких описується періодичними процесами. З прикладами таких систем ми зустрічаємося у молекулярній фізиці, біології, нейронауці, інженерії багатокомпонентних конструкцій. Так, кожен атом молекули осцилює навколо рівноважного стану, а взаємодія між атомами перетворює молекулу на систему зв'язаних осциляторів. Осцилятором є окремий нейрон чи група нейронів головного мозку людини, характер зв'язків між якими та ефекти повної чи часткової синхронізації визначають функціонування мозку. Акустичні явища, вібрацію частин складних конструкцій теж вивчають в рамках моделей зв'язаних осциляторів.

В магістерській роботі ми розглянемо ланцюг зв'язаних осциляторів, взаємодія між парою сусідніх частинок в якому описується законом Гука з невідомим коефіцієнтом жорсткості, та в припущенні, що на кожную частинку діють незалежні випадкові збурення. Нашою метою є оцінювання розподілу такої системи зв'язаних осциляторів та знаходження відстані між істинним та оціненим розподілами.

Розглянемо систему, що складається з N дифузійно зв'язаних осциляторів, кожен з яких зазнає впливу випадкових збурень. Вважаючи, що зв'язки між осциляторами є пружними і що час є дискретним, рух

системи описується різницевими рівняннями:

$$x_k(t+1) = x_k(t) - \alpha(2x_k(t) - x_{k-1}(t) - x_{k+1}(t)) + u_k(t+1), \quad (1.1)$$

$$x_k(0) = 0, \quad k = \overline{1, N},$$

$$\forall t \quad x_0(t) = x_{N+1}(t) = 0.$$

Тут $x_k(t)$ є вертикальним зміщенням k -ої частинки від положення рівноваги в момент часу t ; $\{u_1(t)\}_{t \geq 1}, \dots, \{u_N(t)\}_{t \geq 1}$ — незалежні послідовності незалежних випадкових величин з нормальним розподілом $u_i(t) \sim N(0, \sigma^2)$; α — коефіцієнт пружності, x_0, x_{N+1} — нерухомі кінці ланцюга осциляторів.

Рівняння (1.1), яке ми розглядаємо, є дискретизацією диференційного стохастичного рівняння з частковими похідними, що описує динаміку дифузійно зв'язаних осциляторів

$$\frac{\partial}{\partial t} x(u, t) = \alpha \frac{\partial^2}{\partial u^2} x(u, t) + \dot{W}(u, t),$$

де $x(u, t)$ є зміщенням в точці $u \in [0, 1]$, $(W(u, t))_{t \geq 0}$ є вінерівським процесом для кожного u , а $\dot{W}(u, t)$ позначає формальну похідну $W(u, t)$ за часом.

Рівняння (1.1) слугує також моделю полімерного ланцюжка, мономері якого пов'язані пружними силами і який поміщено в рідину дифузуючими частинками (с. 2 [7]).

Зауважимо, що рівняння (1.1) можна записати в матричному вигляді:

$$x(t+1) = (I - \alpha V)x(t) + u(t+1), \quad (1.2)$$

де вводимо наступні позначення:

$$V = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ \vdots \\ x_{N-1}(t) \\ x_N(t) \end{pmatrix}, \quad u(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \\ \vdots \\ u_{N-1}(t) \\ u_N(t) \end{pmatrix}.$$

1.2 Рівняння руху зв'язаних осциляторів як рівняння авторегресії

Зауважимо, що рівняння (1.2) є рівнянням авторегресії. Загальні властивості таких рівнянь вивчаються зокрема в [8]. Існування стаціонарного розв'язку рівняння (1.2) визначається властивостями матриці $A = I - \alpha V$, а саме — її власними значеннями.

1.2.1 Властивості матриці V

Матрицю V розміру $k \times k$ будемо позначати V_k .

$$V_k = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{pmatrix}_k \quad (1.3)$$

Твердження 1.1. Матриця V_k є додатно визначеною для довільного $k \geq 1$.

Доведення. Згідно з критерієм Сильвестра, матриця є додатно визначеною тоді і тільки тоді, коли всі її кутові мінори є додатними.

Перевіримо, що умова критерію Сильвестра виконується і доведемо за допомогою методу математичної індукції, що для довільного $k \geq 2$

$$\det V_k > \det V_{k-1}.$$

Зауважимо, що

$$V_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \det V_1 = 2 > 0,$$

$$V_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \det V_2 = 4 - 1 = 3 > \det V_1.$$

Нехай твердження справедливе для матриці розміру k і всіх менших розмірів, тобто:

$$\forall s = \overline{1, k} \quad \det V_s > \det V_{s-1}.$$

З вигляду (1.3) матриці V_k випливає, що

$$\begin{aligned}\det V_{k+1} &= 2 \det V_k - \det V_{k-1} = \\ &= \det V_k + (\det V_k - \det V_{k-1}).\end{aligned}$$

Оскільки за припущенням індукції $\det V_k - \det V_{k-1} > 0$, то $\det V_{k+1} > \det V_k > 0$.

Це означає, що матриця V_k довільного розміру є додатно визначеною. $\square$

Матриця $A = I - \alpha V$ належить до так званих тридіагональних матриць, вивченню властивостей яких присвячено чимало робіт [6]. Нам знадобиться наступна теорема.

Теорема 1.1. (Теорема 1, с. 134 [6]). Нехай матриця A_n є тридіагональною з елементами $(a_1, a_0, \overline{a_1})$, тобто

$$A_n = \begin{pmatrix} a_0 & \overline{a_1} & 0 & \dots & 0 \\ a_1 & a_0 & \overline{a_1} & \dots & 0 \\ 0 & a_1 & a_0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_0 & \overline{a_1} \\ 0 & 0 & \dots & a_1 & a_0 \end{pmatrix}$$

Тоді існує діагональний розклад матриці

$$A = WDW', \tag{1.4}$$

де D діагональна матриця, яка складається з власних чисел матриці A

$$D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n),$$

причому власні числа обчислюються наступним чином:

$$\lambda_i = a_0 + 2|a_1| \cos \frac{i\pi}{n+1}.$$

А елементи матриці W обчислюються за наступною формулою

$$W_{ij} = \sqrt{\frac{2}{n+1}} \left(\frac{a_1}{|a_1|} \right)^i \sin \frac{ij\pi}{n+1}.$$

З теореми 1.1 випливає, що власні значення матриці $A = I - \alpha V$ мають вигляд

$$\lambda_i = 1 - 2\alpha + 2\alpha \cos \frac{i\pi}{N+1}. \quad (1.5)$$

Сама ж матриця допускає декомпозицію $A = WDW'$ де W є ортогональною матрицею з елементами

$$W_{ij} = \sqrt{\frac{2}{N+1}} \sin \frac{ij\pi}{N+1}. \quad (1.6)$$

Зауваження. За будовою елементи матриці W не залежать від невідомого параметра α , а отже ми можемо їх обчислити.

Також відома властивість власного розкладу довільного степеня матриці:

$$A^m = W D^m W'.$$

Лема 1.1. Якщо $\alpha \in (0, 1/2)$, то рівняння (1.2) має стаціонарний розв'язок.

Доведення. Відомо [5], що стаціонарний розв'язок рівняння авторегресії (1.2) існує, якщо всі власні числа матриці A по модулю не перевищують одиницю. З (1.5) випливає, що

$$|\lambda_i| = \left| 1 - 4\alpha \sin^2 \frac{i\pi}{2(N+1)} \right|.$$

Тому умова $\max_i |\lambda_i| < 1$ еквівалентна умові $\alpha \in (0, 1/2)$. □

Надалі вважаємо, що умова $|\lambda_i| < 1$ для всіх $i = \overline{1, N}$ виконується.

Надалі під нормою матриці A будемо мати на увазі операторну норму

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}. \quad (1.7)$$

Оскільки для симетричної матриці, якою є матриця A , операторна норма збігається з максимумом модулів власних значень матриці A , то умова $|\lambda_i| < 1$ для всіх $i = \overline{1, N}$ гарантує виконання умови $\|A\| < 1$.

Встановимо деякі властивості рівняння (1.2). Зауважимо, що якщо власні числа матриці A за модулем менші одиниці, то ряд $\sum_{i=1}^{\infty} A^i$ є збіжним [8].

Розглянемо детальніше властивості випадкового вектора $X(t) = (X_1(t), \dots, X_N(t))$. Маємо:

$$\begin{aligned} X(t) &= AX(t-1) + u(t) = A^2X(t-2) + Au(t-1) + u(t) = \\ &= \dots = A^tX(0) + \sum_{i=0}^{t-1} A^i u(t-i) = \sum_{i=0}^{t-1} A^i u(t-i) = \sum_{i=1}^t A^{t-i} u(i). \end{aligned} \quad (1.8)$$

Через те, що розподіл шуму $u(t)$ не залежить від часу, то величини $u(i)$ і $u(t-i)$ - однаково розподілені: $u(t-i) \stackrel{d}{\sim} u(i)$.

Отже, маємо наступне зображення вектора $X(t)$

$$X(t) = \sum_{i=1}^t A^{t-i} u(i) = \sum_{i=0}^{t-1} A^i u(t-i) \stackrel{d}{\sim} \sum_{i=0}^{t-1} A^i u(i). \quad (1.9)$$

Далі переконаємось у тому, що $X(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{d} \sum_{i=0}^{\infty} A^i u(i)$.

Лема 1.2. *Якщо $\|A\| < 1$, то*

$$\sum_{i=0}^{t-1} A^i u(i) \xrightarrow{L^2} \sum_{i=0}^{\infty} A^i u(i), \quad t \rightarrow \infty.$$

Доведення. Для доведення лема маємо переконатися в тому, що

$$M \left\| \sum_{i=0}^{t-1} A^i u(i) - \sum_{i=0}^{\infty} A^i u(i) \right\|^2 \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty.$$

Зауваживши, що

$$M \left\| \sum_{i=0}^{t-1} A^i u(i) - \sum_{i=0}^{\infty} A^i u(i) \right\|^2 = M \left\| \sum_{i=t}^{\infty} A^i u(i) \right\|^2,$$

і що $u(i), u(j)$ є незалежними випадковими векторами при $i \neq j$, отримуємо

$$\begin{aligned} M \left\| \sum_{i=t}^{\infty} A^i u(i) \right\|^2 &= M \left[\sum_{i=t}^{\infty} \sum_{j=t}^{\infty} u'(i) A^i A^j u(j) \right] = \\ &= \sum_{i=t}^{\infty} M [u'(i) A^{2i} u(i)] = \sum_{i=t}^{\infty} M \|A^i u(i)\|^2. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Далі використаємо той факт, що $\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$, $\|A^i\| \leq \|A\|^i$

$$\begin{aligned} \sum_{i=t}^{\infty} M \|A^i u(i)\|^2 &\leq \sum_{i=t}^{\infty} M [\|A^i\|^2 \|u(i)\|^2] \leq \sum_{i=t}^{\infty} \|A\|^{2i} M [\|u(i)\|^2] = \\ &= \sigma^2 \cdot N \cdot \sum_{i=t}^{\infty} \|A\|^{2i}. \end{aligned}$$

За припущенням лема $\|A\| < 1$, тому ряд $\sum_{i=0}^{\infty} \|A\|^{2i}$ є збіжним, а тому при $t \rightarrow \infty$ залишкова сума $\sum_{i=t}^{\infty} \|A\|^{2i}$ збігається до нуля:

$$\sum_{i=t}^{\infty} \|A\|^{2i} \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty.$$

Отже, отримали збіжність у середньому квадратичному.

$$\sum_{i=0}^{t-1} A^i u(i) \xrightarrow{L^2} \sum_{i=0}^{\infty} A^i u(i), \quad t \rightarrow \infty.$$

Зі збіжності в середньому квадратичному випливає збіжність за ймовірністю і за розподілом. Тому:

$$X(t) \xrightarrow{d} \sum_{i=0}^{\infty} A^i u(i), \quad t \rightarrow \infty.$$

Використовуючи рівність (1.9), легко переконатись у наступних властивостях вектора $X(t) = \sum_{i=1}^t A^{t-i} u(i)$:

$$\begin{aligned} M[X(t)] &= \sum_{i=1}^t A^{t-i} M[u(i)] = 0, \\ \text{cov}(X(t), X(t)) &= \text{cov}\left(\sum_{i=1}^t A^{t-i} u(i), \sum_{j=1}^t A^{t-j} u(j)\right) = \\ &= \sum_{i=0}^{t-1} A^{2i} \text{cov}(u(i), u(i)) = \sigma^2 \sum_{i=0}^{t-1} A^{2i}, \\ X(t) &\sim N(\bar{0}, \sigma^2 \sum_{i=0}^{t-1} A^{2i}). \end{aligned}$$

Введемо позначення $\otimes$ для операції тензорного добутку векторів: якщо $l = (l_0, l_1, \dots, l_k)$, $r = (r_0, r_1, \dots, r_k)$, то

$$l \otimes r = \begin{pmatrix} l_0 r_0 & \dots & l_0 r_k \\ \dots & \dots & \dots \\ l_k r_0 & \dots & l_k r_k \end{pmatrix}$$

Далі сформулюємо дві леми, про властивості системи зв'язаних осциляторів.

Лема 1.3.

$$\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T u(t) \otimes X(t-1) \xrightarrow{T \rightarrow \infty} 0.$$

Доведення. Збіжність за ймовірністю матриці означає

покомпонентну збіжність. Тому переконуємось, що кожна компонента матриці $u(t) \otimes X(t-1)$ за ймовірністю збігається до нуля:

$$\forall i, j = \overline{1, N} \quad \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T u_i(t) X_j(t-1) \xrightarrow[T \rightarrow \infty]{P} 0.$$

Скористаємося нерівністю Чебишова: $\forall \epsilon > 0$

$$P \left(\left| \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T u_i(t) X_j(t-1) \right| > \epsilon \right) \leq \frac{M \left[\sum_{t=1}^T u_i(t) X_j(t-1) \right]^2}{T^2 \epsilon^2}, \quad (1.11)$$

через незалежність випадкових величин $u_i(t)$ і $X_j(t-1)$ можемо розглядати математичне сподівання їхнього добутку, як добуток математичних сподівань.

$$M \left[\sum_{t=1}^T u_i(t) X_j(t-1) \right]^2 = \sum_{t=1}^T M(u_i(t))^2 M(X_j(t-1))^2 = \sigma^2 \sum_{t=1}^T \sum_{k=0}^{t-2} (A^{2k})_{jj}.$$

Оскільки $\sum_{k=0}^{t-2} (A^{2k})_{jj} \leq \sum_{k=0}^{\infty} (A^{2k})_{jj}$, і ряд $\sum_{k=0}^{\infty} (A^{2k})_{jj}$ є збіжним, то $\sum_{k=0}^{t-2} (A^{2k})_{jj} \leq C < \infty$, а тому праву частину нерівності (1.11) можна подати у вигляді:

$$P \left(\left| \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T u_i(t) X_j(t-1) \right| > \epsilon \right) \leq \frac{\sigma^2 \sum_{t=1}^T C}{T^2 \epsilon^2} = \frac{\sigma^2 T C}{T^2 \epsilon^2} = \frac{\sigma^2 C}{T \epsilon^2} \xrightarrow[T \rightarrow \infty]{} 0.$$

Отже, умова збіжності за ймовірністю виконується

$$\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (u(t) X(t-1)) \xrightarrow[T \rightarrow \infty]{P} 0.$$

□

Лема 1.4.

$$\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T X(t) \otimes X(t) \xrightarrow[T \rightarrow \infty]{P} \sigma^2 \sum_{i=0}^{\infty} A^{2i}. \quad (1.12)$$

Доведення. Для кожного $m \geq 1$ і довільного $t \geq m$ визначимо випадкову величину $X^m(t)$

$$X^m(t) = \sum_{i=t-m+1}^t A^{t-i} u(i).$$

Подамо різницю $\left[\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T X(t) \otimes X(t) - \sigma^2 \sum_{i=0}^{\infty} A^{2i} \right]$ у вигляді суми

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T X(t) \otimes X(t) - \sigma^2 \sum_{i=0}^{\infty} A^{2i} &= \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{m-1} X(t) \otimes X(t) - \sigma^2 \sum_{i=0}^{\infty} A^{2i} + \\ &+ \frac{1}{T} \sum_{t=m}^T (X(t) - X^m(t) + X^m(t)) \otimes (X(t) - X^m(t) + X^m(t)). \end{aligned}$$

Далі розкриємо дужки останнього доданку і згрупуємо доданки

$$\begin{aligned} &\frac{1}{T} \sum_{t=1}^{m-1} X(t) \otimes X(t) + \left[\frac{1}{T} \sum_{t=m}^T X^m(t) \otimes X^m(t) - \sigma^2 \sum_{i=0}^{m-1} A^{2i} \right] + \\ &+ \frac{1}{T} \sum_{t=m}^T (X(t) - X^m(t)) \otimes (X(t) - X^m(t)) + \\ &+ \frac{1}{T} \sum_{t=m}^T (X(t) - X^m(t)) \otimes X^m(t) + \frac{1}{T} \sum_{t=m}^T X^m(t) \otimes (X(t) - X^m(t)) - \sigma^2 \sum_{i=m}^{\infty} A^{2i}. \end{aligned}$$

Переконаємось що кожен з доданків збігається до нуля за ймовірністю при $T \rightarrow \infty$.

1) Переконаємось, що $\frac{1}{T} \sum_{t=1}^{m-1} X(t) \otimes X(t) \xrightarrow[T \rightarrow \infty]{L^1} 0$. Для цього скористаємось оцінкою

$$\left\| \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{m-1} X(t) \otimes X(t) \right\| \leq \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{m-1} \|X(t) \otimes X(t)\| = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{m-1} \|X(t)\|^2.$$

Вже було показано, що $M \|X(t)\|^2 \leq \sigma^2 N \sum_{i=1}^{t-1} \|A\|^{2i}$ і ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \|A\|^{2i}$ є збіжним, тобто $\sum_{i=1}^{\infty} \|A\|^{2i} = C < \infty$.

Тоді

$$M \left\| \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{m-1} X(t) \otimes X(t) \right\| \leq \frac{C\sigma^2}{T}(m-1) \rightarrow 0, \quad T \rightarrow \infty,$$

для довільного фіксованого $m \geq 1$.

Оскільки зі збіжності L^1 випливає збіжність за ймовірністю, то для довільного фіксованого m маємо:

$$\frac{1}{T} \sum_{t=1}^{m-1} X(t) \otimes X(t) \xrightarrow[T \rightarrow \infty]{P} 0.$$

$$2) \text{ Переконаємось, що } \frac{1}{T} \sum_{t=m}^T (X(t) - X^m(t)) \otimes X^m(t) \xrightarrow[T \rightarrow \infty]{L^1} 0.$$

Скористаємось нерівністю трикутника та нерівністю Коші-Буняковського

$$\begin{aligned} M \left\| \frac{1}{T} \sum_{t=m}^T (X(t) - X^m(t)) \otimes X^m(t) \right\| &\leq M \frac{1}{T} \sum_{t=m}^T \|(X(t) - X^m(t)) \otimes X^m(t)\| = \\ &= M \frac{1}{T} \sum_{t=m}^T \|X(t) - X^m(t)\| \cdot \|X^m(t)\| \leq \\ &\leq \frac{1}{T} \sum_{t=m}^T \sqrt{M \|X(t) - X^m(t)\|^2} \sqrt{M \|X^m(t)\|^2}. \end{aligned}$$

Обчислимо кожне математичне сподівання в правій частині нерівності окремо. Зазначимо що $X^m(t)$ - це останні m доданків рекурсивної суми $X(t)$. В (1.10) було продемонстровано, що

$$\begin{aligned}
M \|X(t) - X^m(t)\|^2 &= M \left\| \sum_{i=1}^{t-m} A^{t-i} u(i) \right\|^2 \leqslant \\
&\leqslant \sigma^2 N \sum_{i=1}^{t-m} \|A^{t-i}\|^2 \leqslant \sigma^2 N \sum_{i=m}^{t-1} \|A\|^{2i} \leqslant \sigma^2 N \sum_{i=m}^{\infty} \|A\|^{2i},
\end{aligned} \tag{1.13}$$

i modi

$$\begin{aligned}
M \|X^m(t)\|^2 &= M \left\| \sum_{i=t-m+1}^t A^{t-i} u(i) \right\|^2 \leqslant \sigma^2 N \sum_{i=t-m+1}^t \|A^{t-i}\|^2 \leqslant \\
&\leqslant \sigma^2 N \sum_{i=0}^{\infty} \|A\|^{2i} = \sigma^2 N C^2.
\end{aligned}$$

Таким чином отримуємо наступну нерівність

$$\begin{aligned}
M \left\| \frac{1}{T} \sum_{t=m}^T (X(t) - X^m(t)) \otimes X^m(t) \right\| &\leqslant \frac{\sigma^2 N C}{T} \sum_{t=m}^T \sqrt{\sum_{i=m}^{\infty} \|A\|^{2i}} \leqslant \\
&\leqslant \frac{\sigma^2 N C}{T} \sum_{t=1}^T \sqrt{\sum_{i=m}^{\infty} \|A\|^{2i}} \leqslant \sigma^2 N C \sqrt{\sum_{i=m}^{\infty} \|A\|^{2i}}.
\end{aligned}$$

Оскільки ряд $\sum_{i=0}^{\infty} \|A\|^{2i}$ є збіжним, то вибором достатньо великого m суму $\sum_{i=m}^{\infty} \|A\|^{2i}$ завжди можна зробити як завгодно малою.

3) Аналогічним чином вибором достатньо великого m можна зробити як завгодно малою суму $\frac{1}{T} \sum_{t=m}^T X^m(t) \otimes (X(t) - X^m(t))$.

4) Переконаємось, що

$$\frac{1}{T} \sum_{t=m}^T (X(t) - X^m(t)) \otimes (X(t) - X^m(t)) \xrightarrow[T \rightarrow \infty]{L^1} 0.$$

Оскільки:

$$\left\| \frac{1}{T} \sum_{t=m}^T (X(t) - X^m(t)) \otimes (X(t) - X^m(t)) \right\| \leq \frac{1}{T} \sum_{t=m}^T \|X(t) - X^m\|^2,$$

то нерівність буде зберігатись і для математичних сподівань лівої та правої частин останньої нерівності

$$M \left\| \frac{1}{T} \sum_{t=m}^T (X(t) - X^m(t)) \otimes (X(t) - X^m(t)) \right\| \leq \frac{1}{T} \sum_{t=m}^T M \|X(t) - X^m\|^2.$$

З нерівності (1.13) відомо, що $M \|X(t) - X^m(t)\|^2 \leq \sigma^2 N \sum_{i=m}^{\infty} \|A\|^{2i}$, тому

$$\begin{aligned} M \left\| \frac{1}{T} \sum_{t=m}^T (X(t) - X^m(t)) \otimes (X(t) - X^m(t)) \right\| &\leq \\ &\leq \frac{\sigma^2 N}{T} \sum_{t=m}^T \sum_{i=m}^{\infty} \|A\|^{2i} \leq \sigma^2 N \sum_{i=m}^{\infty} \|A\|^{2i}. \end{aligned}$$

Аналогічно до пункту (2)) вибором достатньо великого m можемо зробити суму в правій частині як завжди малою.

5) Розглянемо останній доданок $\frac{1}{T} \sum_{t=m}^T X^m(t) \otimes X^m(t) - \sigma^2 \sum_{i=0}^{m-1} A^{2i}$. Згрупуємо доданки $X^m(t)$ за остачею від ділення t на m .

$$\frac{1}{T} \sum_{t=m}^T X^m(t) \otimes X^m(t) = \sum_{r=0}^{m-1} \frac{1}{T} \sum_{l=1}^{\left\lceil \frac{T}{m} \right\rceil} X^m(lm + r) \otimes X^m(lm + r).$$

Випадкові величини $X_{lm+r}^m, X_{(l+1)m+r}^m, \dots$ є незалежними і розподілені так само як випадкова величина $X^m(t), t \geq m$. Тому за законом великих чисел

$$\begin{aligned} & \frac{1}{m} \sum_{r=0}^{m-1} \frac{m}{T} \sum_{l=1}^{\left\lceil \frac{T}{m} \right\rceil} X^m(lm+r) \otimes X^m(lm+r) \xrightarrow{T \rightarrow \infty} \\ & \xrightarrow{T \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_{r=0}^{m-1} M[X^m(m) \otimes X^m(m)] = M[X^m(m) \otimes X^m(m)]. \end{aligned}$$

Далі знайдемо значення математичного сподівання $M[X^m(m) \otimes X^m(m)]$:

$$\begin{aligned} M[X^m(m) \otimes X^m(m)] &= M \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m A^{m-i} [u(i) \otimes u(j)] A^{m-j} = \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m A^{m-i} M[u(i) \otimes u(j)] A^{m-j}. \end{aligned}$$

Математичне сподівання $M[u(i) \otimes u(j)]$ відмінне від нуля лише для $i = j$, тому

$$M[X^m(m) \otimes X^m(m)] = \sigma^2 \sum_{i=1}^m A^{2(m-i)} = \sigma^2 \sum_{i=0}^{m-1} A^{2i}.$$

Отже $\frac{1}{T} \sum_{t=m}^T X^m(t) \otimes X^m(t) - \sigma^2 \sum_{i=0}^{m-1} A^{2i} \xrightarrow{T \rightarrow \infty} 0$, що і треба було довести.

□

Побудуємо оцінку невідомого параметра α за методом моментів.

$$X(t) = AX(t-1) + u(t) \quad \Bigg| \quad \otimes X(t-1),$$

$$X(t) \otimes X(t-1) = AX(t-1) \otimes X(t-1) + u(t) \otimes X(t-1).$$

Прирівняємо математичні сподівання величин в останній рівності.

$$M[X(t) \otimes X(t-1)] = AM[X(t-1) \otimes X(t-1)] + M[u(t) \otimes X(t-1)].$$

Через незалежність випадкових величин $X(t-1)$ від шуму $u(t)$ в наступний момент часу можемо спростити останній доданок:

$$M[u(t) \otimes X(t-1)] = Mu(t)MX(t-1) = 0.$$

Маємо наступну рівність.

$$M[X(t) \otimes X(t-1)] = AM[X(t-1) \otimes X(t-1)].$$

Будуємо на основі цієї рівності оцінку $\hat{\alpha}$ для α . Замінивши математичне сподівання вибіркоким моментом отримаємо, отримаємо

$$\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T X(t) \otimes X(t-1) = \hat{A} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T X(t-1) \otimes X(t-1),$$

Звідки

$$\hat{A} = \left(\sum_{t=1}^T X(t) \otimes X(t-1) \right) \left(\sum_{t=1}^T X(t-1) \otimes X(t-1) \right)^{-1}.$$

В свою чергу $\hat{A} = I - \hat{\alpha}V$. Тому оцінку $\hat{\alpha}$ можна отримати, наприклад, так:

$$\begin{aligned} \text{trace}(I - \hat{\alpha}V) &= \text{trace}(\hat{A}), \\ N - \hat{\alpha}\text{trace}(V) &= \text{trace}(\hat{A}), \\ \hat{\alpha} &= 1/2 - \frac{\text{trace}(\hat{A})}{2N}. \end{aligned}$$

Відомо [8], що наведена оцінка $\hat{A}$ матриці A є змістовною, і

асимптотично незміщеною, але обчислити її числові характеристики при фіксованому T не вдається. В наступному розділі ми запропонуємо оцінку, яка дозволить оцінити відстань між істиним та оціненим розподілом.

1.3 Оцінка розподілу системи зв'язаних осциляторів

З ортогональної декомпозиції (1.4) матриці $A = I - \alpha V$ випливає, що

$$X(t) = \sum_{i=1}^t A^{t-i} u(i) = \sum_{i=1}^t \left(W D W' \right)^{t-i} u(i) = W \sum_{i=1}^t D^{t-i} (W' u(i)). \quad (1.14)$$

Домножимо рівність зліва на W' і позначимо:

$$Z(t) = W' X(t), \quad (1.15)$$

$$\epsilon(t) = W' u(t). \quad (1.16)$$

Зауважимо, що W' - ортогональна матриця, і тому:

$$M \left[W' u(t) \right] = W' M u(t) = 0, \quad (1.17)$$

$$\text{cov}(W' u(t)) = W' \text{cov}(u(t)) W = W' \sigma^2 W = \sigma^2 I. \quad (1.18)$$

Тому $\epsilon(t) \sim N(0, \sigma^2 I)$. В нових змінних рівність (1.14) має вигляд:

$$Z(t) = \sum_{i=1}^t D^{t-i} \epsilon(i). \quad (1.19)$$

З того, що D є діагональною матрицею, випливає, що координати $Z_1(t), \dots, Z_N(t)$ вектора $Z(t) = (Z_1(t), \dots, Z_N(t))$ є незалежними випадковими величинами і справедлива наступна формула

$$Z_k(t) = \sum_{i=1}^t \lambda_k^{t-i} \epsilon_k(i), \quad (1.20)$$

де, нагадаємо, $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ є власними значеннями матриці A і мають такий вигляд:

$$\lambda_i = 1 - 2\alpha + 2\alpha \cos \frac{i\pi}{N+1}.$$

З (1.20) випливає, що

$$Z_k(t) \sim N(0, \sigma^2 \sum_{i=1}^t (\lambda_k^2)^{t-i}) = N\left(0, \sigma^2 \frac{1 - \lambda_k^{2t}}{1 - \lambda_k^2}\right).$$

Лема 1.5.

$$\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T Z_k^2(t) \xrightarrow{p} \frac{\sigma^2}{1 - \lambda_k^2}. \quad (1.21)$$

Доведення. Доведення лемми 1.5 є схожим на доведення лемми 1.4.

Для кожного $m \geq 1$ і довільного $t \geq m$ означимо випадкову величину:

$$Z_k^m(t) = \sum_{i=t-m+1}^t \lambda_k^{t-i} \epsilon_k(i).$$

Подано різницю $\sum_{t=1}^T Z_k^2(t) - \frac{\sigma^2}{1 - \lambda_k^2}$ у вигляді суми

$$\begin{aligned} & \sum_{t=1}^T Z_k^2(t) - \frac{\sigma^2}{1 - \lambda_k^2} = \\ &= \sum_{t=1}^{m-1} Z_k^2(t) + \sum_{t=m}^T (Z_k(t) - Z_k^m(t) + Z_k^m(t))^2 - \frac{\sigma^2}{1 - \lambda_k^2} = \\ &= \sum_{t=1}^{m-1} Z_k^2(t) + \sum_{t=m}^T (Z_k(t) - Z_k^m(t))^2 + \\ &+ 2 \sum_{t=m}^T (Z_k(t) - Z_k^m(t)) Z_k^m(t) + \left[\sum_{t=m}^T Z_k^m(t)^2 - \frac{\sigma^2}{1 - \lambda_k^2} \right]. \end{aligned}$$

Переконаємось, що кожен з доданків збігається до нуля за

ймовірністю при $T \rightarrow \infty$.

$$1) \text{ Переконаємось, що } \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{m-1} Z_k(t)^2 \xrightarrow[T \rightarrow \infty]{L^1} 0$$

Зауважимо, що для довільного фіксованого $m \geq 1$

$$M \left| \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{m-1} Z_k(t)^2 \right| \leq \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{m-1} M |Z_k(t)^2| = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{m-1} \sigma^2 \frac{1 - \lambda_k^{2t}}{1 - \lambda_k^2} \rightarrow 0, \quad T \rightarrow \infty.$$

Оскільки зі збіжності L^1 випливає збіжність за ймовірністю, то для довільного фіксованого m маємо:

$$\frac{1}{T} \sum_{t=1}^{m-1} Z_k(t)^2 \xrightarrow[T \rightarrow \infty]{P} 0.$$

$$2) \text{ Переконаємось, що } \frac{1}{T} \sum_{t=m}^T (Z_k(t) - Z_k^m(t)) Z_k^m(t) \xrightarrow[T \rightarrow \infty]{L^1} 0.$$

Скористаємось нерівністю трикутника:

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{T} \sum_{t=m}^T (Z_k(t) - Z_k^m(t)) Z_k^m(t) \right| &\leq \frac{1}{T} \sum_{t=m}^T |(Z_k(t) - Z_k^m(t)) Z_k^m(t)| \leq \\ &\leq \frac{1}{T} \sum_{t=m}^T |Z_k(t) - Z_k^m(t)| \cdot |Z_k^m(t)|. \end{aligned}$$

Тому

$$M \left| \frac{1}{T} \sum_{t=m}^T (Z_k(t) - Z_k^m(t)) Z_k^m(t) \right| \leq \frac{1}{T} \sum_{t=m}^T M [|Z_k(t) - Z_k^m(t)| \cdot |Z_k^m(t)|].$$

За нерівністю Коші-Буняковського

$$\frac{1}{T} \sum_{t=m}^T M [|Z_k(t) - Z_k^m(t)| \cdot |Z_k^m(t)|] \leq \frac{1}{T} \sum_{t=m}^T \sqrt{M |Z_k(t) - Z_k^m(t)|^2} \sqrt{M |Z_k^m(t)|^2}.$$

Оцінимо праву частину нерівності

$$\begin{aligned}
M |Z_k(t) - Z_k^m(t)|^2 &= M \left| \sum_{i=1}^{t-m} \lambda_k^{t-i} \epsilon_k(i) \right|^2 \leq \sum_{i=1}^{t-m} \lambda_k^{2(t-i)} M |\epsilon_k(i)|^2 = \\
&= \sigma^2 \sum_{i=m}^{t-1} \lambda_k^{2i} \leq \sigma^2 \sum_{i=m}^{\infty} \lambda_k^{2i},
\end{aligned}$$

$$M |Z_k^m(t)|^2 = M \left| \sum_{i=t-m+1}^t \lambda_k^{t-i} \epsilon_k(i) \right|^2 \leq \sigma^2 \sum_{i=1}^m \lambda_k^{2i} \leq \sigma^2 \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_k^{2i} = \sigma^2 C.$$

Зауважимо, що ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_k^{2i}$ є збіжним, саме тому маємо рівність $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_k^{2i} = C$, для деякої константи C .

Таким чином

$$\begin{aligned}
M \left| \frac{1}{T} \sum_{t=m}^T (Z_k(t) - Z_k^m(t)) Z_k^m(t) \right| &\leq \frac{\sigma^2 C}{T} \sum_{t=m}^T \sqrt{\sum_{i=m}^{\infty} \lambda_k^{2i}} \leq \\
&\leq \sigma^2 C \sqrt{\sum_{i=m}^{\infty} \lambda_k^{2i}}.
\end{aligned}$$

Оскільки ряд $\sum_{i=0}^{\infty} \lambda_k^{2i}$ збіжний, то вибором достатньо великого m суму $\sum_{i=m}^{\infty} \lambda_k^{2i}$ завжди можна зробити як завгодно малою.

3) Переконаємось, що

$$\frac{1}{T} \sum_{t=m}^T (Z_k(t) - Z_k^m(t))^2 \xrightarrow[T \rightarrow \infty]{L^1} 0$$

Оскільки:

$$\left| \frac{1}{T} \sum_{t=m}^T (Z_k(t) - Z_k^m(t))^2 \right| \leq \frac{1}{T} \sum_{t=m}^T |Z_k(t) - Z_k^m|^2,$$

то

$$M \left| \frac{1}{T} \sum_{t=m}^T (Z_k(t) - Z_k^m(t))^2 \right| \leq \frac{1}{T} \sum_{t=m}^T M |Z_k(t) - Z_k^m|^2.$$

З попередніх обчислень випливає, що

$$M \left| \frac{1}{T} \sum_{t=m}^T (Z_k(t) - Z_k^m(t))^2 \right| \leq \frac{\sigma^2}{T} \sum_{t=m}^T \sum_{i=m}^{\infty} \lambda_k^{2i} \leq \sigma^2 \sum_{i=m}^{\infty} \lambda_k^{2i}.$$

Аналогічно до 2) вибором великого m можемо зробити суму як завгодно малою.

4) Розглянемо останній доданок $\frac{1}{T} \sum_{t=m}^T Z_k^m(t)^2 - \frac{\sigma^2}{1 - \lambda_k^2}$. Згрупуємо доданки $Z_k^m(t)$ за остачею від ділення t на m .

$$\frac{1}{T} \sum_{t=m}^T Z_k^m(t)^2 = \sum_{r=0}^{m-1} \frac{1}{T} \sum_{l=1}^{\left\lceil \frac{T}{m} \right\rceil} Z_k^m(lm + r)^2.$$

Випадкові величини $Z_k^m(lm + r), Z_k^m((l + 1)m + r), \dots$ є незалежними і розподілені так само як випадкова величина $Z^m(m)$ тому за законом великих чисел

$$\frac{1}{m} \sum_{r=0}^{m-1} \frac{m}{T} \sum_{l=1}^{\left\lceil \frac{T}{m} \right\rceil} Z_k^m(lm + r)^2 \xrightarrow[T \rightarrow \infty]{P} M Z_k^m(m)^2,$$

де

$$M Z_k^m(m)^2 = M \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \lambda_k^{2m-i-j} \epsilon_k(i) \epsilon_k(j) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \lambda_k^{2m-i-j} M[\epsilon_k(i) \epsilon_k(j)].$$

Математичне сподівання $M[\epsilon_k(i) \epsilon_k(j)]$ відмінне від нуля лише для $i = j$

$$M[\epsilon_k(i) \epsilon_k(i)] = \sigma^2 \sum_{i=1}^m \lambda_k^{2(m-i)} = \sigma^2 \sum_{i=0}^{m-1} \lambda_k^{2i}.$$

Отже, $\frac{1}{T} \sum_{t=m}^T Z_k^m(t)^2 - \sigma^2 \sum_{i=0}^{m-1} \lambda_k^{2i} \xrightarrow[T \rightarrow \infty]{P} 0$, що і треба було довести.

□

1.3.1 Оцінка найменших квадратів

Побудуємо оцінку найменших квадратів (для нормального розподілу вона збігається з оцінкою максимальної правдоподібності):

$$Z_k(t) = \lambda_k Z_k(t-1) + \epsilon_k(t),$$

$$Q(\lambda_k) = \sum_{t=1}^T (Z_k(t) - \lambda_k Z_k(t-1))^2.$$

Продиференціюємо рівність за λ_k і прирівнюємо похідну до нуля:

$$\frac{\partial Q(\lambda_k)}{\partial \lambda_k} = -2 \sum_{t=1}^T Z_k(t-1)(Z_k(t) - \hat{\lambda}_k Z_k(t-1)) = 0,$$

$$\sum_{t=1}^T Z_k(t)Z_k(t-1) - \sum_{t=1}^T \hat{\lambda}_k Z_k^2(t-1) = 0.$$

Маємо оцінку найменших квадратів, для $\hat{\lambda}_k$

$$\hat{\lambda}_k = \frac{\sum_{t=1}^T Z_k(t)Z_k(t-1)}{\sum_{t=1}^T Z_k^2(t-1)}. \quad (1.22)$$

Також зазначимо інший вигляд рівності (1.22), який знадобиться для оцінок.

$$\hat{\lambda}_k = \frac{\sum_{t=1}^T \lambda_k Z_k^2(t-1) + \epsilon_k(t)Z_k(t-1)}{\sum_{t=1}^T Z_k^2(t-1)} = \lambda_k + \frac{\sum_{t=1}^T \epsilon_k(t)Z_k(t-1)}{\sum_{t=1}^T Z_k^2(t-1)},$$

$$\hat{\lambda}_k - \lambda_k = \frac{\sum_{t=1}^T \epsilon_k(t)Z_k(t-1)}{\sum_{t=1}^T Z_k^2(t-1)}. \quad (1.23)$$

За допомогою центральній граничній теоремі для мартингальних різниць, яку можна знайти як теорему (5.3.4) [5], можна довести наступне твердження.

Твердження 1.2. Оцінка (1.22) є асимптотично нормальною, тобто:

$$\sqrt{T}(\hat{\lambda}_k - \lambda_k) \xrightarrow{d} N\left(0, \frac{\sigma^2}{1 - \lambda_k^2}\right). \quad (1.24)$$

Отже, оцінка є змістовною та асимптотично нормальною. Далі розглянемо, як маючи оцінку власних значень $\hat{\lambda}_1 \dots \hat{\lambda}_n$ можна знайти $\hat{\alpha}$.

Нехай маємо значення оцінки для $\hat{\lambda}_1 \dots \hat{\lambda}_n$, тоді:

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \hat{\lambda}_i = \frac{N - 2N\hat{\alpha} + 2\hat{\alpha} \sum_{i=1}^N \cos \frac{i\pi}{N+1}}{N}.$$

Зрозуміло, що

$$\sum_{i=1}^N \cos \frac{i\pi}{N+1} = 0,$$

а отже:

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \hat{\lambda}_i &= \frac{N - 2N\hat{\alpha}}{N} = 1 - 2\hat{\alpha}, \\ \hat{\alpha} &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^N \hat{\lambda}_i. \end{aligned}$$

Нехай ми спостерігаємо $Z_k(1), \dots, Z_k(T)$ для якогось конкретного k . Тоді, спостерігаючи лише один осцилятор, за (1.22) можемо побудувати оцінку $\hat{\lambda}$ і оцінку $\hat{\alpha}$:

$$\hat{\alpha} = \frac{1 - \hat{\lambda}_i}{2(1 - \cos \frac{i\pi}{N+1})}.$$

Маючи оцінку $\hat{\alpha}$, можемо побудувати оцінки для $\lambda_l, l \neq k$:

$$\hat{\lambda}_l = 1 - 2\hat{\alpha} + 2\hat{\alpha} \cos \frac{l\pi}{N+1}.$$

Тоді також маємо покомпонентну оцінку для $\hat{Z}_l(t) = \sum_{i=1}^t \hat{\lambda}_l^{t-i} \hat{Z}_l(i)$.

Тоді $\hat{Z}_l(t) \stackrel{d}{\sim} N\left(0, \sigma^2 \frac{1 - \hat{\lambda}_l^{2t}}{\hat{\lambda}_l^2}\right)$, а для вектора $\hat{Z}(t) = (\hat{Z}_1(t), \dots, \hat{Z}_N(t))$ маємо:

$$\hat{Z}(t) \sim N\left(\bar{0}, \begin{pmatrix} \frac{1 - \hat{\lambda}_1^{2t}}{\hat{\lambda}_1^2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1 - \hat{\lambda}_2^{2t}}{\hat{\lambda}_2^2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1 - \hat{\lambda}_N^{2t}}{\hat{\lambda}_N^2} \end{pmatrix}\right)$$

Відповідно до (1.17) $X(t) \sim Z(t)$.

1.3.2 Оцінка через вибіркового другий момент

У попередньої оцінки є суттєвий недолік: обчислити її числові характеристики при фіксованому значенні T ми не можемо. Тому розглянемо наступну оцінку:

$$\hat{\theta}_{k,T} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T Z_k^2(t) = \frac{1}{T} \|Z_k\|^2, \quad (1.25)$$

де через Z_k позначимо вектор $(Z_k(1), Z_k(2), \dots, Z_k(T))$. Цей вектор є гаусовим вектором з нульовим математичним сподіванням.

Для якого при $s \leq t$:

$$\begin{aligned} \text{cov}(Z_k(s), Z_k(t)) &= \text{cov}\left[\sum_{i=1}^s \lambda_k^{s-i} \epsilon_k(i), \sum_{i=1}^t \lambda_k^{t-i} \epsilon_k(i)\right] = \\ &= D\left[\sum_{i=1}^s \lambda_k^{s-i} \epsilon_k(i)\right] = \sigma^2 \sum_{i=0}^{s-1} \lambda_k^{2i} = \sigma^2 \frac{1 - \lambda_k^{2s}}{1 - \lambda_k^2} = \sigma^2 \frac{1 - \lambda_k^{2\min(s,t)}}{1 - \lambda_k^2}. \end{aligned}$$

Тому матриця $R_k = \text{cov}(Z_k(s), Z_k(t))_{s,t=\overline{1,T}}$ має наступний вигляд:

$$R_k = \begin{pmatrix} \sigma^2 \frac{1 - \lambda_k^2}{1 - \lambda_k^2} & \sigma^2 \frac{1 - \lambda_k^2}{1 - \lambda_k^2} & \cdots & \sigma^2 \frac{1 - \lambda_k^2}{1 - \lambda_k^2} \\ \sigma^2 \frac{1 - \lambda_k^2}{1 - \lambda_k^2} & \sigma^2 \frac{1 - \lambda_k^4}{1 - \lambda_k^2} & \cdots & \sigma^2 \frac{1 - \lambda_k^4}{1 - \lambda_k^2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sigma^2 \frac{1 - \lambda_k^2}{1 - \lambda_k^2} & \sigma^2 \frac{1 - \lambda_k^4}{1 - \lambda_k^2} & \cdots & \sigma^2 \frac{1 - \lambda_k^{2T}}{1 - \lambda_k^2} \end{pmatrix} \quad (1.26)$$

Твердження 1.3. Оцінка $\hat{\theta}_{k,T}$ є асимптотично незміщеною для значення $\frac{\sigma^2}{1 - \lambda_k^2}$.

Доведення. Знайдемо математичне сподівання оцінки $\hat{\theta}_{k,T}$

$$M\hat{\theta}_{k,T} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T M[Z_k^2(t)] = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T D[Z_k(t)] = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (R_k)_{tt}.$$

Оскільки

$$\begin{aligned} \sum_{t=1}^T (R_k)_{tt} &= \frac{\sigma^2}{1 - \lambda_k^2} ((1 - \lambda_k^2) + (1 - \lambda_k^4) + \cdots + (1 - \lambda_k^{2T})) = \\ &= \frac{\sigma^2}{1 - \lambda_k^2} (T - \lambda_k^2 \frac{1 - \lambda_k^{2T}}{1 - \lambda_k^2}), \end{aligned}$$

то

$$M\hat{\theta}_{k,T} = \frac{\sigma^2}{1 - \lambda_k^2} - \sigma^2 \lambda_k^2 \frac{1 - \lambda_k^{2T}}{T(1 - \lambda_k^2)^2}, \quad (1.27)$$

$$а отже M\hat{\theta}_{k,T} \xrightarrow{T \rightarrow \infty} \frac{\sigma^2}{1 - \lambda_k^2}.$$

□

Зауважимо, що з леми 1.5 випливає, що оцінка $\hat{\theta}_{k,T}$ є змістовною для $\frac{\sigma^2}{1 - \lambda_k^2}$.

Доведемо що статистика $\hat{\theta}_{k,T}$, при $T \rightarrow \infty$ збігається до $\frac{\sigma^2}{1 - \lambda_k^2}$ в середньому будь-якого порядку $p > 0$. Для цього нам знадобляться

наступні теореми.

Теорема 1.2. [9] (с. 211) Якщо $a, b > 0$ та $p \leq 1$, тоді:

$$(a + b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p). \quad (1.28)$$

Теорема 1.3. [4] (с. 83, Теорема 5.1.1) Нехай $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m \sim N(0, \sigma^2)$ — незалежні однаково розподіленні випадкові величини, і нехай P_n є довільним поліномом степені n з m змінними. Тоді, для довільного $p > 1$:

$$M[P_n(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)]^{2p} \leq C_{n,p} \cdot (M|P_n(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)|^2)^p,$$

де $C_{n,p} = \text{const}$.

Теорема 1.4. Для довільного $p > 0$

$$M \left| \hat{\theta}_{k,T} - \frac{\sigma^2}{1 - \lambda_k^2} \right|^p \xrightarrow{T \rightarrow \infty} 0.$$

Доведення. Відповідно до (1.27)

$$\frac{\sigma^2}{1 - \lambda_k^2} = M\hat{\theta}_{k,T} + \sigma^2 \lambda_k^2 \frac{1 - \lambda_k^{2T}}{T(1 - \lambda_k^2)^2}.$$

Тому

$$\begin{aligned} \left| \hat{\theta}_{k,T} - \frac{\sigma^2}{1 - \lambda_k^2} \right|^p &= \left| \hat{\theta}_{k,T} - M\hat{\theta}_{k,T} - \sigma^2 \lambda_k^2 \frac{1 - \lambda_k^{2T}}{T(1 - \lambda_k^2)^2} \right|^p \leq \\ &\leq \left(\left| \hat{\theta}_{k,T} - M\hat{\theta}_{k,T} \right| + \sigma^2 \lambda_k^2 \frac{1 - \lambda_k^{2T}}{T(1 - \lambda_k^2)^2} \right)^p. \end{aligned}$$

З теореми 1.2 маємо:

$$\begin{aligned} & \left(\left| \hat{\theta}_{k,T} - M\hat{\theta}_{k,T} \right| + \sigma^2 \lambda_k^2 \frac{1 - \lambda_k^{2T}}{T(1 - \lambda_k^2)^2} \right)^p \leq \\ & \leq \max(1, 2^{p-1}) \left(\left(\left| \hat{\theta}_{k,T} - M\hat{\theta}_{k,T} \right| \right)^p + \left(\sigma^2 \lambda_k^2 \frac{1 - \lambda_k^{2T}}{T(1 - \lambda_k^2)^2} \right)^p \right). \end{aligned}$$

Оскільки $\left(\sigma^2 \lambda_k^2 \frac{1 - \lambda_k^{2T}}{T(1 - \lambda_k^2)^2} \right)^p \xrightarrow{T \rightarrow \infty} 0$, то залишилось переконатися що:

$$M \left(\left| \hat{\theta}_{k,T} - M\hat{\theta}_{k,T} \right| \right)^p \xrightarrow{T \rightarrow \infty} 0.$$

Для цього зауважимо, що вираз $\hat{\theta}_{k,T} - M\hat{\theta}_{k,T}$ є поліномом другого степеня від гаусових векторів:

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_{k,T} - M\hat{\theta}_{k,T} &= \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T Z_k^2(t) - \text{const} = \\ &= \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \left(\sum_{i=1}^t \lambda_k^{t-i} \epsilon_k(i) \right)^2 - \text{const} = P_2(\epsilon_k(1) \dots \epsilon_k(T)). \end{aligned}$$

Відповідно до теореми 1.3

$$M [P_2(\epsilon_k(1) \dots \epsilon_k(T))]^{2p} \leq C_{n,p} \left(M P_2 [(\epsilon_k(1) \dots \epsilon_k(T))]^2 \right)^p,$$

де константа $C_{n,p}$ не залежить від T . Тому достатньо показати, що:

$$M(\hat{\theta}_{k,T} - M\hat{\theta}_{k,T})^2 \xrightarrow{T \rightarrow \infty} 0.$$

Отже, маємо:

$$\begin{aligned}
 M(\hat{\theta}_{k,T} - M\hat{\theta}_{k,T})^2 &= M \left(\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \left(\sum_{i=1}^t \lambda_k^{t-i} \epsilon_k(i) \right)^2 - \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^t \lambda_k^{2t-2i} \right)^2 = \\
 &= \frac{1}{T^2} M \left(\sum_{t=1}^T \sum_{i,j=1}^t \lambda_k^{2t-i-j} \epsilon_k(i) \epsilon_k(j) - \sum_{t=1}^T \sum_{i,j=1}^t \lambda_k^{2t-i-j} \delta_{ij} \right)^2 = \\
 &= \frac{1}{T^2} M \left(\sum_{t=1}^T \sum_{i,j=1}^t \lambda_k^{2t-i-j} (\epsilon_k(i) \epsilon_k(j) - \delta_{ij}) \right)^2.
 \end{aligned}$$

Змінимо порядок підсумовування:

$$\begin{aligned}
 M(\hat{\theta}_{k,T} - M\hat{\theta}_{k,T})^2 &= \frac{1}{T^2} M \left(\sum_{i,j=1}^T (\epsilon_k(i) \epsilon_k(j) - \delta_{ij}) \cdot \sum_{t=\max(i,j)}^T \lambda_k^{2t-i-j} \right)^2 = \\
 &= \frac{1}{T^2} M \sum_{i,j,m,l=1}^T (\epsilon_k(i) \epsilon_k(j) - \delta_{ij}) (\epsilon_k(m) \epsilon_k(l) - \delta_{ml}) \times \\
 &\quad \times \sum_{t=\max(i,j)}^T \lambda_k^{2t-i-j} \cdot \sum_{t=\max(m,l)}^T \lambda_k^{2t-m-l}.
 \end{aligned} \tag{1.29}$$

Оскільки

$$M [(\epsilon_k(i) \epsilon_k(j) - \delta_{ij}) (\epsilon_k(m) \epsilon_k(l) - \delta_{ml})] \leq \delta_{ijml} (3\sigma^4 - 2\sigma^2 + 1) \leq \delta_{ijml} (3\sigma^4 + 1),$$

то

$$\begin{aligned}
M(\hat{\theta}_{k,T} - M\hat{\theta}_{k,T})^2 &\leq \frac{3\sigma^4 + 1}{T^2} \sum_{i=1}^T \sum_{t_1=i}^T \lambda_k^{2t_1-2i} \sum_{t_2=i}^T \lambda_k^{2t_2-2i} \leq \\
&\leq \frac{3\sigma^4 + 1}{T^2} \sum_{i=1}^T \sum_{t_1=i}^{\infty} \lambda_k^{2t_1-2i} \sum_{t_2=i}^{\infty} \lambda_k^{2t_2-2i} = \frac{3\sigma^4 + 1}{T^2} \cdot T \cdot \left(\frac{1}{1 - \lambda_k^2} \right)^2 = \\
&= \frac{3\sigma^4 + 1}{T} \cdot \left(\frac{1}{1 - \lambda_k^2} \right)^2 \rightarrow 0, T \rightarrow \infty.
\end{aligned}$$

Таким чином:

$$M \left| \hat{\theta}_{k,T} - \frac{\sigma^2}{1 - \lambda_k^2} \right|^p \xrightarrow{T \rightarrow \infty} 0.$$

□

Зауваження. Таким чином, зважаючи на те що зі збіжності в середньому випливає збіжність за ймовірністю, з твердження випливає, що оцінка $\hat{\theta}_{k,T}$ є змістовною оцінкою для $\frac{\sigma^2}{1 - \lambda_k^2}$.

Висновки до розділу 1

У першому розділі роботи було розглянуто та побудовано модель системи зв'язаних пружними силами осциляторів з невідомим коефіцієнтом жорсткості α , отримано рівняння авторегресії в матричному вигляді. Досліджено властивості матриці V , встановлено, що тридіагональна матриця V має таку діагональну декомпозицію, що лише власні значення діагональної матриці залежать від невідомого параметра α . Встановлено умови існування стаціонарного розв'язку рівняння авторегресії. Знайдено властивості системи зв'язаних осциляторів, побудовано оцінку невідомого параметра α . За допомогою діагональної декомпозиції побудовано спрощене рівняння авторегресії та для спрощеного рівняння побудовано дві оцінки невідомого параметра α .

2 ВІДСТАНІ МІЖ ЙМОВІРНІСНИМИ РОЗПОДІЛАМИ

2.1 Метрики на просторі імовірнісних мір

Існує багато метрик для вимірювання відстані між ймовірнісними розподілами, кожна з яких має свої особливості та сфери застосування. В даній главі ми розглянемо:

- 1) Відстань Кульбака-Лейблера (KL)
- 2) Відстань Васерштейна (W)
- 3) Відстань за варіацією (TV)

Розглянемо наведені метрики

Означення 2.1. (Визначення 1 с. 251 [1])

Нехай є дві випадкові величини X, Y з відповідними щільностями розподілу $p(x), q(x)$. Відстанню Кульбака-Лейблера називається величина

$$D_{KL}(X||Y) = \int p(x) \log \frac{p(x)}{q(x)} dx.$$

Приклад 2.1. Для двох нормальних випадкових величин $X \sim N(\mu_x, \sigma_x^2)$ та $Y \sim N(\mu_y, \sigma_y^2)$ маємо наступну відстань Кульбака-Лейблера

$$D_{KL}(X||Y) = \log \frac{\sigma_y}{\sigma_x} + \frac{\sigma_x^2 + (\mu_x - \mu_y)^2}{2\sigma_y^2} - \frac{1}{2}.$$

Означення 2.2. (Визначення 2.1 с. 938 [2])

Відстанню Васерштейна між розподілами випадкових величин ξ та η , визначених на метричному просторі $(\mathbb{R}^k, d)$, називається величина

$$W_p(\xi, \eta) = \left(\inf_{\gamma \in \Pi(\xi, \eta)} \int_{\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k} \|x - y\|^p d\gamma(x, y) \right)^{1/p}.$$

Де $\Pi(\xi, \eta)$ множина розподілів для яких розподіли ξ та η є маргінальними.

Приклад 2.2. Відстань Васерштейна для нормально розподілених величин $\xi \sim N(\mu_0, \Sigma_0)$, $\eta \sim N(\mu_1, \Sigma_1)$

$$W_2^2(\xi, \eta) = \|\mu_0 - \mu_1\|^2 + \text{tr} \left(\Sigma_0 + \Sigma_1 - 2 \left(\Sigma_0^{1/2} \Sigma_1 \Sigma_0^{1/2} \right)^{1/2} \right).$$

Означення 2.3. (Визначення 1 с. 2 [3])

Відстань за варіацією між двома розподілами випадкових величин ξ та η на вимірному просторі (Ω, F) називається величина

$$TV(\xi, \eta) = \sup_{A \in F} |\xi(A) - \eta(A)|.$$

Приклад 2.3. Відстань за варіацією для інтегрованих випадкових величин визначається як:

$$TV(\xi, \eta) = \frac{1}{2} \int_{R^k} |f_\xi(x) - f_\eta(x)| dx.$$

Наведемо теорему для оцінки відстані за варіацією для нормально розподілених величин

Теорема 2.1. (Теорема 1.1 с. 2 [3])

Нехай ξ, η є k -вимірними нормально розподіленими випадковими величинами з однаковим математичним сподіванням $\xi \sim N(\mu, \Sigma_\xi)$, $\eta \sim N(\mu, \Sigma_\eta)$ і $\rho_1, \dots, \rho_k$ власні числа матриці $\Sigma_\xi^{-1} \Sigma_\eta - I$. Тоді має місце наступна оцінка

$$\frac{1}{100} \leq \frac{TV(N(\mu, \Sigma_\xi), N(\mu, \Sigma_\eta))}{\min \left(1, \sqrt{\sum_{i=1}^k \rho_i^2} \right)} \leq \frac{3}{2}. \quad (2.1)$$

2.2 Відстань за варіацією між істинним та оціненим розподілом системи зв'язаних осциляторів

В попередньому розділі було показано, що для довільного моменту часу $t = \overline{1, T}$ розподіл вектора $Z(t) = (Z_1(t), \dots, Z_N(t))$, визначеного в (1.17), (1.19), має нормальний розподіл $N(0, \Sigma(t))$, де

$$\Sigma_{kj}(t) = \delta_{kj} \cdot \sigma^2 \frac{1 - \lambda_k^{2t}}{1 - \lambda_k^2}, \quad k, j = \overline{1, N}.$$

При невідомих власних значеннях $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ матриці $A = I - \alpha V$ в якості оцінки нормального розподілу $N(0, \Sigma(t))$ прийнемо нормальний розподіл $N(0, \hat{\Sigma}_T(t))$ з коваріаційною матрицею

$$(\hat{\Sigma}_T(t))_{kj} = \delta_{kj} \cdot \sigma^2 g_t(\hat{\theta}_{k,T}), \quad k, j = \overline{1, N},$$

де

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_{k,T} &= \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T Z_k^2(t), \\ g_t(x) &= \frac{x}{\sigma^2} \left(1 - \left(1 - \frac{\sigma^2}{x} \right)^t \right), \quad x > 0. \end{aligned}$$

Зауважимо, що оскільки за доведеним вище

$$\hat{\theta}_{k,T} \xrightarrow[T \rightarrow \infty]{P} \frac{\sigma^2}{1 - \lambda_k^2},$$

а функція $g_t(x)$ є неперервною за x , то

$$g_t(\hat{\theta}_{k,T}) \xrightarrow[T \rightarrow \infty]{P} g_t\left(\frac{\sigma^2}{1 - \lambda_k^2}\right) = \frac{1 - \lambda_k^{2t}}{1 - \lambda_k^2},$$

а отже

$$\hat{\Sigma}_T(t) \xrightarrow[T \rightarrow \infty]{P} \Sigma(t),$$

i

$$\Sigma_{kj}(t) = \delta_{kj} \cdot \sigma^2 g_t \left(\frac{\sigma^2}{1 - \lambda_k^2} \right), \quad k, j = \overline{1, N}.$$

Зауважимо також, що з умови $|\lambda_k| < 1$ випливає що $\frac{\sigma^2}{1 - \lambda_k^2} > \sigma^2$.

Розглянемо замість оцінки $\hat{\theta}_{k,T}$ оцінку

$$\tilde{\theta}_{k,T} = \max(\sigma^2, \hat{\theta}_{k,T}).$$

яка задовільняє умові

$$\tilde{\theta}_{k,T} \geq \sigma^2,$$

для довільного T . Зазначимо, що

$$\tilde{\theta}_{k,T} = \max(\sigma^2, \hat{\theta}_{k,T}) \xrightarrow[T \rightarrow \infty]{p} \max(\sigma^2, \frac{\sigma^2}{1 - \lambda_k^2}) = \frac{\sigma^2}{1 - \lambda_k^2},$$

тому $\tilde{\theta}_{k,T}$ залишається змістовною оцінкою для $\frac{\sigma^2}{1 - \lambda_k^2}$, а матриця $\tilde{\Sigma}_T(t)$ з елементами

$$\left(\tilde{\Sigma}_T(t) \right)_{kj} = \delta_{kj} \cdot \sigma^2 g_t \left(\tilde{\theta}_{k,T} \right),$$

є змістовною оцінкою для матриці $\Sigma(t)$.

Оцінимо математичне сподівання відстані за варіацією між розподілами $N(0, \Sigma(t))$ і $N(0, \hat{\Sigma}(t))$. Згідно з теоремою 2.1, має місце оцінка для відстані за варіацією між двома нормальними розподілами:

$$TV(N(0, \Sigma_1), N(0, \Sigma_2)) \leq \frac{3}{2} \sqrt{\sum_{k=1}^N \rho_k^2}. \quad (2.2)$$

де ρ_k - власні числа матриці $\Sigma_1^{-1} \Sigma_2 - I$.

Оскільки матриця $\tilde{\Sigma}_T(t)$ є випадковою, то ми будемо шукати оцінку для математичного сподівання $M \left[TV(N(0, \Sigma(t)), N(0, \tilde{\Sigma}_T(t))) \right]^2$ відстані за варіацією між істинним розподілом $N(0, \Sigma(t))$ вектора $Z(t)$ та його оцінкою $N(0, \tilde{\Sigma}_T(t))$.

Теорема 2.2. *Нехай $\alpha \in \left[\alpha_0, \frac{1}{2} \right)$, $\alpha_0 > 0$. Тоді*

$$M \left[TV(N(0, \Sigma(t)), N(0, \tilde{\Sigma}_T(t))) \right]^2 \leq \frac{9}{4} \frac{3\sigma^4 + 1}{\left(2\alpha_0 \sin^2 \frac{\pi}{N+1} \right) \sigma^4} \cdot \frac{(t+1)^2}{T}.$$

Доведення. Згідно з наведеною вище оцінкою (2.2) можемо записати:

$$M \left[TV(N(0, \Sigma(t)), N(0, \tilde{\Sigma}_T(t))) \right]^2 \leq \frac{9}{4} \sum_{k=1}^N \rho_k^2,$$

де $\rho_1, \dots, \rho_N$ є власними значеннями матриці $\Sigma_1^{-1}\Sigma_2 - I$. З вигляду матриць $\Sigma(t)$ та $\tilde{\Sigma}_T(t)$ випливає, що власні значення матриці $\Sigma_1^{-1}\Sigma_2 - I$ мають вигляд

$$\rho_k = \frac{g_t \left(\tilde{\theta}_{k,T} \right) - g_t \left(\frac{\sigma^2}{1 - \lambda_k^2} \right)}{g_t \left(\frac{\sigma^2}{1 - \lambda_k^2} \right)},$$

а тоді

$$\begin{aligned} M \left[TV(N(0, \Sigma(t)), N(0, \tilde{\Sigma}_T(t))) \right]^2 &\leq \frac{9}{4} \sum_{k=1}^N \left(g_t \left(\frac{\sigma^2}{1 - \lambda_k^2} \right) \right)^{-2} \times \\ &\times M \left(g_t \left(\tilde{\theta}_{k,T} \right) - g_t \left(\frac{\sigma^2}{1 - \lambda_k^2} \right) \right)^2. \end{aligned}$$

Оскільки $\left(g_t \left(\frac{\sigma^2}{1 - \lambda_k^2} \right) \right)^{-2} \leq 1$, то

$$M \left[TV(N(0, \Sigma(t)), N(0, \tilde{\Sigma}_T(t))) \right]^2 \leq \frac{9}{4} \sum_{k=1}^N M \left(g_t(\tilde{\theta}_{k,T}) - g_t\left(\frac{\sigma^2}{1 - \lambda_k^2}\right) \right)^2.$$

Оскільки функція $g_t(x) = \frac{x}{\sigma^2} \left(1 - \left(1 - \frac{\sigma^2}{x} \right)^t \right)$, $x > \sigma^2$ є неперервною, то, скориставшись теоремою Лагранжа, можемо записати:

$$\begin{aligned} & M \left(g_t(\tilde{\theta}_{k,T}) - g_t\left(\frac{\sigma^2}{1 - \lambda_k^2}\right) \right)^2 \leq \\ & \leq M \left[\max_{z \in \left(\tilde{\theta}_{k,T}, \frac{\sigma^2}{1 - \lambda_k^2} \right)} |g'_t(z)|^2 \cdot \left| \tilde{\theta}_{k,T} - \frac{\sigma^2}{1 - \lambda_k^2} \right|^2 \cdot \mathbb{1}(\tilde{\theta}_{k,T} < \frac{\sigma^2}{1 - \lambda_k^2}) + \right. \\ & \quad \left. + \max_{z \in \left(\frac{\sigma^2}{1 - \lambda_k^2}, \tilde{\theta}_{k,T} \right)} |g'_t(z)|^2 \cdot \left| \tilde{\theta}_{k,T} - \frac{\sigma^2}{1 - \lambda_k^2} \right|^2 \cdot \mathbb{1}(\tilde{\theta}_{k,T} > \frac{\sigma^2}{1 - \lambda_k^2}) \right]. \end{aligned}$$

Розглянемо похідну функції $g_t(z)$:

$$g'_t(z) = \frac{1}{\sigma^2} \left(1 - \left(1 - \frac{\sigma^2}{z} \right)^t \right) - \frac{t}{z} \left(1 - \frac{\sigma^2}{z} \right)^{t-1}.$$

Зрозуміло, що при $z \geq \sigma^2$

$$|g'_t(z)| \leq \frac{1}{\sigma^2} + \frac{t}{\sigma^2} = \frac{t+1}{\sigma^2}.$$

Ця оцінка не залежить від z , а отже

$$M \left(g_t(\tilde{\theta}_{k,T}) - g_t\left(\frac{\sigma^2}{1 - \lambda_k^2}\right) \right)^2 \leq M \left[\left(\frac{t+1}{\sigma^2} \right)^2 \cdot \left| \tilde{\theta}_{k,T} - \frac{\sigma^2}{1 - \lambda_k^2} \right|^2 \right].$$

Оскільки

$$\begin{aligned} \left| \tilde{\theta}_{k,T} - \frac{\sigma^2}{1 - \lambda_k^2} \right|^2 &= \left| \hat{\theta}_{k,T} - \frac{\sigma^2}{1 - \lambda_k^2} \right|^2 \mathbb{1}(\hat{\theta}_{k,T} \geq \sigma^2) + \\ &+ \left| \sigma^2 - \frac{\sigma^2}{1 - \lambda_k^2} \right|^2 \mathbb{1}(\hat{\theta}_{k,T} < \sigma^2), \end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned} M \left| \tilde{\theta}_{k,T} - \frac{\sigma^2}{1 - \lambda_k^2} \right|^2 &= M \left| \hat{\theta}_{k,T} - \frac{\sigma^2}{1 - \lambda_k^2} \right|^2 + \\ &+ \sigma^4 \cdot \left(\frac{\lambda_k^2}{1 - \lambda_k^2} \right)^2 \cdot P(\hat{\theta}_{k,T} < \sigma^2). \end{aligned}$$

При доведенні теореми 1.4 було встановлено, що

$$M \left| \hat{\theta}_{k,T} - \frac{\sigma^2}{1 - \lambda_k^2} \right|^2 \leq \frac{3\sigma^4 + 1}{T} \cdot \left(\frac{1}{1 - \lambda_k^2} \right)^2.$$

З рівності

$$|\lambda_k| = \left| 1 - 4\alpha \sin^2 \frac{k\pi}{2(N+1)} \right|,$$

впливає, що

$$1 - \lambda_k^2 = 8\alpha \sin^2 \frac{k\pi}{2(N+1)} \cdot \left(1 - 2\alpha \sin^2 \frac{k\pi}{2(N+1)} \right),$$

і тоді при $\alpha \in \left[\alpha_0, \frac{1}{2} \right)$ отримаємо оцінку

$$1 - \lambda_k^2 \geq 2\alpha_0 \sin^2 \frac{k\pi}{(N+1)}. \quad (2.3)$$

Звідси

$$M \left| \hat{\theta}_{k,T} - \frac{\sigma^2}{1 - \lambda_k^2} \right|^2 \leq \frac{3\sigma^4 + 1}{4\alpha_0^2 \sin^4 \frac{\pi}{(N+1)} \cdot T}.$$

Оцінимо тепер ймовірність $P\left(\hat{\theta}_{k,T} < \sigma^2\right)$:

$$\begin{aligned} P\left(\hat{\theta}_{k,T} < \sigma^2\right) &= P\left(\hat{\theta}_{k,T} - \frac{\sigma^2}{1 - \lambda_k^2} < \sigma^2 - \frac{\sigma^2}{1 - \lambda_k^2}\right) \leq \\ &\leq P\left(\left|\hat{\theta}_{k,T} - \frac{\sigma^2}{1 - \lambda_k^2}\right| > \sigma^2 \frac{\lambda_k^2}{1 - \lambda_k^2}\right) \leq \frac{M\left|\hat{\theta}_{k,T} - \frac{\sigma^2}{1 - \lambda_k^2}\right|^2}{\left(\sigma^2 \frac{\lambda_k^2}{1 - \lambda_k^2}\right)^2}. \end{aligned}$$

Отже:

$$\begin{aligned} M\left|\tilde{\theta}_{k,T} - \frac{\sigma^2}{1 - \lambda_k^2}\right|^2 &\leq 2 \cdot M\left|\hat{\theta}_{k,T} - \frac{\sigma^2}{1 - \lambda_k^2}\right|^2 \leq \\ &\leq \frac{3\sigma^4 + 1}{2\alpha_0^2 \sin^4 \frac{\pi}{N+1}} \cdot T. \end{aligned}$$

Таким чином:

$$M\left[TV(N(0, \Sigma(t)), N(0, \tilde{\Sigma}_T(t)))\right]^2 \leq \frac{9}{4} \frac{3\sigma^4 + 1}{\left(2\alpha_0 \sin^2 \frac{\pi}{N+1}\right) \sigma^4} \cdot \frac{(t+1)^2}{T}.$$

□

Висновки до розділу 2

У другому розділі роботи було проведено дослідження відстані між істинним та оціненим розподілами системи зв'язаних осциляторів. Розглянуто різні метрики на просторі ймовірнісних мір, зокрема відстань Кульбака-Лейблера, відстань Васерштейна та відстань за варіацією.

Для оцінки якості запропонованих у першому розділі методів оцінювання було обрано відстань за варіацією. Використана оцінка

відстані за варіацією для порівняння нормальних розподілів з однаковими математичними сподіваннями та різними матрицями коваріації.

Для побудованої оцінки коваріаційної матриці отримано верхню межу математичного сподівання квадрата відстані за варіацією між істинним та оціненим розподілами.

ВИСНОВКИ

У ході виконання кваліфікаційної роботи було досліджено систему зв'язаних осциляторів. Було проведено огляд опублікованих джерел за тематикою дослідження, який показав, що системи зв'язаних осциляторів використовуються для моделювання широкого спектру явищ у молекулярній фізиці, біології та нейронауці.

Побудовано математичну модель системи зв'язаних осциляторів із невідомим коефіцієнтом жорсткості α . Отримано представлення руху системи у вигляді рівняння авторегресії в матричному вигляді та досліджено властивості матриці V . Доведено, що тридіагональна матриця V є додатно визначеною, що гарантує коректність подальшого аналізу. Встановлено умови існування стаціонарного розв'язку рівняння авторегресії, показано що при $\alpha \in (0, 1/2)$ система має стаціонарний розподіл. За допомогою діагональної декомпозиції матриці $A = I - \alpha V$ отримано представлення, де лише власні значення діагональної матриці залежать від невідомого параметра α , що дозволило суттєво спростити подальшу оцінку. Побудовано дві оцінки невідомого параметра α : за допомогою методу найменших квадратів та через вибіркового другий момент. Для оцінки методом найменших квадратів доведено асимптотичну нормальність, а для оцінки через вибіркові другі моменти доведено збіжність у середньому будь-якого порядку.

У другому розділі роботи було досліджено відстань між істинним та оціненим розподілами системи. Наведено різні відстані між розподілами: відстань Кульбака-Лейблера, відстань Васерштейна та відстань за варіацією, з яких обрано відстань за варіацією для істинного та оціненого розподілу.

Для побудованої оцінки розподілу отримано верхню межу математичного сподівання квадрата відстані за варіацією, яка зменшується пропорційно $\frac{1}{T}$ при зростанні об'єму вибірки T .

ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

- [1] Thomas M. Cover та Joy A. Thomas. *Elements of Information Theory*. АНГЛ. 2005, с. 774 с. ISBN: 9780471748823. DOI: 10.1002/047174882X. URL: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/book/10.1002/047174882X>.
- [2] Julie Delon та Agnes Desolneux. ?A Wasserstein-type distance in the space of Gaussian Mixture Models? B: (2020). DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.1907.05254>. URL: <https://arxiv.org/abs/1907.05254>.
- [3] Luc Devroye, Abbas Mehrabian та Tommy Reddad. ?The total variation distance between high-dimensional Gaussians with the same mean? B: (2023). arXiv: 1810 . 08693 [math.ST]. URL: <https://arxiv.org/abs/1810.08693>.
- [4] A.A. Dorogovtsev. *STOCHASTIC ANALYSIS AND RANDOM MAPS IN HILBERT SPACE*. АНГЛ. 1994, с. 109 с. ISBN: 90-6764-163-4. URL: <https://www.amazon.com/Stochastic-Analysis-Random-Hilbert-Space/dp/9067641634>.
- [5] Wayne A. Fuller. *Introduction to Statistical Time Series*. АНГЛ. 1995, с. 728 с. URL: https://books.google.com.ua/books/about/Introduction_to_Statistical_Time_Series.html?id=wyRhjmAPQIYC&redir_esc=y.
- [6] Jesús Gutiérrez-Gutiérrez. ?Positive integer powers of certain tridiagonal matrices? B: *Applied Mathematics and Computation* 202.1 (2008), с. 133—140. ISSN: 0096-3003. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.amc.2008.01.022>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0096300308000660>.
- [7] Martin Hairer. *An Introduction to Stochastic PDEs*. АНГЛ. 2023, с. 114. DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.0907.4178>. URL: <https://www.hairer.org/SPDEs.pdf>.

- [8] Helmut Lutkepohl. *New Introduction to Multiple Time Series Analysis*.
Англ. 2005, с. 764 с. URL:
<https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-540-27752-1>.
- [9] Albert Shiryaev. *ВЕРОЯТНОСТЬ*. Роч. 1980, с. 552 с. URL: <http://www.booksshare.net/books/physics/shiryaev-an/1957/files/veroyatnost1957.pdf>.