

Міністерство освіти і науки  
Національний технічний університет України  
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

**В. В. Ванін, Г. А. Вірченко, П. М. Яблонський**

**ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ СТРУКТУРНО-  
ПАРАМЕТРИЧНОГО ГЕОМЕТРИЧНОГО  
МОДЕЛЮВАННЯ ВИРОБІВ  
МАШИНОБУДУВАННЯ**

Монографія

*Рекомендовано Вченою радою КПІ ім. Ігоря Сікорського*

Київ  
КПІ ім. Ігоря Сікорського  
2022

*Рекомендовано Вченою КПП ім. Ігоря Сікорського  
(Протокол № 4 від 27.06.2022 р.)*

**Рецензенти:** *В. О. Плоский*, д-р техн. наук, професор,  
Київський національний університет  
будівництва і архітектури  
*А. Й. Незенко*, канд. техн. наук,  
Державне підприємство «Антонов»

**Відповідальний редактор** *О. Г. Гетьман*, канд. тех. наук, доцент,  
Національний технічний університет України  
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

Електронне мережне наукове видання

*Ванін Володимир Володимирович*, д-р техн. наук, професор  
*Вірченко Геннадій Анатолійович*, д-р техн. наук, професор  
*Яблонський Петро Миколайович*, канд. техн. наук, доцент

## **ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ СТРУКТУРНО-ПАРАМЕТРИЧНОГО ГЕОМЕТРИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ВИРОБІВ МАШИНОБУДУВАННЯ**

Теоретичні основи структурно-параметричного геометричного моделювання виробів машинобудування [Електронний ресурс]: монографія / В. В. Ванін, Г. А. Вірченко, П. М. Яблонський; КПП ім. Ігоря Сікорського. – Електронні текстові дані (1 файл: 9,07 Мб; 18,6 авт. арк.). – Київ: КПП ім. Ігоря Сікорського, 2022. – 223 с.

Подано теоретичні основи структурно-параметричного геометричного моделювання як сучасної прогресивної методології автоматизованого проектування виробів машинобудування та процесів їх виготовлення й експлуатації. Викладено загальні положення, базові принципи, методи, прийоми, алгоритми та моделі зазначеного підходу. Проаналізовано практичні приклади їх використання. Розглянуто перспективи подальшого розвитку даного напрямку досліджень.

Для інженерів, аспірантів і науковців, що займаються створенням нової техніки, її комп'ютерним моделюванням та оптимізацією.

*В авторській редакції*

© В. В. Ванін, Г. А. Вірченко, П. М. Яблонський, 2022

© КПП ім. Ігоря Сікорського (ФМФ), 2022

## ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

- ВГМ – варіаційна геометрична модель;
- КБВГМ – комбінаторно-варіаційна геометрична модель;
- КБГМ – комбінаторна геометрична модель;
- КГМ – комплексна геометрична модель;
- САПР – система автоматизованого проектування;
- СПГМ – структурно-параметрична геометрична модель;
- ТП – технологічний процес;
- ТПВ – технологічне підготовлення виробництва;
- CAD – автоматизоване конструювання (Computer-Aided Design);
- CAE – автоматизовані інженерні розрахунки (Computer-Aided Engineering);
- CAM – автоматизоване виробництво (Computer-Aided Manufacturing);
- CAD/CAM/CAE – інтегроване автоматизоване конструювання, виробництво та інженерні розрахунки;
- NURBS – неоднорідні раціональні B-сплайни (Non-Uniform Rational B-Splines);
- PDM – управління даними продукції (Product Data Management);
- PLM – управління життєвим циклом продукції (Product Life-cycle Management).

## ВСТУП

Сучасний розвиток суспільства характеризується широким застосуванням комп'ютерних технологій у багатьох галузях життєдіяльності людей. Нині математичне моделювання постає важливим засобом проектування високоякісної промислової продукції. Однією з фундаментальних основ інформатизації в машинобудуванні є геометричні моделі, які створюються за допомогою різноманітних автоматизованих систем.

Необхідність комплексної оптимізації складних технічних виробів обумовлює потребу здійснення ґрунтовних досліджень у сфері прикладної геометрії та інженерної графіки з метою створення нових, більш досконалих, підходів, методів та алгоритмів для математичного опису зазначених об'єктів і процесів. Доволі перспективний у даному плані напрацьований у КПІ ім. Ігоря Сікорського науковий напрямок комп'ютерного структурно-параметричного геометричного моделювання, що забезпечує ефективне проектування продукції машинобудування, процесів її виготовлення та експлуатації.

Розроблення конструкторсько-технологічних моделей і належної документації у випадку складних промислових об'єктів становить доволі трудомістку задачу. Сучасні автоматизовані системи базуються на структурно-параметричних засадах формування технічної продукції, засобах геометричного моделювання та комп'ютерної графіки, які реалізують скоординовану взаємодію багатьох фахівців при опрацюванні даних об'єктів.

Таким чином, сутність досліджуваної наукової проблеми полягає в необхідності:

- узагальнення теоретичних основ структурно-параметричного геометричного моделювання;

- удосконалення методології комп'ютерного формоутворення технічної продукції;

- розроблення нових методів, способів, прийомів, алгоритмів побудови й використання геометричних моделей для проектування, виготовлення та експлуатації об'єктів машинобудування.

Наявний стан описаної проблеми полягає в тому, що історично у прикладній геометрії існує значна кількість наукових напрямків, які

базуються на методах аналітичної, багатовимірної, диференціальної, комбінаторної, нарисної, обчислювальної, проєктивної геометрії і т. д. Нинішньою технічною їх реалізацією є різноманітні комп'ютерні програмні пакети. Необхідність у нових підходах обумовлена потребою вирішення більш складних теоретичних і практичних питань відображення форми, розмірів, положення та інших параметрів і характеристик досліджуваних об'єктів та процесів у просторі й часі.

Ефективними засобами покращення якості технічних виробів, зменшення термінів та витрат на їх створення є системи автоматизованого проєктування (САПР), що в машинобудівні прийнято позначати як CAD/CAM/CAE (Computer-Aided Design/ Computer-Aided Manufacturing/ Computer-Aided Engineering). Найбільш відомі з них це AutoCAD, SolidWorks, Pro/Engineer, CATIA та ін.

Одна з головних прогресивних тенденцій у зазначених САПР полягає в широкому використанні параметричного моделювання, подальшим розвитком якого є структурно-параметрична методологія, що реалізує більш гнучке і продуктивне варіантне формоутворення технічних об'єктів.

Актуальність обраної теми наукових досліджень обумовлена потребами практики в подальшому вдосконаленні комп'ютерного опрацювання складної промислової продукції. Об'єктивною основою для виконаних розвідок постає те, що в математичних описах виробів машинобудування ключова інтегруюча роль належить їх геометричним параметрам і характеристикам, що спільно застосовуються багатьма фахівцями різноманітної спеціалізації. Успішне розв'язання викладеної проблеми сприяє створенню вискоелективних САПР.

Отже, мета даних досліджень полягає в узагальненні та подальшому розвитку теоретичних основ структурно-параметричного підходу до комп'ютерного геометричного моделювання, підвищенні на його засадах якості автоматизованого проєктування виробів машинобудування.

Для досягнення наведеної мети сформульовано наступні завдання:

1. Проаналізувати роль сучасних графічних засобів САПР в опрацюванні промислової продукції в умовах широкого використання комп'ютерних інформаційних технологій.

2. Визначити напрямки проведення наукових досліджень стосовно вдосконалення теорії структурно-параметричного геометричного моделювання технічних об'єктів.

3. Розробити засади інтеграції комп'ютерними графічними засобами стадій проектування, виготовлення та експлуатації складних виробів машинобудування.

4. Окреслити типові задачі структурно-параметричного геометричного моделювання, створити для їх розв'язування належні методи.

5. Напрацювати нові способи, прийоми, алгоритми та моделі варіантного формоутворення технічних об'єктів.

6. Розробити продуктивні методики структурно-параметричного комп'ютерного моделювання деталей і складаних одиниць та процесів їх виготовлення.

7. Визначити перспективи подальшого розвитку даного наукового напрямку.

Прикладну значущість виконаних досліджень підтверджено здійсненими впровадженнями:

– на Авіаційному науково-технічному комплексі ім. О.К. Антонова для удосконалення програмного забезпечення системи CADDS5/OPTEGRA, що використовується для автоматизованого проектування літаків;

– на Державному підприємстві «Київський авіаційний завод «Авіант» для здійснення конструкторсько-технологічного підготовки серійного виробництва літаків і тролейбусів;

– на Харківському державному авіаційному виробничому підприємстві під час виконання розрахунково-конструкторських робіт для виготовлення технологічного оснащення;

– у Науково-дослідному інституті автоматизованих систем та інформатики в суднобудуванні НДІ «Центр» (м. Миколаїв) при створенні системи формування тривимірних моделей корпусів суден;

– у Проектно-конструкторському технологічному бюро «Марінекс» (м. Київ) для конструювання та виготовлення навігаційних приладів;

– у Національному технічному університеті України «Київський політехнічний інститут» при викладанні дисциплін «Проектування та конструювання літаків і вертольотів», «Новітні технології виробництва літальних апаратів», виконанні курсових та дипломних проектів на факультеті авіаційних і космічних систем, проведенні лекцій та практичних занять з інженерної графіки, комп'ютерного геометричного моделювання для студентів машинобудівних спеціальностей.

Монографія складається зі вступу, шести розділів, загальних висновків, списку використаних джерел та додатків.

Перший розділ присвячено аналізу існуючих методів геометричного моделювання та наявним інформаційним технологіям їх комп'ютерної реалізації. Це стосується, зокрема: виконаного огляду літератури з прикладної геометрії, машинобудування та суміжних дисциплін; аналізу місця й ролі графічних засобів САПР під час розроблення продукції машинобудування; обґрунтування інтегруючого характеру структурно-параметричної методології при опрацюванні технічних об'єктів; визначення задач даного дослідження.

У другому розділі розглянуто структурно-параметричний підхід як основу для автоматизованого розроблення продукції машинобудування. При цьому подано питання інтеграції стадій проектування, виготовлення та експлуатації даних об'єктів, наведено їх загальну характеристику. Визначено відповідні типові задачі формоутворення.

Третій розділ подає базові засади методології структурно-параметричного геометричного моделювання, що включають належні принципи, математичні описи таких фігур як точки, лінії, поверхні, етапи розроблення та використання структурно-параметричних геометричних моделей (СПГМ), реалізації варіантного формоутворення із застосуванням теорії множин і графів.

Четвертий розділ монографії присвячено запропонованим структурно-параметричним методам та алгоритмам комп'ютерного моделювання, які включають розв'язання різноманітних позиційних та метричних задач, зокрема, перетину довільних параметричних кривих, поверхонь і тіл. Акцентовано увагу на засобах удосконалення існуючих алгоритмів. Проаналізовано питання синтезу складних фігур, здійснення оптимізації технічних об'єктів і процесів геометричними засобами.

У п'ятому розділі викладено застосування структурно-параметричного моделювання для опрацювання виробів машинобудування. Наведено приклади автоматизованого конструювання деталей і складаних одиниць літака, як одного з типових представників складних технічних об'єктів, розглянуто проектування заготівельних, оброблювальних і складально-монтажних процесів.

Завершальний шостий розділ монографії висвітлює перспективи впровадження методології структурно-параметричного геометричного

моделювання в інші, ніж машинобудування сфери життєдіяльності людини. Це стосується суміжних із прикладною геометрією математичних дисциплін, інших галузей промисловості, економіки, освіти тощо.

У загальних висновках зазначається, що виконаними дослідженнями досягнуто поставлену мету, яка полягає в узагальненні та систематизації теоретичних основ структурно-параметричного підходу до геометричного моделювання, вдосконаленню на базі цього комп'ютерного формоутворення складних виробів машинобудування.

Додатки містять приклади комп'ютерного структурно-параметричного геометричного моделювання на основі розроблених способів, прийомів, алгоритмів і методик формоутворення.

# **1. АНАЛІЗ СУЧАСНИХ МЕТОДІВ ГЕОМЕТРИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ТА ЇХ КОМП'ЮТЕРНОЇ РЕАЛІЗАЦІЇ**

Метою даного розділу є аналіз наявних літературних джерел із прикладної геометрії, інженерної графіки, машинобудування та суміжних дисциплін для визначення:

- перспективних напрямків розвитку геометричного моделювання в галузі машинобудування;
- існуючих на поточний час нерозв'язаних питань теоретичного і практичного плану;
- наукової проблеми, що становить об'єкт і предмет досліджень, обґрунтування її актуальності.

## **1.1. Огляд літератури з прикладної геометрії, інженерної графіки, машинобудування та суміжних дисциплін**

В умовах широкої інформатизації суспільства наукові досягнення прикладної геометрії знаходять своє практичне впровадження в багатьох сферах життєдіяльності людини, зокрема в галузі машинобудування. В останньому випадку це перш за все стосується розроблення та використання САПР. Сучасні комп'ютерні інформаційні технології забезпечують достатньо ефективно поєднання багатьох способів, прийомів й алгоритмів геометричного моделювання, що базуються на методах аналітичної, багатовимірної, диференціальної, комбінаторної, нарисної, обчислювальної, проєктивної геометрії.

У літературі з прикладної геометрії та інженерної графіки докладно і всебічно подаються теоретичні питання формоутворення технічних об'єктів із застосуванням різноманітних кривих і поверхонь, упровадження отриманих наукових результатів у практику, розроблення продуктивних математичних методів комп'ютерної візуалізації, розв'язування задач оптимізації геометричними засобами тощо.

Так працями [1, 98] досліджуються питання побудови зображень об'єктів багатовимірного простору; [7] – застосування полікоординатного методу; [13] – опрацювання геометрії поверхонь одягу; [14, 21] – моделювання графами деталей машинобудування і приладобудування; [17, 18, 143, 144] – профілювання лопаток осьових турбін та геометричного моделювання

компонентів енергетичного обладнання; [23] – евольвентно-еволютних побудов; [24–26, 48] – структурно-параметричного геометричного моделювання літака; [51, 108, 111, 126] – дискретно-параметричного методу відтворення кривих ліній і поверхонь; [88] – комп’ютерної графіки та автоматизації конструювання; [89, 104] – геометричних моделей фотограмметричних зображень; [91] – застосування засобів багатовимірної геометрії для розв’язування задач оптимізації та візуалізації; [94] – комп’ютерних методів деформативного конструювання; [102] – геометричного розміщення та розбиття; [107, 110, 162] – теорії дискретного геометричного моделювання; [112] – комп’ютерної синтетичної геометрії; [113, 160] – розроблення обчислювальних алгоритмів; [119–122, 142] – структурних особливостей методів геометричного моделювання, їх загальносистемних властивостей; [123, 146, 157–159] – комп’ютерної інженерної графіки та геометричного моделювання в середовищі САПР; [127] – дискретного визначення об’єктів числовими послідовностями; [129] – математичних основ машинної графіки; [133] – прикладного формоутворення на основі глобальної параметризації; [139, 140] – структурного геометричного моделювання; [105, 147] – комп’ютерного опрацювання динаміки процесів змінювання об’єктів під впливом заданих чинників; [132, 148] – застосування геометричних моделей у дослідженнях фізичних і технологічних процесів; [149] – узагальнення синтезу конструкторсько-технологічних обводів; [152, 153] – використання геометричного моделювання при конструюванні робочих органів коренезбиральних машин і поверхонь ґрунтообробних знарядь.

У наведених вище працях зазначається, що нині досить ефективним є параметричне формоутворення. У даній роботі область цієї теорії поширюється, порівняно з окремими кривими та поверхнями, й на більш загальні фігури, наприклад, різноманітні деталі та складанні одиниці машинобудування, технологічні процеси їх виготовлення, багатовимірні об’єкти. При цьому кожна геометрична фігура подається як упорядкована сукупність компонентів, що, у свою чергу, можуть включати й інші елементи, найдрібнішими з яких є точки. Опрацьований об’єкт обов’язково розглядається як потенційна складова системи більш високого ієрархічного рівня. Такий підхід відповідає реалізації прикладною геометрією та інженерною графікою фундаментальних наукових принципів аналізу й синтезу, їх гармонічному поєднанню.

Досліджено джерела з геометрії та топології [11, 97, 114, 115, 118, 124, 130, 137, 151]; теорії множин, графів й алгоритмів [3, 4, 15, 95, 99, 131]; оптимізації [8, 96, 103, 136, 156]; обчислювальних методів [6, 145]; системного аналізу [101, 134]; інформатики та програмування [16, 106].

Для математичних джерел характерним є ґрунтовне викладення питань континуальної, варіаційної та комбінаторної геометрії, задач теорії множин, графів, алгоритмів, оптимізації. Зазначені роботи слугують теоретичною основою для практичного застосування, зокрема, під час проектування технічної продукції. Інтегроване поєднання здобутків фундаментальної математики з досягненнями прикладної геометрії та інженерної графіки на базі використання надбань системного аналізу, обчислювальних методів, інформатики і програмування сприяє розвитку теорії та практики сучасного геометричного моделювання.

Проаналізовано літературу з машинобудування [5, 9, 10, 12, 14, 17–20, 22, 24, 26, 28, 29, 92, 100, 109, 116, 117, 128, 135]. Це стосується, зокрема, автоматизованого проектування та конструювання відповідних об'єктів, розроблення процесів їх виготовлення, застосування інтелектуальних інформаційних технологій, проведення комплексної оптимізації протягом усього життєвого циклу тощо. Огляд наведених джерел засвідчив, що опрацьовувані різноманітні питання доволі часто пов'язані із задачами формоутворення технічних об'єктів. У першу чергу це стосується стадій конструювання та виготовлення продукції. Так геометричні дані потрібні для визначення конструкції, розрахунків її на міцність, наприклад, методом скінчених елементів, виготовлення на верстатах із числовим програмним керуванням, розроблення креслеників і т. д. Процеси проектування в зазначеній галузі нині важко уявити без використання комп'ютерних засобів.

Стосовно організаційних засад найбільш прогресивними є *типові* та *групові* технології [9]. Їх становлення можна охарактеризувати тим, що з початку розвитку машинобудування застосовувались *одиночні* технології, які потребують багато часу на своє розроблення. Далі для поширення передових методів були запропоновані *типові* технології, а потім, із метою підвищення ефективності виготовлення виробів широкої номенклатури, *групові*. Акцентуємо увагу, що одне з важливих досягнень сучасного машинобудування полягає у створенні й використанні гнучких технологічних систем, які є перспективним напрямом подальшої автоматизації індустріального виробництва.

У джерелах із машинобудування для визначення внутрішньої будови технічних об'єктів, зазвичай використовується термін «структура», а для опису властивостей її елементів – «параметр». Також зазначається, що одним із найважливіших завдань є структурно-параметрична оптимізація створюваної продукції.

Комп'ютерна графіка нині являє собою технічну основу для практичної реалізації ефективних методів геометричного моделювання різноманітних об'єктів. Графічні середовища, що становлять одну з головних складових машинобудівних САПР, комп'ютерних математичних та інших пакетів, роблять більш наочними для користувачів опрацьовувані ними предмети, процеси тощо.

Дані програмні продукти реалізують:

- тривимірне геометричне моделювання (каркасне, поверхнєве, твердотільне);
- параметричну методологію формоутворення деталей та складаних одиниць;
- високий рівень автоматизації креслярських робіт;
- зручну побудову графіків, діаграм і т. п.

Базові підходи, методи та прийоми сучасного комп'ютерного геометричного моделювання полягають у широкому використанні таких фігур як точки, криві, поверхні, тіла та їх комбінації; застосуванні для формоутворення аналітичних виразів, алгоритмів інтерполяції, апроксимації, екстраполяції; кінематичних побудов; операцій теорії множин тощо. Теперішній етап розвитку характеризується становленням анімаційного об'ємного формоутворення, який спирається на засади параметричного підходу, узагальненням якого є структурно-параметрична методологія.

Стосовно поточного стану засобів машинної графіки доцільно підкреслити, що для відображення технічних об'єктів і процесів нині найефективнішими є комп'ютерні геометричні моделі твердих тіл. Ці моделі прийнято називати «твердотільними». Для їх побудови застосовуються методи: *конструктивної геометрії* (Constructive Solid Geometry – CSG, Constructive representation – C-rep); *граничного подання* (Bounded representation – B-rep); *ієрархічних деревоподібних структур розподілу простору* (Octant trees representation – O-rep).

Для програмних пакетів математичного моделювання [106 та ін.], що використовуються як додаткові підсистеми оптимального проектування

технічної продукції, актуальні задачі продуктивного пошуку глобальних екстремумів цільових функцій із великим числом змінних та складними обмеженнями. У четвертому розділі монографії показано, що один із шляхів розв'язання зазначеної проблеми полягає у візуалізації багатовимірних об'єктів.

Зроблений огляд літератури з прикладної геометрії, комп'ютерної інженерної графіки та машинобудування показав, що в цих галузях структурний і параметричний підходи займають провідне місце. Виявлено, що у зв'язку з постійно зростаючою складністю техніки, підвищенням вимог до її якості, потребами зменшення вартості розроблення та експлуатації машинобудівної продукції тощо, досить проблемними залишаються питання удосконалення конструкторсько-технологічних моделей, які спираються на засоби комп'ютерної графіки та геометричного моделювання.

Показано, що перспективним напрямком у цьому плані є структурно-параметричний підхід до варіантного оптимального формоутворення технічних об'єктів. Для його практичної реалізації потрібно розв'язати низку задач, що полягають у необхідності узагальнення деяких теоретичних положень геометричного моделювання, розроблення нових та удосконалення існуючих методів й алгоритмів формоутворення, створення відповідних методик моделювання, програмної їх реалізації і т. д. Успішне опрацювання наведених питань дозволяє підвищувати рівень комп'ютерного геометричного моделювання складної технічної продукції.

## **1.2. Місце та роль графічних засобів САПР під час розроблення продукції машинобудування**

Комп'ютерна інженерна графіка та засоби геометричного моделювання є базовими складовими машинобудівних САПР, які у світовій практиці називають CAD/CAM/CAE програмними пакетами. Наведена аббревіатура підкреслює інтегрований характер конструкторських (CAD), виробничих (CAM) та розрахункових (CAE) задач у процесі створення продукції машинобудування. У багатьох випадках основою цього виступають спільні для зазначених стадій життєвого циклу геометричні параметри опрацьовуваних об'єктів, а для наведених програмних пакетів – графічні модулі, що виконують безпосереднє формування даних об'єктів, їх візуалізацію та здійснення необхідних модифікацій.

Сьогоднішні САПР, як правило, реалізують тривимірну побудову ліній, поверхонь та тіл, із яких формуються потрібні деталі і складанні одиниці. CAD підсистема забезпечує розроблення геометричних моделей, що використовуються CAE компонентами для аналізу на міцність, проведення досліджень теплофізичних явищ, динаміки рідин та газів, електромагнетизму і т. д., а CAM модулями – для визначення процесів виготовлення продукції, в тому числі застосування верстатів із числовим програмним керуванням, опрацювання технологічного оснащення тощо. Основним завданням CAD/CAM/CAE продуктів у машинобудуванні є автоматизація різноманітних проектних процедур на відповідних стадіях і етапах життєвого циклу продукції. З метою досягнення найкращих розв'язків дану задачу потрібно завжди розглядати як оптимізаційну.

Із загальної теорії систем відомо, що складний об'єкт або процес, утворений об'єднанням оптимальних компонентів сам не обов'язково є таким же. Тому подальший розвиток CAD/CAM/CAE засобів щільно пов'язаний з PDM (Product Data Management) та PLM (Product Life-cycle Management) комп'ютерними інформаційними технологіями, які реалізують оптимальне автоматизоване управління всім життєвим циклом технічної продукції, тобто стадіями *проекткування* (науково-дослідні та проектно-конструкторські роботи), *виробництва* (технологічне підготовлення й виготовлення) та *експлуатації* (функціонування й утилізація).

Нині, крім проаналізованої вище інтеграції, однією з головних рис машинобудівних САПР є широке застосування не тільки кривих і поверхонь у параметричній формі, а й раціональне визначення, за допомогою змінних розмірів, твердотільних деталей і складаних одиниць. У випадку використання кривих і поверхонь у параметричній формі головними перевагами є однотипність представлення фігур у дво- і тривимірному просторі, зручність генерування зображень графічними пристроями, виконання необхідних модифікацій форми, розмірів, положення тощо.

Використання змінних розмірів деталей і складаних одиниць забезпечує для базової моделі деякого об'єкта або процесу можливість автоматизованого відтворення цілого ряду досліджуваних їх варіантів, які відрізняються своїми геометричними й іншими характеристиками, з метою ефективного проведення оптимізації. Для опрацювання кінематики та динаміки різноманітних механізмів сучасні машинобудівні САПР досить часто мають модулі, що, завдяки параметрам форми, розмірів, положення й

іншим відношенням у комп'ютерних складаних одиницях, дозволяють зручно моделювати рух об'ємних елементів, здійснювати при цьому аналіз навантажень і деформацій, виявляти наявні зазори та взаємні проникнення деталей, створювати якісні анімації і т. д.

Асоціативний зв'язок між тривимірними об'єктами та креслениками дає можливість розробляти значну частину конструкторсько-технологічної документації в автоматичному режимі й підтримувати узгодженість такої комплексної геометричної моделі (КГМ) як під час варіювання параметрів перших, так і зміни розмірів на других.

Характерною особливістю нинішніх САПР є їх дружній графічний інтерфейс, якісна довідкова документація та відкритість, тобто забезпечення користувачів засобами для застосування своїх власних алгоритмів опрацювання геометричних й інших даних.

Значні досягнення в галузі обчислювальної техніки дозволили зробити більш доступними автоматизовані системи для широкого кола проєктувальників. Це стосується таких популярних пакетів середнього класу як SolidWorks [125, 138] та ін., що мають порівняно невелику ціну й з успіхом функціонують на персональних комп'ютерах, а за своїми характеристиками наближаються до програмних продуктів вищого рівня.

Таким чином, у машинобудівних САПР геометричні моделі займають особливе провідне інтегруюче місце, що обумовлено їх використанням як основи для розв'язування багатьох задач під час розроблення, виготовлення та експлуатації різноманітної продукції.

### **1.3. Інтегруючий характер структурно-параметричного підходу при опрацюванні технічних об'єктів**

На підставі виконаного огляду літератури та визначеного важливого місця геометричного моделювання у створенні продукції машинобудування сучасними автоматизованими засобами (CAD/CAM/CAE/PDM/PLM системами) в цьому підрозділі обґрунтовується інтегруючий характер структурно-параметричного підходу в розглянутих вище процесах.

Спираючись на параметричне подання кривих і поверхонь для їх комп'ютерного формоутворення [129 та ін.] в нинішніх машинобудівних САПР реалізовано побудову твердотільних моделей деталей і складаних одиниць на базі варіаційних параметричних зв'язків між їх елементами.

Надалі під параметрами розумітимемо не тільки числові змінні, що визначають положення точок деяких ліній, поверхонь, тіл або багатовимірних фігур, а й величини, які дозволяють вирізняти конкретні екземпляри з певної групи об'єктів та керувати формоутворенням останніх.

У загальному випадку відображення просторових властивостей під час проектування та виробництва потребує використання складніших, ніж окремі точки, лінії, поверхні й тіла, геометричних фігур. Тому раціональне подання форми багатьох технічних об'єктів, досить часто, здійснюється завдяки застосуванню кількох більш простих примітивів, поєднаних поміж собою належним чином.

Отже, певним універсальним прийомом є побудова складених фігур на базі вже відомих компонентів і додаткових зв'язків між ними, що дозволяє отримати цілісну, прогнозовану та зручну для гнучкого керування комп'ютерними засобами геометричну систему. Параметрами останньої можна також вважати елементи її структури, які забезпечують варіювання формою, розмірами, положенням й іншими характеристиками опрацьованого об'єкта.

Визначення проектувальником вищенаведених властивостей створюваних предметів за допомогою змінних числових величин й обмежень на них дозволяє йому надалі автоматизованим способом отримувати потрібні різноманітні досліджувані варіанти з метою їх оптимізації.

Описаний підхід називають *параметричним геометричним моделюванням*. Якщо порівняти зазначену концепцію комп'ютерного формоутворення з поданим у підрозділі 1.1 машинобудівним виробництвом, то можна переконатись, що маємо методологію, яка відповідає типовій організації технологічних процесів, що значно продуктивніша за одиничну.

В умовах широкої номенклатури ефективним вважається груповий підхід, коли доволі різноманітні за своєю конструкцією вироби об'єднуються в партії для спільного виготовлення. З геометричної точки зору останній, найбільш загальній методології формоутворення, відповідає структурно-параметричне геометричне моделювання, для якого характерна наявність у даній моделі як дискретних, тобто структурних, елементів із певними стійкими властивостями, так і параметричних компонентів, що забезпечують можливість плавного переходу відтворюваних об'єктів з одного стану в інший.

Таким чином, структурно-параметричний підхід, який спирається на спільне застосування багатьма суміжними спеціальними дисциплінами геометричних параметрів і характеристик опрацьовуваних об'єктів машинобудування, може бути інтегруючою основою для їх автоматизованого проектування.

#### **1.4. Постановка задач дослідження**

Порівняно з досягненнями попередників на даний момент належить поширити об'єкт структурно-параметричних досліджень із тільки кривих і поверхонь [48, 53, 141] на етапі ескізного проектування літака, методик побудови окремих деталей і складаних одиниць [47] на розроблення комп'ютерних твердотільних геометричних моделей продукції машинобудування для всіх стадій її життєвого циклу. Таким чином, дані дослідження спрямовані на доповнення й узагальнення існуючих доробок наукової школи Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського» стосовно структурно-параметричного формоутворення технічних об'єктів.

Проведений аналіз сучасних методів геометричного моделювання, комп'ютерних технологій їх реалізації, тенденцій розвитку машинобудування виявив наявність суттєвих взаємозв'язків опрацьовуваних питань прикладної геометрії та інженерної графіки із задачами суміжних галузей знань, зокрема, багатьох напрямків *фундаментальної математики* (теорії множин, графів, оптимізації, комбінаторики, топології та ін.), *машинобудування* (проектування, конструювання, технології виробництва, експлуатації тощо) й *комп'ютерної інформатики* (теорії алгоритмів, програмування, обчислювальних методів і т. д.).

Для досягнення поставленої мети, яка полягає в узагальненні й подальшому розвитку теорії структурно-параметричного підходу до комп'ютерного геометричного моделювання та підвищенні на його засадах ефективності автоматизованого опрацювання продукції машинобудування, потрібно виконати ряд завдань. Останні зводяться до формулювання засад інтеграції комп'ютерними геометричними засобами стадій проектування, виробництва й експлуатації продукції машинобудування, визначення типових задач структурно-параметричного варіантного формоутворення та розроблення відповідних нових методів й алгоритмів моделювання.

## 1.5. Висновки до розділу 1

Виконаний у даній частині монографії огляд літератури з прикладної геометрії та інженерної графіки, проведений аналіз сучасних методів геометричного моделювання й комп'ютерних технологій їх реалізації в галузі машинобудування показав:

1. Актуальність проблеми створення високопродуктивної, економічної, надійної, ергономічної, екологічно безпечної техніки.

2. Потребу формування концептуальних засад методології структурно-параметричного геометричного моделювання.

3. Доцільність побудови геометричних моделей, які забезпечують не тільки конкретні, а й узагальнені розв'язки, що більш пристосовані для продуктивної реалізації типових і групових технологій, зокрема в галузі машинобудування.

4. Потребу визначення й систематизації базових задач структурно-параметричного формоутворення об'єктів машинобудування та знаходження для них раціональних розв'язків.

5. Необхідність розроблення нових методів та алгоритмів побудови й використання структурно-параметричних геометричних моделей для забезпечення інтегрованої автоматизованої підтримки процесів проектування, виготовлення та експлуатації технічних об'єктів.

6. Можливість поширення напрацьованих прийомів комп'ютерного структурно-параметричного геометричного моделювання в інших, крім машинобудування, сферах життєдіяльності людини.

Таким чином, подані в першому розділі матеріали дозволили окреслити наукову проблему, що становить об'єкт і предмет досліджень, обґрунтувати її актуальність, визначити основні завдання даних розвідок.

## **2. СТРУКТУРНО-ПАРАМЕТРИЧНИЙ ПІДХІД ЯК ОСНОВА АВТОМАТИЗОВАНОГО ПРОЕКТУВАННЯ ВИРОБІВ МАШИНОБУДУВАННЯ**

Виконаний у першому розділі огляд літературних джерел засвідчив, що для складної технічної продукції машинобудування актуальними є питання комплексної оптимізації протягом всього її життєвого циклу та можливість використання для їх розв'язування, поряд із розрахунковими моделями інших спеціальних дисциплін, засобів комп'ютерної інженерної графіки.

Мета даної частини роботи полягає у здійсненні аналізу автоматизованого опрацювання об'єктів і процесів машинобудування в аспекті структурно-параметричного формоутворення та визначенні на основі цього загальної методики проведення даних наукових досліджень. Головним завданням другого розділу є дефініція засад інтеграції проектування, виробництва й експлуатації об'єктів машинобудування геометричними засобами та типових задач їх структурно-параметричного формоутворення.

### **2.1. Інтеграція процесів проектування, виготовлення та експлуатації промислової продукції**

Для більшості машин, незалежно від їх призначення, характерний життєвий цикл (рис. 2.1), що складається зі стадій *проектування, виробництва та експлуатації*.

Під *якістю об'єкта машинобудування* розуміють певну сукупність його властивостей, що обумовлюють здатність останнього виконувати потрібні функції у визначених умовах експлуатації. До найбільш важливих відносять *показники продуктивності, економічності, надійності, довговічності, ремонтпридатності, ергономічності, екологічності* і т. д.

Якість виробу, що виявляється під час експлуатації, формується на всіх етапах його життєвого циклу (рис. 2.1). На наведеному зображенні штриховими стрілками оберненого напрямку показано процес урахування наступними виробами виявлених особливостей їх попередників. Зазначений процес обумовлює циклічне покращення якості створюваної технічної продукції.

Стадію проектування можна умовно поділити на два етапи – *науково-дослідні та проектно-конструкторські роботи*.

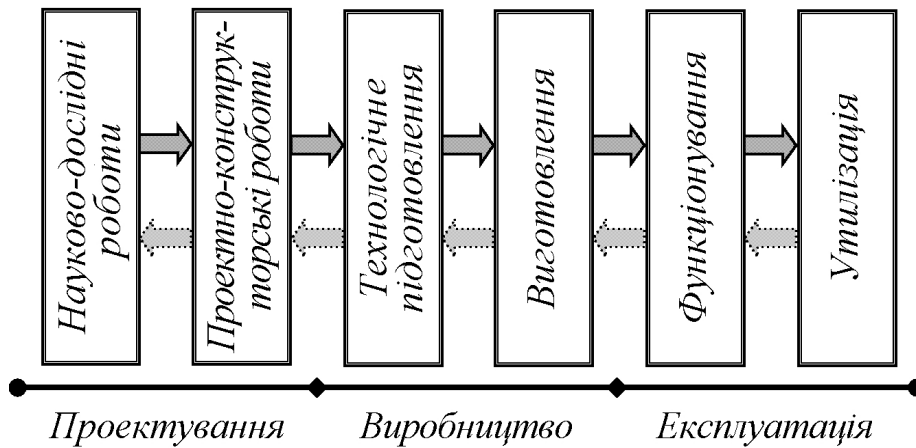


Рис. 2.1. Життєвий цикл продукції машинобудування

Для науково-дослідних робіт характерним є опрацювання способів та прийомів використання законів та явищ природи для отримання нових матеріалів із потрібними властивостями, сучасних технологій і т. д.

Під час проектно-конструкторських робіт, що спираються на розрахункові методи, прагнуть раціонально визначити: схему машини; застосовувані в конструкції матеріали; форму, розміри та положення деталей і складаних одиниць; процеси виготовлення; умови експлуатації; економічні, ергономічні, екологічні показники тощо. Даний етап завершується випуском конструкторської документації (креслеників деталей і складаних одиниць, виробу в цілому та технічних умов на виготовлення).

Для нинішнього розвитку машинобудування під час проектування притаманна розроблення не лише креслеників, тобто двовимірних (2D) геометричних моделей, а й більш потужних тривимірних (3D) комп'ютерних описів у вигляді твердотільних деталей і складаних одиниць.

Такий підхід дозволяє не тільки підвищити наочність, продуктивність та якість конструювання, а й відповідним чином поліпшити для створюваного об'єкта технологічне підготування виробництва (ТПВ), яке є першим етапом наступної стадії його життєвого циклу. ТПВ забезпечує прийняття рішень, що оформлюються технологічною документацією і слугують основою виконуваних практичних дій при виготовленні продукції.

Основні функції ТПВ:

- забезпечення технологічності конструкції;
- визначення раціональних заготованок;
- розроблення технологічних процесів (ТП);

- проектування засобів технологічного оснащення;
- участь у керуванні ТП.

Головне завдання *машинобудівного виробництва* полягає у виготовленні продукції заданої якості в потрібній кількості в належні терміни з найменшими витратами різноманітних ресурсів. Таким чином, якість об'єктів машинобудування формується у процесі проектування, реалізується виробництвом, перевіряється й підтримується під час експлуатації. З метою досягнення *комплексних оптимальних інтегральних результатів* усі стадії життєвого циклу складної технічної продукції розглядаються як багатоваріантні. Особливо це стосується проектно-конструкторських робіт і ТПВ.

У даному випадку важливо отримати *комплексні результати*, тобто раціонально збалансовані між суперечливими вимогами різних дисциплін, наприклад, міцності, технології та економіки, коли знаходиться компроміс між потрібним ресурсом експлуатації, технологічними можливостями оброблення й собівартістю технічних об'єктів тощо. Обов'язково потрібно прагнути досягти *оптимальних інтегральних результатів*, тобто таких, які охоплюють увесь життєвий цикл технічної продукції.

Останнє стосується того, що неприпустимим є одержання *локальних оптимальних результатів* на певній стадії життєвого циклу за рахунок погіршення загальних його характеристик. Наприклад, недоцільним треба вважати незначне скорочення термінів і вартості проектування, яке призводить до істотних збитків при виробництві та експлуатації.

Суттєво зменшити час створення продукції машинобудування, потребу в інших ресурсах (матеріальних, фінансових, трудових і т. д.) та покращити якість розроблюваних об'єктів дозволяють комп'ютерні інформаційні технології (CAD/CAM/CAE/PDM/PLM). Це досягається не тільки підвищенням продуктивності праці інженерів, збільшенням кількості проаналізованих ними проектних варіантів, що значно посилює впевненість у знаходженні раціональних розв'язків, а й частковою або повною заміною дорогих натурних експериментів комп'ютерним моделюванням, безпосередньою автоматизацією ТП, тобто застосуванням верстатів із числовим програмним керуванням, промислових роботів і т. д.

У багатьох перерахованих вище випадках за окресленою технічною діяльністю стоїть широке використання геометричних параметрів та характеристик створюваної продукції. Отже, геометрія продукції

машинобудування присутня на всіх стадіях її життєвого циклу, тісно пов'язана з процесами проектування, виробництва, експлуатації й завдяки цьому може бути інтегруючим підґрунтям для інших технічних дисциплін під час автоматизованого опрацювання зазначених питань. На етапі функціонування геометричні параметри досить часто виступають як контрольні характеристики експлуатаційного деформування конструкцій, їх зношування тощо.

На завершення цього підрозділу акцентуємо увагу на структурно-параметричному характері життєвого циклу технічних об'єктів. Як видно з рис. 2.1, йому притаманна певна структура, тобто внутрішня організація, що складається з упорядкованої множини елементів (стадій та етапів) і відношень між ними, яка реалізує своє призначення шляхом забезпечення потрібного цілеспрямованого функціонування. Дана система описується параметрами та характеристиками, що формуються на базі властивостей складових її елементів, тобто процесів проектування, виробництва й експлуатації.

У наступному підрозділі перейдемо до більш докладного їх розгляду, зазначивши, що основні варіантні дослідження в машинобудуванні стосуються саме процесів проектування та виробництва, а різновиди експлуатації при цьому, як правило, подаються певними сукупностями відповідних умов.

## **2.2. Загальна характеристика виробів і процесів машинобудування**

### **2.2.1. Конструювання деталей та складаних одиниць**

*Виробом* у машинобудуванні називають довільний предмет, що виготовляється на підприємстві. Це може бути ціла машина (наприклад, тролейбус), деяка складанна одиниця (зокрема, електричний двигун) і, навіть, окрема деталь (ротор електричного двигуна для наведеного випадку). Умовно найпростіший виріб – це *деталь*, яка виготовляється з матеріалу однієї марки без виконання складальних операцій. Елементами деталі є її частини, що мають певне призначення. Такими можна вважати отвори, пази, фаски, галтелі, нарізи тощо. Зовні деталь являє собою комплекс взаємопов'язаних поверхонь, які виконують належні їм функції при експлуатації машини. Функціонування деталі обумовлює її форму, розміри,

застосований матеріал і т. д. Незалежно від різного призначення деталі можуть мати схожий характер свого виробництва.

*Заготованкою* в машинобудуванні називають предмет праці, з якого, змінюючи форму, розміри, властивості поверхні чи матеріалу, виготовляють деталь. *Складанна одиниця* – це виріб, частини якого підлягають з’єднанню. У якості останніх можуть бути не тільки деталі, а й інші складанні одиниці (рис. 2.2).

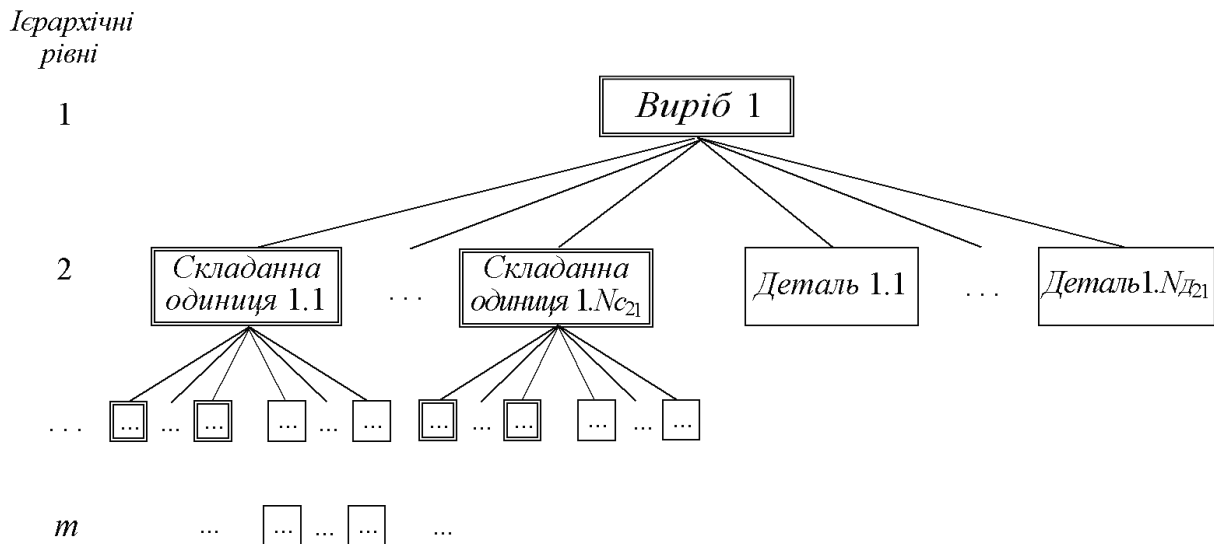


Рис. 2.2. Структура об’єктів машинобудування

Число складових  $N_B$  наведеного на рис. 2.2 виробу визначається за допомогою формули

$$N_B = \sum_{i=2}^m N_i,$$

де  $m \in N$  – кількість його ієрархічних рівнів;

$N_i$  – число елементів на поточному рівні.

Стосовно параметрів форми й розмірів деталей та їх положення під час створення складаних одиниць зазначимо, що ці питання істотним чином залежать від геометрії поверхонь, які обмежують деталі. Деякі аспекти класифікації найбільш поширених у машинобудуванні поверхонь та способів їх формоутворення на засадах структурно-параметричного підходу наведено у третьому розділі. Підкреслимо, що нинішньою прогресивною тенденцією розвитку технологій виробництва є модульний підхід [9] до інтегрованого конструювання та виготовлення деталей і складаних одиниць. Основні його особливості подаються наприкінці наступного пункту монографії.

### 2.2.2. Проектування технологічних процесів

Під час виготовлення продукції машинобудування застосовують різноманітні технологічні методи, під якими розуміють певні сукупності прийомів оброблення деталей та виконання складальних операцій. Відповідно до цього вирізняють (рис. 2.3) окремі види виробництва: *ливарне, оброблення тиском і різанням, зварювальне, складальне* тощо.

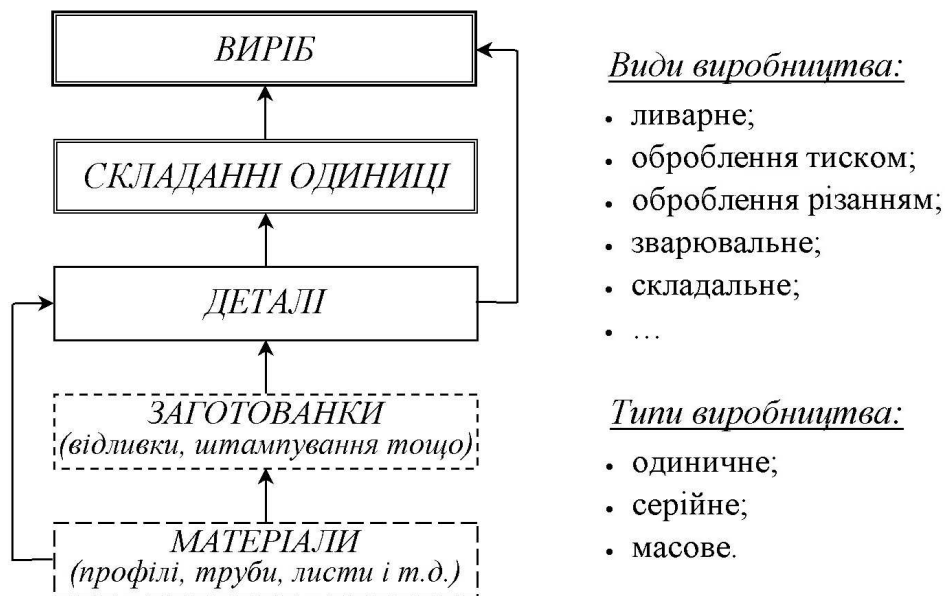


Рис. 2.3. Схема виробництва об'єктів машинобудування

Основні етапи створення деякої машини полягають в отриманні з вихідних матеріалів заготованок, перероблянні їх у деталі та виконанні необхідних складальних операцій. Для сучасних машин, як правило, притаманна широка взаємодія виробництв багатьох видів.

Безпосереднє виготовлення деталей і складаних одиниць здійснюється на основі ТП. Опрацювання останніх, як зазначається в літературі, є багатоваріантною задачею, оскільки належна якість машини може забезпечуватися за допомогою різних ТП. При цьому кожний варіант технології має певні техніко-економічні показники, такі як продуктивність, витрати матеріалів та енергії, потрібне обладнання й оснащення, необхідний інструмент, собівартість тощо. Перераховані властивості суттєвим чином залежать від наявного на підприємстві типу виробництва: *одиничного, серійного чи масового*.

У праці [116] показано, що ТП – це система з певною структурою, яка складається з елементів (технологічних операторів), що характеризуються

деякими параметрами. Відповідно до предмета оптимізації, структури чи параметрів, розрізняють *структурну* та *параметричну оптимізацію*. У першому випадку потрібним розв'язком є упорядкований склад елементів ТП, а у другому – значення їх параметрів, що визначаються згідно з набуттям необхідних екстремальних значень сформованою для досягнення обраної мети цільовою функцією.

Критеріями оптимальності технології є, зазвичай, перераховані вище техніко-економічні показники, їх різноманітні комбінації та інші величини. Очевидно, що кращі результати проектування досягаються інтегрованим застосуванням розглянутих двох підходів, тобто завдяки *структурно-параметричній оптимізації*. Об'єктом таких досліджень можуть бути як уся конструкторсько-технологічна система проектування деякої машини, так й окремі елементи на певних ієрархічних рівнях, тобто *машина – складання одиниця – деталь* та, відповідно, технологічні процеси *виготовлення машини – складання одиниці – деталі – заготованки*. Структурно-параметрична оптимізація процесів виробництва продукції машинобудування, як і задач її конструювання, тісним чином пов'язана з питаннями варіантного формоутворення даних об'єктів.

У пункті 2.2.1 зазначалось, що прикладом інтегрованих конструкторсько-технологічних розв'язків є модульний підхід, який полягає в поданні конструкції декотрими сукупностями її зовнішніх поверхонь, тобто модулями поверхонь, які призначені для виконання певних функцій та реалізуються належними технологічними модулями. Останні утворюють елементну базу операцій і переходів, обладнання, оснащення та інструменту, що дозволяє розробляти модульні ТП, які здатні поєднувати в собі переваги одиничних, типових і групових, оскільки:

- як одиничні всебічно враховують особливості конкретної продукції;
- досить широко втілюють основні ідеї типізації;
- поєднують вироби, згідно зі спільністю їх модулів, у належні групи.

Під час проектування технологічного маршруту за традиційною схемою, коли опрацьовуються окремі поверхні, навіть для простих об'єктів виникає значна кількість варіантів послідовності оброблення. Модульний принцип спрощує не тільки постановку розглянутої задачі, а й знаходження її розв'язків.

Виконаний загальний аналіз об'єктів і процесів машинобудування з точки зору їх формоутворення дозволяє не тільки окреслити проблемні,

найбільш важливі та трудомісткі питання даної галузі промисловості, а й правильно визначити напрямки їх розв'язання засобами комп'ютерного геометричного моделювання.

### **2.3. Типові задачі структурно-параметричного геометричного моделювання виробів машинобудування**

Подані вище відомості засвідчили провідну роль структурно-параметричного підходу щодо комплексного оптимального інтегрованого проектування об'єктів машинобудування протягом усього їх життєвого циклу. Було обґрунтовано можливість використання, з метою ефективного розв'язування проаналізованих технічних задач, поряд із розрахунковими моделями інших спеціальних дисциплін засобів комп'ютерної інженерної графіки.

Оскільки структурно-параметрична методологія спирається на комплексне дослідження багатоваріантних систем. Залучення до її засобів методів геометричного моделювання потребує належного доопрацювання та удосконалення останніх, проведення відповідної їх адаптації тощо.

Під час огляду літератури з прикладної геометрії, інженерної графіки, машинобудування та суміжних дисциплін було показано, що параметричним формоутворенням на поточний момент досягнуто значних успіхів як у теорії, так і практиці комп'ютерних побудов різноманітних фігур (ліній, поверхонь, тіл і т. д.). Проте потреби машинобудування в методах структурно-параметричного варіантного геометричного моделювання нині зостаються забезпеченими недостатньо. Мається на увазі невелика кількість відповідних напрацювань як у теоретичному, так і практичному плані.

Останні оцінки підтверджує, наприклад, відсутність у найпотужніших машинобудівних САПР світового рівня, таких як CATIA, NX та ін., готових проектних розв'язків для ефективно підтримки, зокрема, багатоваріантних конструкторських специфікацій технічних об'єктів, опрацювання групових технологій конструювання виробів та їх виготовлення тощо.

Співставлення структурно-параметричних потреб машинобудування з наявними можливостями в цьому аспекті прикладної геометрії дозволяє визначити типові задачі структурно-параметричного формоутворення технічної продукції, для яких необхідно знайти належні раціональні розв'язки. Оскільки, як було показано вище, об'єкти і процеси

машинобудування, зазвичай, мають деяку упорядковану структуру, досить часто ієрархічного характеру, то звідси виникає вимога до геометричних моделей стосовно їх здатності відповідним чином відображувати дані об'єкти і процеси. Отже, під час геометричного моделювання потрібно реалізувати зручне розв'язання як питань *декомпозиції*, так і *синтезу*.

З точки зору математичного опису процесів формоутворення це означає можливість ефективного поділу складних фігур на більш прості та побудови з елементів нижчих ієрархічних рівнів геометричних об'єктів вищих щаблів. При цьому необхідно забезпечити *структурну та параметричну варіантність компонентів і зв'язків між ними*, здатність до проведення відповідної *оптимізації та інтеграції з математичними описами інших дисциплін*.

На мові геометрії дані вимоги зводяться до необхідності *реалізації гнучких і продуктивних структурно-параметричних методів формування різноманітних фігур* – точок, ліній, поверхонь, тіл та багатовимірних об'єктів. За таких умов принципово важливими стають задачі взаємодії поміж собою наведених геометричних фігур. Маються на увазі, зокрема, питання ефективного визначення перетинів довільних ліній, поверхонь і тіл; побудови на базі примітивів їх композицій тощо.

Актуальними для проектування технічних об'єктів є задачі розроблення геометричних моделей, які забезпечують не тільки *конкретні, а узагальнені* розв'язки. Ці засоби більш пристосовані для продуктивної реалізації типових і групових технологій, зокрема в машинобудуванні, оскільки згідно з наявними умовами можуть гнучко адаптуватись до різноманітних змінюваних обставин.

Для наукових досліджень у галузі прикладної геометрії та інженерної графіки особливого значення набувають *задачі багатовимірного моделювання*, оскільки останні входять до складу математичних розрахункових методів оптимізації об'єктів і процесів машинобудування.

Вартим особливої уваги є опрацювання також можливостей структурно-параметричного підходу щодо ефективного *обчислення метричних характеристик геометричних фігур*, таких як довжини ліній, площі поверхонь, об'єми тіл і т. д.

Найбільш перспективним доцільно вважати *комплексне розв'язання поданих вище задач* завдяки відповідному розробленню та застосуванню *інтегрованих комп'ютерних моделей*.

Базові засади запропонованої *концепції структурно-параметричного формоутворення* та напрацьовані *геометричні методи й алгоритми* подаються відповідно у третьому та четвертому розділах монографії. Вагомими для практики постають задачі розроблення нових методик структурно-параметричного комп'ютерного варіантного моделювання деталей і складаних одиниць машинобудування та процесів їх виготовлення. Акцентованим питанням присвячено п'ятий розділ даного дослідження.

Зазначимо, що при цьому одна з головних ідей полягає в побудові таких геометричних моделей, які дозволяють продуктивно не тільки формувати різні структурно-параметричні варіанти створюваної конструкції шляхом належних варіацій і використання процедур оптимізації, а й ефективно відображувати можливі різновиди реальних процесів виготовлення деталей або складаних одиниць. Мається на увазі, що необхідно забезпечити механізми *втїлення розрахункових описів конструкторських, технологічних та інших спеціальних дисциплін до алгоритмів структурно-параметричного варіантного формоутворення* відповідних комп'ютерних геометричних моделей. У такий спосіб реалізуються сприятливі умови для *знаходження раціональних (оптимальних) розв'язків* під час проектування, виготовлення та експлуатації об'єктів машинобудування.

Окреслені основні проблемні питання та задачі структурно-параметричного формоутворення визначають новий напрямок наукових досліджень у галузі прикладної геометрії, а напрацьовані на їх базі принципи, методи, способи, прийоми та алгоритми послугували підґрунтям для створення відповідної методології.

## **2.4. Висновки до розділу 2**

У даному розділі, на підставі розгляду питань автоматизованого опрацювання об'єктів і процесів машинобудування в аспекті структурно-параметричного формоутворення, подано загальну методику проведення досліджень.

На основі виконаного аналізу:

1. Показано можливість використання комп'ютерних геометричних моделей як засобів інтеграції розрахункових моделей інших дисциплін для автоматизованого проектування виробів машинобудування.

2. Визначено засади методології наскрізного автоматизованого опрацювання об'єктів і процесів машинобудування, яка спирається на застосування структурно-параметричних геометричних моделей.

3. Окреслено типові задачі структурно-параметричного формоутворення технічної продукції, до яких відносяться питання: декомпозиції та синтезу геометричних об'єктів; структурної та параметричної варіантності їх компонентів і зв'язків між ними; комплексної оптимізації та інтеграції з математичними описами інших дисциплін; обчислення метричних характеристик фігур структурно-параметричними засобами; побудови геометричних моделей, які забезпечують узагальнені розв'язки, що більш пристосовані для реалізації типових і групових технологій машинобудування та ін.

4. Обґрунтовано необхідність розроблення нових методів, прийомів й алгоритмів структурно-параметричного геометричного моделювання, відповідних методик комп'ютерного варіантного формоутворення деталей і складаних одиниць машинобудування та опрацювання процесів їх виготовлення.

Дана частина монографії містить положення, які визначили напрямки подальших досліджень та загальну методику їх проведення для реалізації поставленої в роботі мети.

### 3. КОНЦЕПТУАЛЬНІ ЗАСАДИ МЕТОДОЛОГІЇ СТРУКТУРНО-ПАРАМЕТРИЧНОГО ГЕОМЕТРИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

Цей розділ присвячено узагальненню та розвитку теоретичних основ структурно-параметричного підходу до комп'ютерного геометричного моделювання, розробляння на цій базі єдиної концепції побудови різноманітних фігур – точок, ліній, поверхонь, тіл, їх комбінацій тощо.

Підсумковим результатом є інтеграція методів формоутворення з рядом суміжних фундаментальних математичних і прикладних технічних дисциплін, зокрема, теорії множин і графів, комбінаторики, оптимізації, програмування, автоматизованого проектування, конструювання, технології машинобудування і т. д.

Під *узагальненням* розумітимемо перехід від окремих положень, термінів, методів, прийомів і груп досліджуваних геометричних фігур до більш тотальних їх форм у вигляді певної методології та великих класів об'єктів, що аналізуються.

Подані в цьому розділі концептуальні засади структурно-параметричного геометричного моделювання спираються як на *дедуктивні міркування*, коли висновок про певну властивість конкретного елемента робиться на підставі відповідної характеристики всієї множини, так і на *індуктивний метод*, тобто здійсненням трансформацій часткового в загальне.

#### 3.1. Принципи структурно-параметричного формоутворення

Надалі широко вживатимемо різноманітні прийоми *системного підходу*, сутність якого зводиться до комплексного дослідження об'єктів і процесів шляхом діалектичної взаємодії методів *декомпозиції* та *синтезу*.

Досить часто проблема виконання аналізу предметів і явищ обумовлює їх поділ на компоненти нижчих ієрархічних рівнів. При цьому забезпечується полегшена робота з отриманими елементами, однак, одночасно, стають важчими задачі подальшого синтезу. Отже, постає завдання визначення компромісу між простотою окремих частин, мінімальною їх кількістю та складністю внутрішніх взаємозв'язків сформованої в такий спосіб геометричної системи.

### 3.1.1. Загальні положення методології структурно-параметричного геометричного моделювання

#### 3.1.1.1. Теоретичні засади застосування структурно-параметричних методів у геометричному моделюванні

Почнемо з класифікації геометричних фігур згідно з їх вимірністю (рис. 3.1).

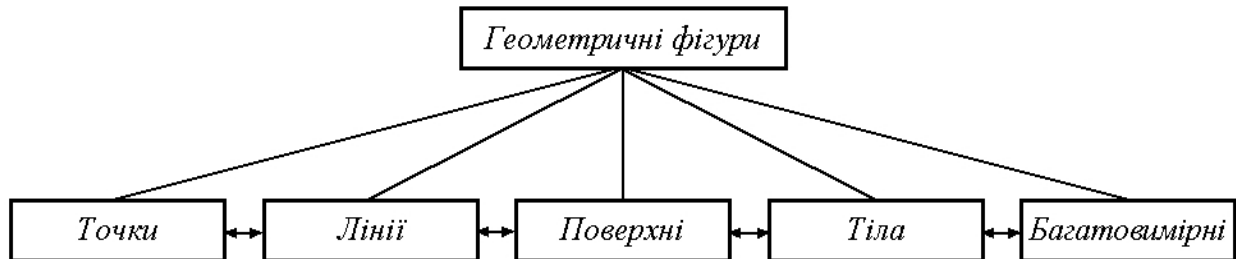


Рис. 3.1. Види фігур згідно з їх вимірністю

У якості базової властивості геометричних фігур обрано вимірність через те, що остання вважається суттєвішою за сталість відстаней, дотримання паралельності площин і прямих, збереження їх форми, тобто відповідно основних *ортогональних*, *афінних* та *проективних інваріантів*, оскільки витримує більш потужні *топологічні перетворення*, які, в загальному випадку, змінюють довжини, кути, площі, об'єми, прямолінійність і т. д., проте зберігають зв'язність та вимірність модельованих об'єктів.

Зазначимо, що показану на рис. 3.1 схему потрібно розглядати лише як систематизацію геометричних фігур за вимірністю, а не їх загальну класифікацію. Таке твердження базується на системному підході, який завжди допускає певну взаємодію елементів об'єкта, що аналізується. Для наведеного вище прикладу це означає можливе поєднання поданих компонентів (точок, ліній, поверхонь, тіл тощо) поміж собою та виникнення на основі цього нових утворень. Викладені аспекти досить важливі для даного наукового дослідження й тому розгорнуто розглядаються в подальших розділах монографії.

*Точки, лінії, поверхні, тіла та багатовимірні фігури відповідно є нуль-, одно-, дво-, три- та n-вимірними ( $n \in \mathbb{N}$ ,  $n > 3$ ) геометричними об'єктами.*

У машинобудуванні безпосередньо для формоутворення застосовуються перші чотири класи фігур, оскільки оточуючий нас простір тривимірний.

Підкреслимо, що точки, лінії та поверхні в даному аспекті є продуктом ідеалізації, тобто суто математичними абстракціями через те, що в реальному світі не існує об'єктів, які не мають об'єму. Однак досвід показує, що такий спосіб моделювання достатньо корисний як для теорії, так і практики.

Стрілками на рис. 3.1 показано можливість формування з фігур нижчої вимірності геометричних об'єктів вищої вимірності та навпаки. У першому випадку маються на увазі, наприклад, кінематичні побудови об'єктів, у другому – прийоми проєкціювання останніх.

Загальноприйнятим вважається твердження, що геометрична фігура – це множина точок. Оскільки для геометрії визначення точки є базовим, то приділимо йому належну увагу. Відповідно до структурно-параметричного підходу будемо розглядати точку у вигляді інтегрованого поняття, що об'єднує наступні її дефініції як:

- упорядкованої множини дійсних чисел, тобто координат  $n$ -вимірного простору ( $n \in \mathbb{N}$ ), яким ставляться у відповідність параметри положення;
- нескінченно малої частини досліджуваного простору (за всіма його вимірами), котра визначається нескінченно малими параметрами розмірів;
- певної сукупності параметрів форми топологічного плану (наприклад, які утворюються координатними лініями, поверхнями тощо).

В останньому випадку мається на увазі можливість подання точки, наприклад, для просторів: *одновимірного* – у вигляді прямолінійного або криволінійного відрізка нескінченно малої довжини; *двовимірного* – за допомогою нескінченно малого квадрата, прямокутника, круга тощо; *тривимірного* – застосуванням нескінченно малого куба, паралелепіпеда, кулі і т. д.

Таким чином, по-перше, точка стає повноправним геометричним об'єктом, який, подібно до всіх інших, має параметри положення, розмірів (нескінченно малих) і форми; по-друге, лінії та поверхні перестають бути суто математичними абстракціями; по-третє, вичерпується геометричний парадокс скінченної довжини лінії, складеної з нескінченного числа точок, позбавлених довжини.

Обґрунтуємо останню наведену тезу наступним чином.

*Твердження 3.1.* Довільний скінченний  $n$ -вимірний,  $n \in \mathbb{N}$ , геометричний об'єкт  $O$ , що займає частину простору  $O_n$ , можна подати

нескінченно великим числом  $m$  нескінченно малих величин  $n$ -вимірному простору з певними значеннями параметрів положення та форми.

*Доведення.* Нехай  $m \in \mathbb{N}$  і  $m \rightarrow \infty$ .

Тоді  $O_n/m = \delta_n$  – це нескінченно мала величина  $n$ -вимірному простору.

Сума нескінченно великого числа  $m$  нескінченно малих величин  $\delta_{n_i} = \delta_n$ , де  $i \in \{1, \dots, m\}$ , з потрібними значеннями параметрів положення та форми визначається виразом

$$\sum_{i=1}^m \delta_{n_i} = \delta_n \cdot m = \frac{O_n}{m} \cdot m = O_n,$$

що і треба було довести.

Викладені міркування підтверджують діалектичний взаємозв'язок нескінченно малих і великих чисел, що поєднуються, в даному випадку, деякою конкретною фігурою.

*Твердження 3.2.* Довільний скінченний  $n$ -вимірний,  $n \in \mathbb{N}$ , геометричний об'єкт  $O$ , що займає частину простору  $O_n$ , можна подати скінченним числом  $m$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , його скінчених за розмірами елементів певної форми та положення.

*Доведення.* Нехай  $m \neq \infty$ ,  $m_i \in \mathbb{R}$ ,  $m_i \geq 1$ ,  $\sum_{i=1}^m \frac{1}{m_i} = 1$ ,  $i \in \{1, \dots, m\}$ .

Тоді  $\delta_{n_i} = O_n/m_i$  – це деяка скінченна за розмірами частина об'єкта  $O$  певної форми та положення.

Сума  $m$  скінчених величин  $\delta_{n_i}$  із необхідними значеннями параметрів форми та положення визначає потрібний об'єкт  $O$

$$\sum_{i=1}^m \delta_{n_i} = \sum_{i=1}^m \frac{O_n}{m_i} = O_n \sum_{i=1}^m \frac{1}{m_i} = O_n,$$

що і треба було довести.

Звернемо увагу на використання у двох попередніх твердженнях параметрів положення та форми складових елементів досліджуваного скінченного геометричного об'єкта. Параметри положення визначаються застосовуваною системою координат, а параметри форми – варіантами декомпозиції або синтезу вихідної фігури. При цьому, в останньому випадку, форма складових елементів повинна забезпечувати потрібну дискретність і суцільність інтегральних об'єктів.

Так у місцях стиків важливо реалізувати для:

*ліній* – однакове положення поєднуваних кінців та необхідну гладкість у них;

*поверхонь* – збіг ребер, що стикуються, тобто тотожність їх параметрів форми, розмірів і положення;

*тіл* – конгруентність поєднуваних граней та однакове їх розміщення у просторі;

і т. д.

Перш ніж розглянути приклади до двох поданих вище тверджень, наведемо кілька загальних міркувань щодо застосування для різноманітних геометричних фігур термінів параметри форми, розмірів і положення.

В основу їх дефініції покладемо можливі варіанти взаємодії окремих точок досліджуваного геометричного об'єкта, як найелементарніших його складових, з оточуючим простором і поміж собою. У першому випадку – це координати даних точок, а у другому – відстані між ними.

Тоді варіювання значень параметрів, які визначають деяку фігуру спроможне обумовлювати:

- відсутність змін положення у просторі точок об'єкта, що аналізується, наприклад, унаслідок взаємної компенсації дії параметрів;

- модифікацію розташування у просторі точок фігури, проте зі збереженням взаємних відстаней між ними (паралельне перенесення, поворот і т. д.). У цьому випадку маємо справу з параметрами положення, тобто з конгруентними фігурами;

- рівномірне (в однакове число разів) та нерівномірне змінювання відстаней між точками фігури, яке відтворюється відповідно параметрами розмірів (для подібних фігур) і форми (для неподібних фігур). Прикладом перших, зокрема, слугує модифікація величини сторони квадрата, а других – перетворення його в ромб.

Параметри розмірів особливо важливі для інженерної графіки, наприклад, під час виконання креслеників деталей і складаних одиниць машинобудування. При цьому коефіцієнт, який дорівнює “відношенню розмірів об'єкта, виконаних без спотворення, до їхніх номінальних значень” відповідно до СКД ДСТУ 3321:2003 називається *масштабом*.

Як підсумок, із приводу використання понять параметрів форми, розмірів і положення, підкреслимо, що відповідно до поданої вище класифікації їх впливу на формоутворення важливою є модифікація не тільки розташування точок деякої фігури у просторі, а й відстаней між ними.

Отже, приймається, що в основі здійснення змін досліджуваного геометричного об'єкта лежить варіювання положень його точок у просторі. Коли при цьому відстані між останніми трансформуються пропорційно, то маємо задіяними параметри розмірів, непропорційно – форми, а у випадку сталих відстаней – лише параметри положення даної фігури.

Крім розглянутих основних геометричних параметрів форми, розмірів та положення в комп'ютерній інженерній графіці доцільно застосовувати й інші, тобто додаткові параметри, зокрема: можливих послідовностей комбінаторного синтезу опрацьовуваної фігури, задіяних кольорів відтворення модельованого об'єкта, відображуваної текстури твердого тіла і т. д. Це варто розглядати як перспективи розширення класичного тлумачення терміну геометричний параметр. Зазначені пропозиції ґрунтуються на сучасних досягненнях комп'ютерної техніки та теоретичних і практичних здобутках у галузі прикладної геометрії та інженерної графіки.

Подамо, згідно з викладеними вище загальними міркуваннями, конкретні приклади, що ілюструють застосування параметрів форми та положення у твердженнях 3.1 і 3.2. Відмінність цих тверджень поміж собою полягає лише в тому, що в першому разі поділ або синтез довільного скінченного  $n$ -вимірного ( $n \in \mathbb{N}$ ) геометричного об'єкта  $O$  здійснюється на нескінченне число або, відповідно, з нескінченного числа елементів, а у другому випадку – на скінченну їх кількість або, відповідно, зі скінченної їх кількості. Таким чином, описані нижче процедури різняться тільки числом (нескінченим або скінченим) здійснюваних операцій.

Розглянемо кілька прикладів поділу одно-, дво- та тривимірних фігур.

*Приклад 3.1.* У якості одновимірного об'єкта візьмемо скінченний криволінійний або прямолінійний відрізок. Якщо застосувати до них, зокрема, метод послідовного поділу навпіл, то одержимо необхідні множини елементів із потрібними параметрами форми, розмірів та положення.

*Приклад 3.2.* Нехай двовимірною вихідною фігурою є плоский прямокутник, одна з вершин якого і дві прилеглі до неї сторони визначають початок та осі абсцис і ординат декартової прямокутної системи координат  $Oxy$ . Тоді для наведеного об'єкта й отримуваних його частин допустимий послідовний поділ навпіл по чергово двома прямими, які ортогональні відповідно до осі абсцис і ординат. У такий спосіб отримаємо необхідні

множини елементів із потрібними параметрами форми, положення та розмірів. Усі складові є прямокутниками, розміщення яких визначається, зокрема, найменшими координатами вершин, а розміри – довжинами сторін.

Замість прямокутника можна обрати будь-який плоский об'єкт та не обов'язково прямолінійну систему координат. Узагальненням цього випадку є використання не тільки площин, а й інших поверхонь, наприклад, циліндричних, сферичних і т. д. та відповідних криволінійних систем координат. У даному разі необхідні множини геометричних елементів формуються внаслідок перетину сімейств координатних ліній.

Подані прийоми поділу одно- та двовимірних фігур поширюються, за аналогією, і для випадку тривимірних об'єктів.

*Приклад 3.3.* У декартовій прямокутній системі координат декомпозицію довільного скінченного тіла можна здійснити послідовним його поділом за допомогою трьох площин, які ортогональні відповідно до осі абсцис, ординат й аплікат.

Подібним способом досягають бажаного результату в разі застосування циліндричних, сферичних та інших криволінійних координат. За даних умов отримують необхідні множини вже тривимірних елементів із потрібними параметрами форми, розмірів і положення. Зокрема, у випадку циліндричних координат окремі частини поділеного тіла мають грані у вигляді плоских і циліндричних фігур, які є фрагментами відповідних координатних поверхонь, а у випадку сферичних координат – плоских, конічних та сферичних фігур. Наведеними вище прийомами у тривимірному просторі здійснюється також поділ різноманітних ліній та поверхонь.

Відповідно до викладених процедур декомпозиції з отриманих у такий спосіб елементів можна шляхом використання операцій синтезу побудувати потрібні інтегральні геометричні об'єкти із забезпеченням необхідної гладкості їх поєднаних частин. Твердження 3.1 і 3.2 слугують теоретичною основою для напрацювання прикладних методів й алгоритмів комп'ютерного структурно-параметричного геометричного моделювання та застосування останніх на практиці. Так, зокрема, в машинобудуванні поділ вихідних виробничих матеріалів (сортового прокату, труб, листів і т. д.) виконується різноманітними способами розкрою, декотрі варіанти якого розглядаються в п'ятому розділі монографії.

Наведемо кілька ключових термінів структурно-параметричного формоутворення.

*Означення 3.1.* Структурно-параметрична геометрична модель (СПГМ) – це деяка множина елементів, що мають певні параметри форми, розмірів та положення й завдяки цьому визначають новий об'єкт із власною структурою, тобто внутрішньою будовою, та геометричними параметрами форми, розмірів і положення.

*Твердження 3.3.* Довільний скінченний  $n$ -вимірний,  $n \in \mathbb{N}$ , геометричний об'єкт  $O$  можна відтворити за допомогою СПГМ.

*Доведення.* Оскільки твердженням 3.2 обґрунтовано, що довільний скінченний  $n$ -вимірний,  $n \in \mathbb{N}$ , геометричний об'єкт  $O$  відтворюється скінченною множиною елементів, які мають певні параметри форми, розмірів та положення, то останню, згідно з означенням 3.1, можна розглядати як СПГМ. Тобто, що і треба було довести.

На підставі двох останніх тверджень робимо наступний висновок.

*Твердження 3.4.* Довільний скінченний  $n$ -вимірний,  $n \in \mathbb{N}$ , геометричний об'єкт  $O$  можна відтворити за допомогою скінченної множини, елементами якої є окремі СПГМ.

*Доведення.* Оскільки твердженням 3.2 обґрунтовано, що довільний скінченний  $n$ -вимірний,  $n \in \mathbb{N}$ , геометричний об'єкт  $O$  подається скінченною множиною скінченних елементів із певними параметрами форми, розмірів і положення та, згідно з твердженням 3.3, кожен із цих елементів можна відтворити за допомогою деякої СПГМ, то, як наслідок, маємо твердження, що потрібно було довести.

З метою інтеграції навколо геометричних моделей інших математичних описів досліджуваних об'єктів доцільно ввести наступне поняття.

*Означення 3.2.* Комплексна геометрична модель (КГМ) – це сукупність декількох взаємопов'язаних математичних моделей, не обов'язково всіх геометричних, для яких базовими є останні.

Наприклад, доволі часто універсальними компонентами КГМ виступають процедури структурно-параметричної оптимізації, а спеціальними, зокрема для технічної продукції, розрахунки на міцність, технологічні, економічні тощо. Отже, відповідно до твердження 3.4 та означення 3.2, довільний геометричний об'єкт машинобудування можна подати скінченною множиною СПГМ або деякою КГМ.

Якщо ж вважати, що формування інтегральної геометричної фігури з окремих її елементів здійснюється протягом певного часу, то за допомогою

СПГМ або КГМ зручно відтворювати різноманітні варіантні процеси конструювання, виготовлення та експлуатації технічної продукції.

*Означення 3.3. Комбінаторна геометрична модель (КБГМ) – це геометрична модель, яка завдяки певним комбінаторним сполукам своїх елементів здатна породжувати кілька фігур.*

*Означення 3.4. Комбінаторний геометричний об'єкт – це варіантна фігура, що створюється за допомогою КБГМ.*

*Означення 3.5. Варіаційна геометрична модель (ВГМ) – це геометрична модель, яка завдяки зміні значень параметрів форми, розмірів і положення своїх елементів здатна породжувати нові геометричні фігури.*

*Означення 3.6. Варіаційний геометричний об'єкт – це варіантна фігура, що створюється за допомогою ВГМ.*

*Означення 3.7. Комбінаторно-варіаційна геометрична модель (КБВГМ) – це геометрична модель, яка завдяки певним комбінаторним сполукам своїх елементів та зміні значень їх параметрів форми, розмірів і положення здатна породжувати нові геометричні фігури.*

*Означення 3.8. Комбінаторно-варіаційний геометричний об'єкт – це варіантна фігура, що створюється за допомогою КБВГМ.*

Розглянемо приклад практичного застосування наведених вище загальних положень щодо концепції структурно-параметричного геометричного моделювання.

Проаналізуємо геометричний об'єкт, що містить пару окремих компонентів, які є топологічно еквівалентними поверхням тора (рис. 3.2).

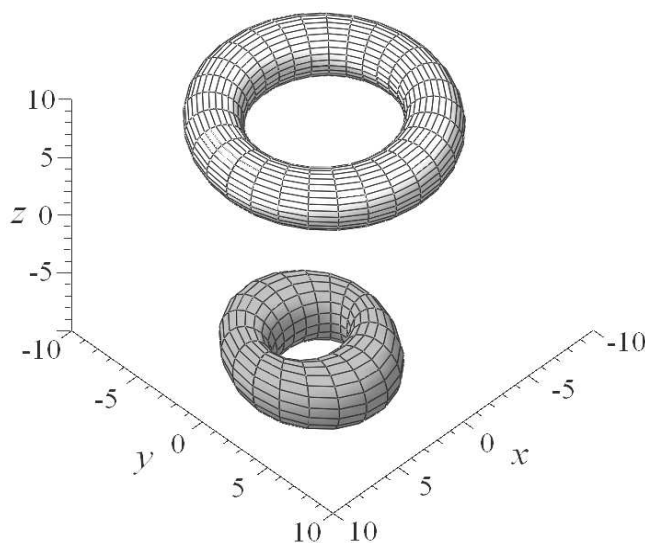


Рис. 3.2. Незв'язна фігура з двох частин, що топологічно еквівалентні поверхням тора

Дану фігуру відтворимо за допомогою СПГМ, до складу якої входять два елементи, що в декартовій прямокутній системі координат  $Oxyz$  визначаються своїми радіусами-векторами  $\mathbf{r}_i$  згідно з поданими нижче параметричними залежностями:

$$\mathbf{r}_i(u, v, p_{k_i}) = \mathbf{r}_i[p_{1_i} + (p_{4_i} + p_{5_i} \cos u) \cos v, p_{2_i} + (p_{4_i} + p_{6_i} \cos u) \sin v, p_{3_i} + p_{7_i} \sin u];$$

$$u \in [p_{8_i}, p_{9_i}]; v \in [p_{10_i}, p_{11_i}]; k \in \{1, \dots, 11\}, \quad (3.1)$$

де  $i \in \{1; 2\}$  – номер елемента;

$u, v, p_{k_i}$  – параметри.

Для зображеного на рис. 3.2 випадку:  $p_{11}=x_1=-2$ ;  $p_{21}=y_1=-2$ ;  $p_{31}=z_1=5$ ;  $p_{41}=r_{01}=6$ ;  $p_{51}=r_{11}=1,5$ ;  $p_{61}=r_{21}=1,8$ ;  $p_{71}=r_{31}=2$ ;  $p_{81}=-\pi$ ;  $p_{91}=\pi$ ;  $p_{101}=0$ ;  $p_{111}=2\pi$ ;  $p_{12}=x_2=4$ ;  $p_{22}=y_2=3$ ;  $p_{32}=z_2=-6$ ;  $p_{42}=r_{02}=3,5$ ;  $p_{52}=r_{12}=1$ ;  $p_{62}=r_{22}=2$ ;  $p_{72}=r_{32}=2,5$ ;  $p_{82}=-\pi$ ;  $p_{92}=\pi$ ;  $p_{102}=0$ ;  $p_{112}=2\pi$ .

Після присвоювання значень параметрам положення другого елемента  $p_{12}=x_2=5,5$ ;  $p_{22}=y_2=4,5$ ;  $p_{32}=z_2=5$  отримуємо складену фігуру, яку показано на рис. 3.3.

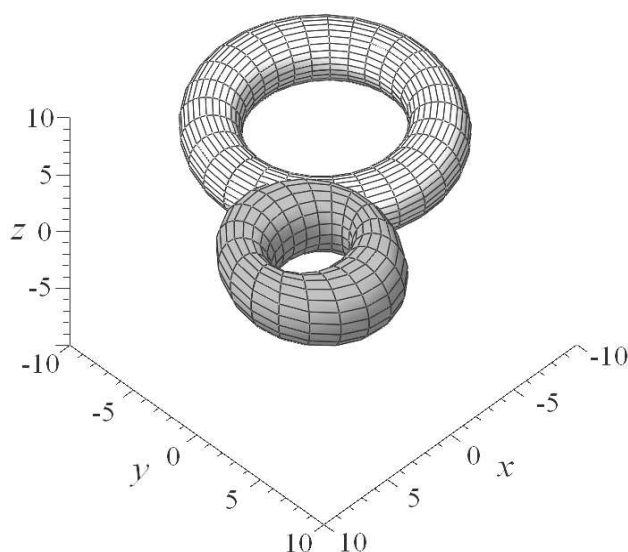


Рис. 3.3. Формування складеної фігури шляхом модифікації значень параметрів положення другого елемента

На рис. 3.4 зображено подальший етап змінювання досліджуваного об'єкта, що стає еквівалентним сфері завдяки наданню нульових величин усім параметрам першого компонента та наступних для другого:  $p_{42}=r_{02}=0$ ;  $p_{52}=r_{12}=4,5$ ;  $p_{62}=r_{22}=4$ ;  $p_{72}=r_{32}=3,5$ ;  $p_{112}=\pi$ .

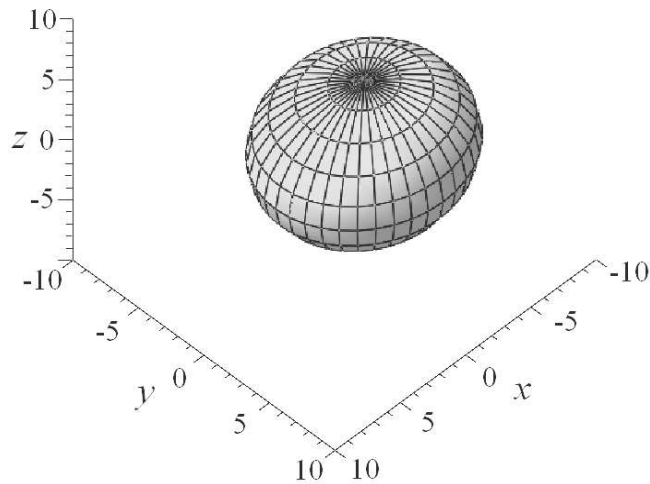


Рис. 3.4. Трансформація досліджуваного геометричного об'єкта в еквівалентну сфері фігуру

Заслуговує на увагу той факт, що стосовно зниклого елемента однаковий результат можна досягти різними шляхами. Наприклад, достатньо в моделі встановити значення

$$p_{41}=r_{01}=p_{51}=r_{11}=p_{61}=r_{21}=p_{71}=r_{31}=0$$

або

$$p_{81}=p_{91}=p_{101}=p_{111}=0. \quad (3.2)$$

Зробимо коментар із приводу віднесення параметрів елемента, який аналізується, до параметрів положення, форми та розмірів.

Очевидно, що до перших належать  $p_{11}=x_1$ ,  $p_{21}=y_1$ ,  $p_{31}=z_1$ , а до других –  $p_{81}$ ,  $p_{91}$ ,  $p_{101}$ ,  $p_{111}$ . У випадку  $p_{41}$ ,  $p_{51}$ ,  $p_{61}$ ,  $p_{71}$  все залежить від відносного характеру їх варіювання. Коли останній пропорційний, то наведені величини є параметрами розмірів, інакше – форми. Вираз (3.2) свідчить, що для всіх нульових параметрів розмірів або форми фігура зникає. Проте це не стосується її параметрів положення, які можуть мати довільні значення у просторі, обумовлюючи місце зникнення або майбутньої появи об'єкта. Розглянутий другий елемент опрацьовуваної геометричної фігури має аналогічний першому аналітичний опис. Тому окремих пояснень не потребує.

Побудуємо дугу кола (рис. 3.5) змінюванням у структурно-параметричній моделі (3.1) величин:  $p_{42}=r_{02}=4,5$ ;  $p_{52}=r_{12}=0$ ;  $p_{62}=r_{22}=0$ ;  $p_{72}=r_{32}=0$ . Відповідний командний файл системи Maple наведено в додатках.

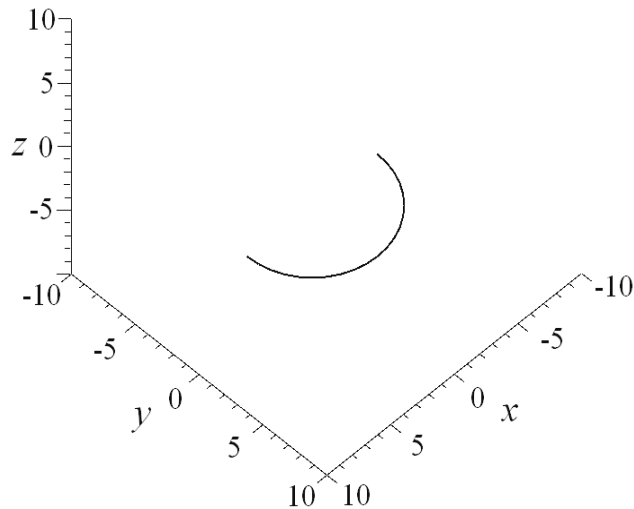


Рис. 3.5. Формування дуги кола

Таким чином, комп'ютерне структурно-параметричне геометричне моделювання дозволяє гнучко формувати різноманітні фігури та здійснювати потрібні їх модифікації.

Структурно-параметричний підхід може бути застосовано і для реалізації поширеного в інженерній графіці математичного апарату проєкціювання, що, зазвичай, складається з площини, центра (власного чи невластного) і прямолінійних променів проєкціювання (у загальному випадку останні є криволінійними та застосовується довільна поверхня або лінія проєкцій). Так, наприклад, проєкціюванням у тривимірному просторі на площину наведених нижче геометричних об'єктів можна отримати:

*точки* – точку або порожню множину (в наступних пунктах останній факт більш не акцентується);

*лінії* – плоску лінію або точку;

*поверхні* – плоску поверхню або лінію;

*тіла* – плоску поверхню.

Покажемо можливість інтеграції структурно-параметричним підходом побудови тіл та проаналізованих вище способів формоутворення ліній і поверхонь. Для цього узагальнимо рівняння першого елемента структурно-параметричної моделі (3.1) наступним чином

$$\begin{aligned} & \mathbf{r}_1(u, v, w, p_{k_1}) = \\ & = \mathbf{r}_1[p_{1_1} + (p_{4_1} + (p_{5_1} + w)\cos u)\cos v, p_{2_1} + (p_{4_1} + (p_{6_1} + w)\cos u)\sin v, p_{3_1} + (p_{7_1} + w)\sin u]; \\ & \quad u \in [p_{8_1}, p_{9_1}]; v \in [p_{10_1}, p_{11_1}]; w \in [p_{12_1}, p_{13_1}]; k \in \{1, \dots, 13\}, \end{aligned} \quad (3.3)$$

де  $u, v, w, p_{k_1}$  – параметри.

Зробимо коментар стосовно того, чому у формулах (3.1) і (3.3) параметри  $u$ ,  $v$  та  $w$  подаються окремо від решти  $p_{ki}$ . На відміну від фіксованих значень  $p_{ki}$ , величини  $u$ ,  $v$ ,  $w$  варіюються в певних проміжках, а тому й отримали назву *параметрів-змінних*, на противагу решті *параметрів-сталих*. Отже, з виразу (3.1) видно, що останній описує поверхню, яка, за деяких умов, може стати лінією або й, навіть, точкою; а із залежності (3.3) – що це тіло, яке здатне перетворитися на поверхню, лінію або точку. Таким чином, число параметрів-змінних в аналітичному описі геометричної фігури дорівнює її вимірності, тобто для точки маємо нуль, лінії – одиницю, поверхні – двійку, тіла – трійку і т. д.

Узагальнена форма визначення радіуса-вектора  $\mathbf{r}_i$  деякого довільного  $i$ -го,  $i \in \mathbb{N}$ , геометричного елемента в  $n$ -вимірному,  $n \in \mathbb{N}$ , просторі має вигляд

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i (u_{1_i}, \dots, u_{j_i}, p_{1_i}, \dots, p_{k_i}); \quad u_{j_i} \in [u_{\min j_i}, u_{\max j_i}], \quad j \leq n, \quad (3.4)$$

де  $u_{j_i}$  – параметри-змінні,

$p_{k_i}$  – параметри-сталі,

$j, k$  – цілі невід’ємні числа.

Згідно з формулою (3.4), якщо число параметрів-змінних дорівнює нулю, то маємо точку в  $n$ -вимірному просторі. Коли додатково й кількість сталих параметрів нульова, то відтворюваний об’єкт стає невизначеним, тобто отримуємо порожню множину.

На рис. 3.6 показано тіло, яке сформовано відповідно до таких значень параметрів залежності (3.3):  $p_{11}=x_1=p_{21}=y_1=p_{31}=z_1=0$ ,  $p_{41}=r_{01}=6$ ,  $p_{51}=r_{11}=p_{61}=r_{21}=p_{71}=r_{31}=3$ ,  $p_{81}=-\pi$ ,  $p_{91}=0$ ,  $p_{101}=0,5\pi$ ,  $p_{111}=1,5\pi$ ,  $p_{121}=0$ ,  $p_{131}=0,5$ .

Фіксацією конкретної величини параметра  $w$  у формулі (3.3) отримуємо вже не тіло, а еквівалентну поверхні тора фігуру, яку, за потреби, можна трансформувати у сферу, дугу кола, точку й, навіть, порожню множину. Базуючись на виразі (3.3), надамо приклад його узагальнення для чотиривимірного простору. Збережемо всі позначення, що використані у формулі (3.3), ввівши додатковий параметр-змінну  $t$ , яку для наочності асоціюватимемо з часом,

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 (u, v, w, t, p_{k_1}) = \\ = \mathbf{r}_1 [p_{11} + (p_{41} + (p_{51} + w)\cos u)\cos v, p_{21} + (p_{41} + (p_{61} + w)\cos u)\sin v, p_{31} + (p_{71} + t + w)\sin u]; \\ u \in [p_{81}, p_{91}]; \quad v \in [p_{101}, p_{111}]; \quad w \in [p_{121}, p_{131}]; \quad t \in [p_{141}, p_{151}]; \quad k \in \{1, \dots, 15\}, \quad (3.5) \end{aligned}$$

де  $u, v, w, t, p_{k_1}$  – параметри.

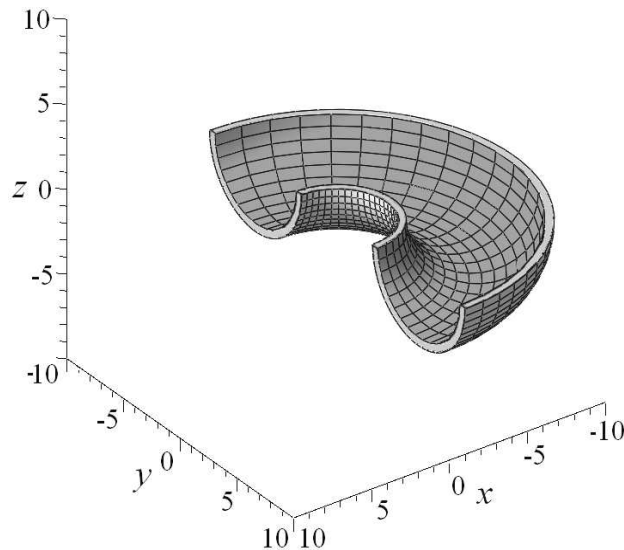


Рис. 3.6. Формування тіла згідно з формулою (3.3)

Аналізуючи залежність (3.5) бачимо, що новий параметр впливає на змінювання форми даного геометричного об'єкта вздовж осі  $z$ . З метою графічного відтворення виконаних модифікацій на рис. 3.7 застосовано два зображення, відповідно для величин  $t=0$  та  $t=2$ . При цьому решта значень параметрів наступна:  $p_{11}=x_1=p_{21}=y_1=p_{31}=z_1=0$ ,  $p_{41}=r_{01}=6$ ,  $p_{51}=r_{11}=p_{61}=r_{21}=p_{71}=r_{31}=3$ ,  $p_{81}=-\pi$ ,  $p_{91}=0$ ,  $p_{101}=0,5\pi$ ,  $p_{111}=1,5\pi$ ,  $p_{121}=0$ ,  $p_{131}=0,5$ , тобто однакова з фігурою, показаною на рис. 3.6. Командний файл, який реалізує побудову основних зовнішніх поверхонь наведеного тіла, що деформується, подано в додатках.

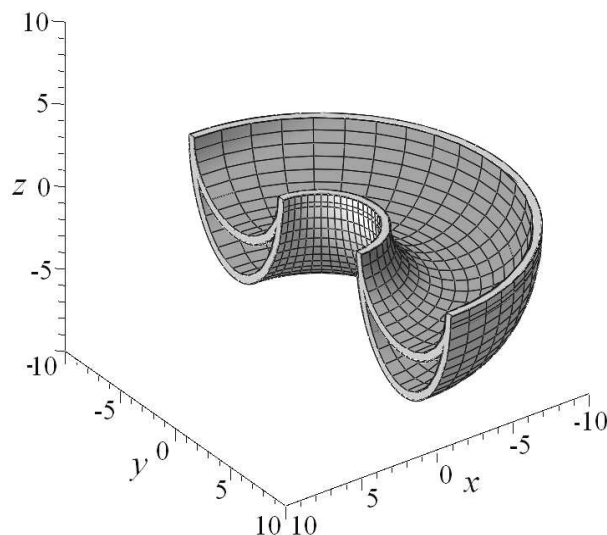


Рис. 3.7. Дискретна візуалізація чотиривимірному об'єкта

Розглянутий приклад цікавий не тільки з точки зору теорії комп'ютерного формоутворення, а і практики машинобудування, оскільки

динамічно змінюваними в часі твердотільними об'єктами моделюються різноманітні технології виробництва. Даний випадок можна віднести до витягування деталей із листа. Підкреслимо, що для отримання при цьому правильних результатів потрібно застосовувати в якості керуючих параметрів аналітичні теорії деформування, які напрацьовані відповідними спеціальними технічними дисциплінами.

У загальному випадку зазначена мета досягається забезпеченням відкритості СПГМ до об'єднання з іншими розрахунковими моделями, тобто шляхом побудови інтегрованих математичних описів технічних об'єктів для реалізації комплексної оптимізації останніх.

Вартий уваги також факт щодо можливості гнучкого та продуктивного відтворення структурно-параметричними моделями гібридних геометричних об'єктів. На рис. 3.8 наведено фігуру, яку побудовано на базі синтезу двох елементів:

– кулі згідно з формулою (3.3), де  $p_{11}=x_1=p_{21}=y_1=p_{31}=z_1=0$ ,  $p_{41}=r_{01}=p_{51}=r_{11}=p_{61}=r_{21}=p_{71}=r_{31}=0$ ,  $p_{81}=-\pi$ ,  $p_{91}=\pi$ ,  $p_{101}=0$ ,  $p_{111}=\pi$ ,  $p_{121}=0$ ,  $p_{131}=6,5$ ;

– кругового кільця на підставі залежності (3.1) із наступними значеннями параметрів:  $p_{12}=x_2=p_{22}=y_2=p_{32}=z_2=0$ ,  $p_{42}=r_{02}=6,5$ ,  $p_{52}=r_{12}=p_{62}=r_{22}=2$ ,  $p_{82}=-\pi$ ,  $p_{92}=\pi$ ,  $p_{102}=0$ ,  $p_{112}=\pi$  (відповідний командний файл подано в додатках).

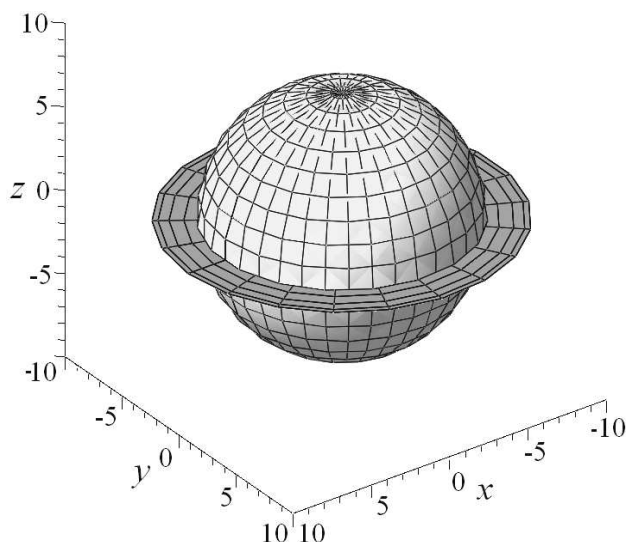


Рис. 3.8. Об'єднання кулі та кругового кільця

Проте достатньо в зазначеній послідовності команд змінити рядок із величинами “ $p_8:=-P_i$ ;  $p_9:=P_i$ .” на “ $p_8:=0$ ;  $p_9:=0$ .” і маємо фігуру, показану на рис. 3.9.

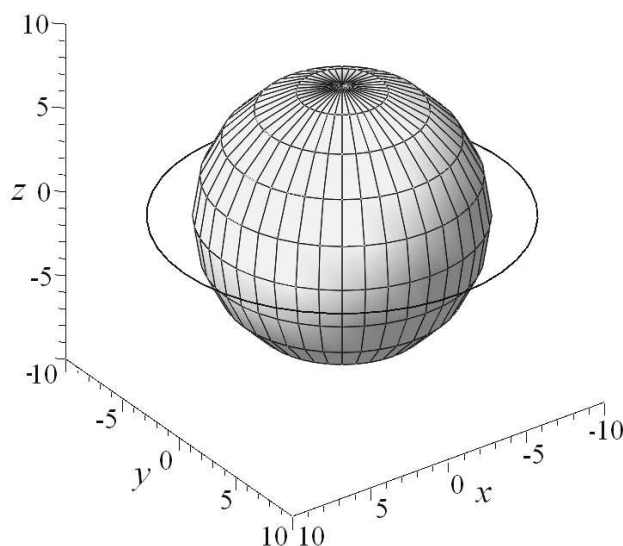


Рис. 3.9. Геометричний об'єкт у вигляді кулі та кола

Наведені вище приклади засвідчують ефективність варіантних комп'ютерних побудов за допомогою СПГМ.

### 3.1.1.2. Сучасне комп'ютерне формоутворення геометричних об'єктів із позицій структурно-параметричного відходу

Перш ніж перейти до дефініції принципів структурно-параметричної методології автоматизованого формоутворення, ключових етапів розробляння й застосування відповідних геометричних моделей та їх реалізації з використанням засобів теорії множин і графів обґрунтуємо необхідні для цього *методи комп'ютерних побудов* таких фігур як *точки, лінії, поверхні, тіла* (рис. 3.1). Стосовно виключення тут із розгляду задач багатовимірної геометрії зазначимо, що останні використовуються в машинобудуванні, як правило, для розрахункових моделей та виконання з їх допомогою процедур оптимізації. Ці питання аналізуються в четвертому розділі монографії.

Комп'ютерне геометричне моделювання складає невід'ємну частину практично всіх сучасних САПР і забезпечує роботу з *каркасною, поверхневою та об'ємною геометрією*.

Історично першими з'явилися *каркасні моделі (wireframe models)*, до складу яких можуть входити точки та лінії. Головним недоліком цих засобів є невизначеність побудованих об'єктів між елементами каркаса (звідси неточні розрахунки, зокрема, таких властивостей як площа, об'єм, маса, центр тяжіння і т. д.), а перевагою – доволі простий застосовуваний

математичний апарат, незначні потреби в обчислювальних ресурсах (швидкодії процесора, комп'ютерній пам'яті тощо).

*Поверхневі моделі (surface models)* більш досконалі, оскільки додатково до точок та ліній містять ще й поверхні. Для останніх існують різноманітні способи і прийоми визначення, стислий огляд яких наведено далі. Головна вада поверхневих моделей полягає в неспроможності ефективно імітувати реальні фізичні тіла та їх властивості.

*Об'ємні (твердотільні) моделі (solid models)* узагальнюють розглянуті вище каркасні й поверхневі моделі, дозволяють достатньо правдоподібно відтворювати об'єкти та явища навколишнього світу, завдяки цьому є найбільш придатними для використання в галузі машинобудування.

Оскільки наш аналіз, у структурно-параметричному аспекті, зосереджено на точках, лініях, поверхнях і тілах та першим уже було приділено достатню увагу, то перейдемо відразу до ліній, котрі розглядатимемо як траєкторії руху точок. Визначальною властивістю ліній є їх довжина. Поверхні, головною характеристикою яких вважається площа, згідно з кінематичним підходом утворюються переміщенням у просторі певних ліній, що досить часто змінюються при цьому. Подальшим узагальненням описаного способу є формування тіл, основна відмінність яких, від проаналізованих фігур, полягає в наявності об'єму.

Найпоширеніші в сучасних САПР прийоми побудови наведених геометричних об'єктів зводяться до наступного. Точки визначаються їх координатами (не тільки декартовими, а й сферичними, циліндричними і т. п.), за допомогою параметрів розміщення на лініях або поверхнях, в характерних місцях деяких геометричних об'єктів (центрі кола, перетині певних примітивів і т. д.) тощо. Лінії створюються шляхом використання відповідних рівнянь, інтерполяцією, апроксимацією або екстраполяцією множин точок, рухом останніх, розрахунком перетину поверхонь, спряженням кривих і т. п. прийомами. Поверхні визначаються введенням своїх аналітичних виразів, інтерполяцією, апроксимацією або екстраполяцією вихідних точок і ліній, кінематичним способом (змінюванням положення, форми та розмірів кривих у просторі) тощо. Тіла моделюється застосуванням наперед опрацьованих примітивів (призм, циліндрів, конусів, куль, торів і т. д., необхідні параметри яких формуються користувачем), їх оброблянням операціями теорії множин (об'єднання, різниці, перетину), породженням потрібної товщини для обраних поверхонь,

переміщенням останніх у просторі та іншими методами. Певним універсальним способом побудови перерахованих фігур є модифікація, тобто змінювання їх форми, розмірів і положення. За допомогою цього з екземплярів вищої вимірності можна виділити елементи нижчої, наприклад: поверхні та криві – з тіла, точки – з лінії тощо.

Нині в машинобудівних САПР найпоширеніше використання геометричних об'єктів у параметричному вигляді. Це стосується не тільки окремих примітивів, таких як лінії, поверхні, тіла, а й більш складних утворень – деталей і вузлів машин. У даному випадку конструктор визначає форму, розміри та положення створюваних предметів за допомогою параметрів й обмежень. Цілеспрямоване змінювання яких дозволяє йому автоматизованим способом одержувати чисельні різноманітні варіанти досліджуваних об'єктів і виконувати їх оптимізацію. Прикладом даного плану слугує СПГМ (3.1).

*Формоутворення проаналізованих геометричних фігур (точок, ліній, поверхонь і тіл) задовольняє поданим вище засадам структурно-параметричного підходу.*

Обґрунтуємо це спочатку для тіл, як більш загальних об'єктів, що до свого складу включають у якості елементів поверхні, лінії та точки. Такий дедуктивний підхід дозволяє з системних позицій цілого проаналізувати окремі досліджувані геометричні компоненти й можливі їх взаємозв'язки.

Основні сучасні способи комп'ютерного моделювання тіл подано на рис. 3.10.

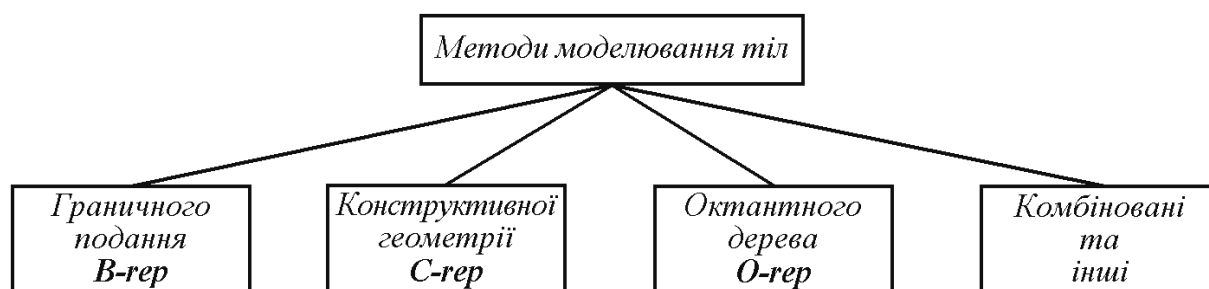


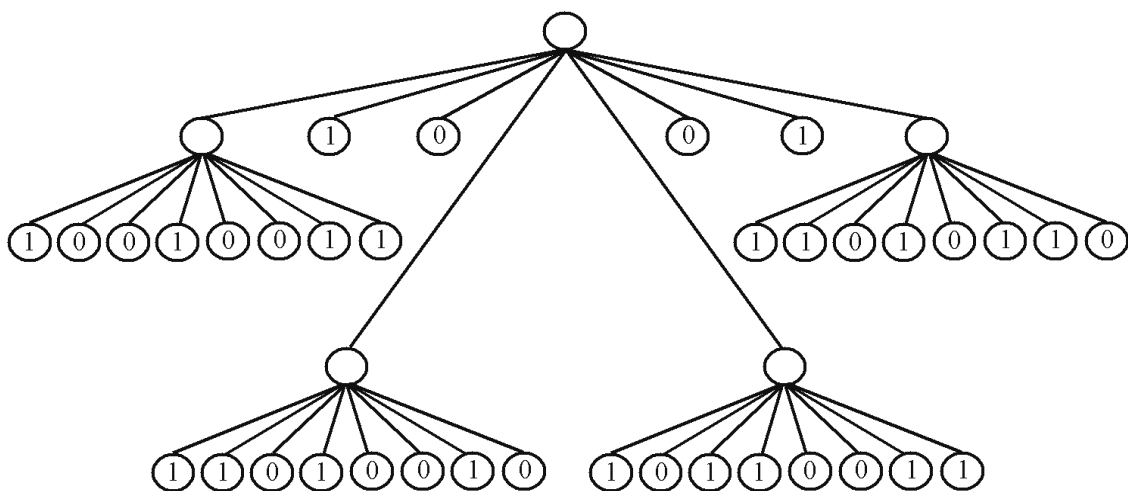
Рис. 3.10. Комп'ютерні способи формування тіл

Почнемо з більш простих, до яких відноситься група методів під умовною назвою *октантного дерева (O-rep – Octant trees representation)*. Головна їх ідея полягає в декомпозиції вихідного тіла на деяку сукупність менших компонентів, наприклад, кубиків, які утворюються внаслідок

перетину певних площин рівнів декартової прямокутної системи координат, чи схожих елементів, зокрема, в результаті застосування циліндричних, сферичних й інших координат. Наведені прийоми цілком збігаються з викладеними вище базовими засадами структурно-параметричного підходу.

Найпростішою реалізацією тіла зазначеним способом є *воксельне подання (voxel representation)*. Суть полягає у створенні навколо опрацьовуваного об'єкта початкового куба і його подальшого поділу трьома сімействами перпендикулярних до відповідних осей прямокутної системи координат площин на менші кубики з розмірами сторін, що визначаються потрібною точністю відтворення вихідної фігури. Елементом тривимірного масиву, число яких дорівнює кількості сформованих кубиків, присвоюються значення 1 або 0 у залежності від перетину останніх тілом чи ні. Головний недолік розглянутого способу, для довільних геометричних об'єктів, полягає в суттєвих потребах обчислювальних ресурсів щоб забезпечити високу точність моделювання.

Більш раціональний у даному плані *метод октантного дерева*, який, на відміну від воксельного подання, вихідний куб ділить не одноразово на велику кількість елементів, а поступово кожного разу на вісім рівних кубиків. Наведений процес подається у вигляді дерева, з кожної проміжної вершини якого виходить вісім ребер, що й обумовило відповідну назву. Один із можливих таких варіантів зображено на рис. 3.11.



3.11. Приклад октантного дерева

Якщо поточний кубик повністю належить тілу або ні, то йому надається відповідно значення 1 чи 0 і дана вершина дерева більш не ділиться. У протилежному випадку описана процедура повторюється до

присвоєння всім кінцевим вершинам значень 1 або 0 чи досягнення потрібних мінімальних розмірів кубиків. Отже, воксельне подання можна розглядати як граничний випадок октантного дерева, в якого довжина шляху від кореня до всіх кінцевих вершин рівна, тобто містить однакове число ребер.

Таким чином, *O-rep* спосіб повністю підпадає під основні положення структурно-параметричного підходу до формоутворення, оскільки спирається на певну сукупність взаємопов'язаних геометричних елементів визначеної форми, розмірів і положення у просторі.

Наступним розглянемо *метод конструктивної геометрії (C-rep – Constructive representation)*, який зводиться до побудови необхідних фігур із базових примітивів (як правило, призм, циліндрів, конусів, куль, торів тощо) шляхом комбінування останніх за допомогою операцій теорії множин (об'єднання, різниці, перетину). Форма, розміри та положення примітивів визначаються їх параметрами, конкретні величини яких присвоюються згідно з потребами користувача системою автоматизованого геометричного моделювання. У подальшому створені в такий спосіб об'єкти здатні виступати новими примітивами й підлягати наведеним вище прийомам обробляння. Основою структури даної моделі є дерево, що описує історію застосування булевих операцій. Відповідний приклад показано на рис. 3.12.

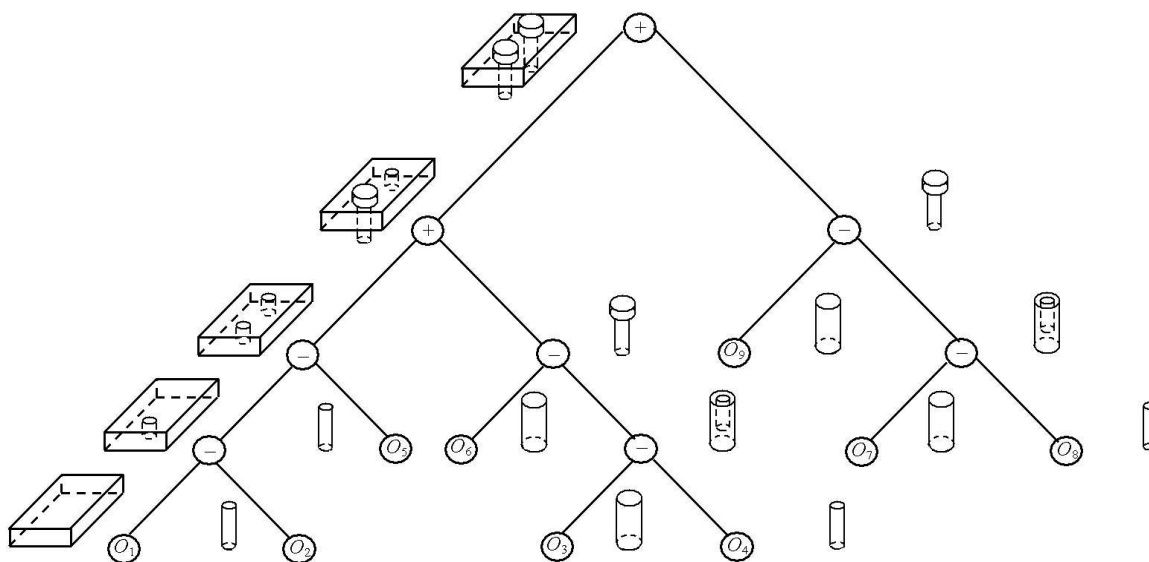


Рис. 3.12. Дерево побудов складанної одиниці

Головне призначення поданої ілюстрації полягає в обґрунтуванні доречності застосування для автоматизованої інтеграції етапів проектування

та виробництва об'єктів машинобудування геометричних побудов, які, за своєю суттю, наближені до реального виготовлення деталей і складаних одиниць.

Тому в дереві побудов йому відповідає булева операція різниці, а не об'єднання з двох частин потрібної форми. Звернемо увагу, що остання була б доречною для імітації, скажімо, склеювання, зварювання і т. п. виробничих процесів. На схемі рис. 3.12 застосовано лише два види параметричних примітивів – прямокутний паралелепіпед та прямий круговий циліндр. Необхідна геометрія виробу визначається конкретними величинами їх параметрів форми, розмірів та положення. У розглянутому дереві кінцевими вершинами є елементарні компоненти, проміжними – булеві операції, а з коренем пов'язується вся побудована фігура.

Проаналізована структура зручна для забезпечення параметричного моделювання об'єктів деякої типової конфігурації. У нашому випадку – це варіювання трьох вимірів паралелепіпеда, діаметрів його отворів і кріпильних деталей, їх висоти головок та загальної довжини тощо. Але зміна кількості елементів кріплення чи кардинальна модифікація форми останніх потребує редагування поданого дерева побудов або використання кількох його варіантів. Так на рис. 3.13 зображено різновид із шестигранними, замість циліндричних, головками.

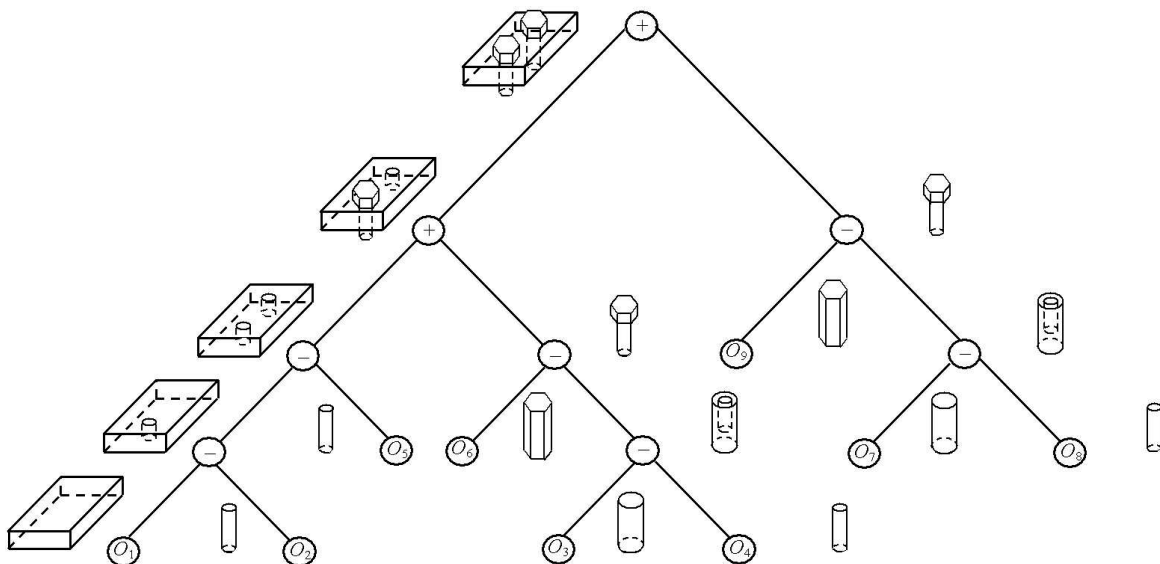


Рис. 3.13. Модифіковане дерево побудов

У цьому аспекті більш загальними та гнучкими є структурно-параметричні прийоми моделювання. Відмітимо, що основна їх ідея полягає

в наданні структурно-параметричних властивостей як усій відтворюваній системі, так й окремим її елементам. Для поданого прикладу це стосується забезпечення можливості формування геометричною моделлю кріпильного елемента, за потреби, з циліндричною або шестигранною головкою, реалізації випадку його виродження в порожню множину (останнє необхідно для ефективного варіювання кількістю кріплень) та застосування деякої керуючої надбудови, яка, згідно з наявними умовами, генерує конкретну конфігурацію виробу (в розглянутому випадку дерево рис. 3.12 чи рис. 3.13).

Існує певна аналогія запропонованої методології комп'ютерного формоутворення з груповими технологіями машинобудування, котрі вважаються прогресивнішими за одиничні й типові. Наведені коментарі щодо *C-rep* методів конструктивної геометрії обумовлені бажанням торкнутись у загальних положеннях щодо концепції структурно-параметричного геометричного моделювання також суто виробничих задач машинобудування. Зазначені факти стосуються й комп'ютерного моделювання тіл у вигляді *граничного подання (B-rep)*, який є базовим для даного наукового дослідження. Останній має певну спільність із *C-rep* способом. Це стосується, зокрема, використання операцій теорії множин для відтворення взаємодії геометричних фігур. Головною ж відмінністю *B-rep* способу від *C-rep* та *O-rep* є застосування для визначення тіл не тривимірних компонентів, а обмежуючих певні об'єми замкнених поверхонь. Звернемо увагу, що в цьому разі наведений підхід також підпадає під загальні засади структурно-параметричної методології геометричного моделювання.

Застосування комбінованих способів формування тіл (рис. 3.10) полягає в належному об'єднанні *B-rep*, *C-rep* та *O-rep* прийомів. Так, наприклад, *O-rep* може інтегруватися з *B-rep* і *C-rep* для зовнішнього подання геометричних моделей і т. д. Відносно інших методів побудови тіл, то відповідним прикладом слугує поділ останніх на довільні, не обов'язково однакові, частини згідно з потрібними властивостями, зокрема, в розрахунках на міцність за допомогою скінчених елементів.

Доцільність широкого застосування в теорії та на практиці головного прийому структурно-параметричного підходу щодо поділу досліджуваного об'єкта на певні компоненти підтверджується, зокрема, фактами стосовно неможливості або недоцільності, через суттєве ускладнення опрацьовуваної задачі, подавати довільні тривимірні фігури однією обмежуючою її поверхнею. Останнє засвідчує рис. 3.3, коли розглядати зображений на

ньому об'єкт як суцільне тіло. Множиною ж із двох торів, визначених на підставі виразу (3.3), дане питання розв'язується значно простіше.

Оскільки за ключовий метод структурно-параметричного моделювання тіл, основних об'єктів машинобудування, в даному дослідженні обрано *B-rep*, то проаналізуємо далі докладно його базові складові фігури – точки, лінії та поверхні (рис. 3.1).

### 3.1.1.3. Структурно-параметричні описи точок, ліній і поверхонь

З попередніх матеріалів видно, що одним із основних напрямків опрацьованого в роботі структурно-параметричного підходу до геометричного моделювання є не тільки варіантне комп'ютерне формоутворення різноманітних об'єктів, а і спрощення розв'язуваних задач за рахунок комбінування прийомів декомпозиції та синтезу.

Як наслідок застосування такої загальної стратегії, у випадку *B-rep* способу моделювання тіл використовується певна сукупність обмежених поверхонь, які називаються *гранями*. При цьому поділ вихідної або синтезованої фігури прагнуть зробити так, щоб реалізувати найбільш простий математичний опис кожного отриманого компонента та їх взаємозв'язків. Елементами граней є *ребра*, котрі являють собою відрізки ліній, і кінцеві точки останніх, тобто *вершини*. Питання дослідження взаємодії поміж собою перерахованих геометричних об'єктів викладаються в четвертому розділі монографії. Тут аналізується лише їх відповідність структурно-параметричному підходу до формоутворення.

**Точки.** Найбільш простою фігурою (рис. 3.1) є точка, параметри положення якої у тривимірному просторі визначаються багатьма способами, залежно від наявних систем координат.

Для довільної точки  $\mathbf{r}$  в останніх маємо:

– *декартовій прямокутній*

$$\mathbf{r}=(x, y, z), \quad (3.6)$$

де  $x, y, z$  – відстані;

– *циліндричній*

$$\mathbf{r}=(\rho, \varphi, z), \quad (3.7)$$

де  $\rho, z$  – відстані,

$\varphi$  – кут;

– сферичній

$$\mathbf{r}=(\rho, \varphi, \theta), \quad (3.8)$$

де  $\rho$  – відстань,

$\varphi, \theta$  – кути.

Існують формули перерахунку координат у різних системах, зокрема для залежностей (3.6) ... (3.8):

$$x = \rho \cos \varphi = \bar{\rho} \sin \theta \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi = \bar{\rho} \sin \theta \sin \varphi, \quad z = z = \bar{\rho} \cos \theta,$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \bar{\rho} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Оскільки для опрацювання об'єктів машинобудування найпопулярніші декартові прямокутні координати, то надалі застосовуватимемо саме їх.

**Загальний параметричний опис ліній і поверхонь.** Перш ніж перейти до докладного дослідження структурно-параметричних особливостей ліній та поверхонь у тривимірному просторі, викладемо кілька базових міркувань стосовно параметричного опису цих фігур.

Незважаючи на те, що довільний геометричний об'єкт можна розглядати як декотру множину точок, безпосереднє індивідуальне керування останніми, через їх значне число, навіть для сучасного комп'ютера, є задачею доволі непродуктивною. Раціональний вихід полягає у формуванні, на підставі спільних властивостей, певних груп зазначених примітивів й управління ними як цілим, що суттєво спрощує даний процес. Один із таких прийомів – це математичний опис положення точок у просторі. Для аналітичного визначення ліній і поверхонь використовуватимемо кінематичне формоутворення, що успішно подається, як показано нижче, за допомогою структурних та параметричних компонентів.

Наведемо загальний вид визначення ліній і поверхонь у параметричній формі для декартової прямокутної системи координат  $Oxy$  на площині та  $Oxyz$  у тривимірному просторі

$$x=x(u), \quad y=y(u); \quad (3.9)$$

$$x=x(u), \quad y=y(u), \quad z=z(u); \quad (3.10)$$

$$x=x(u, v), \quad y=y(u, v), \quad z=z(u, v), \quad (3.11)$$

де  $u, v$  – параметри.

Окреме вживання виразів (3.9) і (3.10) обумовлено широким застосуванням у машинобудуванні кривих другого порядку та інших плоских ліній. При цьому належні побудови спочатку виконуються на площині, яка потім, за допомогою параметрів положення, створені фігури розміщуються необхідним чином у тривимірному просторі. Такі прийоми використовуються і для моделювання елементів каркасу поверхонь (3.11).

Важлива перевага параметричного опису, крім зручного генерування зображень на графічних пристроях, полягає в однотипності подання у дво- і тривимірному просторі. Для цього слід лише потрібним чином відкоригувати кількість компонентів у залежностях (3.6) ... (3.11).

**Прямолінійні відрізки.** Доволі простим геометричним об'єктом, однак завдяки цьому й найбільш популярним на практиці, є прямолінійний відрізок, який визначається двома кінцевими своїми точками  $\mathbf{r}_0$  та  $\mathbf{r}_1$

$$\mathbf{r}(u) = (1-u)\mathbf{r}_0 + u\mathbf{r}_1, \quad (3.12)$$

де  $u \in [0, 1]$  – параметр.

З викладеного видно, що в якості  $\mathbf{r}_0$  та  $\mathbf{r}_1$  можуть застосовуватися точки дво- і тривимірному простору з параметрами положення згідно з виразами (3.6) ... (3.8). Формула (3.12) узагальнює співвідношення (3.6), бо містить уже не один, а два опорні структурні елементи, котрими виступають кінці відрізка – точки  $\mathbf{r}_0$  та  $\mathbf{r}_1$ . Параметричні компоненти при останніх є відповідними ваговими функціями.

Якщо залежність (3.12) переписати у вигляді

$$\mathbf{r}(u) = \mathbf{r}_0 - u\mathbf{r}_0 + u\mathbf{r}_1,$$

то стає очевидним, що збіг кінців відрізка, які керуються параметрами формули (3.6), перетворює його в точку, тобто одновимірний геометричний об'єкт вироджується в нульвимірний.

**Дуги кривих другого порядку.** Доволі широко для формоутворення в машинобудівних САПР застосовуються дуги кривих другого порядку (гіпербол, парабол, еліпсів і кіл), які визначаються своїми кінцевими точками й дотичними в них. Цей спосіб зручний для побудови складених, тобто з кількох частин, обводів і поверхонь першого порядку гладкості. За наявності параметричного їх опису останні є структурно-параметричними геометричними об'єктами. Обґрунтуємо це наступними викладками.

Розглянемо відношення двох квадратичних поліномів

$$\mathbf{r}(u) = \frac{w_0(1-u)^2 \mathbf{r}_0 + w_1 2u(1-u) \mathbf{r}_1 + w_2 u^2 \mathbf{r}_2}{w_0(1-u)^2 + w_1 2u(1-u) + w_2 u^2}, \quad (3.13)$$

де  $u \in [0, 1]$  – параметр;

$w_0, w_1, w_2$  – сталі;

$\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$  – опорні точки.

Залежність (3.13) перепишемо наступним чином

$$\mathbf{r}(u) = \frac{w_0(1-u)^2}{w} \mathbf{r}_0 + \frac{w_1 2u(1-u)}{w} \mathbf{r}_1 + \frac{w_2 u^2}{w} \mathbf{r}_2, \quad (3.14)$$

де  $w = w_0(1-u)^2 + w_1 2u(1-u) + w_2 u^2$ .

З формальної точки зору вираз (3.14) можна трактувати як узагальнення визначення (3.12), оскільки маємо вже не два, а три опорні структурні елементи ( $\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ ) з відповідними ваговими параметричними функціями при них.

У літературі, зокрема праці [129], обґрунтовується подання залежності (3.13), тобто і (3.14), еліпсів, парабол та гіпербол, див. рис. 3.14. При цьому застосовуються величини  $w_0=w_2=1, w_1 \geq 0$ .

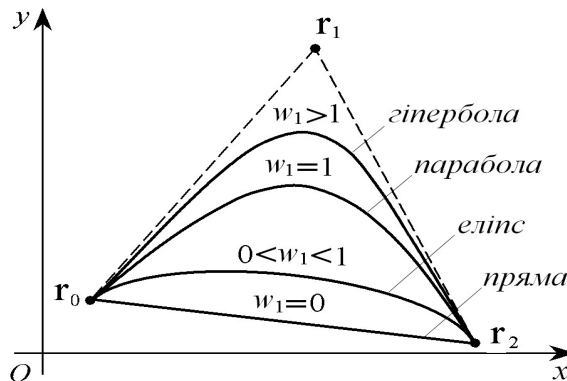


Рис. 3.14. Параметричне відтворення дуг кривих другого порядку

У наведеній публікації показано, що за допомогою формули (3.13), яка аналогічна (3.14), у випадку значень вагових коефіцієнтів  $w_0=w_2=1$  і  $w_1=\cos(\theta/2)$  маємо дугу кола з кутовою величиною  $0 < \theta < \pi$ .

Доведемо узагальнюючий характер, по відношенню до виразу (3.12), визначення (3.14).

Підстановка в останню величин  $w_0=w_2=1$  і  $w_1=0$  дає

$$\mathbf{r}(u) = \frac{(1-u)^2 \mathbf{r}_0 + u^2 \mathbf{r}_2}{(1-u)^2 + u^2}. \quad (3.15)$$

Застосуванням у формулі (3.15) заміни

$$t = \frac{u^2}{(1-u)^2}, \quad (3.16)$$

маємо

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \frac{t}{t+1}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_0). \quad (3.17)$$

Для оцінки геометричного еквівалента залежності (3.17) спочатку виконаємо дослідження параметра  $t$  згідно з виразом (3.16).

Похідна цього виразу

$$t' = \frac{2u}{(1-u)^3}$$

говорить про те, що  $t$  строго зростаюча функція, яка для величин  $u \in [0, 1]$  приймає значення  $t \in [0, \infty)$ .

Оскільки за таких умов нижня та верхня границі  $t/(t+1)$  сягають відповідно нуля та одиниці, то визначення (3.17) можна замінити на

$$\mathbf{r}(u) = (1-u)\mathbf{r}_0 + u\mathbf{r}_2, \quad (3.18)$$

де  $u \in [0, 1]$  – параметр.

Таким чином, формула (3.18) еквівалентна залежності (3.12) щодо подання прямолінійного відрізка, коли рахувати в першому випадку його кінцями точки  $\mathbf{r}_0$  і  $\mathbf{r}_1$ , а у другому –  $\mathbf{r}_0$  і  $\mathbf{r}_2$ .

Що і треба було довести.

Доволі розповсюджені в машинобудуванні криві Безьє, див. видання [43, 87, 129]. Покажемо поширення залежності (3.14) і на дані лінії другого порядку (рис. 3.15). Це робиться підстановкою в останній вираз  $w_0=w_1=w_2=1$ .

Тоді одержуємо

$$\mathbf{r}(u) = (1-u)^2 \mathbf{r}_0 + 2u(1-u)\mathbf{r}_1 + u^2 \mathbf{r}_2, \quad (3.19)$$

Що і треба було довести.

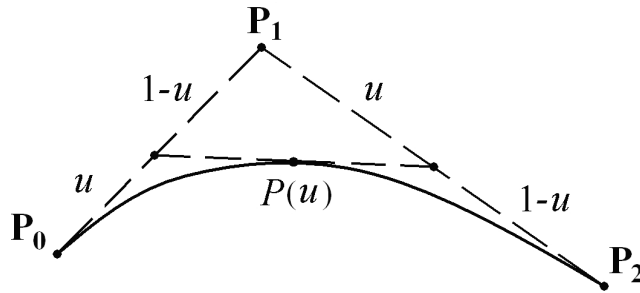


Рис. 3.15. Крива Безьє другого порядку

На рис. 3.15 вершинам  $P_0, P_1, P_2$  характеристичного трикутника кривої Безьє у формулі (3.19) відповідають опорні точки  $r_0, r_1, r_2$ .

Перш ніж переходити до більш складних кривих і поверхонь, проілюструємо на прикладі фігури (3.14) її комбінаторні можливості. Коли розглядати цей геометричний об'єкт із позицій структурно-параметричної методології, з метою узагальненого його визначення в комбінаторно-варіаційному вигляді, тобто за допомогою КБВГМ, додатково до показаної на рис. 3.14 ВГМ потрібно застосовувати й комбінаторні компоненти, які представлені КБГМ, що подається нижче.

Структурні елементи фігури (3.14) визначаються трьома опорними точками  $r_0, r_1, r_2$ . Для їх аналізу застосуємо термін розміщення з  $n$  елементів по  $m$  ( $m \leq n$ ;  $m, n \in \mathbb{Z}$ ;  $m, n \geq 0$ ) комбінаторики

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}. \quad (3.20)$$

У нас  $n=3$ . Тоді, згідно з виразом (3.20), для наступних випадків маємо:  
 $-A_3^0 = 1$ , порожню множину, яка відповідає зникненню даного об'єкта;  
 $-A_3^1 = 3$ , тобто  $(r_0), (r_1), (r_2)$ , що відтворює можливість виродження досліджуваної фігури в кожену з трьох перерахованих точок. Обґрунтування цього факту базується на наведених викладках модифікації об'єктів (3.14) у (3.12) і далі у (3.6);

$-A_3^2 = 6$ , тобто  $((r_0, r_1), (r_1, r_0)), ((r_1, r_2), (r_2, r_1)), ((r_2, r_0), (r_0, r_2))$ . Аналогічно попереднім міркуванням отримуємо один із трьох зазначених прямолінійних відрізків, які, за потреби, відрізняються ще і своїми напрямками;

$-A_3^3 = 6$ , тобто  $((r_0, r_1, r_2), (r_2, r_1, r_0)), ((r_1, r_2, r_0), (r_0, r_2, r_1)), ((r_2, r_0, r_1), (r_1, r_0, r_2))$ . У той самий спосіб одержуємо одну з трьох дуг, що мають неоднакові кінцеві точки й, за необхідності, різняться напрямками.

Приклади для останнього випадку показано на рис. 3.16.

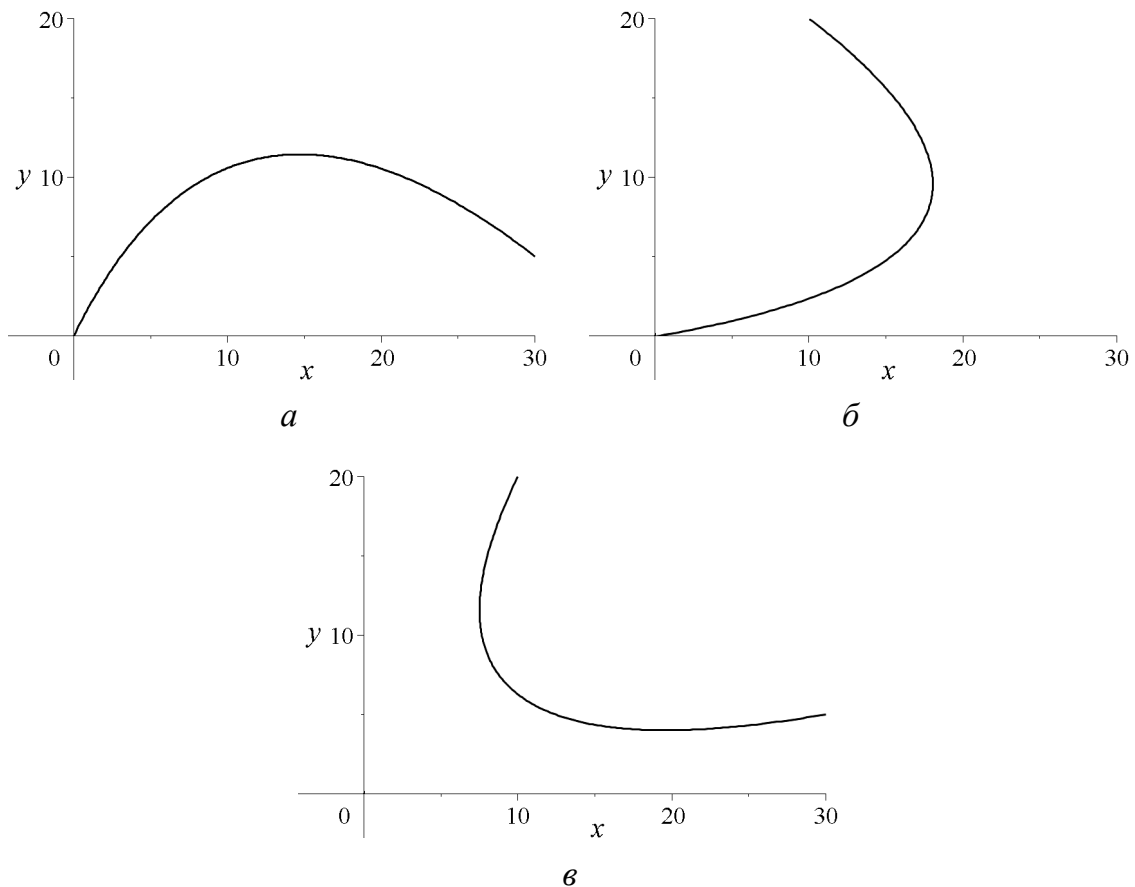


Рис. 3.16. Комбінаторні варіанти дуг виразу (3.14)

У даному разі за вихідні дані взято  $w_0=w_1=w_2=1$  та наступні координати точок у системі  $Oxy$ :  $\mathbf{r}_0=(0, 0)$ ,  $\mathbf{r}_1=(10, 20)$ ,  $\mathbf{r}_2=(30, 5)$ . У додатках наведено командний файл для системи Maple з метою автоматизованої реалізації розглянутих варіантних побудов, що відтворюють комп'ютерну модель комбінаторно-варіаційного геометричного об'єкта (3.14).

**Застосування параметрів положення, розмірів і форми у структурно-параметричному моделюванні ліній та поверхонь.** Оскільки під час формоутворення об'єктів машинобудування досить широко розповсюдженими є прийоми змінювання у тривимірному просторі положення, розмірів та форми опрацьовуваних фігур, то розглянемо розв'язування цих задач як складових компонентів структурно-параметричного геометричного моделювання ліній і поверхонь.

Для довільної точки досліджуваної фігури  $\mathbf{r}(x, y, z)$  та її образу  $\mathbf{r}'(x', y', z')$  після виконаних паралельного перенесення  $T(Tx, Ty, Tz)$  у системі координат  $Oxuz$  та трьох обертань  $R(\alpha)$ ,  $R(\beta)$  і  $R(\gamma)$  відповідно навколо осей  $x$ ,  $y$  і  $z$ , де

$\alpha, \beta, \gamma$  – необхідні кути, з використанням матриць однорідних координат, маємо

$$\mathbf{r} = [x \ y \ z \ 1], \quad \mathbf{r}' = [x' \ y' \ z' \ 1]; \quad (3.21)$$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ T_x & T_y & T_z & 1 \end{bmatrix} = T(T_x, T_y, T_z); \quad (3.22)$$

$$R(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad (3.23)$$

$$R(\beta) = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & -\sin \beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin \beta & 0 & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad (3.24)$$

$$R(\gamma) = \begin{bmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & 0 & 0 \\ -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.25)$$

Формули (3.23) ... (3.25) придатні для обчислення обертання з центром, який збігається з початком системи координат  $Oxyz$ . У тривимірному просторі потрібне обертання обчислюється шляхом застосування добутків наведених виразів. Однак через те, що на значення цієї операції впливає порядок її компонентів, то, як правило, першим виконується поворот для осі  $x$ , далі –  $y$ , потім –  $z$ .

Тоді

$$R = R(\alpha) \cdot R(\beta) \cdot R(\gamma) = R(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{bmatrix} \cos \beta \cos \gamma & \cos \beta \sin \gamma & -\sin \beta & 0 \\ \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma - \cos \alpha \sin \gamma & \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma + \cos \alpha \cos \gamma & \sin \alpha \cos \beta & 0 \\ \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma + \sin \alpha \sin \gamma & \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma - \sin \alpha \cos \gamma & \cos \alpha \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.26)$$

Потрібне обертання навколо довільної точки  $O_i(x_i, y_i, z_i)$ , з використанням формул (3.22) і (3.26), здійснюється композицією перетворень у вигляді матриці

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -x_i & -y_i & -z_i & 1 \end{bmatrix} \cdot R(\alpha, \beta, \gamma) \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ x_i & y_i & z_i & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.27)$$

Досить часто розміри отриманого зображення необхідно збільшити або зменшити, скажімо, в  $S_x$ ,  $S_y$ ,  $S_z$  раз відповідно вздовж осей  $x$ ,  $y$ ,  $z$ .

Для цього призначена матриця змінювання відстаней (масштабу)

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -x_i & -y_i & -z_i & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ x_i & y_i & z_i & 1 \end{bmatrix} = S(S_x, S_y, S_z). \quad (3.28)$$

Зазначимо, що в результаті застосування виразу (3.28) подібні фігури можна отримати лише у випадку  $S_x=S_y=S_z$ .

На підставі залежностей (3.21), (3.22), (3.27) і (3.28) модифікації положення довільної точки досліджуваної фігури, наприклад (3.14), як і будь-якої іншої, виконуються наступним чином

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -x_i & -y_i & -z_i & 1 \end{bmatrix} \cdot R \cdot S \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ x_i & y_i & z_i & 1 \end{bmatrix} \cdot T.$$

З позицій структурно-параметричного підходу важливі питання варіювання положення, розмірів та форми різноманітних об'єктів. Ці задачі мають вирішальне значення для отримання прогнозованих результатів геометричного моделювання. Нехай для характерних точок деяких фігур (наприклад, центра кола, сфери або кулі; вершин трикутників, чотирикутників, призм тощо) існують певні аналітичні залежності їх радіусів-векторів у системах координат  $Oxy$  та  $Oxyz$

$$\mathbf{r}_i = \begin{cases} x = f_{i_x}(p_{i_1 \dots i_k}), \\ y = f_{i_y}(p_{i_1 \dots i_k}); \end{cases} \quad \mathbf{r}_i = \begin{cases} x = f_{i_x}(p_{i_1 \dots i_k}), \\ y = f_{i_y}(p_{i_1 \dots i_k}), \\ z = f_{i_z}(p_{i_1 \dots i_k}). \end{cases}$$

де  $i, k \in \mathbb{N}$ ;

$p_{i_k}$  – параметри визначення фігур.

У загальному випадку варіювання параметрів  $p_{i_k}$  призводить до змінювання положення, розмірів та форми опрацьовуваних об'єктів. Для забезпечення потрібних властивостей необхідно:

– встановити множину допустимих значень варіювання параметрів  $p_{ik}$  фігур, що моделюються;

– описати необхідні взаємозв'язки між цими параметрами.

Так, наприклад, для змінювання положення прямокутника у площині достатньо визначити проміжки для координат однієї з його вершин та кута повороту пов'язаної з нею сторони. Варіювання площею даної фігури можливе двома шляхами – зі збереженням співвідношення між сторонами та ні. У другому випадку в заданих проміжках довжини сторін прямокутника змінюються довільно, а в першому – з додержанням потрібного їх співвідношення, тобто забезпечення подібності модифікованих фігур.

**Узагальнений порядок формування комбінаторно-варіаційних геометричних моделей і об'єктів.** Розглянута побудова комбінаторно-варіаційної фігури на прикладі дуги кривої другого порядку, яку подано у вигляді (3.14), дозволяє описати загальний порядок створення відповідних геометричних моделей і об'єктів. Покажемо також, що варіантну упорядковану послідовність її структурних елементів (у даному разі опорних точок  $\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ ) можна розглядати як додатковий параметр формоутворення.

Позначимо через  $f_0, f_1, f_2$  вагові функції опорних точок  $\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$  у виразі (3.14)

$$f_0(u) = \frac{w_0(1-u)^2}{w}, \quad f_1(u) = \frac{w_1 2u(1-u)}{w}, \quad f_2(u) = \frac{w_2 u^2}{w}. \quad (3.29)$$

Тоді в нашому випадку значення комбінаторного параметра утворюють множину

$$P_{\text{КБ}} = \{ (\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_0, \mathbf{r}_0), (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1), \dots, (\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1), \\ (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_0), \dots, (\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_0) \} = \{ P_{\text{КБ}i} \}_1^{Np_{\text{КБ}}}, \quad (3.30)$$

де  $Np_{\text{КБ}} = \bar{A}_3^3 = 3^3 = 27$  – кількість розміщень із повтореннями по три з трьох елементів;

$$P_{\text{КБ}i} = (p_{\text{КБ}j})_0^2;$$

$$p_{\text{КБ}j} \in (\mathbf{r}_k)_0^2.$$

Деякі геометричні результати застосування значень (3.30) для формули (3.14) наведено на рис. 3.16 (різні дуги кривих другого порядку) та в

матеріалах додатків, що присвячені автоматизованій побудові комбінаторно-варіаційних геометричних об'єктів у середовищі математичного програмного пакета Maple.

Проаналізована КБВГМ дозволяє гнучко створювати різноманітні фігури, якими можуть бути дуги кривих другого порядку, відрізки прямих ліній, точки та порожня множина. Розглянута модель є узагальненою формою визначення наведених фігур. Таким чином, узагальнений порядок побудови КБВГМ, на основі наявних параметричних описів їх компонентів, полягає у:

- виокремленні у вихідних ВГМ, у дослідженому випадку параметричній залежності (3.13), структурних елементів, тобто формуванні відповідної КБГМ;

- інтеграції КБГМ та ВГМ для отримання узагальненого математичного опису у вигляді відповідної КБВГМ.

Створювані в такий спосіб комбінаторно-варіаційні моделі та геометричні об'єкти потужніші і гнучкіші за своїх параметричних попередників.

**Приклади практичного застосування КБВГМ.** Перш ніж обґрунтувати конкретними прикладами з практики доцільність використання в галузі машинобудування КБВГМ, варто відмітити, що навіть для невеликого числа складових елементів певного технічного об'єкта, множина його проектних структурних варіантів здатна бути доволі значною.

Тому, враховуючи прикладний характер даних досліджень, основна увага надалі приділяється не аналізу всіх можливих різновидів деякого предмета чи процесу, що для складних технічних систем машинобудування є майже нереальним, а створенню методів, прийомів та алгоритмів, які дозволяють одночасно обробляти й оптимізувати якомога більше найперспективніших проектних структурно-параметричних варіантів.

Наведемо кілька ілюстрацій з інженерної діяльності.

*Приклад 3.4.* Нехай маємо множину чисел  $\{r_1, r_2, r_3, r_4\}$ .

Коли останні трактувати як радіуси кіл, що умовно зображують циліндричні колеса деякої передачі, зокрема, зубчастої, то можемо отримати кілька варіантів відповідної схеми, див. рис. 3.17.

Основна перевага використання комбінаторної фігури, порівняно з трьома окремими варіантами наведеної схеми, полягає в забезпеченні

одночасного опрацювання всіх різновидів, тобто внесення потрібних змін геометрії, виконання оптимізаційних розрахунків тощо.

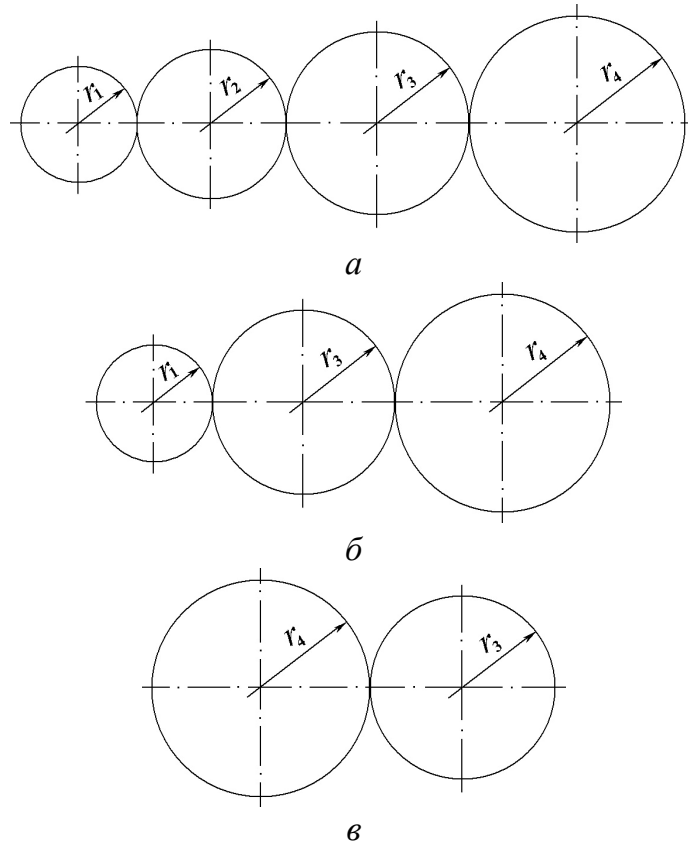


Рис. 3.17. Досліджувані різновиди зубчастої передачі:  
а, б, в – відповідно з чотирьох, трьох та двох коліс

*Приклад 3.5.* Досить схожий до попереднього прикладу випадок подається цією ж множиною радіусів, проте вже для відображення варіантів розташування силових елементів роликівих згинальних верстатів за трьох- та чотирьохвалковою схемами. Однак у цьому разі, на відміну від попереднього, осі прямих кругових циліндрів у просторі вже не лежать в одній площині, а визначаються певними значеннями своїх параметрів положення.

*Приклад 3.6.* Реальним застосуванням комбінаторного параметра, значення якого відтворюють упорядковані послідовності структурних елементів декотрого варіантного геометричного об'єкта  $\epsilon$ , зокрема, різноманітні множини заготованок, що виготовляються з певного типорозміру матеріалу методами раціонального розкрою. Ця тематика, яка безпосередньо відноситься до питань упровадження методології структурно-параметричного формоутворення у виробництво, подається в п'ятому розділі монографії.

**Загальна класифікація ліній, застосовуваних у машинобудівних САПР.** На даний момент, після проведення аналізу відрізків прямих та дуг кривих другого порядку, наведемо класифікацію використовуваних у сучасних машинобудівних САПР ліній (рис. 3.18), серед яких найбільш розповсюдженими є *алгебраїчні*, що визначаються поліномами різних порядків, та *інші*. До останніх відносяться *трансцендентні*, які подаються логарифмічними, тригонометричними і т. п. функціональними залежностями.

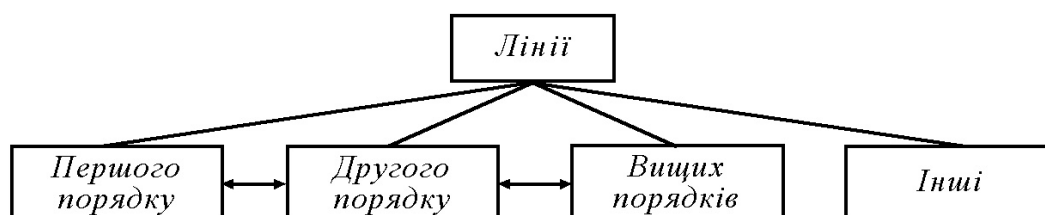


Рис. 3.18. Класифікація ліній, застосовуваних у машинобудівних САПР

На рис. 3.18 стрілками показано можливість узагальнення аналітичного опису ліній меншого порядку лініями вищих порядків, завдяки чому останні здатні відтворювати відповідні фігури нижчих рівнів. На даний момент нами вже проаналізовано зазначені властивості для прямолінійних відрізків і дуг кривих другого порядку, а також запропоновано подання цих фігур, на засадах структурно-параметричного підходу, у вигляді КБВГМ та відповідних об'єктів.

**Неоднорідні раціональні В-сплайни як структурно-параметричні геометричні об'єкти.** Узагальненням для прямих і кривих другого порядку виступають неоднорідні раціональні В-сплайни (Non-Uniform Rational B-Splines – NURBS) [129]

$$\mathbf{r}(u) = \frac{\sum_{i=0}^n N_{i,k}(u)w_i\mathbf{r}_i}{\sum_{i=0}^n N_{i,k}(u)w_i}, \quad (3.31)$$

де  $u$  – параметр;

$\mathbf{r}_i$  – радіуси-вектори опорних точок,  $(n+1) \in \mathbb{N}$  – їх кількість;

$w_i$  – вагові коефіцієнти (*weights*), що обираються, як правило, невід'ємними для виключення випадку нульового знаменника у виразі (3.31) і призначені для підвищення ефективності керування формоутворенням, оскільки збільшення  $w_i$  притягує створювану криву до відповідної опорної точки;

$B(u) = \sum_{i=0}^n N_{i,k}(u) \mathbf{r}_i$  – В-сплайн, для якого параметричні залежності  $N_{i,k}(u)$

розраховуються рекурсивно згідно з формулами Кокса – де Бура [129]

$$N_{i,1}(u) = \begin{cases} 1, & u \in [t_i, t_{i+1}] \\ 0, & u \notin [t_i, t_{i+1}] \end{cases}; \quad N_{i,k}(u) = \frac{(u-t_i)}{t_{i+k-1}-t_i} N_{i,k-1}(u) + \frac{(t_{i+k}-u)}{t_{i+k}-t_{i+1}} N_{i+1,k-1}(u), \quad (3.32)$$

$$B(u) = \sum_{i=0}^n N_{i,k}(u) \mathbf{r}_i, \quad u \in [t_{k-1}, t_{n+1}], \quad (3.33)$$

де  $(t_0, \dots, t_{n+k})$  – вектор вузлів параметра, для яких  $t_i \leq t_{i+1}$ ;

$2 \leq k \leq n+1$  – порядок сплайна (приймається на одиницю більшим за його степінь).

У другому рівнянні (3.32) вважається, що  $0/0=0$ . Залежність (3.33) є поліномом степеня  $k-1$  на кожному проміжку  $t \in [t_i, t_{i+1}]$ . Максимальний порядок В-сплайна збігається з кількістю його опорних точок. Для всіх допустимих значень параметра  $u$  вагові функції додатні або дорівнюють нулю, тобто  $N_{i,k}(u) \geq 0$ , а також

$$\sum_{i=0}^n N_{i,k}(u) = 1. \quad (3.34)$$

Згідно з формулами (3.33) і (3.34) лінія, яка розглядається, повністю лежить усередині опуклої оболонки радіусів-векторів  $\mathbf{r}_i$ , де  $i=0 \dots n$ .

Аналіз наведених вище залежностей показує, що форму ділянки В-сплайна з величинами параметра  $[t_i, t_{i+1}]$  визначають ті опорні точки, вагові функції яких (степеня  $k-1$ ) на даному відрізку відмінні від нуля, тобто  $N_{i-(k-1),k} \dots N_{i,k}$ . Іншими словами, на зазначену частину кривої впливають лише  $k$  опорних точок  $(\mathbf{r}_{i-(k-1)} \dots \mathbf{r}_i)$ .

З позицій структурно-параметричного підходу до складу NURBS входить кортеж його опорних точок  $(\mathbf{r}_i)_0^n$ , які утворюють структурні елементи даної фігури, та вагові функції при них (3.31), що є його параметричними елементами. Отже, для NURBS-кривої можна застосувати наведений вище узагальнений порядок формування КБВГМ на основі виокремлення структурних та параметричних компонентів і подання їх відповідно за допомогою певних КБГМ та ВГМ.

Крім опорних точок і вагових функцій геометрія В-сплайна залежить також від способу подання вузлового вектора параметра з  $n+k+1$

компонентами, які повинні утворювати зростаючу послідовність дійсних чисел. Остання може бути рівномірною, коли вузлові значення розташовуються на однаковій відстані, або нерівномірною у протилежному випадку. Згідно з цим В-сплайну присвоюється належна назва. У відкритого вектора параметрів кількість однакових вузлових значень на кінцях дорівнює порядку В-сплайна. Таке повторення призводить до того, що дана лінія, подібно до кривої Безьє, обов'язково проходить через першу та останню опорні точки. У зв'язку з цим у машинобудівних САПР більш поширені відкриті В-сплайни. Стандартний вузловий вектор такого геометричного об'єкта  $k$ -го степеня з  $n+1$  опорною точкою має:

- довжину в  $n+k+1$  елементів, що позначаються як  $t_0 \dots t_{n+k}$ ;
- $k$  перших нульових вузлів  $t_0 \dots t_{k-1}$ ;
- зростаючі з одиничним кроком від 1 до  $n-k+1$  величини  $t_k \dots t_n$ ;
- $k$  останніх вузлів  $t_{n+1} \dots t_{n+k}$ , які дорівнюють  $n-k+2$ .

Відповідно до структурно-параметричного підходу, під час моделювання NURBS доцільно застосовувати для значень його вектора вузлів подібні до (3.30) залежності, тобто комбінаторний параметр. Отже, після подання узагальнюючого характеру по відношенню до виразів (3.13) і (3.14) формули (3.31), можна поширити й на останню розглянуті вище прийоми комбінаторного моделювання (3.29) і (3.30), а саме

$$\mathbf{r}(u) = \frac{\sum_{i=0}^n N_{i,k}(u)w_i \mathbf{r}_i}{\sum_{i=0}^n N_{i,k}(u)w_i} = f_i(u)\mathbf{r}_i, \quad (3.35)$$

$$P_{\text{КБ}} = \{P_{\text{КБ}i}\}_1^{Np_{\text{КБ}}}, \quad P_{\text{КБ}i} = (p_{\text{КБ}j})_0^n, \quad (3.36)$$

де  $f_i(u)$  – вагові функції опорних точок  $\mathbf{r}_i$ ;

$P_{\text{КБ}}$  – множина значень комбінаторного параметра;

$Np_{\text{КБ}} = \bar{A}_{n+1}^{n+1} = (n+1)^{n+1}$  – число розміщень із повтореннями по  $n+1$  з  $n+1$  елементів;

$$p_{\text{КБ}j} \in (\mathbf{r}_i)_0^n.$$

У такий спосіб на базі вихідної ВГМ у вигляді залежності (3.31), із використанням структурних елементів виразів (3.35) та (3.36), утворюється узагальнююча КБВГМ для NURBS-кривої.

Сформовані розглянутим способом комбінаторно-варіаційні моделі та геометричні об'єкти є значно потужнішими та гнучкішими за своїх параметричних попередників, оскільки подаються в більш загальній математичній формі.

*Приклад 3.7.* Визначимо параметричне рівняння В-сплайна третього порядку з опорними точками  $\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ .

Згідно з умовою та формулою (3.33)  $k=3, n=2$ .

Тоді стандартний вузловий вектор В-сплайна записується як

$$(t_i)_0^{n+k} = (0, 0, 0, 1, 1, 1).$$

На підставі співвідношень (3.32) одержуємо

$$N_{0,1}(u) = \begin{cases} 1, & u \in [t_0, t_1] \\ 0, & u \notin [t_0, t_1] \end{cases}; \quad N_{1,1}(u) = \begin{cases} 1, & u \in [t_1, t_2] \\ 0, & u \notin [t_1, t_2] \end{cases}; \quad N_{2,1}(u) = \begin{cases} 1, & u \in [t_2, t_3] \\ 0, & u \notin [t_2, t_3] \end{cases};$$

$$N_{3,1}(u) = \begin{cases} 1, & u \in [t_3, t_4] \\ 0, & u \notin [t_3, t_4] \end{cases}; \quad N_{4,1}(u) = \begin{cases} 1, & u \in [t_4, t_5] \\ 0, & u \notin [t_4, t_5] \end{cases}. \quad (3.37)$$

Для наявних значень параметра  $u \in [0, 1]$ , відповідно до виразів (3.37), дотримуючись вимог формули (3.34), приймаємо в якості вагової функції першого порядку  $N_{2,1}(u)$ . Далі на основі залежностей (3.32) розраховуємо вагові функції другого порядку

$$N_{1,2}(u) = \frac{u-t_1}{t_2-t_1} N_{1,1}(u) + \frac{t_3-u}{t_3-t_2} N_{2,1}(u) = (1-u)N_{2,1}(u) = 1-u;$$

$$N_{2,2}(u) = \frac{u-t_2}{t_3-t_2} N_{2,1}(u) + \frac{t_4-u}{t_4-t_3} N_{3,1}(u) = uN_{2,1}(u) = u$$

та третього порядку

$$N_{0,3}(u) = \frac{u-t_0}{t_2-t_0} N_{0,2}(u) + \frac{t_3-u}{t_3-t_1} N_{1,2}(u) = (1-u)N_{1,2}(u) = (1-u)^2;$$

$$N_{1,3}(u) = \frac{u-t_1}{t_3-t_1} N_{1,2}(u) + \frac{t_4-u}{t_4-t_2} N_{2,2}(u) = uN_{1,2}(u) + (1-u)N_{2,2}(u) = 2u(1-u);$$

$$N_{2,3}(u) = \frac{u-t_2}{t_4-t_2} N_{2,2}(u) + \frac{t_5-u}{t_5-t_3} N_{3,2}(u) = uN_{2,2}(u) = u^2.$$

Отже, згідно з виразом (3.33), рівняння В-сплайна, що розглядається, має вигляд

$$\mathbf{r}(u) = (1-u)^2 \mathbf{r}_0 + 2u(1-u) \mathbf{r}_1 + u^2 \mathbf{r}_2, \quad (3.38)$$

де  $u \in [0, 1]$ .

Останнє співвідношення відповідає квадратичній кривій Безьє (3.19).

*Приклад 3.8.* З урахуванням формул (3.31) і (3.33) залежність (3.38) перепишемо наступним чином

$$\mathbf{r}(u) = \frac{w_0(1-u)^2 \mathbf{r}_0 + w_1 2u(1-u) \mathbf{r}_1 + w_2 u^2 \mathbf{r}_2}{w_0(1-u)^2 + w_1 2u(1-u) + w_2 u^2}$$

що повністю збігається з формулою (3.13), яка описує дуги кривих другого порядку та відрізок прямої. Отже, нами обґрунтовано узагальнюючий характер по відношенню до залежностей (3.13) і (3.14) виразу (3.31) та можливість поширення і для останнього запропонованих прийомів комбінаторно-варіаційного геометричного моделювання.

*Приклад 3.9.* Проаналізуємо ще випадок, коли число ланок опорної ламаної більше за степінь досліджуваного В-сплайна.

При цьому головне завдання полягає в поданні структурно-параметричного характеру побудованої фігури. Нехай треба записати поліноміальне рівняння відкритого рівномірного В-сплайна третього порядку з опорними точками  $\mathbf{r}_0 \dots \mathbf{r}_5$ . Відповідно до залежності (3.33) маємо  $k=3, n=5$ .

Далі формуємо стандартний вузловий вектор

$$(t_i)_0^{n+k} = (0, 0, 0, 1, 2, 3, 4, 4, 4).$$

Параметр  $u$  змінюється у проміжку  $[0, 4]$ . Використовуючи співвідношення (3.32), з урахуванням виразу (3.34), одержуємо

$$N_{2,1}(u) = \begin{cases} 1, & u \in [0, 1) \\ 0, & u \notin [0, 1) \end{cases}, \quad N_{3,1}(u) = \begin{cases} 1, & u \in [1, 2) \\ 0, & u \notin [1, 2) \end{cases}, \quad N_{4,1}(u) = \begin{cases} 1, & u \in [2, 3) \\ 0, & u \notin [2, 3) \end{cases}, \quad N_{5,1}(u) = \begin{cases} 1, & u \in [3, 4] \\ 0, & u \notin [3, 4] \end{cases}. \quad (3.39)$$

Згідно з рекурентною формулою (3.32) обчислюємо вагові функції другого та третього порядку й на основі залежності (3.33) визначаємо аналітичне подання потрібного В-сплайна

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}(u) = & (1-u)^2 N_{2,1}(u) \mathbf{r}_0 + \left[ [u(1-u) + \frac{(2-u)u}{2}] N_{2,1}(u) + \frac{(2-u)^2}{2} N_{3,1}(u) \right] \mathbf{r}_1 + \\
& + \left[ \frac{u^2}{2} N_{2,1}(u) + \frac{u(2-u) + (3-u)(u-1)}{2} N_{3,1}(u) + \frac{(3-u)^2}{2} N_{4,1}(u) \right] \mathbf{r}_2 + \\
& + \left[ \frac{(u-1)^2}{2} N_{3,1}(u) + \frac{(u-1)(3-u) + (4-u)(u-2)}{2} N_{4,1}(u) + \frac{(4-u)^2}{2} N_{5,1}(u) \right] \mathbf{r}_3 + \\
& + \left[ \frac{(u-2)^2}{2} N_{4,1}(u) + \left[ \frac{(u-2)(4-u)}{2} + (4-u)(u-3) \right] N_{5,1}(u) \right] \mathbf{r}_4 + (u-3)^2 N_{5,1} \mathbf{r}_5, \quad (3.40)
\end{aligned}$$

де  $u \in [0, 4]$ .

Запишемо вираз (3.40) як сукупність чотирьох рівнянь згідно з проміжками змінювання параметра  $u$  у формулах (3.39)

$$\mathbf{r}(u) = \begin{cases} \mathbf{r}_1(u) = (1-u)^2 \mathbf{r}_0 + [u(1-u) + \frac{(2-u)u}{2}] \mathbf{r}_1 + \frac{u^2}{2} \mathbf{r}_2, & u \in [0, 1); \\ \mathbf{r}_2(u) = \frac{(2-u)^2}{2} \mathbf{r}_1 + \frac{u(2-u) + (3-u)(u-1)}{2} \mathbf{r}_2 + \frac{(u-1)^2}{2} \mathbf{r}_3, & u \in [1, 2); \\ \mathbf{r}_3(u) = \frac{(3-u)^2}{2} \mathbf{r}_2 + \frac{(u-1)(3-u) + (4-u)(u-2)}{2} \mathbf{r}_3 + \frac{(u-2)^2}{2} \mathbf{r}_4, & u \in [2, 3); \\ \mathbf{r}_4(u) = \frac{(4-u)^2}{2} \mathbf{r}_3 + \left[ \frac{(u-2)(4-u)}{2} + (4-u)(u-3) \right] \mathbf{r}_4 + (u-3)^2 \mathbf{r}_5, & u \in [3, 4]. \end{cases} \quad (3.41)$$

Виконаємо аналіз виразу (3.41), застосувавши для наочності рис. 3.19, на якому зображено один із можливих варіантів досліджуваної кривої, та наведемо деякі узагальнюючі, стосовно структурно-параметричного аспекту, міркування.

В-сплайн може складатися як з однієї (3.38), так і кількох, наприклад чотирьох (3.41), частин, що поєднуються у вузлах із неперервністю  $k-2$ , де  $k$  – порядок ( $k-1$  степінь) цієї лінії. Останній факт підтверджує, зокрема, диференціювання залежностей (3.41). На довільний компонент  $\mathbf{r}_i(u)$  впливає  $k$  опорних точок, причому кожна з останніх діє не більш ніж на  $k$  сусідніх ділянок.

З позицій структурно-параметричного підходу геометрію В-сплайнів можна змінювати шляхом варіювання вузлових векторів параметра, степеня базисних функцій, положення опорних точок.

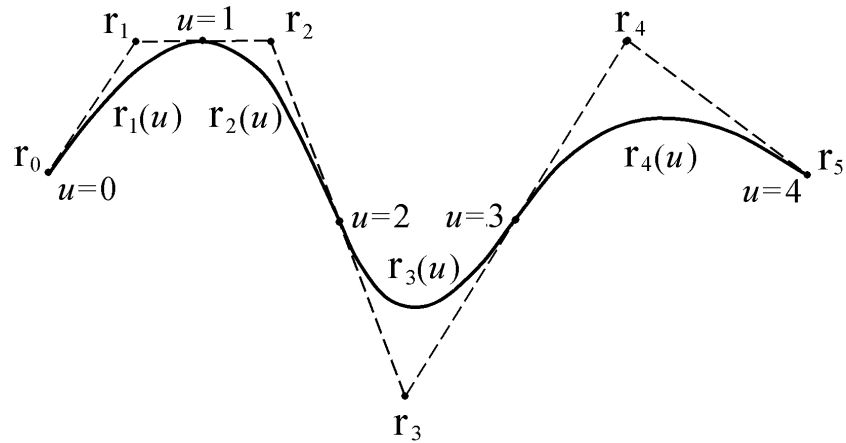


Рис. 3.19. В-сплайн третього порядку з шістьма опорними точками

Як видно з формул (3.31) ... (3.34), NURBS є узагальненням В-сплайнів, бо застосування однакових величин  $w_i$  обертає визначення (3.31) у формулу (3.33). Раціональні В-сплайни дозволяють моделювати точки, відрізки прямих та дуги кривих другого порядку, забезпечуючи однотипне представлення всіх згаданих вище фігур. Тому поданий математичний апарат широко використовується в сучасних машинобудівних САПР. Однак це стосується тільки ліній, а не точок і випадків виродження геометричних об'єктів у порожню множину, що обмежує гнучкість (див., зокрема, коментарі до рис. 3.12 та рис. 3.13) структурно-параметричного опрацювання технічних виробів.

Збігом початкової та кінцевої опорних точок (рис. 3.19) можна створити замкнений обвід. Проте виникає питання, а чи вдасться абсолютно точно побудувати у такий спосіб деяку досить поширену в техніці криву, наприклад, коло. Обґрунтуємо даний факт, роблячи акцент на структурно-параметричних аспектах такої реалізації.

**Коло як структурно-параметричний геометричний об'єкт.** Вище зазначалось, що використанням формули (3.13), яка є окремим випадком виразу (3.31), із ваговими коефіцієнтами  $w_0=w_2=1$  та  $w_1=\cos(\theta/2)$  формується дуга кола з кутовою величиною  $0<\theta<\pi$ . Отже, існує нескінченне число варіантів подання досліджуваної фігури у вигляді деякої множини взаємно пов'язаних поміж собою структурно-параметричних елементів (дуг кола з певними кутовими величинами). Зрозуміло, що мінімальна кількість наведених дуг дорівнює трьом, а максимальна – нескінченності. Однак, практичну цінність можуть складати, за конкретних умов, варіанти з чотирма, вісьмома, дванадцятьма і т. д. елементами.

Розглянемо апроксимацію кола на прикладі застосування чотирьох дуг із кутовою величиною  $\pi/2$ . Тоді (рис. 3.20) маємо дев'ять наступних опорних точок

$$\mathbf{r}_0 = (R, 0); \mathbf{r}_1 = (R, R); \mathbf{r}_2 = (0, R); \mathbf{r}_3 = (-R, R); \mathbf{r}_4 = (-R, 0);$$

$$\mathbf{r}_5 = (-R, -R); \mathbf{r}_6 = (0, -R); \mathbf{r}_7 = (R, -R); \mathbf{r}_8 = (R, 0),$$

де  $R$  – радіус кола, що моделюється.

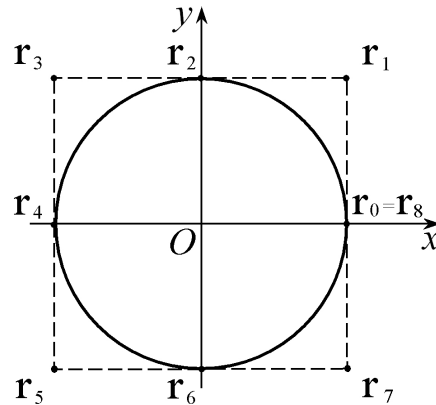


Рис. 3.20. Коло у вигляді чотирьох дуг із NURBS

Для першого елемента з опорними точками  $\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$  одержуємо послідовність вузлових значень параметра  $0, 0, 0, 1, 1, 1$  ( $n=2, k=3$ ) та вагові коефіцієнти  $w_0=1, w_1=\sqrt{2}/2, w_2=1$ . Подібним чином розраховується й наступна ділянка з опорною ламаною  $\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4$ , але для забезпечення подальшого об'єднання частин сплайна її вузловий вектор зсувається на одиницю й отримує вигляд  $(1, 1, 1, 2, 2, 2)$ . За аналогією обчислюються третій та четвертий компонент, у результаті чого остаточно маємо наведені нижче кортежі вузлів параметра й вагових коефіцієнтів

$$(0, 0, 0, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 4);$$

$$(1, \sqrt{2}/2, 1, \sqrt{2}/2, 1, \sqrt{2}/2, 1, \sqrt{2}/2, 1, \sqrt{2}/2, 1).$$

Доведемо, на прикладі першої частини сплайна, що остання абсолютно точно збігається з відповідною ділянкою кола. Рівняння зазначеного компонента NURBS

$$\mathbf{r}(u) = \frac{(1-u)^2 \mathbf{r}_0 + \sqrt{2}u(1-u)\mathbf{r}_1 + u^2 \mathbf{r}_2}{(1-u)^2 + \sqrt{2}u(1-u) + u^2}. \quad (3.42)$$

Якщо співвідношення (3.42) є дугою радіуса  $R$  у площині  $Oxy$ , то повинна виконуватись залежність  $x(u)^2 + y(u)^2 = R^2$ , тобто

$$\frac{[(1-u)^2 R + \sqrt{2u(1-u)}R]^2 + [\sqrt{2u(1-u)}R + u^2 R]^2}{[(1-u)^2 + a]^2} = R^2, \quad (3.43)$$

де  $a = \sqrt{2u(1-u)} + u^2$ .

Згідно з формулою (3.43)

$$(1 - 2u + a)^2 + a^2 = ((1-u)^2 + a)^2.$$

Далі

$$a^2 = u^2(u^2 + 2(1 - 2u + a)).$$

Підставляємо в отриманий вираз значення  $a$

$$2u^2(1-u)^2 + 2\sqrt{2u^3(1-u)} + u^4 = u^4 + 2u^2(1-2u) + 2u^2(\sqrt{2u(1-u)} + u^2)$$

та здійснюємо скорочення

$$1 \equiv 1.$$

Що і треба було довести.

Коли замість поданого вище проміжку  $[0, 4]$  для варіювання параметра потрібно мати відрізок  $[0, 2\pi]$ , то використовується вузловий вектор

$$(0, 0, 0, \pi/2, \pi/2, \pi, \pi, 3\pi/2, 3\pi/2, 2\pi, 2\pi, 2\pi).$$

Зробимо кілька пояснень щодо переваг розглянутої СПГМ кола.

На перший погляд здається, що геометричну модель цієї фігури можна реалізувати значно простіше, ніж наведеним способом. Проте одним з основних плюсів запропонованої реалізації є її узагальнюючий характер, який полягає в тому, що за допомогою даної СПГМ, із використанням залежності (3.14) та варіюванням відповідних параметрів (рис. 3.14), відтворюється достатньо широка група фігур, таких як:

- *кола, еліпси, овали* тощо (наприклад, на базі чотирьох структурних елементів);

- *різноманітні  $m$ -кутники*, де  $m \geq 3$ ,  $m \in \mathbb{N}$  (на базі  $m$  структурних елементів у вигляді прямолінійних відрізків);

– довільні плоскі замкнені обводи з дугами у вигляді відрізків прямих, дуг кіл, еліпсів, парабол та гіпербол.

За потреби, на основі розглянутих вище прийомів структурно-параметричного підходу, подана СПГМ здатна стати ще більш потужною та загальною, наприклад, завдяки застосуванню своїх параметричних складових у вигляді (3.31), де  $n \geq 3$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , замість формули (3.13).

Прикладом типового корисного практичного використання описаних прийомів для проектування об'єктів машинобудування є СПГМ, котра на описаних вище засадах відтворює коло або правильні  $m$ -кутники, де  $m \geq 3$ ,  $m \in \mathbb{N}$ . Даним способом забезпечується можливість подання єдиною геометричною моделлю потрібного кріпильного елемента з циліндричною або шестигранною головкою (рис. 3.12, рис. 3.13) та формування одного дерева побудов складанної одиниці замість двох зазначених.

Отже, деяке ускладнення розробляння СПГМ нижчих рівнів (більш простих фігур), за рахунок їх подальшого багаторазового гнучкого використання в якості складових елементів геометричних об'єктів вищих щаблів (тобто більш складних), дозволяє суттєво підвищувати ефективність варіантного формоутворення останніх. Наочним прикладом у цьому плані слугує розглянутий випадок проектування технічного вузла з двома видами його кріпильних елементів.

Таким чином, нами проаналізовано основні види застосовуваних у нинішніх машинобудівних САПР ліній, обґрунтовано структурно-параметричні властивості цих фігур та показано можливість реалізації на їх основі комп'ютерного комбінаторно-варіаційного геометричного моделювання. Перейдемо далі до аналізу формоутворення поверхонь як структурно-параметричних об'єктів. З метою цілісного подання наступного матеріалу виконаємо певну систематизацію даних фігур.

**Кінематична класифікація поверхонь машинобудівних САПР.** Оскільки для сучасного геометричного моделювання в машинобудівних САПР широко вживаним є кінематичний підхід, то скористаємося ним для проведення класифікації поверхонь. Досліджувані поверхні розглядатимемо як послідовності всіх положень деяких ліній (складених у загальному випадку), що рухаються у просторі і здатні змінювати при цьому свої розміри та форму.

Таким чином, *кінематична поверхня (оболонка)* в сукупності умов, що однозначно її визначають, містить *твірні* та в певному вигляді *напрямні лінії*.

Останні можуть бути довільними кривими, серед яких існують дві найбільш прості – відрізок прямої та дуга кола, що становлять основу для виділення поверхонь *видавлювання* й *обертання*.

Опрацьовані вище лінії першого, другого та вищих порядків утворюють базу для формування поверхонь. До подання математичних залежностей наведемо визначення ще двох видів кінематичних поверхонь – *зсуву* та *згину (замітання)*. Для перших характерним є те, що під час руху вздовж напрямних (довільних кривих у загальному випадку) твірні завжди можна сумістити з їх початковим положенням за допомогою певного вектора. Для других потрібно застосувати ще й поворот. Отже, *видавлювання* та *обертання* – це окремі випадки відповідно *зсуву* та *згину*.

У табл. 3.1 подано один із варіантів класифікації поверхонь. Головною задачею цього матеріалу є обґрунтування перспектив застосування структурно-параметричного підходу для систематизації геометричних фігур.

Таблиця 3.1

Кінематична класифікація поверхонь тривимірного простору

		<i>Напрямна(i) лінія(i)</i>			
		<i>першого порядку</i>	<i>другого порядку</i>	<i>вищого порядку</i>	<i>інша(i)</i>
<i>Твірні(i) лінія(i)</i>	<i>першого порядку</i>	площина, коса площина ...	циліндрична другого порядку, кругова конічна ...	циліндрична вищого порядку ...	рух прямої вздовж синусоїди ...
	<i>другого порядку</i>	циліндрична другого порядку, кругова конічна ...	гіперболічний параболоїд, поверхня тора ...	рух кола між двома плоскими кривими вищого порядку ...	рух кола вздовж синусоїди ...
	<i>вищого порядку</i>	циліндрична вищого порядку ...	обертання вищого порядку ...	рух однієї кривої локон Аньезі вздовж іншої ...	рух кривої локон Аньезі вздовж синусоїди ...
	<i>інша(i)</i>	рух синусоїди вздовж прямої ...	рух синусоїди вздовж кола ...	рух синусоїди вздовж кривої локон Аньезі ...	інші довільного виду

Зупинимось докладніше на питаннях, що близькі за своєю суттю до розглянутого вище формоутворення ліній. Шляхом порівняння зображеної на рис. 3.18 класифікації ліній та табл. 3.1 помічаємо, що комірці останньої є компонентами декартового добутку наступної множини, яка відтворює виконану систематизацію,

$$L = (l_i)_1^4, \quad (3.44)$$

де  $l_1$  – лінії першого порядку;

$l_2$  – лінії другого порядку;

$l_3$  – лінії вищих порядків;

$l_4$  – інші лінії.

На засадах структурно-параметричного підходу кожний із наведених елементів може подаватися декотрою сукупністю компонентів, наприклад,

$$l_2 = (l_{2j})_1^4, \quad (3.45)$$

де  $l_{21} = \{\text{коло}\}$ ,

$l_{22} = \{\text{еліпс}\}$ ,

$l_{23} = \{\text{парабола}\}$ ,

$l_{24} = \{\text{гіпербола}\}$ .

При цьому під переліченими об'єктами маються на увазі як цілі фігури, замкнені та нескінченні, так й окремі їх дуги. З урахуванням формули (3.45) необхідним чином корегується і склад елементів (3.44). Проаналізовані прийоми може бути поширено на тіла та багатовимірні фігури.

Класифікація поверхонь формально записується як

$$P = L \times L = L^2, \quad (3.46)$$

тіл

$$T = L^3 = P \times L, \quad (3.47)$$

чотиривимірних об'єктів

$$L^4 = T \times L = P \times P, \quad (3.48)$$

та інших багатовимірних фігур

$$B = L^n, \quad (3.49)$$

де  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n > 4$ .

Виокремлення серед виразів (3.46) ... (3.49) чотиривимірного простору обумовлено тим, що процеси формоутворення в машинобудуванні відбуваються саме в ньому, бо до трьох реальних геометричних вимірів додається ще й час. Випадок (3.49), як уже зважувалось, використовується, зазвичай, для виконання розрахунків та оптимізації. Зазначимо також, див. табл. 3.1, що певному елементу, зокрема лініям другого порядку, відповідають не тільки суто ці криві, а й фігури нижчого рівня, тобто прямі та точки. Отже, наведений компонент може містити у своєму складі декілька перерахованих об'єктів одночасно. Розглянута властивість базується на обґрунтованій вище здатності кривих другого порядку відтворювати прямі та точки.

З табл. 3.1 та формул (3.44) ... (3.49) видно, що для класифікації характерний лавиноподібний ріст комбінаторних варіантів геометричних фігур. Оцінити їх кількість, за умов варіювання числом елементів у (3.44) подібно до застосування (3.45), дозволяють залежності (3.46) ... (3.49). Один із шляхів структурного плану, щодо зменшення таких різновидів, полягає у видаленні повторюваних елементів (див. комірки табл. 3.1, які симетричні відносно її головної діагоналі). Отже, під час класифікації фігур вищої вимірності варто проводити уніфікацію наявних геометричних об'єктів для спрощення процесів подальшого синтезу.

Поширеним прийомом є формування спеціалізованих класифікацій, котрі в якості вихідних мають обмежене число своїх компонентів. Останній спосіб доволі розповсюджений на практиці, зокрема, під час конструкторсько-технологічного опрацювання об'єктів і процесів машинобудування, наприклад, деталей типу тіл обертання, з труб, листів, корпусних тощо. При цьому, досить часто, розглядають не кінематику сферичних, циліндричних і т. п. поверхонь, а обмежених певною сукупністю замкнених ліній частин площини (перерізів), котрі в подальшому переміщуються потрібним чином уздовж різноманітних заданих ліній, формуючи необхідну геометрію тіл.

Таким чином, основними перевагами запропонованої на основі застосування структурно-параметричного підходу класифікації поверхонь є її системний узагальнюючий характер, що полягає в інтеграції поміж собою фігур нижчої (лінії) та вищої (тіла та багатовимірні геометричні об'єкти) вимірності, універсальність та пристосованість до реалізації комп'ютерними засобами.

**Прийоми узагальнення аналітичних описів параметричних поверхонь.** Застосування аналітичних геометричних моделей, що охоплюють широкі групи фігур, спрощує роботу зі складними геометричними об'єктами. Під час викладення основних положень структурно-параметричного формоутворення нами вже аналізувався параметричний опис (3.5) деформування подібного до тора тіла, який дозволяє відображувати також еліпсоїд, кулю, сферу, плоске кільце, еліпс, коло та їх частини до точки й порожньої множини включно. Переваги використання такої однієї універсальної фігури, замість нарізного вжитку значної кількості перерахованих вище доволі наочні.

Для підтвердження типовості даного випадку розглянемо, наприклад, частину поверхні гіперболічного параболоїда (табл. 3.1) що, як відомо, створюється паралельним перенесенням дуги параболі, коли її вершина рухається по іншій параболі. Достатньо просто, лише переминою орієнтації твірної параболі так, що опуклості твірної та напрямної стають направленими в одну сторону, досліджуваний гіперболічний параболоїд стає еліптичним.

Ключові засоби реалізації проаналізованих далі гнучких перетвілень поверхонь другого порядку забезпечуються викладеними вище параметричними модифікаціями гіпербол, парабол, еліпсів, кіл і прямих, див. формулу (3.13) та рис. 3.14. Параметричним змінюванням дуги твірної параболі у відрізок прямої фігура, що проаналізована вище, стає вже циліндричною поверхнею другого порядку, яка, у свою чергу, варіюванням форми напрямної може бути не тільки параболічною, а й еліптичною чи гіперболічною. Коли ж модифікувати й напрямну у відрізок прямої, то одержимо певну частину площини.

Узагальнену аналітичну формулу для радіуса-вектора  $\mathbf{r}$  розглянутої поверхні в декартовій системі координат  $Oxuz$  можна записати у вигляді

$$\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{t}(u) + (\mathbf{n}(v) - \mathbf{n}(0)) + \mathbf{s},$$

де  $\mathbf{t}(u)$  – радіус-вектор твірної лінії згідно з формулою (3.13);

$\mathbf{n}(v)$  – радіус-вектор напрямної лінії відповідно до виразу (3.13);

$\mathbf{s}$  – вектор початкового суміщення твірної та напрямної.

Радіус-вектор  $\mathbf{r}(u, v)$  є сумою радіуса-вектора твірної лінії  $\mathbf{t}(u)$ , вектора паралельного перенесення  $\mathbf{n}(v) - \mathbf{n}(0)$  уздовж напрямної лінії та сталого

вектора  $\mathbf{s}$  початкового суміщення твірної та напрямної. Описана фігура  $\mathbf{r}(u, v)$  відноситься до поверхонь зсуву.

Отже бачимо, що опрацювання формули (3.13), здійснене відповідно до структурно-параметричного підходу, та виконана на його засадах класифікація поверхонь (табл. 3.1) дозволяють розв'язувати й інші задачі, зокрема, визначення узагальнених математичних описів поверхонь. У зв'язку з особливою важливістю останніх для даного дослідження, проаналізуємо кілька їх конкретних представників щодо реалізації ними основних засад структурно-параметричного формоутворення.

**Лінійчасті поверхні з позицій структурно-параметричного геометричного моделювання.** Простий математичний опис мають лінійчасті поверхні, що доволі поширені у практиці машинобудування завдяки своїй високій технологічності. В основі побудови даних фігур лежить відрізок твірної прямої, який для кінців із радіусами-векторами  $\mathbf{r}_0$  і  $\mathbf{r}_1$  записується наступним чином

$$\mathbf{r}(v) = (1 - v)\mathbf{r}_0 + v\mathbf{r}_1, \quad (3.50)$$

де  $v \in [0, 1]$  – параметр.

Для лінійчастих поверхонь (3.50)  $\mathbf{r}_0(u)$  та  $\mathbf{r}_1(u)$  виступають певними функціями параметра  $u \in [0, 1]$  й розглядаються як задані напрямні лінії. Звернемо увагу, що довільна залежність  $\mathbf{r}(t)$ , де  $t \in [t_{\min}, t_{\max}]$ , подається у формі  $\mathbf{r}(t(u))$ , де  $u \in [0, 1]$ , шляхом застосування  $t(u) = t_{\min}(1 - u) + ut_{\max}$ .

Отже, радіус-вектор лінійчастої поверхні визначається як

$$\mathbf{r}(u, v) = (1 - v)\mathbf{r}_0(u) + v\mathbf{r}_1(u), \quad (3.51)$$

де  $u \in [0, 1]$ ,  $v \in [0, 1]$  – параметри;

$\mathbf{r}_0(u)$  та  $\mathbf{r}_1(u)$  – напрямні лінії.

До фігур (3.51) належать площини, циліндричні та конічні поверхні. За допомогою зазначеної формули можна, зокрема, отримати рівняння:

– циліндричної поверхні

$$\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{r}_0(u) + v\mathbf{s}, \quad (3.52)$$

де  $u \in [0, 1]$ ,  $v \in [0, 1]$  – параметри;

$\mathbf{s}$  – вектор перенесення вихідної напрямної  $\mathbf{r}_0(u)$ ;

– конічної поверхні

$$\mathbf{r}(u, v) = (1 - v)\mathbf{r}_0 + v\mathbf{r}_1(u), \quad (3.53)$$

де  $u \in [0, 1]$ ,  $v \in [0, 1]$  – параметри;

$\mathbf{r}_0$  – вершина конічної поверхні.

Якщо у формулі (3.52)  $\mathbf{r}_0(u)$  є колом, а вектор  $s$  перпендикулярний до його площини, то одержуємо прямий круговий циліндр. Коли у виразі (3.53)  $\mathbf{r}_1(u)$  є колом, що лежить у площині, перпендикулярній до відрізка з кінцями в  $\mathbf{r}_0$  та центрі  $\mathbf{r}_1(u)$ , то  $\mathbf{r}(u, v)$  – це прямий круговий конус. Циліндричні (еліптичні, параболічні, гіперболічні) та конічні поверхні в поліноміальній параметричній формі розраховуються шляхом підставлення до залежності (3.52) і (3.53) відповідних рівнянь напрямних згідно з виразом (3.13).

Проаналізуємо кілька прикладів лінійчастих поверхонь.

*Приклад 3.10.* Розглянемо білінійну поверхню, яка утворюється якщо у співвідношенні (3.51)  $\mathbf{r}_0(u)$  та  $\mathbf{r}_1(u)$  є прямолінійними відрізками

$$\mathbf{r}_0(u) = (1 - u)\mathbf{r}_{00} + u\mathbf{r}_{01}; \quad \mathbf{r}_1(u) = (1 - u)\mathbf{r}_{10} + u\mathbf{r}_{11}, \quad (3.54)$$

де  $\mathbf{r}_{00}$ ,  $\mathbf{r}_{01}$  – кінцеві точки  $\mathbf{r}_0(u)$ ;

$\mathbf{r}_{10}$ ,  $\mathbf{r}_{11}$  – кінцеві точки  $\mathbf{r}_1(u)$ .

Тоді, згідно з формулами (3.51) і (3.54),

$$\mathbf{r}(u, v) = (1 - v)(1 - u)\mathbf{r}_{00} + (1 - v)u\mathbf{r}_{01} + v(1 - u)\mathbf{r}_{10} + vuv\mathbf{r}_{11}, \quad u \in [0, 1], \quad v \in [0, 1]. \quad (3.55)$$

Приклад поверхні (3.55) для  $\mathbf{r}_{00} = (3, -3, 0)$ ,  $\mathbf{r}_{01} = (0, -3, 3)$ ,  $\mathbf{r}_{10} = (3, 6, 3)$ ,  $\mathbf{r}_{11} = (3, 3, 0)$  показано на рис. 3.21.

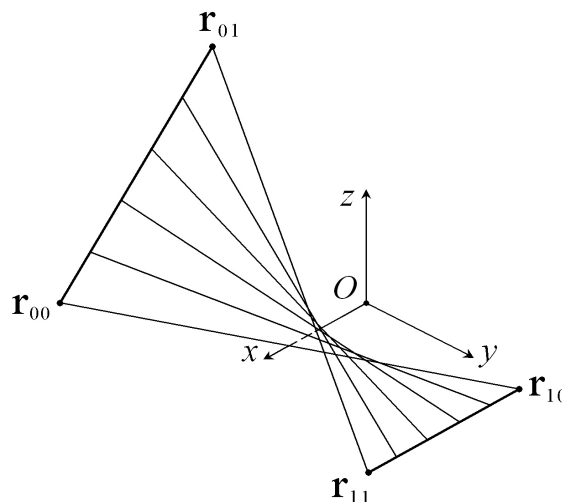


Рис. 3.21. Білінійна поверхня

Дана фігура є просторовим об'єктом, який може ставати частиною площини у випадку, коли напрямні належать цій площині.

Приклад 3.11. Згідно з табл. 3.1 у виразі (3.51) векторами-функціями  $\mathbf{r}_0(u)$  та  $\mathbf{r}_1(u)$  можуть бути не тільки вже розглянуті прямолінійні відрізки або криві другого порядку, а й інші лінії, зокрема, вищого порядку (В-сплайни, NURBS і т. д.).

На рис. 3.22 зображено лінійчасту поверхню, напрямними  $\mathbf{r}_0(u)$  та  $\mathbf{r}_1(u)$  якої є плоскі криві Безьє третього степеня з опорними ламаними  $\mathbf{r}_{00} \mathbf{r}_{10} \mathbf{r}_{20} \mathbf{r}_{30}$  та  $\mathbf{r}_{01} \mathbf{r}_{11} \mathbf{r}_{21} \mathbf{r}_{31}$ .

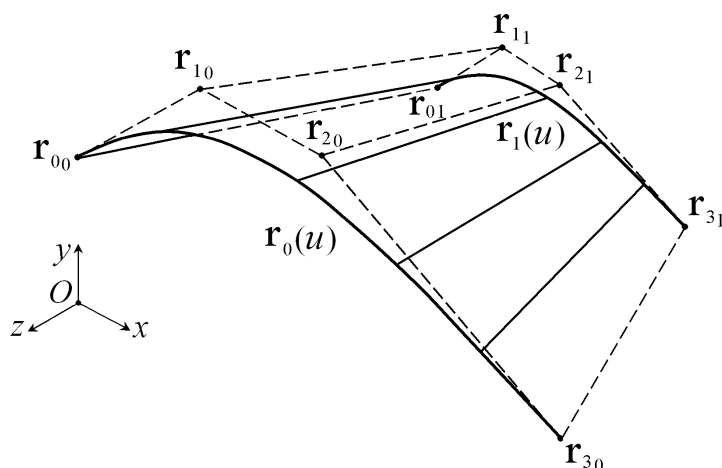


Рис. 3.22. Лінійчаста поверхня Безьє

Використовуючи формулу (3.51) та загальне подання кривої Безьє  $n$ -го степеня, яка є окремим випадком залежності (3.31),

$$\mathbf{r}(u) = \sum_{i=0}^n \frac{n!}{i!(n-i)!} u^i (1-u)^{n-i} \mathbf{r}_i, \quad (3.56)$$

де  $\mathbf{r}_i$  – радіуси-вектори опорних точок,

$u \in [0, 1]$  – параметр,

отримуємо рівняння показаного на рис. 3.22 геометричного об'єкта

$$\mathbf{r}(u, v) = \sum_{i=0}^3 [(1-v)\mathbf{r}_{i_0} + v\mathbf{r}_{i_1}] \frac{3!}{i!(3-i)!} u^i (1-u)^{3-i}, \quad u \in [0, 1], \quad v \in [0, 1]. \quad (3.57)$$

З виразу (3.57) і рис. 3.22 бачимо, що лініями параметра  $v$  виступають криві Безьє з опорними точками

$$\mathbf{r}_{i_v} = (1-v)\mathbf{r}_{i_0} + v\mathbf{r}_{i_1}, \quad v \in [0, 1], \quad i = 0 \dots 3,$$

які є лінійними комбінаціями вершин ламаних вихідних напрямних  $\mathbf{r}_0(u)$  та  $\mathbf{r}_1(u)$ .

*Приклад 3.12.* Розглянемо, відповідно до формули (3.51) та останньої комірки першого рядка табл. 3.1, визначення в системі координат  $Oxuz$  лінійчастої поверхні  $\mathbf{r}(u, v)$  з трансцендентними напрямними на прикладі синусоїд.

Нехай

$$\mathbf{r}_0(u) = \begin{cases} x_0(u) = (1-u)x_{00} + ux_{01}, \\ y_0(u) = a_0 \sin(x_0(u)), \\ z_0(u) = (1-u)z_{00} + uz_{01}; \end{cases} \quad \mathbf{r}_1(u) = \begin{cases} x_1(u) = (1-u)x_{10} + ux_{11}, \\ y_1(u) = a_1 \sin(x_1(u)), \\ z_1(u) = (1-u)z_{10} + uz_{11}, \end{cases} \quad (3.58)$$

де  $x_{00}, x_{01}, x_{10}, x_{11}$  та  $z_{00}, z_{01}, z_{10}, z_{11}$  – відповідно абсциси та аплікати кінцевих точок напрямних;

$a_0$  та  $a_1$  – амплітудні значення синусоїдальних кривих  $\mathbf{r}_0(u)$  та  $\mathbf{r}_1(u)$ .

Згідно з формулами (3.51) і (3.58)

$$\mathbf{r}(u, v) = \begin{cases} x(u, v) = (1-v)x_0(u) + vx_1(u), \\ y(u, v) = (1-v)a_0 \sin(x_0(u)) + va_1 \sin(x_1(u)), \\ z(u, v) = (1-v)z_0(u) + vz_1(u). \end{cases} \quad (3.59)$$

Якщо у співвідношеннях (3.58)  $x_0(u) = (1-u)x_0 + ux_1$ ,  $x_1(u) = (1-u)x_0 + ux_1$ ,  $z_0(u) = z_0$ ,  $z_1(u) = z_1$ , то залежність (3.59) спрощується

$$\mathbf{r}(u, v) = \begin{cases} x(u, v) = x_0(u) = x_1(u), \\ y(u, v) = (1-v)a_0 \sin(x_0(u)) + va_1 \sin(x_1(u)), \\ z(u, v) = (1-v)z_0 + vz_1. \end{cases}$$

Один із варіантів побудованої в системі Maple, згідно з виразом (3.59), поверхні подано на рис. 3.23, а відповідний командний файл – у додатках.

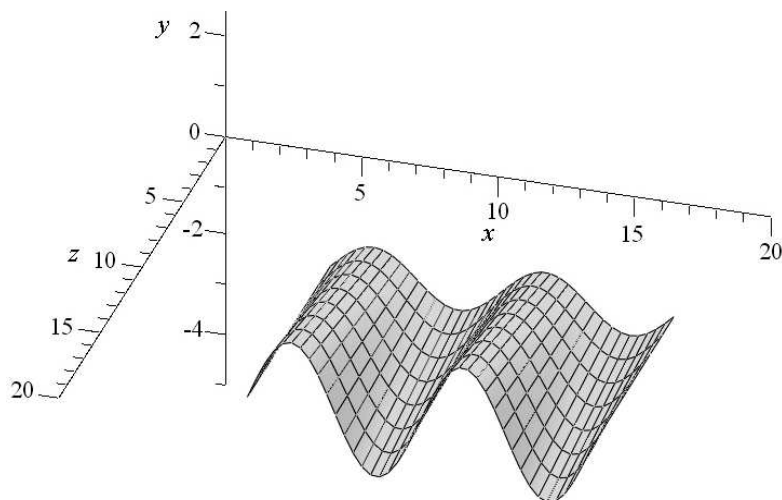


Рис. 3.23. Лінійчаста поверхня з трансцендентними напрямними

Отже, на основі розглянутих прикладів формоутворення лінійчастих поверхонь із твірною у вигляді прямої, що відповідає першому рядку табл. 3.1, унаочнено можливість виокремлення в розглянутих параметричних аналітичних формулах їх структурних геометричних складових. Показано, що, прийнявши за основу вираз (3.51), шляхом комбінування різновидів двох його дискретних компонентів, а саме, напрямних  $\mathbf{r}_0(u)$  та  $\mathbf{r}_1(u)$ , генеруються різноманітні варіанти лінійчастих поверхонь – площини, циліндричні, конічні, із застосуванням трансцендентних функцій тощо. Очевидним є факт побудови на основі кожного з перерахованих та інших видів поверхонь, нескінченної кількості їх конкретних екземплярів заданої форми, розмірів і положення у просторі. Виокремлені дискретні структурні компоненти доповнюються відповідними параметричними залежностями, котрі розглядаються як вагові функції, що здатні забезпечувати плавне неперервне варіювання геометрії досліджуваних фігур.

Акцентуємо увагу на двох наступних аспектах:

– по-перше, згідно з системним підходом, необхідно завжди аналізувати внутрішню будову, зв'язки, властивості і т. д. кожного застосовуваного елемента. У нашому випадку це стосується дослідження напрямних  $\mathbf{r}_0(u)$  та  $\mathbf{r}_1(u)$  з позицій структурно-параметричного підходу. Наприклад, див. рис. 3.21 і рис. 3.22, варіюванням у просторі розташувань опорних точок забезпечується не тільки потрібне змінювання форми, розмірів та положення наведених поверхонь, а й їх стикування поміж собою;

– по-друге, важливою особливістю є можливість фігурою вищого рівня подавати геометричні об'єкти нижчих шаблів. Так із двох показаних на рис. 3.21 та рис. 3.22 фігур більш універсальна лінійчаста поверхня Безьє. Однак і (3.55), і (3.57), і (3.59) є узагальненими формами для прямокутної ділянки площини, що здатна стати відрізком, точкою, порожньою множиною. Кожен із наведених виразів може відтворювати довільні плоскі трикутники та чотирикутники. Розглянуті особливості застосування структурно-параметричного підходу до варіантного формоутворення поверхонь показано, див. рис. 3.24, на прикладі залежності (3.59). Відповідні програмні командні файли подано в додатках.

Зображення рис. 3.24, *a* отримано присвоюванням нульового амплітудного значення напрямній  $\mathbf{r}_0(u)$ , тобто перетворенням її у відрізок прямої. Цим прикладом проілюстровано здатність синусоїдальної кривої за допомогою параметричних модифікацій моделювати більш просту пряму лінію.

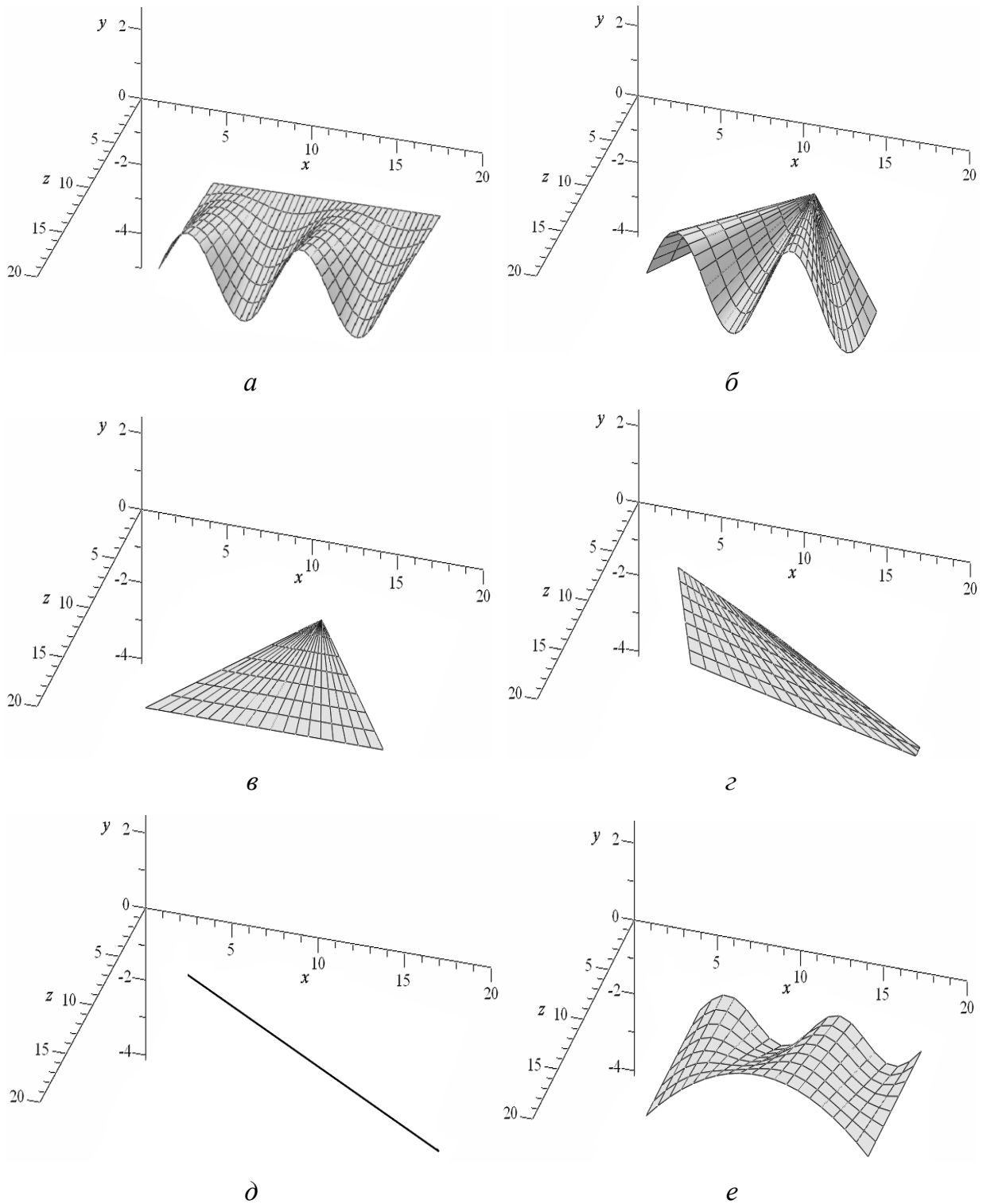


Рис. 3.24. Структурно-параметричні модифікації лінійчастої поверхні

Подальшим варіюванням параметрів, див. додатки, досягаємо виродження напрямної  $\mathbf{r}_0(u)$  в точку й одержуємо зображену на рис. 3.24, б фігуру. Якщо застосувати нульові амплітудні значення обох синусоїдальних напрямних, то матимемо прямокутник у площині  $z=0$ , а коли ці ж дані

використати для випадку рис. 3.24, б, то сформується показаний на рис. 3.24, в трикутник. У площині  $z=0$  можна отримати довільний чотирикутник (рис. 3.24, г), відрізок (рис. 3.24, д) або точку, див додатки.

Приклад структурної модифікації поверхні (3.59) показано на рис. 3.24, е, яку виконано згідно із залежністю

$$\mathbf{r}(u, v) = \begin{cases} x(u, v) = (1 - v)x_0(u) + vx_1(u), \\ y(u, v) = (1 - v)a_0 \sin(x_0(u)) + vy_1(u), \\ z(u, v) = (1 - v)z_0(u) + vz_1(u). \end{cases} \quad (3.60)$$

де  $u \in [0, 1]$ ,  $v \in [0, 1]$  – параметри;

$$x_0(u) = (1 - u)x_{00} + ux_{01},$$

$$x_1(u) = (1 - u)x_{10} + ux_{11},$$

$$z_0(u) = (1 - u)z_{00} + uz_{01},$$

$$z_1(u) = (1 - u)z_{10} + uz_{11},$$

$x_{00}$ ,  $x_{01}$ ,  $x_{10}$ ,  $x_{11}$  та  $z_{00}$ ,  $z_{01}$ ,  $z_{10}$ ,  $z_{11}$  – абсциси та аплікати кінцевих точок напрямних  $\mathbf{r}_0(u)$  та  $\mathbf{r}_1(u)$ ;

$$y_1(u) = ((1 - u)^2 y_{10} + w_1 2u(1 - u)y_{1p} + u^2 y_{11}) / w(u),$$

$y_{10}$ ,  $y_{11}$ ,  $y_{1p}$  – ординати кінцевих та проміжної опорної точки напрямної  $\mathbf{r}_1(u)$ ;

$$w(u) = (1 - u)^2 + w_1 2u(1 - u) + u^2,$$

$w_1 \geq 0$  – ваговий коефіцієнт.

Програмний командний файл системи Maple, що реалізує співвідношення (3.60), подано в додатках.

Таким чином, шляхом проведення аналізу конкретних груп геометричних фігур приходимо до висновку стосовно необхідності застосування певних узагальнюючих керуючих структур, що здатні ефективно управляти комбінаторно-варіаційним формоутворенням.

**Криволінійні поверхні як об'єкти структурно-параметричного геометричного моделювання.** Проаналізуємо спочатку кінематичні фігури, в яких напрямна у вигляді дуги кола поєднується з більш складними лініями, ніж криві першого та другого порядку. Для цих об'єктів, досить поширених у техніці, твірними є криві Ерміта, Фергюсона, кубічні сплайни тощо.

На рис. 3.25 показано поверхню обертання, яку сформовано на базі вихідного B-сплайна  $\mathbf{r}_0(u)$ , див. рис. 3.22, модифікованого в NURBS шляхом

переміщення опорної точки  $\mathbf{r}_{10}$  та застосування для неї підвищеного вагового коефіцієнта з метою надання більшої кривини початковій частині обводу.

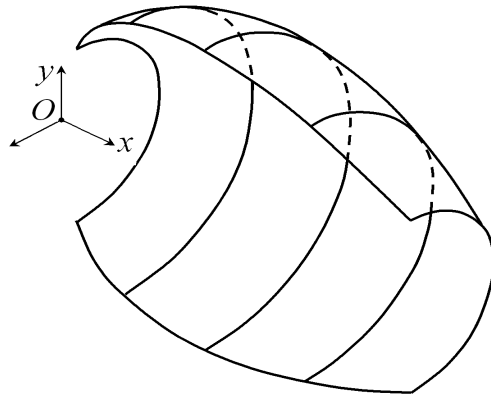


Рис. 3.25. Фігура обертання на основі NURBS

Запишемо загальний вигляд рівнянь об'єкта, який породжується в системі координат  $Oxyz$  обертанням навколо осі  $x$  плоскої кривої, визначеної залежностями  $x=x(u)$ ,  $y=y(u)$ ,  $z=0$ :

$$x = x(u); \quad y = y(u) \cos v; \quad z = y(u) \sin v, \quad (3.61)$$

де  $u$  та  $v$  – параметри.

Комбінаційною підстановкою до виразів (3.61) аналітичних формул різних ліній та їх параметрів можна одержати необхідні математичні описи відповідних комбінаторно-варіаційних фігур обертання подібно розглянутому вище випадку для лінійчастих поверхонь.

Поширеними в машинобудуванні є поверхні, які формуються на основі кривих Фергюсона та Безьє. Якщо для лінії

$$\mathbf{r}(u) = a_0 + a_1 u + a_2 u^2 + a_3 u^3, \quad (3.62)$$

де  $\mathbf{r}(u)$  – радіус-вектор,

$u \in [0, 1]$  – параметр,

визначити залежності її коефіцієнтів

$$a_i(v) = a_{i0} + a_{i1} v + a_{i2} v^2 + a_{i3} v^3, \quad i \in \{0, 1, 2, 3\}, \quad (3.63)$$

від параметра  $v \in [0, 1]$ , то отримаємо рівняння поверхні Фергюсона

$$\mathbf{r}(u, v) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 a_{ij} u^i v^j, \quad u \in [0, 1], \quad v \in [0, 1]. \quad (3.64)$$

Отже, згідно з виразами (3.62) ... (3.64), під час варіювання параметра  $0 \leq v \leq 1$  лінія  $\mathbf{r}(u)$  переміщується у просторі та змінює, в загальному випадку, свою форму й розміри, утворюючи поверхню  $\mathbf{r}(u, v)$ .

Аналогічним чином, наприклад, для кубічної кривої Безьє

$$\mathbf{r}(u) = (1-u)^3 \mathbf{r}_0 + 3u(1-u)^2 \mathbf{r}_1 + 3u^2(1-u) \mathbf{r}_2 + u^3 \mathbf{r}_3,$$

де  $\mathbf{r}_i$  – радіуси-вектори її опорних точок,  $i \in \{0, 1, 2, 3\}$ ;

$u \in [0, 1]$  – параметр,

можна встановити траєкторії руху останніх

$$\mathbf{r}_i(v) = (1-v)^3 \mathbf{r}_{i0} + 3v(1-v)^2 \mathbf{r}_{i1} + 3v^2(1-v) \mathbf{r}_{i2} + v^3 \mathbf{r}_{i3}, \quad i \in \{0, 1, 2, 3\},$$

як залежності від параметра  $v \in [0, 1]$ , й одержати (рис. 3.26) потрібну фігуру

$$\mathbf{r}(u, v) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 \mathbf{r}_{ij} \frac{3!3!}{i!(3-i)!j!(3-j)!} u^i (1-u)^{3-i} v^j (1-v)^{3-j}, \quad u \in [0, 1], v \in [0, 1]. \quad (3.65)$$

де  $\mathbf{r}_{ij}$  – вершини її опорного багатогранника.

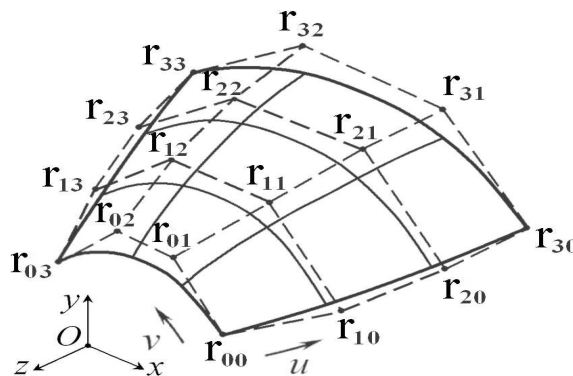


Рис. 3.26. Бікубічна поверхня Безьє

Останній надає наближене уявлення про дану поверхню. Степінь полінома (3.65) визначається кількістю застосованих опорних точок. Наведена небажана залежність призводить до потреби використання складених поверхонь (оболонок), де неперервність необхідного порядку на спільних границях забезпечується певними умовами для сусідніх частин щодо розташування їх опорних точок.

Подібно розглянутому вище перетворенню рівняння окремої кривої Безьє в аналітичну залежність для двовимірної фігури (шляхом декартового

добутку поліномів Бернштейна), застосувавши функції змішування В-сплайнів, отримаємо формулу для відповідної поверхні [129]

$$\mathbf{r}(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,k}(u) N_{j,l}(v) \mathbf{r}_{i,j}, \quad u \in [t_{k-1}, t_{n+1}], \quad v \in [s_{l-1}, s_{m+1}], \quad (3.66)$$

де  $\mathbf{r}_{i,j}$  – радіуси-вектори опорних точок, тобто вершин опорного багатогранника;

$N_{i,k}(u)$  і  $N_{j,l}(v)$  – вагові (базисні) функції;

$u$  та  $v$  – параметри;

$(t_0, \dots, t_{n+k})$  і  $(s_0, \dots, s_{m+1})$  – вузлові кортежі, для яких  $t_i \leq t_{i+1}$  та  $s_j \leq s_{j+1}$ .

В-сплайн поверхня (3.66) має наступні властивості:

– у кожному параметричному напрямку максимальний її степінь на одиницю менший за відповідну кількість вершин опорного багатогранника, а неперервність – на стільки ж від степеня;

– лежить усередині опуклого багатогранника своїх опорних точок та певним чином апроксимує останні;

– забезпечує більші можливості локального контролю ніж поверхня Безьє.

За аналогією з виразом (3.66), на підставі розглянутих раціональних кривих (3.31), форма яких залежить від вершин опорних ламаних, вагових коефіцієнтів і функцій, шляхом використання декартового добутку останніх, одержимо рівняння NURBS-поверхні [129]

$$\mathbf{r}(u, v) = \frac{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,k}(u) N_{j,l}(v) w_{i,j} \mathbf{r}_{i,j}}{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,k}(u) N_{j,l}(v) w_{i,j}}. \quad (3.67)$$

Фігури (3.67), як узагальнення залежностей (3.66), успадковують наведені вище властивості В-сплайнових поверхонь, але додатково мають перевагу щодо абсолютно точного подання поверхонь другого порядку. Завдяки своїй універсальності NURBS-поверхні становлять основу сучасного комп'ютерного геометричного моделювання в машинобудівних САПР.

Розглянемо ще поверхню Кунса, яка узагальнює лінійне спряження чотирьох точок (3.55) і формується на основі довільних кривих, що утворюють топологічний чотирикутник (рис. 3.27).

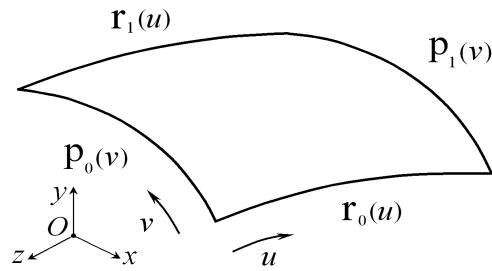


Рис. 3.27. Поверхня Кунса

Рівняння даної фігури, границями якої є лінії  $\mathbf{r}_0(u)$ ,  $\mathbf{r}_1(u)$ ,  $\mathbf{p}_0(v)$ ,  $\mathbf{p}_1(v)$ , де  $u \in [0, 1]$  та  $v \in [0, 1]$  – параметри, визначається [129] формулою

$$\mathbf{r}(u, v) = (1 - v)\mathbf{r}_0(u) + v\mathbf{r}_1(u) + (1 - u)\mathbf{p}_0(v) + u\mathbf{p}_1(v) - (1 - v)(1 - u)\mathbf{r}_{00} - (1 - v)u\mathbf{r}_{01} - v(1 - u)\mathbf{r}_{10} - v\mathbf{r}_{11}, \quad u \in [0, 1], \quad v \in [0, 1], \quad (3.68)$$

де  $\mathbf{r}_{00} = \mathbf{r}_0(0) = \mathbf{p}_0(0)$ ,  $\mathbf{r}_{01} = \mathbf{r}_0(1) = \mathbf{p}_1(0)$ ,  $\mathbf{r}_{10} = \mathbf{r}_1(0) = \mathbf{p}_0(1)$ ,  $\mathbf{r}_{11} = \mathbf{r}_1(1) = \mathbf{p}_1(1)$ .

За допомогою залежності (3.68) для обраної сітки ліній (каркаса) будується оболонка (складена поверхня) з частин описаного типу. Однак на границях останніх, взагалі, не забезпечується неперервність дотичної та кривини. Математичний апарат, що реалізує в наведених випадках гладкість першого порядку, подано у виданні [129].

Зробимо висновки з проаналізованих у структурно-параметричному аспекті аналітичних описів найбільш поширених у машинобудівних САПР криволінійних поверхонь:

- по-перше, в кожному випадку можна виділити конкретну множину структурних геометричних елементів (точок, ліній) та певні пов’язані з ними аналітичні функції;

- по-друге, має місце тенденція до узагальнення, тобто перехід від простіших форм до складніших (наприклад, від лінійчастих поверхонь до криволінійних, від фігур нижчих порядків до вищих тощо);

- по-третє, існує можливість, спираючись на наявні аналітичні описи фігур, формування на їх основі структурно-параметричних та комбінаторно-варіаційних моделей та геометричних об’єктів.

*Приклад 3.13.* Розглянемо реалізацію структурно-параметричних прийомів формоутворення на прикладі узагальнення поданої на рис. 3.23 лінійчастої поверхні (3.59) до криволінійної.

Структурну модифікацію вихідної фігури виконано згідно із залежністю

$$\mathbf{r}(u, v) = \begin{cases} x(u, v) = ((1-v)^2 x_0(u) + w_1 2v(1-v)((1-x_{1p})x_0(u) + x_{1p}x_1(u)) + v^2 x_1(u)) / w(v), \\ y(u, v) = ((1-v)^2 a_0 \sin(x_0(u)) + w_1 2v(1-v)y_{1p} + v^2 a_1 \sin(x_1(u))) / w(v), \\ z(u, v) = ((1-v)^2 z_0(u) + w_1 2v(1-v)((1-z_{1p})z_0(u) + z_{1p}z_1(u)) + v^2 z_1(u)) / w(v). \end{cases} \quad (3.69)$$

де  $u \in [0, 1]$ ,  $v \in [0, 1]$  – параметри;

$$x_0(u) = (1-u)x_{00} + ux_{01},$$

$$x_1(u) = (1-u)x_{10} + ux_{11},$$

$$z_0(u) = (1-u)z_{00} + uz_{01},$$

$$z_1(u) = (1-u)z_{10} + uz_{11},$$

$x_{00}$ ,  $x_{01}$ ,  $x_{10}$ ,  $x_{11}$  та  $z_{00}$ ,  $z_{01}$ ,  $z_{10}$ ,  $z_{11}$  – абсциси та аплікати кінцевих точок напрямних  $\mathbf{r}_0(u)$  та  $\mathbf{r}_1(u)$ ;

$a_0$  та  $a_1$  – амплітудні значення синусоїдальних кривих  $\mathbf{r}_0(u)$  та  $\mathbf{r}_1(u)$ ;

$x_{1p} \in [0, 1]$ ,  $z_{1p} \in [0, 1]$ ,  $y_{1p}$ ,  $w_1 \geq 0$  – параметричні координати проміжної опорної точки напрямної, ордината цієї точки та її ваговий коефіцієнт.

Узагальнену поверхню (3.69), для якої варіант (3.59) відповідає значенню  $w_1=0$ , показано на рис. 3.28. Належний програмний командний файл системи Maple подано в додатках.

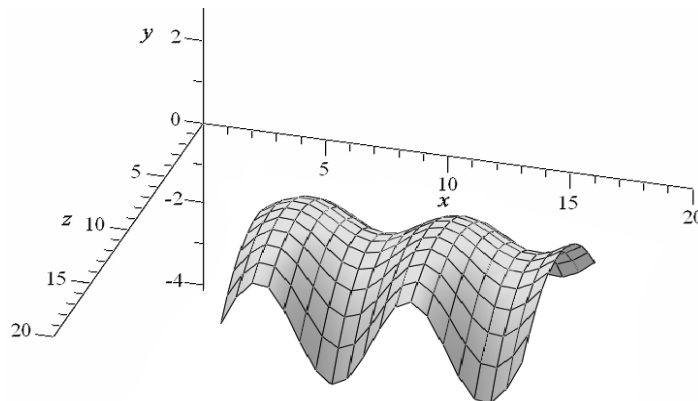


Рис. 3.28. Узагальнення лінійчастої поверхні до криволінійної

Можливим іншим структурним варіантом, крім проаналізованої поверхні (3.69), здатна бути комбінація з напрямною у вигляді теж синусоїдальної чи іншої трансцендентної або поліноміальної функції. Крім комбінаторних поєднань твірних і напрямних важливими є подальші різновиди структурно-параметричного синтезу з окремих поверхонь більш складних геометричних об'єктів (оболонок, тіл та багатовимірних фігур). При цьому для практичного застосування окреслених методів у галузі машинобудування вирішальними постають питання оптимального формоутворення деталей і складальних одиниць технічних об'єктів.



– *системного підходу*, що потребує розгляду опрацьованого об'єкта одночасно як множини певних взаємопов'язаних елементів та потенційного компонента системи більш високого ієрархічного рівня;

– *варіантності*, який полягає в забезпеченні геометричною моделлю гнучкого, продуктивного, прогнозованого і зручного формування структурних та параметричних різновидів досліджуваного об'єкта;

– *універсальності*, що вимагає розв'язування достатньо широкого кола задач, а не окремих їх випадків;

– *оптимальності*, тобто наявності в моделі засобів для визначення раціональних значень параметрів і характеристик відтвореного об'єкта;

– *відкритості та розвитку*, що зводиться до можливості простого оновлення й розширення складових компонентів моделі;

– *комплексного підходу*, який полягає у пристосуванні геометричної моделі до потреб інших математичних описів досліджуваного об'єкта.

Безпосереднє формоутворення, базуючись на наведених вище основних принципах, як правило, додатково доповнюється більш конкретними умовами згідно з наявними вимогами. Наприклад, у літакобудуванні математичні методи визначення аеродинамічних поверхонь повинні забезпечувати: повноту, однозначність, точність, простоту й наочність опису; неперервність та плавність змінювання кривини; можливість побудови поверхонь згідно із заданими функціональними залежностями; мінімальне, але достатнє, число параметрів для ефективного керування їх формою і т. п.

### **3.1.3. Етапи розроблення та використання структурно-параметричних геометричних моделей**

Ключовими етапами створення та застосування структурно-параметричних моделей є:

1. *Аналіз об'єкта й формування складу його елементів.*

При цьому, відповідно до принципу варіантності, потрібно достатньо повно розглядати можливі структурно-параметричні різновиди елементів.

2. *Визначення зв'язків між виділеними частинами, тобто розроблення структури об'єкта, що моделюється.*

3. *Опрацювання порядку синтезу об'єкта та формування інтегральних параметрів і характеристик для забезпечення зручного його включення до складу геометричних та інших систем більш високого рівня.*

4. Розробляння нових або застосування існуючих математичних моделей для наявних елементів і зв'язків між ними.

Згідно з принципом комплексного підходу геометричні дані, як об'єктивна основа для узгодженого поєднання описів інших дисциплін, можуть доповнюватися відповідними моделями досліджуваного об'єкта.

5. Проведення оптимального (раціонального), для заданих умов, геометричного моделювання.

Наведений вище термін «об'єкт» застосовано як узагальнення понять предмет і процес, оскільки динамічно змінюваним у часі предметом можна моделювати певні процеси, зокрема, технологію виготовлення деталей і складаних одиниць машинобудування.

### 3.1.4. Реалізація варіантного формоутворення із застосуванням теорії множин і графів

Розглянемо базові положення одного зі способів реалізації структурно-параметричного геометричного моделювання з використанням теорії множин і графів. У цьому випадку склад довільного об'єкта  $O$  подається певною упорядкованою множиною

$$O = (o_i)_1^N, \quad (3.70)$$

де  $o_i$  – його елементи (частини, компоненти тощо),  $N$  – їх кількість.

Допустимі різновиди  $o_i$  відтворюються кортежем варіантів

$$o_i = (o_{ij})_1^{N_i}, \quad (3.71)$$

де  $N_i$  – число останніх,  
та векторами параметрів

$$P_{ij} = (p_{ijk})_1^{Np_{ij}}, \quad (3.72)$$

де  $Np_{ij}$  – кількість параметрів  $j$ -го варіанта  $i$ -ї частини.

Структурний взаємозв'язок між різновидами  $n$ -ї та  $m$ -ї складової об'єкта  $O$  відображають матриці суміжності (рис. 3.29, а)

$$C_{nm} = \|c_{nr} c_{ms}\|; \quad n \in N; \quad m \in N; \quad n \neq m; \quad r \in \{1, \dots, N_n\}; \quad s \in \{1, \dots, N_m\}, \quad (3.73)$$

де  $c_{nr}c_{ms} \neq 0$  при можливій взаємодії варіантів  $o_{nr}$  та  $o_{ms}$ ,  $c_{nr}c_{ms} = 0$  – у протилежному випадку.

Елементом  $c_{nr}c_{ms}$ , для яких  $n=m$ , за необхідності, надаються нульові або інші значення. У загальному випадку наведений на рис. 3.29, *a* двовимірний масив (у термінах програмування), як правило, замінюється багатовимірним для зручного зберігання аналітичних залежностей між параметрами, різноманітних атрибутів тощо. Зокрема, додаткова третя розмірність здатна застосовуватися для таких характеристик даного об'єкта як площа, об'єм тощо, а четверта – відповідних формул, поточних розрахованих значень і т. д.

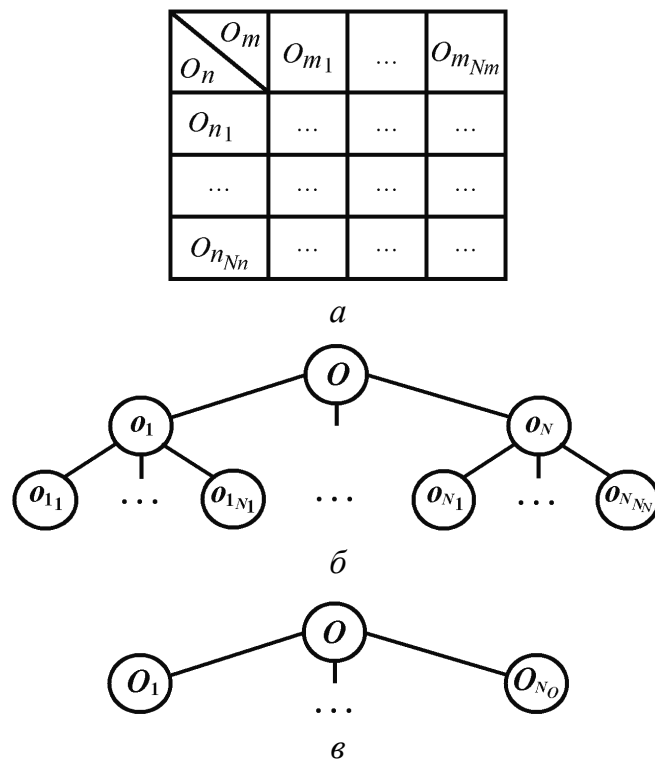


Рис. 3.29. Компоненти структурної моделі довільного об'єкта  $O$ :  
*a* – матриця суміжності різновидів елементів  $o_n$  та  $o_m$ ; *b* – граф структури;  
*c* – граф варіантів

Наступний крок структурно-параметричного геометричного моделювання, після проведення декомпозиції досліджуваного об'єкта та визначення його внутрішніх зв'язків, полягає у формуванні інтегральних характеристик і параметрів, обчислення яких спирається на певний механізм комбінаторного синтезу створюваної системи з окремих її компонентів.

Наприклад, у випадку використання для цього показаного на рис. 3.30 неорієнтованого графа, вершинами якого, згідно з формулою (3.70), є

елементи  $o_i$  опрацьовуваної фігури  $O$ , а ребрами – геометричні моделі (3.71), якими здатні бути вирази (3.14), (3.31), (3.51), (3.64), (3.66), (3.67), (3.68) та ін., що реалізують дані елементи з певними значеннями параметрів (3.72), оптимальний комбінаторно-варіаційний (надалі це синонім терміна структурно-параметричний) варіант з'ясується наступним чином.

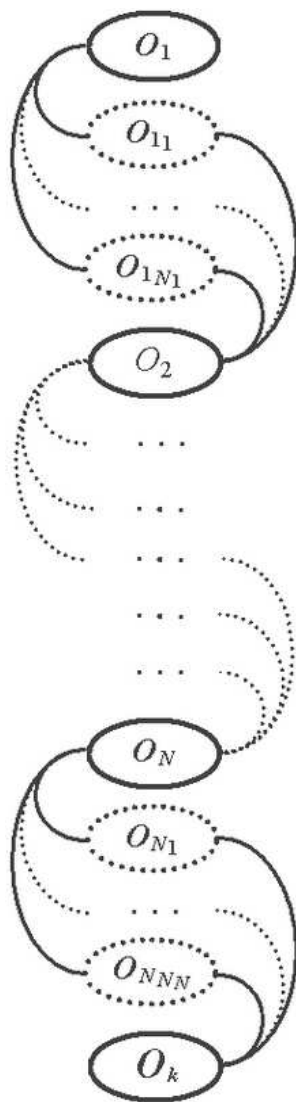


Рис. 3.30. Порядок синтезу структурно-параметричного об'єкта  $O$

Оскільки кожний різновид  $O_k$  досліджуваного об'єкта  $O$  являє собою простий елементарний ланцюг із початком у вершині  $O_1$  та кінцем в  $O_N$ , то загальна їх кількість  $N_O$  визначається елементами матриць (3.73). Величинам будь-яких із параметрів (3.72) та їх багатоманітним аналітичним комбінаціям у вигляді деяких цільових функцій може бути поставлено у відповідність довжини належних ребер. Тоді пошук оптимального

структурно-параметричного варіанта опрацьовуваної фігури  $O$  зводиться до визначення екстремального ланцюга в показаному на рис. 3.30 графі. Для розв'язування таких задач існують різні алгоритми, зокрема, індексації вершин, гілок і границь та ін. Проте, застосування їх для керування процесами формоутворення потребує виконання певної адаптації.

Отже, попередніми матеріалами поточного пункту нами подано один із підходів, який спирається на теорію множин і графів, генерування варіантів комбінаторно-варіаційного об'єкта

$$O = (O_k)_1^{No} \quad (3.74)$$

та викладено прийоми визначення серед них оптимальних.

У такий спосіб залежностями (3.70) ... (3.74) проілюстровано математичну реалізацію наведених у пункті 3.1.3 ключових етапів структурно-параметричного формоутворення.

## 3.2. Структурно-параметричні геометричні моделі та їх елементи

Основою подальшого матеріалу дослідження є задачі розроблення й використання комп'ютерних СПГМ (структурно-параметричних геометричних моделей). При цьому СПГМ удосконалюються шляхом створення нових і доопрацювання відомих методів, прийомів та алгоритмів формоутворення, їх перевіркою тестовими прикладами і практичними впровадженнями. У наступних пунктах даного підрозділу розглянуто питання формалізації складу та призначення базових елементів СПГМ.

### 3.2.1. Структурні складові

Вище зазначалось, що під час аналізу довільний геометричний об'єкт, зазвичай, подається декотрим кортежем, елементи якого можуть відтворюватися іншими множинами, й так кілька разів підряд. Тобто розглянута процедура поділу здатна мати деяке число етапів, стадій, фаз тощо.

Так згідно з рис. 3.1

$$\Phi = (\phi_i)_1^5, \quad (3.75)$$

де  $\Phi$  – множина геометричних фігур;

$\phi_1=\{\text{Точки}\}$ ,  $\phi_2=\{\text{Лінії}\}$ ,  $\phi_3=\{\text{Поверхні}\}$ ,  $\phi_4=\{\text{Тіла}\}$ ,  $\phi_5=\{\text{Багатовимірні фігури}\}$ .

Відповідно до рис. 3.18

$$L = (l_i)_1^4, \quad (3.76)$$

де  $L$  – кортеж ліній;

$l_1=\{\text{Першого порядку}\}$ ,  $l_2=\{\text{Другого порядку}\}$ ,  $l_3=\{\text{Вищих порядків}\}$ ,  $l_4=\{\text{Інші}\}$ .

Згідно з табл. 3.1

$$P = (n_i)_1^4, \quad (3.77)$$

де  $P$  – множина поверхонь;

$n_1=\{\text{Першого порядку}\}$ ,  $n_2=\{\text{Другого порядку}\}$ ,  $n_3=\{\text{Вищих порядків}\}$ ,  $n_4=\{\text{Інші}\}$ .

Відповідно до рис 3.10

$$T = (m_i)_1^4, \quad (3.78)$$

де  $T$  – кортеж способів відтворення тіл;

$m_1=\{B\text{-rep}\}$ ,  $m_2=\{C\text{-rep}\}$ ,  $m_3=\{O\text{-rep}\}$ ,  $m_4=\{\text{Інші}\}$ .

Згідно з формулою (3.45) маємо множину елементів, що характеризує криві другого порядку.

Опрацюємо два методи моделювання структури (внутрішньої будови) об'єктів – *ієрархічний* і *мережний*, загальне уявлення про які надають рис. 3.29 та рис. 3.30. Розберемо приклади їх застосування у двох наступних підпунктах, підкресливши, що ієрархічний метод більш придатний для відображення зафіксованої на певний момент часу структури, а мережний – для подання процесу її формування. Ієрархічний метод краще підходить для відтворення складу об'єктів машинобудування, а мережний – для моделювання процесів їх виготовлення й експлуатації.

#### 3.2.1.1. Ієрархічний метод

Продемонструємо формування структурної моделі для наведеної вище, згідно з виразами (3.75) ... (3.77), систематизації геометричних фігур на прикладі деревоподібного графа (рис. 3.31). Із даного зображення видно, що елементи зазначених виразів можуть надалі більш докладно розкриватись завдяки поданню новими множинами, зокрема, як це зроблено для ліній другого порядку  $l_2$  формулою (3.45).

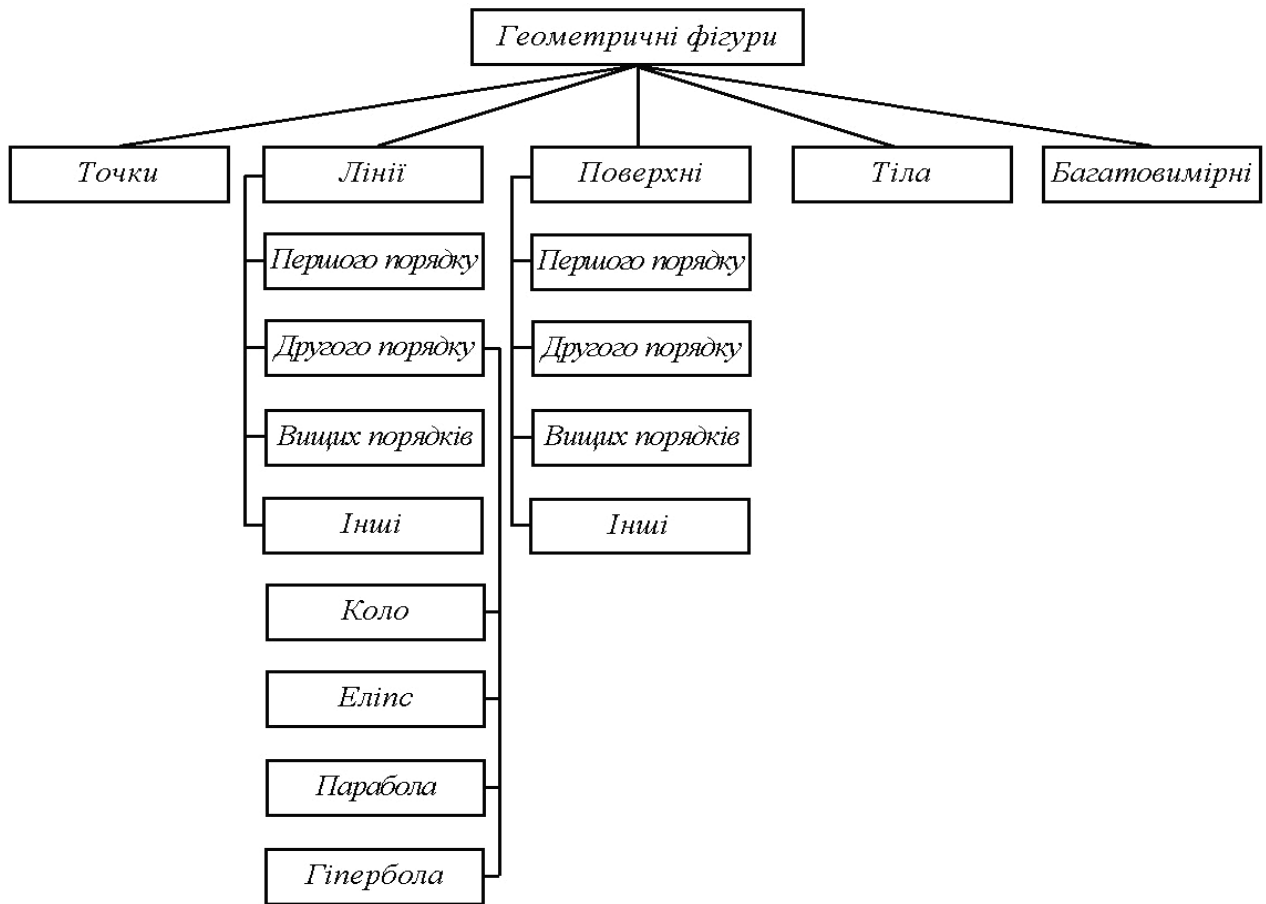


Рис. 3.31. Фрагмент структурної ієрархічної моделі класифікації геометричних фігур

Комп'ютерна реалізація деревоподібних графів здійснюється з використанням певних структур, яку докладно викладено в спеціальній літературі.

### 3.2.1.2. Мережний метод

Проаналізуємо застосування даного методу на засадах систематизації поверхонь відповідно до способу їх формоутворення. Поверхнею вважатимемо сукупність усіх послідовних положень змінюваних, у загальному випадку, ліній (твірних), що переміщуються у просторі відповідно до певних законів, які, зокрема, можуть подаватися аналітичними залежностями, сукупностями інших ліній (напрямних) тощо.

Під визначником поверхні розумітимемо набір даних, що задає довільну  $i$ -ту кінематичну поверхню  $\Phi_i$ . До його складу включають геометричні ( $\Gamma_i$ ) елементи (точки, лінії, поверхні), за допомогою яких утворюється потрібний об'єкт, та алгоритм ( $A_i$ ) формування останнього

$$\Phi_i(\Gamma_i)[A_i], \quad (3.79)$$

де геометрична частина визначника подається у круглих дужках, алгоритмічна – у квадратних.

Велика різноманітність форм поверхонь створює труднощі не тільки під час їх дослідження, а й у процесі використання. Для полегшення розв'язування таких питань застосовують систематизацію об'єктів, виконуючи їх поділ на певні класи, групи, види тощо. Відповідно до прийомів аналізу та синтезу структурно-параметричного підходу використовуватимемо наступні кортежі геометричних елементів

$$G = (g_1, \dots, g_{NG}) \quad (3.80)$$

та алгоритмів формоутворення

$$A = (A_1, \dots, A_{NA}), \quad (3.81)$$

де, наприклад:  $g_1$ ={точка},  $g_2$ ={відрізок прямої},  $g_3$ ={дуга кола},  $g_4$ ={дуга кривої другого порядку},  $g_5$ ={NURBS},  $g_6$ ={синусоїда} і т. п.;  $A_1$ ={паралельне перенесення},  $A_2$ ={обертання навколо осі},  $A_3$ ={гвинтовий рух},  $A_4$ ={площина паралелізму},  $A_5$ ={ортогональність напрямній лінії},  $A_6$ ={гомотетія},  $A_7$ ={змінювання масштабів уздовж окремих осей} і т. д.

Звернемо увагу, що до складу множин (3.80) і (3.81) можуть входити компоненти, які є певними комбінаціями інших їх елементів (наприклад, ламана, гвинтовий рух тощо). Для визначника фігури  $\Phi_i$  будемо позначати твірні

$$t_i = (t_{ik})_1^{Nt_i}, \quad (3.82)$$

напрявні

$$n_i = (n_{ik})_1^{Nn_i}. \quad (3.83)$$

Множини з повтореннями (3.82) та (3.83), що складаються з розміщень елементів (3.80), утворюють кортеж  $\Gamma_i$

$$\Gamma_i = (t_i, n_i). \quad (3.84)$$

Подібним чином із компонентів (3.81) формується масив алгоритмів руху твірних  $t_i$ , дещо схожий за своїм призначенням на напрямні  $n_i$ ,

$$A_{i_n} = (A_{i_n k})_1^{N_{A_{i_n}}} \quad (3.85)$$

та залежності, які можуть бути порожньою множиною, для змінювання твірних

$$A_{i_t} = (A_{i_t k})_1^{N_{A_{i_t}}} \quad (3.86)$$

Отже, з урахуванням формул (3.85) і (3.86), маємо

$$A_i = (A_{i_n}, A_{i_t}). \quad (3.87)$$

Таким чином, вирази (3.79) ... (3.87), дані щодо різновидів взаємодії твірних, напрямних й алгоритмів формоутворення та викладені вище прийоми структурно-параметричної методології дозволяють побудувати відповідну модель (рис. 3.32) для розглянутих фігур.

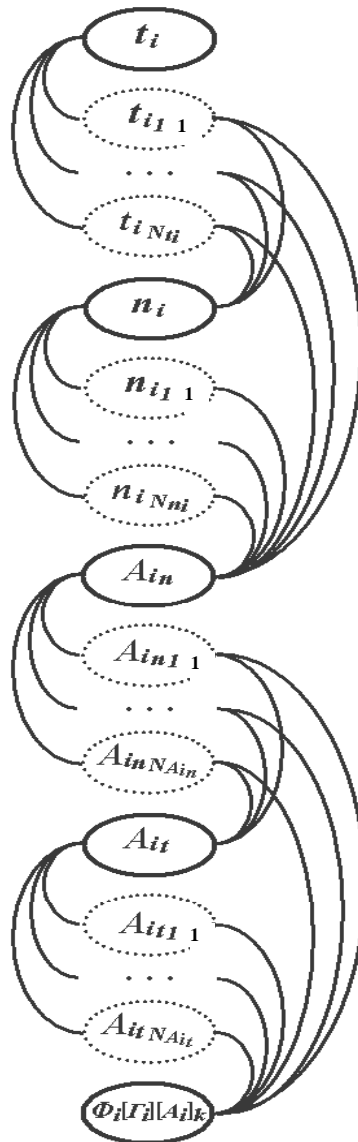


Рис. 3.32. Структурна мережна модель кінематичних поверхонь

Як наслідок, одержуємо множину

$$\{\Phi_i(\Gamma_i)[A_i]_k\}_1^{N_{\Phi i}} \quad (3.88)$$

потрібних кінематичних поверхонь.

Різним елементам (3.88) здатні відповідати однакові геометричні об'єкти. Тому актуальною є задача опрацювання раціонального складу наведеного масиву згідно з конкретними умовами моделювання.

### 3.2.2. Параметричні складові

З назви СПГМ видно, що до складу даних моделей, крім структурних, входять ще й параметричні компоненти, які аналізуються в даному пункті. Оскільки одна з позитивних якостей опрацьовуваної методології полягає в гнучкому поєднанні переваг дискретного й неперервного геометричного моделювання, то розглянемо параметричні елементи в їх взаємодії зі структурними. Почнемо з найпростіших прикладів, зокрема точок.

Їх визначення, із застосуванням виразу (3.6), показано на рис. 3.33, *а*, де змінна  $i \in Z$  ( $i \geq 0$ ) визначає поточний номер створюваної фігури. Три зображення (рис. 3.33, *б ... г*) ілюструють відповідно СПГМ прямолінійних відрізків (3.12), дуг кривих другого порядку (3.14) та комбінаторно-варіаційних варіантів останніх згідно з виразом (3.20). При цьому функції  $f_n(u)$ , де  $n \in Z$  ( $n \geq 0$ ), є параметричними компонентами, що аналізуються.

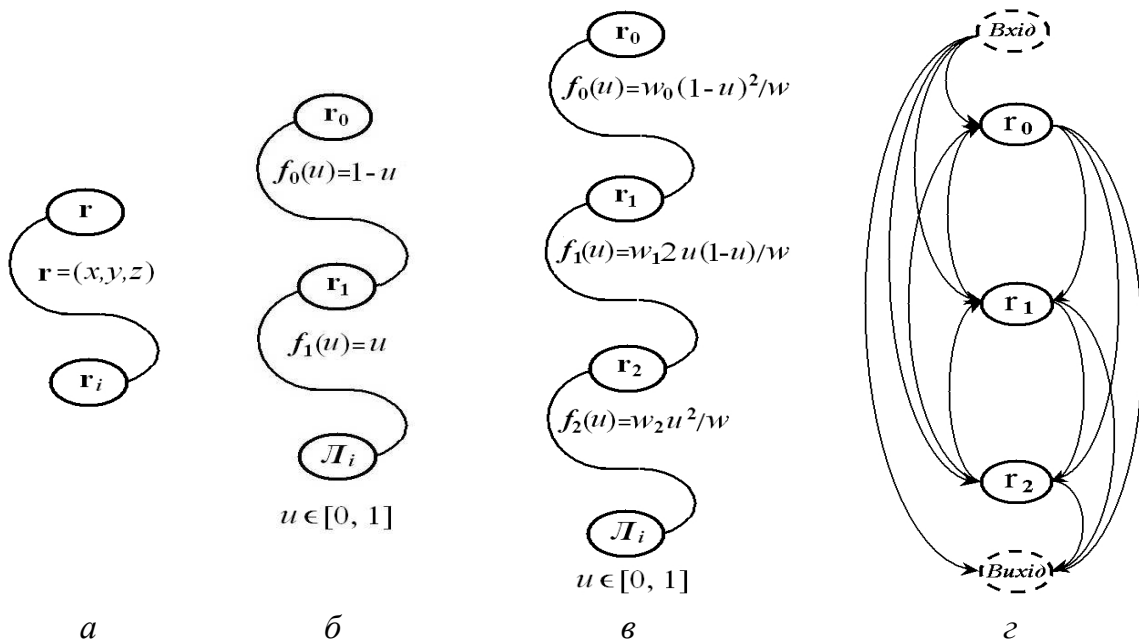


Рис. 3.33. Структурно-параметричні моделі:

*а* – точок; *б* – відрізків прямих; *в* – дуг кривих другого порядку; *г* – комбінаторно-варіаційних геометричних об'єктів на основі формул (3.14) і (3.20)

На рис. 3.34 наведено СПГМ лінійчастих поверхонь вигляду (3.51) і поверхонь Безье (3.65).

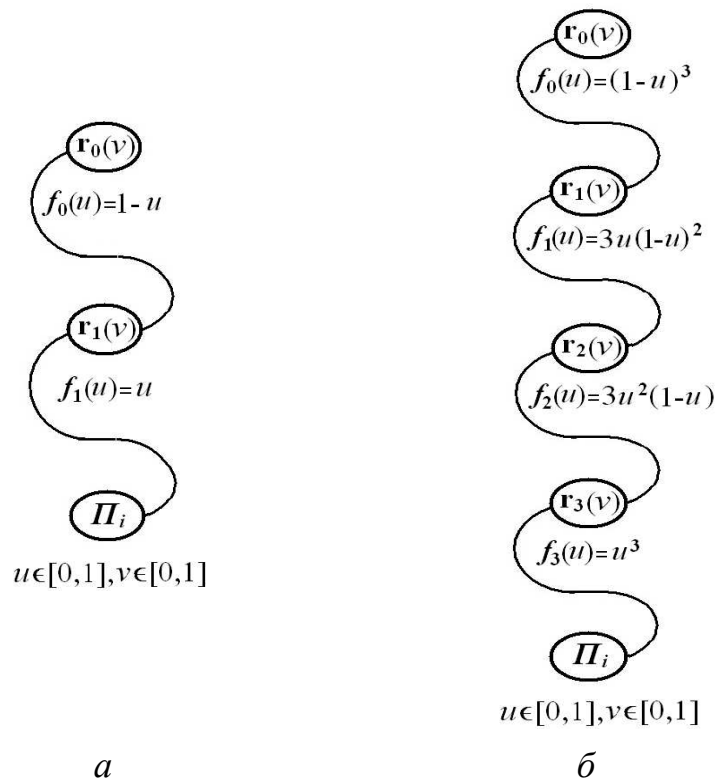


Рис. 3.34. Структурно-параметричні моделі поверхонь:  
*a* – лінійчастих; *б* – Безье

За відсутності аналітичних залежностей розглянуті на рис. 3.33 описи ліній подають множини точок, а описи поверхонь рис. 3.34 – множини ліній.

За аналогією, шляхом розглянутого в підпункті 3.1.1.1 збільшення вимірності досліджуваних геометричних об’єктів, здійснюється формування СПГМ тіл і багатовимірних фігур. Для тіл базовими структурними елементами постають поверхні, для чотиривимірних об’єктів – тіла і т. д.

В аналітичному аспекті вагомою особливістю структурно-параметричного моделювання є його здатність до варіантного подання певних розрахункових властивостей відтворюваних об’єктів. Це стосується не тільки геометричних величин (довжин, площ, об’ємів і т. д.), а й, що особливо важливо для машинобудування, таких супутніх формоутворенню деталей і складаних одиниць технічних показників як продуктивність, якість, собівартість тощо (див. підрозділ 5.3). Останній факт є основою для розробляння на засадах структурно-параметричного підходу комп’ютерних КГМ (комплексних геометричних моделей), котрим присвячено наступний пункт даного наукового дослідження.

### 3.2.3. Комплексні геометричні моделі

КГМ – це сукупність декількох взаємопов'язаних математичних моделей, не обов'язково всіх геометричних, для яких базовими є останні.

Універсальними компонентами таких інтегрованих утворень повинні бути різноманітні засоби оптимізації, а спеціальними, зокрема, для технічної продукції машинобудування – розрахунки на міцність, технологічні, економічні тощо. Зазначені питання аналізуються у двох подальших підпунктах.

#### 3.2.3.1. Засоби оптимізації в геометричних моделях

Методологія структурно-параметричного геометричного моделювання полягає в поділі об'єкта дослідження на певну сукупність частин, після чого докладно аналізуються допустимі їх комбінації. Завдяки гнучкому варіюванню параметрів форми, розмірів та положення, складові елементи змінюються на підставі певних алгоритмів як локального, так і глобального характеру. Оскільки цей процес завжди спрямований на досягнення визначеної мети, причому бажано шляхом використання невеликих ресурсів, то, таким чином, приходимо до необхідності включення до складу СПГМ засобів оптимізації.

Поєднання варіаційного формоутворення ліній, поверхонь і тіл із методами комбінаторики, теорії множин та графів, алгоритмів, обчислювальних методів, математичного програмування, оптимального управління і т. д. дозволяє отримувати об'єкти, які за своєю суттю є геометричними та здатні, завдяки перерахованим надбудовам, визначати раціональні параметри та характеристики реальних предметів і процесів.

У такий спосіб СПГМ забезпечує не лише конкретний потрібний розв'язок згідно з наявними умовами, а й узагальнений, що може адаптуватись до різноманітних змінюваних обставин. Для структурної оптимізації в роботі застосовуються наявні в літературі обчислювальні алгоритми для графів, а для параметричної, крім існуючих, використовуються також напрацьовані власні підходи (див. розділ 4).

#### 3.2.3.2. Інтеграція геометричних моделей з описами інших дисциплін

Під час проектування, виготовлення та експлуатації складних об'єктів машинобудування використовуються різноманітні математичні моделі:

конструкторські, технологічні, економічні, експлуатаційні та ін. Усі вони, прямо чи опосередковано, спираються на параметри форми та розмірів продукції, оскільки ті визначають кількість і якість використаних матеріалів, тобто вартість останніх, трудомісткість оброблення, величину експлуатаційних витрат і т. д.

Отже, в основу інтеграції математичних описів об'єктів машинобудування можна покласти об'єднуючу роль геометрії, що виявляється не тільки у спільному її використанні на всіх стадіях та етапах життєвого циклу, а й у раціональному узгодженні протиріч між різними дисциплінами під час здійснення комплексної оптимізації технічної продукції.

Ефективним засобом розв'язування наведених задач є сучасні інформаційні технології. При цьому важливою вимогою постає потреба щоб створювані комп'ютерні геометричні моделі відображували не тільки кінцеву форму та розміри виробів, а й реальні процеси їх виготовлення (бажано з гнучкою адаптацією до конкретних промислових умов). Для досягнення зазначеної мети, в якості математичного апарату, пропонується використовувати інтегральну цільову функцію, що визначається шляхом урахування важливості окремих локальних оптимізаційних залежностей спеціальних дисциплін, та має вигляд, подібний до параметричних компонентів (див. рис. 3.33 і рис. 3.34), розподілених уздовж дуг графа, який характеризує формоутворення певної деталі або складанної одиниці (див. розділ 5).

### **3.3. Висновки до розділу 3**

Основними здобутками цієї частини монографії є розроблення нової наукової концепції комп'ютерної комбінаторно-варіаційної геометрії як інтеграції параметричного формоутворення кривих, поверхонь, тіл і багатовимірних фігур із положеннями теорії множин та графів, комбінаторики, оптимізації, алгоритмів, інформатики, комп'ютерного програмування, автоматизованого проектування, конструювання, технології машинобудування і т. д.

Наукову цінність складають:

– узагальнені концептуальні засади методології структурно-параметричного геометричного моделювання, які полягають у застосуванні

єдиних прийомів моделювання на всіх рівнях ієрархії геометричних об'єктів (точок, ліній, поверхонь, тіл, різноманітних їх комбінацій, багатовимірних фігур), інтеграції параметричного формоутворення кривих, поверхонь і тіл з іншими математичними положеннями (теорії множин, графів, комбінаторики, оптимізації тощо) та засобами обчислювальної техніки (інформатикою, програмуванням і т. д.);

- принципи структурно-параметричної методології (системного підходу, варіантності, універсальності, оптимальності, відкритості та розвитку, комплексного підходу);

- ключові етапи розроблення й використання СПГМ (аналіз і формування складу елементів опрацьовуваного об'єкта, його структури, визначення порядку синтезу та інтегральних параметрів і характеристик, створення нових або застосування існуючих математичних моделей для наявних елементів і зв'язків між ними, проведення оптимального геометричного моделювання);

- геометричні моделі, які забезпечують не лише конкретні, а й узагальнені розв'язки;

- класифікація геометричних фігур на основі застосування структурно-параметричного підходу;

- нові методи комп'ютерного варіантного формоутворення об'єктів машинобудування.

Основні наукові результати даного розділу висвітлено у працях [26, 31, 35, 53, 60, 65, 68, 74, 75, 163].

## **4. СТРУКТУРНО-ПАРАМЕТРИЧНІ ГЕОМЕТРИЧНІ МЕТОДИ ТА АЛГОРИТМИ КОМП'ЮТЕРНОГО МОДЕЛЮВАННЯ**

Призначення даного розділу полягає в розроблянні нових й удосконаленні існуючих методів, прийомів та алгоритмів комп'ютерного структурно-параметричного геометричного моделювання.

У цій частині дослідження розглядаються три групи задач: *формування ліній, поверхонь і тіл; математичної оптимізації та візуалізації багатовимірних об'єктів*. Основну увагу приділено методам, прийомам й алгоритмам, що інваріантні до конкретного аналітичного опису застосовуваних параметричних кривих, поверхонь, тіл і багатовимірних фігур.

### **4.1. Методи та алгоритми автоматизованого структурно-параметричного формування**

#### **4.1.1. Позиційні задачі**

Як зазначалось у попередніх матеріалах, для забезпечення структурно-параметричного формування тіл *B-rep* способом особливо важливі задачі взаємодії поміж собою ліній і поверхонь. Для моделювання даних геометричних фігур, як свідчить підпункт 3.1.1.3, широко використовуються різноманітні математичні описи.

На цій підставі однією з головних вимог, які висуваються до застосовуваних методів й алгоритмів розв'язування позиційних задач, постає забезпечення інваріантності стосовно конкретного аналітичного подання опрацьовуваних геометричних об'єктів, які в роботі визначаються в параметричній формі.

##### *4.1.1.1. Перетин параметричних кривих*

На поточний момент для розрахунків перетинів довільних параметричних кривих актуальними є питання подальшого вдосконалення методів, прийомів й алгоритмів у плані підвищення їх обчислювальної ефективності, гарантування знаходження всіх розв'язків і т. д.

Будемо опрацьовувати лінії, координати радіуса-вектора  $\mathbf{r}$  яких у прямокутній декартовій системі  $Oxyz$  визначені певними функціями декотрого параметра  $u$

$$\mathbf{r}(u) = \mathbf{r}[x(u), y(u), z(u)], \quad u \in [u_{\min}, u_{\max}]. \quad (4.1)$$

Для зазначених об'єктів розв'язуватимемо поставлену задачу у два етапи: на першому – замінюватимемо вихідні лінії ламаними, на другому – розраховуватимемо перетини одержаних відрізків.

**Перший етап.** Застосуємо для кривої (4.1) апроксимацію методом поділу навпіл її параметричного проміжку визначення. Вважатимемо наперед заданим максимальне допустиме значення  $\delta$  відхилення створюваної ламаної, яке обчислюватимемо як довжину перпендикуляра від точки кривої до відповідної їй ланки.

Для знаходження послідовності апроксимуючих відрізків, число яких бажано мати мінімальним, але достатнім для забезпечення потрібної точності, використовуватимемо наступні масиви (упорядковані множини):  $V_1(N_1)$  – координат вершин ламаної по параметру  $u$  та відповідних їм компонентів радіуса-вектора  $R_1(N_1, 3)$ , які визначатимемо згідно з формулою (4.1), де  $N_1=2^{n_1}+1, n_1 \in \mathbb{N}$ .

Для завершення ітераційного процесу заміни частини кривої (4.1) ланкою ламаної застосовуватимемо певну кількість контрольних точок  $K_1=2^{m_1}-1, m_1 \in \mathbb{N}, m_1 \leq n_1$ .

Запропонований алгоритм полягає у виконанні наступних дій.

1. Вихідний проміжок параметра  $[u_{\min}, u_{\max}]$  поділяється на  $N_1-1$  відрізків, присвоюються значення  $V_1(1)=u_{\min}$  і  $V_1(N_1)=u_{\max}$ , обчислюються елементи  $R_1(1, j)$  і  $R_1(N_1, j)$ , де  $j \in \{1, 2, 3\}$ .

2. На поточній неапроксимованій ділянці  $[u_1, u_2]$  (початковою є  $[u_{\min}, u_{\max}]$ ) для  $K_1$  внутрішніх контрольних точок розраховуються необхідні компоненти масиву  $R_1$  і порівнюються квадрати довжин перпендикуляра  $h_k$  від зазначених точок  $\mathbf{r}(u_k), k \in \{1, \dots, K_1\}$  до ланки  $\mathbf{r}(u_1) \mathbf{r}(u_2)$  та допустимого відхилення  $\delta$

$$h_k^2 = \frac{((\mathbf{r}(u_k) - \mathbf{r}(u_1)) \times (\mathbf{r}(u_2) - \mathbf{r}(u_1)))^2}{(\mathbf{r}(u_2) - \mathbf{r}(u_1))^2} \leq \delta^2. \quad (4.2)$$

3. Якщо умову (4.2) не дотримано, то досліджуваний відрізок параметра  $u$  скорочується у два рази  $[u_1, u_1+0,5(u_2-u_1)]$  й виконується перехід до пункту 2 (у разі потреби мінімальні проміжки змінювання параметра  $u$ , що характеризуються певними компонентами  $V_1(i)$  і  $R_1(i, j)$ , де  $i \in \{1, \dots, N_1\}$  та  $j \in \{1, 2, 3\}$ , доповнюються подібними масивами).

У протилежному випадку поточна частина кривої вважається апроксимованою. Коли це зроблено в перший раз, то габаритам останньої в системі  $Oxyz$  надаються значення

$$s \in [s_{\min}, s_{\max}] = [\min(s(u_1), s(u_2)), \max(s(u_1), s(u_2))]$$

інакше

$$s \in [s_{\min}, s_{\max}] = [\min(s_{\min}, s(u_1), s(u_2)), \max(s_{\max}, s(u_1), s(u_2))],$$

де  $s \in \{x, y, z\}$ .

Якщо  $u_2$  сягнуло величини  $u_{\max}$ , то реалізується пункт 4 алгоритму, інакше відповідному елементу масиву  $V_1$  присвоюється значення  $u_2$ . Коли дійсній ітерації передувало зменшення проміжку параметра, то для останнього новою поточною ділянкою стає відрізок  $[u_2, \min(u_2+(u_2-u_1), u_{\max})]$ , у протилежному разі –  $[u_2, \min(u_2+2(u_2-u_1), u_{\max})]$ . Далі виконується пункт 2.

4. Приймаємо  $s \in [s_{\min}-\delta, s_{\max}+\delta]$ , де  $s \in \{x, y, z\}$ , завершуємо обчислення.

Отже, після апроксимації кожна досліджувана крива  $\mathbf{r}_n$  вигляду (4.1) описується масивом координат  $x, y, z$  вершин ламаної та габаритами

$$\mathbf{r}_n = L_n(N_{L_n}, 3); \quad s \in [s_{\min_n}, s_{\max_n}], \quad s \in \{x, y, z\}. \quad (4.3)$$

**Другий етап** розв'язування поставленої задачі зводиться до знаходження для довільних кривих  $\mathbf{r}_n$  і  $\mathbf{r}_m$ , що подані у вигляді (4.3), всіх їх спільних точок.

Це питання опрацьовується наступним чином. Дані об'єкти перетинаються коли

$$[s_{\min_n}, s_{\max_n}] \cap [s_{\min_m}, s_{\max_m}] \neq \emptyset, \quad s \in \{x, y, z\}. \quad (4.4)$$

У разі дотримання умови (4.4) з можливих пар  $\{\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j\}$  ланок зазначених ламаних (через  $\mathbf{r}_{i-1}, \mathbf{r}_i$  та  $\mathbf{r}_{j-1}, \mathbf{r}_j$  позначаються радіуси-вектори кінців поточних ланок ламаних  $\mathbf{r}_n$  та  $\mathbf{r}_m$ , перетин яких аналізується), де  $\mathbf{v}_i = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{i-1} = (x_i - x_{i-1}, y_i - y_{i-1})$ ,

$z_i - z_{i-1}) = (v_{ix}, v_{iy}, v_{iz})$  та  $\mathbf{v}_j = \mathbf{r}_j - \mathbf{r}_{j-1} = (x_j - x_{j-1}, y_j - y_{j-1}, z_j - z_{j-1}) = (v_{jx}, v_{jy}, v_{jz})$ , для наступного аналізу залишаються лише ті, які задовольняють вимогам

$$\begin{aligned} & [\min(s_{i-1}, s_i) - \delta, \max(s_{i-1}, s_i) + \delta] \cap [s_{\min_m}, s_{\max_m}] \neq \emptyset, s \in \{x, y, z\}, i \in \{2, \dots, N_{L_n}\}; \\ & [\min(s_{j-1}, s_j) - \delta, \max(s_{j-1}, s_j) + \delta] \cap [s_{\min_n}, s_{\max_n}] \neq \emptyset, s \in \{x, y, z\}, j \in \{2, \dots, N_{L_m}\}, \end{aligned} \quad (4.5)$$

тобто, що можуть мати спільні точки.

Перетин отриманих пар відрізків, за умови

$$\begin{aligned} & [\min(s_{i-1}, s_i) - \delta, \max(s_{i-1}, s_i) + \delta] \cap [\min(s_{j-1}, s_j) - \delta, \max(s_{j-1}, s_j) + \delta] \neq \emptyset, \\ & s \in \{x, y, z\}, \end{aligned} \quad (4.6)$$

почергово розраховується згідно з наведеною нижче схемою.

Вирази (4.4) ... (4.6) дозволяють підвищувати швидкодію алгоритму внаслідок зменшення кількості безпосередніх обчислень перетинів ланок  $\mathbf{v}_i$  та  $\mathbf{v}_j$ . Будемо знаходити мінімальну відстань між цими об'єктами з використанням параметричної форми їх визначення

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_i(u_1) &= \mathbf{r}_{i-1} + \mathbf{v}_i u_1, \quad u_1 \in [0, 1]; \\ \mathbf{v}_j(u_2) &= \mathbf{r}_{j-1} + \mathbf{v}_j u_2, \quad u_2 \in [0, 1]. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Для зручності викладок застосовуватимемо вектор  $\mathbf{v}_{ij} = \mathbf{r}_{i-1} - \mathbf{r}_{j-1} = (x_{i-1} - x_{j-1}, y_{i-1} - y_{j-1}, z_{i-1} - z_{j-1}) = (v_{ijx}, v_{ijy}, v_{ijz})$ . Координати кінців  $\mathbf{r}_i^* = \mathbf{v}_i(u_1^*)$  й  $\mathbf{r}_j^* = \mathbf{v}_j(u_2^*)$  спільного перпендикуляра до відрізків  $\mathbf{v}_i$  і  $\mathbf{v}_j$  обчислюватимемо шляхом розв'язування системи

$$\begin{cases} (\mathbf{v}_i(u_1^*) - \mathbf{v}_j(u_2^*)) \mathbf{v}_i = 0; \\ (\mathbf{v}_i(u_1^*) - \mathbf{v}_j(u_2^*)) \mathbf{v}_j = 0, \end{cases} \quad (4.8)$$

відносно параметрів  $u_1^*$  та  $u_2^*$ .

Подальшому розгляду підлягають лише розв'язки  $u_1^*$  й  $u_2^*$ , які задовольняють обмеженням (4.7), інакше вважається, що досліджувані ланки не перетинаються. Для колінеарних векторів  $\mathbf{v}_i$  і  $\mathbf{v}_j$ , коли дискримінант системи (4.8) дорівнює нулю, визначити величину спільного перпендикуляра можна, наприклад, за допомогою прийняття  $u_1^* = 0$ , тобто  $\mathbf{r}_i^* = \mathbf{r}_{i-1}$ , та розрахунків  $u_2^* = (\mathbf{v}_i \mathbf{v}_{ij}) / (\mathbf{v}_i \mathbf{v}_j)$  і  $\mathbf{r}_j^*$  згідно з формулою (4.7).

Порівняння квадратів заданої точності обчислень  $\varepsilon=2\delta$  і мінімальної відстані  $d_i$  між відрізками  $\mathbf{v}_i$  та  $\mathbf{v}_j$

$$d_i^2 = (\mathbf{r}_i^* - \mathbf{r}_j^*)^2 \leq \varepsilon^2 \quad (4.9)$$

дозволяє кількісно оцінити просторову близькість поточних ланок.

При хибності нерівності (4.9) вважатимемо, що дані об'єкти не мають спільних точок. У протилежному випадку їх перетин знаходиться:

– для неколінеарних векторів  $\mathbf{v}_i$  та  $\mathbf{v}_j$ , як середина відрізка  $\mathbf{r}_i^* \mathbf{r}_j^*$

$$P_i = 0,5 (\mathbf{r}_i^* + \mathbf{r}_j^*);$$

– в іншому разі, як проміжок

$$P_i = [P_{i_1}, P_{i_2}], \quad P_{i_1} = 0,5 (\mathbf{r}_{i_1}^* + \mathbf{r}_{j_1}^*), \quad P_{i_2} = 0,5 (\mathbf{r}_{i_2}^* + \mathbf{r}_{j_2}^*), \quad (4.10)$$

де радіуси-вектори  $\mathbf{r}_{i_1}^*, \mathbf{r}_{j_1}^*, \mathbf{r}_{i_2}^*, \mathbf{r}_{j_2}^*$  утворюють прямокутник, сторони  $\mathbf{r}_{i_1}^* \mathbf{r}_{j_1}^*$  і  $\mathbf{r}_{i_2}^* \mathbf{r}_{j_2}^*$  якого перпендикулярні до ланок  $\mathbf{v}_i$  й  $\mathbf{v}_j$ , а  $\mathbf{r}_{i_1}^* \mathbf{r}_{i_2}^*$  і  $\mathbf{r}_{j_1}^* \mathbf{r}_{j_2}^*$  лежать, відповідно, на них. Довжина двох останніх сторін визначається перетином відрізків  $\mathbf{v}_i$  й  $\mathbf{v}_j$  при їх суміщенні вздовж спільного перпендикуляра.

Координати радіусів-векторів  $\mathbf{r}_{i_1}^*, \mathbf{r}_{j_1}^*, \mathbf{r}_{i_2}^*, \mathbf{r}_{j_2}^*$  виразів (4.10) можна знайти, наприклад, із першого рівняння системи (4.8), що подане у формі

$$\mathbf{v}_i^2 u_1^* - \mathbf{v}_i \mathbf{v}_j u_2^* + \mathbf{v}_j \mathbf{v}_i u_2^* = 0. \quad (4.11)$$

Це здійснюється циклічним підставленням до залежності (4.11) значень  $u_1^* \in \{0,1\}$ ,  $u_2^* \in \{0,1\}$  та обчислень, згідно з рівняннями (4.7), у разі дотримання наведених обмежень на параметри.

Таким чином, за допомогою викладених вище прийомів розраховується перетин двох довільних параметричних кривих.

Запропонований спосіб:

– поширюється на перетин не тільки двох просторових параметричних кривих, а й на потрібне число груп таких об'єктів;

– адаптується до потрібної точності розрахунків і раціонального використання комп'ютерних ресурсів, тобто необхідної пам'яті та кількості обчислень;

- інваріантний до застосовуваних для визначення кривих аналітичних функцій та не потребує розрахунку їх похідних;
- забезпечує знаходження нескінченних множин розв'язків у випадку коли певні ділянки досліджуваних ліній збігаються;
- може бути використаний як компонент математичного забезпечення для геометричного моделювання більш складних об'єктів.

Наведені відомості засвідчують доцільність використання структурно-параметричної методології для ефективного опрацювання геометричних питань, оскільки при цьому складніша задача, зазвичай, поділяється на певну сукупність більш простих, які розв'язуються набагато легше. Зростання кількості останніх нині успішно компенсується продуктивними можливостями сучасної комп'ютерної техніки щодо автоматизації інженерних розрахунків.

Запропонований спосіб моделювання слугує ілюстрацією практичного застосування сформульованих у пункті 3.1.2 принципів системного підходу та універсальності. Відносно першого це підтверджується аналізом досліджуваних фігур як певних структур (тобто множин взаємопов'язаних геометричних елементів, що мають власні параметри форми, розмірів та положення), а стосовно другого, то очевидний факт охоплення напрацьованими прийомами моделювання доволі широкого класу геометричних об'єктів.

#### 4.1.1.2. Перетин параметричних поверхонь

У цьому підпункті запропоновано нові прийоми розв'язування задачі визначення перетину довільних параметричних поверхонь. Аналізуватимемо поверхні, координати радіуса-вектора  $\mathbf{r}$  яких у прямокутній декартовій системі  $Oxuz$  визначаються параметричними рівняннями вигляду

$$\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{r}[x(u, v), y(u, v), z(u, v)], \quad u \in [u_{\min}, u_{\max}], \quad v \in [v_{\min}, v_{\max}], \quad (4.12)$$

де  $u, v$  – параметри.

Розв'язуватимемо поставлену задачу у два етапи: на першому – замінюватимемо вихідні поверхні багатограними у вигляді множин плоских трикутників, на другому – розраховуватимемо перетини останніх.

Розглядатимемо межу поверхні (4.12) як об'єднання ліній

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}(u, v_{\min}), \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}(u_{\min}, v), \quad \mathbf{r}_3 = \mathbf{r}(u, v_{\max}), \quad \mathbf{r}_4 = \mathbf{r}(u_{\max}, v), \quad (4.13)$$

де  $u \in [u_{\min}, u_{\max}], v \in [v_{\min}, v_{\max}]$ .

Будемо апроксимувати складену фігуру (4.13) замкненою просторовою ламаною з вершинами в точках

$$A=(u_{\min}, v_{\min}), B=(u_{\max}, v_{\min}), C=(u_{\max}, v_{\max}), D=(u_{\min}, v_{\max}). \quad (4.14)$$

Вважатимемо наперед заданим максимальне допустиме значення  $\delta$  відхилення створюваної багатогранної поверхні, яке обчислюватимемо як довжину перпендикуляра від контрольних точок певних кривих поверхні (4.12) до апроксимуючих ці лінії прямолінійних відрізків.

У якості зазначених кривих обираємо сторони топологічно подібних до (4.13) поточних чотирикутників та їх діагоналі  $\mathbf{r}_5$  і  $\mathbf{r}_6$ , що лежать на поверхні (4.12) та з'єднують відповідно їх вершини  $A$  і  $C$ ,  $B$  і  $D$ .

**Перший етап.** Апроксимацію здійснюватимемо методом поділу навпіл параметричних проміжків визначення поверхні (4.12).

Для ітераційного процесу застосовуватимемо  $N_m=2^{m-1}$  контрольних точок,  $m \in \mathbb{N}$ . Розраховані значення координат вершин поточної отриманої ламаної зберігатимемо в масиві  $V$ , кожний елемент якого це трикомпонентний кортеж.

Запропонований алгоритм складається з наступних дій.

1. Для початкового значення параметра  $t_n$ , де  $t$  надалі є узагальненням  $u$  та  $v$ , згідно з формулами (4.13) і (4.12) обчислюється й заповнюється перша трійка координат  $x, y, z$  масиву  $V$ .

2. На неапроксимованій поточній частині кривої, якій відповідає проміжок змінювання параметра  $t \in [t_n, t_k]$  (спочатку це  $[t_{\min}, t_{\max}]$ ), для  $N_m$  внутрішніх контрольних точок із значеннями параметра

$$t_m = t_n + (0,5 + (-1)^m [m/2] / (N_m + 1)) \cdot (t_k - t_n), \quad m \in \{1, \dots, N_m\},$$

згідно з виразами (4.12) та (4.13) розраховуються координати радіусів-векторів  $\mathbf{r}_m$  (а також один раз для  $t_n$  і  $t_k$  – кінцеві точки  $\mathbf{r}_n$  і  $\mathbf{r}_k$  поточного апроксимуючого відрізка) й порівнюються квадрати довжин перпендикуляра  $h_m$  від  $\mathbf{r}_m$  до відрізка  $\mathbf{r}_n \mathbf{r}_k$  та допустимого відхилення  $\delta$

$$h_m^2 = \frac{((\mathbf{r}_m - \mathbf{r}_n) \times (\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_n))^2}{(\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_n)^2} \leq \delta^2. \quad (4.15)$$

3. Якщо умову (4.15) не дотримано, то досліджувана частина кривої

зменшується за рахунок скорочення проміжку параметра  $t$  у два рази  $[t_n, t_n+0,5(t_k-t_n)]$  і виконується перехід до пункту 2.

У протилежному випадку поточна ділянка кривої вважається апроксимованою й наступному елементу масиву  $V$  присвоюються відповідні значення компонентів вектора  $\mathbf{r}_k$ . Якщо  $t_k$  сягнуло величини  $t_{\max}$ , тобто  $u_{\max}$  або  $v_{\max}$ , то реалізується пункт 4 алгоритму.

Коли дійсній ітерації передувало зменшення проміжку параметра  $t$ , то для останнього поточним стає відрізок  $[t_k, t_k+(t_k-t_n)]$ , в іншому разі –  $[t_k, t_k+2(t_k-t_n)]$ . Далі виконується пункт 2.

Для кривих  $\mathbf{r}_5$  і  $\mathbf{r}_6$ , які залежать від  $u$  та  $v$ , під час наведених вище розрахунків застосовується одночасне оброблення проміжків і значень обох параметрів. При цьому, оскільки для  $\mathbf{r}_6$  приріст  $u$  від'ємний, то в пункті 3 контролюється досягнення не  $u_{\max}$ , а  $u_{\min}$ .

#### 4. Завершення обчислень.

Подальші дії щодо заміни з потрібною точністю  $\delta$  поверхні (4.12) об'єднанням плоских трикутників спираються на подані вище прийоми апроксимації кривих ламаними.

Будемо застосовувати двовимірні масиви  $S$  і  $G$ , які відповідно містять дані про поточні неопрацьовані ділянки вихідної поверхні й отримані частини багатогранної. Кожний елемент  $S_i=(u_n, u_k, v_n, v_k)$  є кортежем, що зберігає початкові та кінцеві значення параметрів  $u$  і  $v$ , а  $G_i=(x_A, y_A, z_A, x_B, y_B, z_B, x_C, y_C, z_C, x_D, y_D, z_D)$  – координати  $x, y, z$  вершин  $A, B, C, D$  згідно з виразом (4.14). Ітераційний процес наближення криволінійної поверхні багатогранною полягає в наступному.

1. Перший кортеж набору  $S$  отримує значення  $(u_{\min}, u_{\max}, v_{\min}, v_{\max})$ , що відтворюють весь початковий об'єкт (4.12).

2. Для неапроксимованої ділянки криволінійної поверхні, яку моделює поточний кортеж масиву  $S$  з величинами  $(u_n, u_k, v_n, v_k)$ , робиться циклічна ітераційна спроба, з використанням розглянутого вище алгоритму, заміни кривих  $\mathbf{r}_j, j \in \{1 \dots 6\}$ , відрізками шляхом поступового зменшення параметрів  $u_k$  і  $v_k$  до  $u'_k$  і  $v'_k$ .

3. Після досягнення в попередньому пункті заданої точності  $\delta$  в залежності від початкових  $u_k$  і  $v_k$  та одержаних значень  $u'_k$  і  $v'_k$  поточному кортежу масиву  $S$  присвоюються величини:

$$\text{а) } u'_k = u_k \text{ та } v'_k = v_k - (u_k, u_k, v_k, v_k);$$

$$\text{б) } u'_k = u_k - (u_n, u_k, v'_k, v_k);$$

$$\text{в) } v'_k = v_k - (u'_k, u_k, v_n, v_k);$$

г)  $u'_k \neq u_k$  й  $v'_k \neq v_k - (u'_k, u_k, v'_k, v_k)$  та додаються, за наявності компонентів  $(u_k, u_k, v_k, v_k)$  шляхом заміни останніх, у даний набір ще два кортежі зі значеннями  $(u'_k, u_k, v_n, v'_k)$  і  $(u_n, u'_k, v'_k, v_k)$ .

До масиву  $G$  заносяться отримані координати поточних вершин  $A, B, C, D$ . Коли це зроблено в перший раз, то габаритам створюваної багатогранної поверхні в системі  $Oxyz$  надаються величини

$$s \in [s_{\min}, s_{\max}] = [\min(s_A, s_B, s_C, s_D), \max(s_A, s_B, s_C, s_D)],$$

інакше

$$s \in [s_{\min}, s_{\max}] = [\min(s_{\min}, s_A, s_B, s_C, s_D), \max(s_{\max}, s_A, s_B, s_C, s_D)],$$

де  $s \in \{x, y, z\}$ .

4. Далі здійснюється пошук у масиві  $S$  кортежів із  $u_n \neq u_k$  та  $v_n \neq u_k$ , тобто неапроксимованих ділянок криволінійної поверхні. У позитивному випадку виконується другий пункт даного алгоритму, інакше – п'ятий.

5. Приймаємо  $s = [s_{\min} - \delta, s_{\max} + \delta]$ , де  $s \in \{x, y, z\}$ , завершуємо обчислення.

Отже, після апроксимації кожна досліджувана поверхня  $r_n$  вигляду (4.12) описується масивом  $G_n$  топологічних чотирикутників (4.14) із  $x, y, z$  координатами вершин та габаритами

$$r_n = G_n(N_{G_n}, 12); \quad s_n \in [s_{\min n}, s_{\max n}], \quad s \in \{x, y, z\}, \quad (4.16)$$

де  $N_{G_n}$  – загальна кількість дванадцятикомпонентних кортежів.

**Другий етап** розв'язування поставленої задачі зводиться до того, що для довільних поверхонь  $r_n$  і  $r_m$ , які подаються у вигляді (4.16), необхідно визначити всі їх спільні точки.

Надалі замість об'єктів (4.14) розглядатимемо відповідні їм два трикутники, що утворюються проведенням однієї з діагоналей, наприклад,  $AC$ . Через  $\Delta A_i B_i C_i$  та  $\Delta A_j B_j C_j$  позначатимемо поточні грані поверхонь  $r_n$  і  $r_m$ , перетин яких аналізується. При цьому застосовуватимемо вектори  $a_s = (a_{sx}, a_{sy}, a_{sz}) = r_{B_s} - r_{A_s} = (x_{B_s} - x_{A_s}, y_{B_s} - y_{A_s}, z_{B_s} - z_{A_s})$ ,  $b_s = (b_{sx}, b_{sy}, b_{sz}) = r_{C_s} - r_{B_s} = (x_{C_s} - x_{B_s}, y_{C_s} - y_{B_s}, z_{C_s} - z_{B_s})$ ,  $c_s = (c_{sx}, c_{sy}, c_{sz}) = r_{A_s} - r_{C_s} = (x_{A_s} - x_{C_s}, y_{A_s} - y_{C_s}, z_{A_s} - z_{C_s})$ , де  $s \in \{i, j\}$ .

Дане питання опрацьовується наступним чином.

Досліджувані об'єкти перетинаються якщо

$$[s_{\min_n}, s_{\max_n}] \cap [s_{\min_m}, s_{\max_m}] \neq \emptyset, s \in \{x, y, z\}. \quad (4.17)$$

У разі дотримання умови (4.17) із можливих пар  $\{\Delta A_i B_i C_i, \Delta A_j B_j C_j\}$  поточних трикутників зазначених поверхонь для наступного аналізу залишаються лише ті, які задовольняють вимогам

$$\begin{aligned} & [\min(s_{A_i}, s_{B_i}, s_{C_i}) - \delta, \max(s_{A_i}, s_{B_i}, s_{C_i}) + \delta] \cap [s_{\min_m}, s_{\max_m}] \neq \emptyset, s \in \{x, y, z\}, i \in \{1, \dots, 2N_{G_n}\}; \\ & [\min(s_{A_j}, s_{B_j}, s_{C_j}) - \delta, \max(s_{A_j}, s_{B_j}, s_{C_j}) + \delta] \cap [s_{\min_n}, s_{\max_n}] \neq \emptyset, s \in \{x, y, z\}, \\ & j \in \{1, \dots, 2N_{G_m}\}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

тобто, що можуть мати спільні точки.

Перетин отриманих пар трикутників, за умови

$$\begin{aligned} & [\min(s_{A_i}, s_{B_i}, s_{C_i}) - \delta, \max(s_{A_i}, s_{B_i}, s_{C_i}) + \delta] \cap [\min(s_{A_j}, s_{B_j}, s_{C_j}) - \delta, \max(s_{A_j}, s_{B_j}, s_{C_j}) + \delta] \neq \emptyset, \\ & s \in \{x, y, z\}, \end{aligned} \quad (4.19)$$

почергово розраховується згідно з наведеною нижче схемою.

Вирази (4.17) ... (4.19) підвищують швидкодію алгоритму внаслідок зменшення кількості безпосередніх обчислень перетинів  $\Delta A_i B_i C_i$  і  $\Delta A_j B_j C_j$ .

Коли виконується

$$\begin{vmatrix} x_{sj} - x_{Ai} & y_{sj} - y_{Ai} & z_{sj} - z_{Ai} \\ a_{ix} & a_{iy} & a_{iz} \\ c_{ix} & c_{iy} & c_{iz} \end{vmatrix} = 0, s \in \{A, B, C\},$$

то дані трикутники розміщені в одній площині. Їх перетином може бути порожня множина, точка, відрізок або багатокутник. Відповідний обчислювальний алгоритм розглядається в підпункті 4.1.1.3.

Якщо

$$\begin{vmatrix} a_{ix} & a_{iy} & a_{iz} \\ b_{ix} & b_{iy} & b_{iz} \\ s_{jx} & s_{jy} & s_{jz} \end{vmatrix} = 0, s \in \{a, b\},$$

то зазначені об'єкти лежать у паралельних площинах і не мають спільних точок.

Для обчислення решти випадків застосовуватимемо наступну параметричну форму подання трикутників  $A_s B_s C_s$

$$\mathbf{r}_s(u, v) = \mathbf{a}_s uv + \mathbf{c}_s v + \mathbf{r}_{c_s}, \quad u \in [0, 1], \quad v \in [0, 1] \quad (4.20)$$

та їх сторін

$$\mathbf{r}_{skm}(w) = T_{sk} + (T_{sm} - T_{sk})w, \quad k \neq m, \quad w \in [0, 1], \quad (4.21)$$

де  $s \in \{i, j\}$ ,  $T_s = (T_{s_k})_1^3 = (A_s, B_s, C_s)$ ,  $m \in \{1, 2, 3\}$ .

У даному разі перетином  $\Delta A_i B_i C_i$  та  $\Delta A_j B_j C_j$  може бути, крім порожньої множини, точка або відрізок.

Необхідною умовою останнього факту є наявність певних розв'язків систем із трьох скалярних лінійних рівнянь (із невідомими  $uv$ ,  $v$ ,  $w$ ), що утворюються прирівнюванням правих частин векторних рівнянь (4.21) і (4.20) різних трикутників  $A_s B_s C_s$ . З геометричної точки зору це відповідає перетину сторін одного з дійсних об'єктів з іншим, тобто отримані величини параметрів  $u$ ,  $v$ ,  $w$  повинні належати проміжку  $[0, 1]$ .

Отже, розрахунок множини спільних точок для  $\Delta A_i B_i C_i$  і  $\Delta A_j B_j C_j$  зводиться до циклічного опрацювання шести розглянутих вище систем рівнянь, оскільки у виразі (4.21) індекси  $km$  та  $mk$  подають одну сторону трикутника. Мета при цьому полягає у знаходженні максимум двох розв'язків, що визначають перетин об'єктів, які аналізуються.

Запропонований спосіб:

- поширюється на перетин не тільки двох параметричних поверхонь, а й на необхідне число груп таких об'єктів;
- адаптується до потрібної точності розрахунків і раціонального використання комп'ютерних ресурсів (необхідної пам'яті та кількості обчислень);
- інваріантний до функцій, що застосовуються для визначення параметричних поверхонь, і не потребує розрахунку їх похідних;
- забезпечує знаходження нескінченних множин розв'язків у випадку коли певні ділянки досліджуваних поверхонь збігаються;
- може бути використаний як компонент математичного забезпечення для геометричного моделювання більш складних об'єктів.

Матеріали даного підпункту є узагальненням попереднього завдяки поширенню запропонованих прийомів геометричного моделювання з параметричних кривих на відповідні поверхні. Обраний напрямок свідчить про раціональний характер структурно-параметричної методології, оскільки

базується на її принципах системного підходу, універсальності, відкритості та розвитку. Дана стратегія дозволяє не тільки поділяти складну задачу на кілька більш простих, а й комплексно застосовувати вже існуючі розв'язки для останніх. Такий спосіб також підвищує продуктивність комп'ютерного програмування, бо забезпечує неодноразове використання напрацьованих універсальних модулів у якості складових елементів різних систем. Розглянуті прийоми апроксимації ліній і поверхонь надалі в роботі поширено на тіла та багатовимірні геометричні фігури.

#### 4.1.1.3. Перетин багатокутників у площині

Предмет дослідження даного підпункту достатньо висвітлений у наявній літературі, наприклад, [113, 150]. Тому головний акцент робиться, по-перше, на використанні зазначених методів, прийомів та алгоритмів як компонентів для опрацювання більш складних задач, зокрема, попереднього підпункту, визначення із заданою точністю спільної області кількох плоских об'єктів тощо; по-друге, стосовно обґрунтування можливості розв'язування цих питань структурно-параметричними засобами.

Оскільки, як було показано в підпункті 4.1.1.1, довільна просторова параметрична крива з потрібною точністю апроксимується певною множиною взаємопов'язаних прямолінійних відрізків, тобто ламаною, то звідси й обмежена замкненою кривою плоска фігура відтворюється з необхідною точністю деяким числом багатокутників.

Подальшим кроком розв'язування обчислювальними методами, зокрема задачі визначення перетину плоских фігур, є заміна отриманих багатокутників, шляхом застосування викладених у наведеній літературі прийомів, спочатку на опуклі багатокутники, а потім – на трикутники (наприклад, із використанням діагоналей багатокутників). Отже, завдяки структурному підходу визначення спільної області плоских геометричних об'єктів може базуватись на розрахунках перетинів окремих трикутників. Розглянемо опрацювання окресленої задачі засобами параметричного моделювання.

Подібно до залежностей (4.20) і (4.21) для  $i$ -го трикутника,  $i \in \mathbb{N}$ , який у прямокутній декартовій системі координат  $Oxy$  визначається радіусами-векторами своїх вершин

$$\mathbf{r}_{ki} = (x_{ki}, y_{ki}), \quad k \in \{1, 2, 3\}, \quad (4.22)$$

запишемо рівняння його поверхні

$$\mathbf{r}_i(u_i, v_i) = (\mathbf{r}_{2i} - \mathbf{r}_{1i})u_i v_i + (\mathbf{r}_{1i} - \mathbf{r}_{3i})v_i + \mathbf{r}_{3i} \quad (4.23)$$

та сторін

$$l_{k_i}(u_i) = \mathbf{r}_{k_i} + (\mathbf{r}_{k_{i+1}} - \mathbf{r}_{k_i})u_i, \quad (4.24)$$

де  $u_i \in [0, 1]$ ,  $v_i \in [0, 1]$  – параметри;

$$\mathbf{r}_{4i} = \mathbf{r}_{1i}.$$

Запропонований алгоритм знаходження спільної області трикутників  $\mathbf{r}_i(u_i, v_i)$  та  $\mathbf{r}_j(u_j, v_j)$ , де  $i, j \in \mathbf{N}$ ,  $j \neq i$ , ґрунтується на двох обчислювальних процедурах: розрахунку перетину сторін, які мають вигляд (4.24), та визначення приналежності довільної точки трикутнику, що поданий у формі (4.23).

Сторони  $l_{k_i}(u_i)$  та  $l_{k_j}(u_j)$ , де  $k \in \{1, 2, 3\}$ , перетинаються коли розв'язки векторного рівняння

$$l_{k_i}(u_i) = l_{k_j}(u_j) \quad (4.25)$$

знаходяться у проміжках  $u_i \in [0, 1]$  та  $u_j \in [0, 1]$ .

Довільна точка  $\mathbf{r}(x, y)$  належить трикутнику (4.23), якщо розв'язки рівняння

$$\mathbf{r}(x, y) = \mathbf{r}_i(u_i, v_i) \quad (4.26)$$

задовольняють наявні обмеження для значень параметрів  $u_i$  та  $v_i$ .

Запропонований алгоритм розрахунку перетину трикутників  $\mathbf{r}_i(u_i, v_i)$ ,  $\mathbf{r}_j(u_j, v_j)$  полягає у виконанні наступних дій.

1. Згідно з виразами (4.22) ... (4.26) визначаються перетини (що можуть бути відрізками, точками або порожньою множиною) сторін  $i$ -го трикутника з  $j$ -м трикутником.

Реалізація даного пункту здійснюється почерговим обчисленням перетину поточної сторони  $i$ -го трикутника зі сторонами  $j$ -го трикутника.

У випадку отримання відрізка відразу маємо потрібний результат (при подальшому оброблянні сторін  $j$ -го трикутника в пункті 2 алгоритму зазначена комбінація сторін пропускається). Якщо одержано дві точки, то останні й обумовлюють необхідний перетин. Коли така точка одна, то приналежність кінця поточної сторони  $i$ -го трикутника  $j$ -му трикутнику визначає другий кінець шуканого відрізка, де першим є знайдена вище точка

перетину сторін трикутників. У випадку відсутності останньої перевіркою належності кінців поточної сторони  $i$ -го трикутника до  $j$ -го трикутника досліджуємо збіг цієї сторони з шуканим відрізком (при цьому для поточної сторони  $i$ -го трикутника відпадає потреба в подальшому аналізі можливих перетинів з іншими сторонами  $j$ -го трикутника).

2. Пункт 1 повторюється, але вже для визначення перетинів сторін  $j$ -го трикутника з  $i$ -м трикутником.

*Примітка.* Результат виконання пунктів 1 та 2 алгоритму – це набір відрізків (що може вироджуватися в точку або, навіть, порожню множину), який відтворює перетин трикутників  $r_i(u_i, v_i)$ ,  $r_j(u_j, v_j)$  та являє собою, в загальному випадку, просту замкнену ламану.

3. Формування послідовним сполученням отриманих відрізків плоского багатокутника перетину (див. примітку вище).

Подальшими діями щодо обчислення спільної області довільних багатокутників, після розрахунку перетинів їх поточних трикутників згідно з наведеним вище алгоритмом, є об'єднання, тобто синтез у термінах структурно-параметричного підходу, одержаних багатокутників у шукану інтегральну геометричну фігуру шляхом виключення однакових суміжних сторін останніх. Дане питання досліджується в підпункті 4.1.4.1.

Запропоновану методику структурно-параметричного визначення спільної області плоских фігур може бути узагальнено й на перетин тіл. Ця задача, що спирається на алгоритм обчислення перетину багатогранників, розглядається далі.

#### 4.1.1.4. Перетин багатогранників і довільних тіл

Постановка завдання даного підпункту певною мірою збігається з метою попереднього й полягає в обґрунтуванні можливості розв'язування структурно-параметричними засобами вказаних задач та застосуванні останніх для опрацювання більш складних геометричних питань.

Додатково зосереджується увага на забезпеченні структурно-параметричним підходом узагальнень розроблених методів, прийомів та алгоритмів стосовно поширення області їх використання від фігур меншої вимірності – до більшої. Мається на увазі, зокрема, перехід від розв'язування плоских задач у попередньому підпункті – до просторових у цьому.

Отже, подамо обчислювальний алгоритм знаходження спільної частини кількох багатогранників, який здатний бути базовою складовою для зазначених розрахунків у випадку й довільних тіл.

У підпункті 4.1.1.2 наведено методику апроксимації з наперед заданою точністю параметричних поверхонь багатогранними, що, у свою чергу, розглядаються як сукупності плоских трикутних областей. Оскільки в такому разі поверхня довільного тіла апроксимується багатогранною, то останнє подається деяким числом взаємопов'язаних тетраедрів. Таким чином, завдяки структурному підходу, визначення перетину тіл може зводиться до відповідних розрахунків для певних множин тетраедрів. Наведемо далі запропонований спосіб розв'язування цього питання засобами параметричного моделювання.

Нехай довільний  $i$ -й тетраедр,  $i \in N$ , у прямокутній декартовій системі координат  $Oxyz$  визначається радіусами-векторами вершин

$$\mathbf{r}_{ik} = (x_{ik}, y_{ik}, z_{ik}), \quad k \in \{1, 2, 3, 4\}. \quad (4.27)$$

З використанням виразу (4.27) маємо наступні формули для:

– ребер

$$L_i = (l_{im}(u_{im}))_1^6$$

$$l_{i1}(u_{i1}) = \mathbf{r}_{i1} + u_{i1}(\mathbf{r}_{i2} - \mathbf{r}_{i1}), \quad l_{i2}(u_{i2}) = \mathbf{r}_{i1} + u_{i2}(\mathbf{r}_{i3} - \mathbf{r}_{i1}), \quad l_{i3}(u_{i3}) = \mathbf{r}_{i1} + u_{i3}(\mathbf{r}_{i4} - \mathbf{r}_{i1}),$$

$$l_{i4}(u_{i4}) = \mathbf{r}_{i2} + u_{i4}(\mathbf{r}_{i3} - \mathbf{r}_{i2}), \quad l_{i5}(u_{i5}) = \mathbf{r}_{i2} + u_{i5}(\mathbf{r}_{i4} - \mathbf{r}_{i2}), \quad l_{i6}(u_{i6}) = \mathbf{r}_{i3} + u_{i6}(\mathbf{r}_{i4} - \mathbf{r}_{i3}),$$

$$u_{im} \in [0, 1], \quad m \in \{1, \dots, 6\}; \quad (4.28)$$

– граней

$$G_i = (g_{in}(v_{in}, w_{in}))_1^4$$

$$\mathbf{g}_{i1}(v_{i1}, w_{i1}) = \mathbf{r}_{i2} + (\mathbf{r}_{i3} - \mathbf{r}_{i2})v_{i1} + (\mathbf{r}_{i4} - \mathbf{r}_{i3})v_{i1}w_{i1}, \quad \mathbf{g}_{i2}(v_{i2}, w_{i2}) = \mathbf{r}_{i3} + (\mathbf{r}_{i4} - \mathbf{r}_{i3})v_{i2} + (\mathbf{r}_{i1} - \mathbf{r}_{i4})v_{i2}w_{i2},$$

$$\mathbf{g}_{i3}(v_{i3}, w_{i3}) = \mathbf{r}_{i4} + (\mathbf{r}_{i1} - \mathbf{r}_{i4})v_{i3} + (\mathbf{r}_{i2} - \mathbf{r}_{i1})v_{i3}w_{i3}, \quad \mathbf{g}_{i4}(v_{i4}, w_{i4}) = \mathbf{r}_{i1} + (\mathbf{r}_{i2} - \mathbf{r}_{i1})v_{i4} + (\mathbf{r}_{i3} - \mathbf{r}_{i2})v_{i4}w_{i4},$$

$$v_{in} \in [0, 1], \quad w_{in} \in [0, 1], \quad n \in \{1, \dots, 4\}; \quad (4.29)$$

– тетраедра  $\mathbf{r}_i(u_i, v_i, w_i)$

$$\mathbf{r}_i(u_i, v_i, w_i) = \mathbf{r}_{i1} + (\mathbf{r}_{i2} - \mathbf{r}_{i1})u_i + (\mathbf{r}_{i3} - \mathbf{r}_{i2})u_i v_i + (\mathbf{r}_{i4} - \mathbf{r}_{i3})u_i v_i w_i,$$

$$u_i \in [0, 1], \quad v_i \in [0, 1], \quad w_i \in [0, 1], \quad (4.30)$$

де  $u, v, w$  – параметри.

Розроблений алгоритм визначення спільної області тетраедрів  $\mathbf{r}_i$  та  $\mathbf{r}_j$ , де  $i, j \in \mathbb{N}$ ,  $j \neq i$ , базується на двох обчислювальних процедурах: розрахунку, із застосуванням виразів (4.28), перетину плоских трикутних граней, що мають вигляд (4.29), та дефініції інцидентності певної точки тілу, яке подається у формі (4.30).

Першу із зазначених процедур розглянуто в пункті 4.1.1.2 під час подання перетину параметричних поверхонь, а інша полягає в тому, що точка  $\mathbf{r}(x, y, z)$  належить тетраедру  $\mathbf{r}_i$ , коли розв'язки рівняння

$$\mathbf{r}(x, y, z) = \mathbf{r}_i(u_i, v_i, w_i) \quad (4.31)$$

задовольняють наявні обмеження (4.30) на значення параметрів  $u_i, v_i, w_i$ .

Послідовність обчислення перетину тетраедрів  $\mathbf{r}_i(u_i, v_i, w_i)$  та  $\mathbf{r}_j(u_j, v_j, w_j)$  полягає у виконанні наступних дій.

1. Згідно з виразами (4.27) ... (4.31) визначаються грані спільного для  $\mathbf{r}_i$  та  $\mathbf{r}_j$  багатогранника, які належать граням  $\mathbf{r}_i$ .

Реалізація даного пункту здійснюється почерговим розрахунком перетину поточної грані  $i$ -го тетраедра та граней  $j$ -го тетраедра. У результаті чого, в загальному випадку, для поточної грані тетраедра  $\mathbf{r}_i$  отримуємо необхідний плоский багатокутник (можливими є також порожня множина, точка, декілька відрізків у вигляді незамкненої ламаної, в останньому разі зазначені об'єкти доповнюються до потрібного плоского багатокутника відповідними частинами ребер поточної грані тетраедра  $\mathbf{r}_i$ ).

2. Дії пункту 1 повторюються, але вже для обчислення граней спільного багатогранника, які інцидентні граням  $\mathbf{r}_j$ .

*Примітка.* Одержані вище плоскі багатокутники подаються далі упорядкованими множинами декартових координат своїх вершин.

3. Аналіз отриманих результатів щодо можливості визначення геометрії спільного багатогранника для досліджуваних тетраедрів  $\mathbf{r}_i$  та  $\mathbf{r}_j$ .

Якщо послідовним об'єднанням, синтезом у термінах структурно-параметричного підходу, вздовж спільних сторін наявних плоских багатокутників удасться сформувати замкнену просторову область, то переходимо до пункту 4.

В іншому разі для отриманих перетинів граней  $\mathbf{r}_i$  та  $\mathbf{r}_j$ :

– порожньої множини, точки або відрізка. Якщо згідно з формулою (4.31) вершини  $i$ -го тетраедра належать  $j$ -му чи навпаки, то шуканим

розв'язком буде весь зазначений «внутрішній» тетраедр. У протилежному випадку на виході маємо порожню множину, точку або відрізок. Далі виконується пункт 4;

– *декількох багатокутників*. Почергово на гранях тетраедра, вершини якого лежать усередині іншого, доповнюємо наявні відрізки відповідними частинами ребер, які виходять із поточної «внутрішньої» вершини, до потрібних плоских багатокутників, що належать зазначеним граням. Таким чином, одержуємо недостатні, після виконання пунктів 1 і 2 алгоритму, грані спільного для тетраедрів  $r_i$  та  $r_j$  багатогранника. Робимо перевірку, наведену на початку пояснень до дії 3, щодо формування потрібної замкненої просторової області й переходимо до пункту 4.

4. *Питання визначення перетину тетраедрів  $r_i$  та  $r_j$  вважається опрацьованим. Отримані розв'язки відтворюються відповідною множиною розрахованих даних.*

Тестові приклади застосування запропонованого алгоритму щодо визначення спільної області двох тетраедрів показано на рис. 4.1.

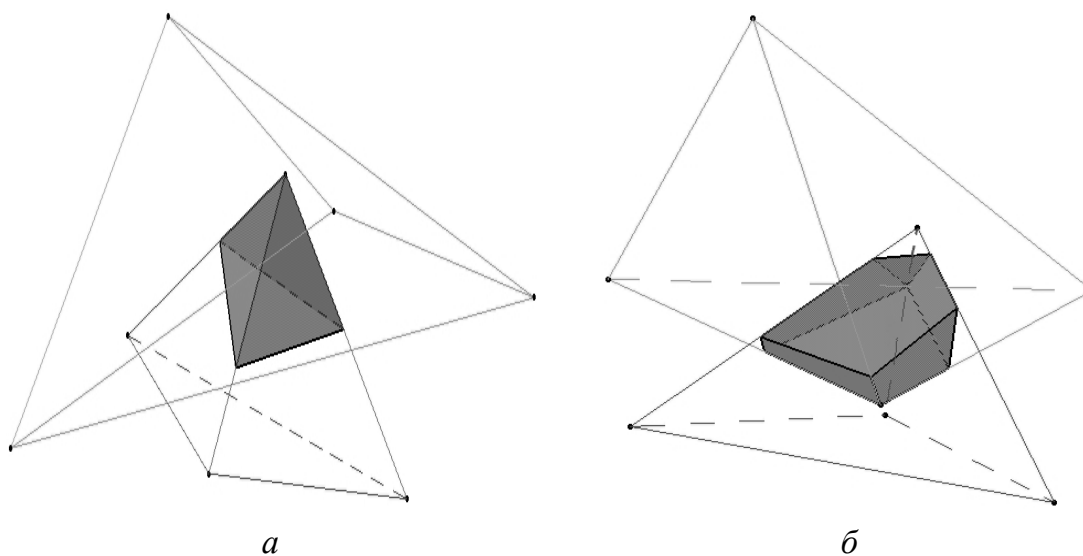


Рис. 4.1. Тестові приклади перетину тетраедрів

На практиці використання тривимірних геометричних об'єктів як певної множини взаємопов'язаних компонентів доцільно застосовувати, наприклад, під час розрахунків на міцність машинобудівних конструкцій методом скінченних елементів, моделювання складаних одиниць, розробляння ТП тощо. Запропоновані в підпунктах 4.1.1.1 ... 4.1.1.4 прийоми формоутворення можуть бути поширені також на простір із вимірністю більшою за три.

### 4.1.2. Метричні задачі

Розглянуті в попередньому пункті питання використання структурно-параметричного підходу для апроксимації довільних кривих, поверхонь та тіл шляхом застосування відрізків прямих, плоских трикутників і тетраедрів, тобто фігур, що мають нескладний аналітичний опис, дозволяє спрощувати розв'язування таких метричних задач як розрахунки довжин ліній, площ поверхонь, об'ємів тіл і т. д. При цьому означені процедури для інтегральних об'єктів зводяться до підсумовування відповідних величин їх складових елементів.

У даному пункті, на прикладі обчислення довжини кривої, аналізуються прийоми застосування структурно-параметричного підходу для визначення метричних властивостей геометричних фігур та подається спосіб, який базується на використанні рекурсії. Остання дозволяє зменшувати потреби в комп'ютерній пам'яті та засвідчує можливість ієрархічного, в даному випадку у вигляді бінарного дерева, структурно-параметричного подання не тільки геометричних об'єктів, а й алгоритмів їх опрацювання.

Наведене далі обчислення довжин ліній, завдяки належному узагальненню, поширюється й на розрахунки площ та об'ємів фігур шляхом застосування відповідних метричних властивостей таких їх елементарних складових як трикутники та тетраедри.

#### 4.1.2.1. Рекурсивний метод визначення довжини параметричної кривої

У даному підпункті подано обчислювальний алгоритм визначення довжини довільної параметричної кривої шляхом використання рекурсивних процедур. Запропонований спосіб базується на структурно-параметричному підході до геометричного моделювання. Основна мета цієї частини монографії полягає в запропонуванні методики, яка спирається на подані в підпункті 4.1.1.1 структурно-параметричні прийоми апроксимації, для обчислення довжини довільної параметричної кривої.

Розглядатимемо далі лінію, координати радіуса-вектора  $\mathbf{r}$  якої у прямокутній декартовій системі  $Oxyz$  формуються функціями вигляду (4.1) параметра  $u$ . Поставлену задачу розв'язуватимемо шляхом поділу вихідного об'єкта (кривої) на більш прості її елементи (дуги). Критерієм завершення даного процесу є досягнення потрібної точності, що реалізується одержанням

належних різниць між довжинами поточних дуг вихідної кривої та апроксимуючими їх хордами, тобто прямолінійними відрізками, які сполучають кінці дуг. За довжину  $L$  лінії (4.1) вважатимемо, з визначеною точністю  $\varepsilon$ , суму довжин  $l_i$  апроксимуючих її хорд.

У програмуванні рекурсивними називають процедури, функції тощо, які викликають на виконання самі себе. Запропонований рекурсивний обчислювальний алгоритм у якості вхідних аргументів містить значення параметра на кінцях поточної дуги лінії (4.1), де спочатку це  $u_{\min}$  та  $u_{\max}$ . Далі, в залежності від дотримання чи ні необхідної точності апроксимації, відповідно додається наявна довжина хорди  $l_i$  до підсумкового значення  $L$  або ділиться проміжок змінювання параметра  $u$  на дві частини, чим реалізується утворення двох нових дуг, після чого для них знову викликається проаналізована процедура.

У результаті описаного процесу формується ієрархічне бінарне дерево, кінцевим вершинам якого відповідають дуги досліджуваної кривої з певними проміжками змінювання параметра  $u \in [u_{i-1}, u_i]$  та довжинами хорд  $l_i$ , котрі з потрібною точністю апроксимують ці дуги.

Якщо кількість останніх позначити через  $n$ , то

$$L = \sum_{i=1}^n l_i, \quad l_i = |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{i-1}|, \quad \mathbf{r}_{i-1} = \mathbf{r}(u_{i-1}), \quad \mathbf{r}_i = \mathbf{r}(u_i);$$

$$\Delta u = u_{\max} - u_{\min} = \sum_{i=1}^n \Delta u_i, \quad \Delta u_i = u_i - u_{i-1}. \quad (4.32)$$

Ключовим моментом розглянутих прийомів геометричного моделювання є дотримання належної точності апроксимації кожної з поточних дуг  $u \in [u_{i-1}, u_i]$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Для цього може бути вжито  $N_m = 2^k - 1$ , де  $k \in \mathbb{N}$ , контрольних точок, які рекомендується розміщувати вздовж опрацьовуваної дуги згідно з наступними величинами її параметра

$$u_m = u_{i-1} + \left(0,5 + \frac{(-1)^m [m/2] + qm}{N_m + 1}\right) \cdot (u_i - u_{i-1}), \quad |q| < 1/N_m, \quad m \in \{1, \dots, N_m\}. \quad (4.33)$$

Вираз (4.33) дозволяє генерувати точки для контролю відхилень апроксимуючої хорди від поточної дуги, починаючи приблизно з середини останньої, як найімовірнішого розташування шуканої максимальної похибки. Приріст значення  $m$  сприяє підвищенню точності апроксимації

немонотонних ліній, проте збільшує тривалість розрахунків. Ненульову величину сталої  $q$  доцільно застосовувати під час обробки періодичних кривих.

Обчислення відхилення для конкретної контрольної точки може бути виконано кількома способами. Подамо два з них. Спільною в цих випадках є дефініція, згідно зі співвідношеннями (4.32), необхідної точності апроксимації поточної дуги

$$\varepsilon_i = \frac{\Delta u_i}{\Delta u} \varepsilon,$$

оскільки тоді  $\sum_{i=1}^n \varepsilon_i = \varepsilon$ .

У першому випадку задовільним результатом вважатимемо дотримання умови

$$l_{i1} + l_{i2} - l_i < \alpha \varepsilon_i, \quad (4.34)$$

де  $l_{i1} = |\mathbf{r}(u_m) - \mathbf{r}_{i-1}|$ ,  $l_{i2} = |\mathbf{r}(u_m) - \mathbf{r}_i|$ ,  $0 < \alpha < 1$ .

Геометричний зміст залежності (4.34) полягає в тому, що сума  $l_{i1} + l_{i2}$  значно точніше апроксимує поточну дугу, ніж  $l_i$ , але числом, що завжди менше істинної її довжини. Останній факт враховується коефіцієнтом  $\alpha$ . Певним недоліком розглянутого першого способу є потреба використання квадратних коренів для знаходження  $l_{i1}$  та  $l_{i2}$ .

У другому випадку квадрат довжини перпендикуляра від контрольної точки  $\mathbf{r}(u_m)$  до хорди  $\mathbf{r}_{i-1} \mathbf{r}_i$  обчислюється за формулою

$$h_m^2 = \frac{((\mathbf{r}(u_m) - \mathbf{r}_{i-1}) \times (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{i-1}))^2}{(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{i-1})^2}. \quad (4.35)$$

Вираз (4.34) забезпечення необхідної точності апроксимації записується як

$$\begin{cases} l_{i1} - \tilde{l}_{i1} < \alpha k \varepsilon_i, \\ l_{i2} - \tilde{l}_{i2} < \alpha (1 - k) \varepsilon_i, \end{cases} \quad (4.36)$$

де  $\tilde{l}_{i1} = k l_i$ ,  $\tilde{l}_{i2} = (1 - k) l_i$ ,  $0 < k < 1$ .

Величина коефіцієнта  $k$  визначається положенням основи перпендикуляра, опущеного з  $\mathbf{r}(u_m)$  до хорди  $\mathbf{r}_{i-1} \mathbf{r}_i$ .

Застосувавши формулу (4.35), систему (4.36) подамо у вигляді більш жорстких обмежень

$$\begin{cases} h_m < \alpha k \varepsilon_i, \\ h_m < \alpha(1-k)\varepsilon_i. \end{cases} \quad (4.37)$$

Додавши нерівності (4.37) та піднісши до квадрата результат, одержуємо

$$h_m^2 < \alpha^2 \left( \frac{\varepsilon_i}{2} \right)^2. \quad (4.38)$$

Залежності (4.35) та (4.38) дозволяють здійснювати контроль точності апроксимації поточної дуги кривої (4.1) без залучення коренів, що сприяє підвищенню обчислювальної швидкодії алгоритмів. Жорсткий характер обмежень (4.37) забезпечує протилежну тенденцію, оскільки за рахунок достатньо малих значень у правій частині виразу (4.38) суттєво зростає кількість дуг, які аналізуються. Тому існує можливість не тільки відмови в останній формулі від коефіцієнта  $\alpha$ , а й застосування його величин, що більші за одиницю.

На завершення цього підпункту акцентуємо увагу на структурно-параметричному характері поданої методики, що виявляється у застосовуваних прийомах апроксимації, виконанні контрольних заходів, варіантах здійснення розрахунків і т. д. Запропонований спосіб обчислення довжини довільної параметричної кривої та наведені його модифікації забезпечують можливості:

- обрання найкращих різновидів алгоритмів згідно з наявними конкретними умовами використання;
- комплексного їх застосування у складі інтегрованих програмних модулів.

#### **4.1.3. Структурно-параметричний підхід як засіб удосконалення геометричних алгоритмів**

Предмет аналізу цього пункту полягає в розгляді питань застосування структурно-параметричної методології для підвищення ефективності обчислювальних геометричних алгоритмів. Подамо методику їх удосконалення на прикладах розв'язування позиційних задач, взявши за

основу викладені вище прийоми та алгоритми обчислення перетинів параметричних кривих, поверхонь і багатогранників. З урахуванням того, що останніми з потрібною точністю апроксимуються довільні тіла, то можна говорити про досить широкий спектр охоплюваних у даному випадку геометричних об'єктів.

Незважаючи на декотру різницю у природі зазначених фігур (основною характерною властивістю лінії є довжина, поверхні – площа, тіла – об'єм) *структурно-параметричний підхід дозволяє поєднати в одне ціле каркасне, поверхневе та твердотільне формоутворення* завдяки поданню розглянутих об'єктів у вигляді множин певних елементів. Якщо дати оцінку в даному плані наведеним у підпунктах 4.1.1.1 ... 4.1.1.4 алгоритмам, то головна їх ідея полягає в заміні, з необхідною точністю, вихідних фігур певними сукупностями простіших компонентів: кривих – прямолінійними відрізками, поверхонь – плоскими трикутниками, тіл – тетраедрами.

При цьому здійснюється послідовний перехід від параметричної форми опису об'єкта вищого рівня (наприклад, кривої, поверхні тощо) до множини пов'язаних поміж собою його структурних елементів (відрізків, плоских трикутників, тетраедрів), які в подальшому також визначаються в параметричному, але значно простішому ніж початкова фігура, й тому зручнішому для виконання потрібних розрахунків, вигляді. Тобто реалізується принцип системного підходу, що потребує розгляду довільного досліджуваного об'єкта як деякої множини взаємопов'язаних елементів та можливого компонента системи вищого ієрархічного рівня.

Приведені факти є достатньо логічними, проте для методів, прийомів та алгоритмів геометричного моделювання виникають правомірні запитання:

– яким чином застосувати структурно-параметричну методологію для підвищення їх ефективності?

– на які більш прості частини їх поділяти?

– які взаємозв'язки встановлювати?

Належну відповідь на ці та подібні міркування отримаємо шляхом аналізу критичних випадків для досліджуваних обчислювальних процедур. Такими моментами можна вважати потребу розрахунків із високою точністю перетинів значної кількості вихідних об'єктів великих розмірів і складної форми. Практичними ілюстраціями в даному плані слугують, скажімо, теоретичні аеродинамічні поверхні літаків, габарити яких сягають десятків метрів, а допустимі відхилення становлять соті міліметра. При цьому

основна проблема безпосереднього використання запропонованих алгоритмів полягає в невиправданому стрімкому зростанні кількості структурних елементів, що призводить до потреби в суттєвих обсягах комп'ютерної пам'яті та значній швидкодії процесора для забезпечення прийняттого часу виконання обчислень.

Для наведених критичних випадків доцільним є застосування розглянутих алгоритмів, зокрема, у два етапи. На першому – доволі грубо з'ясовуються області існування розв'язків, а на другому – здійснюються остаточні розрахунки з високою точністю. Так для визначення всіх точок перетину двох криволінійних обводів довжиною кілька метрів із допустимою похибкою  $\delta=0,001$  мм спочатку виконується апроксимація даних ліній ламаними з відхиленням, наприклад,  $\delta_0=1$  мм. Останнє дозволяє досить швидко та з мінімальними витратами комп'ютерної пам'яті за структурними елементами (відрізками) знайти відповідні параметричні проміжки розміщення точок перетину. Після чого, за допомогою цього ж самого алгоритму, обчислити їх координати достатньо точно. Отже,  $\delta_0$  призначається з міркувань не пропустити розв'язки, а  $\delta$  – згідно з потрібною точністю їх розрахунків. Запропонована комбінована методика для поданого прикладу забезпечує кількаразове зменшення потреб у комп'ютерній пам'яті та збільшення швидкодії алгоритму.

За проаналізованим сценарієм необхідно чинити й у випадку поверхонь і тіл, тобто способів та алгоритмів, наведених у підпунктах 4.1.1.2 ... 4.1.1.4. Таким чином, подані в цій частині монографії прийоми можуть слугувати методичною основою для покращення програмних засобів комп'ютерного формоутворення з використанням параметричних кривих, поверхонь і тіл. Викладений напрямок удосконалення автоматизованого геометричного моделювання потребує свого подальшого наукового опрацювання. Наприклад, відповідно до принципу варіантності структурно-параметричного підходу, доречно проаналізувати, зокрема, питання інтеграції запропонованих алгоритмів з іншими, скажімо, методом Ньютона-Рафсона та його модифікаціями тощо.

#### **4.1.4. Структурно-параметричний синтез геометричних об'єктів**

Мета даного пункту полягає в опрацюванні методик, що включають кілька універсальних способів і прийомів структурно-параметричного

синтезу різноманітних геометричних фігур (ліній, поверхонь та тіл). Запропоновані процедури призначені, в першу чергу, для автоматизованого проектування об'єктів і процесів машинобудування, однак, завдяки достатньо загальному характеру, можуть використовуватися й в інших галузях життєдіяльності людини, де застосовуються засоби комп'ютерної графіки.

#### 4.1.4.1. Загальні прийоми

Наведені в цьому підпункті відомості спрямовані на висвітлення базових питань структурного геометричного моделювання, що спирається на подане вище параметричне формоутворення ліній, поверхонь і тіл. Отже, головним завданням у цій частині монографії є розроблення прийомів *структурного синтезу*, тобто возз'єднання цілого з окремих складових елементів.

Зазначимо, що базовими примітивами формоутворення в комп'ютерних системах геометричного моделювання виступають вже розглянуті нами *точки, лінії, поверхні та тіла*. З них у подальшому утворюються більш складні компоненти у вигляді, наприклад, деталей і вузлів машинобудування тощо. Структурно-параметричний підхід дозволяє використовувати єдину методологію для опрацювання всіх цих видів геометричних об'єктів, розглядаючи точки, лінії, поверхні й тіла відповідно як нуль-, одно-, дво- та тривимірні фігури в певному просторі.

Спочатку зробимо короткий огляд кількох аспектів можливої взаємодії приведених вище груп примітивів, які визначатимемо в параметричній формі. В автоматизованому проектуванні технічної продукції, як правило, застосовуються скінченні геометричні фігури, тому будемо досліджувати саме їх. Цікавими з точки зору теорії та практики є всілякі поєднання точок, ліній, поверхонь і тіл поміж собою. У найпростішому випадку точки просто обмежують лінії. Такими прикладами слугують: для прямої – промінь та відрізок, для кола – його дуга і т. д. Частина деякої лінії в літературі називається сегментом, відсіком, дугою тощо. Одне із завдань структурно-параметричного підходу – це поєднання каркасного, поверхневого та твердотілого геометричного моделювання. Тому для термінів-синонімів у якості основних використовуватимемо загальноприйняті для тривимірного простору, в даному випадку ребро (в топологічному його значенні).

Окремі ребра можуть бути інцидентними у своїх кінцевих точках (*вершинах*), утворюючи складені лінії, що в літературних джерелах мають назви *обводів, контурів* і т. д., найбільш загальний вид яких містить компоненти різної природи. При цьому в місцях з'єднання (*вузлах*) дотримуються певні задані умови (як правило необхідна гладкість). Зазначимо, що надалі аналізуватимемо лише лінії й поверхні без самоперетинів. Якщо у складеної кривої кінці збігаються, то називатимемо її замкненою. У такому випадку, для опису взаємодії останньої з породжуючою її поверхнею, основними вважатимемо терміни контур та цикл відповідно для зовнішньої та внутрішньої границі даної поверхні.

Перейдемо тепер, на прикладі контурів, до взаємодії ліній і поверхонь.

Деякий контур  $c_i$  подаватимемо упорядкованою множиною типу

$$c_i = (c_{ij})_1^{Nc_i}. \quad (4.39)$$

Кожне ребро  $c_{ij}$  у формулі (4.39) визначатимемо радіусом-вектором

$$c_{ij} = \mathbf{r}_{ij}(u_{ij}), \quad (4.40)$$

де  $u_{ij} \in [0, 1]$  – параметр.

Стосовно виразу (4.40) звернемо увагу, що довільна залежність  $\mathbf{r}(t)$ , де  $t \in [t_{\min}, t_{\max}]$ , перетворюється в  $\mathbf{r}(t(u))$ , де  $u \in [0, 1]$ , завдяки  $t(u) = t_{\min}(1-u) + u t_{\max}$ . За початкове та кінцеве значення параметра  $u_i$  складеної кривої  $c_i$  приймемо відповідно

$$u_{i_{\min}} = 0 \text{ та } u_{i_{\max}} = Nc_i.$$

Тоді потрібні у формулі (4.40) для обчислення радіуса-вектора  $\mathbf{r}_i(u_i)$  номер ребра  $j$  та величина  $u_{ij}$  розраховуються згідно з наявним  $u_i \in [0, Nc_i]$  за трьома варіантами:  $u_i=0 - j=1, u_{ij}=0$ ;  $u_i \in N - j=N, u_{ij}=1$ ;  $u_i \notin N - j=[u_i]+1, u_{ij}=u_i-j+1$ .

Розглянемо структурний об'єкт, що містить два параметричних компоненти:

– поверхню

$$s_k = \mathbf{r}_k(u_k, v_k), \quad u_k \in [0, 1], \quad v_k \in [0, 1]; \quad (4.41)$$

– криволінійний, у загальному випадку, контур  $c_i$  вигляду (4.39), який належить фігурі (4.41).

Елементи  $c_{ij}$  останнього визначаються залежностями

$$c_{ij} = \mathbf{r}_{i_j}(u_{i_j}) = \mathbf{r}_k(u_k(u_{i_j}), v_k(u_{i_j})), \quad (4.42)$$

де  $u_{ij} \in [0, 1]$ ,

а весь контур виразом

$$c_i = \mathbf{r}_i(u_i) = \mathbf{r}_k(u_k(u_i), v_k(u_i)), \quad (4.43)$$

де  $u_i \in [0, N_{c_i}]$ ,

$N_{c_i}$  – кількість ребер у  $c_i$ .

Отже, на відміну від поверхні (4.41), що обмежена топологічним прямокутником у вигляді ліній  $\mathbf{r}_k(u_k, 0)$ ,  $\mathbf{r}_k(1, v_k)$ ,  $\mathbf{r}_k(u_k, 1)$ ,  $\mathbf{r}_k(0, v_k)$ , співвідношення (4.41) ... (4.43) дають змогу отримувати значно різноманітніші геометричні об'єкти, які називатимемо гранями, що являють собою обмежені контурами поверхні. Проаналізуємо однозв'язні грані, тобто взаємодію поверхні з єдиним її контуром, який визначає її зовнішню границю. Узагалі можливі варіанти з кількома внутрішніми циклами, що формують багатозв'язні області.

У початковій частині цього підпункту вже згадувалась процедура структурного синтезу обводів, яка полягає у визначені упорядкованої множини ребер та є досить простою, оскільки вимагає лише збігу певних вершин останніх. Проте це, зазвичай, не стосується параметричного аспекту, коли треба забезпечити більший, ніж нульовий, порядок гладкості створюваної лінії.

Об'єднання декількох граней в оболонку (такий термін використовуватимемо як основний для складених поверхонь) доволі схоже на попередньо подану процедуру для обводів, що є додатковим підтвердженням системного характеру структурно-параметричної методології в геометричному моделюванні.

Викладемо докладніше потрібну для цього черговість дій на прикладі сформованих згідно з виразами (4.39) ... (4.43) двох граней  $g_{n1}$  і  $g_{n2}$

$$\begin{aligned} g_{n1} = c_{i1} &= \mathbf{r}_{k1}(u_{k1}(u_{i1}), v_{k1}(u_{i1})) = (c_{i1 j1})_1^{N_{c_{i1}}}, \\ g_{n2} = c_{i2} &= \mathbf{r}_{k2}(u_{k2}(u_{i2}), v_{k2}(u_{i2})) = (c_{i2 j2})_1^{N_{c_{i2}}}. \end{aligned} \quad (4.44)$$

Надалі вважатимемо, що об'єкти (4.44) входять до відповідної сукупності

$$G = (g_n)_1^{N_G}, \quad (4.45)$$

для утворення якої маємо в розпорядженні наступні множини поверхонь та контурів

$$S = (s_k)_1^{N_S}, \quad C = (c_i)_1^{N_C}. \quad (4.46)$$

У даному разі об'єднання фігур (4.44) виконується збігом уже не точок, а ребер. Тому на початку належить у кортежах

$$c_{i1} = (c_{i1j_1})_1^{N_{c_{i1}}} \quad \text{і} \quad c_{i2} = (c_{i2j_2})_1^{N_{c_{i2}}} \quad (4.47)$$

визначити однакові (спільні) елементи.

Нехай це буде неперервна послідовність із  $m$  ребер (наявність кількох таких груп відповідає перетворенню синтезованої грані в багатозв'язну, тобто випадку, що зараз, як зазначалось, не розглядається).

Тоді, якщо:

$m=0$  – досліджувані фігури не мають сукупної межі й тому не можуть бути об'єднані в новий суцільний об'єкт;

$m=N_{c_{i1}}=N_{c_{i2}}$  – зовнішній контур синтезованої грані щезає й остання перетворюється в замкнену оболонку, що обмежує певну просторову область;

$m>0$  та  $m \leq \min(N_{c_{i1}}, N_{c_{i2}})$  – спільні елементи (4.47) формують внутрішню границю між вихідними фігурами, а решта – зовнішню для об'єднаного об'єкта.

Для визначення останньої застосовуватимемо наступне правило.

Оскільки дефініція спільних ребер породжує в кожній грані по два відомі обводи (один із яких для результуючої фігури зовнішній, а другий – внутрішній), то потрібно зробити обхід у будь-якому напрямі неспільних ребер першої або другої грані, а потім іншої, але з того краю, що збігається з одержаною кінцевою вершиною.

Розглянемо структури даних, які задовольняють поданому алгоритму й узагальнюють синтез оболонки з довільного числа граней (4.45).

Для певної такої фігури

$$g_r = (g_{sk})_1^{N_{g_r}}, \quad (4.48)$$

що є композицією з декотрих  $N_{g_r}$  елементів (4.45), тобто  $r \in \mathbb{N}$ ,  $r > N_G$ ,

$sk \in (1, \dots, N_G)$ , згідно з формулами (4.39) ... (4.48) маємо кортеж

$$g_r = (g_{s1}, a_k)_{k=1}^{Ng_r-1}, \quad (4.49)$$

елементи  $a_k$  якого подаються трійками

$$a_k = (c_{ik_{jk}}, g_{lk}, c_{mk_{nk}}). \quad (4.50)$$

У залежностях (4.48) ... (4.50) ребро  $c_{ik_{jk}}$  грані  $g_{s1}$  збігається з ребром  $c_{mk_{nk}}$  грані  $g_{lk}$ , де  $s1 \in (1, \dots, N_G)$ ,  $lk \in (1, \dots, N_G)$ ,  $s1 \neq lk$ . Під час формування оболонок у виразах (4.50) можна застосовувати для ідентифікації:

ребер  $c_{ik_{jk}}$ ,  $c_{mk_{nk}}$  – ключі, що обумовлюються кортежами (4.39) та (4.46);

граней  $g_{s1}$ ,  $g_{lk}$  – порядкові номери множини (4.45).

Подібно до викладеного способу синтезу оболонок із множини обмежених контурами поверхонь створюються з окремих топологічних багатогранників і необхідні тіла, але тепер поєднуються поміж собою вже не ребра, а грані. Зазначений алгоритм досить схожий на розглянутий вище. Основною його відмінністю є потреба визначення спільної області не у вигляді обводу, а сукупності поверхонь.

Таким чином, запропоновані для різноманітних фігур (ліній, поверхонь і тіл) прийоми структурного синтезу, що спираються на відповідний параметричний опис зазначених геометричних об'єктів, мають певною мірою універсальний характер.

#### 4.1.4.2. Формування ліній перетину поверхонь як складових елементів геометричних об'єктів

У даній частині монографії, на прикладі поверхонь, розроблено методику побудови їх ліній перетину, що більш пристосовані для використання в якості елементів складених геометричних фігур. З матеріалів підпункту 4.1.4.1 видно, що одним із шляхів реалізації наведених вище базових положень структурно-параметричної методології формоутворення, а саме, принципів системного підходу, варіантності, універсальності, відкритості й розвитку є гнучке комбінування геометричних об'єктів.

У підпункті 4.1.1.2 подано спосіб розрахунків перетинів поверхонь з одержанням результату у вигляді ламаних ліній, які апроксимують, із

наперед заданою точністю, дійсний розв'язок поставленої задачі. Застосування останніх як ребер граней або тіл можна покращити, коли замість зазначених ламаних застосовувати відповідні лінії, що лежать на вихідних поверхнях. Послідовність запропонованих дій полягає в наступному.

Для двох поверхонь вигляду (4.12)  $\mathbf{r}_1(u_1, v_1)$  та  $\mathbf{r}_2(u_2, v_2)$ , які перетинаються, згідно з наведеним у підпункті 4.1.1.2 алгоритмом формуємо множини їх спільних точок

$$\begin{aligned} P_{1,2} &= (\mathbf{r}_{1,2i})_0^{Nr_{1,2}} = (\mathbf{r}_1(u_{1i}^*, v_{1i}^*))_0^{Nr_{1,2}}, \\ P_{2,1} &= (\mathbf{r}_{2,1i})_0^{Nr_{2,1}} = (\mathbf{r}_2(u_{2i}^*, v_{2i}^*))_0^{Nr_{2,1}}, \end{aligned} \quad (4.51)$$

де  $Nr_{1,2} = Nr_{2,1} = n$ .

У виразах (4.51) варіюванням параметрів досягаємо збігу з потрібною точністю відповідних радіусів-векторів елементів кортежів  $P_{1,2}$  і  $P_{2,1}$ . Тоді вважаємо

$$P = (P_i)_0^n = (\mathbf{r}_1(u_{1i}, v_{1i}))_0^n = (\mathbf{r}_2(u_{2i}, v_{2i}))_0^n. \quad (4.52)$$

Далі обчислюємо лінії, що лежать на поверхнях  $\mathbf{r}_1(u_1, v_1)$  і  $\mathbf{r}_2(u_2, v_2)$  та проходять через точки (4.52). Зробимо це на прикладі кубічних В-сплайнів, котрі подамо як

$$u_m(t) = \sum_{i=0}^n N_{i,4}(t) U_{mi}, \quad (4.53)$$

де  $m \in \{1; 2\}$ ;

$n \geq 2$ ;

$(t_0=0, t_1=1, t_2=2, \dots)$  – вузловий вектор параметра  $t$ ,

$U_{mi}$  – деякі сталі,

$$N_{0,4}(t) = \begin{cases} t^3/6, & t \in [0;1]; \\ -t^3/2 + 2t^2 - 2t + 2/3, & t \in [1;2]; \\ t^3/2 - 4t^2 + 10t - 22/3, & t \in [2;3]; \\ (4-t)^3/6, & t \in [3;4]; \\ 0, & t \notin [0;4], \end{cases} \quad N_{i,4}(t) = N_{0,4}(t-i). \quad (4.54)$$

Аналіз виразу (4.54) показує, що  $N_{0,4}(t)$  на початку й у кінці проміжку змінної дорівнює нулю, при  $t=2$  досягає максимуму  $2/3$ , а інші функції  $N_{i,4}(t)$

можна отримати перенесенням розглянутої уздовж осі параметра на  $i$  одиниць. Розраховуємо невідомі  $(U_{1_i})_0^n$  та  $(U_{2_i})_0^n$ , які забезпечують проходження двох сплайнів вигляду (4.53) відповідно через  $(u_{1_i})_0^n$  та  $(u_{2_i})_0^n$  при  $t = 2, 3, \dots, n+2$ , за допомогою систем лінійних рівнянь із тридіагональними матрицями коефіцієнтів

$$\begin{cases} 4U_{m_0} + U_{m_1} & = 6u_{m_0}, \\ U_{m_0} + 4U_{m_1} + U_{m_2} & = 6u_{m_1}, \\ U_{m_1} + 4U_{m_2} + U_{m_3} & = 6u_{m_2}, \\ \dots & \\ U_{m_{n-1}} + 4U_{m_n} & = 6u_{m_n}. \end{cases} \quad (4.55)$$

де  $m \in \{1;2\}$ .

За аналогією з формулами (4.53) ... (4.55) обчислюємо величини  $(V_{m_i})_0^n$  сплайнів

$$v_m(t) = \sum_{i=0}^n N_{i,4}(t) V_{m_i}, \quad (4.56)$$

що для  $m \in \{1;2\}$  проходять відповідно через  $(v_{1_i})_0^n$  та  $(v_{2_i})_0^n$ .

Сумісне застосування одержаних згідно із співвідношеннями (4.53) й (4.56) залежностей для  $u_m(t)$  та  $v_m(t)$  дозволяє визначити параметричні лінії  $P_{1,2}(t)$  та  $P_{2,1}(t)$ , які відтворюють перетин  $\mathbf{r}_1(u_1, v_1)$  і  $\mathbf{r}_2(u_2, v_2)$  та належать вихідним поверхням, тобто

$$P = (\mathbf{r}_1(u_{1_i}, v_{1_i}))_0^n \subset P_{1,2}(t) = \mathbf{r}_1(u_1(t), v_1(t)) \in \mathbf{r}_1(u_1, v_1),$$

$$P = (\mathbf{r}_2(u_{2_i}, v_{2_i}))_0^n \subset P_{2,1}(t) = \mathbf{r}_2(u_2(t), v_2(t)) \in \mathbf{r}_2(u_2, v_2).$$

На підставі останніх виразів можна провести додатковий контроль взаємних відхилень щільніших, ніж у кортежі (4.52) точок, та, за потреби, виконати для них ітераційне повторення поданого алгоритму.

Таким чином, запропонована вище методика розв'язує певні питання покращення структурно-параметричного моделювання складних варіантних комбінованих фігур. Розроблені прийоми визначення ліній перетину поверхонь як елементів різноманітних геометричних об'єктів дозволяють забезпечити потрібну гнучкість формоутворення в системах автоматизованого конструювання, зокрема, машинобудівного профілю.

## 4.2. Розв'язування задач оптимізації структурно-параметричними геометричними засобами

У даному підрозділі розглянуто питання використання геометричного структурно-параметричного підходу для розв'язування задач математичної оптимізації методами апроксимації.

Головне завдання проектування промислової продукції, зазвичай, полягає у визначенні таких її параметрів, що забезпечують найкращі значення заданих техніко-економічних характеристик згідно з наявними для цього ресурсами. Досить часто основними засобами досягнення поставленої мети є різноманітні математичні методи оптимізації.

Завдяки вдалому поєднанню простоти, надійності в користуванні, потужності, гнучкості та високої ефективності оброблення різноманітних даних, велику популярність має, зокрема, пакет Microsoft Office Excel, який широко застосовується не тільки для обчислень за допомогою електронних таблиць, а й для розв'язування задач оптимізації. Відомі САПР, наприклад SolidWorks, CATIA та ін., мають інтерфейс із Microsoft Office Excel для забезпечення, на підставі таблиць параметрів, варіантного конструювання деталей і складаних одиниць. Досвід практичного використання модуля оптимізації пакета Microsoft Office Excel 2000 ... 2010 окреслив ряд можливих напрямків покращення цього програмного продукту.

Подана у третьому розділі загальна методологія структурно-параметричного формоутворення та наведені відповідно в підпункті 4.1.1.2 та пункті 4.1.3 прийоми апроксимації поверхонь та засоби удосконалення геометричних алгоритмів дозволяють поліпшити якість виконання оптимізаційних розрахунків. Таким чином, мета цієї частини монографії полягає в запропонуванні для розв'язування задач оптимізації нової методики, що базується на структурно-параметричних прийомах апроксимації.

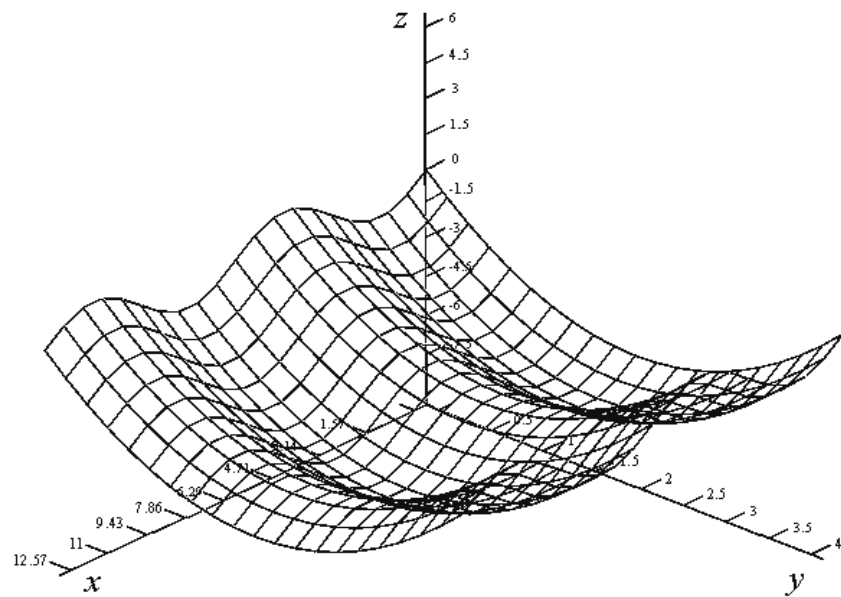
Розглянемо приклад. Нехай необхідно в декартовій системі координат  $Oxuz$  визначити мінімальне значення двох цільових функцій

$$\begin{aligned} z_1 &= f_1(x, y) = -\sin(x) + (y - 2)^2 - 4, \\ z_2 &= f_2(x, y) = -0,5x \sin(x) + (y - 2)^2 - 4 \end{aligned} \quad (4.57)$$

з обмеженнями вигляду

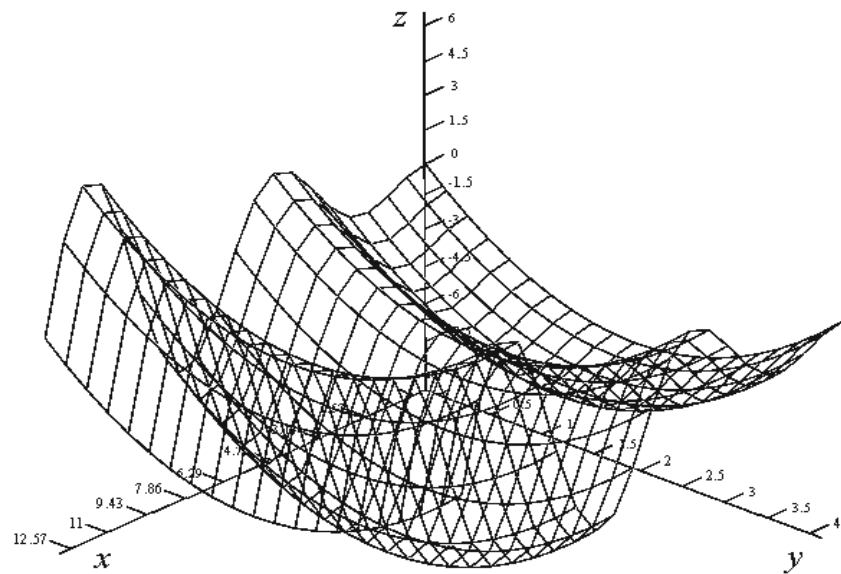
$$x \in [x_n, x_k] = [0; 4\pi], \quad y \in [y_n, y_k] = [0; 4]. \quad (4.58)$$

Графіки виразів (4.57) на проміжках (4.58) показано на рис. 4.2.



$$f_1(x,y) = -\sin(x) + (y-2)^2 - 4$$

*a*



$$f_2(x,y) = -0,5x \sin(x) + (y-2)^2 - 4$$

*б*

Рис. 4.2. Тестові цільові функції оптимізації

Розв'язок наведеної задачі досить легко знайти аналітичним шляхом за допомогою похідних. Наочне оцінювання поставленого завдання можна провести й суто геометричними методами, наприклад, засобами кінематичного формоутворення. У цьому разі для  $z_1=f_1(x, y)$ , розглядаючи  $z=(y-2)^2-4$  як твірну, а  $z=-\sin(x)$  – як напрямну, на підставі відомих графіків

двох останніх залежностей, визначаємо точки мінімуму  $(x_1, y_1)=(\pi/2, 2)$  і  $(x_2, y_2)=(5\pi/2, 2)$ , значення в яких однакове та дорівнює  $z_1=-5$ . Для  $z_2=f_2(x, y)$ , у зв'язку зі зміною в напрямної  $z=-0,5x\sin(x)$  величини амплітуди та розташування її екстремальних значень уздовж осі  $x$ , прогнозованими є також дві точки мінімуму з ординатами  $y=2$ , але тепер у випадку більшої абсциси матимемо глобальний мінімум, див. рис. 4.2, б.

Опрацювання в Microsoft Office Excel розглянутого завдання для:

–  $z_1=f_1(x, y)$  і початкової точки  $(x_0, y_0)=(0; 0)$  дає лише один розв'язок  $(x_1, y_1)=(1,571; 2)$ ,  $z_1=-5$ ; а для  $(x_0, y_0)=(6; 0)$  – тільки  $(x_1, y_1)=(7,854; 2)$ ,  $z_1=-5$ ;

–  $z_2=f_2(x, y)$  і початкової точки  $(x_0, y_0)=(0; 0)$  визначає розв'язки  $(x_1, y_1)=(0; 2)$ ,  $z_2=-4$  та  $(x_1, y_1)=(2,029; 2)$ ,  $z_2=-4,91$  – відповідно для випадку застосування прямих та центральних різниць; а для  $(x_0, y_0)=(6; 0)$  –  $(x_1, y_1)=(7,979; 2)$ ,  $z_2=-7,958$ .

Отже бачимо, що основними недоліками досліджуваного програмного та математичного забезпечення можна вважати:

- знаходження тільки одного розв'язку при наявності декількох;
- залежність отриманого оптимального значення від заданої початкової точки (яку правильно визначити, без попереднього аналізу, достатньо проблематично) та обраних методів обчислень.

Зазначимо, що подібні вади існують і в інших широко відомих пакетах, зокрема, MathCAD Professional тощо. Причина полягає в застосуванні таких класичних прийомів локальної оптимізації як метод Ньютона, спряжених градієнтів і т. п. Оскільки ефективне розв'язування питань автоматизованого моделювання об'єктів і процесів машинобудування без комп'ютерних засобів оптимізації практично неможливе, то це обумовлює потребу постійного вдосконалення останніх та їх адаптації до відповідної галузі використання. Так для опрацювання технічної продукції, крім подолання наведених вище недоліків програмних засобів, необхідно забезпечити:

- достатню стійкість отриманих оптимальних розв'язків при незначних відхиленнях значень змінних (для прикладу, таких величин як наявна точність виготовлення деталей та їх розміщення у складаних одиницях, різноманітні технологічні параметри і т. д.);
- здатність обчислювати розв'язки згідно з визначеними найменшими проміжками змінних (тобто таких величин як розміри деталей, що повинні

бути кратними, наприклад, 1 мм, 10 мм, 100 мм тощо; точність регулювання технологічних режимів, зокрема в 5 або 10 градусів температури, в 10 або 100 кПа робочого тиску і т. п.);

– максимальну швидкодію та мінімальні потреби в комп'ютерній пам'яті;

– тощо.

Перейдемо далі до безпосереднього викладення запропонованої методики виконання оптимізаційних розрахунків, яка базується на поданих вище прийомах апроксимації структурно-параметричного підходу до геометричного моделювання. Даний спосіб складається з наступних основних дій.

1. Формується цільова функція оптимізації, наприклад, у вигляді  $z_2=f_2(x, y)$  та додатково до співвідношень (4.58) потрібні обмеження  $G(x, y)$  як сукупність певних рівнянь, нерівностей і т. д.

2. Визначаються для змінних їх мінімальні  $x_{\min}$  і  $y_{\min}$  та максимальні  $x_{\max}$  і  $y_{\max}$  допустимі поточні проміжки. Невиправдане зменшення перших призводить до суттєвого зростання часу обчислень, а збільшення других – до можливості пропуску розв'язків задачі.

Нехай для випадку, що розглядається, це відповідно  $k_{x\min}=1\%$  і  $k_{y\min}=2\%$  довжини відрізків (4.58), тобто  $x_{\min}=k_{x\min}(x_k-x_n)=0,01(4\pi-0)\approx 0,126$  і  $y_{\min}=k_{y\min}(y_k-y_n)=0,02(4-0)=0,08$  та  $k_{x\max}=10\%$  і  $k_{y\max}=20\%$ , тобто,  $x_{\max}=k_{x\max}(x_k-x_n)=0,1(4\pi-0)\approx 1,26$  і  $y_{\max}=k_{y\max}(y_k-y_n)=0,2(4-0)=0,8$ .

3. Обирається необхідна точність  $\delta$  для обчислення цільової функції та число  $N$  максимально потрібних її мінімальних величин.

4. Від точки з мінімальними значеннями змінних  $x$  та  $y$  методом ділення навпіл виконується послідовна апроксимація в області (4.58) дуг кривих  $z_2=f_2(x, y=const)$  та  $z_2=f_2(x=const, y)$  прямолінійними відрізками з перевіркою відхилень на діагоналях одержаних топологічних чотирикутників.

5. У процесі обчислень попереднього пункту заповнюється масив отриманими значеннями змінних і цільової функції за зростанням величини останньої.

6. Після завершення пункту 4 виконується перевірка елементів зазначеного масиву щодо дотримання обмежень  $G(x, y)$ . Даними, які задовольняють зазначену умову, заповнюється вихідний масив із максимальною кількістю компонентів  $N$ , що також упорядкований згідно зі збільшенням значень цільової функції.

За допомогою поданого алгоритму визначається потрібне число оптимальних розв'язків. Дано кілька пояснень стосовно запропонованого способу.

По-перше, структурний поділ відбору значень цільової функції на дві процедури – упорядкування та перевірки обмежень суттєво підвищує швидкодію обчислень, оскільки виключає невиправдане оброблення неперспективних даних. Цьому сприяє також параметр  $N$ .

По-друге, доволі важливим моментом є використання апроксимації як засобу «згладжування» цільової функції для покращення розглянутої вище стійкості одержуваних оптимальних розв'язків. Так якщо на найменших проміжках змінних дотримано задану точність апроксимації цільової функції, то вважається, що значення останньої практично не змінюються при варіюванні у відповідних діапазонах вихідних параметрів. У випадку ж наявності на зазначених мінімальних проміжках суттєвих відхилень функції від апроксимуючого її відрізка величини останньої відкидаються як нестійкі.

По-третє, застосування викладених у пункті 4.1.3 прийомів підвищення ефективності геометричних алгоритмів дає відповідні практичні результати, які підтверджено розробленою за наведеними матеріалами комп'ютерною програмою.

Перевага запропонованого способу оптимізації полягає у знаходженні глобального екстремуму незалежно від початкової точки аналізу, відсутності потреби в розрахунках похідних, здатності працювати з довільними цільовими функціями та обмеженнями. Можливе поширення викладеного на прикладі тривимірного простору алгоритму також і на аналітичні залежності більшого числа змінних. Зауважимо, що кожному методу оптимізації притаманні свої переваги та недоліки, сфера найбільш раціонального використання. Тому раціональним є їх комплексне застосування для забезпечення успішного досягнення поставлених цілей у конкретних умовах.

### **4.3. Використання структурно-параметричного підходу для візуалізації багатовимірних геометричних об'єктів**

У цьому підрозділі подано спосіб візуалізації багатовимірних фігур, що базується на структурно-параметричній методології комп'ютерного геометричного моделювання. Графічні засоби інтенсивно застосовуються в науці й на виробництві для опрацювання різноманітних об'єктів, процесів та

явищ, що обумовлено високою наочністю геометричних моделей. Однак чисельна кількість розв'язуваних теоретичних і практичних задач потребує зображень для більш ніж тривимірного простору. Тому в наш час актуальні питання розроблення ефективних способів комп'ютерної візуалізації багатовимірних фігур.

Проблемі побудови графічних образів, зручних для відтворення складних предметів, процесів і явищ, присвячено велике число наукових праць, зокрема [91, 93, 98 та ін.]. У публікації [98] зазначається, що широко розповсюджене нині подання багатопараметричних залежностей як сукупності однофакторних графіків не слід вважати задовільним. Для покращення існуючої ситуації пропонується використовувати множини поверхонь, які комплексно враховують спільний вплив кількох змінних на досліджувані об'єкти. Прикладом реалізації такого підходу є наведена в роботі [93] методика оптимізації технічної системи, представлена чотиривимірною геометричною моделлю. У статті [91] показано можливість візуалізації засобами програмного математичного пакета Matlab фазових траєкторій у дво- та тривимірному просторі під час аналізу багатопараметричних процесів різної фізичної природи.

Мета цієї частини монографії полягає в поданні методики застосування ієрархічних структурно-параметричних моделей для комп'ютерної візуалізації багатовимірних об'єктів, що спирається на засади викладеної у третьому розділі концепції автоматизованого геометричного моделювання. Наведемо далі деякі загальні теоретичні положення.

Для досліджуваних геометричних фігур у якості вихідних використовуватимемо такі класичні терміни як точка та множина. Під  $n$ -вимірним простором,  $n \in \mathbb{N}$ , розумітимемо множину кортежів дійсних чисел  $(x_1, \dots, x_n)$ , тобто точок. Останні вважатимемо найдрібнішими елементами, рухом яких у просторі утворюються компоненти вищого порядку, а саме, лінії з вимірністю одиниця, що мають таку властивість як довжина. Для їх подання використовуватимемо певні сукупності точок. За аналогією, зміною положення у просторі лінії, що в загальному випадку варіює свою форму й розміри, створюється поверхня з вимірністю два, яка характеризується площею та подається деяким лінійним каркасом. Останній здатний мати кілька структурних варіантів, наприклад, містити тільки твірні чи напрямні, або обидва види зазначених складових і т. д. Подібним чином, переміщуючи у просторі поверхню, одержуємо тривимірну фігуру, тобто тіло певного

об'єму, яке можна зобразити відповідною сукупністю поверхонь. Кількість різновидів каркаса в цьому випадку суттєво зростає за рахунок третього виміру отриманого об'єкта. Отже, для забезпечення єдиного підходу наведені вище прийоми формоутворення варто поширити й на подання фігур більшої, ніж три, вимірності.

Нехай необхідно виконати візуалізацію геометричного об'єкта  $O$ , що визначений у деякій математичній формі

$$O = f(u_1, \dots, u_n), \quad (4.59)$$

де  $u_j$  – незалежні параметри,  $n \in \mathbb{N}$ .

На підставі структурно-параметричної методології будемо діяти наступним чином. Обумовлюємо опрацьовувані різновиди досліджуваного об'єкта

$$O = (O_i)_1^{No}. \quad (4.60)$$

Зробимо пояснення стосовно величини  $No$  на конкретних прикладах.

Трактуватимемо запис  $O = f(u_1, \dots, u_n)$  як потребу подання параметра  $u_1$  дискретними, а  $u_n$  – неперервними значеннями.

Якщо залежність (4.59) є лінією, тобто  $n=1$ , то варіанти візуалізації  $O = f(u_1)$  формуються багатоманітними способами відтворення точок (крапками, трикутниками, квадратами, зірочками тощо) та різними відстанями між ними.

Випадок  $n=2$  проілюструємо виразом

$$\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{2^2} - \frac{z^2}{1^2} = 0, \quad (4.61)$$

що в декартовій прямокутній системі координат  $Oxyz$  визначає кругову конічну поверхню, яку необхідно візуалізувати плоскими лініями.

Аналіз показує, що коли у співвідношенні (4.61) для множини дискретних значень  $x$  або  $y$  формувати криві (лінійний каркас поверхні), то останні будуть гіперболами. Якщо ж застосовувати сталі величини  $z$ , то одержаний каркас складатиметься з кіл. Згідно з виразами (4.59) і (4.60) можливими для візуалізації об'єкта (4.61) є

$$O_1 = f(\dot{x}, y), \quad O_2 = f(x, \dot{y}), \quad O_3 = f(\dot{z}, x), \quad O_4 = f(x, y)$$

та інші різновиди, зокрема,

$$O_5 = f(\dot{x}, \dot{y}), O_6 = \{f(\dot{x}, y), f(\dot{z}, x)\}, O_7 = \{f(\dot{z}, x), f(x, y)\}$$

тощо.

Варіанти  $O_1, O_2, O_3$  містять лінії у площинах, перпендикулярних відповідно до осей  $x, y, z$ ;  $O_4$  – приклад неперервного каркаса;  $O_6$  – комбінація  $O_1$  та  $O_3$ ;  $O_7$  – об'єднання  $O_3$  й  $O_4$ . Зазначимо, що  $O_7$  наочний лише у випадку відмінності тону кіл  $f(\dot{z}, x)$  від суцільного забарвлення  $f(x, y)$ . Надалі на питаннях кольору та освітлення об'єктів зупинятись не будемо. Звернемо увагу, що подання (4.59) у вигляді неявних функцій є незручним для відтворення об'єктів, бо потребує для дефініції залежних параметрів розв'язування рівнянь аналітичними або обчислювальними методами.

Оскільки ключове завдання даної частини дослідження полягає у викладенні способу візуалізації об'єктів, вимірність яких перевищує три ( $n > 3$ ), то далі головну увагу приділимо саме цьому.

Як опорні елементи застосовуватимемо сукупності поверхонь у тривимірному просторі

$$f(\dot{u}_1, \dots, \dot{u}_{n-2}, u_{n-1}, u_n). \quad (4.62)$$

Вибір у якості основних фігур (4.62) обумовлений їх найбільшою наочністю порівняно з множинами ліній

$$f(\dot{u}_1, \dots, \dot{u}_{n-1}, u_n) \quad (4.63)$$

або точок

$$f(\dot{u}_1, \dots, \dot{u}_n). \quad (4.64)$$

Домовимось, що на подальших зображеннях, для забезпечення наочності простежування динаміки руху досліджуваного об'єкта у просторі, подаватимемо першу побудовану поверхню (4.62) суцільним забарвленням, а наступні – різнокольоровими дискретними каркасами з неперервних ліній.

На підставі залежностей (4.59), (4.60), (4.62) кожному варіанту  $O_i$  ставимо у відповідність структурно-параметричну модель

$$O_i = (O_{i_j})_1^{n-2},$$

$$O_{i_1} = (O_{i_{1j}})_1^{N_{O_{i_1}}} = f(\dot{u}_1, u_2, \dots, u_n),$$

$$\dots$$

$$O_{i_{n-2}} = (O_{i_{n-2} j_1, \dots, j_{n-2}})^{N_{O_{i_1}}, \dots, N_{O_{i_{n-2}}}} = f(\dot{u}_1, \dots, \dot{u}_{n-2}, u_{n-1}, u_n), \quad (4.65)$$

де  $j$  – ієрархічні рівні;

$jk$  – допоміжні індекси,  $k \in (1, \dots, n-2)$ ;

$N_{O_{ij}}$  – кількість дискретних значень параметра  $u_j$ .

Таким чином, для випадку  $n \geq 3$  всі варіанти об'єкта  $O$ , див. формули (4.59) та (4.65), можна відтворити множиною з  $N_O$  моделей типу (4.65). За бажання працювати з лініями (4.63) або точками (4.64) необхідно лише збільшити в описі (4.65) число ієрархічних рівнів відповідно до  $n-1$  або  $n$ .

Проілюструємо викладений спосіб на тестовому прикладі. Припустимо, що треба використати багатовимірну візуалізацію для знаходження найменшого значення функції

$$f(u) = f(u_1, \dots, u_5) = \sin^2(u_1 - u_2) + u_3 \sin(u_4 u_5), \quad (4.66)$$

де  $u_1 \in [0; 4]$ ,  $u_2 \in [0; 3]$ ,  $u_3 \in [1; 5]$ ,  $u_4 \in [0; 4]$ ,  $u_5 \in [0; \pi]$ .

Обрана задача є нескладною, оскільки її розв'язок задовольняє очевидним умовам:  $u_1 - u_2 = \pi t$ ,  $t \in \mathbb{Z}$ ;  $u_3 = 5$ ;  $u_4 u_5 = 1,5\pi + 2\pi t$ ,  $t \in \mathbb{Z}$ ; а потрібна величина виразу (4.66) дорівнює  $f(u) = -5$ .

Така простота дозволяє:

– по-перше, легко пересвідчитись у правильності результатів запропонованої методики геометричного моделювання;

– по-друге, краще збагнути, на основі опрацювання цього завдання в кількох математичних програмах світового рівня, доцільність застосування розглянутого способу візуалізації багатовимірних об'єктів для успішного розв'язування більш складних питань оптимізації.

Так для початкової точки  $(u_1, \dots, u_5) = (1; 1; 2; 1; 1)$  одержуємо наступні мінімальні величини тестової цільової функції:

у MathCAD 2010 –  $f(1; 1; 1; 4; 0) = 0$ ;

у Microsoft Excel 2007 (у залежності від використаних параметрів розрахунків) –  $f(0,45; 0,45; 1,2213; 0; 0) = 0$ ,  $f(0; 0; 1,2213; 0; 0) = 0$ ,  $f(1; 1; 1,2213; 0; 0) = 0$  тощо;

у Matlab 2009 (для різних алгоритмів) –  $f(1; 1; 1,159; 0; 0) = 0$ ,  $f(1,626; 1,626; 2,167; 0,038; 0) = 0$ .

Maple 2010 визначає потрібний екстремум  $f() = -5$ , але при цьому не подає компонентів вектора  $u$ .

Отже, отримані результати обчислень не виправдали наших сподівань. Обґрунтувати ці дані, без залучення математичного аналізу, досить просто наочними геометричними засобами. Нехай на основі формул (4.59), (4.60) та (4.66) маємо

$$O = (O_i)_1^2 = (f(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5), f(u_5, u_4, u_3, u_2, u_1)).$$

Тоді, якщо прийняти  $\dot{u}_1 = (0; 1; 2; 3; 4)$ ,  $\dot{u}_2 = (0; 1; 2; 3)$ ,  $\dot{u}_3 = (1; 3; 5)$ ,  $\dot{u}_4 = (0; 1; 2; 3; 4)$ ,  $\dot{u}_5 = (0; 1; 2; \pi)$ , то згідно із залежністю (4.65) елемент  $O_{111}$  подаємо множиною сукупностей поверхонь, показаних на рис. 4.3. За аналогією виконується візуалізація й решти чотирьох компонентів першого ієрархічного рівня варіанта  $O_1$ .

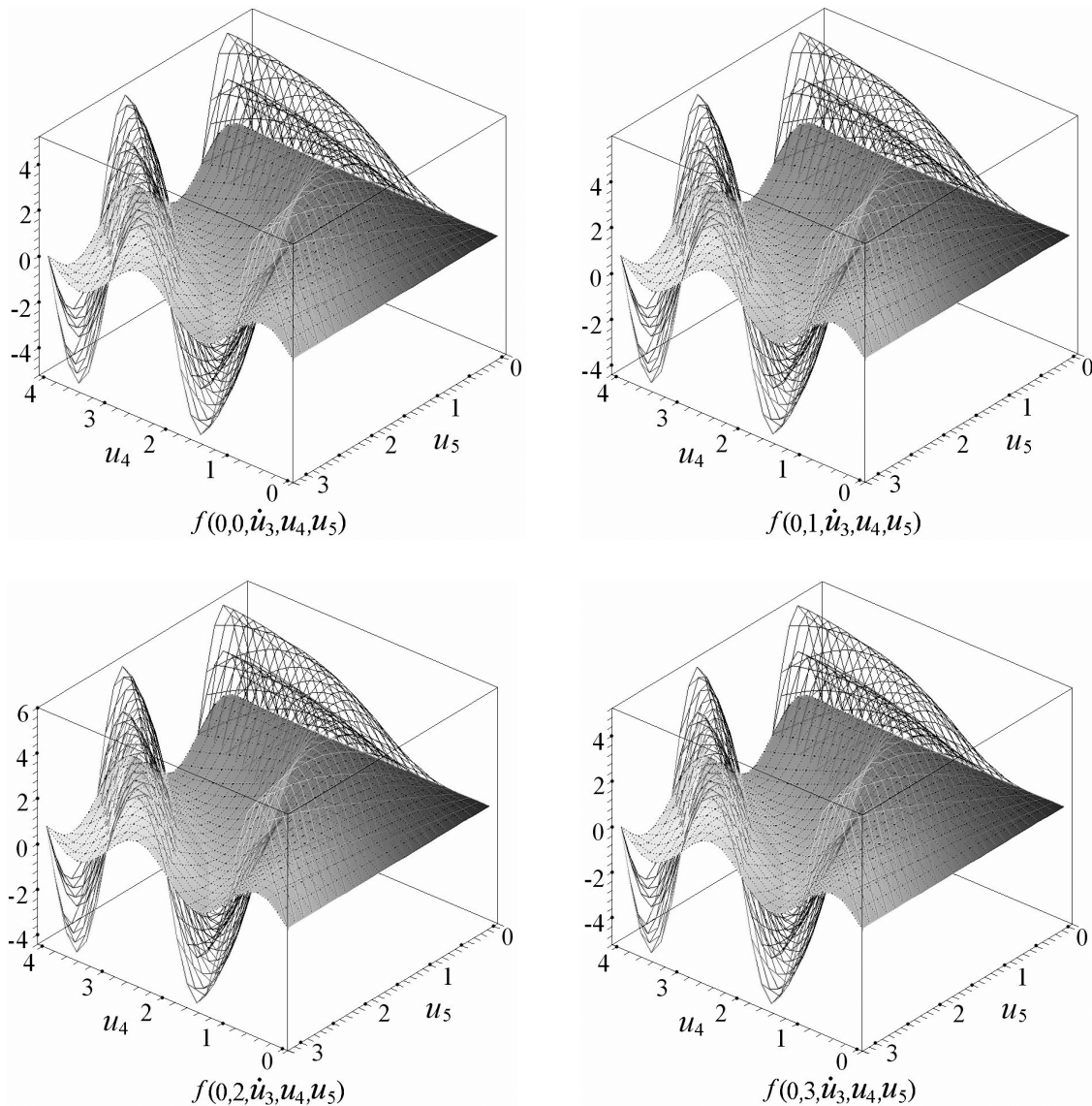


Рис. 4.3. Візуалізація компонента  $O_{111}$

На рис. 4.4 наведено деякі типові зображення елементів варіанта  $O_2$ .

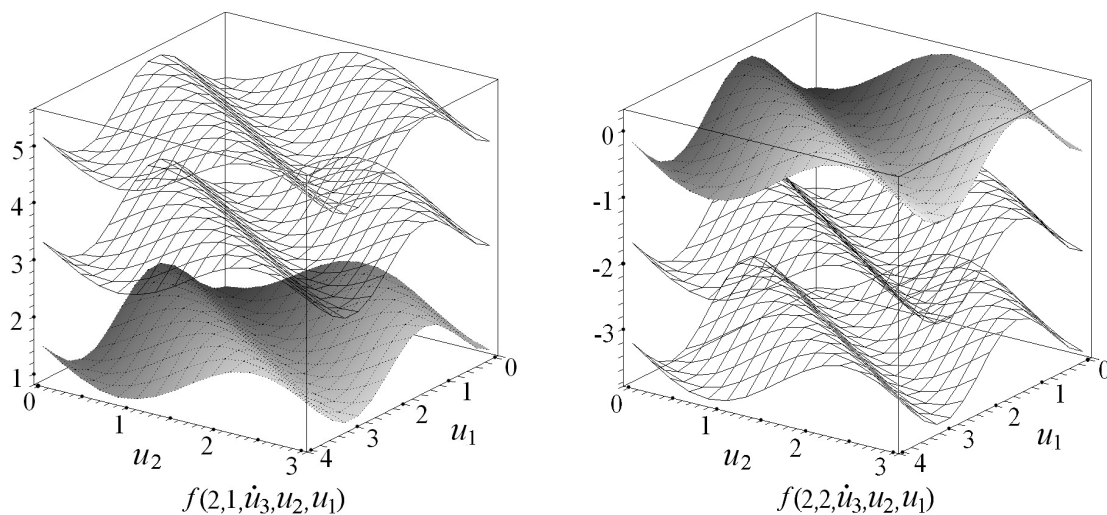


Рис. 4.4. Візуалізація елементів  $O_{22,3,2}$  та  $O_{22,3,3}$

Аналіз показаних геометричних моделей дозволяє з'ясувати:

- наближені екстремальні значення цільової функції, можливу їх кількість та розташування у просторі параметрів;
- вплив незалежних змінних на досліджуваний об'єкт;
- стійкість обраних розв'язків до невеликих відхилень параметрів від їх оптимальних величин;
- тощо.

Узагальнений недолік застосованих вище програм щодо визначення мінімальних значень цільових функцій полягає в реалізації стратегії пошуку локальних, а не глобальних, екстремумів. У цьому аспекті запропонований спосіб комп'ютерної візуалізації багатовимірних геометричних фігур доречно застосовувати для проведення попередніх досліджень об'єктів оптимізації. Успішному практичному використанню наведеної методики моделювання сприятиме її посилення засобами анімації та управління базами даних.

#### 4.4. Висновки до розділу 4

Основну наукову цінність даного розділу становить формування засад цілісної системи методів, способів, прийомів та алгоритмів, які базуються на концепції структурно-параметричного формоутворення та поглиблюють і доповнюють її. Достовірність теоретичних положень обґрунтовано математичними викладками, проведенням комп'ютерних експериментів,

порівнянням отриманих результатів з уже відомими, що одержані іншим чином. Безпосередньо наукову новизну складають:

- узагальнені на засадах структурно-параметричної методології раціональні прийоми розроблення геометричних алгоритмів, які полягають в інтегрованому підході до моделювання ліній, поверхонь, тіл і багатовимірних фігур, застосуванні методів структурно-параметричної апроксимації геометричних об'єктів, розв'язанні складних задач формоутворення в кілька взаємопов'язаних етапів із використанням універсальних модульних алгоритмічних компонентів;

- запропоновані способи і прийоми опрацювання типових задач структурно-параметричного моделювання (позиційних, метричних, аналізу, синтезу та варіантного формоутворення);

- удосконалення теорії оптимізації стосовно пошуку глобальних екстремумів на основі застосування структурно-параметричної апроксимації геометричних об'єктів;

- розроблений на базі структурно-параметричного підходу спосіб візуалізації багатовимірних об'єктів.

Таким чином, четвертий розділ монографії містить напрацювання теоретичного і практичного характеру, які розв'язують важливу науково-прикладну проблему щодо подальшого вдосконалення апарату комп'ютерного формоутворення в сучасних машинобудівних САПР і програмних математичних пакетах та підвищення на основі цього ефективності процесів геометричного моделювання технічних об'єктів.

Основні наукові результати даного розділу надруковано у працях [35, 62, 65, 68–71, 73, 74, 77, 78, 81, 82].

## **5. ЗАСТОСУВАННЯ СТРУКТУРНО-ПАРАМЕТРИЧНОГО ГЕОМЕТРИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ДЛЯ ОПРАЦЮВАННЯ ВИРОБІВ МАШИНОБУДУВАННЯ**

Даний розділ присвячено практичним прикладам використання запропонованих методів, способів, прийомів та алгоритмів структурно-параметричного комп'ютерного формоутворення для автоматизованого опрацювання технічних виробів.

### **5.1. Продукція машинобудування як об'єкт структурно-параметричного геометричного моделювання**

У другому розділі показано, що для більшості виробів машинобудування, особливо складних, характерним є життєвий цикл (рис. 2.1), який містить три основні стадії: проектування, виробництва та експлуатації.

У загальному випадку технічна продукція відтворюється деякою сукупністю взаємопов'язаних компонентів із деталей і складаних одиниць, яка досить часто має вигляд ієрархічного дерева (рис. 2.2). Процеси виготовлення проходять стадії опрацювання матеріалів, заготовок, деталей і складаних одиниць (рис. 2.3).

Досить важливі для машинобудівної продукції питання якості, що полягають у потребі комплексного забезпечення оптимальних значень таких показників техніки як продуктивність, економічність, надійність, довговічність і т. д. на всіх етапах її життєвого циклу. З цією метою більшість проектних, виробничих та експлуатаційних процесів розглядаються як багатоваріантні.

У перших двох розділах монографії обґрунтовано здатність виконання геометричними засобами інтегруючої ролі для моделей інших інженерних дисциплін. При цьому елементи технічних систем, що мають форму, розміри та положення, додатково описуються різноманітними спеціалізованими параметрами й характеристиками.

Таким чином, на основі використання матеріалів попередніх розділів, тобто напрацьованих теоретичних положень, принципів, методів, способів, алгоритмів тощо, довільний виріб машинобудування може бути відтворений, в геометричному аспекті, певною СПГМ. Головна особливість запропонованих

прийомів комп'ютерного формоутворення полягає в забезпеченні варіантного моделювання, що виявляється в його здатності адаптуватися до змінних умов застосування. Іншими словами, побудована в зазначений спосіб геометрична модель містить не лише конкретний, а й узагальнений розв'язок деякої задачі. Завдяки додатковому залученню засобів оптимізації, останній стає раціональним згідно з наявними на поточний момент обмеженнями.

Звернемо увагу, що опрацювання окресленої проблеми гнучкого варіантного оптимального геометричного моделювання складної продукції машинобудування відомими методами, порівняно із запропонованими, є доволі трудомістким. Доцільність викладеного підходу базується на спільності даної методології та об'єктивного характеру проектно-виробничо-експлуатаційного середовища машинобудівної галузі, що являє собою складну динамічну структурно-параметричну систему. Отже, геометричні властивості останньої варто відтворювати відповідними варіантними СПГМ, які можуть виступати засобами інтеграції моделей інших суміжних інженерних дисциплін.

## **5.2. Сучасний літак – один з узагальнюючих представників складних виробів машинобудування**

Відомо, що для впровадження теоретичних прикладних досліджень потрібно обирати об'єкти, які здатні достатньо повно продемонструвати практичну значущість одержаних наукових результатів. У якості такого в даній роботі прийнято сучасний літак, оскільки останній є ґрунтовним узагальненням об'єктів машинобудування. При цьому мається на увазі його доволі широка номенклатура деталей і складаних одиниць, застосовуваних матеріалів та готової продукції інших підприємств, багатоманітних видів ТП, всіх типів виробництва тощо.

Характер життєвого циклу літака схожий із рештою складної продукції машинобудування, а саме, кораблями, автомобілями, двигунами, турбінами, компресорами, верстатами, приладами і т. д. Основні стадії їх створення – це проектування та виробництво, під час яких ретельно враховуються вимоги експлуатації.

На рис. 5.1 наведено комп'ютерні геометричні моделі літака на різних етапах його проектування.

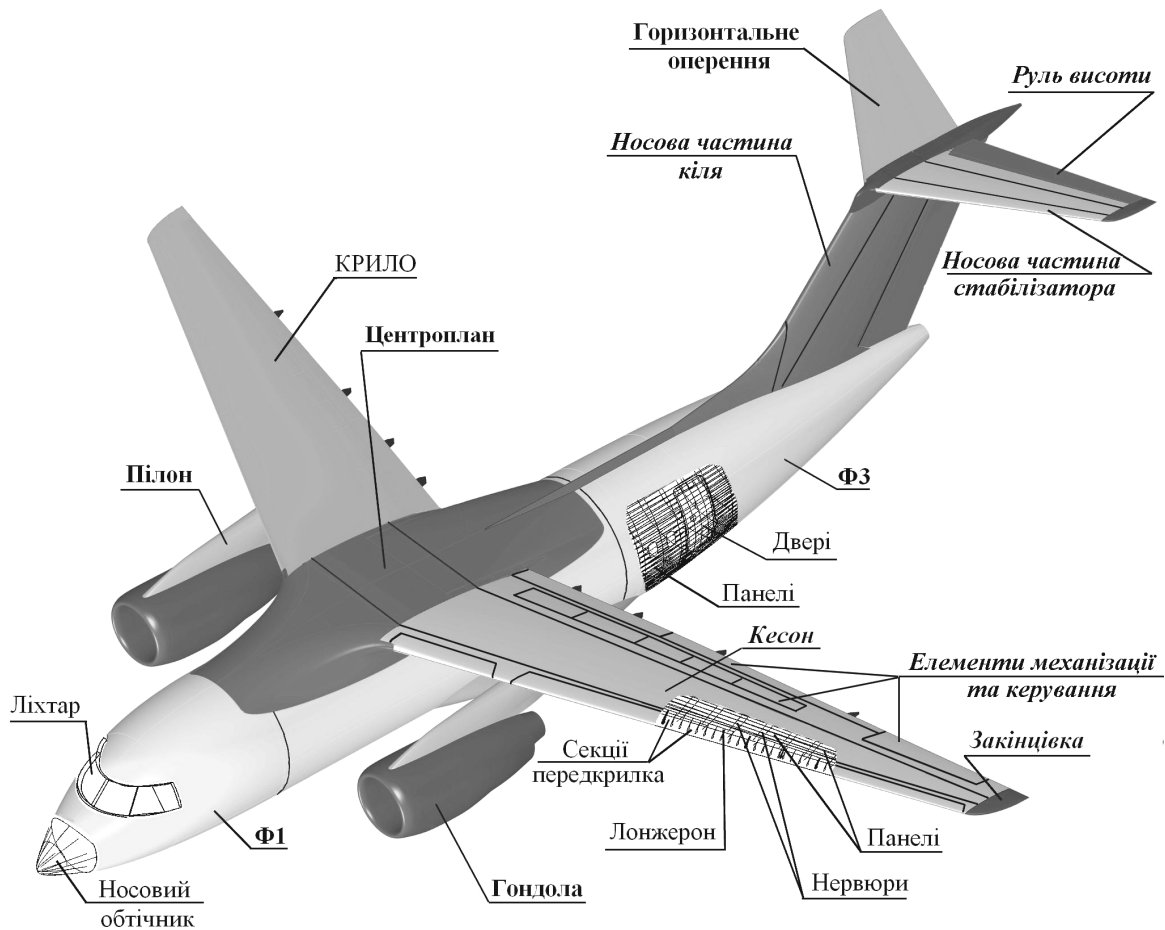


Рис. 5.1. Приклади моделей базової геометрії літака різних етапів його проектування

Уявлення про агрегати й відсіки даного виробу дає рис. 5.2.

*Ієрархічні рівні*

1. Виріб

2. Агрегати

3. Відсіки

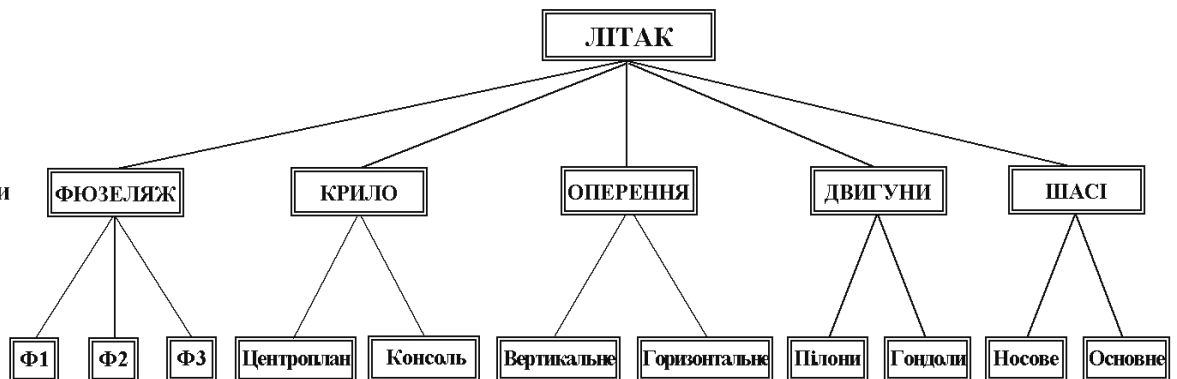


Рис. 5.2. Ієрархічний склад літака

Другий ієрархічний рівень складається з фюзеляжу, крила, оперення, двигунів і шасі. На наступному щаблі відсіків кожен із наведених вище агрегатів, див. рис. 5.1 і рис. 5.2, поділяється на дрібніші підсистеми, а саме:

фюзеляж – на носову (Ф1), середню (Ф2) і хвостову (Ф3) частини; крило – на центроплан та консоль; оперення – на вертикальне й горизонтальне; двигуни – на пілони та гондоли; шасі – на носове й основне. Деяким чином про подальший характер декомпозиції досліджуваного виробу свідчать подані на рис. 5.1 назви менших елементів, таких як носовий обтічник, ліхтар, секції передкрилка, лонжерони, нервюри, панелі, носова частина кіля, руль висоти і т. д. Оскільки наше завдання не полягає в повному аналізі структури літака, то не будемо зупинятись докладно на окреслених питаннях.

Акцентуємо увагу на геометричних аспектах розглянутої системи об'єктів. Підкреслимо, що останні, в основному, являють собою теоретичні зовнішні аеродинамічні поверхні, котрі забезпечують рух літака в повітрі, а лінії на них є конструкторсько-технологічними базами елементів силового набору, дверей, люків тощо. Наведені геометричні моделі застосовуються не тільки для проведення автоматизованих інженерних розрахунків на стадії проектування, а й під час усього життєвого циклу літака, зокрема для контролю точності його виготовлення та аналізу експлуатаційних деформацій.

Більш розгорнуто зазначені елементи фюзеляжу продемонстровано на рис. 5.3 та рис. 5.4, де відповідно зображено структуру поверхонь носової, середньої і хвостової частин та базові елементи їх конструктивно-силового набору (шпангоутів, стрингерів, балок і т. д.).

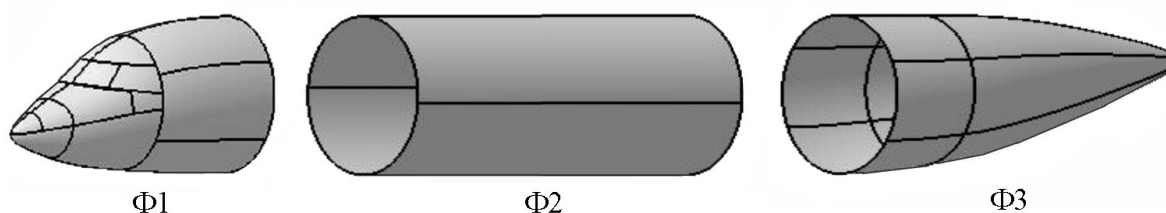


Рис. 5.3. Моделі теоретичних поверхонь частин фюзеляжу

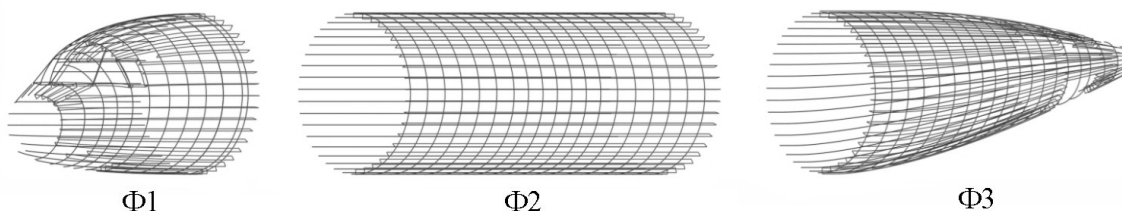


Рис. 5.4. Базові елементи конструктивно-силового набору фюзеляжу

Проаналізовані геометричні дані слугують безпосередньою основою для конструювання й виробництва літака.

### 5.2.1. Конструювання деталей і складаних одиниць

Розглянемо автоматизоване структурно-параметричне твердотільне геометричне моделювання, яке проілюстровано на елементах конструкції крила літака. Запропонована методика спрямована на підвищення ефективності групових технологій у машинобудуванні шляхом упровадження прийомів варіантного формоутворення.

Вище зазначалось, що створення технічних виробів, як правило, включає проектування конструкції, розроблення ТП та безпосереднє виготовлення. В умовах широкого застосування CAD/CAM пакетів комп'ютерний опис, що формується для машинобудівної продукції CAD системою й основу якого становлять геометричні моделі, передається в САМ пакет, де визначаються необхідні технологічні операції, оснащення, інструмент, норми витрат матеріалів і т. д.

Для значної кількості деталей та складаних одиниць окреслені задачі суттєво спрощуються завдяки наявності конструкторсько-технологічних класифікацій. При цьому в багатьох випадках вироби об'єднуються в певні групи на підставі спільних параметрів форми й розмірів. Проаналізуємо запропоновану методику використання засобів структурно-параметричного геометричного моделювання на прикладі конструкції крила літака, що зображена на рис. 5.5.

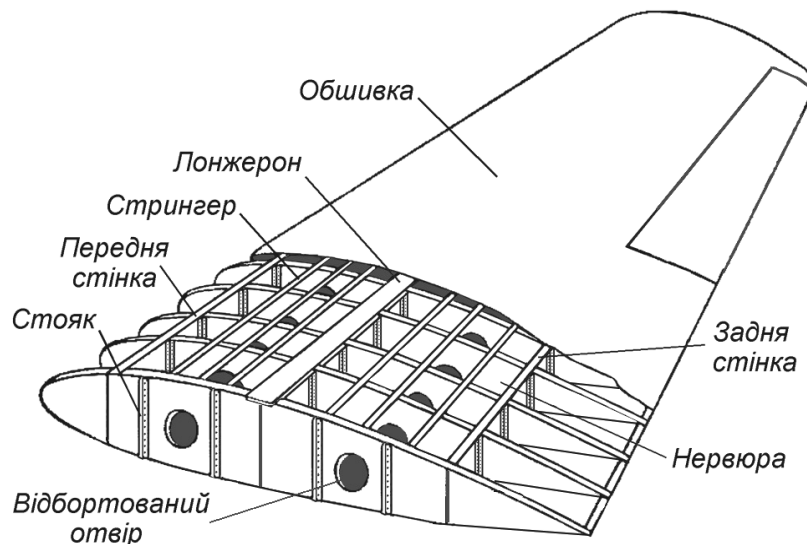


Рис. 5.5. Типова конструкція крила літака

До основних її складових відносяться *обшивка*, поздовжній (*лонжерони, стінки, стрингери*) і поперечний (*нервюри*) силові набори.

На рис. 5.6 показано кілька характерних вузлів та деталей крила, які можуть виготовлятися з листів або профілів.

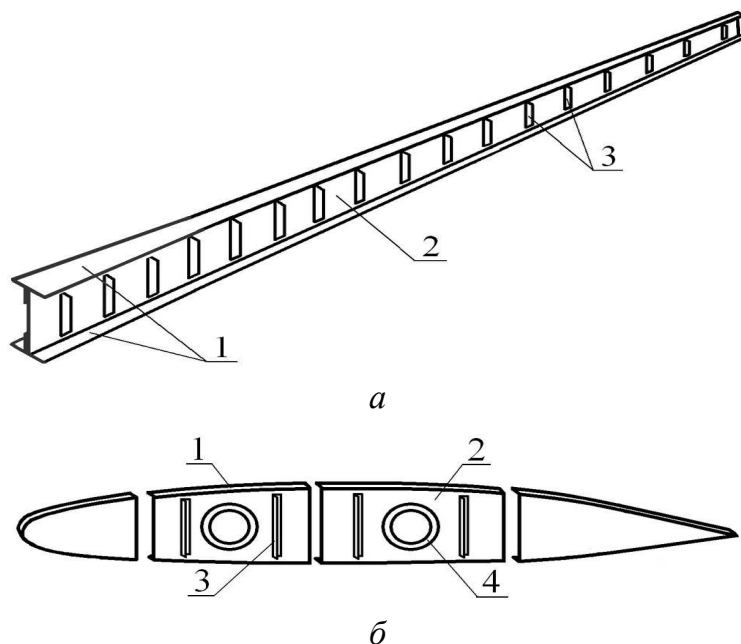


Рис. 5.6. Елементи конструкції крила:

*а* – лонжерон; *б* – нервюра

1 – пояс; 2 – стінка; 3 – стояк; 4 – відбортований отвір

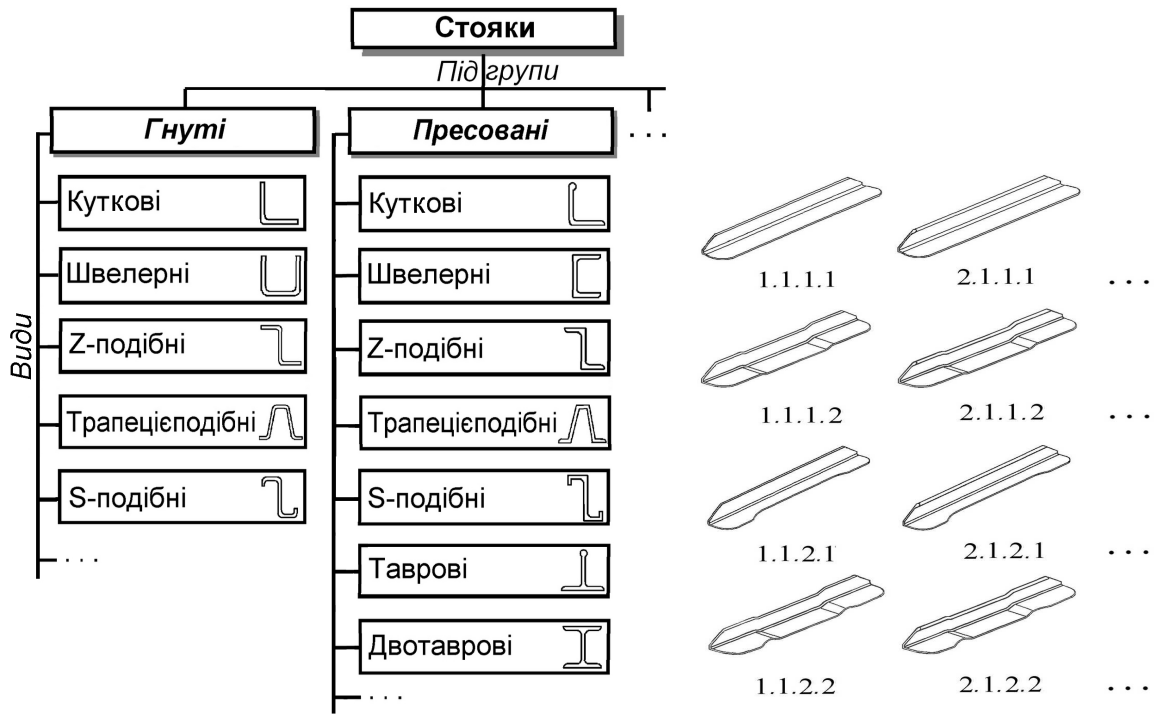
Доволі чисельні групи деталей і конструктивних елементів складають відповідно стояки та відбортовані отвори, фрагменти конструкторсько-технологічних класифікацій яких наведено на рис. 5.7, де можливість застосування додаткових підгруп, видів та конструктивних схем позначено трьома крапками.

При цьому *підгрупи* утворено згідно з технологічними методами виготовлення (гнуття, пресування, штампування), а *види* – залежно від поперечних перерізів (стояки куткові, швелерні і т. д.) або форми у плані (відбортовані отвори круглі, овальні тощо).

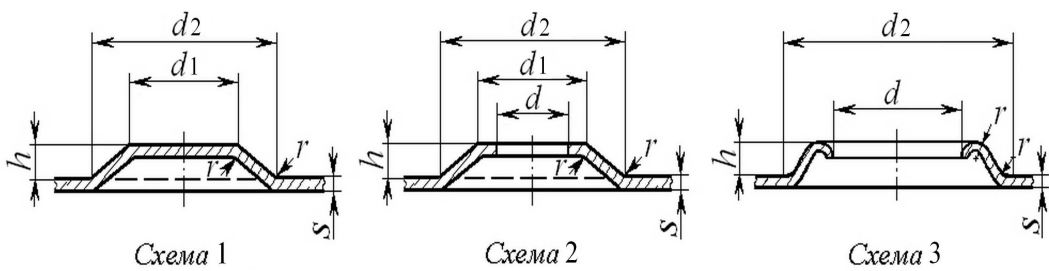
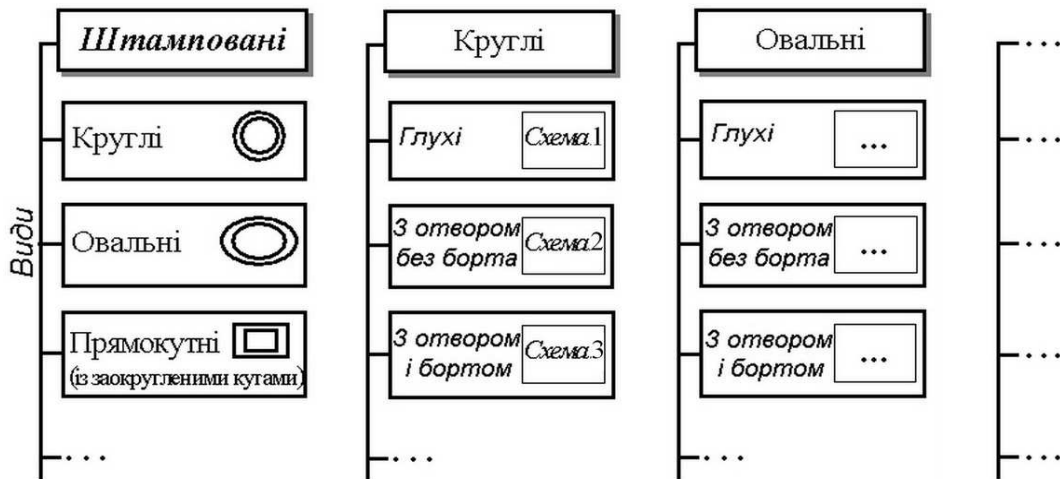
У якості класифікаційних ознак використано:

а) для стояків:

- *підгрупу* (заготованки з гнутих 1 або пресованих 2 профілів);
- *вид* (1 – кутковий, 2 – швелерний, 3 – z-подібний, 4 – трапеціє-подібний, 5 – s-подібний, 6 – тавровий, 7 – двотавровий);
- *форму з'єднувальної полиці* (1 – постійної ширини, 2 – з розширеннями на кінцях);
- *наявність підсікання* (1 – ні, 2 – так);



а



б

Рис. 5.7. Фрагменти конструкторсько-технологічних класифікацій:  
а – стояків; б – відбортованих отворів

б) для відбортованих отворів:  
– підгрупу (1 – штамповані);

- форму в плані (1 – круглі, 2 – овальні, 3 – прямокутні);
- конструктивно-технологічні особливості (1 – глухі, 2 – з отвором без борта, 3 – з отвором і бортом).

Так, наприклад, код 1.1.1.1 означає стояк із гнутого профілю куткового перерізу з постійною шириною з'єднувальної полиці без її підсікання, а 2.1.1.1 – такий же, але із пресованого профілю. Код 1.1.1 належить штампованому круглому у плані глухому відбортованого отвору, а 1.1.2 – такому ж, але з отвором без борта.

Для великого числа окремих моделей, наприклад у випадку проаналізованих вище стояків і відбортованих отворів, застосовувати їх, із метою структурної оптимізації, в якості комбінаторних складових створюваної конструкції без використання засобів автоматизації достатньо проблематично через велику трудомісткість та ймовірність допущення помилок.

Розглянуті вище класифікації дозволяють визначити множини параметричних моделей стояків  $P_{стояк}$  і відбортованих отворів  $P_{відб}$ , систематизувати їх елементи та ідентифікувати геометричні параметри останніх у наступному формалізованому вигляді

$$P_{стояк} = (p_{i1,i2,i3,i4})_{1,1,1,1}^{N_1,N_2,N_3,N_4} = (P_{стояк_n})_{1,1}^{N_{стояк}}$$

$$P_{відб} = (p_{i1,i2,i3})_{1,1,1}^{N_1,N_2,N_3} = (P_{відб_n})_{1,1}^{N_{відб}} \quad (5.1)$$

де  $N_1, N_2, N_3, N_4$  – відповідна кількість елементів класифікації,

$$p_{i1,i2,i3,i4} = (p_i)_{1,1,1,1}^{N_{i1,i2,i3,i4}}$$

$$p_{i1,i2,i3} = (p_i)_{1,1,1}^{N_{i1,i2,i3}} \quad (5.2)$$

де  $p_i$  – геометричні параметри.

Звернемо увагу, що залежності (5.2) відображують параметричні узагальнені розв'язки для побудови конкретного елемента множин (5.1), у той час як останні відтворюють структурні варіанти стояків і відбортованих отворів. Таким чином, поєднання виразів (5.1) і (5.2) дозволяє отримати структурно-параметричні описи досліджуваних об'єктів.

Наведені приклади є окремими випадками співвідношень (3.71) та (3.72).

Наочно проілюструвати формули (5.1) і (5.2) можна за допомогою графів варіантів, подібних до поданого на рис. 3.29. Проаналізуємо створення СПГМ складанної одиниці, взявши за основу показаний на рис. 5.6, *a* лонжерон. Нехай, згідно із загальною залежністю (3.70) для даного випадку маємо

$$ЛН = (лн_i)_1^{N_{ЛН}} = (лн_1, лн_2, лн_3), \quad (5.3)$$

де  $лн_1$  – стінка,

$лн_2$  – пояси,

$лн_3$  – стояки.

Припустимо, що

$$P_{стін} = (P_{стін_1}),$$

$$P_{пояс} = (P_{пояс_1}, P_{пояс_2}, P_{пояс_3}),$$

$$P_{стояк} = (P_{стояк_1}, P_{стояк_2}, P_{стояк_3}), \quad (5.4)$$

де  $P_{стін}$  і  $P_{пояс}$  – відповідно множина параметричних моделей стінок і поясів,

$P_{стін_1}$  – стінка без відбортованих отворів,

$P_{пояс_1}$  – кутковий гнучий пояс,

$P_{пояс_2}$  – кутковий пресований пояс,

$P_{пояс_3}$  – пояс із таврового профілю,

$P_{стояк_1}$  – стояк із кодом 1.1.1.1,

$P_{стояк_2}$  – стояк із кодом 2.1.1.1,

$P_{стояк_3}$  – стояк із кодом 2.6.1.2.

На рис. 5.8, згідно з наведеними умовами, показано можливі два, з фактично більшого числа, структурно-параметричні варіанти лонжерона, що проектується.

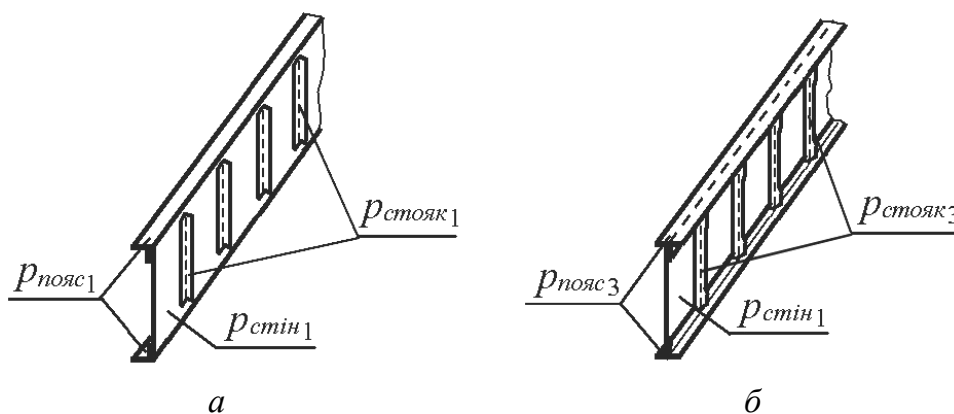


Рис. 5.8. Приклади структурно-параметричних різновидів лонжерона ЛН

Відповідно до виразу (3.73), рис. 3.29 та обраної послідовності утворення лонжерона  $ЛН=(P_{стін}, P_{пояс}, P_{стояк})$  маємо показані на рис. 5.9 матриці суміжності складових елементів.

	$P_{пояс}$	$P_{пояс_1}$	$P_{пояс_2}$	$P_{пояс_3}$
$P_{стін}$				
$P_{стін_1}$	1	1	1	

*a*

$P_{стояк}$	$P_{стояк_1}$	$P_{стояк_2}$	$P_{стояк_3}$
$P_{пояс}$			
$P_{пояс_1}$	1	1	0
$P_{пояс_2}$	1	1	0
$P_{пояс_3}$	0	0	1

*б*

Рис. 5.9. Матриці суміжності деталей лонжерона:  
*a* – стінки та поясів; *б* – поясів і стояків

Однією з головних задач варіантного конструювання є визначення, у даному випадку на основі виразів (5.3), (5.4) й матриць суміжності (рис. 5.9), кількості, складу та певних характеристик варіантів об'єкта, що розробляється. Будемо застосовувати для цього два нижче подані алгоритми.

*Алгоритм 5.1* розрахунку числа варіантів об'єкта у структурно-параметричній моделі.

Складається з трьох наступних пунктів:

1. Підсумовуються стовпці поточної (першої) матриці. Якщо вона остання, то обчислюється сума отриманих величин (число варіантів) і виконується пункт 3, у протилежному випадку – пункт 2.

2. Перехід до наступної матриці. Розрахунок нових її значень шляхом множення елементів на отримані величини сум відповідних стовпців попередньої матриці та виконання пункту 1.

3. Виведення одержаного результату.

*Алгоритм 5.2* визначення складу варіантів об'єкта у структурно-параметричній моделі.

Містить чотири пункти:

1. У поточній (початковій) матриці здійснюється рух уздовж поточного (першого) рядка до ненульового елемента. Після цього робиться перехід до відповідного рядка наступної матриці й далі реалізуються переміщення наведеним чином аж до останньої матриці включно, зупинкою в якій отримуємо поточний (перший) варіант, що має склад із відповідних елементів. Робиться перехід до пункту 2.

2. Наступні варіанти генеруються шляхом переміщення уздовж поточного рядка останньої матриці та зупинками в ненульових елементах, аж до закінчення цього рядка, після чого виконується пункт 3.

3. Дії даного пункту залежать від номера поточної матриці.

*Якщо поточна матриця не перша, то:* здійснюється перехід до попередньої матриці в рядок та стовпець поточного варіанта  $i$ , при наявності далі в цьому рядку ненульового елемента, виконується пункт 1, інакше робиться перехід до початку пункту 3.

*Якщо поточна матриця є першою, то:* здійснюється перехід до початку наступного рядка й виконується пункт 1, а в разі закінчення рядків – пункт 4.

4. Виведення одержаних результатів.

Отже, в загальному випадку, згідно з виразами (3.70), (3.71) і (3.73), які визначають варіанти частин довільного об'єкта  $O$  та порядок їх об'єднання (для розглянутої вище конструкції лонжерона це відповідно формули (5.3), (5.4) й рис. 5.9), алгоритми 5.1 і 5.2 дозволяють розраховувати число варіантів даного об'єкта у структурно-параметричній моделі та їх склад.

Для проаналізованого лонжерона маємо

$$ЛН = (ЛН_i)_1^5, \quad (5.5)$$

де  $ЛН_1 = (P_{стін_1}, P_{пояс_1}, P_{стояк_1})$ ,

$ЛН_2 = (P_{стін_1}, P_{пояс_1}, P_{стояк_2})$ ,

$ЛН_3 = (P_{стін_1}, P_{пояс_2}, P_{стояк_1})$ ,

$ЛН_4 = (P_{стін_1}, P_{пояс_2}, P_{стояк_2})$ ,

$ЛН_5 = (P_{стін_1}, P_{пояс_3}, P_{стояк_3})$ .

Багатоваріантний склад вузла об'єкта машинобудування, зазвичай, відтворюється значною кількістю ієрархічних графів, що відрізняються як номенклатурою своїх компонентів, так і порядком їх об'єднання. Так, наприклад, для лонжерона крила доцільна кількість таких структурних схем може сягати десятків. На практиці розглянута задача ще більш ускладнюється, оскільки подібний вузол, як правило, є лише однією з багатьох (сотень, у випадку літака) частин створюваної конструкції. Використання традиційних методів, без застосування спеціалізованих комп'ютерних програмних модулів для автоматизованого формування й оперативної підтримки чисельних структурних і параметричних варіантів опрацьовуваних технічних об'єктів, доволі трудомістке.

На основі узагальнених структурно-параметричних різновидів (5.5) досліджуваного лонжерона згідно з певними комбінаціями геометричних параметрів вигляду (5.2) його складових елементів формуються конкретні варіанти даної складанної одиниці, структурну схему одного з яких зображено на рис. 5.10.

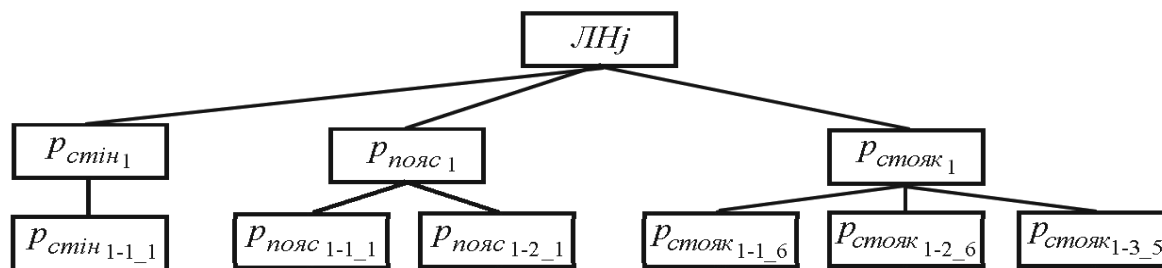


Рис. 5.10. Структурна схема лонжерона ЛНj

У наведеному графі коренева вершина позначає всю систему, яка моделюється. Далі йдуть компоненти, що в порядку зліва направо відображують послідовність об'єднання елементів на поточних рівнях. У даному випадку другий ієрархічний рівень створено згідно з виразом (5.3), третій – із використанням варіантів моделей (5.4), де номери варіантів позначено через дефіс, а числами після підкреслень – кількість застосованих екземплярів сформованих об'єктів.

У поданому на рис. 5.10 лонжероні використано:

- стінку, що побудована моделлю  $P_{стін1-1}$ ;
- по одному екземпляру поясів, які створені моделями  $P_{пояс1-1}$  і  $P_{пояс1-2}$ ;
- шість, шість та п'ять стояків, виконаних відповідно за допомогою моделей  $P_{стояк1-1}$ ,  $P_{стояк1-2}$ ,  $P_{стояк1-3}$ .

Складанна одиниця ЛНj містить двадцять деталей. Проаналізовану схему ілюструє рис. 5.8, а. Приклади структурно-параметричного варіантного конструювання лонжеронів крила в системі CADD5 показано на рис. 5.11.

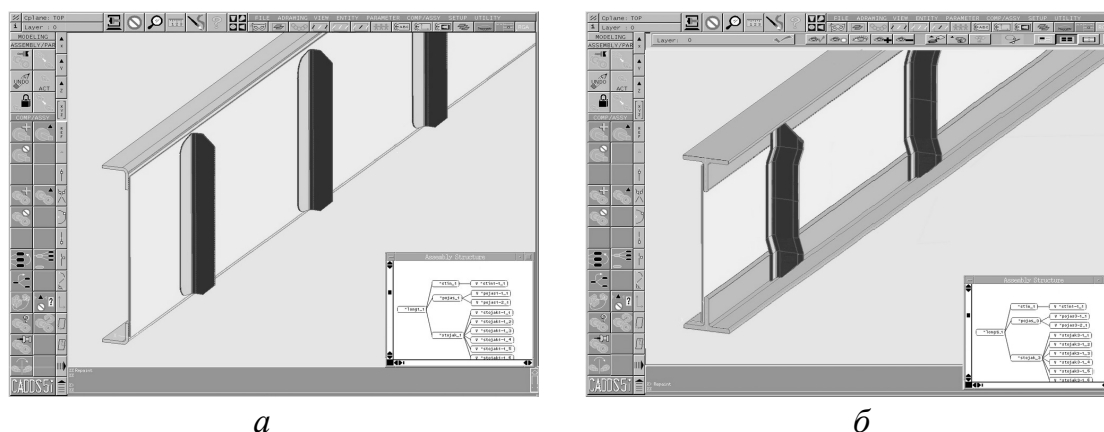


Рис. 5.11. Варіанти лонжерона ЛН

Напрацьовані прийоми структурно-параметричного геометричного моделювання дозволяють продуктивно виконувати аналіз великого числа проектних варіантів створюваного виробу, чим сприяють підвищенню ефективності автоматизованого конструювання технічних об'єктів.

### 5.2.2. Проектування технологічних процесів

У даному пункті монографії розкрито можливості застосування структурно-параметричного формоутворення на різних стадіях виготовлення (рис. 2.3) продукції машинобудування. При цьому мається на увазі придатність зазначеного підходу для опрацювання заготовок, деталей і складаних одиниць різними технологічними методами: оброблянням різанням, тиском, складальними операціями тощо.

#### 5.2.2.1. Заготівельні процеси

Відповідно до схеми виробництва технічних об'єктів (рис. 2.3) розглянемо виготовлення заготовок. У конструкції продукції машинобудування досить поширені деталі з листів та різноманітних профілів. У загальному випадку це стосується й інших вихідних сортаментних матеріалів, таких як труби, проволока, рулони тощо. Проаналізуємо застосування структурно-параметричного підходу для оптимізації поділу листових матеріалів на прямокутні заготовки, тобто гільйотинний розкрій, який розповсюджується на профілі, труби, проволоку і т. п.

Довільну деталь, зазвичай, можна виготовити згідно з кількома варіантами ТП (технологічного процесу), що різняться між собою використаним обладнанням, оснащенням, інструментом і т. д. Головне завдання проектувальника, як правило, полягає у визначенні оптимального варіанта відповідно до певного узагальненого критерію. У якості останнього найбільш широко застосовується технологічна собівартість  $C$ , що є найбільш повним показником економічності та включає до свого складу сумарні витрати на виготовлення деталі

$$C = M + Z + O, \quad (5.6)$$

де  $M$  – вартість матеріалу;

$Z$  – заробітна плата робочих;

$O$  – витрати на обладнання, оснащення та інструмент.

Таким чином, розкрій матеріалів потребує комплексного врахування різноманітних виробничих факторів для визначення оптимального ТП. Для розв'язування даного питання авторами застосовується евристичний алгоритм, що є розвитком методу розмірних послідовностей. Його апробація на Київському авіаційному заводі «Авіант» під час виготовлення літаків і тролейбусів, засвідчила достатню практичну ефективність такого підходу. Зокрема, для листів кольорового металу тролейбуса К12 дозволила підвищити коефіцієнт використання матеріалу на 6% або зменшити їх витрати приблизно на 120 кг для одного виробу.

Процес виконання раціонального розкрою, з точки зору структурно-параметричного підходу та методу розмірних послідовностей, можна розглядати як формування комбінаторного геометричного об'єкта. Сутність зазначеного методу полягає в тому, що розташування прямокутних заготовок на листовому матеріалі здійснюється шляхом послідовного опрацювання, починаючи з найбільших їх габаритів. При цьому незаповнена частина листів також подається упорядкованою за зростанням габаритів множиною прямокутників. Згідно з наведеним основним правилом та декотрими додатковими умовами визначається подібний до поданого у третьому розділі монографії комбінаторний параметр, який є потрібною послідовністю структурних елементів (заготовок) створюваної комбінаторної геометричної фігури (карти розкрою матеріалу).

У поданій нижче таблиці наведено відомості щодо застосування прямокутних заготовок для деталей тролейбуса К12.01 із листового матеріалу АМГЗМ товщиною 2,5 мм.

Таблиця 5.1

Деталі виробу К12.01 із листа АМГЗМ товщиною 2,5 мм

№ п/п	Позначення	Кількість	Габарити заготовки, мм	Маса, кг
1	К12.01.0101.606.003	2	90 x 900	0,257
2	К12.01.0101.606.004	2	90 x 900	0,257
3	К12.01.0101.606.005	2	80 x 2010	0,836
4	К12.01.0101.606.006	2	90 x 900	0,55
5	К12.01.0101.606.007	2	80 x 810	0,353
6	К12.01.0101.606.008	2	90 x 900	0,353
7	К12.01.0101.607.001	2	80 x 480	0,207
8	К12.01.0101.607.002	2	80 x 480	0,207
9	К12.01.0101.608.000	4	80 x 570	0,2
10	К12.01.1003.109.001	1	190 x 360	0,42

Продовження табл. 5.1

11	K12.01.1003.109.002	1	190 x 360	0,42
12	K12.01.5810.282.000	3	120 x 160	0,115
13	K12.01.5810.283.000	1	45 x 170	0,04
14	K12.01.7704.133.000	1	170 x 340	0,268
15	K12.01.7968.115.003	2	45 x 2105	0,563
16	K12.01.7968.115.005	1	45 x 155	0,04
17	K12.01.7968.115.007	2	45 x 410	0,108
18	K12.01.7968.115.009	2	45 x 320	0,087
19	K12.01.7968.115.011	2	45 x 1010	0,268
20	K12.01.7968.115.013	2	45 x 280	0,074
21	K12.01.7968.115.015	2	40 x 440	0,117
22	K12.01.7968.115.017	2	45 x 440	0,117
23	K12.01.7968.115.019	6	45 x 165	0,043
24	K12.01.7968.115.021	7	30 x 385	0,051
25	K12.01.7968.115.023	3	45 x 1405	0,3
26	K12.01.7968.115.025	1	45 x 765	0,061
27	K12.01.7968.115.027	3	30 x 800	0,106
28	K12.01.7968.115.029	1	30 x 490	0,065
29	K12.01.7968.115.031	1	45 x 730	0,192
30	K12.01.7968.115.035	2	45 x 1480	0,457
31	K12.01.7968.116.000	1	30 x 510	0,109
32	K12.01.7968.118.000	1	80 x 480	0,242
33	K12.01.7968.120.000	4	120 x 1850	1,215
34	K12.01.7968.121.000	4	120 x 1850	0,615
35	K12.01.7968.123.001	4	75 x 320	0,15
36	K12.01.7968.123.002	3	75 x 320	0,15
37	K12.01.7968.126.003	11	80 x 200	0,06
38	K12.01.7968.126.005	1	80 x 750	0,26
39	K12.01.7968.128.001	1	110 x 620	0,14
40	K12.01.7968.128.002	1	110 x 620	0,14
41	K12.01.7968.129.001	1	125 x 450	0,072
42	K12.01.7968.129.002	1	125 x 450	0,072
43	K12.01.7968.132.000	3	40 x 900	0,178
44	K12.01.7968.134.000	3	80 x 810	0,423
45	K12.01.7968.137.003	2	35 x 1850	0,383
46	K12.01.7968.138.000	2	370 x 1500	0,33
47	K12.01.9400.002.000	4	160 x 160	0,037

Наступні два рисунки показують виконаний за допомогою методу розмірних послідовностей раціональний розкрій листового матеріалу. Акцентуємо увагу на таких моментах. Даний евристичний алгоритм дозволяє відносно просто враховувати різні технологічні особливості, зокрема, дозвіл або заборону повертання заготованок, обов'язкового забезпечення наскрізних прямолінійних розрізань тощо.



### 5.2.2.2. Оброблювальні процеси

Наступним етапом виробництва продукції машинобудування, після отримання заготовок, відповідно до схеми рис. 2.3 є виготовлення деталей. Розглянемо його на прикладі формування, із застосуванням структурно-параметричного підходу, динамічних комп'ютерних геометричних твердотільних моделей, що відтворюють ТП оброблення тиском. Проаналізуємо холодне штампування круглих відбортованих отворів без бортів, які розглянуто в попередньому пункті.

На рис. 5.13 подано основні геометричні параметри, що визначають формоутворення досліджуваного об'єкта.

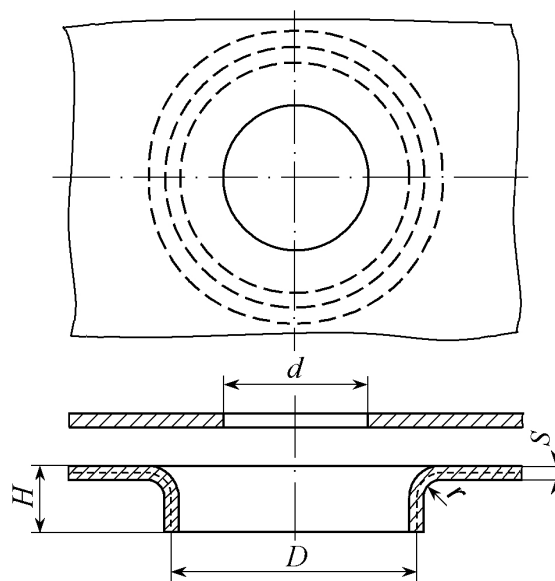


Рис. 5.13. Схема відбортовування отвору

У даному випадку процес полягає у виготовленні бортів навколо попередньо зроблених отворів (розсвердлюванням, фрезеруванням, пробиванням і т. д.) за рахунок розтягування та зменшення товщини матеріалу в дотичному напрямі до концентричних кіл у зоні деформації, тобто області всередині найбільшого показаного штрихами кола на рис. 5.13. При цьому відстані уздовж радіусів залишаються без істотних змін.

Зазвичай висота борта  $H$  задається креслеником деталі. Тоді діаметр  $d$  потрібного отвору в заготованці можна розрахувати за наступною наближеною формулою

$$d = D - 2(H - 0,43r - 0,72s), \quad (5.7)$$

де  $D$  – діаметр відбортовування (вздовж нейтральному шару),

$r$  – внутрішній радіус гнуття виробу,

$s$  – товщина листа матеріалу.

Вираз (5.7) отримано на підставі припущення щодо рівності певних відстаней плоскої заготовки та відповідних ділянок нейтрального шару в одержаній деталі. Доцільно акцентувати увагу на тому, що під час холодного штампування здійснюється зміщення нейтрального шару, особливо суттєво для малих  $r$ , у бік стиснених волокон. Величина такого переміщення залежить від пластичності матеріалу, кута згинання, відношення  $r/s$  і т. д. Також, для більш точних розрахунків, довжину нейтрального шару потрібно обчислювати не як частину кола, а як дугу параболи.

Ступінь деформації визначається коефіцієнтом відбортовування

$$K_0 = d / D. \quad (5.8)$$

Найменша товщина деталі на краю борта становить  $S_1 = S\sqrt{K_0}$ .

Розглянемо деякі аспекти стосовно безпосереднього виконання досліджуваного ТП. Установлено, що при збільшенні зазору між пуансоном та матрицею до  $z=(8 \dots 10)s$  необхідне для відбортовування зусилля зменшується на 30 ... 35%. Цей випадок відповідає великому радіусу згинання та малій довжині циліндричної частини борта. Значний вплив на силові та енергетичні показники справляє форма робочого інструмента.

На рис. 5.14 показано побудовані відповідно до наявних у літературних джерелах даних діаграми зусиль та послідовності утворення відбортованого отвору для пуансона різної форми: криволінійної (трактриса), сферичної, циліндра з великим та малим закругленням.

Мінімально допустиме значення коефіцієнта відбортовування залежить від:

- якості отвору  $d$  (характеру оброблення, наявності задирок тощо);
- відносної товщини заготовки  $s/D$ ;
- виду матеріалу та його механічних властивостей;
- форми робочої частини пуансона.

Найменші значення цих коефіцієнтів отримують під час відбортовування розсвердлених отворів, найбільші – пробитих. Але застосування в останньому випадку термічного оброблення у вигляді відпалу усуває явище наклепу й підвищує пластичність металу, тобто забезпечує умови аналогічні розсвердлюванню або фрезеруванню. Експериментально доведено, що зі

зростанням  $s/D$  знижується гранична величина  $K_0$ , тобто підвищується максимально дозволений ступінь деформації. Розрахунок допустимого  $K_0$  некруглих отворів виконується для ділянки з найменшим радіусом.

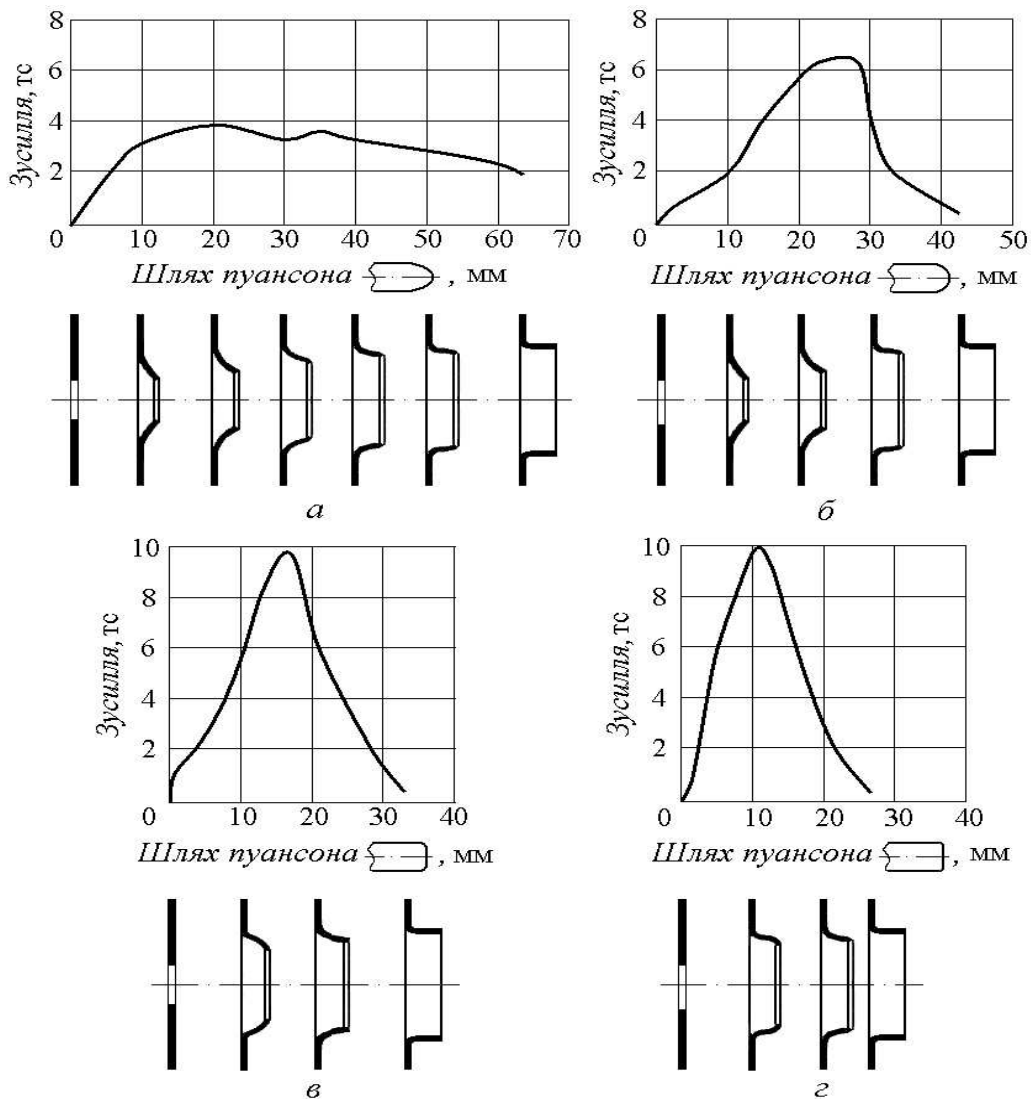


Рис. 5.14. Процеси утворення відбортованого отвору різним за формою пуансоном:

*a* – криволінійним; *б* – сферичним; *в, з* – циліндричним відповідно з великим та малим закругленням

Таким чином, проаналізовано технологію створення одного з типових елементів деталей машинобудування. Проведені дослідження підтверджують важливу роль геометричних параметрів і характеристик під час проектування та виготовлення технічної продукції. Очевидно, що розглянутий виробничий процес має структурно-параметричний характер, тобто містить у своєму складі різноманітні технологічні операції, обладнання, інструмент і режими їх використання.

Особливість даного прикладу полягає в можливості формування, на викладених засадах, такої структурно-параметричної моделі, яка здатна застосовувати не тільки вже відомі аналітичні та інші співвідношення, зокрема, типу зображених на рис. 5.14, а й відтворювати принципово нові варіанти технології. Цим забезпечується скорочення витрат на відповідні наукові дослідження та термінів їх виконання. Діаграми зусиль (рис. 5.14) є базою для побудови динамічних комп'ютерних твердотільних геометричних моделей.

На практиці для розглянутого відбортюваного отвору та технології його виготовлення можливе використання й інших, крім проаналізованих, варіантів. Даний факт обумовлюється наявним на конкретному підприємстві обладнанням та інструментом, прийнятим способом виконання робіт і т. д. Існування кількох розв'язків приводить до потреби визначення найкращого, який обирається згідно з оптимізацією певних техніко-економічних показників ТП, таких як його продуктивність, собівартість тощо. На рис. 5.15 подано граф моделі, яка побудована відповідно до викладених у третьому розділі загальних прийомів структурно-параметричного варіантного формоутворення і здатна динамічно відображувати різноманітні процеси виготовлення опрацьовуваного об'єкта.

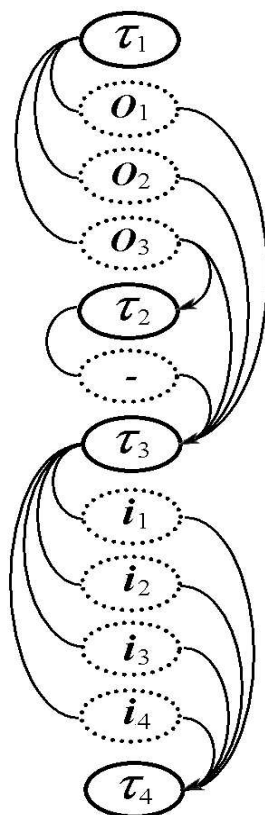


Рис. 5.15. Структурно-параметрична модель відбортювання отвору

У даному випадку маємо множини:

– технологічних операцій

$$T = (\tau_i)_1^4,$$

де  $\tau_1 = \{\text{Заготівельна}\}$ ,

$\tau_2 = \{\text{Термооброблювальна}\}$ ,

$\tau_3 = \{\text{Відбортювальна}\}$ ,

$\tau_4 = \{\text{Контрольна}\}$ ;

– обладнання

$$O = (o_i)_1^3,$$

де  $o_1 = \{\text{Свердлильний верстат}\}$ ,

$o_2 = \{\text{Фрезерний верстат}\}$ ,

$o_3 = \{\text{Прес}\}$ ;

– інструменту

$$I = (i_i)_1^4,$$

де  $i_1 = \{\text{Пуансон із перерізом у вигляді трактриси}\}$ ,

$i_2 = \{\text{Сферичний пуансон}\}$ ,

$i_3 = \{\text{Циліндричний пуансон із великим закругленням}\}$ ,

$i_4 = \{\text{Циліндричний пуансон із малим закругленням}\}$ .

Структурно-параметричний характер формоутворення мають також й інші деталі, що виготовляються обробленням різанням та тиском.

### 5.2.2.3. Складально-монтажні процеси

Розглянемо складально-монтажні ТП на прикладі виготовлення поданого в пункті 5.2.1 лонжерона (рис. 5.6, а).

Визначаємо множину елементів даного об'єкта

$$ЛН = (лн_i)_1^{N_{ЛН}} = (лн_1, лн_2, лн_3, лн_4),$$

де  $лн_1 = (СТ_1)$  – стінка,

$лн_2 = (ПС_1, ПС_2)$  – пояси,

$лн_3 = (Ст_1, \dots, Ст_{17})$  – стояки,

$лн_4 = (ЗК_1, \dots, ЗК_{N_{ЗК}})$  – заклепки.

Будемо вважати, що до технологічної системи складання лонжерона входить наступний набір операторів

$$T = (\tau_i)_1^9,$$

та множина обладнання, оснащення й інструменту

$$O = (O_i)_1^4,$$

де  $\tau_1 = \{\text{Установити та зафіксувати } CT_1\}$ ;

$\tau_2 = \{\text{Установити та зафіксувати } PC_1 \text{ і } PC_2\}$ ;

$\tau_3 = \{\text{Установити та зафіксувати } Cm_1 \dots Cm_{17}\}$ ;

$\tau_4 = \{\text{Свердлити отвори у } PC_1, PC_2, Cm_1 \dots Cm_{17}, \text{ встановлюючи технологічні фіксатори}\}$ ;

$\tau_5 = \{\text{Свердлити решту отворів у } PC_1, PC_2, Cm_1 \dots Cm_{17}\}$ ;

$\tau_6 = \{\text{Зенкувати отвори у } PC_1, PC_2, Cm_1 \dots Cm_{17}\}$ ;

$\tau_7 = \{\text{Свердлити та зенкувати отвори у } PC_1, PC_2, Cm_1 \dots Cm_{17}\}$ ;

$\tau_8 = \{\text{Клепати } PC_1, PC_2, Cm_1 \dots Cm_{17} \text{ заклепками, знімаючи технологічні фіксатори}\}$ ;

$\tau_9 = \{\text{Контроль складання } LH\}$ ;

$O_1 = (O_{1j})_1^5$  – фіксатори:  $O_{11} = \Phi K_1$  – штирі,  $O_{12} = \Phi K_2$  – гвинтові,  $O_{13} = \Phi K_3$  – важільні,  $O_{14} = \Phi K_4$  – пружинні,  $O_{15} = \Phi K_5$  – технологічні болти;

$O_2 = (O_{2j})_1^3$  – свердлильне обладнання:  $O_{21} = ПД_1$  – пневматичні дрилі,  $O_{22} = СВ_1$  – свердлильні верстати,  $O_{23} = СЗУ_1$  – свердлувально-зенкувальні установки;

$O_3 = (O_{3j})_1^3$  – клепальне обладнання:  $O_{31} = ПМ_1$  – пневматичні молотки,  $O_{32} = ПС_1$  – пневматичні скоби,  $O_{33} = КП_1$  – клепальні преси;

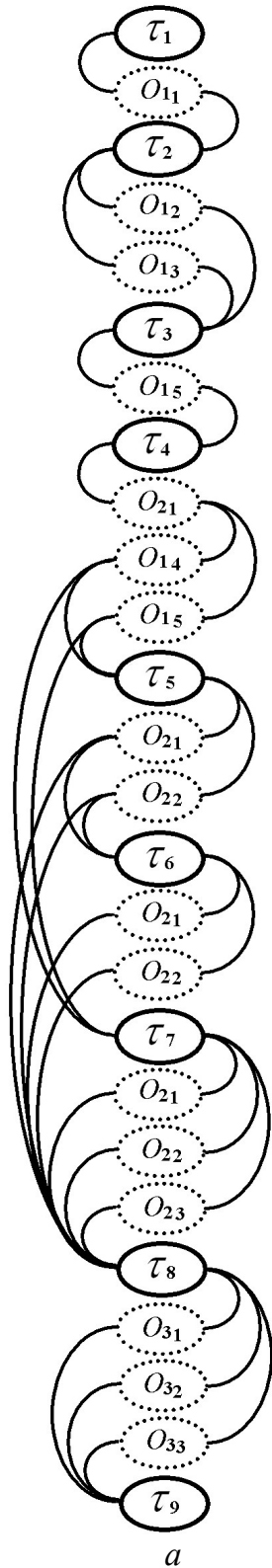
$O_4 = (O_{4j})_1^1$  – контрольне обладнання:  $O_{41} = КІ_1$  – контрольні інструменти.

На рис. 5.16 показано граф та матриці суміжності структурно-параметричної моделі ТП складання лонжерона. Подані в пункті 5.2.1 алгоритми 5.1 і 5.2 дозволяють розраховувати кількість проектних варіантів ТП та їх склад. Наявні дані свідчать, що можливими послідовностями виготовлення лонжерона є

$$T_1 = \{\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4, \tau_5, \tau_6, \tau_8, \tau_9\},$$

$$T_2 = \{\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4, \tau_5, \tau_8, \tau_9\},$$

$$T_3 = \{\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4, \tau_7, \tau_8, \tau_9\}.$$



*a*

$\tau_1$	$\tau_2$	$O_{12}$	$O_{13}$
$O_{11}$	1	1	

$\tau_2$	$\tau_3$	$O_{15}$
$O_{12}$	1	
$O_{13}$	1	

$\tau_3$	$\tau_4$	$O_{14}$	$O_{15}$
$O_{15}$	1	1	

$\tau_4$	$\tau_5$	$O_{21}$	$O_{22}$
$O_{14}$	1	1	
$O_{15}$	1	1	

$\tau_4$	$\tau_7$	$O_{21}$	$O_{22}$	$O_{23}$
$O_{14}$	1	1	1	
$O_{15}$	1	1	1	

$\tau_5$	$\tau_6$	$O_{21}$	$O_{22}$
$O_{21}$	1	1	
$O_{22}$	1	1	

$\tau_5$	$\tau_8$	$O_{31}$	$O_{32}$	$O_{33}$
$O_{21}$	1	1	1	
$O_{22}$	1	1	1	

$\tau_6$	$\tau_8$	$O_{31}$	$O_{32}$	$O_{33}$
$O_{21}$	1	1	1	
$O_{22}$	1	1	1	

$\tau_7$	$\tau_8$	$O_{31}$	$O_{32}$	$O_{33}$
$O_{21}$	1	1	1	
$O_{22}$	1	1	1	
$O_{23}$	1	1	1	

$\tau_8$	$\tau_9$	$O_{41}$
$O_{31}$	1	
$O_{32}$	1	
$O_{33}$	1	

*б*

Рис. 5.16. Структурно-параметрична модель складання лонжерона:  
*a* – граф структури; *б* – матриця суміжності різновидів елементів

При цьому  $T_2$  моделює процес складання з використанням непотайних заклепок, а  $T_1$  та  $T_3$  – потайних (з окремим і суміщеним свердлінням та

зенкуванням отворів). Число проектних структурних різновидів ТП для наведених трьох послідовностей відповідно дорівнює  $N_1=48$ ,  $N_2=24$  та  $N_3=36$ , загальною кількістю  $N=N_1+N_2+N_3=48+24+36=108$ . За потреби зменшення отриманого розмаїття варіантів рекомендується застосовувати, наприклад, прийоми технологічної уніфікації, тобто прагнути виконувати різні операції на одному обладнанні, поєднувати їх або, навіть, виключати з розгляду найбільш неперспективні. Останнє здійснюється присвоюванням нульових значень необхідним елементам матриць суміжності.

Отже, у графі (рис. 5.16, а) вершини визначають послідовність складання лонжерона, а ребра здатні кількісно описувати відповідні процеси. При цьому кожний простий елементарний ланцюг, що проходить від початкової до кінцевої вершини, відображує певний різновид технології виготовлення проаналізованого об'єкта. Для їх порівняння й дефініції оптимального варіанта, з точки зору кількох суміжних інженерних та інших дисциплін (для розглянутого лонжерона це може бути міцність, надійність, економіка тощо), слід поставити у відповідність ребрам графа потрібні цільові комплексні функціональні залежності. На підставі останніх розрахувати одним із відомих методів, скажімо індексації вершин, належний екстремальний шлях у графі, чим визначити оптимальний ТП.

Подібним чином пропонується поєднувати конструкторське, технологічне та експлуатаційне проектування виробів машинобудування. Нехай, як приклад, під час опрацювання досліджуваного лонжерона для зазначених трьох етапів отримано наступні його проектні різновиди

$$V_{k_{лн}}=(v_{k_{лнi}})_1^{N_{k_{лн}}}, \quad V_{t_{лн}}=(v_{t_{лнi}})_1^{N_{t_{лн}}}, \quad V_{e_{лн}}=(v_{e_{лнi}})_1^{N_{e_{лн}}},$$

де  $V_{k_{лн}}$ ,  $V_{t_{лн}}$ ,  $V_{e_{лн}}$  – відповідно множини конструкторських, технологічних та експлуатаційних варіантів.

Тоді, на викладених вище засадах, інтегровану конструкторсько-технологічно-експлуатаційну структурно-параметричну модель лонжерона можна подати у вигляді, зображеному на рис. 5.17. Її застосування дозволяє отримати множину конструкторсько-технологічно-експлуатаційних проектних різновидів лонжерона

$$V_{kte_{лн}}=(v_{kte_{лнi}})_1^{N_{kte_{лн}}},$$

яка за описаним порядком здатна бути елементом системи вищого рівня, наприклад, див. рис. 5.5, крила літака.

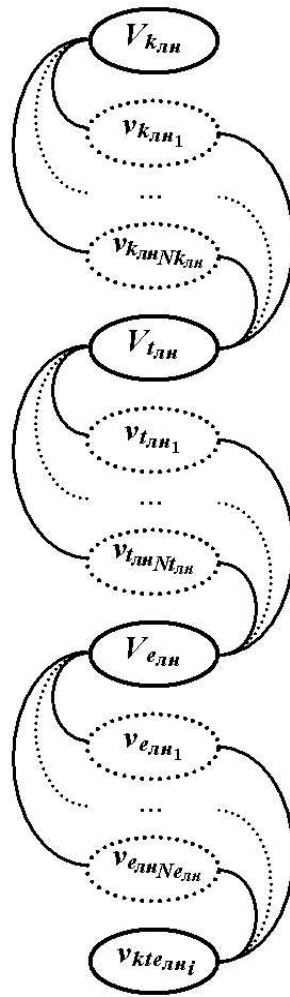


Рис. 5.17. Інтегрована конструкторсько-технологічно-експлуатаційна модель лонжерона

Таким чином, запропоновані у проведеному науковому дослідженні прийоми структурно-параметричного моделювання можна використовувати для конструювання окремих деталей і складаних одиниць, проектування процесів їх виготовлення та експлуатації, виконання зазначених робіт для більш складних технічних об'єктів.

### 5.3. Висновки до розділу 5

У цьому розділі монографії розглянуто застосування запропонованих методів, прийомів та алгоритмів структурно-параметричного геометричного моделювання для автоматизованого проектування технічної продукції. Достовірність отриманих результатів обґрунтовано їх порівнянням з уже відомими, що одержані іншими способами, проведенням комп'ютерних експериментів та впровадженнями у виробництво.

Головна науково-практична цінність полягає в узагальненні, систематизації та подальшому розвитку методології автоматизованого структурно-параметричного геометричного моделювання складної продукції машинобудування, розроблянні нових методик варіантного формоутворення, здійсненні їх програмної реалізації та впровадженні у виробництво. Зазначені здобутки спрямовані на розв'язування важливої прикладної проблеми покращення якості технічних об'єктів шляхом підвищення ефективності їх комп'ютерного опрацювання.

Основні результати даного розділу надруковано в роботах [24–30, 32–34, 37, 49, 50, 54–59, 61, 63, 66, 71, 75, 78, 79, 82–84].

## **6. ПЕРСПЕКТИВИ ВПРОВАДЖЕННЯ МЕТОДОЛОГІЇ СТРУКТУРНО-ПАРАМЕТРИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ В ІНШІ СФЕРИ ЖИТТЄДІЯЛЬНОСТІ ЛЮДИНИ**

Дану частину монографії присвячено питанням перспектив подальшого розвитку напрацьованих методів, прийомів й алгоритмів та можливості їх застосування у відмінних від машинобудування галузях життєдіяльності людини. При цьому взято до уваги той факт, що одним із стратегічних напрямків підвищення рівня узагальнення використання наукових теорій є знаходження таких сфер практики, в яких уже відомими методами можуть моделюватися об'єкти, процеси та явища, що на перший погляд здаються відмінними від досліджених.

### **6.1. Застосування структурно-параметричного формоутворення суміжними з прикладною геометрією математичними науками**

Оскільки основне призначення прикладної геометрії полягає у впровадженні у практику теоретичних досягнень та доробків таких споріднених із нею математичних і комп'ютерних наук як теорія множин і графів, логіка, оптимальне керування, дослідження операцій, обчислювальні методи, теорія алгоритмів, інформатика, кібернетика, комп'ютерне моделювання, системний аналіз тощо, то у свою чергу і прикладна геометрія здатна не тільки уточнювати концепції, підходи, методи, моделі, прийоми та алгоритми перерахованих вище наук, а і збагачувати останні своїми напрацюваннями.

Щодо поданої в даній роботі узагальненої концепції структурно-параметричного комп'ютерного варіантного формування об'єктів і процесів машинобудування, то це стосується, наприклад, запропонованих методів розв'язування задач глобальної оптимізації геометричними засобами апроксимації та візуалізації багатовимірних фігур.

Аналіз проектування складних технічних об'єктів виявив потребу в комплексному використанні підходів таких наук як аналітична, нарисна, диференціальна, комбінаторна, багатовимірна й обчислювальна геометрія, топологія, теорія множин і графів, алгоритмів, методи автоматизованого проектування, системний аналіз, математичне програмування, оптимальне управління і т. д.

У прикладній геометрії окреслену проблему було запропоновано розв'язувати на засадах структурно-параметричного підходу. Отримані позитивні результати, які підтверджуються впровадженнями у виробництво, можуть слугувати певним орієнтиром для фундаментальних математичних наук стосовно використання інтегрованих технологій для здобуття нових знань.

Оскільки сучасну прикладну геометрію важко уявити без широкого застосування комп'ютерних засобів, то й відповідні науки, такі як теорія алгоритмів, обчислювальні методи, програмування і т. д. можуть не тільки почерпнути із практики для себе постановки актуальних проблемних задач, а й перевірити та удосконалити нею власні теоретичні здобутки.

## **6.2. Використання напрацьованих методів моделювання в інших, ніж машинобудування, галузях промисловості**

У даній роботі було проаналізовано застосування запропонованої концепції комп'ютерного структурно-параметричного геометричного моделювання, відповідних методів, прийомів й алгоритмів на прикладах практичного використання під час проектування та виготовлення літаків, тролейбусів, технологічного оснащення, корпусів суден, навігаційних приладів, математичного оброблення даних щодо рельєфу морського дна, створення нормативних документів у галузі машинобудування, проектування технічної документації тощо.

Певну значущість у теоретичному плані та можливість і доцільність поширення напрацьованого підходу до автоматизованого варіантного формоутворення в інших сферах машинобудування й галузях промисловості підтверджують, зокрема, публікації авторів за даною тематикою у фахових наукових журналах і збірниках із машинознавства [37, 82, 83], приладобудування [61], комп'ютерних інформаційних технологій [50], технічної естетики й дизайну [76], науково-технічному збірнику з інформаційних систем, механіки та керування [59], науково-технічному журналі нафтової та газової промисловості [86], участь у науково-технічних конференціях з теорії та практики раціонального проектування, виготовлення й експлуатації машинобудівних конструкцій [79], гіротехнологій, навігації, керування рухом та конструювання авіаційно-космічної техніки [54, 66] і т. д.

Запропонована методологія має перспективи свого поширення у верстатобудуванні, хімічній і металургійній промисловості, будівництві та архітектурі, інших галузях народного господарства.

Приклад 6.1. На рис. 6.1 показано два варіанти коксових камер типу Р-101А/В, що застосовуються в нафтопереробній промисловості.

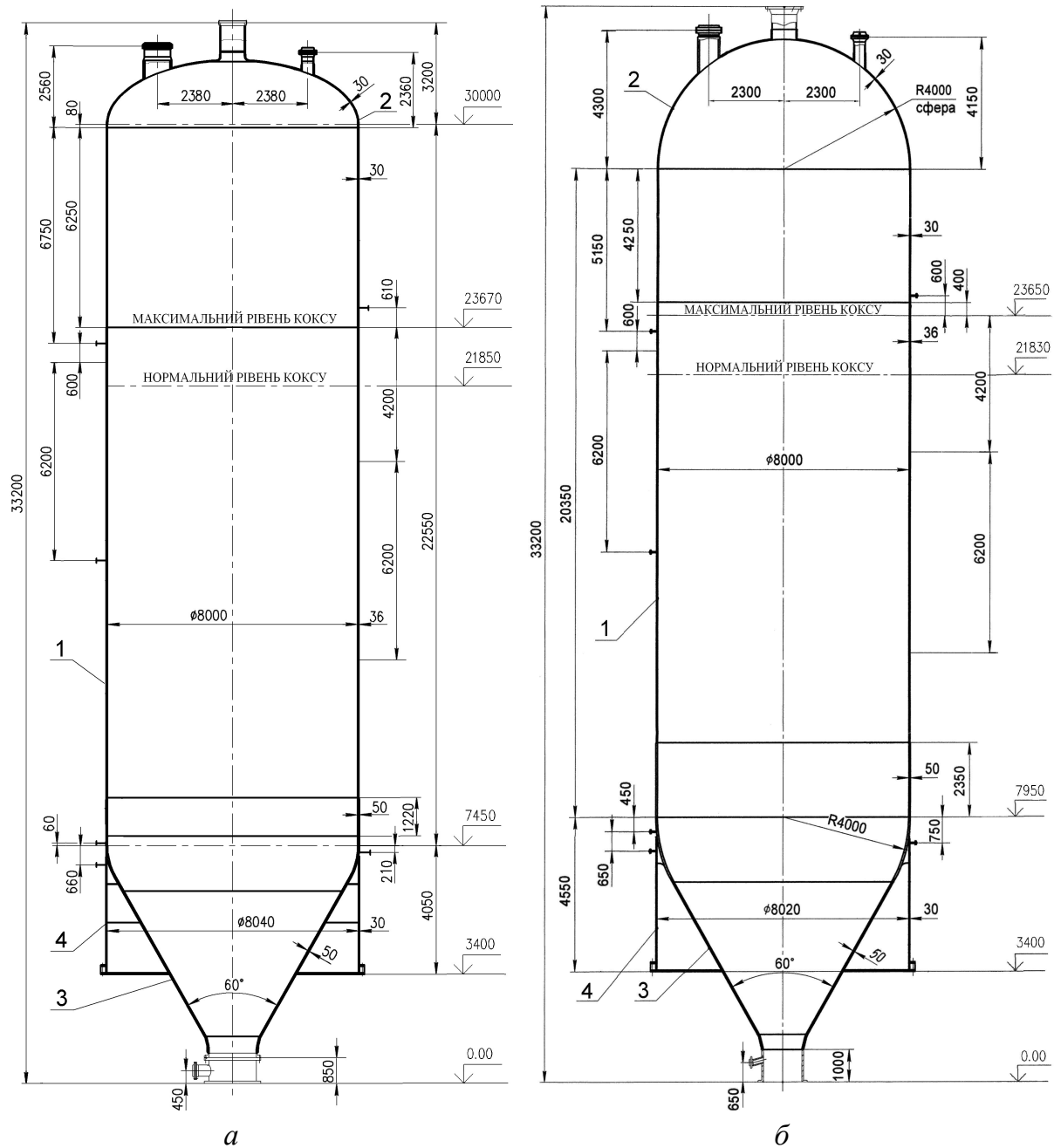


Рис. 6.1. Варіанти коксових камер типу Р-101А/В

Як об'єкти геометричного моделювання ці вироби являють собою вертикальні циліндричні зварні ємності 1 із верхнім 2 та нижнім 3 днищем, що ставляться на опори 4. Основною відмінністю зображеного на рис. 6.1, а

варіанта від наведеного на рис. 6.1, *б* є форма застосованого верхнього днища, яка в першому випадку є еліптичною, а у другому – сферичною. Також дані варіанти різняться деякими елементами пристроїв контролю, люками, штуцерами введення сировини та виведення парів тощо.

Основна задача проектування коксових камер полягає у визначенні раціональної їх структури та оптимальних параметрів складових елементів. Застосування при цьому комп'ютерного структурно-параметричного твердотільного формоутворення дозволяє отримувати гнучкі та наочні геометричні моделі, зручні для здійснення необхідних модифікацій.

Метою аналізу багатьох структурно-параметричних варіантів нафто-переробного устаткування є потреба забезпечення виготовлення якісної продукції на основі ресурсозберігаючих технологій із додержанням вимог технічної та екологічної безпеки виробництва. Інтегруюча роль геометрії під час проектування нафтохімічного обладнання для багатьох фахівців суміжних спеціальностей (конструкторів, технологів, експлуатантів тощо) визначається загальним характером параметрів форми та розмірів створюваних об'єктів.

Таким чином, методологія комп'ютерного структурно-параметричного моделювання не тільки реалізує зручне та високопродуктивне варіювання конструкції виробів, спрощує створення технічної документації, але й дає змогу ефективно досліджувати вплив різних технологічних параметрів перероблення нафти на якість отримуваної продукції, успішно розв'язувати задачі забезпечення потрібної надійності та довговічності устаткування, здійснювати економічний аналіз можливих його варіантів та їх комплексну оптимізацію.

*Приклад 6.2.* У праці [40] показано, що основу для класифікації дискових робочих органів ґрунтообробних знарядь становлять такі їх властивості як форма:

- базової поверхні (*ФБП*), тобто тип диска;
- вирізів (*ВРЗ*);
- отворів (*ОТВ*) під вісь.

Наведені геометричні аспекти з використанням структурно-параметричного підходу можна описати наступними впорядкованими множинами:

$$\text{ФБП} = (\text{ФБП}_i)_1^{N_{\text{ФБП}}} = (\text{ФБП}_i)_1^4 = (\text{ФБП}_1, \text{ФБП}_2, \text{ФБП}_3, \text{ФБП}_4), \quad (6.1)$$

де  $\PhiБП_1$  – плоска,  $\PhiБП_2$  – конічна,  $\PhiБП_3$  – сферична,  $\PhiБП_4$  – комбінована;

$$\PhiБП_4 = (\PhiБП_{4_j})_1^{N_{\PhiБП_4}} = (\PhiБП_{4_j})_1^4 = (\PhiБП_{4_1}, \PhiБП_{4_2}, \PhiБП_{4_3}, \PhiБП_{4_4}), \quad (6.2)$$

де  $\PhiБП_{4_1}$  – плоско-конічна,  $\PhiБП_{4_2}$  – плоско-сферична,  $\PhiБП_{4_3}$  – із двох конічних,  $\PhiБП_{4_4}$  – із двох сферичних;

$$ВРЗ = (ВРЗ_i)_1^{N_{ВРЗ}} = (ВРЗ_i)_1^4 = (ВРЗ_1, ВРЗ_2, ВРЗ_3, ВРЗ_4), \quad (6.3)$$

де  $ВРЗ_1$  – без вирізів,  $ВРЗ_2$  – вирізи у формі складених прямолінійних контурів,  $ВРЗ_3$  – вирізи у формі дуг кіл,  $ВРЗ_4$  – вирізи хвилясті;

$$ВРЗ_2 = (ВРЗ_{2_j})_1^{N_{ВРЗ_2}} = (ВРЗ_{2_j})_1^2 = (ВРЗ_{2_1}, ВРЗ_{2_2}), \quad (6.4)$$

де  $ВРЗ_{2_1}$  – V-подібні,  $ВРЗ_{2_2}$  – трапецеїдальні;

$$ВРЗ_4 = (ВРЗ_{4_j})_1^{N_{ВРЗ_4}} = (ВРЗ_{4_j})_1^2 = (ВРЗ_{4_1}, ВРЗ_{4_2}), \quad (6.5)$$

де  $ВРЗ_{4_1}$  – циклоїдальні,  $ВРЗ_{4_2}$  – синусоїдальні;

$$ОТВ = (ОТВ_i)_1^{N_{ОТВ}} = (ОТВ_i)_1^3 = (ОТВ_1, ОТВ_2, ОТВ_3), \quad (6.6)$$

де  $ОТВ_1$  – круглі,  $ОТВ_2$  – некруглі,  $ОТВ_3$  – комбіновані;

$$ОТВ_2 = (ОТВ_{2_j})_1^{N_{ОТВ_2}} = (ОТВ_{2_j})_1^2 = (ОТВ_{2_1}, ОТВ_{2_2}), \quad (6.7)$$

де  $ОТВ_{2_1}$  – квадратні,  $ОТВ_{2_2}$  – шестигранні;

$$ОТВ_3 = (ОТВ_{3_j})_1^{N_{ОТВ_3}} = (ОТВ_{3_j})_1^2 = (ОТВ_{3_1}, ОТВ_{3_2}), \quad (6.8)$$

де  $ОТВ_{3_1}$  – круглі та квадратні,  $ОТВ_{3_2}$  – круглі та шестигранні.

Зауважимо, що склад елементів кортежів (6.1) ... (6.8) може коригуватися відповідно до наявних умов комп'ютерного моделювання та застосовуваних САПР.

Якщо наведені вище для дискових ґрунтообробних знарядь (ДГЗ) геометричні аспекти класифікації за своєю важливістю подати упорядкованою множиною

$$ДГЗ = (ДГЗ_i)_1^{N_{ДГЗ}} = (ДГЗ_i)_1^3 = (ФБП, ВРЗ, ОТВ), \quad (6.9)$$

то на підставі виразів (6.1) ... (6.8) отримаємо деревоподібну графову класифікацію з ієрархічними рівнями (6.9).

Загальний технологічний процес виготовлення розглянутих дискових робочих органів включає послідовність технологічних операцій

$$ТО = (ТО_i)_1^{N_{ТО}} = (ТО_i)_1^4, \quad (6.10)$$

де  $ТО_1$  – обрізати зовнішній контур заготовки,  $ТО_2$  – сформувати отвори,  $ТО_3$  – зробити вирізи,  $ТО_4$  – деформувати диск.

Конкретні потрібні види  $ДГЗ$ , які створено на основі плоских ( $ФБП_1$ ), сферичних ( $ФБП_3$ ) та відповідних базових поверхонь ( $ФБП_4$ ); використання комбінованих отворів ( $ОТВ_3$ ) із круглих ( $ОТВ_1$ ), квадратних ( $ОТВ_{21}$ ) і шестигранних ( $ОТВ_{22}$ ); з вирізами V-подібними ( $ВРЗ_{21}$ ) та у вигляді дуг кіл ( $ВРЗ_3$ ) визначимо множиною

$$ДГЗ = (ДГЗ_i)_1^{N_{ДГЗ}} = (ДГЗ_i)_1^{12}, \quad (6.11)$$

де  $ДГЗ_1 = (ФБП_1, ОТВ_3=(ОТВ_{21}, ОТВ_1), ВРЗ_{21})$ ,  $ДГЗ_2 = (ФБП_1, ОТВ_3=(ОТВ_{22}, ОТВ_1), ВРЗ_{21})$ ,  $ДГЗ_3 = (ФБП_1, ОТВ_3=(ОТВ_{21}, ОТВ_1), ВРЗ_3)$ ,  $ДГЗ_4 = (ФБП_1, ОТВ_3=(ОТВ_{22}, ОТВ_1), ВРЗ_3)$ ,  $ДГЗ_5 = (ФБП_3, ОТВ_3=(ОТВ_{21}, ОТВ_1), ВРЗ_{21})$ ,  $ДГЗ_6 = (ФБП_3, ОТВ_3=(ОТВ_{22}, ОТВ_1), ВРЗ_{21})$ ,  $ДГЗ_7 = (ФБП_3, ОТВ_3=(ОТВ_{21}, ОТВ_1), ВРЗ_3)$ ,  $ДГЗ_8=(ФБП_3, ОТВ_3=(ОТВ_{22}, ОТВ_1), ВРЗ_3)$ ,  $ДГЗ_9 = (ФБП_4=(ФБП_3, ФБП_1), ОТВ_3=(ОТВ_{21}, ОТВ_1), ВРЗ_{21})$ ,  $ДГЗ_{10} = (ФБП_4=(ФБП_3, ФБП_1), ОТВ_3=(ОТВ_{22}, ОТВ_1), ВРЗ_{21})$ ,  $ДГЗ_{11} = (ФБП_4=(ФБП_3, ФБП_1), ОТВ_3=(ОТВ_{21}, ОТВ_1), ВРЗ_3)$ ,  $ДГЗ_{12} = (ФБП_4=(ФБП_3, ФБП_1), ОТВ_3=(ОТВ_{22}, ОТВ_1), ВРЗ_3)$ .

Відносно невелика кількість наведених видів знарядь  $N_{ДГЗ}=12$  у виразі (6.11) обумовлена певними обмеженими обсягами монографії. З поданої інформації видно, що диск  $ДГЗ_1$  сформовано на основі плоскої базової поверхні з комбінованими отворами (квадратний у центрі, круглі навколо нього) та V-подібними вирізами, а диск  $ДГЗ_2$  – таким же чином, але замість квадратного застосовано шестигранний отвір. Вироби  $ДГЗ_3$  та  $ДГЗ_4$  є подібними до попередніх, проте з використанням вирізів у вигляді дуг кіл. Диски  $ДГЗ_5$  ...  $ДГЗ_8$  повторюють розглянуті, але з базовою сферичною поверхнею. Це ж стосується виробів  $ДГЗ_9$  ...  $ДГЗ_{12}$  із базовою сферично-плоскою поверхнею.

Для інтегрованих комп'ютерних технологій в аспекті реалістичного відтворення життєвого циклу промислової продукції важливим моментом є належне відображення виробничих процесів, наприклад (6.10), які здійснюються штампуванням, фрезеруванням, свердлінням, лазерним різанням тощо. Зазначені операції стосуються твердотілого формоутворення із застосуванням необхідних інструментів. У праці [155] проаналізовано розробляння математичних моделей такого різального інструменту як фрези, свердла і т. д. у вигляді фігур обертання з використанням запропонованого способу узагальненого контуру. Зауважимо, що наведені прийоми також цілком підходять для відтворення й лазерного променя.

Для формування зовнішнього контуру заготовки диска, його отворів та вирізів за допомогою штампування необхідно мати математичну модель відповідного інструмента у вигляді прямої призми або прямого циліндра. Потрібні векторні параметричні рівняння в декартовій системі координат *Oxyz* на базі способу узагальненого контуру мають вигляд

$$\mathbf{r}(u, v, w) = (x, y, z) = (vr_x(u), vr_y(u), wH), \quad (6.12)$$

де  $\mathbf{r}(u, v, w)$  – радіус-вектор точок фігури;  $u \in [0, 1]$ ,  $v \in [0, 1]$ ,  $w \in [0, 1]$  – параметри;  $r_x(u)$ ,  $r_y(u)$  – абсциса та ордината замкненого зовнішнього контуру  $\mathbf{r}(u)$  нижньої основи у площині  $z=0$ ;  $H$  – висота призми або циліндра.

Залежність (6.12) відповідає кінематичному способу створення тіла за допомогою поверхні у вигляді належного поперечного перерізу інструмента. Це ж стосується й розглянутих у публікації [155] фрез, свердел тощо. Але в останньому випадку, на відміну від попереднього, в якості напрямної застосовано не відрізок прямої лінії, а коло.

Зупинимось коротко на складі технологічних операцій (6.10) для конкретних дисків (6.11). Наразі маємо

$$ДГЗ_{i=1}^4 = (TO_k)_1^3, \quad ДГЗ_{i=5}^{12} = (TO_k)_1^4. \quad (6.13)$$

Технологічні операції (6.13) реалізуються різноманітними засобами автоматизованого формоутворення. Для  $TO_1$ ,  $TO_2$  та  $TO_3$  це можуть бути геометричні способи модифікації шляхом виконання операцій віднімання від множини точок опрацьовуваного виробу належних точок відповідного

інструмента. Для операції  $TO_4$  підходить засіб відтворення деформування з урахуванням умов конкретного виробництва. Розглянуті процеси моделюються як динамічні.

На рис. 6.2 показано загальний вигляд деяких розроблених комп'ютерних параметричних твердотільних моделей для опрацьовуваних ДГЗ.



Рис. 6.2. Комп'ютерні моделі дисків із комбінованими отворами:

$DGZ_1$  – плоский із V-подібними вирізами;  $DGZ_8$  – сферичний із вирізами у вигляді дуг кіл;  $DGZ_{11}$  – із базовою сферично-пласкою поверхнею та вирізами у вигляді дуг кіл

Рис. 6.3 представляє стадії виготовлення диска  $DGZ_8$ , що реалізовані за допомогою методики автоматизованого формоутворення групи технічних об'єктів.

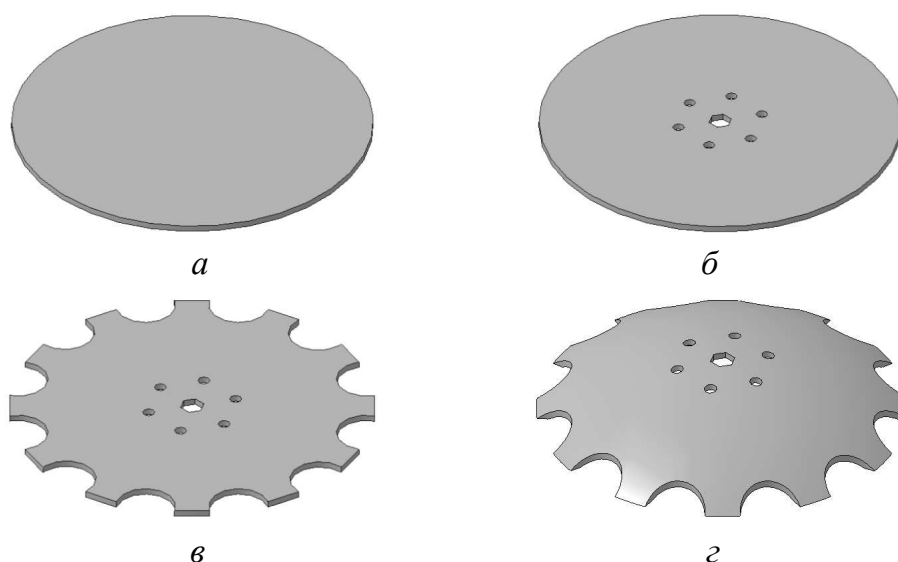


Рис. 6.3. Комп'ютерні моделі стадій виготовлення диска  $DGZ_8$ :

$a$  – плоска заготованка після обрізання зовнішнього контуру;  $b$  – сформовані отвори;  $v$  – зроблені вирізи;  $z$  – отримана сферична поверхня

Головною перевагою поданого підходу до комп'ютерного геометричного моделювання, порівняно з існуючими, є забезпечення продуктивного формування великого числа структурно-параметричних варіантів опрацьовуваних виробів. Це дозволяє підвищувати ефективність автоматизованого проектування технічних об'єктів завдяки можливості здійснення аналізу більшої кількості їх різновидів та визначення на підставі цього оптимального з них.

Викладена методика слугує прикладом удосконалення нинішніх комп'ютерних інформаційних систем підтримки всього життєвого циклу промислової продукції шляхом широкого впровадження групових технологій конструювання та опрацювання процесів її виготовлення й експлуатації. Вище було проілюстровано, що успішно реалізувати наведене завдання неможливо без проведення належної класифікації відповідних технічних об'єктів і процесів. На підставі цього слід вважати, що розглянуте питання становить важливу науково-прикладну проблему також і для багатьох інших галузей діяльності людини, а не тільки сільського господарства.

У наступному підрозділі монографії з позицій системного підходу окреслено важливе місце та роль методології комп'ютерного структурно-параметричного формоутворення в економіці, освіті, медицині, інших сферах життя. Це обумовлено доволі універсальним характером розроблених принципів, методів, способів, прийомів та алгоритмів моделювання.

### **6.3. Місце та роль структурно-параметричної методології в економіці, освіті, медицині, решті сфер життєдіяльності людини**

З матеріалів досліджень, які виконано в даній монографії, видно, що під час проектування, виробництва та експлуатації об'єктів машинобудування досить важливими, особливо для оптимізації, є різноманітні економічні показники технічної продукції. Застосування структурно-параметричного геометричного моделювання в інших галузях промисловості дозволяє теж не тільки підвищувати точність економічних розрахунків, а що саме головне, досягати кращих значень цільових функцій шляхом проведення більш багатогранного опрацювання модельованих об'єктів і процесів.

Для успішного опанування прогресивними науковими досягненнями потрібно також широко проводити відповідну освітянську діяльність. З тематики структурно-параметричного комп'ютерного геометричного моделювання авторами монографії опубліковано кілька навчальних посібників і методичних вказівок для таких курсів як «Проектування та конструювання літаків і вертольотів», «Новітні технології виробництва літальних апаратів», «Інженерна та комп'ютерна графіка», що використовуються при навчанні бакалаврів і магістрів Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського».

Існує можливість застосування напрацьованої методології комп'ютерного моделювання не тільки в технічній та гуманітарній сфері життєдіяльності людини, а й, навіть, у медичній, про що свідчить, зокрема, публікація авторів [36], що взята за основу наступного прикладу.

*Приклад 6.3.* Одне з головних завдань розвинутого суспільства полягає в забезпеченні високого рівня життя його членів. Центральне місце в цих умовах належить здоров'ю людини, дієва підтримка якого та ефективно вирішення соціальних проблем є потужними ресурсозберігаючими чинниками. Продуктивне отримання оптимальних розв'язків даної задачі, з великою кількістю різноманітних факторів, може бути реалізовано засобами геометричного моделювання в багатовимірному просторі з використанням теорії множин. У наш час вирішенню проблеми покращення медичного обслуговування сприяє широке застосування комп'ютерної техніки та новітніх інформаційних технологій.

З точки зору кібернетики, що досліджує загальні проблеми керування в системах різноманітної фізичної природи, питання раціонального управління функціонуванням технічних пристроїв і життєдіяльністю біологічних організмів є достатньо схожими. Даним прикладом пропонується розв'язок задачі комп'ютерного управління інформаційною структурою інтегрального здоров'я людини (ІСІЗЛ) [90] за допомогою керуючих структурно-параметричних моделей.

У широкому сенсі під оптимальним управлінням розуміють діяльність, яка спрямована на керівництво поведінкою деякого об'єкта й має своєю ціллю ефективно досягнення обраної мети. Поставлене завдання полягає у визначенні та здійсненні найбільш доцільних дій у певних наявних ситуаціях. За багатьох обставин людина неспроможна оптимально

реалізовувати функції керування. У таких випадках їй на допомогу приходять автоматичні пристрої, комп'ютерна техніка, математичні методи та інші подібні засоби.

ІСІЗЛ, що розглядається, є деревом із п'ятьма ієрархічними рівнями. Отже, застосовуючи символ  $Z$  для позначення терміна здоров'я, маємо

$$\begin{aligned}
 Z &= (z_i)_1^5, \\
 z_1 &= (z_{i_1})_1^{N_{z_1}} = (z_1) = (ПЗ), \\
 z_2 &= (z_{i_1, i_2})_{1, 1}^{N_{z_1}, N_{z_2 \dots i_1}} = (z_{1,1}, z_{1,2}, z_{1,3}) = (\PhiЗ, ПЗ, СЗ), \\
 z_3 &= (z_{i_1, i_2, i_3})_{1, 1, 1}^{N_{z_1}, N_{z_2 \dots i_1}, N_{z_3 \dots i_2}} = (z_{1,1,1}, z_{1,1,2}, z_{1,2,1}, z_{1,2,2}, z_{1,2,3}, z_{1,3,1}, z_{1,3,2}) = \\
 &= (ВФС, КСО, I, X, E, ОС, ОМ), \\
 z_4 &= (z_{i_1, i_2, i_3, i_4})_{1, 1, 1, 1}^{N_{z_1}, N_{z_2 \dots i_1}, N_{z_3 \dots i_2}, N_{z_4 \dots i_3}} = (z_{1,1,1,1}, z_{1,1,1,2}, z_{1,1,1,3}, z_{1,1,2,1}, z_{1,1,2,2}, z_{1,1,2,3}, \\
 &z_{1,2,1,1}, z_{1,2,1,2}, z_{1,2,1,3}, z_{1,2,1,4}, z_{1,2,2,1}, z_{1,2,2,2}, z_{1,2,2,3}, z_{1,2,2,4}, z_{1,2,3,1}, z_{1,2,3,2}, z_{1,3,1,1}, z_{1,3,1,2}, z_{1,3,1,3}, \\
 &z_{1,3,2,1}, z_{1,3,2,2}, z_{1,3,2,3}, z_{1,3,2,4}, z_{1,3,2,5}) = (ССС, СД, СК, НС, ІС, ЕС, Мс, П, Ув, Сп, \\
 &СА, ВМ, ЗД, ГП, Имн, Екс, АФЖ, АТД, АМЕ, Д, С, Ч, До, В), \\
 z_5 &= (\text{Окремі показники фізичного, психічного та соціального здоров'я,} \\
 &\text{отримані за допомогою діагностичних вимірів, тестів, опитування тощо}), \quad (6.14)
 \end{aligned}$$

де  $ПЗ$  – індивідуальне інтегральне здоров'я;

$\PhiЗ, ПЗ, СЗ$  – фізичне, психічне та соціальне здоров'я;

$ВФС, КСО, I, X, E, ОС, ОМ$  – внутрішні фізіологічні системи організму, керуючі системи організму, інтелект, характер, емоції, особисто-середовищна та особисто-моральна компоненти;

$ССС$  – серцево-судинна система,  $СД$  – система дихання,  $СК$  – система крові,  $НС$  – нервова система,  $ІС$  – імунна система,  $ЕС$  – ендокринна система,  $Мс$  – мислення,  $П$  – пам'ять,  $Ув$  – увага,  $Сп$  – сприйняття,  $СА$  – соціальна активність,  $ВМ$  – вольова мобілізація,  $ЗД$  – забарвлення діяльності емоційне,  $ГП$  – генерація поведінкових проявів,  $Имн$  – імпресивна складова,  $Екс$  – експресивна складова,  $АФЖ$  – адаптація до фізичних умов життя,  $АТД$  – адаптація до трудової діяльності,  $АМЕ$  – адаптація до морально-етичних норм суспільства,  $Д$  – достоїнство,  $С$  – совість,  $Ч$  – честь,  $До$  – добродійність,  $В$  – відповідальність.

Фізичний статус, який є найважливішою складовою інтегрального здоров'я, знаходиться, згідно з виразом (6.14), на другому рівні й на

наступному щаблі відтворюється фізіологічною сферою організму та його керуючими системами. Компоненти четвертого рівня, за потреби, можуть бути доповнені іншими системами, наприклад, терморегуляції, виділення тощо. Вибір раціональної кількості показників фізичного здоров'я п'ятого рівня, з великого їх різноманіття, повинен забезпечувати високу інформативність. Так, див. формулу (6.15), для ССС базовими вважаються частота серцевих скорочень (ЧСС), систолічний артеріальний тиск (САТ) і діастолічний артеріальний тиск (ДАТ), які прямо характеризують насосну функцію серця та стан судин, а побічно й особливості регулювальних впливів із боку КСО, тобто

$$z_{1,1,1,1} = (ССС) = (z_{1,1,1,1,i5})_1^3 = (ЧСС, САТ, ДАТ). \quad (6.15)$$

Загальне уявлення про елементи п'ятого ієрархічного рівня дають вирази (6.16) і (6.17)

$$z_{1,2,1,1} = (Мс) = (z_{1,2,1,1,i5})_1^5 = (Абстрактне, Асоціативне, Просторове, Логічне, Операційне), \quad (6.16)$$

$$z_{1,3,1,1} = (АФЖ) = (z_{1,3,1,1,i5})_1^3 = (ПК, М, ФМ), \quad (6.17)$$

де ПК – претензії на рівень комфортності,

М – мобільність як здатність до змін соціального статусу,

ФМ – фізичні можливості адаптації.

Важливою складовою ІСІЗЛ є система оцінок, що формується переведенням первинних натурних показників шляхом їх уніфікації й нормування в інформаційні та подальшою ієрархічною згорткою останніх в узагальнені оцінки аж до одного числа включно, яке характеризує індивідуальне інтегральне здоров'я людини. При цьому всі зазначені величини знаходяться в межах від 0 (норма) до 1 (максимальна патологія).

Розглянемо можливі керуючі дії (КД) на стан здоров'я щодо його збереження та покращення, тобто лікувальні заходи. Сформуємо спочатку вихідну множину КД із відкритим для подальшого поповнення складом, не торкаючись, через неоднозначність, питань раціональної класифікації її елементів. Нехай

$$\begin{aligned} КД &= (ПФЗ, ЛКЗ), \\ ПФЗ &= (ДХ, ЛФК, РПВ, СКЛ, ПТР, КСА), \\ ЛКЗ &= (ФМЛ, СТЛ, ФТ, ХЗ, ПТ), \end{aligned} \quad (6.18)$$

де *ПФЗ* – профілактичні заходи,  
*ЛКЗ* – лікувальні заходи,  
*ДХ* – дієтичне харчування,  
*ЛФК* – лікувальна фізкультура,  
*РПВ* – режим праці та відпочинку,  
*СКЛ* – санаторно-курортне лікування,  
*ПТР* – психологічні тренінги,  
*КСА* – курси соціальної адаптації,  
*ФМЛ* – фармакологія,  
*СТЛ* – стоматологія,  
*ФТ* – фізіотерапія,  
*ХЗ* – хірургічні заходи,  
*ПТ* – психотерапія.

Загальне уявлення про елементи (6.18) дають наступні множини

$$\begin{aligned}
 \text{ФМЛ} &= (\text{РОР}, \text{ПМП}, \text{ПТЛ}), \\
 \text{РОР} &= (\text{вітаміни}, \text{гормони}, \text{ферменти}), \\
 \text{ПМП} &= (\text{антибіотики}, \text{антисептики}, \text{протівірусні}), \\
 \text{ПТЛ} &= (\text{антидеприсанти}, \text{стимулятори}, \text{транквілізатори}), \\
 \text{ФТ} &= (\text{ВДЛ}, \text{ПРЛ}, \text{УЗЛ}, \text{ГЛТ}, \text{МГТ}), \\
 \text{ПТ} &= (\text{роз'яснювальна терапія}, \text{гіпноз}, \text{кодування}), \quad (6.19)
 \end{aligned}$$

де *РОР* – регулятори обміну речовин,  
*ПМП* – протимікробні препарати,  
*ПТЛ* – психотропні ліки,  
*ВДЛ, ПМЛ, УЗЛ* – водне, променеве, ультразвукове лікування,  
*ГЛТ, МГТ* – гальванотерапія та магнітотерапія.

Далі формуються структурно-параметричні інформаційні моделі у вигляді зображених на рис. 6.4 графів, складовими яких є компоненти (6.18) і (6.19), що упорядковані згідно з початковими та кінцевими умовами лікування, такими як (6.14) ... (6.17) та іншими. Завдяки чому отримуємо нову множину

$$\text{КД} = (\text{КД}_j)_1^{N_{\text{КД}}}, \quad (6.20)$$

де через *КД<sub>j</sub>* позначено як найдрібніші керуючі дії, наприклад, окремі медичні процедури *кд<sub>i</sub>*, так і побудовані на їх основі більш складні структури лікувальних процесів, реабілітаційних програм тощо у вигляді

моделей, які показано на рис. 6.4. Таким чином, певні елементи  $KД_j$  можуть належати кільком іншим компонентам (6.20).

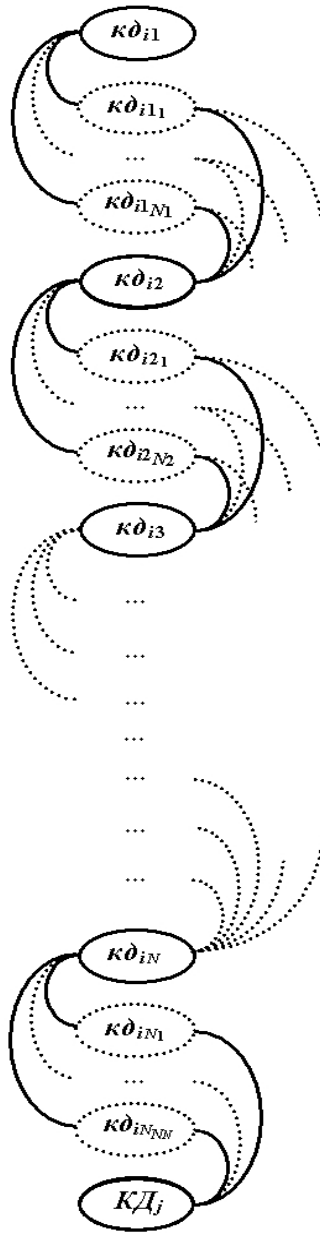


Рис. 6.4. Граф структурно-параметричної моделі

За аналогією з розглянутим виразом (6.20) розробляється й нова форма множини

$$Z = (Z_i)_1^{N_3}, \tag{6.21}$$

що створюється відповідно до потреб подальшого зручного управління контрольованими показниками й узагальненими оцінками інтегрального здоров'я (6.14) шляхом застосування обраних для цього лікувальних керуючих дій.

Кожний компонент  $KД_j$ , див. рис. 6.4, може згортатись до конфігурації його структурно-параметричних варіантних елементів  $кд_i = (кд_{i_k})_1^{N_{ккi}}$ , тобто  $KД_j = (KД_{j_k})_1^{N_{кдj}}$ , та входить в зазначеному вигляді до складу лікувальних дій вищого рівня.

Заходи  $KД_j$  варто розглядати як функції  $f_j$

$$KД_j = f_j(P, Z), \quad (6.22)$$

що оперують деякими параметрами (такими як стать, вік, освіта, професія індивіда; варіанти вартості й ефективності різноманітних профілактичних і лікувальних дій тощо) загального інформаційного масиву  $P$  та певними вихідними величинами елементів (6.21) і спрямовані на покращення компонентів множини  $Z$ .

Результати впливу дій (6.22) відтворюються прогнозованими змінами уніфікованих показників й оцінок інтегрального здоров'я, які характеризуються значеннями з проміжку від -1 (можливість повного відновлення нормального стану) до 1 (максимальний побічний ефект).

Варіантну структурно-параметричну взаємодію досліджуваного об'єкта управління (6.21) та системи керуючих дій, що представлена виразами (6.20) і (6.22), зручно подавати у вигляді наступної матриці суміжності

$$C = \left\| c_{ij} \right\|, \quad i \in (1, \dots, N_Z), \quad j \in (1, \dots, N_{KД}), \quad (6.23)$$

де  $c_{ij}=0$  при відсутності впливу  $KД_j$  на  $Z_i$ ,  $c_{ij} \neq 0$  у протилежному випадку.

В останньому разі доречно в якості ненульових елементів (6.23) використовувати кортежі з відповідними величинами не тільки прогнозованих показників й оцінок інтегрального здоров'я, а й їх вартості, очікуваних термінів профілактичних та лікувальних заходів, ймовірності побічних ефектів і т. д.

Описаний механізм інтегрального структурно-параметричного керування забезпечує можливість лікареві та пацієнту обирати раціональний, згідно з наявними потребами й можливостями, шлях збереження або покращення здоров'я. Комплексність розглянутої методики полягає в побудові математичних моделей, що системно відслідковують взаємний багатогранний вплив різноманітних показників здоров'я людини та можливих лікувальних дій з метою визначення серед останніх найкращих варіантів.

Запропоновану методологію комп'ютерного управління профілактичними та лікувальними заходами доцільно покласти в основу розроблення програм медичного обслуговування представників певних професій, вікових категорій, регіонів тощо.

Отже, викладені в монографії методи, прийоми та алгоритми, які базуються на структурно-параметричному підході, доречно використовувати не тільки в машинобудуванні, нафтопереробній, хімічній, металургійній та інших галузях промисловості, сільському господарстві, освіті, медицині, а й у всіх інших сферах життєдіяльності людини, де пошук оптимальних розв'язків пов'язаний із багатофакторним аналізом та синтезом складних систем. Таким чином, структурно-параметричне геометричне моделювання має нині достатньо широке поле для свого подальшого впровадження у практику та теоретичного розвитку.

#### **6.4. Висновки до розділу 6**

У даному розділі проаналізовано питання перспектив використання методології структурно-параметричного геометричного комп'ютерного моделювання в інших, крім машинобудування, сферах життєдіяльності людини. Спираючись на матеріали попередньої частини виконаних досліджень та наявні фахові публікації стосовно даної тематики, обґрунтовано можливість поширення напрацьованих методів, способів і прийомів у галузі математичних наук, приладобудування, комп'ютерних інформаційних технологій, нафтопереробної та хімічної промисловості, сільського господарства, економіки, освіти, медицини і т. д.

Основні отримані результати опубліковано у працях [36, 37, 38–42, 44–46, 60, 66, 74–76, 85, 86, 154, 155, 163].

## ЗАГАЛЬНІ ВИСНОВКИ

У монографії на єдиній методологічній основі варіантного формоутворення розв'язано наукову проблему розроблення та використання комп'ютерних структурно-параметричних геометричних моделей технічних об'єктів у машинобудуванні, що забезпечує підвищення ефективності автоматизованого опрацювання складної продукції в середовищі сучасних інтегрованих інформаційних систем.

Виконаними дослідженнями досягнуто головну мету – узагальнено й систематизовано теоретичні основи структурно-параметричного підходу до геометричного моделювання та удосконалено на базі цього комп'ютерне формоутворення складних виробів.

У монографії отримано наступні результати, що мають наукову та практичну цінність:

1. Визначено типові задачі структурно-параметричного формоутворення технічної продукції, до яких відносяться питання: декомпозиції та синтезу геометричних об'єктів; структурної та параметричної варіантності їх компонентів і зв'язків між ними; комплексної оптимізації та інтеграції з математичними описами інших дисциплін; визначення взаємної приналежності фігур й обчислення їх метричних характеристик структурно-параметричними засобами; побудови геометричних моделей, які забезпечують узагальнені розв'язки, що більш пристосовані для реалізації типових і групових технологій машинобудування та ін.

2. Запропоновано узагальнені концептуальні засади методології структурно-параметричного геометричного моделювання, які полягають у застосуванні єдиних прийомів моделювання на всіх рівнях ієрархії геометричних об'єктів (точок, ліній, поверхонь, тіл, різноманітних їх комбінацій, багатовимірних фігур), інтеграції теорії формоутворення кривих, поверхонь і тіл із положеннями інших розділів математики (теорії множин, графів, комбінаторики, оптимізації тощо) та обчислювальної техніки (інформатикою, програмуванням і т. д.), обґрунтовано базовий характер структурно-параметричного формоутворення для автоматизованого проектування технічних об'єктів.

3. Сформульовано принципи структурно-параметричної методології (системності, варіантності, універсальності, оптимальності, відкритості та розвитку, комплексності), наведено ключові етапи побудови й використання

відповідних моделей (аналізу та формування складу елементів опрацьованого об'єкта, його структури, визначення порядку синтезу, інтегральних параметрів і характеристик, розроблення нових або застосування існуючих математичних моделей для наявних елементів та зв'язків між ними, проведення оптимального геометричного моделювання), подано засади узагальненої класифікації фігур різної вимірності на основі структурно-параметричного підходу.

4. Розроблено нові математичні методи варіантного формоутворення технічних систем у машинобудуванні, що спираються на застосування комбінаторно-варіаційних геометричних об'єктів, побудованих на основі теорії кривих і поверхонь, множин та графів. На базі структурно-параметричної методології узагальнено раціональні прийоми розроблення геометричних алгоритмів, які полягають в інтегрованому підході до моделювання ліній, поверхонь, тіл і багатовимірних фігур, розв'язанні складних задач формоутворення в кілька взаємопов'язаних етапів із використанням універсальних алгоритмічних компонентів.

5. На засадах структурно-параметричної апроксимації удосконалено теорію оптимізації щодо пошуку глобальних екстремумів та розроблено спосіб візуалізації багатовимірних об'єктів.

6. Визначено основи інтеграції стадій проектування, виробництва й експлуатації технічної продукції на базі автоматизованого варіантного формоутворення із застосуванням структурно-параметричних геометричних моделей. Напрацьовано методики структурно-параметричного комп'ютерного моделювання деталей і складаних одиниць та процесів їх виготовлення.

7. Виконано програмну реалізацію запропонованих методів, способів, прийомів та алгоритмів, проведено комп'ютерні експерименти щодо їх апробації, впроваджено одержані результати у практику, показано можливість використання поданої методології моделювання в інших, крім машинобудування, сферах життєдіяльності людини (нафтопереробній та хімічній промисловості, економіці, освіті, медицині тощо).

# ДОДАТОК А

## ПРИКЛАДИ КОМП'ЮТЕРНОГО МОДЕЛЮВАННЯ В МАТЕМАТИЧНІЙ СИСТЕМІ MAPLE

### А.1. Побудова та модифікації структурно-параметричних геометричних об'єктів

Наступна послідовність команд формує незв'язну фігуру з двох частин, яку показано на рис. 3.2.

```
with(plots):  
# формування елемента 1  
# x1, y1, z1 – параметри положення  
x1:=-2: y1:=-2: z1:=5:  
# r01 – радіус напрямної  
r01:=6.0:  
# r11, r21, r31 – параметри керування формою та розмірами колоподібної  
твірної  
r11:=1.5: r21:=1.8: r31:=2.0:  
# p8, p9 – проміжок змінювання кінематичного параметра твірної  
p8:=-Pi: p9:=Pi:  
# p10, p11 – проміжок змінювання кінематичного параметра напрямної  
p10:=0: p11:=2*Pi:  
E1:=plot3d([x1+(r01+r11*cos(u))*cos(v),y1+(r01+r21*cos(u))*sin(v),z1+r31*sin  
(u)],u=p8..p9,v=p10..p11,grid=[30,30],style=PATCH,color=yellow,lightmodel=li  
ght4):  
# формування елемента 2  
x2:=4.0: y2:=3.0: z2:=-6.0:  
r02:=3.5:  
r12:=1.0: r22:=2.0: r32:=2.5:  
p8:=-Pi: p9:=Pi:  
p10:=0: p11:=2*Pi:  
E2:=plot3d([x2+(r02+r12*cos(u))*cos(v),y2+(r02+r22*cos(u))*sin(v),z2+r32*sin  
(u)],u=p8..p9,v=p10..p11,grid=[20,20],style=PATCH,color=green,lightmodel=lig  
ht4):  
# візуалізація фігури з елементів 1 та 2
```

```
display({E1,E2},axes=FRAME,orientation=[44.9,42],labels=[x,y,z],font=[TIMES,ROMAN,12],view=[-10..10,-10..10,-10..10]);
```

У наведеному вище списку команд модифікацією параметрів положення другого елемента

```
x2:=5.5: y2:=4.5: z2:=5:
```

отримуємо зображену на рис. 3.3 фігуру.

Поданою далі зміною значень параметрів у командному файлі, що аналізується, для досліджуваного в підрозділі 3.1 геометричного об'єкта одержуємо його варіант, який відтворено на рис. 3.4.

```
with(plots):
```

```
x1:=0: y1:=0: z1:=0:
```

```
r01:=0:
```

```
r11:=0: r21:=0: r31:=0:
```

```
p8:=0: p9:=0:
```

```
p10:=0: p11:=0:
```

```
E1:=plot3d([x1+(r01+r11*cos(u))*cos(v),y1+(r01+r21*cos(u))*sin(v),z1+r31*sin(u)],u=p8..p9,v=p10..p11,grid=[30,30],style=PATCH,color=yellow,lightmodel=light4):
```

```
x2:=5.5: y2:=4.5: z2:=5:
```

```
r02:=0:
```

```
r12:=4.5: r22:=4.0: r32:=3.5:
```

```
p8:=-Pi: p9:=Pi:
```

```
p10:=0: p11:=Pi:
```

```
E2:=plot3d([x2+(r02+r12*cos(u))*cos(v),y2+(r02+r22*cos(u))*sin(v),z2+r32*sin(u)],u=p8..p9,v=p10..p11,grid=[21,21],style=PATCH,color=green,lightmodel=light4):
```

```
display({E1,E2},axes=FRAME,orientation=[44.9,42],labels=[x,y,z],font=[TIMES,ROMAN,12],view=[-10..10,-10..10,-10..10]);
```

Рис. 3.5 із підрозділу 3.1 формується наступною послідовністю команд:

```
with(plots):
```

```
x1:=0: y1:=0: z1:=0:
```

```
r01:=0:
```

```
r11:=0: r21:=0: r31:=0:
```

```
p8:=0: p9:=0:
```

```

p10:=0: p11:=0:
E1:=plot3d([x1+(r01+r11*cos(u))*cos(v),y1+(r01+r21*cos(u))*sin(v),z1+r31*sin
(u)],u=p8..p9,v=p10..p11,grid=[30,30],style=PATCH,color=yellow,lightmodel=li
ght4):
x2:=5.5: y2:=4.5: z2:=5:
r02:=4.5:
r12:=0: r22:=0: r32:=0:
p8:=-Pi: p9:=Pi:
p10:=0: p11:=Pi:
# p10:=0: p11:=2*Pi:
E2:=plot3d([x2+(r02+r12*cos(u))*cos(v),y2+(r02+r22*cos(u))*sin(v),z2+r32*sin
(u)],u=p8..p9,v=p10..p11,grid=[21,21],style=PATCH,color=green,lightmodel=lig
ht4):
display({E1,E2},axes=FRAME,orientation=[44.9,42],labels=[x,y,z],font=[TIME
S,ROMAN,12],view=[-10..10,-10..10,-10..10]);

```

Зазначимо, що зміні проміжку параметра  $v \in [0, 2\pi]$ , тобто видаленню поміченого вище символом # коментаря, відповідає вже не дуга в  $\pi$  радіан, а повне коло, яке показано на рис. А.1.

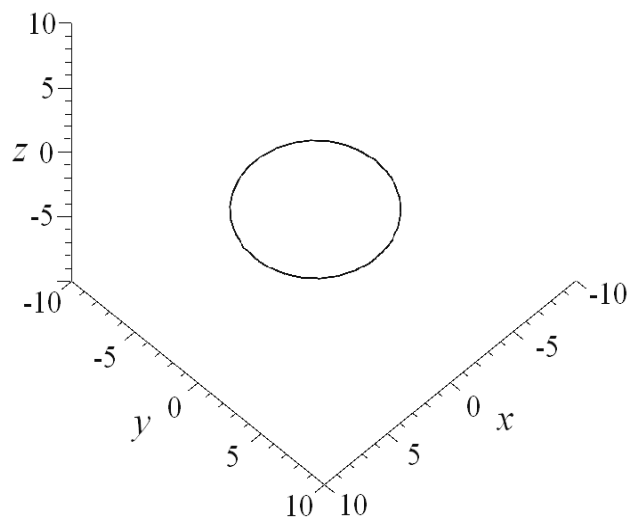


Рис. А.1

На рис. А.2 зображено кругове кільце з внутрішнім радіусом 6,5 ( $p_{42}=r_{02}=6,5$ ) та шириною 2 ( $p_{52}=r_{12}=p_{62}=r_{22}=2$ ,  $p_{72}=r_{32}=0$ ), що реалізоване досліджуваною комп'ютерною структурно-параметричною моделлю згідно з присвоєними значеннями потрібних величин (див. командний файл нижче).

```

with(plots):
x1:=0: y1:=0: z1:=0:
r01:=0:
r11:=0: r21:=0: r31:=0:
p8:=0: p9:=0:
p10:=0: p11:=0:
E1:=plot3d([x1+(r01+r11*cos(u))*cos(v),y1+(r01+r21*cos(u))*sin(v),z1+r31*sin
(u)],u=p8..p9,v=p10..p11,grid=[30,30],style=PATCH,color=yellow,lightmodel=li
ght4):
x2:=0: y2:=0: z2:=0:
r02:=6.5:
r12:=2: r22:=2: r32:=0:
p8:=-Pi: p9:=Pi:
p10:=0: p11:=2*Pi:
E2:=plot3d([x2+(r02+r12*cos(u))*cos(v),y2+(r02+r22*cos(u))*sin(v),z2+r32*sin
(u)],u=p8..p9,v=p10..p11,grid=[18,22],style=PATCH,color=green,lightmodel=lig
ht4):
display({E1,E2},axes=FRAME,orientation=[54,60],labels=[x,y,z],font=[TIMES,
ROMAN,12],view=[-10..10,-10..10,-10..10]);

```

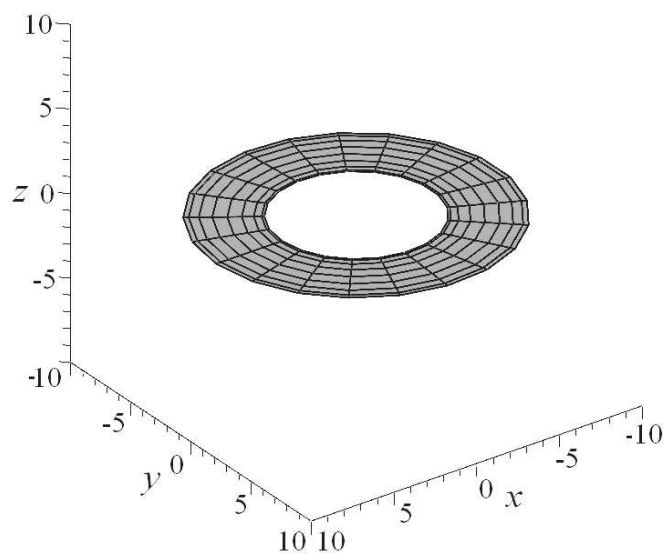


Рис. А.2

Подальші модифікації кільця виконано заміною в попередній послідовності команд рядка з параметрами  $p_{52}=r_{12}$  і  $p_{62}=r_{22}$  на

```
r12:=3.5: r22:=1.5: r32:=0
```

Отриманий результат показано на рис. А.3.

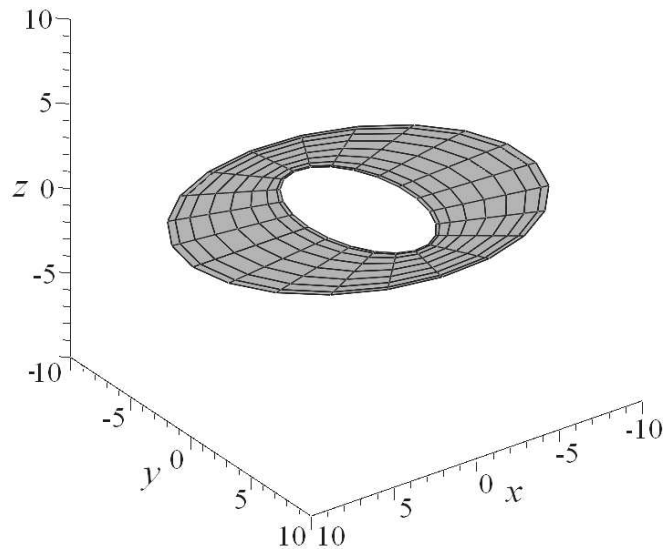


Рис. А.3

У пункті 3.1.1 стосовно формули (3.1) зазначалось, що при пропорційному варіюванні значень  $p_{41}=r_{01}$ ,  $p_{51}=r_{11}$ ,  $p_{61}=r_{21}$ ,  $p_{71}=r_{31}$  першого елемента або, відповідно, величин  $p_{42}=r_{02}$ ,  $p_{52}=r_{12}$ ,  $p_{62}=r_{22}$ ,  $p_{72}=r_{32}$  другого, матимемо змінювання розмірів даної фігури, інакше – її форми. Це підтверджується поданими на рис. А.4 ... А.6 модифікаціями другого компонента, одержаними на базі останнього наведеного командного файлу, варіанти якого різняться лише рядками

r02:=7:

r12:=3: r22:=3: r32:=3:

й

r02:=3.5:

r12:=1.5: r22:=1.5: r32:=1.5:

та

r02:=6:

r12:=4: r22:=3: r32:=2:.

У даному випадку початковий об'єкт (рис. А.4) становить поверхня тора з радіусом напрямного кола  $p_{42}=r_{02}=7$  і радіусом твірного –  $p_{52}=r_{12}=p_{62}=r_{22}=p_{72}=r_{32}=3$ . Пропорційним змінюванням, а саме, зменшенням у два рази значень перерахованих вище параметрів, отримуємо фігуру (рис. А.5), що є виконаним у масштабі 1:2 ( $p_{42}=r_{02}=3,5$ ;  $p_{52}=r_{12}=p_{62}=r_{22}=p_{72}=r_{32}=1,5$ ) образом вихідної.

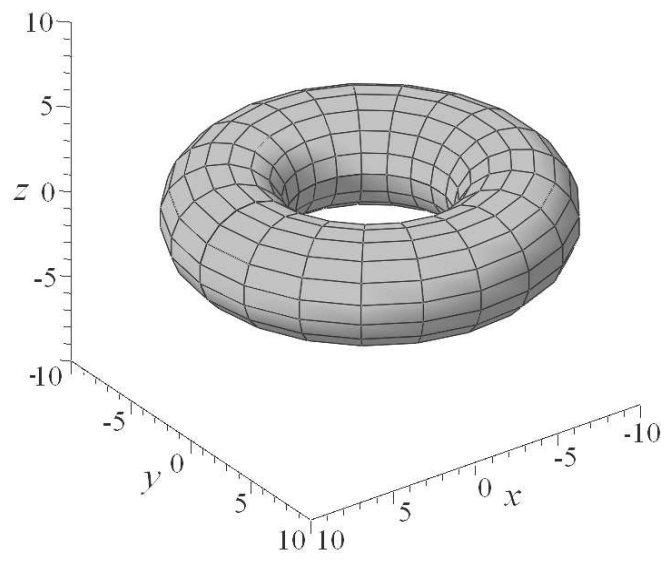


Рис. А.4

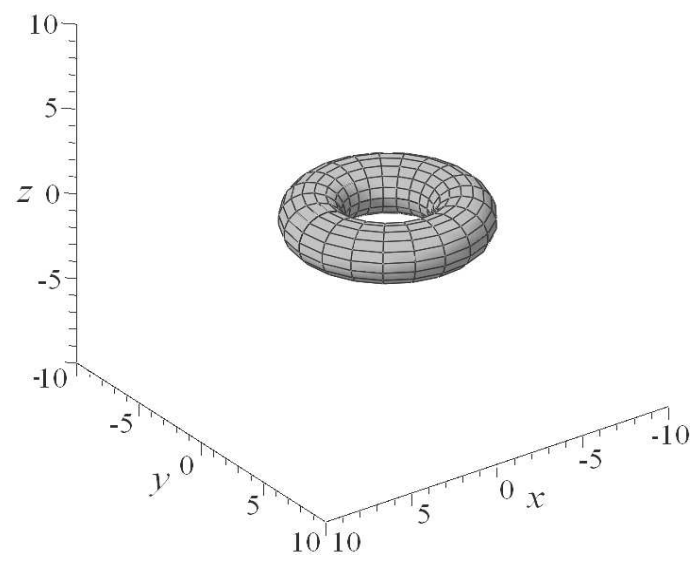


Рис. А.5

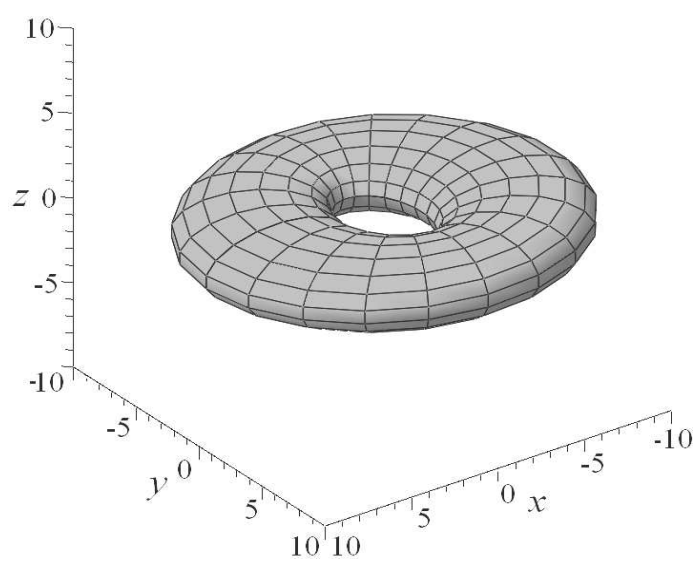


Рис. А.6

Якщо ж реалізувати непропорційне варіювання параметрів, які розглядаються, скажімо  $p_{42}=r_{02}=6$ ,  $p_{52}=r_{12}=4$ ,  $p_{62}=r_{22}=3$ ,  $p_{72}=r_{32}=2$ , то форма початкової фігури зміниться й матимемо лише топологічно еквівалентну тору поверхню (рис. А.6).

Для продовження аналізу модифікацій досліджуваної структурно-параметричної моделі проілюструємо вплив на деякий початковий геометричний об'єкт (рис. А.4) суто його параметрів форми  $p_{82}$ ,  $p_{92}$ ,  $p_{102}$ ,  $p_{112}$  згідно з формулою (3.1). Звернемо увагу, що демонстрація прикладів тільки на одному елементі зазначеної моделі обумовлена: по-перше, подібним аналітичним описом двох її складових компонентів; по-друге, тим, що взаємодія останніх уже опрацьована в пункті 3.1.1; по-третє, більшою компактністю та наочністю інформації в цьому випадку.

Якщо блок значень другого елемента в останньому наведеному командному файлі поміняти на

```
> x2:=0: y2:=0: z2:=0:
> r02:=7:
> r12:=3: r22:=3: r32:=3:
> p8:=-Pi: p9:=0:
> p10:=0: p11:=Pi,;
```

тобто, порівняно з показаною на рис. А.4 фігурою, змінити тільки проміжки для параметрів форми з  $u \in [-\pi, \pi]$  ( $p_{82}=-\pi$ ,  $p_{92}=\pi$ ) та  $v \in [0, 2\pi]$  ( $p_{102}=0$ ,  $p_{112}=2\pi$ ) на  $u \in [-\pi, 0]$  ( $p_{82}=-\pi$ ,  $p_{92}=0$ ) та  $v \in [0, \pi]$  ( $p_{102}=0$ ,  $p_{112}=\pi$ ), то одержимо об'єкт нової конфігурації, зображений на рис. А.7.

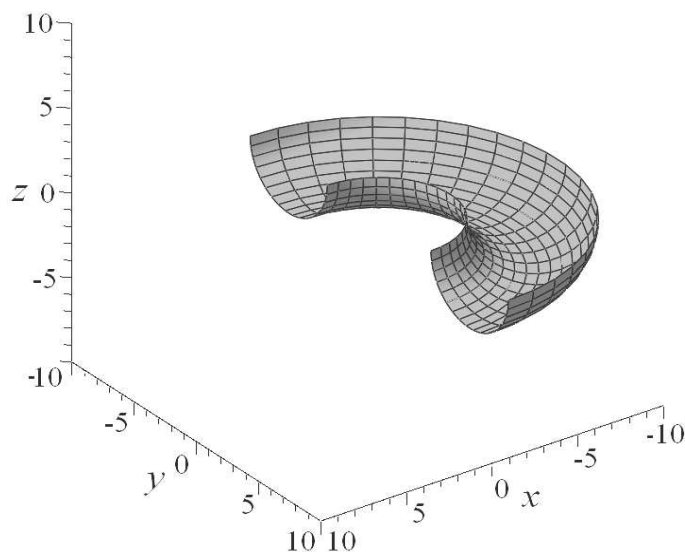


Рис. А.7

Поданою нижче послідовністю команд математичної системи Maple сформовано основні зовнішні поверхні деформованого тіла, показаного на рис. 3.7.

```
with(plots):
w:=0: t:=0: x1:=0: y1:=0: z1:=0:
r01:=6: r11:=3: r21:=3: r31:=3:
p8:=-Pi: p9:=0: p10:=0.5*Pi: p11:=1.5*Pi:
E1:=plot3d([x1+(r01+r11*cos(u))*cos(v),y1+(r01+r21*cos(u))*sin(v),z1+(r31+t)
*sin(u)],u=p8..p9,v=p10..p11,grid=[30,30],style=PATCH,color=yellow,lightmode
l=light4):
w:=0.5:
r11:=3+w: r21:=3+w: r31:=3+w:
E2:=plot3d([x1+(r01+r11*cos(u))*cos(v),y1+(r01+r21*cos(u))*sin(v),z1+(r31+t)
*sin(u)],u=p8..p9,v=p10..p11,grid=[30,30],style=PATCH,color=yellow,lightmode
l=light4):
w:=0: t:=2: x2:=0: y2:=0: z2:=0:
r02:=6: r12:=3: r22:=3: r32:=3:
p8:=-Pi: p9:=0: p10:=0.5*Pi: p11:=1.5*Pi:
E3:=plot3d([x2+(r02+r12*cos(u))*cos(v),y2+(r02+r22*cos(u))*sin(v),z2+(r32+t)
*sin(u)],u=p8..p9,v=p10..p11,grid=[18,22],style=PATCH,color=green,lightmodel
=light4):
w:=0.5:
r12:=3+w: r22:=3+w: r32:=3+w:
E4:=plot3d([x2+(r02+r12*cos(u))*cos(v),y2+(r02+r22*cos(u))*sin(v),z2+(r32+t)
*sin(u)],u=p8..p9,v=p10..p11,grid=[18,22],style=PATCH,color=green,lightmodel
=light4):
display({E1,E2,E3,E4},axes=FRAME,orientation=[54,60],labels=[x,y,z],font=[TI
MES,ROMAN,12],view=[-10..10,-10..10,-10..10]);
```

Таким чином, нами докладно, з урахуванням матеріалів пункту 3.1.1, висвітлено можливі варіанти модифікації форми, розмірів і положення як усього складеного геометричного об'єкта, який описується виразами (3.1), так й окремих його елементів. При цьому показано, що використання комп'ютерних СПГМ дозволяє продуктивно здійснювати формоутворення різноманітних фігур.

## А.2. Реалізація комбінаторно-варіаційних геометричних фігур

Поданим далі командним файлом здійснюються структурно-параметричні варіантні побудови дуг кривих другого порядку, включно з їх виродженням у відрізки прямих і точки (див. приклади рис. 3.16, А.8, А.9).

```
with(plots):
```

```
n:=1: # n – номер комбінаторного варіанта
```

```
w1:=3: # w – параметр варіаційного варіанта
```

```
x0:=0: y0:=0: x1:=10: y1:=20: x2:=30: y2:=5: # координати вихідних точок
```

```
px0:=x0: py0:=y0: px1:=x1: py1:=y1: px2:=x2: py2:=y2: # варіант за замовчуванням
```

```
if n=1 then end if:
```

```
if n=2 then px0:=x1:py0:=y1: px1:=x2:py1:=y2: px2:=x0:py2:=y0 end if:
```

```
if n=3 then px0:=x2:py0:=y2: px1:=x0:py1:=y0: px2:=x1:py2:=y1 end if:
```

```
w:=proc(u) (1-u)^2+w1*2*u*(1-u)+u^2 end proc:
```

```
plot([(1-u)^2/w(u)*px0+w1*2*u*(1-u)/w(u)*px1+u^2/w(u)*px2,(1-u)^2/w(u)*py0+w1*2*u*(1-u)/w(u)*py1+u^2/w(u)*py2,u=0..0.95],x=-10..30,y=-10..20,color=black, thickness=3);
```

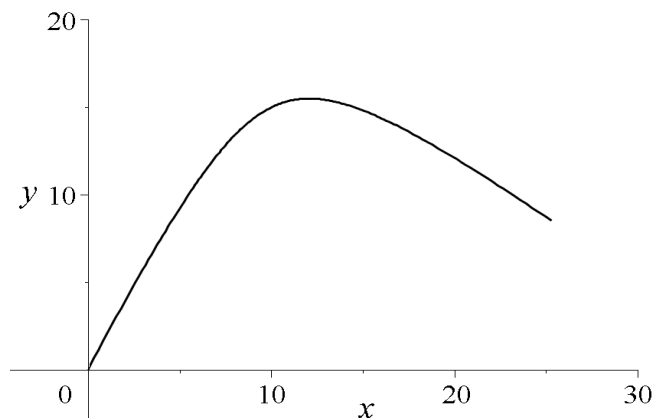


Рис. А.8

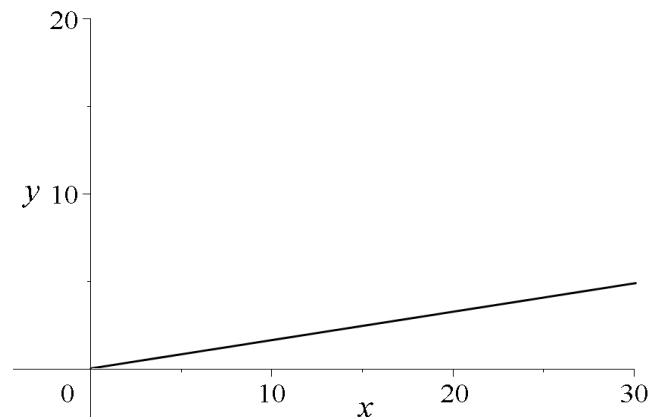


Рис. А.9

Наведеним вище даним, особливістю котрих є зменшення проміжку варіювання параметра  $u \in [0; 0,95]$ , відповідає (рис. А.8) кінець побудованої дуги, який не збігається із застосованою останньою вихідною точкою.

Зображення рис. А.9 створено згідно зі значеннями параметрів у поданій послідовності команд, за виключенням  $w_1=0$  та  $u \in [0; 1]$ , що й забезпечило отримання потрібного відрізка прямої.

### А.3. Структурно-параметричне формування кінематичних поверхонь

Наступна послідовність команд реалізує параметричну побудову лінійчастої поверхні з трансцендентними напрямними у вигляді синусоїд із амплітудними величинами, які визначаються користувачем (див. рис. 3.23).

```
with(plots):
# крива r0(u)
# початкова точка
x00:=2*Pi: y00:=0: z00:=8:
# кінцева точка
x01:=6*Pi: y01:=0: z01:=8:
# амплітудне значення
A0:=0.5:
# крива r1(u)
# початкова точка
x10:=2*Pi: y10:=0: z10:=18:
# кінцева точка
x11:=6*Pi: y11:=0: z11:=18:
# амплітудне значення
A1:=1.2:
x0:=proc(u) x00*(1-u)+x01*u end proc:
x1:=proc(u) x10*(1-u)+x11*u end proc:
z0:=proc(u) z00*(1-u)+z01*u end proc:
z1:=proc(u) z10*(1-u)+z11*u end proc:
P1:=plot3d([(1-v)*x0(u)+v*x1(u),(1-v)*A0*sin(x0(u))+v*A1*sin(x1(u)),(1-
v)*z0(u)+
v*z1(u)],u=0..1,v=0..1,grid=[40,8],style=PATCH,color=green,lightmodel=light2):
>display({P1},axes=normal,orientation=[-81,-27,-19],labels=[x,y,z],
font=[TIMES,ROMAN,12],view=[0..20,-5..5.0,0..20]);
```

Заміною  $A0:=0$ : у наведеному командному файлі отримуємо поверхню, яку показано на рис. 3.24, *а*. Подальшими модифікаціями  $x00:=4*Pi$ : та  $x01:=4*Pi$ : (виродженням першої напрямної в точку) одержуємо зображену на рис. 3.24, *б* фігуру. Якщо в початково поданому командному файлі використати рівними нулю синусоїдальні амплітуди напрямних, тобто  $A0:=0.0$ : та  $A1:=0.0$ :, то матимемо прямокутник у площині  $z=0$  (рис. А.10), а коли ці ж дані для випадку рис. 3.24, *б*, то – трикутник (рис. 3.24, *в*). Взагалі у площині  $z=0$  можна отримати довільний чотирикутник (рис. 3.24, *г*), відрізок (рис. 3.24, *д*) або точку (рис. А.11).

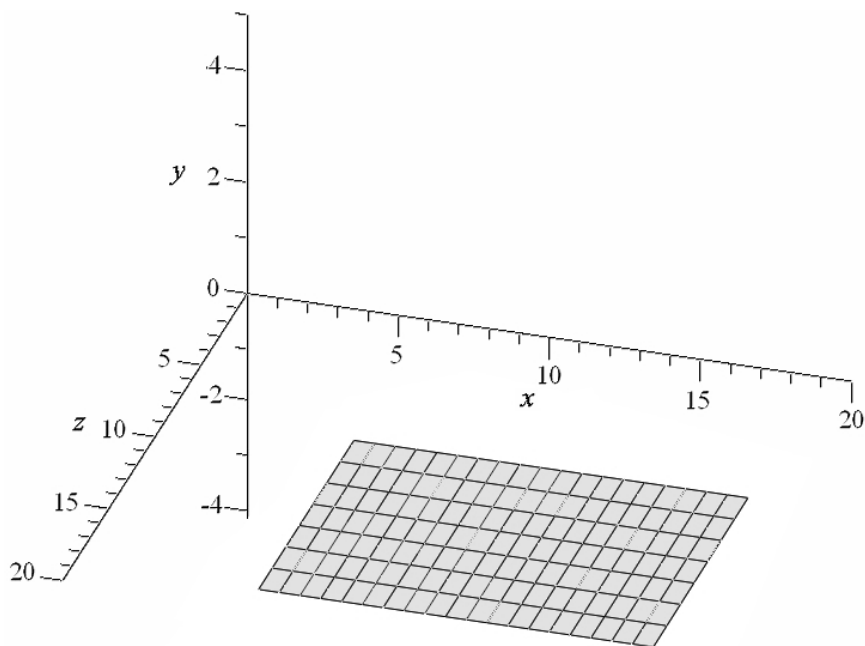


Рис. А.10

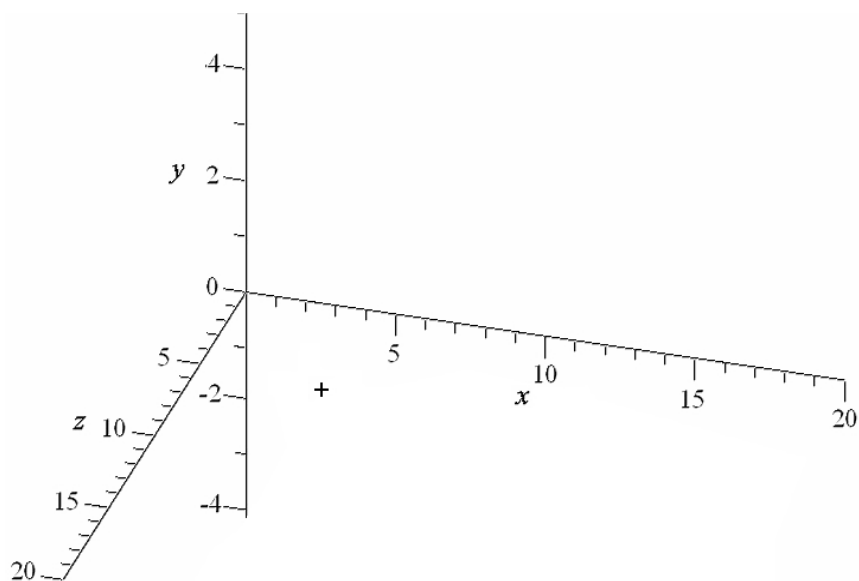


Рис. А.11

Можливими структурними модифікаціями вихідного командного файлу (досліджуваної кінематичної поверхні) є заміна іншою кривою, наприклад поліноміальною, другої напрямної  $\mathbf{r}_1(u)$  (рис. 3.24, *e*)

```
with(plots):
# крива r0(u)
# початкова точка
x00:=2*Pi: y00:=0: z00:=8:
# кінцева точка
x01:=6*Pi: y01:=0: z01:=8:
# амплітудне значення
A0:=0.5:
# крива r1(u)
# початкова точка
x10:=2*Pi: y10:=0: z10:=18:
# кінцева точка
x11:=6*Pi: y11:=0: z11:=18:
# ордината проміжної опорної точки та її ваговий коефіцієнт
y1po:=3: w1:=1.0:
x0:=proc(u) x00*(1-u)+x01*u end proc:
x1:=proc(u) x10*(1-u)+x11*u end proc:
z0:=proc(u) z00*(1-u)+z01*u end proc:
z1:=proc(u) z10*(1-u)+z11*u end proc:
w:=proc(u) (1-u)^2+w1*2*u*(1-u)+u^2 end proc:
P1:=plot3d([(1-v)*x0(u)+v*x1(u),(1-v)*A0*sin(x0(u))+v*((1-u)^2*y10+w1*2*u*(1-u)*y1po+u^2*y11)/w(u),(1-v)*z0(u)+v*z1(u)],u=0..1,v=0..1,grid=[20,8],
style=PATCH,color=yellow,lightmodel=light2):
display({P1},axes=normal,orientation=[-81,-27,-19],labels=[x,y,z],
font=[TIMES,ROMAN,12],view=[0..20,-5..5.0,0..20]);
```

– твірної (рис. 3.28)

```
with(plots):
# крива r0(u)
# початкова точка
x00:=2*Pi: y00:=0: z00:=8:
# кінцева точка
x01:=6*Pi: y01:=0: z01:=8:
# амплітудне значення
```

```

A0:=0.5:
# крива r1(u)
# початкова точка
x10:=2*Pi: y10:=0: z10:=18:
# кінцева точка
x11:=6*Pi: y11:=0: z11:=18:
# амплітудне значення
A1:=1.2:
# параметричні координати проміжної опорної точки напрямної, ордината
цієї точки та її ваговий коефіцієнт
x1o:=0.5: z1o:=0.5: y1o:=3: w1:=1.0:
x0:=proc(u) x00*(1-u)+x01*u end proc:
x1:=proc(u) x10*(1-u)+x11*u end proc:
z0:=proc(u) z00*(1-u)+z01*u end proc:
z1:=proc(u) z10*(1-u)+z11*u end proc:
w:=proc(v) (1-v)^2+w1*2*v*(1-v)+v^2 end proc:
P1:=plot3d([((1-v)^2*x0(u)+w1*2*v*(1-v)*((1-x1o)*x0(u)+x1o*x1(u))+
v^2*x1(u))/w(v),((1-v)^2*A0*sin(x0(u))+w1*2*v*(1-v)*y1o+v^2*A1*
sin(x1(u)))/w(v),((1-v)^2*z0(u)+w1*2*v*(1-v)*((1-z1o)*z0(u)+z1o*z1(u))+
v^2*z1(u))/w(v)],
u=0..1,v=0..1,grid=[20,12],style=PATCH,color=yellow,lightmodel=light2):
display({P1},axes=normal,orientation=[-81,-27,-19],labels=[x,y,z],font=[TIMES,
ROMAN,12],view=[0..20,-5..5.0,0..20]).

```

## СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Абдурахманов Ш. Способы аксонометрического изображения точек объектов многомерных пространств. *Прикладна геометрія та інженерна графіка*. Вип. 81. Київ: КНУБА, 2009. С. 130–133.
2. Аладьев В. З., Бойко В. К., Ровба Е. А. Программирование и разработка приложений в Maple. Гродно: ГрГУ, 2007. 458 с.
3. Асанов М. О., Баранский В. А., Расин В. В. Дискретная математика: графы, матроиды, алгоритмы. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. 288 с.
4. Ахо А., Хопкрофт Дж., Ульман Д. Структуры данных и алгоритмы. Москва: Издательский дом «Вильямс», 2000. 384 с.
5. Бабаев Ф. В. Оптимальный раскрой материалов с помощью ЭВМ. Москва: Машиностроение, 1982. 168 с.
6. Бабенко К. И. Основы численного анализа. Москва–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2002. 848 с.
7. Бадаев Ю. И. Поликоординатный метод в прикладной геометрии и компьютерной графике. Київ: Просвіта, 2006. 173 с.
8. Бадеян Г. В., Ковальов Ю. М., Плоский В. О. Інноваційна оптимізація: теоретико-експериментальний метод удосконалення технологічних систем. *Прикладна геометрія та інженерна графіка*. Вип. 69. Київ: КНУБА, 2001. С. 39–42.
9. Базров Б. М. Основы технологии машиностроения. Москва: Машиностроение, 2005. 736 с.
10. Балан С. О. Інтелектуальні інформаційні технології в машинобудуванні. Одеса: Астропринт, 2002. 360 с.
11. Бляшке В. Введение в дифференциальную геометрию. Ижевск: Издательский дом «Удмуртский университет», 2000. 232 с.
12. Богуслаев А. В., Олейник Ал. А., Олейник Ан. А. Прогрессивные технологии моделирования, оптимизации и интеллектуальной автоматизации этапов жизненного цикла авиационных двигателей. Запорожье: ОАО «Мотор Сич», 2009. 468 с.
13. Богущко О. А., Малиновський В. І., Святкіна А. Є. Геометрія поверхонь одягу. Київ: Освіта України, 2009. 194 с.
14. Бондаренко В. П. Геометричне моделювання графами деталей машинобудування та приладобудування. *Праці Таврійської державної*

*агротехнічної академії*. Вип. 4. Прикладна геометрія та інженерна графіка. Т. 13. Мелітополь: ТДАТА, 2001. С. 112–114.

15. Бондаренко М. Ф., Білоус Н. В., Руткас А. Г. Комп'ютерна дискретна математика. Харків: «Компанія СМІТ», 2004. 480 с.

16. Бонни Ш., Анзовин С. Внутренний мир 3ds Max 7. Москва: Издательский дом «Вильямс», 2006. 1120 с.

17. Борисенко В. Д., Устенко С. А. Профілювання лопаток осьових турбін. *Прикладна геометрія та інженерна графіка*. Вип. 69. Київ: КНУБА, 2001 С. 63–66.

18. Борисенко В. Д., Устенко С. А., Устенко І. В. Геометричне моделювання компонентів енергетичного обладнання із застосуванням функцій SolidWorks API. *Прикладна геометрія та інженерна графіка*. Вип. 75. Київ: КНУБА, 2005. С. 29–35.

19. Браїлов О. Ю., Бровар В. О, Тендюк А. В. Просторове визначення системи геометричних моделей для виробництва кратної кількості виробів. *Прикладна геометрія та інженерна графіка*. Вип. 77. Київ: КНУБА, 2007. С. 68–74.

20. Браїлов А. Ю. Создание параметрической трехмерной модели изделия. *Геометричне та комп'ютерне моделювання*. Вип. 17. Харків: ХДУХТ, 2007. С. 27–34.

21. Браїлов А. Ю. Решение проблем конструирования на основе теории множеств. *Геометричне та комп'ютерне моделювання*. Вип. 22. Харків: ХДУХТ, 2009. С. 106–117.

22. Бурцев В. М., Васильев А. С., Дальский А. М. Технология машиностроения. В 2 т. Т. 2. Основы технологии машиностроения. Москва: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001. 640 с.

23. Ванін В. В. Евольвентно-еволютні моделі в упорядкованих потоках: автореф. дис. ... докт. техн. наук: спец. 05.01.01 «Прикладна геометрія, інженерна графіка». Київ, 1996. 39 с.

24. Ванін В. В., Ванін І. В., Вірченко Г. А., Ткачевський Я. І. Геометричне моделювання літака в умовах сучасних інтегрованих комп'ютерних технологій. *Современные проблемы геометрического моделирования*. Сборник трудов Украина-российской научно-практической конференции. Харьков: 2005. С. 58–64.

25. Ванін В. В., Вірченко Г. А., Ванін І. В. Деякі питання розробки обчислювальних алгоритмів структурно-параметричного моделювання

складних геометричних об'єктів. *Прикладна геометрія та інженерна графіка*. Вип. 76. Київ: КНУБА, 2006. С. 17–23.

26. Ванін В. В., Вірченко Г. А., Ванін І. В. Структурно-параметричні геометричні моделі як основа для узгодженої розробки літака на стадії ескізного проектування. *Наукові вісті НТУУ «КПІ»*. Теоретичні та прикладні проблеми фізико-математичних наук. №4, 2006. С. 35–41.

27. Ванін В. В., Ванін І. В., Вірченко Г. А. Сучасний стан і перспективи геометричного моделювання у вітчизняному літакобудуванні. *Геометричне та комп'ютерне моделювання*. Харків: ХДУХТ, 2007. Вип. 17. С. 54–60.

28. Ванін В. В., Вірченко Г. А., Ванін Віт. В. Структурно-параметричні геометричні моделі як інваріантна складова комп'ютерних інформаційних технологій підтримки життєвого циклу виробів машинобудування. *Праці Таврійської державної агротехнічної академії*. Вип. 4. Прикладна геометрія та інженерна графіка. Т. 36. Мелітополь: ТДАТА, 2007. С. 16–21.

29. Ванін В. В., Вірченко Г. А., Ванін Віт. В. Інтеграція процесів проектування та виробництва об'єктів машинобудування засобами геометричного моделювання. *Наукові нотатки*. Міжвузівський збірник за напрямом «Інженерна механіка». Випуск № 22. Частина 2. Луцьк: ЛДТУ, 2008. С. 54–61.

30. Ванін В. В., Вірченко Г. А., Ванін Віт. В. Структурно-параметричне геометричне моделювання як засіб підвищення ефективності групових технологій у машинобудуванні. *Праці Таврійського державного агротехнологічного університету*. Вип. 4. Прикладна геометрія та інженерна графіка. Т. 39. Мелітополь: ТДАТУ, 2008. С. 9–17.

31. Ванін В. В., Вірченко Г. А. Визначення та основні положення структурно-параметричного геометричного моделювання. *Геометричне та комп'ютерне моделювання*. Вип. 23. Харків: ХДУХТ, 2009. С. 42–48.

32. Ванін В. В., Вірченко Г. А. Геометричне моделювання – одна з основ автоматизованого проектування об'єктів і процесів машинобудування. *Праці Таврійського державного агротехнологічного університету*. Вип. 4. Прикладна геометрія та інженерна графіка. Т. 43. Мелітополь: ТДАТУ, 2009. С. 3–10.

33. Ванін В. В., Вірченко Г. А., Вірченко В. Г. Місце та роль комп'ютерного геометричного моделювання в сучасному машинобудуванні. *Сборник научных трудов по материалам международной научно-*

практической конференции “Современные направления теоретических и прикладных исследований ’2010”. Том 4. Технические науки. Одесса: Черноморье, 2010. С. 67–69.

34. Ванін В. В., Вірченко Г. А. Продукція машинобудування та процеси її виготовлення як об’єкти структурно-параметричного геометричного моделювання. *Прикладна геометрія та інженерна графіка*. Вип. 84. Київ: КНУБА, 2010. С. 28–32.

35. Ванін В. В., Вірченко Г. А. Структурно-параметричний підхід як методологія узагальнення каркасного, поверхневого та об’ємного геометричного моделювання. *Праці Таврійського державного агротехнологічного університету*. Вип. 4. Прикладна геометрія та інженерна графіка. Т. 46. Мелітополь: ТДАТУ, 2010. С. 42–46.

36. Ванін В. В., Вірченко Г. А. Застосування комплексних комп’ютерних структурно-параметричних інформаційних моделей у медицині. *Прикладна геометрія та інженерна графіка*. Вип. 86. Київ: КНУБА, 2010. С. 49–54.

37. Ванін В. В., Вірченко Г. А., Грязнова Г. П. Комп’ютерне структурно-параметричне геометричне моделювання як основа для комплексної оптимізації процесів проектування та виробництва об’єктів машинобудування. *Восточно-Европейский журнал передовых технологий. Технологии машиностроения*. 5/1 (47). Харьков: ТЦ, 2010. С. 54–57.

38. Ванін В. В., Вірченко Г. А., Гумен О. М., Юрчук В. П., Яблонський П. М. Сучасний стан і перспективи подальшого розвитку наукової школи прикладної геометрії Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського». *Прикладні питання математичного моделювання*. Вип. 2. Херсон: ХНТУ, 2018. С. 17–23.

39. Ванін В. В., Вірченко Г. А., Гетьман О. Г., Яблонський П. М. Структурно-параметричне формоутворення як засіб інтеграції автоматизованого проектування технічних об’єктів. *Прикладна геометрія та інженерна графіка*. Вип. 95. Київ: КНУБА, 2019. С. 46–50.

40. Ванін В. В., Вірченко Г. А., Яблонський П. М. Деякі геометричні аспекти класифікації дискових робочих органів ґрунтообробних знарядь. *Сучасні проблеми моделювання*. Вип. 16. Мелітополь: МДПУ, 2019. С. 70–75.

41. Ванін В. В., Вірченко Г. А., Яблонський П. М. Автоматизоване геометричне моделювання дискових робочих органів технічних об’єктів. *Інформаційні системи, механіка та керування*. Вип. 21. Київ: НТУУ «КПІ ім. Ігоря Сікорського», 2019. С. 5–13.

42. Ванін В. В., Вірченко Г. А., Яблонський П. М., Незенко А. Й. Деякі актуальні задачі сучасного комп'ютерного геометричного моделювання технічних об'єктів. *Прикладна геометрія та інженерна графіка*. Вип. 97. Київ: КНУБА, 2020. С. 16–22.

43. Ванін В. В., Вірченко Г. А., Яблонський П. М. До питання геометричного моделювання з використанням кривих Безьє. *Прикладна геометрія та інженерна графіка*. Вип. 98. Київ: КНУБА, 2020. С. 30–34.

44. Ванін В. В., Вірченко Г. А., Яблонський П. М. Деякі актуальні питання сучасного комп'ютерного геометричного моделювання технічних об'єктів. *Збірник тез доповідей Міжнародної науково-практичної конференції 23-24 квітня 2020 року*. Одеса: друкарня Військової академії, 2020. С. 15.

45. Ванін В. В., Вірченко Г. А., Юрчук В. П., Яблонський П. М. Інтегрований комплексний підхід до геометричного моделювання дискових робочих органів ґрунтообробних знарядь. *Сучасні проблеми моделювання*. Вип. 18. Мелітополь: МДПУ, 2020. С. 52–60.

46. Ванін В. В., Вірченко Г. А., Яблонський П. М. До питання узагальнення структурно-параметричного формоутворення технічних об'єктів. *Прикладна геометрія та інженерна графіка*. Вип. 99. Київ: КНУБА, 2020. С. 56–64.

47. Ванін Віт. В. Структурно-параметричне геометричне моделювання як засіб інтеграції процесів проектування та виробництва об'єктів машинобудування: дис. ... канд. техн. наук: спец. 05.01.01 «Прикладна геометрія, інженерна графіка». Київ, 2008. 153 с.

48. Ванін І. В. Структурно-параметричне геометричне моделювання несучих поверхонь на стадії ескізного проектування літака: дис. ... канд. техн. наук: спец. 05.01.01 «Прикладна геометрія, інженерна графіка». Київ, 2006. 145 с.

49. Ванін І. В., Вірченко Г. А. Геометричне моделювання крила літака на стадії ескізного проектування з використанням кривих Безьє третього порядку. *Таврійської державної агротехнічної академії*. Мелітополь: ТДАТА, 2006. Вип. 4. Прикладна геометрія та інженерна графіка. Т. 31. С. 89–95.

50. Ванін І. В., Вірченко Г. А., Ткачевський Я. І. Разработка компьютерных моделей базовой геометрии самолета с использованием современных информационных технологий. *Открытые информационные и*

*компьютерные интегрированные технологии*. Вып. 42. Харьков: Национальный аэрокосмический университет «ХАИ», 2009. С. 82–86.

51. Верещага В. М. Дискретно-параметричний метод геометричного моделювання кривих ліній та поверхонь: автореф. дис. ... докт. техн. наук: спец. 05.01.01 «Прикладна геометрія, інженерна графіка». Київ, 1996. 32 с.

52. Вірченко Г. А. Геометричне моделювання поверхонь літака в інтегрованих комп'ютерних системах з використанням кривих Безьє третього порядку: дис. ... канд. техн. наук: спец. 05.01.01 «Прикладна геометрія, інженерна графіка». Київ: КНУБА, 2005. 154 с.

53. Вірченко Г. А., Ванін Віт. В., Вірченко В. Г. Геометричне моделювання як одна з основних складових сучасних систем автоматизованого проектування. *Прикладна геометрія та інженерна графіка*. Вип. 77. Київ: КНУБА, 2007. С. 129–134.

54. Вірченко Г. А. Комп'ютерні моделі базової геометрії – одна з основ автоматизованого конструювання сучасного літака. *VI міжнародна науково-технічна конференція “Гіротехнології, навігація, керування рухом та конструювання авіаційно-космічної техніки”*. Збірка доповідей. Частина II. Київ: НТУУ «КПІ», 2007. С. 231–235.

55. Вірченко Г. А. Твердотільне параметричне моделювання деталей і складальних одиниць у системі CADD5. *Прикладна геометрія та інженерна графіка*. Вип. 79. Київ: КНУБА, 2008. С. 164–170.

56. Вірченко Г. А., Ванін Віт. В., Вірченко В. Г. Рациональний розкрій матеріалів як складова частина технологічних процесів виготовлення деталей. *Праці Таврійського державного агротехнологічного університету*. Вип. 4. Прикладна геометрія та інженерна графіка. Т. 37. Мелітополь: ТДАТУ, 2008. С. 112–120.

57. Вірченко Г. А., Ванін Віт. В., Вірченко В. Г. Структурно-параметричне твердотільне геометричне моделювання стояків планера літака. *Праці Таврійського державного агротехнологічного університету*. Вип. 4. Прикладна геометрія та інженерна графіка. Т. 37. Мелітополь: ТДАТУ, 2008. С. 83–91.

58. Вірченко Г. А., Ванін Віт. В., Вірченко В. Г. Структурно-параметричне геометричне моделювання як елемент ресурсозберігаючих технологій у життєвому циклі складної продукції машинобудування. *Геометричне та комп'ютерне моделювання*. Вип. 21. Харків: ХДУХТ, 2008. С. 11–15.

59. Вірченко Г. А. Деякі питання комп'ютерного структурно-параметричного конструювання вузлів літака. *Інформаційні системи, механіка та керування*. Вип. 1. Київ: НТУУ «КПІ», 2008. С. 70–76.

60. Вірченко Г. А. Деякі перспективи розвитку дисципліни «Інженерна графіка» в аспекті комп'ютерних інформаційних технологій та впровадження Болонського процесу. *Праці Таврійського державного агротехнологічного університету*. Вип. 5. Інформаційні технології в прикладній геометрії. Т. 3. Мелітополь: ТДАТУ, 2009. С. 77–80.

61. Вірченко Г. А. Інтегроване варіантне комп'ютерне конструкторсько-технологічне проектування авіаційної техніки. *Механіка гіроскопічних систем*. Вип. 19. Київ: НТУУ «КПІ», 2008. С. 125–132.

62. Вірченко Г. А. Розрахунок перетинів довільних параметричних поверхонь. *Праці Таврійського державного агротехнологічного університету*. Вип. 4. Прикладна геометрія та інженерна графіка. Т. 41. Мелітополь: ТДАТУ, 2008. С. 119–125.

63. Вірченко Г. А. Геометричні моделі як основа комп'ютерного опису об'єктів автоматизованого конструювання. *Геометричне та комп'ютерне моделювання*. Вип. 22. Харків: ХДУХТ, 2009. С. 70–73.

64. Вірченко Г. А. Обчислювальний алгоритм розрахунку перетинів довільних багатокутників. *Геометричне та комп'ютерне моделювання*. Вип. 24. Харків: ХДУХТ, 2009. С. 21–24.

65. Вірченко Г. А. Відтворення визначників кінематичних поверхонь засобами структурно-параметричних геометричних моделей. *Геометричне та комп'ютерне моделювання*. Вип. 25. Харків: ХДУХТ, 2009. С. 9–13.

66. Вірченко Г. А. Деякі проблемні питання проектування сучасного літака. *VII міжнародна науково-технічна конференція “Гіротехнології, навігація, керування рухом та конструювання авіаційно-космічної техніки”*: Збірка доповідей. Частина II. Київ: НТУУ «КПІ», 2009. С. 85–88.

67. Вірченко Г. А. Обчислювальний алгоритм розрахунку перетину багатогранників. *Праці Таврійського державного агротехнологічного університету*. Вип. 4. Прикладна геометрія та інженерна графіка. Т. 44. Мелітополь: ТДАТУ, 2009. С. 112–115.

68. Вірченко Г. А. Деякі проблемні питання структурно-параметричного формоутворення в сучасних системах геометричного моделювання. *Збірник праць XI Міжнародної науково-практичної конференції “Сучасні проблеми геометричного моделювання”*. Мелітополь: ТДАТУ, 2009. С. 70–74.

69. Вірченко Г. А. До питання обчислення перетинів довільних просторових параметричних кривих. *Прикладна геометрія та інженерна графіка*. Вип. 81. Київ: КНУБА, 2009. С. 102–106.

70. Вірченко Г. А. Структурно-параметричний підхід як засіб удосконалення геометричних алгоритмів. *Геометричне та комп'ютерне моделювання*. Вип. 26. Харків: ХДУХТ, 2010. С. 81–84.

71. Вірченко Г. А. Структурно-параметричний підхід як загальна методологія комп'ютерного геометричного моделювання об'єктів машинобудування. *Прикладна геометрія та інженерна графіка*. Вип. 83. Київ: КНУБА, 2010. С. 146–152.

72. Вірченко Г. А. Структурно-параметричні методи апроксимації як засоби вирішення задач оптимізації. *Праці Таврійського державного агротехнологічного університету*. Вип. 4. Прикладна геометрія та інженерна графіка. Т. 47. Мелітополь: ТДАТУ, 2010. С. 61–66.

73. Вірченко Г. А. Деякі прийоми та алгоритми структурно-параметричного синтезу геометричних об'єктів. *Праці Таврійського державного агротехнологічного університету*. Вип. 4. Прикладна геометрія та інженерна графіка. Т. 48. Мелітополь: ТДАТУ, 2010. С. 63–68.

74. Вірченко Г. А. Деякі аспекти викладання дисципліни «Комп'ютерне геометричне моделювання» у вищих навчальних закладах. *Збірник праць XII Міжнародної науково-практичної конференції “Сучасні проблеми геометричного моделювання”*. Мелітополь, 2010. С. 37–41.

75. Вірченко Г. А. Комп'ютерне геометричне моделювання як один із перспективних напрямків інновацій у науці, освіті та виробництві. *Сборник научных трудов по материалам международной научно-практической конференции “Перспективные инновации в науке, образовании, производстве и транспорте ’2010”*. Том 4. Технические науки. Одесса: Черноморье, 2010. С. 67–68.

76. Вірченко Г. А. Використання структурно-параметричного підходу для комп'ютерної візуалізації багатовимірних геометричних об'єктів. *Технічна естетика і дизайн*. Вип. 7. Київ: Віпол, 2010. С. 68–73.

77. Вірченко Г. А. Комбіновані геометричні об'єкти на основі кривих і поверхонь. *Прикладна геометрія та інженерна графіка*. Вип. 86. Київ: КНУБА, 2010. С. 226–231.

78. Вірченко Г. А. Комп'ютерне структурно-параметричне геометричне моделювання об'єктів машинобудування. *Сборник научных трудов по*

материалам международной научно-практической конференции “Научные исследования и их практическое применение. Современное состояние и пути развития ’2010”. Том 4. Технические науки. Одесса: Черноморье, 2010. С. 66–67.

79. Вірченко Г. А. Деякі питання використання геометричних засобів для підвищення ефективності розв’язування задач оптимізації в машинобудуванні. *Теорія та практика раціонального проектування, виготовлення і експлуатації машинобудівних конструкцій*: Праці 2-ї міжн. наук.-техн. конференції. Львів: КІНПАТРИ ЛТД, 2010. С. 99–100.

80. Вірченко Г. А. Формування ліній перетину поверхонь як складових елементів комбінованих геометричних об’єктів. *Геометричне та комп’ютерне моделювання*. Вип. 27. Харків: ХДУХТ, 2010. С. 28–31.

81. Вірченко Г. А. Рекурсивний метод обчислення довжини довільної параметричної кривої. *Праці Таврійського державного агротехнологічного університету*. Вип. 4. Прикладна геометрія та інженерна графіка. Т. 49. Мелітополь: ТДАТУ, 2010. С. 84–88.

82. Вірченко Г. Використання геометричних методів апроксимації для розв’язування задач параметричної оптимізації в машинобудуванні. *Машинознавство*. 2010. №6 (156). С. 26–30.

83. Вірченко Г. Застосування комп’ютерних структурно-параметричних геометричних моделей для раціонального проектування технологічних процесів у машинобудуванні. *Машинознавство*. 2010. №7 (157). С. 34–37.

84. Вірченко Г. А. Інтегровані структурно-параметричні геометричні моделі виробів машинобудування. *Геометричне та комп’ютерне моделювання*. Вип. 27. Харків: ХДУХТ, 2010. С. 87–92.

85. Вірченко Г. А. Роль комп’ютерної графіки в підготовці студентів машинобудівних спеціальностей вищих технічних навчальних закладів. *Праці Таврійського державного агротехнологічного університету*. Вип. 5. Інформаційні технології в прикладній геометрії. Т. 4. Мелітополь: ТДАТУ, 2010. С. 60–64.

86. Вірченко Г. А., Грязнова Г. П. Использование структурно-параметрического моделирования при проектировании нефтеперерабатывающего оборудования. *Наука в нефтяной и газовой промышленности*. № 4/2010. Тюмень, 2010. С. 11–14.

87. Вірченко Г. А., Яблонський П. М. Деякі аспекти комп’ютерного геометричного моделювання з використанням кривих Безьє. *Прикладні*

*питання математичного моделювання*. Том 3, № 1. Херсон: ХНТУ, 2020. С. 41–48.

88. Воронцов Б. С., Бочарова І. А. 3-D моделювання та комп'ютерна графіка. Луганськ: СНУ, 2008. 240 с.

89. Гнатушенко В. В. Геометричні моделі формування та попередньої обробки цифрових фотограмметричних зображень високого просторового розрізнення: автореф. дис. ... докт. техн. наук: спец. 05.01.01 «Прикладна геометрія, інженерна графіка». Київ, 2009. 43 с.

90. Гриценко В. І., Котова А. Б., Вовк М. І. Інформаційні технології в біології та медицині. Київ: Наук. думка, 2007. 383 с.

91. Гумен О. М., Мартин С. Є. Комп'ютерна візуалізація І-багатовидів фазових  $n$ -просторів. *Праці Таврійського державного агротехнологічного університету*. Вип. 4. Прикладна геометрія та інженерна графіка. Т. 39. Мелітополь: ТДАТУ, 2008. С. 101–106.

92. Дальский А. М., Суслов А. Г., Назаров Ю. Ф. Машиностроение. Энциклопедия Т. III-3. Технология изготовления деталей машин. Москва: Машиностроение, 2000. 840 с.

93. Джанабаев Ж. Ж., Кусебаев У. К., Умбетов Н. С. Об одном подходе к решению частной многомерной задачи. *Геометрическое моделирование и компьютерные технологии: теория, практика, образование*. Материалы VI международной науч.-практ. конференции. Харьков: ХГУПТ, 2009. С. 52–57.

94. Дорошенко Ю. О. Комп'ютерні методи деформативного конструювання геометричних об'єктів на основі політканинних перетворень: автореф. дис. ... докт. техн. наук: спец. 05.01.01 «Прикладна геометрія, інженерна графіка». Київ, 2002. 38 с.

95. Захарова Л. Е. Алгоритмы дискретной математики. Москва: МГИЭМ, 2002. 120 с.

96. Зеликин М. И. Оптимальное управление и вариационное исчисление. Москва: Едиториал УРСС, 2004. 160 с.

97. Иванов В. Н. Сферические кривые и геометрия поверхностей на опорной сфере. *Современные проблемы геометрического моделирования*. Сборник трудов Україно-российской научно-практической конференции. Харьков: 2005. С. 114–120.

98. Иванов Г. С. Методы многомерной геометрии в решении прикладных задач. *Материалы Второй украинско-российской научно-практической конференции "Современные проблемы геометрического моделирования"*. Харьков: 2007. С. 33–38.

99. Касьянов В. Н., Евстигнеев В. А. Графы в программировании: обработка, визуализация и применение. Санкт-Петербург: БХВ-Петербург, 2003. 1104 с.

100. Кіндрацький Б. І., Павлице В. Т., Предко Р. Я. Розрахункові параметри автоматично регульованої пасової передачі з самозатяжним кільцем. *Вісник Східноукраїнського національного університету ім. В. Даля*. № 9. Луганськ: СНУ, 2007. С 73–78.

101. Кобелев Н. Б. Основы имитационного моделирования сложных экономических систем. Москва: Дело, 2003. 336 с.

102. Комяк В. М. Задачи геометрического проектирования: размещения, покрытия, разбиения. *Прикладна геометрія та інженерна графіка*. Вип. 86. Київ: КНУБА, 2010. С. 37–48.

103. Конюховский П. В. Математические методы исследования операций в экономике. Санкт-Петербург: Питер, 2000. 208 с.

104. Корчинський В. М. Геометричні характеристики інформативності цифрових багатоспектральних зображень. *Геометричне та комп'ютерне моделювання*. Вип. 26. Харків: ХДУХТ, 2010. С. 8–13.

105. Ли В. Г., Сапрунов В. Н., Комар А. Динамическая виртуальная модель РТС для исследования ПФС человека-оператора. *Геометрическое моделирование и компьютерные технологии: теория, практика, образование*. Материалы VI международной научно-практической конференции. Харьков: ХГУПТ, 2009. С. 80–87.

106. Макаров Е. Инженерные расчеты в Mathcad. Санкт-Петербург: Питер, 2005. 448 с.

107. Малкіна В. М., Сосновських Д. О., Андрущенко Н. М. Автоматизація процесу згущення при варіативному дискретному геометричному моделюванні. *Праці Таврійського державного агротехнологічного університету*. Вип. 5. Інформаційні технології в прикладній геометрії. Т. 3. Мелітополь: ТДАТУ, 2009. С. 21–29.

108. Михайленко В. Є., Ковальов С. М. Дискретне геометричне моделювання: виникнення, результати, підсумки. *Прикладна геометрія та інженерна графіка*. Вип. 74. Київ: КНУБА, 2004. С. 3–8.

109. Назарчук З., Скальський В. Становлення методу акустичної емісії в установах Західного наукового центру. *Теорія та практика раціонального проектування, виготовлення і експлуатації машинобудівних конструкцій*. Праці 2-ї міжнародної науково-технічної конференції. Львів: КІНПАТРИ ЛТД, 2010. С. 9–10.

110. Найдиш В. М. Основні поняття теорії дискретного геометричного моделювання. *Праці Таврійської державної агротехнічної академії*. Вип. 4. Прикладна геометрія та інженерна графіка. Т. 13. Мелітополь: ТДАТА, 2001. С. 3–11.
111. Найдиш В. М., Верещага В. М., Найдиш А. В., Малкіна В. М. Основи прикладної дискретної геометрії. Мелітополь: Люкс, 2007. 193 с.
112. Несвідомін В. М. Комп'ютерні моделі синтетичної геометрії: дис. ... докт. техн. наук: спец. 05.01.01 «Прикладна геометрія. інженерна графіка». Київ, 2008. 435 с.
113. Никулин Е. А. Компьютерная геометрия и алгоритмы машинной графики. Санкт-Петербург: БХВ-Петербург, 2003. 560 с.
114. Ніцин О. Ю. Геометрія психофізичного простору та перспектива: автореф. дис. ... докт. техн. наук: спец. 05.01.01 «Прикладна геометрія, інженерна графіка». Київ, 2007. 34 с.
115. Обухова В. С., Підгорний О. Л. Торсові поверхні з напрямним конусом 2-го порядку. *Прикладна геометрія та інженерна графіка*. Вип. 69. Київ: КНУБА, 2001. С. 6–10.
116. Пальчевський Б. О. Дослідження технологічних систем (моделювання, проектування, оптимізація). Львів: Світ, 2001. 232 с.
117. Панасюк В. В., Осташ О. П., Федірко В. М. Механіка руйнування і міцність матеріалів. Т. 9. Міцність і довговічність авіаційних матеріалів та елементів конструкцій. Львів: Сполом, 2007. 1068 с.
118. Пилипака С. Ф., Бабка В. М. Плоска крива як сума траєкторій переносного і відносного руху точки по заданих кривих. *Геометричне та комп'ютерне моделювання*. Вип. 23. Харків: ХДУХТ, 2009. С. 55–60.
119. Плоский В. О. Дослідження структурних особливостей методів геометричного моделювання та тенденцій розвитку прикладної геометрії: дис. ... докт. техн. наук: спец. 05.01.01 «Прикладна геометрія, інженерна графіка». Київ, 2007. 277 с.
120. Плоский В. О. Принципи визначення загальносистемних властивостей методів геометричного моделювання. *Прикладна геометрія та інженерна графіка*. Вип. 79. Київ: КНУБА, 2008. С. 62–67.
121. Плоский В. О. Деякі практичні наслідки методологічних проблем прикладної геометрії. *Збірник праць XI Міжнародної науково-практичної конференції “Сучасні проблеми геометричного моделювання”*. Мелітополь, 2009. С. 11–17.

122. Плоский В. О. Інтерпретації як елемент методології та інструментальний засіб прикладної геометрії. *Прикладна геометрія та інженерна графіка*. Вип. 83. Київ: КНУБА, 2010. С. 18–25.

123. Поляков А. Ю., Дорофеев С. Ю. Геометрическое моделирование в системах автоматизированного проектирования. Томск: ТГУСУР, 2007. 215 с.

124. Прасолов В. В. Элементы комбинаторной и дифференциальной топологии. Москва: Издательство МЦНМО, 2004. 352 с.

125. Прохоренко В. П. SolidWorks. Практическое руководство. Москва: ООО, «Бином-Пресс», 2004. 448 с.

126. Пугачов Є. В. Дискретна інтерполяція плоских ДПК поблизу особливих точок. *Прикладна геометрія та інженерна графіка*. Вип. 69. Київ: КНУБА, 2001. С. 74–79.

127. Пустюльга С. І. Дискретне визначення геометричних об'єктів числовими послідовностями: дис. ... докт. техн. наук: спец. 05.01.01 «Прикладна геометрія, інженерна графіка». Київ, 2006. 322 с.

128. Равська Н. С., Родін П. Р., Ніколаєнко Т. П. Основи формоутворення поверхонь при механічній обробці. Житомир: ЖІТІ, 2000. 163 с.

129. Роджерс Д., Адамс Дж. Математические основы машинной графики. Москва: Мир, 2001. 604 с.

130. Росоха С. В. Комп'ютерно-геометричні моделі роторно-планетарних трохойдних гідромашин: автореф. дис. ... докт. техн. наук: спец. 05.01.01 «Прикладна геометрія, інженерна графіка». Мелітополь: 2009. 39 с.

131. Садковий В. П., Комяк В. М., Соболев О. М. Раціональне розбиття множин при територіальному плануванні в сфері цивільного захисту. Харків: УЦЗУ, 2008. 174 с.

132. Сергейчук О. В. Геометричне моделювання фізичних процесів при оптимізації форми енергоефективних будинків: автореф. дис. ... докт. техн. наук: спец. 05.01.01 «Прикладна геометрія, інженерна графіка». Київ: КНУБА, 2008. 39 с.

133. Скидан І. А. Загальна аналітична теорія прикладного формоутворення на основі глобальної параметризації. *Праці Таврійської державної агротехнічної академії*. Вип. 4. Прикладна геометрія та інженерна графіка. Т. 13. Мелітополь: ТДАТА, 2001. С. 22–28.

134. Советов Б. Я., Яковлев С. А. Моделирование систем. Москва: Высш. шк., 2001. 343 с.

135. Струтинський В., Дрозденко В., Юрчишин О. Ідентифікація параметрів стохастичних силових факторів у динамічних системах металорізальних верстатів. *Теорія та практика раціонального проектування, виготовлення і експлуатації машинобудівних конструкцій*. Праці 2-ї міжнародної науково-технічної конференції. Львів: КІНПАТРІ ЛТД, 2010. С. 25–27.
136. Таха Х. Введение в исследование операций. Москва: Издательский дом «Вильямс», 2001. 912 с.
137. Терстон У. Трехмерная геометрия и топология. Москва: МЦНМО, 2001. 312 с.
138. Тику Ш. Эффективная работа: SolidWorks 2004. Санкт-Петербург: Питер, 2005. 768 с.
139. Ткачевський Я. І. Структурне геометричне моделювання. *Прикладна геометрія та інженерна графіка*. Київ: КНУБА, 2002. Вип. 71. С. 230–235.
140. Ткачевський Я. І. Використання структурних геометричних моделей для контролю форми літака. *Прикладна геометрія та інженерна графіка*. Вип. 75. Київ: КНУБА, 2005. С. 179–182.
141. Ткачевський Я. І. Структурне моделювання складних геометричних об'єктів у літакобудуванні: дис. ... канд. техн. наук: спец. 05.01.01 «Прикладна геометрія, інженерна графіка». Київ, 2007. 175 с.
142. Усенко В. Г. Оцінка топологічної важливості елементів структури технічної системи. *Геометричне та комп'ютерне моделювання*. Вип. 22. Харків: ХДУХТ, 2009. С. 123–128.
143. Устенко С. А. Побудова геометричної моделі плоского перерізу лопатки для газодинамічних розрахунків в системі Flow Vision. *Геометричне та комп'ютерне моделювання*. Вип. 25. Харків: ХДУХТ, 2009. С. 153–158.
144. Устенко С. А. Геометричне моделювання хвостовика лопатки осьового компресора. *Праці Таврійського державного агротехнологічного університету*. Вип. 4. Прикладна геометрія та інженерна графіка. Т. 47. Мелітополь: ТДАТУ, 2010. С. 67–72.
145. Формалев В. Ф., Ревизников Д. Л. Численные методы. Москва: Физматлит, 2004. 400 с.
146. Херн Д., Бейкер М. Компьютерная графика и стандарт OpenGL. Москва: Издательский дом «Вильямс», 2005. 1168 с.
147. Черніков О. В. Геометричне та комп'ютерне моделювання динаміки процесів зміни об'єктів під впливом заданих чинників (на прикладі

фільтрування): автореф. дис. ... докт. техн. наук: спец. 05.01.01 «Прикладная геометрия, инженерная графика». Київ, 2008. 37 с.

148. Черников А. В. Геометрические модели в исследованиях физических и технологических процессов. *Геометричне та комп'ютерне моделювання*. Харків: ХДУХТ, 2007. Вип. 17. С. 159–163.

149. Шепель В. П. Узагальнення синтезу моделей конструкторсько-технологічних обводів методами аналізу їх інваріантних складових: автореф. дис. ... докт. техн. наук: спец. 05.01.01 «Прикладна геометрія, інженерна графіка». Київ, 2004. 36 с.

150. Шикин Е. В., Боресков А. В. Компьютерная графика. Полигональные модели. Москва: «Диалог МИФИ», 2001. 464 с.

151. Шоман О. В. Геометричне моделювання узагальнених паралельних множин: автореф. дис. ... докт. техн. наук: спец. 05.01.01 «Прикладная геометрия, инженерная графика». Київ, 2007. 37 с.

152. Юрчук В. П. Спряжені поверхні в геометричних моделях формотворення робочих органів коренезбиральних машин: автореф. дис. ... докт. техн. наук: спец. 05.01.01 «Прикладна геометрія, інженерна графіка». Київ, 2002. 37 с.

153. Юрчук В. П., Грубич М. В. Використання геометричного моделювання при конструюванні робочих поверхонь ґрунтообробних знарядь. *Прикладна геометрія та інженерна графіка*. Вип. 83. Київ: КНУБА, 2010. С. 87–92.

154. Яблонський П. М. Деякі питання узагальнення засобів геометричного моделювання для проектування технічних об'єктів. *Сучасні проблеми моделювання*. Вип. 13. Мелітополь: МДПУ, 2018. С. 192–198.

155. Яблонський П. М. Деякі питання узагальнення формоутворення різального інструменту. *Вісник Херсонського національного технічного університету*. Вип. 1(68). Херсон: ХНТУ, 2019. С. 73–77.

156. Alberto S. Recent Advances in Optimization. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2006. 455 p.

157. CATIA Version 5 Release 17. Wireframe and Surface. User's Guide. Dassault Systemes, 2006.

158. CATIA Version 5 Release 17. Part Design. User's Guide. Dassault Systemes, 2006.

159. CATIA Version 5 Release 17. Assembly Design. User's Guide. Dassault Systemes, 2006.

160. Mark de Berg, Mark van Kreveld, Mark Overmars, Otfried Schwarzkopf. Computational Geometry: algorithms and applications. Berlin: Springer, 2010. 367 p.

161. Molloy M., Reed B. Graph Coloring and the Probabilistic Method. New York: Springer, 2002. 326 p.

162. Rosen K., Michaels J., Gross J. Handbook of discrete and combinatorial mathematics. London: CRC Press, 2010. 1183 p.

163. Vanin V. V., Virchenko G. A., Gryaznova G. P. Place and role of computer geometrical modelling in modern science, education and industry. *Nauka i Studia*. NR 7 (31) 2010. Przemysl: Nauka i studia, 2010. P. 81–83.

.

## ЗМІСТ

ВСТУП .....	4
1. АНАЛІЗ СУЧАСНИХ МЕТОДІВ ГЕОМЕТРИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ТА ЇХ КОМП'ЮТЕРНОЇ РЕАЛІЗАЦІЇ.....	9
1.1. Огляд літератури з прикладної геометрії, інженерної графіки, машинобудування та суміжних дисциплін.....	9
1.2. Місце та роль графічних засобів САПР під час розробляння продукції машинобудування.....	13
1.3. Інтегруючий характер структурно-параметричного підходу при опрацюванні технічних об'єктів.....	15
1.4. Постановка задач дослідження .....	17
1.5. Висновки до розділу 1 .....	18
2. СТРУКТУРНО-ПАРАМЕТРИЧНИЙ ПІДХІД ЯК ОСНОВА АВТОМАТИЗОВАНОГО ПРОЕКТУВАННЯ ВИРОБІВ МАШИНОБУДУВАННЯ.....	19
2.1. Інтеграція процесів проектування, виготовлення та експлуатації промислової продукції .....	19
2.2. Загальна характеристика виробів і процесів машинобудування .....	22
2.2.1. Конструювання деталей та складаних одиниць .....	22
2.2.2. Проектування технологічних процесів.....	24
2.3. Типові задачі структурно-параметричного геометричного моделювання виробів машинобудування .....	26
2.4. Висновки до розділу 2 .....	28
3. КОНЦЕПТУАЛЬНІ ЗАСАДИ МЕТОДОЛОГІЇ СТРУКТУРНО- ПАРАМЕТРИЧНОГО ГЕОМЕТРИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ .....	30
3.1. Принципи структурно-параметричного формоутворення.....	30
3.1.1. Загальні положення методології структурно-параметричного геометричного моделювання.....	31
3.1.1.1. Теоретичні засади застосування структурно- параметричних методів у геометричному моделюванні .....	31
3.1.1.2. Сучасне комп'ютерне формоутворення геометричних об'єктів із позицій структурно-параметричного відходу ...	45
3.1.1.3. Структурно-параметричні описи точок, ліній і поверхонь	52
3.1.2. Принципи структурно-параметричної методології.....	90
3.1.3. Етапи розробляння та використання структурно-параметричних геометричних моделей .....	91

3.1.4. Реалізація варіантного формоутворення із застосуванням теорії множин і графів.....	92
3.2. Структурно-параметричні геометричні моделі та їх елементи.....	95
3.2.1. Структурні складові.....	95
3.2.1.1. Ієрархічний метод.....	96
3.2.1.2. Мережний метод.....	97
3.2.2. Параметричні складові.....	100
3.2.3. Комплексні геометричні моделі.....	102
3.2.3.1. Засоби оптимізації в геометричних моделях.....	102
3.2.3.2. Інтеграція геометричних моделей з описами інших дисциплін.....	102
3.3. Висновки до розділу 3.....	103
4. СТРУКТУРНО-ПАРАМЕТРИЧНІ ГЕОМЕТРИЧНІ МЕТОДИ ТА АЛГОРИТМИ КОМП'ЮТЕРНОГО МОДЕЛЮВАННЯ.....	105
4.1. Методи та алгоритми автоматизованого структурно-параметричного формоутворення.....	105
4.1.1. Позиційні задачі.....	105
4.1.1.1. Перетин параметричних кривих.....	105
4.1.1.2. Перетин параметричних поверхонь.....	110
4.1.1.3. Перетин багатокутників у площині.....	116
4.1.1.4. Перетин багатогранників і довільних тіл.....	118
4.1.2. Метричні задачі.....	122
4.1.2.1. Рекурсивний метод визначення довжини параметричної кривої.....	122
4.1.3. Структурно-параметричний підхід як засіб удосконалення геометричних алгоритмів.....	125
4.1.4. Структурно-параметричний синтез геометричних об'єктів.....	127
4.1.4.1. Загальні прийоми.....	128
4.1.4.2. Формування ліній перетину поверхонь як складових елементів геометричних об'єктів.....	132
4.2. Розв'язування задач оптимізації структурно-параметричними геометричними засобами.....	135
4.3. Використання структурно-параметричного підходу для візуалізації багатовимірних геометричних об'єктів.....	139
4.4. Висновки до розділу 4.....	145

5. ЗАСТОСУВАННЯ СТРУКТУРНО-ПАРАМЕТРИЧНОГО ГЕОМЕТРИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ДЛЯ ОПРАЦЮВАННЯ ВИРОБІВ МАШИНОБУДУВАННЯ.....	147
5.1. Продукція машинобудування як об'єкт структурно-параметричного геометричного моделювання .....	147
5.2. Сучасний літак – один з узагальнюючих представників складних виробів машинобудування .....	148
5.2.1. Конструювання деталей і складаних одиниць.....	151
5.2.2. Проектування технологічних процесів.....	159
5.2.2.1. Заготівельні процеси .....	159
5.2.2.2. Оброблювальні процеси .....	163
5.2.2.3. Складально-монтажні процеси.....	167
5.3. Висновки до розділу 5 .....	171
6. ПЕРСПЕКТИВИ ВПРОВАДЖЕННЯ МЕТОДОЛОГІЇ СТРУКТУРНО- ПАРАМЕТРИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ В ІНШІ СФЕРИ ЖИТТЄДІЯЛЬНОСТІ ЛЮДИНИ.....	173
6.1. Застосування структурно-параметричного формоутворення суміжними з прикладною геометрією математичними науками...	173
6.2. Використання напрацьованих методів моделювання в інших, ніж машинобудування, галузях промисловості .....	174
6.3. Місце та роль структурно-параметричної методології в економіці, освіті, медицині, решті сфер життєдіяльності людини .....	181
6.4. Висновки до розділу 6 .....	188
ЗАГАЛЬНІ ВИСНОВКИ.....	189
ДОДАТОК А .....	191
ПРИКЛАДИ КОМП'ЮТЕРНОГО МОДЕЛЮВАННЯ В МАТЕМАТИЧНІЙ СИСТЕМІ MAPLE.....	191
A.1. Побудова та модифікації структурно-параметричних геометричних об'єктів.....	191
A.2. Реалізація комбінаторно-варіаційних геометричних фігур .....	199
A.3. Структурно-параметричне формування кінематичних поверхонь	200
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ .....	204

Електронне мережне наукове видання

**Ванін** Володимир Володимирович

**Вірченко** Геннадій Анатолійович

**Яблонський** Петро Миколайович

**ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ СТРУКТУРНО-ПАРАМЕТРИЧНОГО  
ГЕОМЕТРИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ВИРОБІВ  
МАШИНОБУДУВАННЯ**

Монографія

*В авторській редакції*

Відповідальний редактор    О. Г. Гетьман, канд. тех. наук, доцент