

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ  
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

# **ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ТА ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ**

**ЗБІРНИК ЗАВДАНЬ  
ДО ТИПОВОЇ РОЗРАХУНКОВОЇ РОБОТИ  
ДЛЯ СТУДЕНТІВ І КУРСУ ТЕХНІЧНИХ ФАКУЛЬТЕТІВ**

*Затверджено Методичною радою НТУУ «КПІ»*

Київ  
«ПОЛІТЕХНІКА»  
2001

Диференціальне та інтегральне числення функцій однієї змінної: Збірник завдань до типової розрахункової роботи для студентів I курсу технічних факультетів / Уклад.: Л.Б. Федорова, Н.Р. Коновалова, І.В. Алексеева та ін. — К.: ІВЦ «Політехніка», 2001. — 65 с.

*Гриф надано Методичною  
радою НТУУ «КПІ»*

*(Протокол № 4 від 20.12.2001)*

Навчальне видання

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ТА ІНТЕГРАЛЬНЕ  
ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

Збірник завдань  
до типової розрахункової роботи  
для студентів I курсу технічних факультетів

Укладачі: Федорова Лідія Борисівна  
Коновалова Наталія Романівна  
Алексеева Ірина Віталіївна  
Кіндибалуєк Адріана Юріївна  
Трофимчук Олена Петрівна  
Гайдей Віктор Олександрович

Відповідальний редактор В.В. Булдигін, д-р фіз.-мат. наук, проф.

Рецензент В.Г. Лозовик, канд. фіз.-мат. наук, доц.

Темплан 2001 р., поз. 138

Редактор К.Г. Левчук

Підп. до друку                      Формат 60×84 <sup>1</sup>/<sub>16</sub>.  
Інформаційно-видавничий центр «Політехніка» НТУУ «КПІ»  
Лабораторія офсетного друку НТУУ «КПІ»  
03056, Київ-56, просп. Перемоги, 37.  
Зам. № . Тираж 200. Ум. друк. арк. 3,78.  
Папір офсетний. Різограф.

## Вступ

Дотепер накопичено багаторічний досвід використання типових індивідуальних розрахункових робіт для організації й контролю самостійної роботи студентів. Результатом цього є створена нова зручна форма типового варіанта.

Запропонований збірник містить 30 варіантів індивідуальних завдань і додаткові задачі, а кожний варіант — завдання з розділів: комплексні числа, теорія границь і неперервність функції, похідна функції, геометричний зміст похідної, дослідження функцій і побудова графіків функцій, методи інтегрування, визначений інтеграл, застосування визначеного інтегралу. Наявність додаткових задач, які вміщено в кінці збірника, і які ілюструють теоретичний матеріал курсу, дає змогу заохотити сумлінних студентів. Частина задач узято зі збірників завдань Л.А. Кузнецова «Сборник заданий по высшей математике» (М., 1994) і А.П. Рябушка «Сборник индивидуальных заданий по высшей математике» (Минск, 1990). Крім того, укладачі пропонують використовувати збірники задач [1—8].

Передбачається, що перед виконанням завдань типового варіанта розрахункової роботи, студент ознайомиться з відповідними розділами методичних вказівок, які містять:

1. Стислий виклад теоретичного матеріалу з вказівками шляхів поглиблення знань.
2. Приклади розв'язання типових задач з використанням ефективних, оригінальних методик.
3. Довідковий матеріал, зібраний і організований у зручній формі.
4. Зразок розв'язання типового варіанта та деяких додаткових задач, а також поради щодо розв'язання останніх.
5. Відповіді до частини завдань.
6. Список рекомендованої літератури.

## Список рекомендованої літератури

1. *Берман Г.Н.* Сборник задач по курсу математического анализа. — М.: Наука, 1985. — 446 с.
2. *Гудименко Ф.С.* Збірник задач з вищої математики. — К.: КДУ, 1967. — 352 с.
3. *Демидович Б.П.* Сборник задач и упражнений по математическому анализу. — М.: МГУ, 1999. — 624 с.
4. *Вища математика: Збірник задач / В.П. Дубовик, І.І. Юрик, І.П. Вовкодав та ін.* — К.: Вища шк., 1999. — 480 с.
5. *Сборник задач по математике для втузов: Линейная алгебра и основы математического анализа: В 3 ч. / В.А. Болгов, Б.П. Демидович, В.А. Ефименко и др.* — М.: Наука, 1993. — Ч. 1. — 461 с.
6. *Сборник задач по курсу высшей математики / Г.И. Кручкович, Н.И. Гутарина, П.Е. Дюбюк и др.* — М.: Высш. шк., 1973. — 576 с.
7. *Сборник задач по математическому анализу. Предел. Непрерывность. Дифференцируемость / Л.Д. Кудрявцев, А.Д. Кутасов, В.И. Чехлов, М.И. Шабунин.* — М.: Наука, 1984. — 592 с.
8. *Сборник задач по математическому анализу. Интегралы. Ряды / Л.Д. Кудрявцев, А.Д. Кутасов, В.И. Чехлов, М.И. Шабунин.* — М.: Наука, 1986. — 528 с.

## Варіант 1

1. Побудувати графіки функцій:

1)  $y = \frac{1}{2} \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ . 4)  $y = \operatorname{tg}\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$ .

2)  $y = 2 \arcsin(x + 1)$ . 5)  $y = 2^{x+2}$ .

3)  $y = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(x + 1)$ . 6)  $y = \ln(x + 3)$ .

2. Знайти:

а) алгебричну форму  $\frac{z_1}{z_2} + 2z_3 - i^3$ ;

б) тригонометричну форму  $z_3$ ;

в), г)  $(z_1 z_2)^8$  та  $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{10}$ ;

д), е) всі значення  $\sqrt[3]{z_1}$  та  $\sqrt[4]{z_2}$ , якщо:

$z_1 = -3 + 3i, z_2 = \sqrt{3} - i, z_3 = -1 - 5i$ .

3. Зобразити множину точок  $z \in \mathbb{C}$ :

1)  $1 < |z - 1| \leq 2, 0 < \arg z \leq \frac{\pi}{4}$ .

2)  $|z - i| > |z + i|, |\operatorname{Re} z| > 1$ .

3)  $z^3 - 3z^2 + 6z - 4 = 0$ .

Знайти границі (4—7):

4.1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+2)! - n(n+1)!}{(n+3)!}$ .

2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\sqrt[3]{5n^2} + \sqrt[4]{9n^8 + 1}}{(n + \sqrt{n})\sqrt{7 - n + n^2}}$ .

3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt{n^2 + 1} - \sqrt{n^2 - 1})$ .

5.1)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 12x + 20}$ . 6.1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 8x}{3x^2}$ .

2)  $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x^2 + 11x + 15}{3x^2 + 5x - 12}$ . 2)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 3x^2)}{x^3 - 5x^2}$ .

3)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 - 5x^2 + 2}{2x^3 + 5x^2 - x}$ . 3)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin x)}{\sin 4x}$ .

4)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^5 - 2x + 4}{2x^4 + 3x^2 + 1}$ . 4)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{\ln x}$ .

5)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 3x - 5}{7x^3 - 2x^2 + 1}$ . 5)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{7^{2x} - 5^{3x}}{2x - \operatorname{arctg} 3x}$ .

6)  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1 + 2x} - 3}{\sqrt{x} - 2}$ . 6)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{\sin^2 x}$ .

7)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+4}{x+8}\right)^{-3x}$ . 7)  $\lim_{x \rightarrow e} \left(\frac{\ln x - 1}{x - e}\right)^{\sin \frac{\pi}{2e} x}$ .

8)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{5x+7}\right)^{x+1}$ . 8)  $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{3x-1}{x+1}\right)^{\frac{1}{\sqrt{x}-1}}$ .

7.1)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x+5)}{\sqrt[4]{x+3}}$ . 3)  $\lim_{x \rightarrow +0} x^{\sin x}$ .

2)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 4x - 4x}{5 - 5e^{-3x} - 15x}$ . 4)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 2^x)^{\frac{1}{x}}$ .

8. Визначити порядок і головну частину розкладу  $\alpha(x)$  відносно  $\beta(x)$ :

1)  $\alpha(x) = \operatorname{tg} 2x, \beta(x) = \arcsin x, x \rightarrow 0$ .

2)  $\alpha(x) = x - \sqrt{x}, \beta(x) = x^3 - 3\sqrt[4]{x}, x \rightarrow 0$ .

3)  $\alpha(x) = \sin \sqrt[3]{x}, \beta(x) = x, x \rightarrow 0$ .

9. Дослідити функцію на неперервність:

1)  $f(x) = \frac{x}{\sin x}$ .

2)  $f(x) = \begin{cases} x + 4, & x < -1, \\ x^2 + 2, & -1 \leq x < 1, \\ 2x, & x \geq 1. \end{cases}$

3)  $f(x) = 2^{\frac{1}{x-3}} + 1$  у точках  $x_1 = 3, x_2 = 4$ .

Знайти похідні функцій (10—13):

10. 1)  $y = x^5 - \frac{4}{(x-2)^3} + \frac{\log_5(3x-7)}{\operatorname{ctg} 7x^3}$ .

2)  $y = \sqrt[3]{3x^4 + x - \sin \sqrt{3}} - \frac{\operatorname{arctg}^4 5x}{\operatorname{sh} \sqrt{x}}$ .

3)  $y = \sin^3 2x \cdot \cos 8x^5 + \frac{9 \operatorname{arctg}(x+7)}{(x-1)^2}$ .

4)  $y = \ln x \operatorname{arctg}^2 5x - \frac{e^{\arccos^2 x}}{\sqrt{x+5}}$ .

5)  $y = \operatorname{tg}^4 3x \cdot \arcsin 2x^3 + (\arccos x)^{\operatorname{tg} 3x}$ .

6)  $y = (\operatorname{cth} 3x)^{\arcsin x} - \frac{(x-1)^4 \sqrt{x+7}}{(x+2)^5 (x+3)^2}$ .

11.1)  $\sqrt{x^2 + y^2} = e^{\operatorname{arctg} \frac{y}{x}}$ . 2)  $y^2 + \sin y = 8x$ .

12.  $\begin{matrix} y'_x = ? \\ y''_{xx} = ? \end{matrix} : 1) \begin{cases} x = \frac{\ln t}{t}, \\ y = t^3 \ln t. \end{cases} 2) \begin{cases} x = \frac{\cos t}{1 + 2 \cos t}, \\ y = \frac{\sin t}{1 + 2 \cos t}. \end{cases}$

13.1)  $y = (2x^2 - 7) \ln(x - 1), y^{(5)} = ?$

2)  $y = xe^{ax}, y^{(n)} = ?$

14. Скласти рівняння дотичної та нормалі до кривої у заданій точці:

1)  $y = x^2 - 7x + 3, x_0 = 1$ .

2)  $x = a \sin^3 t, y = a \cos^3 t, t_0 = \frac{\pi}{3}$ .

3)  $x = at, y = \frac{1}{2}at^2, z = \frac{1}{3}at^3, M_0(6a, 18a, 72a)$ .

15. Знайти проміжки монотонності функції  $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 9$ .

1)  $y = \ln(x^2 - 2x + 2), [0; 3]$ .

16.  $\max_{[a,b]} f(x) = ?$

2)  $y = x^2 + \frac{16}{x} - 16, [1; 4]$ .

17. Дослідити функцію і побудувати її графік:

1)  $y = 1 - \sqrt[3]{x^2 - 2x}$ . 5)  $y = \frac{17 - x^2}{4x - 5}$ .

2)  $y = \sqrt[3]{3x - 6 + (2 - x)^3}$ . 6)  $y = e^{2x - x^2}$ .

3)  $y = (2x + 3)e^{-2(x+1)}$ . 7)  $y = \frac{4x}{x^2 + 4}$ .

4)  $y = e^{\sin x + \cos x}$ . 8)  $y = x + \frac{1}{x - 1}$ .

Знайти інтеграли (18—21):

18.1)  $\int \sqrt{3 + x} dx$ . 7)  $\int \sin(2 - 3x) dx$ .

2)  $\int \frac{dx}{3 - x}$ . 8)  $\int \frac{\sqrt{3} dx}{9x^2 - 3}$ .

3)  $\int \frac{2x dx}{\sqrt{5 - 4x^2}}$ . 9)  $\int \frac{dx}{\sqrt{2 - 5x^2}}$ .

4)  $\int e^{2x-7} dx$ . 10)  $\int \sin^4 2x \cos 2x dx$ .

5)  $\int \frac{\sqrt{\operatorname{tg}^3 x}}{\cos^2 x} dx$ . 11)  $\int \frac{\sqrt{\operatorname{arctg}^5 3x}}{1 + 9x^2} dx$ .

6)  $\int \frac{x dx}{e^{3x^2+4}}$ . 12)  $\int \frac{\sin 2x}{1 + 3 \cos 2x} dx$ .

19.1)  $\int \frac{2 - 3x}{x^2 + 2} dx$ . 5)  $\int \frac{(3x^2 + 20x + 9) dx}{(x^2 + 4x + 3)(x + 5)}$ .

2)  $\int \frac{1 - 2x - x^3}{1 + x^2} dx$ . 6)  $\int \frac{x^3 + 1}{x^3 - x^2} dx$ .

3)  $\int \frac{dx}{4x^2 - 5x + 4}$ . 7)  $\int \frac{(3x + 13) dx}{(x - 1)(x^2 + 2x + 5)}$ .

4)  $\int \frac{(x + 1) dx}{2x^2 + 3x + 4}$ . 8)  $\int \frac{5x dx}{x^4 + 3x^2 - 4}$ .

20.1)  $\int \operatorname{tg}^2 x dx$ . 4)  $\int \cos^4 3x \sin^2 3x dx$ .

2)  $\int \sin^2(1 - x) dx$ . 5)  $\int \frac{dx}{5 + 2 \sin x + 3 \cos x}$ .

3)  $\int \sin 3x \cos x dx$ . 6)  $\int \frac{dx}{8 \sin x (\sin x - 2 \cos x)}$ .

21.1)  $\int \frac{x - 1}{\sqrt{7x^2 + 4}} dx$ . 5)  $\int \frac{2x - 13}{\sqrt{3x^2 - 3x - 16}} dx$ .

2)  $\int \frac{dx}{\sqrt{4 + 8x - x^2}}$ . 6)  $\int \frac{1 - \sqrt{x}}{(1 + \sqrt[3]{x})\sqrt{x}} dx$ .

3)  $\int \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x} dx$ . 7)  $\int \frac{dx}{x\sqrt{1 + x^2}}$ .

4)  $\int \frac{dx}{2 + \sqrt{x + 3}}$ . 8)  $\int \frac{\sqrt{1 + \sqrt{x}}}{\sqrt[4]{x^7}} dx$ .

22.1)  $\int \frac{\ln(\cos x)}{\cos^2 x} dx$ . 4)  $\int x^2 \cos 2x dx$ .

2)  $\int (x + 1)e^{2x} dx$ . 5)  $\int \sqrt{1 - x} \arccos \sqrt{x} dx$ .

3)  $\int \ln(x - 5) dx$ . 6)  $\int \operatorname{arctg} 2x dx$ .

23. Обчислити інтеграли:

1)  $\int_2^3 x \ln(x - 1) dx$ . 4)  $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 2^8 \sin^8 x dx$ .

2)  $\int_0^1 \frac{3x^4 + 3x^2 + 1}{x^2 + 1} dx$ . 5)  $\int_0^2 x^2 \sqrt{4 - x^2} dx$ .

3)  $\int_3^{29} \frac{\sqrt[3]{(x - 2)^2}}{3 + \sqrt[3]{(x - 2)^2}} dx$ . 6)  $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x}{\sqrt{\sin x}} dx$ .

24. Обчислити інтеграли або довести їх розбіжність:

1)  $\int_1^{\infty} \frac{x dx}{\sqrt{16x^4 - 1}}$ . 2)  $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{2 - 4x}}$ .

25. Обчислити площу фігури, обмеженої кривими:

1)  $y = (x - 2)^3, y = 4x - 8$ .

2)  $\begin{cases} x = 4\sqrt{2} \cos^3 t, \\ y = 2\sqrt{2} \sin^3 t, \end{cases} x = 2 (x \geq 2)$ .

3)  $\rho = 4 \cos 3\varphi, \rho = 2 (\rho \geq 2)$ .

26. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої кривими  $x = 0, y^2 = 4 - x$ , навколо осі  $Ox$ .

27. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням кривої  $y = \frac{1}{3}x^3, x \in [-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$  навколо осі  $Ox$ .

## Варіант 2

1. Побудувати графіки функцій:

- 1)  $y = -2 \cos\left(3x - \frac{\pi}{2}\right)$ . 4)  $y = 3^{x-2}$ .  
2)  $y = \frac{1}{3} \arccos(x + 3)$ . 5)  $y = 2 \operatorname{arctg}(x - 1)$ .  
3)  $y = \operatorname{ctg}\left(\frac{1}{4}x - \frac{\pi}{8}\right)$ . 6)  $y = -\lg(x - 3)$ .

2. Знайти:

а) алгебричну форму  $\frac{z_1}{z_2} + 2z_3 + i^4$ ;

б) тригонометричну форму  $z_3$ ;

в), г)  $(z_1 z_2)^8$  та  $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{10}$ ;

д), е) всі значення  $\sqrt[3]{z_1}$  та  $\sqrt[4]{z_2}$ , якщо:

$$z_1 = 2 - 2i, z_2 = -1 + \sqrt{3}i, z_3 = 2 + 3i.$$

3. Зобразити множину точок  $z \in \mathbb{C}$ :

- 1)  $1 < |z + 1| \leq 3, \frac{\pi}{3} < \arg z \leq \frac{2\pi}{3}$ .  
2)  $|z - 1| < |z + i|, |\operatorname{Im} z| > 2$ .  
3)  $z^3 - 2z^2 + 2z - 1 = 0$ .

Знайти границі (4—7):

- 4.1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n + 1)! + (2n + 2)!}{(2n + 3)!}$ .  
2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n-1} - \sqrt{n^2+1}}{\sqrt[3]{3n^3+3} + \sqrt[4]{n^5+1}}$ .  
3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt{n(n-2)} - \sqrt{n^2-3})$ .  
5.1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - x^2 + 2x}{x^2 + x}$ . 6.1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x - \sin x}{5x}$ .  
2)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + 5x - 7}{x^3 - 1}$ . 2)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 5x}{\operatorname{tg} 3x}$ .  
3)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 + 7x}{2x^3 - 4x^2 + 5}$ . 3)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 10x}{e^{x^2} - 1}$ .  
4)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 + 2x - 5}{2x^2 + x + 7}$ . 4)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x^2 - 1} - 1}{\ln x}$ .  
5)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 - 7x + 2}{x^4 + 2x - 4}$ . 5)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - e^{-2x}}{2 \arcsin x - x}$ .  
6)  $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{\sqrt{x+12} - \sqrt{8}}{x^2 + 2x - 8}$ . 6)  $\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}}$ .  
7)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x+1}\right)^{2x-1}$ . 7)  $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos \sqrt{x})^{\frac{1}{x}}$ .  
8)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+1}{x-1}\right)^x$ . 8)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x \sin x - \cos 2x}{\sin^2 x}$ .

- 7.1)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{a^{\ln x} - x}{x - 1}$ . 3)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\right)$ .  
2)  $\lim_{x \rightarrow +0} x^{\sin x}$ . 4)  $\lim_{x \rightarrow +0} \left(\ln \frac{1}{x}\right)^x$ .

8. Визначити порядок і головну частину розкладу  $\alpha(x)$  відносно  $\beta(x)$ :

1)  $\alpha(x) = 1 - \cos x, \beta(x) = 3x^2, x \rightarrow 0$ .

2)  $\alpha(x) = x^3 - 3x - 2, \beta(x) = x - 2, x \rightarrow 2$ .

3)  $\alpha(x) = e^{x^2} - 1, \beta(x) = x, x \rightarrow 0$ .

9. Дослідити функцію на неперервність:

1)  $f(x) = \frac{\sin x}{x^2}$ .

2)  $f(x) = \begin{cases} x + 1, & x \leq 0, \\ (x + 1)^2, & 0 < x \leq 2, \\ 4 - x, & x > 2. \end{cases}$

3)  $f(x) = 5^{\frac{1}{x-3}} - 1$  у точках  $x_1 = 3, x_2 = 4$ .

Знайти похідні функцій (10—13):

10.1)  $y = 4x^3 + \frac{2}{x^4} - \frac{(x-4)^2}{e^{\operatorname{arctg} x}}$ .

2)  $y = \sqrt[3]{2x^4 - \cos \ln 2} + \frac{\ln(5x-3)}{4 \operatorname{tg} 3x^4}$ .

3)  $y = \cos^5 3x \cdot \operatorname{tg} x^3 - \frac{\operatorname{arctg}^3 2x}{\operatorname{ch} x}$ .

4)  $y = \ln x \operatorname{arctg}^3 2x + (\cos x)^{\ln x}$ .

5)  $y = (x-2)^4 \arcsin 5x^4 - \frac{\operatorname{arctg}(2x+3)}{8(x+1)^3}$ .

6)  $y = (\arcsin 2x)^{\operatorname{ctg} x} + \frac{(x-3)^5(x+2)^3}{(x+1)^2 \sqrt{(x-1)^3}}$ .

11.1)  $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{7} = 1$ . 2)  $y = \operatorname{tg}(x + y)$ .

12.  $\begin{matrix} y'_x = ? \\ y''_{xx} = ? \end{matrix} : 1) \begin{cases} x = 2 \cos^2 t, \\ y = 3 \sin^2 t. \end{cases} 2) \begin{cases} x = \sqrt{1-t^2}, \\ y = \operatorname{tg} \sqrt{1+t}. \end{cases}$

13.1)  $y = (3 - x^2) \ln x, y^{(4)} = ?$

2)  $y = \sin 2x + \cos(x + 1), y^{(n)} = ?$

14. Скласти рівняння дотичної та нормалі до кривої у заданій точці:

1)  $y = x^2 - 16x + 7, x_0 = 1$ .

2)  $x = \sqrt{3} \cos t, y = \sin t, t_0 = \frac{\pi}{3}$ .

$$3) x = t - \sin t, y = 1 - \cos t, z = 4 \sin \frac{t}{2},$$

$$M_0 \left( \frac{\pi}{2} - 1, 1, 2\sqrt{2} \right).$$

15. Знайти проміжки монотонності функції  $y = 3x - x^3$ .

$$1) y = \frac{3x}{x^2 + 1}, [0; 5].$$

$$16. \max_{\min_{[a,b]}} f(x) = ?$$

$$2) y = 4 - x - \frac{4}{x^2}, [1; 4].$$

17. Дослідити функцію і побудувати її графік:

$$1) y = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}. \quad 5) y = 2x - 3\sqrt[3]{x^2}.$$

$$2) y = \sqrt[3]{(x+3)^3 - 3x - 9}. \quad 6) y = \frac{x^2 + 1}{\sqrt{4x^2 - 3}}.$$

$$3) y = x + \ln(x^2 - 4). \quad 7) y = \frac{x + 1}{(x - 1)^2}.$$

$$4) y = \arctg \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{2}}. \quad 8) y = \frac{e^{2(x+1)}}{2(x+1)}.$$

Знайти інтеграли (18—22):

$$18.1) \int \sqrt[3]{1+x} dx. \quad 7) \int \sin(3-2x) dx.$$

$$2) \int \frac{dx}{2x^2 - 5}. \quad 8) \int \frac{dx}{3x + 9}.$$

$$3) \int \frac{dx}{\sqrt{9x^2 + 3}}. \quad 9) \int \frac{x dx}{\sqrt{5 - 3x^2}}.$$

$$4) \int e^{3+5x} dx. \quad 10) \int \frac{\sqrt[3]{\ln^2(1-x)}}{x-1} dx.$$

$$5) \int \frac{\sqrt[3]{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}} dx. \quad 11) \int \frac{x dx}{e^{3x^2+4}}.$$

$$6) \int \frac{\cos 2x}{\sin^3 2x} dx. \quad 12) \int \frac{3x^3}{1-x^4} dx.$$

$$19.1) \int \frac{1-2x}{5x^2-1} dx. \quad 5) \int \frac{12dx}{(x-2)(x^2-2x+3)}.$$

$$2) \int \frac{7-x^2}{1-x} dx. \quad 6) \int \frac{x^3 - 2x^2 - 2x + 1}{x^3 - x^2} dx.$$

$$3) \int \frac{dx}{x^2 - 4x + 10}. \quad 7) \int \frac{x^2 - 6x + 8}{x^3 + 8} dx.$$

$$4) \int \frac{x+6}{3x^2+x+1} dx. \quad 8) \int \frac{2x^5 - 2x + 1}{1-x^4} dx.$$

$$20.1) \int \operatorname{ctg}^3 2x dx. \quad 4) \int \sin^5 2x \cos^2 2x dx;$$

$$2) \int \sin^3(1-x) dx. \quad 5) \int \frac{dx}{8 \sin x (2 \sin x - \cos x)}.$$

$$3) \int \sqrt[5]{\sin x} \cos^3 x dx. \quad 6) \int \frac{dx}{5 - 4 \sin x + 2 \cos x}.$$

$$21.1) \int \frac{3-5x}{\sqrt{1-x^2}} dx. \quad 5) \int \frac{x-3}{\sqrt{2x^2-4x-1}} dx.$$

$$2) \int \frac{x dx}{\sqrt{x+3}}. \quad 6) \int \frac{\sqrt[4]{x} + \sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1} dx.$$

$$3) \int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-4x+1}}. \quad 7) \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2-1}}.$$

$$4) \int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} dx. \quad 8) \int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}}{x\sqrt[3]{x^2}} dx.$$

$$22.1) \int \cos(\ln x) dx. \quad 4) \int \sqrt{1-x} \arcsin \sqrt{x} dx.$$

$$2) \int (x-2)e^x dx. \quad 5) \int x \sin^2 x dx.$$

$$3) \int \arctg 2x dx. \quad 6) \int x \cos 6x dx.$$

23. Обчислити інтеграли:

$$1) \int_{-2}^0 x^2 e^{-\frac{x}{2}} dx. \quad 4) \int_0^{\pi} 2^4 \sin^6 x \cos^2 x dx.$$

$$2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2 + \cos x}. \quad 5) \int_2^3 \frac{2x^4 - 5x^2 + 4}{x^2 - 1} dx.$$

$$3) \int_{\sqrt{2}}^1 \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2} dx. \quad 6) \int_0^{\ln 2} \frac{dx}{e^x(3+e^{-x})}.$$

24. Обчислити інтеграли або довести їх розбіжність:

$$1) \int_0^{\infty} \frac{x^3 dx}{\sqrt{16x^4 + 1}}. \quad 2) \int_0^a \frac{x^8 dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

25. Обчислити площу фігури, обмеженої кривими:

$$1) y = x\sqrt{9-x^2}, y = 0, x \in [0; 3].$$

$$2) \begin{cases} x = \sqrt{2} \cos t, \\ y = 2\sqrt{2} \sin t, \end{cases} y = 2 (y \geq 2).$$

$$3) \rho = \cos 2\varphi.$$

26. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої кривими  $x = 0, y = 0, \sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{2}$ , навколо осі  $Ox$ .

27. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням кривої  $\rho = 2 \cos \varphi$  навколо полярної осі.

### Варіант 3

1. Побудувати графіки функцій:

1)  $y = 3 \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$ . 4)  $y = \operatorname{tg}\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$ .

2)  $y = 2 \arcsin(x + 1)$ . 5)  $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}$ .

3)  $y = \frac{1}{3} \operatorname{arctg}(x - 2)$ . 6)  $y = \ln(2 - x)$ .

2. Знайти:

а) алгебричну форму  $\frac{z_1}{z_2} + 2z_3 - i^3$ ;

б) тригонометричну форму  $z_3$ ;

в), г)  $(z_1 z_2)^8$  та  $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{10}$ ;

д), е) всі значення  $\sqrt[3]{z_1}$  та  $\sqrt[4]{z_2}$ , якщо:

$z_1 = -4 - 4i, z_2 = \sqrt{3} + i, z_3 = 3 - 4i$ .

3. Зобразити множину точок  $z \in \mathbb{C}$ :

1)  $1 < |z - i| \leq 3, \frac{\pi}{4} < \arg z \leq \pi$ .

2)  $|z + i| > |z - 1|, |\operatorname{Re} z| < 3$ .

3)  $z^3 + 2z^2 + 6z - 9 = 0$ .

Знайти границі (4—7):

4.1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1 + 3 + \dots + (2n - 1)}{n + 1} - \frac{2n + 1}{2} \right)$ .

2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^3 + 1} - \sqrt{n - 1}}{\sqrt[3]{n^3 + 1} - \sqrt{n - 1}}$ .

3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \sqrt{n} (n - \sqrt[3]{n^3 - 5})$ .

5.1)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{6 + x - x^2}{x^3 - 27}$ . 6.1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 5x}{2x^2}$ .

2)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^2 - 4x + 3}$ . 2)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{\operatorname{tg} 2x}$ .

3)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^4 - 3x^2 + 7}{x^4 + 2x^3 + 1}$ . 3)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 - 5x}{\sin 3x}$ .

4)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 + 7x - 4}{x^5 + 2x - 1}$ . 4)  $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 + \cos 3x}{\sin^2 7x}$ .

5)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^4 - 3x + 4}{3x^2 - 2x + 1}$ . 5)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6^{2x} - 7^{-2x}}{\sin 3x - 2x}$ .

6)  $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sqrt{x + 10} - \sqrt{7}}{2x^2 - x - 21}$ . 6)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{\sin(x + 1)}$ .

7)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x}{1 + 2x} \right)^{-4x}$ . 7)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1 + 2^x x}{1 + 3^x x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$ .

8)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x + 1}{2x - 1} \right)^{3x}$ . 8)  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{2x - 1}{x} \right)^{\frac{1}{\sqrt[3]{x} - 1}}$ .

7.1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x}$ . 3)  $\lim_{x \rightarrow 1} \ln x \ln(x - 1)$ .

2)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1 - x^2}{(\cos x - 1 + \frac{1}{2}x^2)}$ . 4)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (2x + 3^x)^{\frac{1}{x}}$ .

8. Визначити порядок і головну частину розкладу  $\alpha(x)$  відносно  $\beta(x)$ :

1)  $\alpha(x) = \operatorname{arctg}^2 3x, \beta(x) = 4x^2, x \rightarrow 0$ .

2)  $\alpha(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2x}}, \beta(x) = \frac{1}{\sqrt{x^3 - 2x^2}}, x \rightarrow \infty$ .

3)  $\alpha(x) = \ln(1 + \sqrt{x}), \beta(x) = x, x \rightarrow 0$ .

9. Дослідити функцію на неперервність:

1)  $f(x) = \frac{|x|}{x}$ .

2)  $f(x) = \begin{cases} x + 2, & x \leq -1, \\ x^2 + 1, & -1 < x \leq 1, \\ -x + 3, & x > 1. \end{cases}$

3)  $f(x) = \frac{x + 7}{x - 2}$  у точках  $x_1 = 2, x_2 = 3$ .

Знайти похідні функцій (10—13):

10.1)  $y = 3x^4 - \frac{4}{x^2} - \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{x^2 + 5x - 1}}$ .

2)  $y = \sqrt{(x - 4)^5 + \operatorname{tg} \lg 3} + \frac{\ln(7x + 2)}{5 \cos 42x}$ .

3)  $y = \operatorname{sh}^3 4x \cdot \arccos \sqrt{x} - \frac{\arccos 3x^4}{\operatorname{th}^2 x}$ .

4)  $y = \ln(x^2 - 1) \arccos^4 x + 2^{-x^2} \operatorname{arctg} 7x^4$ .

5)  $y = \frac{7 \arccos(4x - 1)}{(x + 2)^4} - (\sin 3x)^{\arccos x}$ .

6)  $y = (\operatorname{arctg} 6x)^{\cos 2x} + \frac{(x - 2)^3 \sqrt{(x + 1)^5}}{(x + 1)^3 (x - 4)^2}$ .

11.1)  $y = x + \operatorname{arctg} y$ . 2)  $e^{x-y} = xy$ .

12.  $\begin{matrix} y'_x = ? \\ y''_{xx} = ? \end{matrix} : 1) \begin{cases} x = 6 \cos^3 t, \\ y = 2 \sin^3 t. \end{cases} 2) \begin{cases} x = e^t \cos t, \\ y = e^t \sin t. \end{cases}$

13.1)  $y = x \cos^2 x, y^{(5)} = ?$

2)  $y = \sqrt[5]{e^{7x-1}}, y^{(n)} = ?$

14. Скласти рівняння дотичної та нормалі до кривої в заданій точці:

1)  $y = \sqrt{x - 4}, x_0 = 8$ .

2)  $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t), t_0 = \frac{\pi}{3}$ .

$$3) x = \frac{1}{4}t^4, y = \frac{1}{3}t^3, z = \frac{1}{2}t^2, M_0(1;1;1).$$

15. Знайти проміжки монотонності функції  $y = x^2(x-2)^2$ .

$$16. \max_{[a,b]} f(x) = ? \quad 1) y = \frac{2x-1}{(x-1)^2}, \left[-\frac{1}{2}; 0\right].$$

$$2) y = \sqrt[3]{2(x-2)^2(8-x)}, [0; 6].$$

17. Дослідити функцію і побудувати її графік:

$$1) y = \frac{12\sqrt[3]{6(x-2)^2}}{x^2+8}. \quad 5) y = e^{\frac{1}{5+x}}.$$

$$2) y = 3 \ln \frac{x}{x-3} - 1. \quad 6) y = \frac{2}{x^2+2x}.$$

$$3) y = \sqrt[3]{(x+2)^3 - 3x - 6}. \quad 7) y = \frac{x^3 - 4x}{3x^2 - 4}.$$

$$4) y = \ln(\cos x + \sin x). \quad 8) y = \frac{2(x+1)^2}{x-2}.$$

Знайти інтеграли (18—22):

$$18.1) \int \sqrt[3]{(1+x)^2} dx. \quad 7) \int \sin(5-3x) dx.$$

$$2) \int \frac{dx}{9x^2+3}. \quad 8) \int \frac{dx}{2-3x}.$$

$$3) \int \frac{3x dx}{4x^2+1}. \quad 9) \int \frac{dx}{\sqrt{7x^2-3}}.$$

$$4) \int e^{2-3x} dx. \quad 10) \int \frac{\sin 3x}{\cos^4 3x} dx.$$

$$5) \int \frac{dx}{\sin^2 x \operatorname{ctg}^4 x}. \quad 11) \int \frac{\sqrt[3]{\ln^2(1-x)}}{(1-x)} dx.$$

$$6) \int \frac{\arccos^2 3x}{\sqrt{1-9x^2}} dx. \quad 12) \int \frac{\sin 3x}{3-\cos 3x} dx.$$

$$19.1) \int \frac{2x+1}{5x^2+1} dx. \quad 5) \int \frac{(43x-67)dx}{(x-1)(x^2-x-12)}.$$

$$2) \int \frac{x^3+2}{x^2-1} dx. \quad 6) \int \frac{x^3+2x^2-x+2}{(x-1)(x^2-1)} dx.$$

$$3) \int \frac{dx}{2x^2-7x+10}. \quad 7) \int \frac{(12-6x)dx}{(x+1)(x^2-4x+13)}.$$

$$4) \int \frac{(2x-1)dx}{3x^2-2x+6}. \quad 8) \int \frac{x^3-3x^2+x-2}{x^4+5x^2+4} dx.$$

$$20.1) \int \operatorname{tg}^4 3x dx. \quad 4) \int \cos^3 x \sin^8 x dx.$$

$$2) \int \sin^4 \frac{x}{4} dx. \quad 5) \int \frac{dx}{1+3\cos^2 x}.$$

$$3) \int \sin^2 3x \cos^2 3x dx. \quad 6) \int \frac{3\sin x - 2\cos x}{1+\cos x} dx.$$

$$21.1) \int \frac{8-13x}{\sqrt{x^2-1}} dx. \quad 5) \int \frac{x-1}{\sqrt{3x^2-x+5}} dx.$$

$$2) \int \frac{dx}{\sqrt{2-3x-2x^2}}. \quad 6) \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}.$$

$$3) \int \frac{\sqrt{x^2+4}}{x} dx. \quad 7) \int \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[6]{x+1}} dx.$$

$$4) \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x-3}}. \quad 8) \int \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}{x\sqrt{x}} dx.$$

$$22.1) \int \frac{\ln x}{x^2} dx. \quad 4) \int x \operatorname{arctg} 2x dx.$$

$$2) \int x \sin x \cos x dx. \quad 5) \int (x-7) \cos 2x dx.$$

$$3) \int x^2 e^{-x} dx. \quad 6) \int \arcsin 3x dx.$$

23. Обчислити інтеграли:

$$1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx. \quad 4) \int_0^{2\pi} \sin^4 x \cos^4 x dx.$$

$$2) \int_2^3 \frac{x+2}{x^2(x-1)} dx. \quad 5) \int_3^6 \frac{\sqrt{x^2-9}}{x^4} dx.$$

$$3) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^3 2x dx. \quad 6) \int_0^5 \frac{dx}{2x+\sqrt{3x+1}}.$$

24. Обчислити інтеграли або довести їх розбіжність:

$$1) \int_1^{\infty} \frac{16x dx}{16x^4-1}. \quad 2) \int_0^{\frac{1}{3}} \frac{e^{3+\frac{1}{x}}}{x^2} dx.$$

25. Обчислити площу фігури, обмеженої кривими:

$$1) y = 4 - x^2, y = x^2 - 2x.$$

$$2) \begin{cases} x = 4(t - \sin t), \\ y = 4(1 - \cos t), \\ y = 4 \quad (0 < x < 8\pi, y \geq 4). \end{cases}$$

$$3) \rho = \sqrt{3} \cos \varphi, \rho = \sin \varphi.$$

26. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої кривими  $y = \sin x, y = 3 \sin x, y = 0, 0 \leq x \leq \pi$ , навколо осі  $Ox$ .

27. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням кривої  $x = 10(t - \sin t), y = 10(1 - \cos t) \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$  навколо осі  $Ox$ .

#### Варіант 4

1. Побудувати графіки функцій:

- 1)  $y = \frac{1}{2} \cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right)$ . 4)  $y = \operatorname{ctg}\left(3x + \frac{3\pi}{4}\right)$ .  
2)  $y = 2 \arccos(x - 1)$ . 5)  $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}$ .  
3)  $y = 3 \operatorname{arctg}(x + 2)$ . 6)  $y = -\lg(x + 2)$ .

2. Знайти:

а) алгебричну форму  $\frac{z_1}{z_2} + 2z_3 - i^3$ ;

б) тригонометричну форму  $z_3$ ;

в), г)  $(z_1 z_2)^8$  та  $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{10}$ ;

д), е) всі значення  $\sqrt[3]{z_1}$  та  $\sqrt[4]{z_2}$ , якщо:

$$z_1 = -3 + 3i, z_2 = \sqrt{3} - i, z_3 = -1 - 5i.$$

3. Зобразити множину точок  $z \in \mathbb{C}$ :

- 1)  $1 < |z + i| \leq 2, 0 < \arg z \leq \frac{5\pi}{4}$ .  
2)  $|z + 1| < |z - i|, |\operatorname{Im} z| < 1$ .  
3)  $z^3 + z^2 - 2 = 0$ .

Знайти границі (4—7):

- 4.1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 + \dots + n}{\sqrt{9n^4 + 1}}$ .  
2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2 - 1} + 7n^3}{\sqrt[4]{n^{12} + n + 1} - n}$ .  
3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sqrt{(n^2 + 1)(n^2 - 4)} - \sqrt{n^4 - 9} \right)$ .  
5.1)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - x - 1}{3x^2 - x - 2}$ . 6.1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x}{2 \sin x}$ .  
2)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 + 2x + 1}{x^3 - 8}$ . 2)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{x^3 + 27x}$ .  
3)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^3 - 2x^2 + 4x}{2x^3 + 5}$ . 3)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{\cos 7x - \cos 3x}$ .  
4)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x - x^6}{x^2 - 2x + 5}$ . 4)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \sin 2x}{(\pi - 4x)^2}$ .  
5)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - x + 7}{3x^4 - 5x^2 + 1}$ . 5)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{5x} - e^{3x}}{\sin 2x - \sin x}$ .  
6)  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{2 - x} - 2}{x^2 - x - 6}$ . 6)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} a}{\ln x - \ln a}$ .  
7)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x - 1}{x} \right)^{-3x}$ . 7)  $\lim_{x \rightarrow 0} (2 - 3^{\operatorname{arctg}^2 \sqrt{x}})^{\frac{2}{\sin x}}$ .  
8)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{2x - 1}{4x + 1} \right)^{3x-1}$ . 8)  $\lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{\cos x}{\cos 2} \right)^{\frac{1}{x-2}}$ .

7.1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \frac{1}{2}x^2 - x - 1}{\cos x - \frac{1}{2}x^2 - 1}$ . 3)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^\alpha - 1}{x^\beta - 1}$ .

2)  $\lim_{x \rightarrow +0} (\arcsin x)^{\operatorname{tg} x}$ . 4)  $\lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{ctg} x)^{\frac{1}{\ln x}}$ .

8. Визначити порядок і головну частину розкладу  $\alpha(x)$  відносно  $\beta(x)$ :

- 1)  $\alpha(x) = \sin 3x - \sin x, \beta(x) = 5x, x \rightarrow 0$ .  
2)  $\alpha(x) = \sqrt{x} - 2, \beta(x) = x^2 - 16, x \rightarrow 4$ .  
3)  $\alpha(x) = \operatorname{tg} \sqrt[3]{x}, \beta(x) = \sin x, x \rightarrow 0$ .

9. Дослідити функцію на неперервність:

1)  $f(x) = \frac{1 - e^{2x}}{x}$ .

2)  $f(x) = \begin{cases} -x, & x \leq 0, \\ -(x-1)^2, & 0 < x < 2, \\ x-3, & x \geq 2. \end{cases}$

3)  $f(x) = \frac{x-5}{x+3}$  у точках  $x_1 = -2, x_2 = -3$ .

Знайти похідні функцій (10—13):

10.1)  $y = 7\sqrt{x} - \frac{2}{(x-1)^5} - \frac{e^{-\operatorname{ctg} 5x}}{(3x^2 - 4x)^2}$ .

2)  $y = \sqrt[5]{7x^2 + \operatorname{ctg} \sqrt[3]{5}} + \frac{\sin^3 5x}{\ln(2x - 3)}$ .

3)  $y = \arcsin^3 2x \cdot \operatorname{ctg} 7x^4 - \frac{\arcsin 5x^3}{\operatorname{ch} \sqrt{x}}$ .

4)  $y = 3^{-x} \sqrt{\arccos 2x} + \frac{6 \arcsin 2x}{(x-2)^5}$ .

5)  $y = \operatorname{th}^2 \sqrt{x} \cdot \operatorname{arctg} 3x^2 - (\operatorname{th} 5x)^{\arcsin(x-1)}$ .

6)  $y = (\operatorname{arctg} 5x)^{\sin 4x} + \frac{(x+3)\sqrt[5]{(x-2)^2}}{(x+1)^7(x-1)^2}$ .

11.1)  $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{3} = 1$ . 2)  $x^4 + y^4 = x^2 y^2$ .

12.  $\begin{cases} y'_x = ? \\ y''_{xx} = ? \end{cases} : 1) \begin{cases} x = \frac{1}{t+2}, \\ y = \frac{t^2}{(t+2)^2} \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x = \operatorname{sh}^2 t, \\ y = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 t} \end{cases}$

13.1)  $y = (x-1)^2 \ln(x-1), y^{(5)} = ?$

2)  $y = \frac{4x+7}{2x+3}, y^{(n)} = ?$

14. Скласти рівняння дотичної та нормалі до кривої в заданій точці:

1)  $y = \sqrt{x+4}, x_0 = -3$ .

2)  $x = 2t - t^2, y = 3t - t^3, t_0 = 1$ .

3)  $x = \cos \varphi, y = \sin \varphi, z = \frac{3}{2\pi},$

$$M_0 \left( \frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{3}{8} \right).$$

15. Знайти проміжки монотонності функції  $y = \frac{1}{4}(x^3 - 9x^2) + 6x - 9.$

1)  $y = (x + 2)e^{1-x}, [-2; 2].$

16.  $\max_{[a,b]} f(x) = ?$

2)  $y = \frac{2(x^2 + 3)}{x^2 - 2x + 5}, [-3; 3].$

17. Дослідити функцію і побудувати її графік:

1)  $y = -\frac{12\sqrt[3]{6(x-1)^2}}{x^2 + 2x + 9}.$  5)  $y = \frac{4x^2 + 9}{4x + 8}.$

2)  $y = (3 - x)e^{x-2}.$  6)  $y = \frac{4x^2}{x^2 + 3}.$

3)  $y = \sqrt[3]{(x+1)^3 - 3x - 3}.$  7)  $y = \frac{x}{9-x}.$

4)  $y = \frac{1}{\sin x + \cos x}.$  8)  $y = x \ln^2 x.$

Знайти інтеграли (18—22):

18.1)  $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x}}.$  7)  $\int \cos(2+3x)dx.$

2)  $\int \frac{9dx}{\sqrt{9x^2-3}}.$  8)  $\int \frac{dx}{1-4x}.$

3)  $\int \frac{4xdx}{\sqrt{3-4x^2}}.$  9)  $\int \frac{dx}{5x^2+2}.$

4)  $\int e^{2x+1}dx.$  10)  $\int e^{\cos x} \sin x dx.$

5)  $\int \frac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos x}} dx.$  11)  $\int \frac{\operatorname{ctg}^5 2x}{\sin^2 2x} dx.$

6)  $\int \frac{\arctg^3 2x}{1+4x^2} dx.$  12)  $\int \frac{e^x dx}{2e^x + 3}.$

19.1)  $\int \frac{6x+1}{2x^2+1} dx.$  5)  $\int \frac{(7x^2+12x-7)dx}{(x^2+x-2)(x+3)}.$

2)  $\int \frac{8x^3-1}{2x+1} dx.$  6)  $\int \frac{x+2}{x^3-x^2} dx.$

3)  $\int \frac{dx}{2x^2+x-6}.$  7)  $\int \frac{(2x^2+2x+20)dx}{(x-1)(x^2+2x+5)}.$

4)  $\int \frac{xdx}{2x^2+x+5}.$  8)  $\int \frac{x^4+3x^2+1}{x^4+3x^2-4} dx.$

20.1)  $\int \operatorname{tg}^2 7x dx.$  4)  $\int \cos^4 x \sin^3 x dx.$

2)  $\int \cos^2 5x dx.$  5)  $\int \frac{2 \operatorname{tg} x + 3}{\sin^2 x + 2 \cos^2 x} dx.$

3)  $\int \cos 5x \sin x dx.$  6)  $\int \frac{dx}{5+3 \cos x - 5 \sin x}.$

21.1)  $\int \frac{x+3}{\sqrt{x^2+4}} dx.$  5)  $\int \frac{2x+1}{\sqrt{1+x-3x^2}} dx.$

2)  $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+6x+8}}.$  6)  $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}.$

3)  $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^4} dx.$  7)  $\int \frac{\sqrt[3]{x}+1}{1+\sqrt{x}} dx.$

4)  $\int \frac{xdx}{2+\sqrt{x+4}}.$  8)  $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}}{x^9\sqrt{x^4}} dx.$

22.1)  $\int \ln(x+2)dx.$  4)  $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{x+1}} dx.$

2)  $\int x \cos 5x dx.$  5)  $\int x^2(\sin 2x - 3)dx.$

3)  $\int (x+1)e^{-4x} dx.$  6)  $\int \arccos 2x dx.$

23. Обчислити інтеграли:

1)  $\int_0^{\pi} x^2 \sin x dx.$  4)  $\int_0^{2\pi} \sin^2 \frac{x}{4} \cos^6 \frac{x}{4} dx.$

2)  $\int_2^3 \frac{dx}{x^2(x-1)}.$  5)  $\int_0^1 \sqrt{4-x^2} dx.$

3)  $\int_0^{\pi} \sin^5 \frac{x}{2} dx.$  6)  $\int_3^8 \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1} dx.$

24. Обчислити інтеграли або довести їх розбіжність:

1)  $\int_0^{\infty} \frac{xdx}{16x^4+1}.$  2)  $\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt[3]{(3-x)^5}}.$

25. Обчислити площу фігури, обмеженої кривими:

1)  $y = \sin x \cos^2 x, y = 0 \left( 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \right).$

2)  $\begin{cases} x = 16 \cos^3 t, \\ y = 2 \sin^3 t, \end{cases} x = 2 \ (x \geq 2).$

3)  $\rho = 4 \sin 3\varphi, \rho = 2 \ (\rho \geq 2).$

26. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої кривими  $x = 0, y = 5 \cos x, y = \cos x, x \geq 0,$  навколо осі  $Ox.$

27. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням кривої  $y = \frac{1}{2}x^2 \left( y \leq \frac{3}{2} \right)$  навколо осі  $Oy.$

## Варіант 5

1. Побудувати графіки функцій:

1)  $y = -2 \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$ . 4)  $y = \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{8}\right)$ .

2)  $y = 3 \arcsin(x + 2)$ . 5)  $y = e^{x-2}$ .

3)  $y = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(x - 3)$ . 6)  $y = \ln(2x + 3)$ .

2. Знайти:

а) алгебричну форму  $\frac{z_1}{z_2} + 2z_3 - i^3$ ;

б) тригонометричну форму  $z_3$ ;

в), г)  $(z_1 z_2)^8$  та  $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{10}$ ;

д), е) всі значення  $\sqrt[3]{z_1}$  та  $\sqrt[4]{z_2}$ , якщо:

$z_1 = -6 + 6i, z_2 = 2 - 2\sqrt{3}i, z_3 = -1 - 2i$ .

3. Зобразити множину точок  $z \in \mathbb{C}$ :

1)  $2 < |z - 2| \leq 3, 0 < \arg z \leq \frac{\pi}{2}$ .

2)  $|z - 2i| > |z + 2|, |\operatorname{Re} z| > 2$ .

3)  $z^3 + 3z^2 + 12z - 16 = 0$ .

Знайти границі (4—7):

4.1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1 + 3 + \dots + (2n - 1)}{\sqrt{4n^4 + 3}} \right)$ .

2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3n - 1} - \sqrt[3]{125n^3 + n}}{\sqrt[5]{n} - n}$ .

3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^5 - 8} - n\sqrt{n(n^2 + 5)}}{\sqrt{n}}$ .

5.1)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 7x + 6}{x^2 - 5x + 6}$ . 6.1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{3x^2}$ .

2)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^4 - x^2 + x + 1}{x^4 - 1}$ . 2)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 6x}{2x^2 - 3x}$ .

3)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 4x^2 + 28x}{5x^3 + 3x^2 + 1}$ . 3)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{\operatorname{tg}(2\pi + \pi x)}$ .

4)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 7x - 1}{3x^4 + 2x + 5}$ . 4)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 + \cos \pi x}{\operatorname{tg}^2 \pi x}$ .

5)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^3 - 2x^2 + x}{3x^2 - x + 2}$ . 5)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{2x} - 5^{3x}}{\operatorname{arctg} x + x^3}$ .

6)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3 + 2x} - \sqrt{5}}{3x^2 - 4x + 1}$ . 6)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg} x} - 1}{x}$ .

7)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x + 5}{2x + 1} \right)^{5x-3}$ . 7)  $\lim_{x \rightarrow 8} \left( \frac{2x - 7}{x + 1} \right)^{\frac{1}{\sqrt[3]{x}-2}}$ .

8)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{5x + 8}{x - 2} \right)^x$ . 8)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1 + \sin x \cos \alpha x}{1 + \sin x \cos \beta x} \right)^{\operatorname{ctg}^3 x}$ .

7.1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\operatorname{tg} x} - 1 - \sin x}{\operatorname{tg} x - x}$ . 3)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^a - a^x}{a^x - a^a}$ .

2)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} (\pi - 2x)^{\cos x}$ . 4)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\ln 2x)^{\frac{1}{\ln x}}$ .

8. Визначити порядок і головну частину розкладу  $\alpha(x)$  відносно  $\beta(x)$ :

1)  $\alpha(x) = \cos 3x - \cos x, \beta(x) = 7x^2, x \rightarrow 0$ .

2)  $\alpha(x) = x^3 + x - 2, \beta(x) = x - 1, x \rightarrow 1$ .

3)  $\alpha(x) = \arcsin^3(\sqrt{x} - 2), \beta(x) = x - 4, x \rightarrow 4$ .

9. Дослідити функцію на неперервність:

1)  $f(x) = \frac{6x^2 - x - 1}{2x - 1}$ .

2)  $f(x) = \begin{cases} -2(x + 1), & x \leq -1, \\ (x + 1)^3, & -1 < x < 0, \\ x, & x \geq 0. \end{cases}$

3)  $f(x) = 4^{\frac{1}{3-x}} + 2$  у точках  $x_1 = 2, x_2 = 3$ .

Знайти похідні функцій (10—13):

10.1)  $y = \frac{5}{x^2} - \sqrt{x^4} + \frac{\sqrt{7x^3 - 5x + 1}}{e^{\cos x}}$ .

2)  $y = \sqrt[4]{3x^2 - \cos \sin 5} - \frac{\cos^2 3x}{\lg(3x - 4)}$ .

3)  $y = \operatorname{ctg} 3x \cdot \arccos 3x^2 + \frac{\operatorname{cth}^3(x + 1)}{\arccos 2x}$ .

4)  $y = 3^{\cos x} \ln(x^2 - 3x) - \frac{3 \operatorname{arctg}(2x - 5)}{(x + 1)^4}$ .

5)  $y = \operatorname{cth}^3 5x \cdot \arcsin x^2 + (\operatorname{ctg} 3x)^{\arcsin 3x}$ .

6)  $y = (\operatorname{sh} 3x)^{\arcsin 2x} - \frac{(x + 2)^7 (x - 3)^3}{(x - 1)^2 \sqrt{(x + 1)^5}}$ .

11.1)  $y^2 + \sin y = 25x$ . 2)  $x^{\sin y} = ye^x$ .

12.  $\begin{cases} y'_x = ? \\ y''_{xx} = ? \end{cases} : 1) \begin{cases} x = e^{-2t}, \\ y = e^{4t}. \end{cases} 2) \begin{cases} x = t + \sin t, \\ y = 2 - \cos t. \end{cases}$

13.1)  $y = x^2 \cos(2x - 1), y^{(6)} = ?$

2)  $y = \lg(5x + 2), y^{(n)} = ?$

14. Скласти рівняння дотичної та нормалі до кривої в заданій точці:

1)  $y = x^3 - 2x^2 + 4x - 7, x_0 = 2$ .

$$2) x = \frac{2t + t^2}{1 + t^3}, y = \frac{2t - t^2}{1 + t^3}, t_0 = 1.$$

$$3) x = \cos t, y = \sin t, z = e^t, M_0 \left( \frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}; e^{\frac{\pi}{6}} \right).$$

15. Знайти проміжки монотонності функції  $y = 2 - 3x^2 - x^3$ .

$$16. \max_{[a,b]} f(x) = ? \quad 1) y = \ln(x^2 - 2x + 4), \left[-1; \frac{3}{2}\right].$$

$$2) y = 2\sqrt{x} - x, [0; 4].$$

17. Дослідити функцію і побудувати її графік:

$$1) y = 1 - \sqrt[3]{x^2 + 2x}. \quad 5) y = \frac{4x - x^2 - 4}{x}.$$

$$2) y = \frac{4x^3 + 3x^2 - 8x - 2}{2 - 3x^2}. \quad 6) y = 4 - e^{-x^2}.$$

$$3) y = \sqrt[3]{(x-1)^3 - 3x + 3}. \quad 7) y = \frac{e^{2-x}}{2-x}.$$

$$4) y = e^{\sqrt{2} \sin x}. \quad 8) y = \frac{x^3 + 4}{x^2 + 1}.$$

Знайти інтеграли (18—22):

$$18.1) \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x)^3}}. \quad 7) \int \cos(3+2x) dx.$$

$$2) \int \frac{dx}{2+3x}. \quad 8) \int \frac{dx}{\sqrt{3-9x^2}}.$$

$$3) \int \frac{2x dx}{\sqrt{8x^2-9}}. \quad 9) \int \frac{dx}{2x^2+3}.$$

$$4) \int e^{7x-2} dx. \quad 10) \int \frac{\ln^3(1-x)}{x-1} dx.$$

$$5) \int \frac{\sin x}{\cos^5 x} dx. \quad 11) \int \frac{\operatorname{tg}^3 4x}{\cos^2 4x} dx.$$

$$6) \int e^{2x^3-1} x^2 dx. \quad 12) \int \frac{\sin 2x}{\cos^2 x - 4} dx.$$

$$19.1) \int \frac{3x-2}{2x^2+7} dx. \quad 5) \int \frac{8x dx}{(x^2+6x+5)(x+3)}.$$

$$2) \int \frac{x^5-2}{x^2-4} dx. \quad 6) \int \frac{4x^2+3x+3}{x^3+2x^2+x} dx.$$

$$3) \int \frac{dx}{5x^2+2x+7}. \quad 7) \int \frac{(x^3+8x^2+22x+7) dx}{(x+1)(x^2+6x+13)}.$$

$$4) \int \frac{(x+5) dx}{x^2+x-2}. \quad 8) \int \frac{x^3+8x-2}{x^4+4x^2} dx.$$

$$20.1) \int \operatorname{tg}^5 2x dx. \quad 4) \int \frac{\cos^3 x}{\sqrt[3]{\sin^4 x}} dx.$$

$$2) \int \cos^3(1-x) dx. \quad 5) \int \frac{dx}{3\cos^2 x + 4\sin^2 x}.$$

$$3) \int \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} dx. \quad 6) \int \frac{dx}{5\cos x + 10\sin x}.$$

$$21.1) \int \frac{x-2}{\sqrt{2-x^2}} dx. \quad 5) \int \frac{2x+5}{\sqrt{4x^2+8x+9}} dx.$$

$$2) \int \frac{dx}{\sqrt{2+8x-2x^2}}. \quad 6) \int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}.$$

$$3) \int x^2 \sqrt{4-x^2} dx. \quad 7) \int \frac{\sqrt[6]{x^5} + \sqrt{x} + 1}{\sqrt[6]{x^5} + \sqrt[6]{x^7}} dx.$$

$$4) \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x+1}}. \quad 8) \int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x^2}}}{x^9 \sqrt{x^8}} dx.$$

$$22.1) \int \frac{\ln(\cos x)}{\sin^2 x} dx. \quad 4) \int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x}} dx.$$

$$2) \int x^2(\sin x + 1) dx. \quad 5) \int (x+2) \cos 3x dx.$$

$$3) \int x^2 e^{-2x} dx. \quad 6) \int \operatorname{arctg} 8x dx.$$

23. Обчислити інтеграли:

$$1) \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \arccos x dx. \quad 4) \int_0^{\pi} 2^4 \cos^8 \frac{x}{2} dx.$$

$$2) \int_1^{\sqrt{3}} \frac{x^3+1}{x^2 \sqrt{4-x^2}} dx. \quad 5) \int_{-1}^1 \frac{x^5 dx}{x+2}.$$

$$3) \int_3^8 \frac{x dx}{\sqrt{x+1}}. \quad 6) \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^3 x \sin 2x dx.$$

24. Обчислити інтеграли або довести їх розбіжність:

$$1) \int_{-\infty}^0 \frac{x dx}{\sqrt{(x^2+4)^3}}. \quad 2) \int_{\frac{1}{3}}^1 \frac{\ln(3x-1)}{3x-1} dx.$$

25. Обчислити площу фігури, обмеженої кривими:

$$1) y = \sqrt{4-x^2}, y = 0, x = 0, x = 1.$$

$$2) \begin{cases} x = 2 \cos t, \\ y = 6 \sin t, \end{cases} y = 3 (y \geq 3).$$

$$3) \rho = 2 \cos \varphi, \rho = 2\sqrt{3} \sin \varphi.$$

26. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої кривими  $y = 0, y = \sin^2 x, x = \frac{\pi}{2}$ , навколо осі  $Ox$ .

27. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням кривої  $3y = x^2 (0 \leq x \leq 2)$  навколо осі  $Ox$ .

## Варіант 6

1. Побудувати графіки функцій:

- 1)  $y = 3 \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ . 4)  $y = \operatorname{ctg}\left(\frac{1}{3}x - \frac{\pi}{6}\right)$ .  
2)  $y = 3 \arccos(x - 2)$ . 5)  $y = e^{2-x}$ .  
3)  $y = 2 \arctg(x + 3)$ . 6)  $y = -\ln(x - 2)$ .

2. Знайти границі (4—7):

а) алгебричну форму  $\frac{z_1}{z_2} + 2z_3 - i^3$ ;

б) тригонометричну форму  $z_3$ ;

в), г)  $(z_1 z_2)^8$  та  $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{10}$ ;

д), е) всі значення  $\sqrt[3]{z_1}$  та  $\sqrt[4]{z_2}$ , якщо:

$$z_1 = 2 + 2i, z_2 = -2\sqrt{3} - 2i, z_3 = -2 + 3i.$$

3. Зобразити множину точок  $z \in \mathbb{C}$ :

- 1)  $1 < |z + 2| \leq 3, \frac{\pi}{2} < \arg z \leq \pi$ .  
2)  $|z - 2| > |z - 2i|, |\operatorname{Im} z| > 3$ .  
3)  $z^3 - 3z^2 + 4z + 8 = 0$ .

Знайти границі:

- 4.1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 3 + \dots + (2n - 1)}{1 + 2 + \dots + n}$ .  
2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\sqrt[5]{n} - \sqrt[3]{27n^6 + n^2}}{(n + \sqrt[4]{n})\sqrt{9 + n^2}}$ .  
3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 - 3n + 2} - n)$ .  
5.1)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{12 - x - x^2}{x^3 - 27}$ ; 6.1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 5x}{\sin 3x}$ .  
2)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 3x - 1}{x^4 - 1}$ . 2)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 3x}{2x}$ .  
3)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 10x + 3}{2x^2 + 5x - 3}$ . 3)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\operatorname{tg}(2\pi x + \pi)}$ .  
4)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 + 7x^2}{x^4 + 5x - 1}$ . 4)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} x}$ .  
5)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 - 2x + 1}{3x^2 + 2x - 5}$ . 5)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - e^{3x}}{\operatorname{arctg} x - x^2}$ .  
6)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{\sqrt{5 - x} - \sqrt{3}}$ . 6)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\alpha x} - e^{\beta x}}{\sin \alpha x - \sin \beta x}$ .  
7)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x + 3}{x}\right)^{5x}$ . 7)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right)^{\frac{1}{x}}$ .  
8)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x + 1}{3x - 1}\right)^{2x+1}$ . 8)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left(5 - \frac{4}{\cos x}\right)^{\frac{1}{\sin^2 3x}}$ .

7.1)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(1 - x) + \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}}{\operatorname{ctg} \pi x}$ . 3)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{\sin x - x}$ .

2)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\pi - 2 \operatorname{arctg} x) \ln x$ . 4)  $\lim_{x \rightarrow +0} (\sin x)^x$ .

8. Визначити порядок і головну частину розкладу  $\alpha(x)$  відносно  $\beta(x)$ :

- 1)  $\alpha(x) = x^2 + 1 - \cos 2x, \beta(x) = 6x^2, x \rightarrow 0$ .  
2)  $\alpha(x) = \sin(\sqrt{x} - 2), \beta(x) = x - 4, x \rightarrow 4$ .  
3)  $\alpha(x) = x + x^2 - \sqrt{x}, \beta(x) = x, x \rightarrow 0$ .

9. Дослідити функцію на неперервність:

1)  $f(x) = \frac{1 - e^{3x}}{x}$ .

2)  $f(x) = \begin{cases} -x, & x \leq 0, \\ x^2, & 0 < x \leq 2, \\ x + 1, & x > 2. \end{cases}$

3)  $f(x) = 9^{\frac{1}{2-x}}$  у точках  $x_1 = 0, x_2 = 2$ .

Знайти похідні функцій (10—13):

10.1)  $y = \sqrt[3]{x^4} - \frac{4}{(x + 2)^3} + \frac{e^{\operatorname{tg} 3x}}{\sqrt{3x^2 - x + 4}}$ .

2)  $y = \sqrt{3x^4 + \sin \cos 3} - \frac{\operatorname{tg}^3(2x - 1)}{\lg(5x + 1)}$ .

3)  $y = \ln(x - 1) \arccos^2 4x + \frac{\operatorname{th} 3x^5}{\operatorname{arctg}^2 3x}$ .

4)  $y = 5^{-x^2} \arcsin 3x^3 - \frac{\operatorname{arctg}(3x + 2)}{2(x - 3)^2}$ .

5)  $y = \log_2 x \operatorname{arctg} \sqrt{x} + y = (\operatorname{ch} 5x)^{\operatorname{arctg} \sqrt{x}}$ .

6)  $y = (\operatorname{tg} 4x)^{\arccos 2x} - \frac{(x - 1)^4 \sqrt[5]{(x - 2)^2}}{(x + 1)^2 \sqrt[3]{(x - 4)^2}}$ .

11.1)  $\operatorname{arctg} y = x + 5y$ . 2)  $2^x + 2^y \sin x = 2^{x+y}$ .

12.  $y'_x = ?$  : 1)  $\begin{cases} x = \sqrt{t}, \\ y = \sqrt[5]{t}. \end{cases}$  2)  $\begin{cases} x = \operatorname{arctg} t, \\ y = e^t. \end{cases}$

13.1)  $y = (4x^2 + 5)e^{2x+1}, y^{(5)} = ?$

2)  $y = a^{3x}, y^{(n)} = ?$

14. Скласти рівняння дотичної та нормалі до кривої у заданій точці:

1)  $y = x^3 - 5x^2 + 7x - 2, x_0 = 1$ .

2)  $x = \arcsin \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, y = \arccos \frac{1}{\sqrt{1+t^2}},$

$t_0 = -1$ .

3)  $x = \sin t, y = \cos t, z = \operatorname{tg} t, M_0\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}; 1\right)$ .

15. Знайти проміжки монотонності функції  $y = (x + 1)^2(x - 1)^2$ .

16.  $\max_{[a,b]} f(x) = ?$  1)  $y = \frac{x^3}{x^2 - x + 1}, [-1; 1]$ .  
2)  $y = \sqrt[3]{(x - 1)^2(x - 7)}, [-1; 5]$ .

17. Дослідити функцію і побудувати її графік:

1)  $y = 2x - 3\sqrt[3]{(x + 3)^2}$ . 5)  $y = \frac{x^2 - 3}{\sqrt{3x^2 - 2}}$ .

2)  $y = \frac{x^2 - 3x + 3}{x - 1}$ . 6)  $y = \frac{x^2}{4x^2 - 1}$ .

3)  $y = \sqrt[3]{(x - 3)^3 - 3x + 9}$ . 7)  $y = x^2 \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$ .

4)  $y = \operatorname{arctg} \sin x$ . 8)  $y = \ln \frac{x}{x + 2} + 1$ .

Знайти інтеграли (18—22):

18.1)  $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{2 + x}}$ . 7)  $\int \sin(4 - 2x) dx$ .

2)  $\int \frac{dx}{7x^2 - 4}$ . 8)  $\int \frac{dx}{2 - 5x}$ .

3)  $\int \frac{4x dx}{\sqrt{4x^2 + 3}}$ . 9)  $\int \frac{dx}{\sqrt{5x^2 + 1}}$ .

4)  $\int e^{5x-7} dx$ . 10)  $\int \frac{\sqrt{\ln(2x-1)}}{2x-1} dx$ .

5)  $\int \frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} 5x}}{\cos^2 5x} dx$ . 11)  $\int \cos^7 2x \sin 2x dx$ .

6)  $\int \frac{e^x dx}{4 - 3e^x}$ . 12)  $\int \frac{dx}{(1 + x^2) \operatorname{arctg}^3 x}$ .

19.1)  $\int \frac{5 - x}{3x^2 - 1} dx$ . 5)  $\int \frac{(x^3 + 5x^2 - 20x) dx}{(x^2 - 5x + 6)(x + 1)}$ .

2)  $\int \frac{2x^4 - 3}{x^2 + 1} dx$ . 6)  $\int \frac{x + 2}{x^3 + x^2} dx$ .

3)  $\int \frac{dx}{2x^2 - 2x + 1}$ . 7)  $\int \frac{x^2 + 3x + 2}{x^3 - 1} dx$ .

4)  $\int \frac{(3x - 2) dx}{5x^2 - 3x + 2}$ . 8)  $\int \frac{2x^3 - 2x^2 + 5}{(x - 1)^2(x^2 + 4)} dx$ .

20.1)  $\int x \operatorname{tg}^2 x^2 dx$ . 4)  $\int \sqrt[5]{\sin^2 2x} \cos^3 2x dx$ .

2)  $\int \sin^3 3x dx$ . 5)  $\int \frac{\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{ctg}^2 x} dx$ .

3)  $\int \cos x \sin 9x dx$ . 6)  $\int \frac{dx}{3 + 2 \cos x - \sin x}$ .

21.1)  $\int \frac{3 - 7x}{\sqrt{1 - 4x^2}} dx$ . 5)  $\int \frac{2x - 10}{\sqrt{1 + x - x^2}} dx$ .

2)  $\int \frac{dx}{\sqrt{3 + 2x - 2x^2}}$ . 6)  $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}}$ .

3)  $\int \frac{\sqrt{x^2 + 9}}{x} dx$ . 7)  $\int \frac{dx}{\sqrt{2x - 1} - \sqrt[3]{2x - 1}}$ .

4)  $\int \frac{x + 1}{x\sqrt{x + 2}} dx$ . 8)  $\int \frac{\sqrt[3]{(1 + \sqrt[3]{x})^2}}{x\sqrt[9]{x^5}} dx$ .

22.1)  $\int \frac{\ln(\ln x)}{x} dx$ . 4)  $\int \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{1 - x}} dx$ .

2)  $\int (x^2 + x)e^{-x} dx$ . 5)  $\int \operatorname{arctg} 3x dx$ .

3)  $\int (x - 2) \cos 4x dx$ . 6)  $\int x \sin(x - 2) dx$ .

23. Обчислити інтеграли:

1)  $\int_1^2 (x - 1) \ln x dx$ . 4)  $\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 2^8 \sin^8 x dx$ .

2)  $\int_2^3 \frac{3x^2 + 2x - 3}{x^3 - x} dx$ . 5)  $\int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{3 - x^2} dx$ .

3)  $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \operatorname{tg}^2 x dx$ . 6)  $\int_0^{\ln 5} \frac{e^x \sqrt{e^x - 1}}{e^x + 3} dx$ .

24. Обчислити інтеграли або довести їх розбіжність:

1)  $\int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{\sqrt[3]{(x^3 + 8)^4}}$ . 2)  $\int_{\frac{1}{4}}^1 \frac{dx}{20x^2 - 9x + 1}$ .

25. Обчислити площу фігури, обмеженої кривими:

1)  $y = x^2 \sqrt{4 - x^2}, y = 0$  ( $0 \leq x \leq 2$ ).

2)  $\begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t), \end{cases} y \geq 3$  ( $0 < x < 4\pi$ ).

3)  $\rho = \sin 3\varphi$ .

26. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої кривими  $x = 1, y = 1, x = \sqrt[3]{y - 2}$ , навколо осі  $Ox$ .

27. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням кривої  $y = \sqrt{x}, y = x$  навколо осі  $Ox$ .

## Варіант 7

1. Побудувати графіки функцій:

1)  $y = -\frac{1}{2} \sin\left(3x - \frac{\pi}{2}\right)$ . 4)  $y = \operatorname{tg}\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$ .

2)  $y = \frac{1}{2} \arcsin\left(x + \frac{1}{2}\right)$ . 5)  $y = 5^{x+1}$ .

3)  $y = 3 \operatorname{arctg}(x - 1)$ . 6)  $y = \lg(2x - 5)$ .

2. Знайти:

а) алгебричну форму  $\frac{z_1}{z_2} + 2z_3 - i^3$ ;

б) тригонометричну форму  $z_3$ ;

в), г)  $(z_1 z_2)^8$  та  $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{10}$ ;

д), е) всі значення  $\sqrt[3]{z_1}$  та  $\sqrt[4]{z_2}$ , якщо:

$z_1 = -3 + 3i, z_2 = -\sqrt{3} - i, z_3 = 3 - 4i$ .

3. Зобразити множину точок  $z \in \mathbb{C}$ :

1)  $1 < |z - 2i| \leq 2, \frac{\pi}{4} < \arg z \leq \frac{3\pi}{4}$ .

2)  $|z + 2i| > |z + 2|, |\operatorname{Re} z| < 1$ .

3)  $z^3 - z^2 + 2z + 4 = 0$ .

Знайти границі (4—7):

4.1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1 + 3 + \dots + (2n - 1)}{n + 3} - n \right)$ .

2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n^2+2}}{\sqrt[4]{4n^4+1} - \sqrt[3]{n^4-1}}$ .

3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (n + \sqrt[3]{4 - n^3})$ .

5.1)  $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \frac{3x^2 + 2x - 1}{27x^3 - 1}$ . 6.3)  $\lim_{x \rightarrow 1} (1 - x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}$ .

2)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 + 3x - 10}$ . 2)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\operatorname{arctg} 2x}$ .

3)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x - 3x^4}{x^4 + 3x - 2}$ . 3)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{4x^2}$ .

4)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^6 - 5x^2}{2x^3 + 4x - 5}$ . 4)  $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin^2 x - \operatorname{tg}^2 x}{(x - \pi)^4}$ .

5)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 5x + 2}{x^4 + 3x^2 - 9}$ . 5)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{5x} - 2^x}{x - \sin 9x}$ .

6)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 + 4x + 1}{\sqrt{x+3} - \sqrt{2}}$ . 6)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{e^{\sin x^2} - 1}$ .

7)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+2}{x+1} \right)^{2x-1}$ . 7)  $\lim_{x \rightarrow 3} \left( 2 - \frac{x}{3} \right)^{\sin \pi x}$ .

8)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{2x+1}{x-1} \right)^{4x}$ . 8)  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{2x-1}{x} \right)^{\frac{1}{\sqrt[3]{x}-1}}$ .

7.1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{\operatorname{tg}^2 x}$ . 3)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left( \frac{x}{\operatorname{ctg} x} - \frac{\pi}{2 \cos x} \right)$ .

2)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\cos x \ln(x-a)}{\ln(e^x - e^a)}$ . 4)  $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x)^{\ln x}$ .

8. Визначити порядок і головну частину розкладу  $\alpha(x)$  відносно  $\beta(x)$ :

1)  $\alpha(x) = \sqrt{1+x} - 1, \beta(x) = 2x, x \rightarrow 0$ .

2)  $\alpha(x) = \operatorname{tg}(x^2 - x^3), \beta(x) = x, x \rightarrow 0$ .

3)  $\alpha(x) = e^{x^2} - e^x, \beta(x) = x, x \rightarrow 0$ .

10. Дослідити функцію на неперервність:

1)  $f(x) = xe^{-\frac{1}{x}}$ .

2)  $f(x) = \begin{cases} x - 3, & x < 0, \\ x + 1, & 0 \leq x \leq 4, \\ 3 + \sqrt{x}, & x > 4. \end{cases}$

3)  $f(x) = 2^{\frac{1}{x-5}} + 1$  у точках  $x_1 = 4, x_2 = 5$ .

Знайти похідні функцій (10—13):

10.1)  $y = \sqrt{x^3} + \frac{10}{x^5} + \frac{e^{\sin x}}{(x-5)^7}$ .

2)  $y = \sqrt[3]{5x^5 + \cos \ln 7} - \frac{\log_3(4x+5)}{2 \operatorname{ctg} \sqrt{x}}$ .

3)  $y = \ln^5 x \operatorname{arctg} 7x^4 + \frac{\arccos^7(2x-5)}{\operatorname{th} x^5}$ .

4)  $y = \log_2 x \operatorname{arctg}^5 x - \frac{4 \operatorname{sh} 3x}{(x+2)^5}$ .

5)  $y = \operatorname{ch}^3 4x \cdot \arccos 4x^2 + (3x)^{\operatorname{arctg} 3x}$ .

6)  $y = (\cos 2x)^{\operatorname{arctg} 5x} - \frac{(x-3)^2 \sqrt{x+4}}{(x+1)^3 (x+2)^7}$ .

11.1)  $y^2 - x = \cos y$ . 2)  $e^y + xy = \ln y$ .

12.  $\begin{matrix} y'_x = ? \\ y''_{xx} = ? \end{matrix} : 1) \begin{cases} x = \frac{2t}{1+t^2}, \\ y = \frac{t^2}{1+t^2}. \end{cases} 2) \begin{cases} x = \sqrt{t-1}, \\ y = \frac{1}{\sqrt{1-t}}. \end{cases}$

13.1)  $y = x^2 \sin(5x - 3), y^{(6)} = ?$

2)  $y = \frac{x}{6x+4}, y^{(n)} = ?$

14. Скласти рівняння дотичної та нормалі до кривої у заданій точці:

1)  $y = \frac{1 + \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}}, x_0 = 4$ .

2)  $x = e^t \cos t, y = e^t \sin t, z = e^t, M_0(1; 0; 1)$ .

3)  $x = t \cos t - 2 \sin t, y = t \sin t + 2 \cos t,$

$t_0 = \frac{\pi}{4}.$

15. Знайти проміжки монотонності функції  $y = 2x^3 - 3x^2 - 4.$

16.  $\max_{[a,b]} f(x) = ?$  1)  $y = \left(\frac{x+1}{x}\right)^3, [1;2].$   
 2)  $y = x - 4\sqrt{x} + 5, [1;9].$

17. Дослідити функцію і побудувати її графік:

1)  $y = \frac{6\sqrt[3]{6(x-3)^2}}{x^2 - 2x + 9}.$  5)  $y = \frac{2x^2 - 6}{x - 2}.$

2)  $y = (x - 2)e^{3-x}.$  6)  $y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}.$

3)  $y = \sqrt[3]{(x^2 - 4x + 3)^2}.$  7)  $y = xe^{\frac{1}{x}}.$

4)  $y = \ln(\sqrt{2} \sin x).$  8)  $y = \frac{4x}{x^2 + 1}.$

Знайти інтеграли (18—22):

18.1)  $\int (1 - 4x)^7 dx.$  7)  $\int \cos(5 - 2x) dx.$

2)  $\int \frac{dx}{3x - 2}.$  8)  $\int \frac{3dx}{\sqrt{7x^2 - 4}}.$

3)  $\int \frac{xdx}{\sqrt{9 - 8x^2}}.$  9)  $\int \frac{dx}{2x^2 + 9}.$

4)  $\int e^{5x+7} dx.$  10)  $\int \frac{\sqrt[3]{\ln(3x+1)}}{3x+1} dx.$

5)  $\int \frac{\cos x dx}{\sin x + 2}.$  11)  $\int \frac{\sqrt[3]{\operatorname{ctg}^2 x}}{\sin^2 x} dx.$

6)  $\int e^{7x^2+2x} dx.$  12)  $\int \frac{x^2 dx}{7 - 5x^3}.$

19.1)  $\int \frac{5+x}{3x^2+1} dx.$  5)  $\int \frac{(2x^2+33x+61) dx}{(x-1)(x^2+5x+6)}.$

2)  $\int \frac{x^3-1}{2x+1} dx.$  6)  $\int \frac{4x^2 dx}{(x^2-2x+1)(x+1)}.$

3)  $\int \frac{dx}{2x^2-11x+20}.$  7)  $\int \frac{36dx}{(x+2)(x^2-2x+10)}.$

4)  $\int \frac{(x+4) dx}{2x^2-6x-8}.$  8)  $\int \frac{x^4+x^3-x-3}{x^4-x^2} dx.$

20.1)  $\int \operatorname{ctg}^3 2x dx.$  4)  $\int \frac{\cos^3 x}{\sqrt[3]{\sin^2 x}} dx.$

2)  $\int \sin^2 \frac{3x}{2} dx.$  5)  $\int \frac{dx}{4 \sin^2 x - 5 \cos^2 x}.$

3)  $\int \sin 5x \cos 2x dx.$  6)  $\int \frac{dx}{5 - 3 \cos x}.$

21.1)  $\int \frac{5-3x}{\sqrt{2x^2+1}} dx.$  5)  $\int \frac{2x-8}{\sqrt{1-x+x^2}} dx.$

2)  $\int \frac{dx}{\sqrt{2-2x-3x^2}}.$  6)  $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}.$

3)  $\int \frac{\sqrt{x^2+4}}{x^2} dx.$  7)  $\int \frac{\sqrt[3]{x-1} dx}{\sqrt[6]{x-1}+1}.$

4)  $\int \frac{dx}{x\sqrt{x+3}}.$  8)  $\int \frac{\sqrt[3]{(1+\sqrt[3]{x^2})^2}}{x^2\sqrt[9]{x}} dx.$

22.1)  $\int \ln^2 x dx.$  4)  $\int \frac{x \operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x^2}} dx.$

2)  $\int (x^2+x)e^x dx.$  5)  $\int x \cos 8x dx.$

3)  $\int (x-4) \sin 2x dx.$  6)  $\int \arcsin 8x dx.$

23. Обчислити інтеграли:

1)  $\int_{-\frac{1}{2}}^0 xe^{-2x} dx.$  4)  $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^6 x \cos^2 x dx.$

2)  $\int_{-3}^3 x^2 \sqrt{9-x^2} dx.$  5)  $\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \frac{xdx}{(x-1)^3}.$

3)  $\int_{-\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{\sqrt{8+2x-x^2}}.$  6)  $\int_{\ln 2}^{2 \ln 2} \frac{dx}{e^x - 1}.$

24. Обчислити інтеграли або довести їх розбіжність:

1)  $\int_0^{\infty} \frac{xdx}{\sqrt[4]{(16+x^2)^5}}.$  2)  $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{(1-x) \ln^2(1-x)}.$

25. Обчислити площу фігури, обмеженої кривими:

1)  $y = \cos x \sin^2 x, y = 0 \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right).$

2)  $\begin{cases} x = 16 \cos^3 t, \\ y = \sin^3 t, \end{cases} x = 6\sqrt{3} \ (x \geq 6\sqrt{3}).$

3)  $\rho = 6 \sin 3\varphi, \rho = 3 \ (\rho \geq 3).$

26. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої кривими  $x = 1, y = xe^x, y = 0,$  навколо осі  $Ox.$

27. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням кривої  $x = 2(t - \sin t), y = 2(1 - \cos t) \ (0 \leq t \leq 2\pi)$  навколо осі  $Ox.$

## Варіант 8

1. Побудувати графіки функцій:

1)  $y = 2 \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ . 4)  $y = \operatorname{ctg}\left(3x - \frac{4\pi}{3}\right)$ .

2)  $y = \frac{1}{2} \arccos(x + 2)$ . 5)  $y = 2^{x-\frac{1}{2}}$ .

3)  $y = \frac{1}{3} \operatorname{arctg}(x + 2)$ . 6)  $y = -\ln(2x - 3)$ .

2. Знайти:

а) алгебричну форму  $\frac{z_1}{z_2} + 2z_3 - i^3$ ;

б) тригонометричну форму  $z_3$ ;

в), г)  $(z_1 z_2)^8$  та  $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{10}$ ;

д), е) всі значення  $\sqrt[3]{z_1}$  та  $\sqrt[4]{z_2}$ , якщо:

$z_1 = -4 - 4i$ ,  $z_2 = 1 - \sqrt{3}i$ ,  $z_3 = 4 + 5i$ .

3. Зобразити множину точок  $z \in \mathbb{C}$ :

1)  $2 < |z + 2i| \leq 3$ ,  $\frac{\pi}{3} < \arg z \leq \frac{4\pi}{3}$ .

2)  $|z + 2| < |z - i|$ ,  $|\operatorname{Re} z| < 2$

3)  $z^3 - 3z^2 + 3z - 2 = 0$ .

Знайти границі:

4.1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 4 + \dots + (3n - 2)}{\sqrt{5n^4 + n + 1}}$ .

2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^4 + 2} + \sqrt{n - 2}}{\sqrt[4]{n^4 + 2} + \sqrt{n - 2}}$ .

3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n(n + 2)} - \sqrt{n^2 - 2n + 3})$ .

5.1)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 4x - 5}{x^2 - 2x - 3}$ . 6.1)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\pi - 2x}$ .

2)  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 2x}{x^2 + 4x + 4}$ . 2)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 3x)}{\sin 2x}$ .

3)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 7x + 3}{5x^2 - 3x + 4}$ . 3)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 3x}{\sqrt{2 + x} - \sqrt{2}}$ .

4)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^7 + 5x^2}{3x^2 + 11x - 7}$ . 4)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 - x + 1} - 1}{\operatorname{tg} \pi x}$ .

5)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^2 - 4x + 2}{4x^3 + 2x - 5}$ . 5)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{4x} - e^{-2x}}{2 \operatorname{arctg} x - \sin x}$ .

6)  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x^2 - 9x + 4}{\sqrt{5 - x} - 1}$ . 6)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(e^x - e^{-x})}{e^{x^3+1} - e}$ .

7)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x + 3}{x - 1}\right)^{x-4}$ . 7)  $\lim_{x \rightarrow 0} (2 - e^{\arcsin^2 \sqrt{x}})^{\frac{3}{x}}$ .

8)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x + 1}{2x - 1}\right)^{5x}$ . 8)  $\lim_{x \rightarrow a} \left(2 - \frac{x}{a}\right)^{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2a}}$ .

7.1)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x - 1}{\ln x}$ . 3)  $\lim_{x \rightarrow \pi} (\pi - x) \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ .

2)  $\lim_{x \rightarrow +0} (\operatorname{arctg} x)^{\operatorname{tg} x}$ . 4)  $\lim_{x \rightarrow +0} (\operatorname{ctg} x)^{\frac{2}{\ln x}}$ .

8. Визначити порядок і головну частину розкладу  $\alpha(x)$  відносно  $\beta(x)$ :

1)  $\alpha(x) = \sin x + \sin 5x$ ,  $\beta(x) = 2x$ ,  $x \rightarrow 0$ .

2)  $\alpha(x) = \frac{1}{x^3 + 2}$ ,  $\beta(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^{10} + x}}$ ,  $x \rightarrow \infty$ .

3)  $\alpha(x) = \ln(1 + \sqrt{x + 1})$ ,  $\beta(x) = x + 1$ ,  
 $x \rightarrow -1$ .

9. Дослідити функцію на неперервність:

1)  $f(x) = \frac{\operatorname{tg} 2x - \sin 2x}{x^3}$ .

2)  $f(x) = \begin{cases} 1 - x, & x < 0, \\ x + 1, & 0 \leq x \leq 4, \\ x + 3, & x > 4. \end{cases}$

3)  $f(x) = 5^{\frac{1}{x-4}} - 2$  у точках  $x_1 = 3$ ,  $x_2 = 4$ .

Знайти похідні функцій (10—13):

10.1)  $y = \sqrt[3]{x^7} + \frac{4}{x^5} + \frac{\ln(7x - 3)}{3 \operatorname{tg}^2 4x}$ .

2)  $y = \sqrt[5]{x^6 + \operatorname{ctg} \sqrt[3]{5}} - \frac{\arcsin^3 4x}{\operatorname{sh}(3x + 1)}$ .

3)  $y = 3^{\sin x} \operatorname{arctg}^3 4x + \frac{\arcsin(3x + 8)}{(x - 7)^3}$ .

4)  $y = \log_3 x \arccos 3x - \frac{e^{2x}}{\sqrt[3]{2x^2 - 3x}}$ .

5)  $y = \operatorname{sh}^3 x \cdot \operatorname{arctg} 5x^2 + (\ln x)^{\sin \sqrt{x}}$ .

6)  $y = (\sin 7x)^{\operatorname{arctg}(x+1)} - \frac{(x - 7)^{10} \sqrt{3x - 1}}{(x + 1)^2 (x + 3)^5}$ .

11.1)  $\ln(x^2 + y) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ ; 2)  $3x + \sin y = 5y$ .

12.  $\begin{matrix} y'_x = ? \\ y''_{xx} = ? \end{matrix} : 1) \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{t^2 - 1}}, \\ y = \frac{t + 1}{\sqrt{t^2 - 1}}. \end{cases} 2) \begin{cases} x = \sin t, \\ y = \sec t. \end{cases}$

13.1)  $y = (x - 1)^2 \ln(x - 2)$ ,  $y^{(5)} = ?$

2)  $y = \frac{4x + 7}{2x + 3}$ ,  $y^{(n)} = ?$

14. Скласти рівняння дотичної та нормалі до кривої в заданій точці:

1)  $y = \sqrt{x + 4}$ ,  $x_0 = -3$ .

2)  $x = 2t - t^2$ ,  $y = 3t - t^3$ ,  $t_0 = 1$ .

3)  $x = t^3 - t^2 - 5, y = 3t^2 + 1, z = 2t^3 - 16,$   
 $M_0(-1; 13; 0).$

15. Знайти проміжки монотонності функції  $y = 3x^2 - x^3 - 2.$

1)  $y = \sqrt{4x - x^3}, [-2; 2].$

16.  $\max_{[a,b]} f(x) = ?$

2)  $y = \frac{10x}{x^2 + 1}, [0; 3].$

17. Дослідити функцію і побудувати її графік:

1)  $y = 1 - \sqrt[3]{x^2 + 4x + 3}.$  5)  $y = \frac{x + 2}{(x + 1)^2}.$

2)  $y = \frac{2x^3 + 2x^2 - 3x - 1}{2 - 4x^2}.$  6)  $y = x + \frac{\ln x}{x}.$

3)  $y = \frac{x^2 - 4x + 1}{x - 4}.$  7)  $y = \frac{e^{2x-2}}{2x - 2}.$

4)  $y = \frac{1}{\sin x - \cos x}.$  8)  $y = \sqrt[3]{x^2(x + 2)^2}.$

Знайти інтеграли (18—22):

18.1)  $\int \frac{dx}{2x + 3}.$  7)  $\int \cos(7x + 3) dx.$

2)  $\int (1 + 4x)^5 dx.$  8)  $\int \frac{dx}{5x^2 + 3}.$

3)  $\int \frac{\sqrt{3}x dx}{\sqrt{3x^2 - 2}}.$  9)  $\int \frac{dx}{\sqrt{9 - 2x^2}}.$

4)  $\int e^{7-2x} dx.$  10)  $\int \frac{\sqrt[3]{\arctg^2 x}}{1 + x^2} dx.$

5)  $\int \frac{dx}{\sin^2 x \operatorname{ctg}^3 x}.$  11)  $\int \frac{\cos x dx}{3 - \sin x}.$

6)  $\int e^{3-x^2} x dx.$  12)  $\int \frac{\sin 2x}{3 \sin^2 x + 4} dx.$

19.1)  $\int \frac{2x - 5}{7x^2 + 3} dx.$  5)  $\int \frac{(x^2 + 22x + 45) dx}{(x^2 + 4x + 3)(x + 5)}.$

2)  $\int \frac{x^5}{1 - x^3} dx.$  6)  $\int \frac{x^3 + x^2 - 2x - 1}{x^2 - x^3} dx.$

3)  $\int \frac{dx}{2x^2 + x + 2}.$  7)  $\int \frac{(9x - 9) dx}{(x + 1)(x^2 - 4x + 13)}.$

4)  $\int \frac{(x + 4) dx}{2x^2 - 7x + 3}.$  8)  $\int \frac{x^3 - x - 5}{x^4 + 3x^2 - 4} dx.$

20.1)  $\int \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} dx.$  4)  $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[3]{\cos^4 x}} dx.$

2)  $\int (\cos x + 3)^2 dx.$  5)  $\int \frac{dx}{7 \cos^2 x + 2 \sin^2 x}.$

3)  $\int \sin \frac{x}{2} \cos \frac{3x}{2} dx.$  6)  $\int \frac{dx}{8 - 4 \sin x + 7 \cos x}.$

21.1)  $\int \frac{1 + x}{\sqrt{2 - x^2}} dx.$  5)  $\int \frac{dx}{x \sqrt{x^2 - x + 1}}.$

2)  $\int \frac{dx}{\sqrt{1 + x - x^2}}.$  6)  $\int \frac{\sqrt[6]{x-1} - 2}{\sqrt[6]{x-1} + 2} dx.$

3)  $\int \frac{\sqrt{4 - x^2}}{x^4} dx.$  7)  $\int \frac{(3x + 4) dx}{\sqrt{x^2 + 6x + 13}}.$

4)  $\int \frac{\sqrt{x+2}}{x-3} dx.$  8)  $\int \frac{\sqrt[3]{(1+\sqrt{x})^2}}{x \sqrt[6]{x^5}} dx.$

22.1)  $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx.$  4)  $\int \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}} dx.$

2)  $\int \operatorname{arctg} 4x dx.$  5)  $\int (x^2 - x + 1) e^{-x} dx.$

3)  $\int (x - 3) \cos x dx.$  6)  $\int x \sin(x + 3) dx.$

23. Обчислити інтеграли:

1)  $\int_{-\pi}^{\pi} x \sin x \cos x dx.$  4)  $\int_0^{\pi} 2^4 \sin^4 x \cos^4 x dx.$

2)  $\int_4^5 \frac{dx}{(x-1)(x+2)}.$  5)  $\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^6} dx.$

3)  $\int_1^2 \frac{dx}{x^2 + 5x + 4}.$  6)  $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx.$

24. Обчислити інтеграли або довести їх розбіжність:

1)  $\int_4^{\infty} \frac{x dx}{\sqrt{x^2 - 4x + 1}}.$  2)  $\int_0^1 \frac{2x dx}{\sqrt{1 - x^4}}.$

25. Обчислити площу фігури, обмеженої кривими:

1)  $y = \sqrt{e^x - 1}, y = 0, x = \ln 2.$

2)  $\begin{cases} x = 6 \cos t, \\ y = 2 \sin t, \end{cases} y = \sqrt{3} (y \geq \sqrt{3}).$

3)  $\rho = \cos 3\varphi.$

26. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої кривими  $x = 2, y^2 = (x - 1)^3,$  навколо осі  $Ox.$

27. Обчислити площу поверхні, утворену обертанням кривої  $x = \cos t, y = 3 + \sin t$  навколо осі  $Ox.$

## Варіант 9

1. Побудувати графіки функцій:

- 1)  $y = -3 \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$ . 4)  $y = \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{8}\right)$ .  
2)  $y = 2 \arcsin(x - 3)$ . 5)  $y = 3^{x-3}$ ;  
3)  $y = 2 \operatorname{arctg}(x - 2)$ . 6)  $y = \ln(5 - x)$ .

2. Знайти:

а) алгебричну форму  $\frac{z_1}{z_2} + 2z_3 - i^3$ ;

б) тригонометричну форму  $z_3$ ;

в), г)  $(z_1 z_2)^8$  та  $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{10}$ ;

д), е) всі значення  $\sqrt[3]{z_1}$  та  $\sqrt[4]{z_2}$ , якщо:

$$z_1 = 5 - 5i, z_2 = \sqrt{3} + i, z_3 = -5 + 6i.$$

3. Зобразити множину точок  $z \in \mathbb{C}$ :

- 1)  $1 < |z - 1 + i| \leq 2, 0 < \arg z \leq \frac{\pi}{2}$ .  
2)  $|z - 3i| > |z + 2|, |\operatorname{Re} z| > 3$ .  
3)  $z^3 + 4z^2 + 12z + 9 = 0$ .

Знайти границі (4—7):

$$4.1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+4)! - (n+2)!}{(n+3)!}.$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^3 - \sqrt{n^5 + 1}}{\sqrt{4n^6 + 3} - n}.$$

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sqrt{(n+2)(n+1)} - \sqrt{(n-1)(n+3)} \right).$$

$$5.1) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 + 2x - 1}{-x^2 + x + 2}. \quad 6.1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x - \sin 2x}{x^2}.$$

$$2) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 3x + 2}. \quad 2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{\operatorname{tg} 3x}.$$

$$3) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^2 + 3x + 1}{3x^2 + x - 5}. \quad 3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 1}{\ln(1 + 2x)}.$$

$$4) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{7x^2 + 5x + 9}{1 + 4x - x^3}. \quad 4) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos 5x - \cos 3x}{\sin^2 x}.$$

$$5) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - 3x^2 + 2x}{x^2 + 7x + 1}. \quad 5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{12^x - 5^{-3x}}{2 \arcsin x - x}.$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{2x+1} - \sqrt{11}}{2x^2 - 7x - 15}. \quad 6) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{1 - 2 \cos x}{\sin(\pi - 3x)}.$$

$$7) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x}{2x-3} \right)^{3x+1}. \quad 7) \lim_{x \rightarrow 0} (\cos \pi x)^{\frac{1}{x \sin \pi x}}.$$

$$8) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{x+3}{2x-4} \right)^x. \quad 8) \lim_{x \rightarrow 2\pi} (\cos x)^{\frac{\operatorname{ctg} 2x}{\sin 3x}}.$$

$$7.1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3}. \quad 3) \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left( \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} x \right).$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} x^{\frac{1}{\ln(e^x - 1)}}. \quad 4) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} \right)^{\operatorname{tg} x}.$$

8. Визначити порядок і головну частину розкладу  $\alpha(x)$  відносно  $\beta(x)$ :

$$1) \alpha(x) = \frac{3x}{1-x}, \beta(x) = \frac{x}{4+x}, x \rightarrow 0.$$

$$2) \alpha(x) = \sin(x - \sqrt{x}), \beta(x) = 2\sqrt{x}, x \rightarrow 0.$$

$$3) \alpha(x) = 3x - \frac{1}{x+1} + \cos x, \beta(x) = \sqrt{x}, x \rightarrow 0.$$

9. Дослідити функцію на неперервність:

$$1) f(x) = \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}.$$

$$2) f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x}, & x \leq 0, \\ 0, & 0 < x \leq 2, \\ x-2, & x > 2. \end{cases}$$

$$3) f(x) = 6^{\frac{1}{x-3}} + 3 \text{ у точках } x_1 = 3, x_2 = 4.$$

Знайти похідні функцій (10—13):

$$10.1) y = \sqrt[3]{x^4} - \frac{2}{x^3} - \frac{\sqrt{x^3 + 4x - 5}}{e^x}.$$

$$2) y = \sqrt{5x^2 + \operatorname{ctg} \cos 2} + \frac{\operatorname{tg}(11x + 3)}{\cos^2 5x}.$$

$$3) y = 2^{\cos x} \operatorname{arctg} 5x^3 - \frac{\operatorname{th}^4(2x + 5)}{\arccos 3x}.$$

$$4) y = \arccos x^2 \cdot \operatorname{ctg}^2 7x^3 + \frac{\operatorname{arctg}(4x + 1)}{7(x-4)^2}.$$

$$5) y = \operatorname{th}^5 3x \cdot \arcsin \sqrt{x} - (\log_2 x)^{\operatorname{ctg} 7x}.$$

$$6) y = (\arcsin 2x)^{\ln(x+3)} + \frac{(x+1)^8(x-3)^2}{(x+4)^3 \sqrt{(x+2)^5}}.$$

$$11.1) \operatorname{tg} y = 3x + 5y. \quad 2) \operatorname{arctg} y = xy.$$

$$12. \begin{cases} y'_x = ? \\ y''_{xx} = ? \end{cases} : 1) \begin{cases} x = t^3 - 3t, \\ y = 5t^3 - 3t^2. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x = \operatorname{tg} t, \\ y = \frac{1}{\sin^2 t}. \end{cases}$$

$$13.1) y = (2x + 3) \ln^2 x, y^{(5)} = ?$$

$$2) y = \sin 2x + \cos(x + 1), y^{(n)} = ?$$

14. Скласти рівняння дотичної та нормалі до кривої в заданій точці:

$$1) y = 2x^2 - 3x + 1, x_0 = 1.$$

$$2) x = 2 \ln \operatorname{ctg} t + 1, y = \operatorname{tg} t + \operatorname{ctg} t, t_0 = \frac{\pi}{4}.$$

3)  $x = t^2, y = 1 - t, z = t^3, M_0(1; 0; 1)$ .

15. Знайти проміжки монотонності функції  $y = (x - 1)^2(x - 3)^2$ .

16.  $\max_{[a,b]} f(x) = ?$   
 1)  $y = 4 - e^{-x^2}, [0; 1]$ .  
 2)  $y = \sqrt[3]{(x + 1)^2(5 - x)}, [-3; 3]$ .

17. Дослідити функцію і побудувати її графік:

1)  $y = 3\sqrt[3]{(x - 3)^2}$ .      5)  $y = \frac{x^3 - 5x}{5 - 3x^2}$ .  
 2)  $y = x - \ln(1 + x^2)$ .      6)  $y = \frac{(1 - x)^3}{(x - 2)^2}$ .  
 3)  $y = 3 - 3 \ln \frac{x}{x + 4}$ .      7)  $y = \frac{2x + 1}{x^2}$ .  
 4)  $y = e^{\sin x - \cos x}$ .      8)  $y = \sqrt[3]{x^2(x - 2)^2}$ .

Знайти інтеграли (18—22):

18.1)  $\int (1 - 3x)^4 dx$ .      7)  $\int \frac{dx}{3x - 4}$ .  
 2)  $\int \sin(8x - 3) dx$ .      8)  $\int \frac{dx}{5x^2 - 3}$ .  
 3)  $\int \frac{2x dx}{\sqrt{3x^2 - 2}}$ .      9)  $\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2 + 2}}$ .  
 4)  $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{\cos x + 3}}$ .      10)  $\int e^{3-4x} dx$ .  
 5)  $\int \frac{dx}{\cos^2 3x \operatorname{tg}^4 3x}$ .      11)  $\int \frac{\arcsin^5 2x}{\sqrt{1 - 4x^2}} dx$ .  
 6)  $\int e^{4x^2+5} x dx$ .      12)  $\int \frac{e^{2x}}{5 + e^{2x}} dx$ .  
 19.1)  $\int \frac{3x + 2}{2x^2 + 1} dx$ .      5)  $\int \frac{(6x^2 + 6x - 6) dx}{(x + 1)(x^2 + x - 2)}$ .  
 2)  $\int \frac{x^3}{x^2 + 3} dx$ .      6)  $\int \frac{2x^2 - 5x + 1}{x^3 - 2x^2 + x} dx$ .  
 3)  $\int \frac{dx}{3x^2 - 12x + 13}$ .      7)  $\int \frac{7x - 10}{x^3 + 8} dx$ .  
 4)  $\int \frac{(5x - 2) dx}{2x^2 - 5x + 2}$ .      8)  $\int \frac{x^3 - x - 1}{x^4 + x^2} dx$ .  
 20.1)  $\int \operatorname{tg}^3 \frac{x}{2} dx$ .      4)  $\int \frac{3 \sin^3 x}{\cos^4 x} dx$ .  
 2)  $\int \cos^3(x + 3) dx$ .      5)  $\int \frac{\sin 2x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx$ .  
 3)  $\int \cos 5x \cos x dx$ .      6)  $\int \frac{dx}{3 + 5 \cos x}$ .

21.1)  $\int \frac{2x - 3}{\sqrt{9 - x^2}} dx$ .      5)  $\int \frac{(3x - 1) dx}{\sqrt{2x^2 - 5x + 1}}$ .

2)  $\int \frac{dx}{\sqrt{5x^2 - 10x + 4}}$ .      6)  $\int \frac{\sqrt[3]{x + 3}}{\sqrt[6]{x + 3} + 1} dx$ .

3)  $\int \frac{dx}{\sqrt{(1 + x^2)^3}}$ .      7)  $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + x - 1}}$ .

4)  $\int \frac{dx}{\sqrt{x + 3}}$ .      8)  $\int \frac{\sqrt{1 + \sqrt[3]{x^2}}}{x^2} dx$ .

22.1)  $\int x \ln \frac{1 - x}{1 + x} dx$ .      4)  $\int x \operatorname{arctg} x dx$ .

2)  $\int (x^2 - x + 1)e^x dx$ .      5)  $\int \arcsin 5x dx$ .

3)  $\int (x + 4) \sin 2x dx$ .      6)  $\int x \cos(x + 4) dx$ .

23. Обчислити інтеграли:

1)  $\int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}} x e^{-3x} dx$ .      4)  $\int_0^{2\pi} \sin^2 x \cos^6 x dx$ .

2)  $\int_0^2 \frac{x dx}{x^2 + 3x + 2}$ .      5)  $\int_0^1 \sqrt{(1 - x^2)^3} dx$ .

3)  $\int_0^{\pi} \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{3} dx$ .      6)  $\int_0^5 \frac{x dx}{\sqrt{x + 4}}$ .

24. Обчислити інтеграли або довести їх розбіжність:

1)  $\int_{-1}^{\infty} \frac{dx}{\pi(x^2 + 4x + 5)}$ .      2)  $\int_0^1 \frac{x dx}{1 - x^4}$ .

25. Обчислити площу фігури, обмеженої кривими:

1)  $y = \frac{1}{x\sqrt{1 + \ln x}}, y = 0 (1 \leq x \leq e^3)$ .

2)  $\begin{cases} x = 3(t - \sin t), \\ y = 3(1 - \cos t), \end{cases} y = 3 (y \geq 3, 0 < x < 6\pi)$ .

3)  $\rho = \cos \varphi, \rho = \sqrt{2} \cos(\varphi - \frac{\pi}{4}),$   
 $(-\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2})$ .

26. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої кривими  $y = 0, x = \sqrt{1 - y^2}, y = \sqrt{\frac{3}{2}}x$ , навколо осі  $Ox$ .

27. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням кривої  $3x = y^3 (0 \leq y \leq 2)$  навколо осі  $Oy$ .

## Варіант 10

1. Побудувати графіки функцій:

- 1)  $y = \frac{1}{2} \cos\left(3x + \frac{\pi}{3}\right)$ . 4)  $y = \operatorname{ctg}\left(\frac{1}{3}x - \frac{\pi}{3}\right)$ .  
2)  $y = 3 \arccos(x - 1)$ . 5)  $y = 3^{x+2}$ .  
3)  $y = 3 \operatorname{arctg}(x + 2)$ . 6)  $y = \lg(x + 3)$ .

2. Знайти:

а) алгебричну форму  $\frac{z_1}{z_2} + 2z_3 - i^3$ ;

б) тригонометричну форму  $z_3$ ;

в), г)  $(z_1 z_2)^8$  та  $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{10}$ ;

д), е) всі значення  $\sqrt[3]{z_1}$  та  $\sqrt[4]{z_2}$ , якщо:

$$z_1 = 6 + 6i, z_2 = -1 + \sqrt{3}i, z_3 = -6 - 7i.$$

3. Зобразити множину точок  $z \in \mathbb{C}$ :

- 1)  $2 < |z + 1 - i| \leq 3, \frac{\pi}{2} < \arg z \leq \pi$ .  
2)  $|z - 3| > |z - i|, |\operatorname{Im} z| > 1$ .  
3)  $z^3 + 3z^2 + 4z + 2 = 0$ .

Знайти границі (4—7):

4.1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n-1)! + (3n+1)!}{(3n)!(n-1)}$ .

2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{5n+2} - \sqrt[3]{8n^3+5}}{\sqrt[4]{n+7} - n}$ .

3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2(\sqrt{n(n^4-1)} - \sqrt{n^5-8})$ .

5.1)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^2 - 11x + 6}{2x^2 - 5x - 3}$ . 6.1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x \operatorname{tg} x}$ .

2)  $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{2x^2 + 7x - 4}{x^3 + 64}$ . 2)  $\lim_{x \rightarrow 2\pi} \frac{\sin 7x - \sin 3x}{e^{x^2} - e^{4\pi^2}}$ .

3)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 3x^2 + 10}{7x^3 + 2x + 1}$ . 3)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 2x}{\sin(2\pi x + 20\pi)}$ .

4)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 + x^2 - 6}{2x^2 + 3x + 1}$ . 4)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sin(x-3)}{x^2 - 5x + 6}$ .

5)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 - 7x + 5}{4x^5 - 3x^3 + 2}$ . 5)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{7x} - e^{-2x}}{\sin x - 2x}$ .

6)  $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{\sqrt{3x+17} - \sqrt{2}}{x^2 + 8x + 15}$ . 6)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x^2}{\sin \pi x}$ .

7)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-7}{x}\right)^{2x}$ . 7)  $\lim_{x \rightarrow 2\pi} (\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 2x}}$ .

8)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x+1}{3x-1}\right)^{x-1}$ . 8)  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin^2 3x)^{\frac{1}{\ln \cos x}}$ .

7.1)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5x^3 - x - 2x}}{\sqrt[5]{x^2 - 1}}$ ; 3)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{e^x - x - 1}$ .

2)  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x \cdot \ln \operatorname{ctg} x$ . 4)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x}$ .

8. Визначити порядок і головну частину розкладу  $\alpha(x)$  відносно  $\beta(x)$ :

1)  $\alpha(x) = \frac{3x^2}{2+x}, \beta(x) = 7x^2, x \rightarrow 0$ .

2)  $\alpha(x) = \arcsin(2 - \sqrt{x}), \beta(x) = 4 - x, x \rightarrow 4$ .

3)  $\alpha(x) = \frac{1}{x^2 - x + 7}, \beta(x) = \frac{1}{x}, x \rightarrow \infty$ .

9. Дослідити функцію на неперервність:

1)  $f(x) = \frac{x}{\sin x}$ .

2)  $f(x) = \begin{cases} 2x^2, & x \leq 0, \\ x, & 0 < x \leq 1, \\ 2+x, & x > 1. \end{cases}$

3)  $f(x) = 7^{\frac{1}{5-x}} + 1$  у точках  $x_1 = 4, x_2 = 5$ .

Знайти похідні функцій (10—13):

10.1)  $y = \sqrt[3]{x^7} - \frac{7}{x^4} + \frac{e^{\operatorname{ctg} 5x}}{(x+4)^3}$ .

2)  $y = \sqrt[3]{4x^2 - \sqrt[3]{\operatorname{ctg} 2}} - \frac{\operatorname{ctg}^2 5x}{\ln(7x-2)}$ .

3)  $y = \log_4 x \arcsin^4 x + \frac{\sqrt[3]{\operatorname{arctg} 2x}}{\operatorname{sh}^2 x}$ .

4)  $y = 5^{-x^2} \arccos 5x^4 - \frac{\arcsin(2x-7)}{3(x+2)^4}$ .

5)  $y = \operatorname{cth}^2 x \cdot \arccos \frac{1}{x} + (\operatorname{sh} 3x)^{\operatorname{arctg}(2x+1)}$ .

6)  $y = (\arccos 3x)^{\operatorname{tg} 5x} - \frac{(x+2)^3(x-7)^4}{(x+1)^2 \sqrt[3]{(x-1)^4}}$ .

11.1)  $y = e^y + 4x$ . 2)  $\cos xy = \ln x$ .

12.  $\begin{matrix} y'_x = ? \\ y''_{xx} = ? \end{matrix} : 1) \begin{cases} x = e^t \cos t, \\ y = e^t \sin t. \end{cases} 2) \begin{cases} x = \sqrt{t-1}, \\ y = \frac{t}{\sqrt{t-1}}. \end{cases}$

13.1)  $y = (1+x^2) \sin(2x+1), y^{(6)} = ?$

2)  $y = \frac{2x+5}{3x+1}, y^{(n)} = ?$

14. Скласти рівняння дотичної та нормалі до кривої у заданій точці:

1)  $y = 1 - \frac{3}{x} + \frac{6}{x^2}, x_0 = 3$ .

2)  $x = \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{4}t^4, y = \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3, t_0 = 0$ .

3)  $x = e^t, y = e^{-t}, z = t\sqrt{2}, M_0(e; e^{-1}; \sqrt{2})$ .

15. Знайти проміжки монотонності функції  $y = \frac{x^3 + 3x^2}{4} - 5$ .

16.  $\max_{[a,b]} f(x) = ?$   
 1)  $y = x + \frac{4}{x^2}, [1; 2]$ .  
 2)  $y = 2x^2 + \frac{108}{x}, [2; 4]$ .

17. Дослідити функцію і побудувати її графік:

1)  $y = -\frac{6\sqrt[3]{6x^2}}{x^2 + 4x + 12}$ . 5)  $y = \frac{x^2 - 6x + 4}{3x - 2}$ .

2)  $y = -(2x + 1)e^{2(x+1)}$ . 6)  $y = \frac{x^3}{x^2 - x + 1}$ .

3)  $y = \sqrt[3]{(x^2 - 2x - 3)^2}$ . 7)  $y = xe^x$ .

4)  $y = \arctg \frac{\sin x - \cos x}{\sqrt{2}}$ . 8)  $y = \frac{(x-1)^2}{x^2}$ .

Знайти інтеграли (18—22):

18.1)  $\int \sqrt{1 + 3x} dx$ . 7)  $\int \frac{dx}{4 - 3x}$ .

2)  $\int \sin(3 + 4x) dx$ . 8)  $\int \frac{dx}{\sqrt{3 - 5x^2}}$ .

3)  $\int \frac{2x dx}{\sqrt{7 - 2x^2}}$ . 9)  $\int \frac{dx}{5x^2 - 4}$ .

4)  $\int e^{10x+2} dx$ . 10)  $\int \frac{\sqrt[5]{\ln^2(x+1)}}{x+1} dx$ .

5)  $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt[3]{\cos x + 1}}$ . 11)  $\int \frac{\sqrt{\operatorname{ctg} 7x}}{\sin^2 7x} dx$ .

6)  $\int \frac{4x^3}{7 + 2x^4} dx$ . 12)  $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2} e^{\arcsin x}}$ .

19.1)  $\int \frac{1 - 5x}{1 - 25x^2} dx$ . 5)  $\int \frac{(37x - 85) dx}{(x^2 + 2x - 3)(x - 4)}$ .

2)  $\int \frac{4x^2 - 2x + 1}{2x - 1} dx$ . 6)  $\int \frac{4x^4 + 8x^3 - x - 2}{x(x+1)^2} dx$ .

3)  $\int \frac{dx}{2x^2 + 3x}$ . 7)  $\int \frac{(4x^2 + 3x + 17) dx}{(x-1)(x^2 + 2x + 5)}$ .

4)  $\int \frac{(4x - 1) dx}{4x^2 - 4x + 5}$ . 8)  $\int \frac{(2x^2 - 7x + 10) dx}{(x-1)^2(x^2 + 4)}$ .

20.1)  $\int \operatorname{tg}^2 4x dx$ . 4)  $\int \sin^5 x \cos^4 x dx$ .

2)  $\int \sin^3 \frac{4x}{5} dx$ . 5)  $\int \frac{dx}{\cos x \sin^3 x}$ .

3)  $\int \cos 2x \cos 3x dx$ . 6)  $\int \frac{dx}{2 \sin x + 3 \cos x + 3}$ .

21.1)  $\int \frac{3x - 2}{\sqrt{3x^2 + 1}} dx$ . 5)  $\int \frac{5x + 2}{\sqrt{x^2 + 3x - 4}} dx$ .

2)  $\int \frac{dx}{\sqrt{2x + 3 - x^2}}$ . 6)  $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - x - 1}}$ .

3)  $\int \frac{\sqrt{x^2 + 4}}{x^4} dx$ . 7)  $\int \frac{dx}{\sqrt[6]{x-1} + \sqrt[3]{x-1}}$ .

4)  $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(x+3)}$ . 8)  $\int \frac{\sqrt{1+x}}{x^2 \sqrt{x}} dx$ .

22.1)  $\int x \sin 3x dx$ . 4)  $\int x \operatorname{arctg} x dx$ .

2)  $\int x \operatorname{ctg}^2 x dx$ . 5)  $\int \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) dx$ .

3)  $\int (x + 1)e^{-x} dx$ . 6)  $\int \arccos 7x dx$ .

23. Обчислити інтеграли:

1)  $\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x^2} dx$ . 4)  $\int_0^{2\pi} \cos^8 \frac{x}{4} dx$ .

2)  $\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^1 \frac{dx}{x^2 \sqrt{(1+x^2)^3}}$ . 5)  $\int_0^1 \frac{2x+3}{(x-2)^3} dx$ .

3)  $\int_1^2 \frac{x-5}{x^2-2x+2} dx$ . 6)  $\int_0^4 \frac{dx}{1 + \sqrt{2x+1}}$ .

24. Обчислити інтеграли або довести їх розбіжність:

1)  $\int_{-1}^{\infty} \frac{x dx}{x^2 + 4x + 5}$ . 2)  $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos 3x dx}{\sqrt[6]{(1 - \sin 3x)^5}}$ .

25. Обчислити площу фігури, обмеженої кривими:

1)  $y = \arccos x, y = 0, x = 0$ .

2)  $\begin{cases} x = 8\sqrt{2} \cos^3 t, \\ y = \sqrt{2} \sin^3 t, \end{cases} x = 4 (x \geq 4)$ .

3)  $\rho = \sin \varphi, \rho = \sqrt{2} \cos(\varphi - \frac{\pi}{4}),$   
 $(0 \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{4})$ .

26. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої кривими  $y = 0, y = \sin x, 0 \leq x \leq \pi$ , навколо осі  $Ox$ .

27. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням кривої  $y = \frac{1}{3}x^3, x \in [-1; 1]$  навколо осі  $Ox$ .

## Варіант 11

1. Побудувати графіки функцій:

1)  $y = -2 \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$ . 4)  $y = \operatorname{tg}\left(\frac{1}{4}x + \frac{\pi}{16}\right)$ .

2)  $y = \frac{1}{2} \arcsin\left(x + \frac{1}{3}\right)$ . 5)  $y = 4^{x-1}$ .

3)  $y = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}\left(x - \frac{1}{2}\right)$ . 6)  $y = -\lg(3 - x)$ .

2. Знайти:

а) алгебричну форму  $\frac{z_1}{z_2} + 2z_3 - i^6$ ;

б) тригонометричну форму  $z_3$ ;

в), г)  $(z_1 z_2)^8$  та  $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{10}$ ;

д), е) всі значення  $\sqrt[3]{z_1}$  та  $\sqrt[4]{z_2}$ , якщо:

$z_1 = -9 - 9i, z_2 = \sqrt{3} - i, z_3 = 2 + 3i$ .

3. Зобразити множину точок  $z \in \mathbb{C}$ :

1)  $|z| > 4, \frac{\pi}{4} < \arg z \leq \frac{3\pi}{4}$ .

2)  $|z + 3| < |z + i|, |\operatorname{Re} z| < 1$ .

3)  $z^3 + 5z^2 + 20z + 16 = 0$ .

Знайти границі (4—7):

4.1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n}\right)}{1 + 3 + \dots + (2n-1)}$ .

2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\sqrt[4]{3n+1} + \sqrt{81n^4 - n^2 + 1}}{(n + \sqrt[3]{n})\sqrt{5-n+n^2}}$ .

3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt[3]{5+8n^3} - 2n)$ .

5.1)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 + x - 6}$ . 6.1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\operatorname{tg} x} - \frac{1}{\sin x}\right)$ .

2)  $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{4x^2 + 19x - 5}{2x^2 + 11x + 5}$ . 2)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x - \cos x}{\operatorname{tg} 2x^2}$ .

3)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 5x - 7}{2x^2 - x + 10}$ . 3)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-7x)}{\sin(\pi(x+7))}$ .

4)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 5x + 7}{3x^4 - 2x^2 + x}$ . 4)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin 7\pi x}{\sin 8\pi x}$ .

5)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^5 + 6x^4 - x^3}{2x^2 + 6x + 1}$ . 5)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{\ln \operatorname{tg} x}$ .

6)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 2} - \sqrt{2}}{\sqrt{x^2 + 1} - 1}$ . 6)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{5x} - 2^{7x}}{\arcsin 2x - x}$ .

7)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x+4}\right)^{3x+2}$ . 7)  $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{6-x}{3}\right)^{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{6}}$ .

8)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x-3}{x+4}\right)^{x+3}$ . 8)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right)^{\operatorname{ctg} x}$ .

7.1)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{1}{x^2}} - 1}{2 \operatorname{arctg} x^2 - \pi}$ . 3)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{1 - 2 \sin x}{\cos 3x}$ .

2)  $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x)^{2 \sin x}$ . 4)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3^{x^2} + 2x)^{\frac{1}{x}}$ .

8. Визначити порядок і головну частину розкладу  $\alpha(x)$  відносно  $\beta(x)$ :

1)  $\alpha(x) = 2x^3, \beta(x) = \frac{5x^3}{4-x}, x \rightarrow 0$ .

2)  $\alpha(x) = e^x - 1, \beta(x) = x^2, x \rightarrow 0$ .

3)  $\alpha(x) = 10x^3 - 3x, \beta(x) = x, x \rightarrow 0$ .

9. Дослідити функцію на неперервність:

1)  $f(x) = \frac{x}{|x-2|}$ .

2)  $f(x) = \begin{cases} \sin x, & x < 0, \\ x, & 0 \leq x \leq 2, \\ 0, & x > 2. \end{cases}$

3)  $f(x) = \frac{x-3}{x+4}$  у точках  $x_1 = -5, x_2 = -4$ .

Знайти похідні функцій (10—13):

10.1)  $y = 2\sqrt{x^3} - \frac{2}{x^5} - \frac{\sqrt{2x-x^2}}{e^x}$ .

2)  $y = \sqrt{2x^2 + \frac{1}{3} \cos \operatorname{tg} \frac{1}{2}} + \frac{\operatorname{tg}^2(x-2)}{\lg(x+3)}$ .

3)  $y = 3^{\operatorname{tg} x} \arcsin 7x^4 - \frac{\arcsin^2(4x-1)}{\operatorname{th}(5x-3)}$ .

4)  $y = \operatorname{arctg}^4 x \cdot \cos 7x^4 + \frac{2 \lg(4x+5)}{(x+6)^4}$ .

5)  $y = \operatorname{sh}^4 2x \cdot \operatorname{arccos} x^2 - (\operatorname{ch} 3x)^{\operatorname{ctg} \frac{1}{x}}$ .

6)  $y = (\operatorname{arctg} 5x)^{\log_2 x} + \frac{(x+1)^2 \sqrt{(x+4)^3}}{(x-1)^2 (x+3)^5}$ .

11.1)  $xy = \operatorname{ctg} y$ . 2)  $a^{\frac{x}{y}} = \left(\frac{x}{y}\right)^a$ .

12.  $\begin{matrix} y'_x = ? \\ y''_{xx} = ? \end{matrix} : 1) \begin{cases} x = \ln t, \\ y = t \ln t. \end{cases} 2) \begin{cases} x = \sqrt{t-1}, \\ y = \sqrt[3]{t-1}. \end{cases}$

13.1)  $y = x^3 \ln x, y^{(5)} = ?$

2)  $y = 2^{3x+5}, y^{(n)} = ?$

14. Скласти рівняння дотичної та нормалі до кривої в заданій точці:

1)  $y = \sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x}, x_0 = 64$ .

2)  $x = at \cos t, y = at \sin t, t_0 = \frac{\pi}{2}$ .

$$3) x = 4 \sin^2 t, y = 4 \sin t \cos t,$$

$$z = 2 \cos^2 t, t_0 = \frac{\pi}{4}.$$

15. Знайти проміжки монотонності функції  $y = 6x - 8x^3$ .

$$1) y = xe^x, [-2; 0].$$

$$16. \max_{[a,b]} f(x) = ? \quad 2) y = x + \frac{4}{(x+2)^3}, [-1; 2].$$

17. Дослідити функцію і побудувати її графік:

$$1) y = \frac{2-x^2}{\sqrt{9x^2-4}}. \quad 5) y = x^2 - 2 \ln x.$$

$$2) y = \ln(\sin x - \cos x). \quad 6) y = x^2 e^{\frac{1}{x}}.$$

$$3) y = \sqrt[3]{x^2(x+4)^2}. \quad 7) y = \frac{x^2}{(x-1)^2}.$$

$$4) y = 4x + 6\sqrt[3]{(x+2)^2}. \quad 8) y = \frac{e^{2(x+2)}}{2(x+2)}.$$

Знайти інтеграли (18—22):

$$18.1) \int \sqrt{5-4x} dx. \quad 7) \int \frac{dx}{3x+4}.$$

$$2) \int \sin(3-4x) dx. \quad 8) \int \frac{dx}{3x^2-7}.$$

$$3) \int \frac{dx}{\sqrt{5x^2+3}}. \quad 9) \int \frac{xdx}{2x^2-7}.$$

$$4) \int e^{2x-10} dx. \quad 10) \int \frac{\sqrt{\ln^5(x+1)}}{x+1} dx.$$

$$5) \int e^{5x^2-3} x dx. \quad 11) \int \frac{\cos x}{\sqrt{4-\sin x}} dx.$$

$$6) \int \frac{\sqrt[5]{\operatorname{ctg} 3x}}{\sin^2 3x} dx. \quad 12) \int \frac{\arccos^3 2x}{\sqrt{1-4x^2}} dx.$$

$$19.1) \int \frac{4x-3}{3x^2-4} dx. \quad 5) \int \frac{(3x^2+3x-24) dx}{(x^2-x-2)(x-3)}.$$

$$2) \int \frac{x^4}{x^2-3} dx. \quad 6) \int \frac{4x-1}{x(x-1)^2} dx.$$

$$3) \int \frac{dx}{x^2-5x+6}. \quad 7) \int \frac{(3x+13) dx}{(x-1)(x^2+2x+5)}.$$

$$4) \int \frac{(x+1) dx}{2x^2+x+1}. \quad 8) \int \frac{x^5+4x^3+4x+2}{x^4+4x^2} dx.$$

$$20.1) \int \operatorname{ctg}^3 x dx. \quad 4) \int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[5]{\cos^3 x}} dx.$$

$$2) \int \sin 5x \sin 7x dx. \quad 5) \int \frac{dx}{1+\sin^2 x}.$$

$$3) \int (1-\cos x)^2 dx.$$

$$6) \int \frac{dx}{5+4 \sin x}.$$

$$21.1) \int \frac{x-1}{\sqrt{5-2x^2}} dx.$$

$$5) \int \frac{(x-4) dx}{\sqrt{2x^2-x+7}}.$$

$$2) \int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-8x+3}}.$$

$$6) \int \frac{dx}{x\sqrt{1+x-x^2}}.$$

$$3) \int \frac{\sqrt{(4-x^2)^3}}{x^6} dx.$$

$$7) \int \frac{\sqrt{x+3}}{1+\sqrt[3]{x+3}} dx.$$

$$4) \int \frac{1+x}{x+\sqrt{x}} dx.$$

$$8) \int \frac{\sqrt[4]{(1+\sqrt{x})^3}}{x^8 \sqrt{x^7}} dx.$$

$$22.1) \int \ln(x+4) dx.$$

$$4) \int \frac{x \arccos 2x}{\sqrt{1-4x^2}} dx.$$

$$2) \int x^2 e^{-x} dx.$$

$$5) \int (x+5) \sin x dx.$$

$$3) \int x \operatorname{arctg} x dx.$$

$$6) \int x \cos(x-7) dx.$$

23. Обчислити інтеграли:

$$1) \int_1^{e^2} \sqrt{x} \ln x dx.$$

$$4) \int_0^{\pi} 2^4 \sin^8 \frac{x}{2} dx.$$

$$2) \int_2^3 \frac{dx}{(x-1)^2(x+1)}.$$

$$5) \int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} dx.$$

$$3) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x dx}{\sin^2 x + 1}.$$

$$6) \int_{\frac{2}{3}}^{\frac{7}{3}} \frac{xdx}{\sqrt{2+3x}}.$$

24. Обчислити інтеграли або довести їх розбіжність:

$$1) \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} 2x}{\pi(1+4x^2)} dx.$$

$$2) \int_0^{\frac{2}{3}} \frac{\sqrt[3]{\ln(2-3x)}}{2-3x} dx.$$

25. Обчислити площі фігур, обмежених кривими:

$$1) y = (x+1)^2, y^2 = x+1.$$

$$2) \begin{cases} x = 2\sqrt{2} \cos t, \\ y = 3\sqrt{2} \sin t, \end{cases} y = 3 (y \geq 3).$$

$$3) \rho = 6 \cos 3\varphi, \rho = 3 (\rho \geq 3).$$

26. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої кривими  $y^2 = 4x$ ,  $x^2 = 4y$ , навколо осі  $Ox$ .

27. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням кривої  $x = \cos t, y = 1 + \sin t$  навколо осі  $Ox$ .

## Варіант 12

1. Побудувати графіки функцій:

1)  $y = 2 \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ . 4)  $y = \operatorname{ctg}\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ .

2)  $y = \frac{1}{3} \arccos(x - 1)$ . 5)  $y = \left(\frac{1}{4}\right)^{x-1}$ .

3)  $y = -\operatorname{arctg}(x + 1)$ . 6)  $y = \ln(2x - 5)$ .

2. Знайти:

а) алгебричну форму  $\frac{z_1}{z_2} + 2z_3 - i^8$ ;

б) тригонометричну форму  $z_3$ ;

в), г)  $(z_1 z_2)^8$  та  $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{10}$ ;

д), е) всі значення  $\sqrt[3]{z_1}$  та  $\sqrt[4]{z_2}$ , якщо:

$z_1 = -7 + 7i, z_2 = -2\sqrt{3} - 2i, z_3 = 7 - 8i$ .

3. Зобразити множину точок  $z \in \mathbb{C}$ :

1)  $|z - 1| > 2, \frac{\pi}{2} < \arg z \leq \frac{3\pi}{2}$ .

2)  $|z + 3| > |z - 3|, |\operatorname{Im} z| < 2$ .

3)  $z^3 - 6z^2 + 16z - 16 = 0$ .

Знайти границі (4—7):

4.1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{3^n}}{1 + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{5^n}}$ .

2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+3} - \sqrt{n^2-3}}{\sqrt[3]{n^5-4} - \sqrt[4]{n^4+1}}$ .

3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2(\sqrt[3]{5+n^3} - \sqrt[3]{3+n^3})$ .

5.1)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x - 2}{x^3 + 1}$ . 6.1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 3x - \operatorname{tg} x^2}{x^2}$ .

2)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x^3 + x - 2}$ . 2)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 6x}{4x^2}$ .

3)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 + 2x + 1}{x^4 - x^3 + 2x}$ . 3)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x + \frac{5\pi}{2}) \operatorname{tg} x}{\arcsin 2x^2}$ .

4)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 + 4x^2 - 7x}{2x^2 + 7x - 3}$ . 4)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(5 - 2x)}{\sqrt{10 - 3x} - 2}$ .

5)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4 - 3x - 2x^2}{4x^4 + 5x}$ . 5)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{5x} - e^x}{\arcsin x + x^3}$ .

6)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{7-x} - \sqrt{7}}{\sqrt{7x}}$ . 6)  $\lim_{x \rightarrow b} \frac{a^x - a^b}{x - b}$ .

7)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+1}{2x-1}\right)^{x+2}$ . 7)  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - x^3)^{\frac{1}{\ln(1+\pi x^3)}}$ .

8)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x-3}{7x+4}\right)^x$ . 8)  $\lim_{x \rightarrow 4\pi} (\cos x)^{\frac{\operatorname{ctg} x}{\sin 4x}}$ .

7.1)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{20} - 2x + 1}{x^{30} - 2x + 1}$ . 3)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1 - 2x}{\ln(1+2x) - 2x}$ .

2)  $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x)^{\cos \frac{\pi x}{2}}$ . 4)  $\lim_{x \rightarrow +0} (\operatorname{arctg} x)^{\operatorname{tg} x}$ .

8. Визначити порядок і головну частину розкладу  $\alpha(x)$  відносно  $\beta(x)$ :

1)  $\alpha(x) = \frac{x^2}{5+x}, \beta(x) = \frac{4x^2}{x-1}, x \rightarrow 0$ .

2)  $\alpha(x) = \ln(1 + \sqrt{x}), \beta(x) = 1 + \sqrt[3]{x-1}, x \rightarrow 0$ .

3)  $\alpha(x) = \sqrt[3]{x} + 2, \beta(x) = x + 8, x \rightarrow -8$ .

9. Дослідити функцію на неперервність:

1)  $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{x}{x-1}$ .

2)  $f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \frac{\pi}{2} < x < \pi, \\ 2, & x \geq \pi. \end{cases}$

3)  $f(x) = \frac{x+5}{x-2}$  у точках  $x_1 = 3, x_2 = 2$ .

Знайти похідні функцій (10—13):

10.1)  $y = \sqrt[5]{x^2} + \frac{6}{x^2} - \frac{e^{3x}}{\sqrt{3x^2 - 4x - 7}}$ .

2)  $y = \sqrt[5]{3x^2 + \ln \sin \frac{1}{2}} + \frac{\sin^3(5x+1)}{\operatorname{tg}(3x-2)}$ .

3)  $y = 5^{x^2} \arccos 2x^3 - \frac{\operatorname{ch}^2(4x+2)}{\operatorname{arctg} x^3}$ .

4)  $y = \operatorname{ctg} 5x \cdot \operatorname{arctg} x^3 + \frac{5 \ln(5x+7)}{(x-7)^2}$ .

5)  $y = \operatorname{ch}^3 x \cdot \operatorname{arctg} 3x - (\arcsin 5x)^{\operatorname{tg} \sqrt{x}}$ .

6)  $y = (\operatorname{arctg} 7x)^{\lg(x+1)} + \frac{(x+2)^2 \sqrt[3]{(x-1)^7}}{(x+1)^5 (x-5)^3}$ .

11.1)  $\ln y - \frac{y}{x} = 7$ . 2)  $2y \ln y = x$ .

12.  $\begin{matrix} y'_x = ? \\ y''_{xx} = ? \end{matrix} : 1) \begin{cases} x = t^4, \\ y = \ln t. \end{cases} 2) \begin{cases} x = \frac{\cos t}{1 + 2 \cos t}, \\ y = \frac{\sin t}{1 + 2 \cos t}. \end{cases}$

13.1)  $y = (4x+3)2^{-x}, y^{(5)} = ?$

2)  $y = \sin(x+1) + \cos 2x, y^{(n)} = ?$

14. Скласти рівняння дотичної та нормалі до кривої в заданій точці:

1)  $y = \frac{x^3 + 2}{x^3 - 2}, x_0 = 2$ .

2)  $x = \sin^2 t, y = \cos^2 t, t_0 = \frac{\pi}{6}$ .

3)  $x = \frac{1}{2}t^2, y = \frac{1}{3}t^3, z = \frac{1}{4}t^4, M_0(2; \frac{8}{3}; 4)$ .

15. Знайти проміжки монотонності функції  $y = 16x^2(x-1)^2$ .

1)  $y = (x-2)e^x, [-2; 1]$ .

16.  $\max_{[a,b]} f(x) = ?$

2)  $y = \sqrt[3]{2x^2(x-3)}, [-1; 6]$ .

17. Дослідити функцію і побудувати її графік:

1)  $y = \frac{3\sqrt[3]{6(x-4)^2}}{x^2 - 4x + 12}$ .

5)  $y = \left(\frac{x}{x+2}\right)^2$ .

2)  $y = \frac{4x^3 - 3x}{4x^2 - 1}$ .

6)  $y = \frac{8}{(x-1)^2 + 4}$ .

3)  $y = \ln \frac{x}{x-2} - 2$ .

7)  $y = x^3 e^{-\frac{x}{2}}$ .

4)  $y = \frac{1}{(\cos x + \sin x)^2}$ .

8)  $y = \sqrt[3]{x^2(x-4)^2}$ .

Знайти інтеграли (18—22):

18.1)  $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{5+3x}}$ .

7)  $\int \cos(4x+3)dx$ .

2)  $\int \frac{dx}{4x-2}$ .

8)  $\int \frac{xdx}{3x^2+8}$ .

3)  $\int \frac{dx}{\sqrt{4-7x^2}}$ .

9)  $\int \frac{\sqrt{\ln^2(x+1)}}{x+1} dx$ .

4)  $\int \frac{dx}{3x^2+7}$ .

10)  $\int \frac{\arctg^7 3x}{1+9x^2} dx$ .

5)  $\int e^{4x+3} dx$ .

11)  $\int \frac{\sin 3x}{\cos^2 3x} dx$ .

6)  $\int e^{1-4x^2} x dx$ .

12)  $\int \frac{\tg^4 7x}{\cos^2 7x} dx$ .

19.1)  $\int \frac{2x+3}{1-3x^2} dx$ .

5)  $\int \frac{2x^4 - 7x^3 + 3x + 20}{(x-2)(x^2 - 2x - 3)} dx$ .

2)  $\int \frac{x^3 + 5x}{x^2 + 1} dx$ .

6)  $\int \frac{3x - x^2 - 2}{x(x+1)^2} dx$ .

3)  $\int \frac{dx}{2x-3-4x^2}$ .

7)  $\int \frac{(x^2 - 5x + 4)dx}{(x+2)(x^2 - 2x + 10)}$ .

4)  $\int \frac{(x+1)dx}{3x^2 - 2x - 8}$ .

8)  $\int \frac{x^3 - x + 2}{x^4 - x^2} dx$ .

20.1)  $\int \operatorname{ctg}^2 5x dx$ .

4)  $\int \sqrt[3]{\cos^2 x \sin^3 x} dx$ .

2)  $\int \sin^2(2x-1) dx$ .

5)  $\int \frac{dx}{4 \sin x (\sin x + 2 \cos x)}$ .

3)  $\int \sin 4x \cos 2x dx$ .

6)  $\int \frac{dx}{8 + 4 \cos x}$ .

21.1)  $\int \frac{5x+1}{\sqrt{x^2-6}} dx$ .

5)  $\int \frac{(2x-1)dx}{\sqrt{x^2-3x+4}}$ .

2)  $\int \frac{dx}{\sqrt{1+2x-x^2}}$ .

6)  $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x-2}}$ .

3)  $\int \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^5}}$ .

7)  $\int \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}{\sqrt{x} + \sqrt[6]{x}} dx$ .

4)  $\int \frac{xdx}{\sqrt{x-1}}$ .

8)  $\int \frac{\sqrt[4]{(1+\sqrt[3]{x})^3}}{x^{12}\sqrt{x^7}} dx$ .

22.1)  $\int x^2 e^{3x} dx$ .

4)  $\int \arccos 2x dx$ .

2)  $\int \frac{xdx}{\sin^2 x}$ .

5)  $\int \frac{x \ln(x + \sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}} dx$ .

3)  $\int x \sin(x-5) dx$ .

6)  $\int (x-5) \cos x dx$ .

23. Обчислити інтеграли:

1)  $\int_0^1 \operatorname{arctg} \sqrt{x} dx$ .

4)  $\int_{-\pi}^0 2^8 \sin^6 x \cos^2 x dx$ .

2)  $\int_0^1 \frac{dx}{(x^2+3)^{\frac{3}{2}}}$ .

5)  $\int_3^5 \frac{(x^2+2)dx}{(x+1)^2(x-1)}$ .

3)  $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \operatorname{tg}^4 x dx$ .

6)  $\int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{dx}{e^x - e^{-x}}$ .

24. Обчислити інтеграли або довести їх розбіжність:

1)  $\int_{\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{16dx}{\pi(4x^2+4x+5)}$ .

2)  $\int_{-\frac{1}{3}}^0 \frac{dx}{\sqrt[3]{1+3x}}$ .

25. Обчислити площі фігур, обмежених кривими:

1)  $y = 2x - x^2 + 3, y = x^2 - 4x + 3$ .

2)  $\begin{cases} x = 6(t - \sin t), \\ y = 6(1 - \cos t), \end{cases} y \geq 9 \quad (0 < x < 12\pi)$ .

3)  $\rho = \frac{1}{2} + \sin \varphi$ .

26. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої кривою  $x^2 + (y-2)^2 = 1$ , навколо осі  $Ox$ .

27. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням кривої  $x^2 = 4 + y, y = 2$  навколо осі  $Oy$ .

### Варіант 13

1. Побудувати графіки функцій:

1)  $y = -\frac{1}{2} \sin\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{3}\right)$ . 4)  $y = \operatorname{tg}\left(3x - \frac{3\pi}{4}\right)$ .

2)  $y = 2 \arcsin(x + 2)$ . 5)  $y = e^{1-x}$ .

3)  $y = \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg}(x - 1)$ . 6)  $y = -\lg(x + 2)$ .

2. Знайти:

а) алгебричну форму  $\frac{z_1}{z_2} + 2z_3 - i^7$ ;

б) тригонометричну форму  $z_3$ ;

в), г)  $(z_1 z_2)^8$  та  $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{10}$ ;

д), е) всі значення  $\sqrt[3]{z_1}$  та  $\sqrt[4]{z_2}$ , якщо:

$z_1 = -2 - 2i, z_2 = 2 - 2\sqrt{3}i, z_3 = 8 + 9i$ .

3. Зобразити множину точок  $z \in \mathbb{C}$ :

1)  $|z - i| > 3, \frac{\pi}{3} < \arg z \leq \frac{2\pi}{3}$ .

2)  $|z - 4| < |z - i|, |\operatorname{Re} z| > 3$ .

3)  $z^3 - 4z^2 + 8z - 8 = 0$ .

Знайти границі (4—7):

4.1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1)}{n\sqrt{n^2 + 1} + \sqrt{n + 1}}$ .

2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^5 + 3} - \sqrt{n - 3}}{\sqrt[5]{n^5 + 3} + \sqrt{n - 3}}$ .

3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{(n + 2)^2} - \sqrt[3]{(n - 3)^2})$ .

5.1)  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x^2 + x - 20}$ . 6.1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x + \sin 3x}{x + \sin x}$ .

2)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{2x^2 - 7x + 5}$ . 2)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 3x}{\ln(1 + 2x)}$ .

3)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 2x + 9}{2x^2 - x + 4}$ . 3)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{9 \ln(1 - 2x)}{4 \operatorname{arctg} 3x}$ .

4)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^3 - 3x^2 + 7}{2x^4 + 3x^2 + 1}$ . 4)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\operatorname{tg} \ln(3x - 5)}{e^{x+3} - e^{x^2+1}}$ .

5)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{7 - 3x^4}{2x^3 + 3x^2 - 5}$ . 5)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4^x - 2^{7x}}{\operatorname{tg} 3x - x}$ .

6)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{\sqrt{1 + x} - 1}$ . 6)  $\lim_{x \rightarrow 0} (2 - 5^{x^3})^{\frac{\operatorname{cosec}^2 x}{x}}$ .

7)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x - 2}{x + 1}\right)^{2x-3}$ . 7)  $\lim_{x \rightarrow 1} (3 - 2x)^{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}}$ .

8)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x - 5}{3x + 4}\right)^{2x}$ . 8)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x + \operatorname{tg}^2 x}{x \sin 3x}$ .

7.1)  $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln x}{\ln \sin x}$ . 3)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\arcsin x}\right)$ .

2)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1 - \sin x \ln a}{e^x - 1 - \operatorname{tg} x}$ . 4)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\operatorname{tg} x)^{2x-\pi}$ .

8. Визначити порядок і головну частину розкладу  $\alpha(x)$  відносно  $\beta(x)$ :

1)  $\alpha(x) = \sin 8x, \beta(x) = \arcsin 5x, x \rightarrow 0$ .

2)  $\alpha(x) = \sqrt[3]{x} - 3, \beta(x) = 27 - x, x \rightarrow 27$ .

3)  $\alpha(x) = e^{3x^2} - \cos x, \beta(x) = x, x \rightarrow 0$ .

9. Дослідити функцію на неперервність:

1)  $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^3 + 8}$ .

2)  $f(x) = \begin{cases} x - 1, & x \leq 0, \\ x^2, & 0 < x < 2, \\ 2x, & x \geq 2. \end{cases}$

3)  $f(x) = 5^{\frac{2}{x-3}}$  у точках  $x_1 = 3, x_2 = 4$ .

Знайти похідні функцій (10—13):

10.1)  $y = \frac{8}{x^3} + 4\sqrt{x} - \frac{e^{-\sin 2x}}{(x + 5)^4}$ .

2)  $y = \sqrt[3]{5x^4 + 8 \sin \operatorname{ctg} 3} + \frac{\cos^4(7x - 1)}{\lg(x + 5)}$ .

3)  $y = \sin^4 3x \cdot \operatorname{arctg} 2x^3 - \frac{\arcsin 4x^5}{\operatorname{th}^3 x}$ .

4)  $y = e^{-\cos x} \operatorname{arctg} 7x^4 + \frac{4 \log_3(3x + 1)}{(x + 1)^2}$ .

5)  $y = \operatorname{th}^3 4x \cdot \operatorname{arctg} x^4 - (\arccos 5x)^{\ln x}$ .

6)  $y = (\log_4 2x)^{\arcsin x} + \frac{\sqrt{(x + 3)^3(x - 1)^4}}{(x + 1)^2(x + 2)^7}$ .

11.1)  $y^2 + x^2 = \cos xy$ . 2)  $y \sin x = x \sin y$ .

12.  $\begin{matrix} y'_x = ? \\ y''_{xx} = ? \end{matrix} : 1) \begin{cases} x = 5 \cos t, \\ y = 4 \sin t. \end{cases} 2) \begin{cases} x = \sqrt{t^3 - 1}, \\ y = \ln t. \end{cases}$

13.1)  $y = e^{1-2x} \sin(2 + 3x), y^{(5)} = ?$

2)  $y = \lg(x + 4), y^{(n)} = ?$

14. Скласти рівняння дотичної та нормалі до кривої в заданій точці:

1)  $y = 2x^2 + 3, x_0 = -1$ .

2)  $x = \arcsin \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, y = \arccos t, t_0 = 1.$

3)  $x = \operatorname{ch} t, y = a \operatorname{sh} t, z = at, t_0 = 0.$

15. Знайти проміжки монотонності функції  $y = 2x^3 + 3x^2 - 5.$

1)  $y = (x - 1)e^{-x}, [0; 3].$

16.  $\max_{[a,b]} f(x) = ?$

2)  $y = \frac{7x - x^2 - 7}{x^2 - 2x + 2}, [1; 4].$

17. Дослідити функцію і побудувати її графік:

1)  $y = \sqrt[3]{x(x+2)}.$  5)  $y = \frac{3x^2 - 7}{2x + 1}.$

2)  $y = \frac{x^2 - x - 1}{x^2 - 2x}.$  6)  $y = (x + 2)e^{1-x}.$

3)  $y = (2x + 5)e^{-2(x+2)}.$  7)  $y = \frac{12 - 3x^2}{x^2 + 12}.$

4)  $y = e^{-\sqrt{2} \cos x}.$  8)  $y = \sqrt[3]{(x + 3)x^2}.$

Знайти інтеграли (18—22):

18.1)  $\int \frac{dx}{5 - 3x}.$  7)  $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(1 - 4x)^5}}.$

2)  $\int \frac{\sqrt{5} dx}{\sqrt{3 - 4x^2}}.$  8)  $\int \cos(3 - 4x) dx.$

3)  $\int \frac{2x dx}{3x^2 - 7}.$  9)  $\int \frac{dx}{6x^2 - 7}.$

4)  $\int e^{4x+5} dx.$  10)  $\int \frac{\sqrt{\ln^3(x+1)}}{x+1} dx.$

5)  $\int \frac{\operatorname{ctg}^5 6x}{\sin^2 6x} dx.$  11)  $\int e^{3x^2+4} x dx.$

6)  $\int \frac{\arccos 4x}{\sqrt{1 - 16x^2}} dx.$  12)  $\int \frac{\cos 3x}{\sqrt{2 - \sin 3x}} dx.$

19.1)  $\int \frac{x - 3}{9x^2 + 7} dx.$  5)  $\int \frac{(3x^2 - 15) dx}{(x - 1)(x^2 + 5x + 6)}.$

2)  $\int \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + 4} dx.$  6)  $\int \frac{2x^3 + 1}{x^2(x + 1)} dx.$

3)  $\int \frac{dx}{3x^2 - 8x - 3}.$  7)  $\int \frac{4x - x^2 - 12}{x^3 + 8} dx.$

4)  $\int \frac{(4x + 5) dx}{4x^2 + 6x - 10}.$  8)  $\int \frac{x^2 + 2x + 4}{x^4 + 5x^2 + 4} dx.$

20.1)  $\int \operatorname{tg}^3 \frac{x}{3} dx.$  4)  $\int \sqrt[3]{\sin^2 x} \cos^3 x dx.$

2)  $\int \sin^3 6x dx.$  5)  $\int \frac{\sin 2x dx}{4 \sin^4 x + \cos^4 x}.$

3)  $\int \cos 4x \sin 5x dx.$  6)  $\int \frac{dx}{3 \sin x - 4 \cos x}.$

21.1)  $\int \frac{2x + 3}{\sqrt{5x^2 + 2}} dx.$  5)  $\int \frac{4x + 1}{\sqrt{2 + x - x^2}} dx.$

2)  $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 - x + 4}}.$  6)  $\int \frac{dx}{(x + 1)\sqrt{x^2 - x + 1}}.$

3)  $\int \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x} dx.$  7)  $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x + 3} + \sqrt[6]{x + 3}}.$

4)  $\int \frac{\sqrt{x} dx}{x - 1}.$  8)  $\int \frac{\sqrt[4]{(1 + \sqrt[3]{x^2})^3}}{x^2 \sqrt[6]{x}} dx.$

22.1)  $\int \frac{\ln(\sin x)}{\sin^2 x} dx.$  4)  $\int \operatorname{arctg} x dx.$

2)  $\int \frac{x dx}{\cos^2 x}.$  5)  $\int (x + 9) \sin x dx.$

3)  $\int x \cos(x + 4) dx.$  6)  $\int (x - 4) e^x dx.$

23. Обчислити інтеграли:

1)  $\int_0^{\pi} (x + 2) \cos \frac{x}{2} dx.$  4)  $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 2^8 \sin^4 x \cos^4 x dx.$

2)  $\int_0^1 \frac{x^4 + 3x^3 - 1}{(x + 1)^2} dx.$  5)  $\int_1^{\sqrt{2}} \sqrt{2 - x^2} dx.$

3)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \frac{x}{2} \cos \frac{3x}{2} dx.$  6)  $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} \frac{dx}{\sqrt{x - x^2}}.$

24. Обчислити інтеграли або довести їх розбіжність:

1)  $\int_0^{\infty} \frac{x dx}{4x^2 + 4x + 5}.$  2)  $\int_{\frac{3}{4}}^1 \frac{dx}{\sqrt[5]{3 - 4x}}.$

25. Обчислити площі фігур, обмежених кривими:

1)  $y = x\sqrt{36 - x^2}, y = 0 (0 \leq x \leq 6).$

2)  $\begin{cases} x = 32 \cos^3 t, \\ y = \sin^3 t, \end{cases} x = 4 (x \geq 4).$

3)  $\rho = \cos \varphi, \rho = \sin \varphi, (0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}).$

26. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої кривими  $x = 0, x = 1, y = 1 - x^2, x = \sqrt{y - 2},$  навколо осі  $Ox.$

27. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням кривої  $x = 3(t - \sin t), y = 3(1 - \cos t) (0 \leq t \leq 2\pi)$  навколо осі  $Ox.$

## Варіант 14

1. Побудувати графіки функцій:

- 1)  $y = 2 \cos\left(2x - \frac{2\pi}{3}\right)$ . 4)  $y = \operatorname{ctg}\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{6}\right)$ .  
 2)  $y = 2 \arccos(x + 1)$ . 5)  $y = e^{x+1}$ .  
 3)  $y = \operatorname{arctg}(x + 1) - \frac{\pi}{3}$ . 6)  $y = -\ln(2x + 5)$ .

2. Знайти:

а) алгебричну форму  $\frac{z_1}{z_2} + 2z_3 - i^3$ ;

б) тригонометричну форму  $z_3$ ;

в), г)  $(z_1 z_2)^8$  та  $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{10}$ ;

д), е) всі значення  $\sqrt[3]{z_1}$  та  $\sqrt[4]{z_2}$ , якщо:

$$z_1 = 3 - 3i, z_2 = \sqrt{3} + i, z_3 = -9 + 8i.$$

3. Зобразити множину точок  $z \in \mathbb{C}$ :

- 1)  $|z| > 4, \frac{\pi}{2} < \arg z \leq \frac{2\pi}{3}$ .  
 2)  $|z - 4i| > |z - 2|, |\operatorname{Im} z| > 1$ .  
 3)  $z^3 + z^2 - z + 2 = 0$ .

Знайти границі (4—7):

4.1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 + \dots + (2n - 1) + 2n}{\sqrt{n^2 + 3}}$ .

2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n} - 9n^2}{3n - \sqrt[4]{9n^8 + 1}}$ .

3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{(n+1)^3 - \sqrt{n(n-1)(n-3)}}}{\sqrt{n}}$ .

5.1)  $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{4x^2 + 11x - 3}{x^2 + 2x - 3}$ . 6.1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5x}{2x^2}$ .

2)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{2x^2 - 9x + 10}$ . 2)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 4x}{\operatorname{tg} 5x}$ .

3)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 5x - 7}{3x^2 + x + 1}$ . 3)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{3x + 1}}{\cos\left(\frac{\pi}{2}(x + 1)\right)}$ .

4)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 - 3x + 1}{1 + 2x - x^4}$ . 4)  $\lim_{x \rightarrow 2\pi} \frac{\ln \cos x}{3^{\sin 2x} - 1}$ .

5)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^4 + 7x^3 - 3}{3x^2 - 5x + 1}$ . 5)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\operatorname{tg} 2x - \sin x}$ .

6)  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x + 1} - 3}{\sqrt{x - 2} - \sqrt{2}}$ . 6)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x - 2 \sin x}{x \ln \cos 5x}$ .

7)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x - 3}\right)^{x-5}$ . 7)  $\lim_{x \rightarrow 4\pi} (\cos x)^{\frac{5}{\operatorname{tg} 5x \sin 2x}}$ .

8)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x + 3}{4x - 5}\right)^{2x}$ . 8)  $\lim_{x \rightarrow 0} (2 - \cos 3x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}$ .

7.1)  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{-5} e^x$ . 3)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(a + x)^x - a^x}{x^2}$ .

2)  $\lim_{x \rightarrow 0} x^{\frac{3}{4 + \ln x}}$ . 4)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} x\right)^x$ .

8. Визначити порядок і головну частину розкладу  $\alpha(x)$  відносно  $\beta(x)$ :

1)  $\alpha(x) = \sin 3x + \sin x, \beta(x) = 10x, x \rightarrow 0$ .

2)  $\alpha(x) = \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} + 2}, \beta(x) = \frac{x - 4}{x + 4}, x \rightarrow 4$ .

3)  $\alpha(x) = \arcsin(\sqrt{9 + x^2} - 3), \beta(x) = x, x \rightarrow 0$ .

9. Дослідити функцію на неперервність:

1)  $f(x) = e^{\frac{1}{x^2}}$ .

2)  $f(x) = \begin{cases} x + 1, & x < 0, \\ x^2 + 1, & 0 \leq x < 1, \\ -x, & x \geq 1. \end{cases}$

3)  $f(x) = 4^{\frac{2}{x-1}} - 3$  у точках  $x_1 = 1, x_2 = 2$ .

Знайти похідні функцій (10—13):

10.1)  $y = \frac{9}{x^3} + \sqrt[3]{x^4} - \frac{e^{\cos 5x}}{\sqrt{x^2 - 5x - 2}}$ .

2)  $y = \sqrt[7]{\cos \operatorname{ctg} 3 - 7x^2} + \frac{\sin^3(4x + 3)}{\ln(7x + 1)}$ .

3)  $y = \cos^3 4x \cdot \operatorname{arctg} \sqrt{x} - \frac{\operatorname{arctg}^3(2x + 1)}{\operatorname{ch} \sqrt{x}}$ .

4)  $y = 2^{-\sin x} \arcsin^3 x^4 + \frac{7 \log_4(2x - 5)}{(x - 1)^5}$ .

5)  $y = \operatorname{cth}^4 7x \cdot \arcsin \sqrt{x} - (\operatorname{arctg} 3x)^{\sin x}$ .

6)  $y = (\log_5 3x)^{\arccos(2x-3)} - \frac{\sqrt[3]{(x-2)^5(x+3)^2}}{(x+1)^4(x-7)^3}$ .

11.1)  $e^y = 4x - 7y$ . 2)  $x^n + y^n = a^n \ln y$ .

12.  $\begin{cases} y'_x = ? \\ y''_{xx} = ? \end{cases} : 1) \begin{cases} x = 5 \cos^2 t, \\ y = 3 \sin^2 t. \end{cases} 2) \begin{cases} x = \operatorname{sh} t, \\ y = \operatorname{th}^2 t. \end{cases}$

13.1)  $y = e^{3+2x} \sin(2 + 3x), y^{(5)} = ?$

2)  $y = \frac{x + 3}{x - 7}, y^{(n)} = ?$

14. Скласти рівняння дотичної та нормалі до кривої в заданій точці:

1)  $y = \frac{x^{29} + 6}{x^4 + 1}, x_0 = 1$ .

2)  $x = \frac{1 + \ln t}{t^2}, y = \frac{3 + 2 \ln t}{t}, t_0 = 1$ .

3)  $x = t^2 - 1, y = t + 5, z = t^3, M_0(0; 6; 1)$ .

15. Знайти проміжки монотонності функції  $y = 2 - 12x^2 - 8x^3$ .

16.  $\max_{[a,b]} f(x) = ?$   
 1)  $y = \frac{x}{9 - x^2}, [-2; 2]$ .  
 2)  $y = x - 4\sqrt{x + 2}, [-1; 7]$ .

17. Дослідити функцію і побудувати її графік:

1)  $y = \sqrt[3]{x^2 + 4x + 3}$ . 5)  $y = \frac{e^{3-x}}{3-x}$ .  
 2)  $y = \frac{x^2 + 16}{\sqrt{9x^2 - 8}}$ . 6)  $y = \frac{(x-2)^2}{x+1}$ .  
 3)  $y = \sqrt[3]{(x-1)(x+2)^2}$ . 7)  $y = \frac{9 + 6x - 3x^2}{x^2 - 2x + 13}$ .  
 4)  $y = -\operatorname{arctg} \cos x$ . 8)  $y = \frac{\ln x}{x}$ .

Знайти інтеграли (18—22):

18.1)  $\int \frac{dx}{4-7x}$ . 7)  $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(3-4x)^2}}$ .  
 2)  $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2-9}}$ . 8)  $\int \cos(2+5x)dx$ .  
 3)  $\int \frac{2xdx}{\sqrt{2x^2+5}}$ . 9)  $\int \frac{dx}{7x^2+6}$ .  
 4)  $\int e^{6x+2}dx$ . 10)  $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt[5]{\ln(x+1)}}$ .  
 5)  $\int \frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg}^5 4x}}{\cos^2 4x} dx$ . 11)  $\int \frac{\arcsin^4 x}{\sqrt{1-x^2}} dx$ .  
 6)  $\int \frac{\cos 4x}{\sin^3 4x} dx$ . 12)  $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{1+\cos^2 x}} dx$ .  
 19.1)  $\int \frac{(x-3)dx}{4x^2+1}$ . 5)  $\int \frac{(x^2-19x+6)dx}{(x-1)(x^2+5x+6)}$ .  
 2)  $\int \frac{x^3-1}{x+3} dx$ . 6)  $\int \frac{x^3-3}{(x-1)(x^2-1)} dx$ .  
 3)  $\int \frac{dx}{8-2x-x^2}$ . 7)  $\int \frac{(x^2-13x+40)dx}{(x+1)(x^2-4x+13)}$ .  
 4)  $\int \frac{(5x+1)dx}{x^2-4x+1}$ . 8)  $\int \frac{2x^5-2x^3+x^2}{1-x^4} dx$ .  
 20.1)  $\int \operatorname{tg}^3 2x dx$ . 4)  $\int \sqrt[5]{\cos^3 2x} \sin^3 2x dx$ .  
 2)  $\int \sin^2 \frac{x}{2} dx$ . 5)  $\int \frac{dx}{1+4\cos x(\cos x - \sin x)}$ .  
 3)  $\int \cos x \cos 5x dx$ . 6)  $\int \frac{dx}{7\sin x - 3\cos x}$ .

21.1)  $\int \frac{5-3x}{\sqrt{4-3x^2}} dx$ . 5)  $\int \frac{5x-3}{\sqrt{2x^2+4x-5}} dx$ .

2)  $\int \frac{dx}{\sqrt{2+4x-3x^2}}$ . 6)  $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2-x-1}}$ .

3)  $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)^3}}$ . 7)  $\int \frac{\sqrt[6]{x^5} + \sqrt{x} + 1}{\sqrt[6]{x^5}(1+\sqrt[3]{x})} dx$ .

4)  $\int \frac{dx}{3+\sqrt{x+5}}$ . 8)  $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt[4]{x^3}}}{x^2\sqrt{x}} dx$ .

22.1)  $\int x \operatorname{tg}^2 x dx$ . 4)  $\int \frac{\arccos \sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} dx$ .

2)  $\int x^2 \ln(x+1) dx$ . 5)  $\int (x+7) \sin 2x dx$ .

3)  $\int x \cos(x-2) dx$ . 6)  $\int x e^{-6x} dx$ .

23. Обчислити інтеграли:

1)  $\int_0^{\frac{\pi}{8}} x^2 \sin 4x dx$ . 4)  $\int_0^{\pi} 2^4 \sin^2 x \cos^6 x dx$ .

2)  $\int_{-1}^0 \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$ . 5)  $\int_{-1}^0 \frac{x^5-2x^2+3}{(x-2)^2} dx$ .

3)  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 3x \cos 5x dx$ . 6)  $\int_{-\frac{1}{2}}^0 \frac{2x-8}{\sqrt{1-x-x^2}} dx$ .

24. Обчислити інтеграли або довести їх розбіжність:

1)  $\int_0^{\infty} \frac{(x+2)dx}{\sqrt[3]{(x^2+4x+1)^4}}$ . 2)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{\operatorname{tg} x} dx}{\cos^2 x}$ .

25. Обчислити площі фігур, обмежених кривими:

1)  $x = \arccos y, x = 0, y = 0$ .

2)  $\begin{cases} x = 3 \cos t, \\ y = 8 \sin t, \end{cases} y = 4 (y \geq 4)$ .

3)  $\rho = \sqrt{2} \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right), \rho = \sqrt{2} \sin\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right),$   
 $\left(\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{4}\right)$ .

26. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої кривими  $y = x^2, y = 1, x = 2$ , навколо осі  $Ox$ .

27. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням кривої  $x = \cos^3 t, y = \sin^3 t$  навколо осі  $Ox$ .

### Варіант 15

1. Побудувати графіки функцій:

- 1)  $y = 3 \sin\left(3x + \frac{\pi}{3}\right)$ . 4)  $y = \operatorname{tg}\left(\frac{1}{3}x - \frac{\pi}{12}\right)$ .  
2)  $y = 3 \arcsin(x - 2)$ . 5)  $y = -2^{x+2}$ .  
3)  $y = \operatorname{arctg}(x + 2)$ . 6)  $y = \lg(x - 3)$ .

2. Знайти:

а) алгебричну форму  $\frac{z_1}{z_2} + 2z_3 + i^9$ ;

б) тригонометричну форму  $z_3$ ;

в), г)  $(z_1 z_2)^8$  та  $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{10}$ ;

д), е) всі значення  $\sqrt[3]{z_1}$  та  $\sqrt[4]{z_2}$ , якщо:

$$z_1 = 4 + 4i, z_2 = -3 + 3\sqrt{3}i, z_3 = -8 - 7i.$$

3. Зобразити множину точок  $z \in \mathbb{C}$ :

1)  $|z + 3| > 4, \frac{\pi}{4} < \arg z \leq \frac{\pi}{2}$ .

2)  $|z + 4| < |z - i|, |\operatorname{Re} z| < 2$ .

3)  $z^3 + 5z^2 + 15z + 18 = 0$ .

Знайти границі (4—7):

4.1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^3 + 5} - \sqrt{3n^4 + 2}}{1 + 3 + \dots + (2n - 1)}$ .

2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4n + 1} - \sqrt[3]{27n^3 + 4}}{\sqrt{n} - \sqrt[3]{n^5 + n}}$ .

3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 3n - 2} - \sqrt{n^2 - 3})$ .

5.1)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^2 - 7x - 6}{2x^2 - 7x + 3}$ . 6.1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - \cos 4x}{3x^2}$ .

2)  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{9x^2 + 17x - 2}{x^2 + 2x}$ . 2)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{5x} - 1}{\sin 2x}$ .

3)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 7x - 2}{3x^3 - x - 4}$ . 3)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{x^2 + \pi x}$ .

4)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 3x^2 + 5}{3x^2 - 4x + 1}$ . 4)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3^{5x-3} - 3^{2x^2}}{\operatorname{tg} \pi x}$ .

5)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + 7}{2 - 3x + 4x^2}$ . 5)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{1 + \ln^2 x} - 1}{1 + \cos \pi x}$ .

6)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{5 + x} - 2}{\sqrt{8 - x} - 3}$ . 6)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{10^{2x} - 7^{-x}}{2 \operatorname{tg} x - \operatorname{arctg} x}$ .

7)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x - 4}{3x + 2}\right)^{2x}$ . 7)  $\lim_{x \rightarrow 0} (2 - e^{\sin x})^{\operatorname{ctg} \pi x}$ .

8)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x - 2}{3x + 1}\right)^{5x}$ . 8)  $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{9 - 2x}{3}\right)^{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{6}}$ .

7.1)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x}{1 - \sin \frac{\pi x}{2}}$ ; 3)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(e^x + 1) - 2(e^x - 1)}{x^3}$ .

2)  $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\operatorname{tg} \frac{\pi x}{4}\right)^{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}}$ . 4)  $\lim_{x \rightarrow +0} x^{\operatorname{tg} x}$ .

8. Визначити порядок і головну частину розкладу  $\alpha(x)$  відносно  $\beta(x)$ :

1)  $\alpha(x) = \cos 7x - \cos x, \beta(x) = 2x^2, x \rightarrow 0$ .

2)  $\alpha(x) = x \sin \sqrt{x}, \beta(x) = \sqrt{x^3}, x \rightarrow 0$ .

3)  $\alpha(x) = \operatorname{arctg}(\sqrt[3]{27 - 2x^2 - x - 3})$ ,  
 $\beta(x) = x, x \rightarrow 0$ .

9. Дослідити функцію на неперервність:

1)  $f(x) = \frac{2^{\frac{1}{x}} - 1}{2^{\frac{1}{x}} + 1}$ .

2)  $f(x) = \begin{cases} -x, & x < 0, \\ x^2 + 1, & 0 \leq x < 1, \\ x + 1, & x \geq 1. \end{cases}$

3)  $f(x) = 2^{\frac{5}{1-x}} - 1$  у точках  $x_1 = 0, x_2 = 1$ .

Знайти похідні функцій (10—13):

10.1)  $y = \frac{4}{x^5} - \sqrt[5]{x^2} - \frac{(2x + 5)^3}{e^{\operatorname{tg} x}}$ .

2)  $y = \sqrt[4]{4x^5 - \cos \operatorname{tg} \frac{1}{3}} + \frac{\operatorname{ctg}^3(2x - 3)}{\log_3(x + 2)}$ .

3)  $y = \operatorname{tg}^3 2x \cdot \arcsin x^5 - \frac{\arccos 4x^3}{\operatorname{sh}^4 x}$ .

4)  $y = 2^{\sin x} \operatorname{arctg} x^4 + \frac{\ln(7x + 2)}{2(x - 6)^4}$ .

5)  $y = \operatorname{sh}^3 2x \cdot \arcsin 7x^2 - (\lg x)^{\operatorname{arctg} 2x}$ .

6)  $y = (\ln(x + 7))^{\operatorname{ctg} 2x} + \frac{\sqrt[4]{x - 8}(x + 2)^6}{(x - 1)^5(x + 3)^2}$ .

11.1)  $4 \sin^2(x + y) = y$ . 2)  $\operatorname{tg} xy = \frac{x}{\operatorname{tg} y}$ .

12.  $\begin{cases} y' = ? \\ y'' = ? \end{cases} : 1) \begin{cases} x = \operatorname{arctg} t, \\ y = \ln(1 + t^2). \end{cases} 2) \begin{cases} x = \sqrt{t - 1}, \\ y = \frac{1}{\sqrt{t}}. \end{cases}$

13.1)  $y = (2x^3 + 1) \cos x, y^{(5)} = ?$

2)  $y = \lg(3x + 1), y^{(n)} = ?$

14. Скласти рівняння дотичної та нормалі до кривої в заданій точці:

1)  $y = 2x + \frac{1}{x}, x_0 = 1$ .

$$2) x = \frac{1+t}{t^2}, y = \frac{3}{2t^2} + \frac{2}{t}, t_0 = 2.$$

$$3) x = e^t, y = \cos t, z = t^2 + 1, M_0(1; 1; -1).$$

15. Знайти проміжки монотонності функції  $y = (2x + 1)^2(2x - 1)^2$ .

$$16. \max_{[a,b]} f(x) = ? \quad 1) y = \frac{1 + \ln x}{x}, \left[\frac{1}{e}; e\right].$$

$$2) y = \sqrt[3]{(x-2)^2(5-x)}, [1; 5].$$

17. Дослідити функцію і побудувати її графік:

$$1) y = \frac{x^3 + 3x^2 - 2x - 2}{\sqrt{x^2 - 2}}. \quad 5) y = 2 \ln \frac{x}{x+1}.$$

$$2) y = \frac{3\sqrt[3]{6(x+1)^2}}{x^2 + 6x + 17}. \quad 6) y = -\ln \frac{1+x}{1-x}.$$

$$3) y = \sqrt[3]{(x-1)^2} - \sqrt[3]{x^2}. \quad 7) y = \left(\frac{x-2}{x+1}\right)^2.$$

$$4) y = \ln(-\sqrt{2} \cos x). \quad 8) y = \frac{-8x}{x^2 + 4}.$$

Знайти інтеграли (18—22):

$$18.1) \int \frac{dx}{5x-3}. \quad 7) \int \frac{dx}{\sqrt[3]{2-5x}}.$$

$$2) \int \frac{dx}{2x^2+7}. \quad 8) \int \cos(3x+5)dx.$$

$$3) \int \frac{xdx}{\sqrt{7-3x^2}}. \quad 9) \int \frac{dx}{\sqrt{7-3x^2}}.$$

$$4) \int e^{5-2x} dx. \quad 10) \int \frac{\sqrt{\ln^7(x+1)}}{x+1} dx.$$

$$5) \int \frac{\operatorname{ctg}^4 3x}{\sin^2 3x} dx. \quad 11) \int \sin^3 4x \cos 4x dx.$$

$$6) \int e^{4-x^2} x dx. \quad 12) \int \frac{\arcsin^3 2x}{\sqrt{1-4x^2}} dx.$$

$$19.1) \int \frac{x-3}{1-4x^2} dx. \quad 5) \int \frac{6xdx}{x^3+2x^2-x-2}.$$

$$2) \int \frac{x^3}{x^2-1} dx. \quad 6) \int \frac{x^2-3x+2}{x^3+2x^2+x} dx.$$

$$3) \int \frac{dx}{5x-x^2-6}. \quad 7) \int \frac{3-9x}{x^3-1} dx.$$

$$4) \int \frac{xdx}{2x^2+2x+5}. \quad 8) \int \frac{x^4 dx}{x^4+5x^2+4}.$$

$$20.1) \int \operatorname{tg}^5 2x dx. \quad 4) \int \frac{\cos^3 x}{\sqrt[3]{\sin^3 x}} dx.$$

$$2) \int \sin^2\left(\frac{x}{2} + 1\right) dx. \quad 5) \int \frac{dx}{4\cos^2 x + 3\sin^2 x}.$$

$$3) \int \cos x \sin 9x dx. \quad 6) \int \frac{dx}{2+4\sin x+3\cos x}.$$

$$21.1) \int \frac{4-2x}{\sqrt{1-4x^2}} dx. \quad 5) \int \frac{3x+2}{\sqrt{4+2x-x^2}} dx.$$

$$2) \int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+2x+4}}. \quad 6) \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}.$$

$$3) \int x^3 \sqrt{9-x^2} dx. \quad 7) \int \frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt[3]{x}+1)\sqrt{x}} dx.$$

$$4) \int \frac{dx}{1+\sqrt{x-1}}. \quad 8) \int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x^3}}}{x^2} dx.$$

$$22.1) \int \frac{x \arccos x}{\sqrt{1-x^2}} dx. \quad 4) \int \frac{\ln x \ln(\ln x)}{x} dx.$$

$$2) \int (x^2+2)e^{-x} dx. \quad 5) \int (x+4) \sin 3x dx.$$

$$3) \int x \cos(x+3) dx. \quad 6) \int \operatorname{arctg} 7x dx.$$

23. Обчислити інтеграли:

$$1) \int_1^2 x^2 \ln x dx. \quad 4) \int_0^{2\pi} \cos^8 x dx.$$

$$2) \int_0^1 \frac{xdx}{x^2+3x+2}. \quad 5) \int_{2\sqrt{3}}^6 \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-9}}.$$

$$3) \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx. \quad 6) \int_{\frac{3}{4}}^{\frac{11}{8}} \frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}}.$$

24. Обчислити інтеграли або довести їх розбіжність:

$$1) \int_0^{\infty} \frac{3-x^2}{x^2+4} dx. \quad 2) \int_0^1 \frac{2e^{1-\frac{2\arcsin x}{\pi}}}{\pi\sqrt{1-x^2}} dx.$$

25. Обчислити площі фігур, обмежених кривими:

$$1) y = x \operatorname{arctg} x, y = 0, x = \sqrt{3}.$$

$$2) \begin{cases} x = 6(t - \sin t), \\ y = 6(1 - \cos t), \end{cases} y \geq 6 \quad (0 < x < 12\pi).$$

$$3) \rho = 4 \sin 3\varphi, \rho = 2 \quad (\rho \geq 2).$$

26. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої кривими  $y = x^3, y = \sqrt{x}$ , навколо осі  $Ox$ .

27. Знайти площу поверхні, утвореної обертанням кривої  $\rho = 2\sqrt{\cos 2\varphi}$  навколо полярної осі.

## Варіант 16

1. Побудувати графіки функцій:

- 1)  $y = -2 \cos\left(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{4}\right)$ . 4)  $y = 3^{x-1}$ .  
2)  $y = \frac{1}{2} \arccos\left(x + \frac{1}{2}\right)$ . 5)  $y = 2 \operatorname{arctg}(x - 3)$ .  
3)  $y = \operatorname{ctg}\left(\frac{1}{4}x + \frac{\pi}{24}\right)$ . 6)  $y = \ln(x + 5)$ .

2. Знайти:

а) алгебричну форму  $\frac{z_1}{z_2} + 2z_3 - i^3$ ;

б) тригонометричну форму  $z_3$ ;

в), г)  $(z_1 z_2)^8$  та  $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{10}$ ;

д), е) всі значення  $\sqrt[3]{z_1}$  та  $\sqrt[4]{z_2}$ , якщо:

$$z_1 = -5 + 5i, z_2 = -2\sqrt{3} - 2i, z_3 = 7 - 6i.$$

3. Зобразити множину точок  $z \in \mathbb{C}$ :

- 1)  $|z - 2i| > 3, \frac{3\pi}{4} < \arg z \leq \pi$ .  
2)  $|z + 4i| > |z - 3|, |\operatorname{Im} z| < 3$ .  
3)  $z^3 - 2z - 4 = 0$ .

Знайти границі (4—7):

$$4.1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n)! - n(3n-1)!}{(3n-1)! + (3n-2)!}.$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\sqrt[3]{7n} - \sqrt[4]{81n^8} - 1}{(n + 4\sqrt{n})\sqrt{n^2 - 5}}.$$

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n}(\sqrt{n+2} - \sqrt{n-3}).$$

$$5.1) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{4x^2 + 7x - 2}{3x^2 + 8x + 4}. \quad 6.1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 2x}{\operatorname{tg} 3x}.$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x - 2}{x^3 - x^2 - x + 1}. \quad 2) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\operatorname{tg}(x+2)}{x^2 - 4}.$$

$$3) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{18x^2 + 5x}{8 - 3x - 9x^2}. \quad 3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+x} - 2}{3 \operatorname{arctg} x}.$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^2 - 5x + 2}{4x^3 + 2x - 1}. \quad 4) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2^x - 16}{\sin \pi x}.$$

$$5) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 - 3x + 1}{7x + 5}. \quad 5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - e^x}{\sin 3x - \sin 5x}.$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x+4} - 3}{\sqrt{x-1} - 2}. \quad 6) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{\log_2 x}.$$

$$7) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-1}{2x+4}\right)^{3x}. \quad 7) \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+\sin^2 x)}}.$$

$$8) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3x-4}{x+6}\right)^{x-1}. \quad 8) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\operatorname{tg} x \operatorname{tg} 3x}.$$

$$7.1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}. \quad 3) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\operatorname{ctg} \frac{\pi x}{4}\right)^{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}}.$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x - 2 \arcsin x}{x^3}. \quad 4) \lim_{x \rightarrow +0} (\operatorname{ctg} x)^{\sin x}.$$

8. Визначити порядок і головну частину розкладу  $\alpha(x)$  відносно  $\beta(x)$ :

$$1) \alpha(x) = \frac{(x-1)^3}{\ln x}, \beta(x) = e^{x-1} - 1, x \rightarrow 0.$$

$$2) \alpha(x) = x - \sin x, \beta(x) = x, x \rightarrow 0.$$

$$3) \alpha(x) = \operatorname{tg}(\sqrt{x} - 2), \beta(x) = x - 4, x \rightarrow 4.$$

9. Дослідити функцію на неперервність:

$$1) f(x) = \operatorname{arctg} \frac{x}{x-1}.$$

$$2) f(x) = \begin{cases} x+3, & x \leq 0, \\ 4-x, & 0 < x \leq 2, \\ x^2-2, & x > 2. \end{cases}$$

$$3) f(x) = 8^{\frac{4}{x-2}} - 1 \text{ у точках } x_1 = 2, x_2 = 3.$$

Знайти похідні функцій (10—13):

$$10.1) y = \frac{8}{x^3} - 4\sqrt{x^3} + \frac{e^{-\operatorname{tg} 3x}}{4x^2 - 3x + 5}.$$

$$2) y = \sqrt[5]{x^3 + \sin \operatorname{tg} \frac{1}{7}} - \frac{\lg^3 x}{\sin 5x^2}.$$

$$3) y = \operatorname{ctg}^7 x \cdot \arccos 2x^3 + \frac{\operatorname{cth}^2(x-2)}{\arccos 3x}.$$

$$4) y = 3^{-x^2} \operatorname{arctg} 2x^5 - \frac{4 \lg(3x+7)}{(x+1)^7}.$$

$$5) y = \operatorname{th}^5 4x \cdot \arccos 3x^4 + (\operatorname{ctg} 7x)^{\sqrt{x+3}}.$$

$$6) y = (\ln(5x-4))^{\operatorname{arctg} x} - \frac{\sqrt[5]{x+1}(x-3)^7}{(x-2)^4(x+8)^3}.$$

$$11.1) \sin y = \frac{7}{x} + 3xy. \quad 2) y^2 = 2x \sin y.$$

$$12. \begin{matrix} y'_x = ? \\ y''_{xx} = ? \end{matrix} : 1) \begin{cases} x = \arcsin t, \\ y = \sqrt{1-t^2}. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x = \cos^2 t, \\ y = \operatorname{tg}^2 t. \end{cases}$$

$$13.1) y = (x^2 + 3) \ln(x-3), y^{(5)} = ?$$

$$2) y = \sin 2x + \cos(x+1), y^{(n)} = ?$$

14. Скласти рівняння дотичної та нормалі до кривої в заданій точці:

$$1) y = \frac{-2(x^8 + 2)}{3(x^4 + 1)}, x_0 = 1.$$

$$2) x = a \sin^3 t, y = a \cos^3 t, t_0 = \frac{\pi}{6}.$$

3)  $x = t^3, y = (t + 1)^2, z = \sqrt{t^2 + 1},$   
 $M_0(-8; 1; \sqrt{5}).$

15. Знайти проміжки монотонності функції  $y = 2x^3 + 9x^2 + 12x.$

1)  $y = e^{4x-x^2}, [1; 3];$   
 16.  $\max_{[a,b]} f(x) = ?$   
 2)  $y = \frac{4x}{4+x^2}, [-4; 2].$

17. Дослідити функцію і побудувати її графік:

1)  $y = 6\sqrt[3]{(x-2)^2} - 4x.$  5)  $y = \frac{21-x^2}{7x+9}.$   
 2)  $y = \sqrt[3]{(x+6)x^2}.$  6)  $y = \frac{x^3}{9-x^2}.$   
 3)  $y = (4-x)e^{x-3}.$  7)  $y = \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2.$   
 4)  $y = \frac{1}{(\sin x - \cos x)^2}.$  8)  $y = \ln(x^2 + 1).$

Знайти інтеграли (18—22):

18.1)  $\int \sqrt[5]{3-2x} dx.$  7)  $\int \frac{dx}{3-2x}.$   
 2)  $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2+1}}.$  8)  $\int \sin(5x-3) dx.$   
 3)  $\int \frac{xdx}{2x^2+9}.$  9)  $\int \frac{dx}{6x^2+1}.$   
 4)  $\int e^{4-3x} dx.$  10)  $\int \frac{dx}{(x+2)\sqrt[3]{\ln(x+2)}}.$   
 5)  $\int \frac{e^{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x} dx.$  11)  $\int \sin 2x \sqrt[3]{\cos 2x} dx.$   
 6)  $\int \frac{dx}{\cos^2 4x \sqrt{\operatorname{tg} 4x}}.$  12)  $\int \frac{dx}{(1+x^2) \operatorname{arctg}^7 x}.$   
 19.1)  $\int \frac{3x-1}{4-x^2} dx.$  5)  $\int \frac{(4x^2+32x+52) dx}{(x^2+6x+5)(x+3)}.$   
 2)  $\int \frac{x^4+1}{x^2+1} dx.$  6)  $\int \frac{x+2}{x^3-2x^2+x} dx.$   
 3)  $\int \frac{dx}{x^2+4x+25}.$  7)  $\int \frac{6-9x}{x^3+8} dx.$   
 4)  $\int \frac{(x-3) dx}{x^2-5x+4}.$  8)  $\int \frac{x^4+x^3-2x+4}{x^4-1} dx.$   
 20.1)  $\int \operatorname{tg}^3 7x dx.$  4)  $\int \cos^4 2x \sin^2 2x dx.$   
 2)  $\int \cos^2 2x dx.$  5)  $\int \frac{dx}{3 \cos^2 x - 2}.$   
 3)  $\int \sin 4x \cos 2x dx.$  6)  $\int \frac{dx}{4 \cos x + 3 \sin x}.$

21.1)  $\int \frac{5-x}{\sqrt{x^2+2}} dx.$  5)  $\int \frac{x-7}{\sqrt{3x^2-2x+1}} dx.$

2)  $\int \frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}}.$  6)  $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x-1}}.$   
 3)  $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{(x^2-1)^3}}.$  7)  $\int \frac{(\sqrt{3x+1}+2) dx}{\sqrt{3x+1}+2\sqrt[3]{3x+1}}.$   
 4)  $\int \frac{dx}{x\sqrt{x-7}}.$  8)  $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt[4]{x^7}} dx.$

22.1)  $\int \ln(x^2+1) dx.$  4)  $\int \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x}} dx.$

2)  $\int x^2 \sin^2 x dx.$  5)  $\int (x+3) \sin 5x dx.$

3)  $\int x e^{x+2} dx.$  6)  $\int \arcsin 5x dx.$

23. Обчислити інтеграли:

1)  $\int_1^2 \frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2} dx.$  4)  $\int_0^{2\pi} \sin^8 \frac{x}{4} dx.$

2)  $\int_8^{10} \frac{x^2+3}{x^3-x^2-6x} dx.$  5)  $\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^1 \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}.$

3)  $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{dx}{\cos x}.$  6)  $\int_{\frac{1}{6}}^2 \frac{dx}{3x^2-x+1}.$

24. Обчислити інтеграли або довести їх розбіжність:

1)  $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{\operatorname{arctg} 2x} dx}{1+4x^2}.$  2)  $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt[5]{4x-x^2-4}}.$

25. Обчислити площі фігур, обмежених кривими:

1)  $y = (x-2)^3, y = 4x-8.$

2)  $\begin{cases} x = 4\sqrt{2} \cos^3 t, \\ y = 2\sqrt{2} \sin^3 t, \end{cases} x = 2 (x \geq 2).$

3)  $\rho = 4 \cos 3\varphi, \rho = 2 (\rho \geq 2).$

26. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої кривими  $y^2 = 4-x, x = 0,$  навколо осі  $Ox.$

27. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням кривої  $y^2 = 4+x, x = 2$  навколо осі  $Ox.$

## Варіант 17

1. Побудувати графіки функцій:

1)  $y = -3 \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ . 4)  $y = \operatorname{tg}\left(\frac{1}{3}x - \frac{\pi}{3}\right)$ .

2)  $y = \frac{1}{2} \arcsin\left(x - \frac{1}{3}\right)$ . 5)  $y = 3^{x+2}$ .

3)  $y = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(x + 3)$ . 6)  $y = -\lg(3x - 2)$ .

2. Знайти:

а) алгебричну форму  $\frac{z_1}{z_2} + 2z_3 - i^5$ ;

б) тригонометричну форму  $z_3$ ;

в), г)  $(z_1 z_2)^8$  та  $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{10}$ ;

д), е) всі значення  $\sqrt[3]{z_1}$  та  $\sqrt[4]{z_2}$ , якщо:

$z_1 = -6 - 6i, z_2 = 1 - \sqrt{3}i, z_3 = 6 + 5i$ .

3. Зобразити множину точок  $z \in \mathbb{C}$ :

1)  $|z + 2i| > 4, \frac{\pi}{3} < \arg z \leq \pi$ .

2)  $|z - 5i| < |z + 2|, |\operatorname{Re} z| > 1$ .

3)  $z^3 + 2z^2 + 8z - 32 = 0$ .

Знайти границі (4—7):

4.1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n+2}{1+2+\dots+n} - \frac{2}{3} \right)$ .

2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^3 - 7} + \sqrt[3]{n^2 + 4}}{\sqrt[4]{n^5 + 5} + \sqrt{n}}$ .

3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n(n^5 + 9)} - \sqrt{(n^4 - 1)(n^2 + 5)}}{n}$ .

5.1)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{5x^2 + 4x - 1}{3x^2 + x - 2}$ . 6.1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x - \sin 3x}{2x^2}$ .

2)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^3 - 2x^2 + 5x}{3x^2 + 7x}$ . 2)  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sin(x+2)}{x^3 + 8}$ .

3)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 - 6x^2 + 2}{x^4 + 4x - 3}$ . 3)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin(\pi(x+1))}{\ln(1+2x)}$ .

4)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{11x^3 + 3x + 1}{2x^2 - x - 7}$ . 4)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\ln 2x - \ln \pi}{\sin \frac{5x}{2} \cos x}$ .

5)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{10x - 7}{3x^4 + 2x^3 + 1}$ . 5)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 2x} - e^{\sin x}}{\operatorname{tg} x}$ .

6)  $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{x-3} - 2}{\sqrt{x+2} - 3}$ . 6)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{7^{3x} - 3^{2x}}{\operatorname{tg} x + x^3}$ .

7)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x-4}{2x} \right)^{-3x}$ . 7)  $\lim_{x \rightarrow 0} (2 - e^{x^2})^{\frac{1}{\ln(1+\operatorname{tg}^2 \frac{\pi x}{3})}}$ .

8)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x-2}{3x+10} \right)^{3x}$ . 8)  $\lim_{x \rightarrow 1} (2e^{x-1} - 1)^{\frac{x}{x-1}}$ .

7.1)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}+0} \ln\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \operatorname{ctg} x$ . 3)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - a^{\sin x}}{x^3}$ .

2)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg} x}$ . 4)  $\lim_{x \rightarrow +0} (\sin 2x)^{\operatorname{tg} x}$ .

8. Визначити порядок і головну частину розкладу  $\alpha(x)$  відносно  $\beta(x)$ :

1)  $\alpha(x) = 2^{x^2} - 1, \beta(x) = \operatorname{tg} x, x \rightarrow 0$ .

2)  $\alpha(x) = \frac{(x-1)^3}{\ln x}, \beta(x) = e^{x-1} - 1, x \rightarrow 1$ .

3)  $\alpha(x) = 4 \sin x^4 - x^5, \beta(x) = \ln(1+x), x \rightarrow 0$ .

9. Дослідити функцію на неперервність:

1)  $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$ .

2)  $f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 1, \\ (x-2)^2, & 1 < x \leq 4, \\ 3-x, & x > 4. \end{cases}$

3)  $f(x) = 5^{\frac{4}{3-x}} + 1$  у точках  $x_1 = 2, x_2 = 3$ .

Знайти похідні функцій (10—13):

10.1)  $y = \frac{4}{x^3} - \sqrt[3]{x^7} - \frac{e^{-\sin 4x}}{(2x-5)^4}$ .

2)  $y = \sqrt[3]{\operatorname{ctg} \sin \frac{1}{3} - x^4} + \frac{\ln^2(x+1)}{\cos 3x^4}$ .

3)  $y = 3^{\cos x} \arcsin^2 3x - \frac{\operatorname{th}^3(2x+2)}{\arcsin 5x}$ .

4)  $y = \ln x \cdot \arccos 3x^4 + \frac{\log_2(x^2+1)}{5(x-3)^4}$ .

5)  $y = \operatorname{ch}^2 5x \cdot \operatorname{arctg} \sqrt{x} - (\operatorname{th} \sqrt{x})^{\operatorname{arctg} 2x}$ .

6)  $y = \frac{(x-1)^3 \sqrt[7]{(x-2)^4}}{(x+1)^2 (x-6)^5} + (\log_2 6x)^{\arcsin 2x}$ .

11.1)  $\operatorname{tg} y = 4y - 5x$ . 2)  $\sin(x+y) = y^2$ .

12.  $\begin{cases} y'_x = ? \\ y''_{xx} = ? \end{cases} ; 1) \begin{cases} x = 3(t - \sin t), \\ y = 3(1 - \cos t). \end{cases} 2) \begin{cases} x = \sqrt{t}, \\ y = \ln t. \end{cases}$

13.1)  $y = (1-x-x^2)e^{2x}, y^{(5)} = ?$

2)  $y = \frac{x}{9(4x+9)}, y^{(n)} = ?$

14. Скласти рівняння дотичної та нормалі до кривої в заданій точці:

1)  $y = \frac{x^5 + 1}{x^4 + 1}, x_0 = 1$ .

2)  $x = a(t \sin t + \cos t), y = a(\sin t - t \cos t),$

$t_0 = \frac{\pi}{4}.$

3)  $x = (t + \cos t)^2, y = t, z = \sin t, M_0(1; 0; 0).$

15. Знайти проміжки монотонності функції  $y = 12x^2 - 8x^3 - 2.$

1)  $y = \frac{x^5 - 8}{x^4}, [-3; -1].$

16.  $\max_{[a,b]} f(x) = ?$

2)  $y = -\frac{x^2}{2} + \frac{8}{x}, [-4; -1].$

17. Дослідити функцію і побудувати її графік:

1)  $y = \frac{3\sqrt[3]{6(x-5)^2}}{x^2 - 6x + 17}.$  5)  $y = \frac{x^2 + 6}{x^2 + 1}.$

2)  $y = \frac{2x^2 - 1}{\sqrt{x^2 - 2}}.$  6)  $y = (x + 1)e^{2x}.$

3)  $y = \sqrt[3]{(x-4)(x+2)^2}.$  7)  $y = \frac{3x^4 + 1}{x^3}.$

4)  $y = e^{-\sin x - \cos x}.$  8)  $y = -\frac{e^{-2(x+2)}}{2(x+2)}.$

Знайти інтеграли (18—22):

18.1)  $\int \frac{dx}{3x + 5}.$  7)  $\int \sin(5 - 3x)dx.$

2)  $\int \sqrt[4]{1 + 3x}dx.$  8)  $\int \frac{\ln^4(3x + 1)}{3x + 1}dx.$

3)  $\int \frac{dx}{3x^2 + 2}.$  9)  $\int \frac{e^{3x}}{e^{3x} - 5}dx.$

4)  $\int \frac{5xdx}{\sqrt{3 - 5x^2}}.$  10)  $\int \sqrt{\cos^3 2x} \sin 2xdx.$

5)  $\int \frac{dx}{\sqrt{5x^2 - 1}}.$  11)  $\int \frac{dx}{\sin^2 3x \operatorname{ctg}^3 3x}.$

6)  $\int e^{3-5x}dx.$  12)  $\int \frac{\sqrt[3]{\operatorname{arctg} 2x}}{1 + 4x^2}dx.$

19.1)  $\int \frac{5x - 2}{x^2 + 9}dx.$  5)  $\int \frac{(2x^2 + 41x - 91)dx}{(x - 4)(x^2 + 2x - 3)}.$

2)  $\int \frac{x^4 - 2x^2 - 1}{x^2 + 1}dx.$  6)  $\int \frac{4x^4 + 8x^3 - 1}{(x^2 + x)(x + 1)}dx.$

3)  $\int \frac{dx}{2x^2 - 8x + 30}.$  7)  $\int \frac{(4x - 10)dx}{(x + 2)(x^2 - 2x + 10)}.$

4)  $\int \frac{2x - 1}{2x^2 + 8x + 6}dx.$  8)  $\int \frac{x^3 + 4x - 3}{x^4 + 4x^2}dx.$

20.1)  $\int \operatorname{tg}^4 \frac{2x}{3}dx.$  4)  $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[3]{\cos^2 x}}dx.$

2)  $\int \cos^4 \frac{x}{2}dx.$  5)  $\int \frac{dx}{7 \cos^2 x + 16 \sin^2 x}.$

3)  $\int \sin 3x \cos 2xdx.$  6)  $\int \frac{2 - \sin x + 3 \cos x}{1 + \cos x}dx.$

21.1)  $\int \frac{1 + 3x}{\sqrt{1 + 4x^2}}dx.$  5)  $\int \frac{x + 5}{\sqrt{3 - 6x - x^2}}dx.$

2)  $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2 - 8x + 1}}.$  6)  $\int \frac{dx}{(x + 1)\sqrt{1 + x - x^2}}.$

3)  $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 - 1}}.$  7)  $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2x + 1)^2 - \sqrt{2x + 1}}}$

4)  $\int \frac{x + 1}{x\sqrt{x - 1}}dx.$  8)  $\int \frac{\sqrt[3]{1 + \sqrt{x}}}{x\sqrt[3]{x^2}}dx.$

22.1)  $\int \frac{\ln x}{x^3}dx.$  4)  $\int (x - 4) \cos 2xdx.$

2)  $\int \operatorname{arctg} 2xdx.$  5)  $\int x^2 (\cos 2x + 3)dx.$

3)  $\int xe^{-7x}dx.$  6)  $\int \ln(x - 7)dx.$

23. Обчислити інтеграли:

1)  $\int_{\frac{3}{2}}^2 \operatorname{arctg}(2x - 3)dx.$  4)  $\int_0^{\pi} 2^4 \sin^6 \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2} dx.$

2)  $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^4 + x^2}.$  5)  $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \sqrt{1 - x^2}dx.$

3)  $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{ctg}^3 x dx.$  6)  $\int_3^4 \frac{x^2 dx}{x^2 - 6x + 10}.$

24. Обчислити інтеграли або довести їх розбіжність:

1)  $\int_1^{\infty} \frac{4dx}{x(1 + \ln^2 x)}.$  2)  $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin x dx}{\sqrt[7]{\cos^2 x}}.$

25. Обчислити площі фігур, обмежених кривими:

1)  $y = x\sqrt{9 - x^2}, y = 0, x \in [0; 3].$

2)  $\begin{cases} x = \sqrt{2} \cos t, \\ y = 2\sqrt{2} \sin t, \end{cases} y = 2 (y \geq 2).$

3)  $\rho = \cos 2\varphi.$

26. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої кривими  $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{2}, x = 0, y = 0,$  навколо осі  $Ox.$

27. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням кривої  $y^2 = 2x, x = \frac{3}{2}$  навколо осі  $Ox.$

## Варіант 18

1. Побудувати графіки функцій:

1)  $y = \frac{1}{2} \cos\left(3x - \frac{\pi}{3}\right)$ . 4)  $y = \operatorname{ctg}\left(3x + \frac{3\pi}{4}\right)$ .

2)  $y = 2 \arccos(x + 2)$ . 5)  $y = \left(\frac{1}{5}\right)^{x-1}$ .

3)  $y = \frac{1}{3} \operatorname{arctg}(x - 1)$ . 6)  $y = -\ln(2 - x)$ .

2. Знайти:

а) алгебричну форму  $\frac{z_1}{z_2} + 2z_3 + i^5$ ;

б) тригонометричну форму  $z_3$ ;

в), г)  $(z_1 z_2)^8$  та  $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{10}$ ;

д), е) всі значення  $\sqrt[3]{z_1}$  та  $\sqrt[4]{z_2}$ , якщо:

$z_1 = 7 - 7i, z_2 = 2\sqrt{3} + 2i, z_3 = -5 + 4i$ .

3. Зобразити множину точок  $z \in \mathbb{C}$ :

1)  $|z - 1 + i| > 2, \frac{2\pi}{3} < \arg z \leq \pi$ .

2)  $|z - 5| > |z + 3i|, |\operatorname{Im} z| > 2$ .

3)  $z^3 - 2z^2 + 16 = 0$ .

Знайти границі (4—7):

4.1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{5}{6} + \frac{13}{36} + \dots + \frac{3^n + 2^n}{6^n} \right)$ .

2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^6 + 4} + \sqrt{n - 4}}{\sqrt[5]{n^6 + 6} - \sqrt{n - 6}}$ .

3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n(n+5)} - n)$ .

5.1)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 4x - 5}{3x^2 + 2x - 1}$ . 6.1)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \sin 2x}{\pi - 4x}$ .

2)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^4 - 5x^2 + 1}{x^2 - 1}$ . 2)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x}{\operatorname{tg} 4x}$ .

3)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^2 + 4x - 5}{4x^2 - 3x + 2}$ . 3)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - \cos x}{1 - \cos x}$ .

4)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^2 + 3x + 5}{4x^3 - 2x^2 + 1}$ . 4)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\ln \operatorname{tg} x}{\cos 2x}$ .

5)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^4 - 3x^2}{1 + 2x + 3x^2}$ . 5)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{4x} - e^{2x}}{2 \operatorname{tg} x - \sin x}$ ,

6)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{4x - 3} - 3}{x^2 - 9}$ . 6)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2^x - 2}{\ln x}$ .

7)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+5}{x}\right)^{3x+4}$ . 7)  $\lim_{x \rightarrow 0} (3 - 2 \cos x)^{\operatorname{cosec}^2 x}$ .

8)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x-3}{x+4}\right)^{6x+1}$ . 8)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x-\frac{\pi}{2}}}$ .

7.1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x \cdot \ln \operatorname{ctg} x$ . 3)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{\sin 2x}$ .

2)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$ . 4)  $\lim_{x \rightarrow 1} (x-1)^{\frac{1}{e^{2x}-1}}$ .

8. Визначити порядок і головну частину розкладу  $\alpha(x)$  відносно  $\beta(x)$ :

1)  $\alpha(x) = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2x} - 1, \beta(x) = \operatorname{arctg} x, x \rightarrow 0$ .

2)  $\alpha(x) = e^{2x^2} - \cos 2x, \beta(x) = \operatorname{arctg} x, x \rightarrow 0$ .

3)  $\alpha(x) = \operatorname{tg} 2x - \sin 2x, \beta(x) = x \ln(1 + x^2), x \rightarrow 0$ .

9. Дослідити функцію на неперервність:

1)  $f(x) = \frac{1}{1 + e^{\frac{x}{x-1}}}$ .

2)  $f(x) = \begin{cases} x-2, & x \leq -1, \\ x^2-1, & -1 < x \leq 2, \\ -x+5, & x > 2. \end{cases}$

3)  $f(x) = \frac{3x}{x-4}$  у точках  $x_1 = 4, x_2 = 5$ .

Знайти похідні функцій (10—13):

10.1)  $y = 3\sqrt{x^5} - \frac{5}{x^4} + \frac{3x^2 - 5x}{e^{-x^2}}$ .

2)  $y = \sqrt{4x^2 + \sqrt[5]{\operatorname{ctg} 2}} - \frac{\log_2(7x-5)}{\operatorname{tg} \sqrt{x}}$ .

3)  $y = e^{\cos x} \operatorname{ctg} 8x^3 + \frac{\operatorname{cth}^2(3x-1)}{\arccos x^2}$ .

4)  $y = \log_2 x \operatorname{arctg}^3 4x - \frac{6 \log_3(2x+9)}{(x+4)^2}$ .

5)  $y = \operatorname{cth}^4 2x \cdot \operatorname{arctg} \sqrt[3]{x} + \left(\operatorname{cth} \frac{1}{x}\right)^{\arcsin 7x}$ .

6)  $y = (\lg(4x-3))^{\arccos 4x} - \frac{(x-2)^2 \sqrt[5]{(x+1)^2}}{(x-3)^4 (x-4)^3}$ .

11.1)  $y = 7x - \operatorname{ctg} y$ . 2)  $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \arcsin y$ .

12.  $\begin{matrix} y'_x = ? \\ y''_{xx} = ? \end{matrix} : 1) \begin{cases} x = \sin t - t \cos t, \\ y = \cos t + t \sin t. \end{cases} 2) \begin{cases} x = \sin t, \\ y = \ln \cos t. \end{cases}$

13.1)  $y = (x^2 - 2x) \sin 5x, y^{(6)} = ?$

2)  $y = \lg(1+x), y^{(n)} = ?$

14. Скласти рівняння дотичної та нормалі до кривої в заданій точці:

1)  $y = \frac{x^{16} + 9}{1 - 5x^2}, x_0 = 1$ .

2)  $x = \frac{t+1}{t}, y = \frac{1-t}{t}, t_0 = -1.$

3)  $x = \sin t, y = \cos^2 t, z = \sin t \cos t,$

$M_0 \left( \frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right).$

15. Знайти проміжки монотонності функції  $y = (2x - 1)^2(2x - 3)^2.$

1)  $y = e^x + e^{-x}, [-1; 2].$

16.  $\max_{[a,b]} f(x) = ?$

2)  $y = \sqrt[3]{2x^2(x-6)}, [-2; 4].$

17. Дослідити функцію і побудувати її графік:

1)  $y = \frac{2x^3 - 3x^2 - 2x + 1}{1 - 3x^2}.$  5)  $y = x \ln x.$

2)  $y = 2 + \sqrt[3]{8x(x+2)}.$  6)  $y = \frac{4x}{4+x^2}.$

3)  $y = \sqrt[3]{(x-1)^2} - \sqrt[3]{(x-2)^2}.$  7)  $y = 2 \ln \frac{x+3}{x}.$

4)  $y = \sqrt[3]{\sin x}.$  8)  $y = \frac{4x}{(x+1)^2}.$

Знайти інтеграли (18—22):

18.1)  $\int \frac{dx}{3-5x}.$  7)  $\int \sqrt[3]{1+3x} dx.$

2)  $\int \frac{\sqrt{2} dx}{\sqrt{7-2x^2}}.$  8)  $\int \sin(3x+6) dx.$

3)  $\int \frac{x dx}{\sqrt{3x^2+8}}.$  9)  $\int \frac{dx}{3x^2-5}.$

4)  $\int e^{1-4x} dx.$  10)  $\int \frac{\sin 4x}{\sqrt[3]{\cos^2 4x}} dx.$

5)  $\int \frac{\operatorname{tg} 6x}{\cos^2 6x} dx.$  11)  $\int \frac{dx}{(x-3) \ln^4(x-3)}.$

6)  $\int \frac{\arctg^6 3x}{1+9x^2} dx.$  12)  $\int \frac{x^2}{7+3x^3} dx.$

19.1)  $\int \frac{10x+5}{5x^2+1} dx.$  5)  $\int \frac{(2x^2+5x+5) dx}{(x+2)(x^2+2x-3)}.$

2)  $\int \frac{x^4+2}{x^2-4} dx.$  6)  $\int \frac{4x^4+8x^3-1}{(x^2-1)(x+1)} dx.$

3)  $\int \frac{dx}{3x^2-9x+6}.$  7)  $\int \frac{(x^2+23) dx}{(x+1)(x^2+6x+13)}.$

4)  $\int \frac{(2-x) dx}{4x^2+16x-9}.$  8)  $\int \frac{7x-2}{(x-1)^2(x^2+4)} dx.$

20.1)  $\int \operatorname{ctg}^4 2x dx.$  4)  $\int \sqrt[5]{\cos^4 x} \sin^3 x dx.$

2)  $\int \cos^4 3x dx.$  5)  $\int \frac{dx}{1+3\cos^2 x}.$

3)  $\int \cos x \cos 7x dx.$  6)  $\int \frac{dx}{5+\sin x+3\cos x}.$

21.1)  $\int \frac{5-4x}{\sqrt{1-x^2}} dx.$  5)  $\int \frac{2x+4}{\sqrt{3x^2+x-5}} dx.$

2)  $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-5x+6}}.$  6)  $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2+x+1}}.$

3)  $\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x^2} dx.$  7)  $\int \frac{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[6]{x}-1} dx.$

4)  $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x-7}}.$  8)  $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}{x\sqrt{x}} dx.$

22.1)  $\int \sqrt{x} \ln^2 x dx;$  4)  $\int \frac{x \operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x^2}} dx.$

2)  $\int (x^2+2)e^{-x} dx.$  5)  $\int (x-4) \cos 2x dx.$

3)  $\int \arcsin 2x dx.$  6)  $\int x \cos(x+6) dx.$

23. Обчислити інтеграли:

1)  $\int_2^3 \frac{x^7 dx}{1-x^4}.$  4)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+3) \sin x dx.$

2)  $\int_0^3 \frac{dx}{(9+x^2)^{\frac{3}{2}}}$  5)  $\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 2^8 \sin^4 x \cos^4 x dx.$

3)  $\int_{3,5}^5 \frac{x dx}{x^2-7x+13}.$  6)  $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt{(x+1)^3}}.$

24. Обчислити інтеграли або довести їх розбіжність:

1)  $\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2+5}}.$  2)  $\int_{-\frac{3}{4}}^0 \frac{dx}{\sqrt{4x+3}}.$

25. Обчислити площі фігур, обмежених кривими:

1)  $y = 4 - x^2, y = x^2 - 2x.$

2)  $\begin{cases} x = 4(t - \sin t), \\ y = 4(1 - \cos t), \\ y = 4, (0 < x < 8\pi, y \geq 4). \end{cases}$

3)  $\rho = \sqrt{3} \cos \varphi, \rho = \sin \varphi (0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}).$

26. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої кривими  $y = 3 \sin x, y = \sin x, y = 0, 0 \leq x \leq \pi,$  навколо осі  $Ox.$

27. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням кривої  $3y = x^3 (0 \leq x \leq 1)$  навколо осі  $Ox.$

## Варіант 19

1. Побудувати графіки функцій:

1)  $y = -\frac{1}{2}\sin\left(3x - \frac{2\pi}{3}\right)$ . 4)  $y = \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{12}\right)$ .

2)  $y = 2 \arcsin(x - 2)$ . 5)  $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+1}$ .

3)  $y = 3 \operatorname{arctg}(x + 1)$ . 6)  $y = -\lg(3x + 2)$ .

2. Знайти:

а) алгебричну форму  $\frac{z_1}{z_2} + 2z_3 - i^7$ ;

б) тригонометричну форму  $z_3$ ;

в), г)  $(z_1 z_2)^8$  та  $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{10}$ ;

д), е) всі значення  $\sqrt[3]{z_1}$  та  $\sqrt[4]{z_2}$ , якщо:

$z_1 = 2 + 2i, z_2 = -2 + 2\sqrt{3}i, z_3 = -4 - 3i$ .

3. Зобразити множину точок  $z \in \mathbb{C}$ :

1)  $|z - 1 + i| > 3, \frac{\pi}{2} < \arg z \leq \pi$ .

2)  $|z + 5i| < |z - 2|, |\operatorname{Re} z| < 3$ .

3)  $z^3 - 5z^2 + 10z - 12 = 0$ .

Знайти границі (4—7):

4.1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + 5 + \dots + 2n + (2n + 3)}{n(n + 3)}$ .

2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 - \sqrt[4]{n^3}}{\sqrt[3]{n^6 + n^3 + 1} - 5n}$ .

3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^3 + 8(\sqrt{n^3 + 2} - \sqrt{n^3 - 1})}$ .

5.1)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{7x^2 + 4x - 3}{2x^2 + 3x + 1}$ . 6.1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 4x \cdot \sin^2 4x}{3x^2}$ .

2)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^2 - 5x - 12}{x^2 - 5x + 6}$ . 2)  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^3 - 64}{\operatorname{tg}(x - 4)}$ .

3)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^4 - 4x^2 + 3}{2x^4 + 1}$ . 3)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{\sin(\pi(x+2))}$ .

4)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6x^3 + 5x^2 - 3}{2x^2 - x + 7}$ . 4)  $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{e^\pi - e^x}{\sin 5x - \sin 3x}$ .

5)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x + 3}{x^3 - 4x^2 - x}$ . 5)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{2x} - 7^x}{\arcsin 3x - 5x}$ .

6)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{5x+1} - 4}{x^2 + 2x - 15}$ . 6)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{e^{\sin 2x} - e^{\operatorname{tg} 2x}}{\ln\left(\frac{2x}{\pi}\right)}$ .

7)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-7}{x+1}\right)^{4x-2}$ . 7)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left(2 - 3^{\sin^2 x}\right)^{\frac{1}{\ln \cos x}}$ .

8)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x+3}{3x-1}\right)^{2x}$ . 8)  $\lim_{x \rightarrow 1} \left(2e^{x-1} - 1\right)^{\frac{3x-1}{x-1}}$ .

7.1)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2 x - 2 \operatorname{tg} x}{1 + \cos 4x}$ . 3)  $\lim_{x \rightarrow +0} x \ln x$ .

2)  $\lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{ctg} x)^{\sin x}$ . 4)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\operatorname{tg} x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$ .

8. Визначити порядок і головну частину розкладу  $\alpha(x)$  відносно  $\beta(x)$ :

1)  $\alpha(x) = e^{3x^5} - \cos^2 x^3, \beta(x) = \arcsin x, x \rightarrow 0$ .

2)  $\alpha(x) = \ln(2x^2 - 3x - 8), \beta(x) = x - 3, x \rightarrow 3$ .

3)  $\alpha(x) = \ln(1 + x^3 \sin^3 x), \beta(x) = \operatorname{tg} x, x \rightarrow 0$ .

9. Дослідити функцію на неперервність:

1)  $f(x) = \frac{x}{\operatorname{tg} x}$ .

2)  $f(x) = \begin{cases} x + 2, & x \leq -2, \\ x^2, & -2 < x \leq 1, \\ 2, & x > 1. \end{cases}$

3)  $f(x) = \frac{2x}{x^2 - 1}$  у точках  $x_1 = 1, x_2 = 2$ .

Знайти похідні функцій (10—13):

10.1)  $y = \sqrt{x^5} + \frac{4}{x^3} + \frac{e^{-x}}{(x^2 - x + 4)^2}$ .

2)  $y = \sqrt{\operatorname{tg} \ln 2 - 2x^2} - \frac{\log_3(4x - 2)}{\operatorname{ctg} 2x}$

3)  $y = \cos^5 x \cdot \arccos 4x + \frac{\operatorname{sh}^5 x}{\arccos 4x}$ .

4)  $y = \lg(x - 2) \cdot \arcsin^5 x - \frac{3 \log_2(5x - 4)}{(x - 3)^5}$ .

5)  $y = \operatorname{sh}^4 5x \cdot \arccos 3x^2 + (\cos x)^{\arcsin(3x-2)}$ .

6)  $y = (\ln x)^{\operatorname{arctg} 5x} - \frac{(x+1)^2 \sqrt{x^2+2x}}{(x+3)^7 (x-4)^2}$ .

11.1)  $xy - 6 = \cos y$ . 2)  $y^3 - 3y + 4x = 0$ .

12.  $\begin{matrix} y'_x = ? \\ y''_{xx} = ? \end{matrix} : 1) \begin{cases} x = \sin 2t, \\ y = \cos^2 t. \end{cases} 2) \begin{cases} x = t + \sin t, \\ y = 2 + \cos t. \end{cases}$

13.1)  $y = (x + 7) \ln(3x + 4), y^{(5)} = ?$

2)  $y = \frac{x}{x+5}, y^{(n)} = ?$

14. Скласти рівняння дотичної та нормалі

до кривої в заданій точці:

1)  $y = 3(\sqrt[3]{x} - 2\sqrt{x}), x_0 = 1$ .

2)  $x = 1 - t^3, y = t - t^3, t_0 = 2$ .

3)  $x = 2t - 1, y = -3t + 2, z = t^2 + 1,$   
 $M_0(9; -13; 26).$

15. Знайти проміжки монотонності функції  $y = \frac{27}{4}(x^3 - x^2) - 4.$

1)  $y = x \ln x, [e^{-2}; 1].$

16.  $\max_{[a,b]} f(x) = ?$   
 $\min_{[a,b]} f(x) = ?$   
 2)  $y = \frac{2x(2x + 3)}{x^2 + 4x + 5}, [-2; 1].$

17. Дослідити функцію і побудувати її графік:

1)  $y = 6x - 6 - 9\sqrt[3]{(x-1)^2}.$  5)  $y = \frac{x^2 - 11}{4x - 3}.$

2)  $y = \sqrt[3]{(x+1)(x-2)^2}.$  6)  $y = (x-1)e^{3x+1}.$

3)  $y = (2x-1)e^{2(1-x)}.$  7)  $y = \frac{x^4}{x^3 - 1}.$

4)  $y = \ln(-\sin x - \cos x).$  8)  $y = \frac{8(x-1)}{(x+1)^2}.$

Знайти інтеграли (18—22):

18.1)  $\int \frac{dx}{5+4x}.$  7)  $\int \frac{dx}{\sqrt{(3-x)^5}}.$

2)  $\int \frac{\sqrt{14}dx}{2x^2 - 7}.$  8)  $\int \cos(5x - 8)dx.$

3)  $\int \frac{5xdx}{\sqrt{5x^2 + 3}}.$  9)  $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}}.$

4)  $\int e^{2-5x} dx.$  10)  $\int \frac{dx}{(x+5)\ln^3(x+5)}.$

5)  $\int \frac{dx}{\sin^2 x \operatorname{ctg}^3 x}.$  11)  $\int \sin^3 5x \cos 5x dx.$

6)  $\int e^{5x^2-3} x dx.$  12)  $\int \frac{\sqrt{\operatorname{arctg}^3 x}}{1+x^2} dx.$

19.1)  $\int \frac{1-2x}{3x^2+2} dx.$  5)  $\int \frac{(x^2+10x+17)dx}{(x^2+8x+15)(x+1)}.$

2)  $\int \frac{x^3-3}{x+5} dx.$  6)  $\int \frac{2x^4+x^3-x^2-1}{x^3+x^2} dx.$

3)  $\int \frac{dx}{2x^2-2x+5}.$  7)  $\int \frac{(2x^2+7x+7)dx}{(x-1)(x^2+2x+5)}.$

4)  $\int \frac{(2x-1)dx}{3x^2-6x-9}.$  8)  $\int \frac{x^3+2x^2+4x-2}{x^4+3x^2-4} dx.$

20.1)  $\int \operatorname{ctg}^4 2x dx.$  4)  $\int \sin^4 2x \cos^2 2x dx.$

2)  $\int \sin^4 2x dx.$  5)  $\int \frac{dx}{2\sin^2 x + 3\sin x \cos x - 1}.$

3)  $\int \frac{\sin 2x}{\cos^3 2x} dx.$  6)  $\int \frac{dx}{5+3\cos x+4\sin x}.$

21.1)  $\int \frac{5x-1}{\sqrt{x^2-3}} dx.$  5)  $\int \frac{7x-2}{\sqrt{x^2-5x+1}} dx.$

2)  $\int \frac{dx}{\sqrt{3x-2x^2}}.$  6)  $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-x+1}}.$

3)  $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-1}}.$  7)  $\int \frac{\sqrt{x}dx}{1-\sqrt[4]{x}}.$

4)  $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x-4}}.$  8)  $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}}{x^9\sqrt{x^4}} dx.$

22.1)  $\int \ln \frac{1-x}{1+x} dx.$  4)  $\int \arcsin 2x dx.$

2)  $\int \operatorname{arctg} \frac{x}{2} dx.$  5)  $\int (x+4) \cos 3x dx.$

3)  $\int x \sin(x+7) dx.$  6)  $\int (x^2+3) \sin x dx.$

23. Обчислити інтеграли:

1)  $\int_1^e x \ln^2 x dx.$  4)  $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 2^8 \sin^2 x \cos^6 x dx.$

2)  $\int_2^3 \frac{dx}{x^4-1}.$  5)  $\int_2^4 \frac{\sqrt{x^2-4}}{x} dx.$

3)  $\int_2^3 \frac{3x-2}{x^2-4x+5} dx.$  6)  $\int_{\ln 3}^0 \frac{1-e^x}{1+e^x} dx.$

24. Обчислити інтеграли або довести їх розбіжність:

1)  $\int_{-\infty}^{-1} \frac{7dx}{(x^2-4x)\ln 5}.$  2)  $\int_1^2 \frac{x dx}{\sqrt{(x^2-1)^3} \ln 2}.$

25. Обчислити площі фігур, які обмежені кривими:

1)  $y = \sin x \cos^2 x, y = 0 \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right).$

2)  $\begin{cases} x = 16 \cos^3 t, \\ y = 2 \sin^3 t, \end{cases} x = 2 \ (x \geq 2).$

3)  $\rho = 4 \sin 3\varphi, \rho = 2 \ (\rho \geq 2).$

26. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої кривими  $y = 5 \cos x, y = \cos x, x = 0, x \geq 0,$  навколо осі  $Ox.$

27. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням кривої  $\rho^2 = 4 \cos 2\varphi$  навколо полярної осі.

## Варіант 20

1. Побудувати графіки функцій:

1)  $y = 2 \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$ . 4)  $y = \operatorname{ctg}\left(\frac{1}{3}x + \frac{\pi}{12}\right)$ .

2)  $y = \frac{1}{3} \arccos(x + 3)$ . 5)  $y = 2^{x+2}$ .

3)  $y = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(x + 2)$ . 6)  $y = \ln(2x + 3)$ .

2. Знайти:

а) алгебричну форму  $\frac{z_1}{z_2} + 2z_3 - i^3$ ;

б) тригонометричну форму  $z_3$ ;

в), г)  $(z_1 z_2)^8$  та  $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{10}$ ;

д), е) всі значення  $\sqrt[3]{z_1}$  та  $\sqrt[4]{z_2}$ , якщо:

$z_1 = -3 + 3i, z_2 = -\sqrt{3} - i, z_3 = 3 - 2i$ .

3. Зобразити множину точок  $z \in \mathbb{C}$ :

1)  $|z + 1 - i| > 2, \frac{\pi}{4} < \arg z \leq \frac{3\pi}{4}$ .

2)  $|z + 5| > |z + i|, |\operatorname{Im} z| < 1$ .

3)  $z^3 + 2z^2 - 2z + 3 = 0$ .

Знайти границі (4—7):

4.1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)! + (2n+2)!}{(2n+3)! - (2n+2)!}$ .

2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 \sqrt{11n} + \sqrt{25n^4 - 81}}{(n - 7\sqrt{n})\sqrt{n^2 - n + 1}}$ .

3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{(n^3 + 1)(n^2 + 3)} - \sqrt{n(n^4 + 2)}}{2\sqrt{n}}$ .

5.1)  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3x^2 - 3x - 4}{x^2 - x - 12}$ . 6.1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\sin 2x} - \frac{1}{\operatorname{tg} 2x} \right)$ .

2)  $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^2 - x - 30}{x^3 + 125}$ . 2)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - \cos 4x}{3x^2}$ .

3)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 4x + 2}{6x^2 + 5x + 1}$ . 3)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(5(x + \pi))}{e^{3x} - 1}$ .

4)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 4x - 7}{x^4 - 2x^3 + 1}$ . 4)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(9 - 2x^2)}{\sin 2\pi x}$ .

5)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^4 + 5x}{2x^2 - 3x - 7}$ . 5)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - e^{-5x}}{2 \sin x - \operatorname{tg} x}$ .

6)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - \sqrt{x^2 + 4}}{3x^2}$ . 6)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2}}{\sin 3x}$ .

7)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+2}{x} \right)^{3-2x}$ . 7)  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sqrt{2 - \cos x}$ .

8)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{6x+5}{x-10} \right)$ . 8)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (1 + \cos 3x)^{\sec x}$ .

7.1)  $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{3 + \ln x}{2 - 3 \ln \sin x}$ . 3)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x \sin x} - \frac{1}{x^2} \right)$ .

2)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\ln x)^{\frac{1}{x}}$ . 4)  $\lim_{x \rightarrow 0} (4^x - 1)^x$ .

8. Визначити порядок і головну частину розкладу  $\alpha(x)$  відносно  $\beta(x)$ :

1)  $\alpha(x) = \sqrt{1+x^6} - 1, \beta(x) = e^{6x} - 1, x \rightarrow 0$ .

2)  $\alpha(x) = \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}, \beta(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x+1}, x \rightarrow \infty$ .

3)  $\alpha(x) = \ln \cos 6x, \beta(x) = e^{\sqrt{x}} - 1, x \rightarrow 0$ .

9. Дослідити функцію на неперервність:

1)  $f(x) = \frac{|x|}{\operatorname{arctg} x}$ .

2)  $f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 1, \\ (x-2)^2, & 1 < x \leq 3, \\ -x+6, & x > 3. \end{cases}$

3)  $f(x) = 2^{\frac{3}{x+2}}$  у точках  $x_1 = -2, x_2 = -1$ .

Знайти похідні функцій (10—13):

10. а)  $y = \frac{7}{x^4} + \sqrt[3]{x^7} - \frac{e^{4x}}{(3x+5)^3}$ .

2)  $y = \sqrt[3]{\operatorname{ctg} \cos 5 - 4x^2} + \frac{\ln^3(5x-5)}{\operatorname{tg} \frac{1}{x}}$ .

3)  $y = \sin^3 7x \cdot \operatorname{arctg} 5x^2 - \frac{\sqrt{\operatorname{ch}^3 x}}{\operatorname{arctg} 5x}$ .

4)  $y = \log_3 x \operatorname{arctg}^5 7x + \frac{\log_5(x^2+x)}{7(x+3)^3}$ .

5)  $y = \operatorname{ch}^3 9x \cdot \operatorname{arctg} 3x - x^{\arccos(3x-1)}$ .

6)  $y = (\lg 2x)^{\arcsin x} - \frac{(x+1)^2 \sqrt[3]{(x-2)^4}}{(x-5)^3 (x+1)^7}$ .

11.1)  $3y = 7 + xy^3$ . 2)  $x^3 + \cos^3 xy = 3$ .

11.  $\begin{matrix} y'_x = ? \\ y''_{xx} = ? \end{matrix} : 1) \begin{cases} x = e^{3t}, \\ y = 3t + e^{3t}. \end{cases} 2) \begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 2 - \cos t. \end{cases}$

14.1)  $y = (3x-7)3^{-x}, y^{(5)} = ?$

2)  $y = \frac{5x+1}{13(2x+3)}, y^{(n)} = ?$

14. Скласти рівняння дотичної та нормалі до кривої в заданій точці:

1)  $y = \frac{1}{3x+2}, x_0 = 2$ .

2)  $x = \ln(1 + t^2), y = t - \operatorname{arctg} t, t_0 = 1.$

3)  $x = \cos t, y = \sin t, z = \ln \cos t, M_0(1; 0; 0).$

15. Знайти проміжки монотонності функції  $y = \frac{1}{8}x(12 - x^2).$

1)  $y = x^3 e^{x+1}, [-4; 0].$

16.  $\max_{[a,b]} f(x) = ?$

2)  $y = \frac{2(x^3 + 2)}{x^2 + 2x + 5}, [-5; 1].$

17. Дослідити функцію і побудувати її графік:

1)  $y = \sqrt[3]{x^2 + 6x + 8}.$  5)  $y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x + 1}.$

2)  $y = \frac{2x^2 - 9}{\sqrt{x^2 - 1}}.$  6)  $y = \frac{1 - 2x^3}{x^2}.$

3)  $y = \ln(x^2 - 2x + 6).$  7)  $y = -\frac{e^{-(x+2)}}{x + 2}.$

4)  $y = \sqrt{\frac{\sin x - \cos x}{2}}.$  8)  $y = \sqrt[3]{(x - 3)x^2}.$

Знайти інтеграли (18—22):

18.1)  $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{3 + x}}.$  7)  $\int \frac{dx}{6 - 3x}.$

2)  $\int \frac{dx}{8x^2 + 9}.$  8)  $\int \cos(3x - 7)dx.$

3)  $\int \frac{xdx}{3x^2 - 6}.$  9)  $\int \frac{dx}{\sqrt{8 - 3x^2}}.$

4)  $\int \frac{\ln^3(x - 5)}{x - 5} dx.$  10)  $\int \frac{\cos 5x}{\sqrt{\sin^3 5x}} dx.$

5)  $\int \frac{\sqrt{\operatorname{ctg} 4x}}{\sin^2 4x} dx.$  11)  $\int \frac{dx}{(1 + x^2)\sqrt{\operatorname{arctg} x}}.$

6)  $\int e^{6x-4} dx.$  12)  $\int e^{5-2x^2} x dx.$

19.1)  $\int \frac{1 - 3x}{4x^2 - 1} dx.$  5)  $\int \frac{6x^2 dx}{(x^2 + 3x + 2)(x - 1)}.$

2)  $\int \frac{x^3 + 1}{x^2 + 1} dx.$  6)  $\int \frac{x^3 - 4x^2 + 2x - 1}{x^3 - x^2} dx.$

3)  $\int \frac{dx}{2x^2 - 3x - 2}.$  7)  $\int \frac{(x^2 + 3x - 6)dx}{(x + 1)(x^2 + 6x + 13)}.$

4)  $\int \frac{(2x - 1)dx}{3 + x - 2x^2}.$  8)  $\int \frac{4x^2 - 2}{x^4 - x^2} dx.$

20.1)  $\int \operatorname{ctg}^3 3x dx.$  4)  $\int \frac{\cos^3 2x dx}{\sqrt[3]{\sin^2 2x}}.$

2)  $\int \cos^3(1 - x) dx.$  5)  $\int \frac{\sin 2x dx}{\sin^2 x + 4 \cos^2 x}.$

3)  $\int \cos 3x \cos 5x dx.$  6)  $\int \frac{2 + \sin x}{1 + \cos x} dx.$

21.1)  $\int \frac{2x - 4}{\sqrt{16 - x^2}} dx.$  5)  $\int \frac{x - 8}{\sqrt{4x^2 + x - 5}} dx.$

2)  $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2 - x + 3}}.$  6)  $\int \frac{dx}{(x - 1)\sqrt{x^2 + x - 1}}.$

3)  $\int \frac{\sqrt{9 - x^2}}{x^4} dx.$  7)  $\int \frac{(\sqrt[6]{3x + 1} + 1) dx}{\sqrt{3x + 1} - \sqrt[3]{3x + 1}}.$

4)  $\int \frac{\sqrt{x + 4}}{x} dx.$  8)  $\int \frac{\sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{x^2}}}{x^9 \sqrt{x^8}} dx.$

22.1)  $\int \frac{x \operatorname{arcsin} 2x}{\sqrt{1 - 4x^2}} dx.$  4)  $\int (x^2 - x + 1) \ln x dx.$

2)  $\int (x^2 - 3) \cos x dx.$  5)  $\int (x + 8) \sin 3x dx.$

3)  $\int x \cos(x - 4) dx.$  6)  $\int \ln(x + 8) dx.$

23. Обчислити інтеграли:

1)  $\int_{-3}^0 (x - 2)e^{-\frac{x}{3}} dx.$  4)  $\int_0^{\pi} 2^4 \cos^8 x dx.$

2)  $\int_{-1}^0 \frac{xdx}{x^3 - 1}.$  5)  $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{(1 - x^2)^{\frac{3}{2}}}$

3)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x dx.$  6)  $\int_{-\frac{3}{2}}^2 \frac{(x - 1)^2 dx}{x^2 + 3x + 4}.$

24. Обчислити інтеграли або довести їх розбіжність:

1)  $\int_{\frac{1}{3}}^{\infty} \frac{\pi dx}{(1 + 9x^2) \operatorname{arctg}^2 3x}.$  2)  $\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{dx}{9x^2 - 9x + 2}.$

25. Обчислити площі фігур, обмежених кривими:

1)  $y = \sqrt{4 - x^2}, y = 0, x = 0, x = 1.$

2)  $\begin{cases} x = 2 \cos t, \\ y = 6 \sin t, \end{cases} y = 3 (y \geq 3).$

3)  $\rho = 2 \cos \varphi, \rho = 2\sqrt{3} \sin \varphi, (0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}).$

26. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої кривими  $y = \sin^2 x, x = \frac{\pi}{2}, y = 0,$  навколо осі  $Ox.$

27. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням кривої  $\rho = 6 \sin \varphi$  навколо полярної осі.

## Варіант 21

1. Побудувати графіки функцій:

1)  $y = -3 \sin\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{3}\right)$ . 4)  $y = \operatorname{tg}\left(\frac{1}{4}x - \frac{\pi}{24}\right)$ .

2)  $y = 2 \arcsin(x - 3)$ . 5)  $y = 2^{x-2}$ .

3)  $y = -\operatorname{arctg}(x - 2)$ . 6)  $y = -\ln(3x - 2)$ .

2. Знайти:

а) алгебричну форму  $\frac{z_1}{z_2} + 2z_3 - i^9$ ;

б) тригонометричну форму  $z_3$ ;

в), г)  $(z_1 z_2)^8$  та  $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{10}$ ;

д), е) всі значення  $\sqrt[3]{z_1}$  та  $\sqrt[4]{z_2}$ , якщо:

$z_1 = -4 - 4i, z_2 = 3 - 3\sqrt{3}i, z_3 = 2 + i$ .

3. Зобразити множину точок  $z \in \mathbb{C}$ :

1)  $2 < |z - 1| < 3, \frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{3\pi}{4}$ .

2)  $|z - i| < |z + 2|, |\operatorname{Re} z| > 2$ .

3)  $z^3 + z^2 + 3z - 18 = 0$ .

Знайти границі (4—7):

4.1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 + \dots + n}{n - n^2 + 3}$ .

2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+3} - \sqrt[3]{8n^3+3}}{\sqrt[4]{n+4} - \sqrt[5]{n^5+5}}$ .

3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sqrt{n^4 + 3n^2} - \sqrt{(n^2 - 1)(n^2 - 2)} \right)$ .

5.1)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 9x + 10}{2x^2 + 3x - 10}$ . 6.1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 4x^3)}{2x^3}$ .

2)  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 + 3x - 28}{x^3 - 64}$ . 2)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - \cos^2 2x}{x^2}$ .

3)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^3 + 4x}{x^3 - 3x + 2}$ . 3)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{x \sin x}$ .

4)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{8x^5 - 4x^3 + 3}{2x^3 + x - 7}$ . 4)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1 - 2^{4-x^2}}{2(\sqrt{2x} - 2)}$ .

5)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 5x + 3}{3x^4 - 2x^2 + x}$ . 5)  $\lim_{x \rightarrow 1} (\ln^2 ex)^{\frac{1}{x^2+1}}$ .

6)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 4} - 2}{\sqrt{x^2 + 16} - 4}$ . 6)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4^{5x} - 9^{-2x}}{\sin x - \operatorname{tg} x^3}$ .

7)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2 - 3x}{5 - 3x} \right)^x$ . 7)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( 6 - \frac{5}{\cos x} \right)^{\operatorname{ctg}^2 x}$ .

8)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{3x + 7}{x + 4} \right)^{4x}$ . 8)  $\lim_{x \rightarrow 2} (2e^{x-2} - 1)^{\frac{3x+2}{x-2}}$ .

7.1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{50} - 50x + 49}{x^{100} - 100x + 99}$ . 3)  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{6}{1+2 \ln x}}$ .

2)  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - e^{2x} - 2x) \operatorname{ctg} x$ . 4)  $\lim_{x \rightarrow 1} (1 - x)^{\cos \frac{\pi x}{2}}$ .

8. Визначити порядок і головну частину розкладу  $\alpha(x)$  відносно  $\beta(x)$ :

1)  $\alpha(x) = e^{x^9} - \cos 2x^5, \beta(x) = \operatorname{arctg} x, x \rightarrow 0$ .

2)  $\alpha(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}, \beta(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}, x \rightarrow \infty$ .

3)  $\alpha(x) = \ln \sqrt{1 + x^4 \sin^6 x}, \beta(x) = \operatorname{tg} x, x \rightarrow 0$ .

9. Дослідити функцію на неперервність:

1)  $f(x) = \frac{2}{1 - 2^x}$ .

2)  $f(x) = \begin{cases} \cos x, & x < \frac{\pi}{4}, \\ 1, & \frac{\pi}{4} < x < 3, \\ 2x - 5, & x \geq 3. \end{cases}$

3)  $f(x) = 4^{\frac{3}{x-2}} + 2$  у точках  $x_1 = 2, x_2 = 3$ .

Знайти похідні функцій (10—13):

10.1)  $y = 3\sqrt{x} + \frac{4}{x^5} + \frac{e^{\operatorname{ctg} 5x}}{(3x - 5)^4}$ .

2)  $y = \sqrt[4]{5x^2 - \sqrt{\operatorname{tg} 4}} - \frac{\lg(x+2)}{\sin 2x^5}$ .

3)  $y = \ln(x+9) \operatorname{arctg}^3 2x^2 + \frac{\operatorname{th}^2(x+3)}{\operatorname{arctg} \sqrt{x}}$ .

4)  $y = \sqrt[3]{x-4} \arcsin^4 5x - \frac{\log_7(2x^2+5)}{(x-4)^2}$ .

5)  $y = \operatorname{th}^4 x \cdot \operatorname{arctg} \frac{1}{x} + (\cos(2x-1))^{\operatorname{arctg} \frac{1}{x}}$ .

6)  $y = (\sin 8x)^{\operatorname{cth}(x+3)} - \frac{(x+4)^3(x-2)^4}{(x+1)^2 \sqrt[3]{(x-2)^5}}$ .

11.1)  $y^2 = x + \ln \frac{y}{x}$ . 2)  $e^x + y = e^y + x$ .

12.  $\begin{matrix} y'_x = ? \\ y''_{xx} = ? \end{matrix} : 1) \begin{cases} x = t^3 \ln t, \\ y = t^2 \ln t. \end{cases} 2) \begin{cases} x = \cos t, \\ y = \ln \sin t. \end{cases}$

13.1)  $y = (x^2 - 3) \ln(2x + 5), y^{(5)} = ?$

2)  $y = a^{2x+3}, y^{(n)} = ?$

14. Скласти рівняння дотичної та нормалі до кривої в заданій точці:

1)  $y = \frac{x}{x^2 + 1}, x_0 = -2$ .

2)  $x = t(1 - \sin t), y = t \cos t, t_0 = 0$ .

3)  $x = 20t, y = 16t^2, z = t^3, M_0(10; 4; \frac{1}{8})$ .

15. Знайти проміжки монотонності функції  $y = \frac{1}{16}x^2(x - 4)^2$ .

16.  $\max_{[a,b]} f(x) = ?$   
 1)  $y = x^2 - 2x + \frac{2}{x-1}, [-1; 3]$ .  
 2)  $y = \sqrt[3]{2(x-1)^2(x-4)}, [0; 4]$ .

17. Дослідити функцію і побудувати її графік:

1)  $y = -\frac{3\sqrt[3]{6(x+1)^2}}{x^2 + 8x + 24}$ . 5)  $y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x + 1}$ .

2)  $y = \frac{x^3 - 2x^2 - 3x + 2}{1 - x^2}$ . 6)  $y = \ln\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)$ .

3)  $y = \sqrt[3]{(x-2)^2} - \sqrt[3]{(x-3)^2}$ . 7)  $y = \frac{4}{x^2 + 2x - 3}$

4)  $y = e^{-\sqrt{2}\sin x}$ . 8)  $y = 2\ln \frac{2}{x-4}$ .

Знайти інтеграли (18—22):

18.1)  $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{2+x}}$ . 7)  $\int \sin(4 - 2x)dx$ .

2)  $\int \frac{dx}{2-5x}$ . 8)  $\int \frac{4xdx}{\sqrt{4x^2+3}}$ .

3)  $\int \frac{dx}{7x^2-4}$ . 9)  $\int \frac{\sqrt{\ln(2x-1)}}{2x-1} dx$ .

4)  $\int \frac{dx}{\sqrt{5x^2+1}}$ . 10)  $\int \frac{\sin x}{e^{\cos x}} dx$ .

5)  $\int e^{5x-7} dx$ . 11)  $\int \cos^7 2x \sin 2x dx$ .

6)  $\int \frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} 5x}}{\cos^2 5x} dx$ . 12)  $\int \frac{dx}{(1+x^2)\operatorname{arctg}^3 x}$ .

19.1)  $\int \frac{x-5}{3-2x^2} dx$ . 5)  $\int \frac{6x^4 dx}{(x^2-1)(x+2)}$ .

2)  $\int \frac{1-2x^4}{x^2+1} dx$ . 6)  $\int \frac{6x-2x^2-1}{x^3-2x^2+x} dx$ .

3)  $\int \frac{dx}{2x^2-6x+11}$ . 7)  $\int \frac{(4x^2+38)dx}{(x+2)(x^2-2x+10)}$ .

4)  $\int \frac{(x-4)dx}{3x^2+x-2}$ . 8)  $\int \frac{2x^3-2x-5}{x^4+3x^2-4} dx$ .

20.1)  $\int \operatorname{ctg}^4 x dx$ . 4)  $\int \frac{\sin^3 2x}{\sqrt[3]{\cos^2 2x}} dx$ .

2)  $\int \sin^4 4x dx$ . 5)  $\int \frac{dx}{7\cos^2 x + 16\sin^2 x}$ .

3)  $\int \cos 2x \cos 5x dx$ . 6)  $\int \frac{dx}{3 + \cos x + \sin x}$ .

21.1)  $\int \frac{5-x}{\sqrt{3x^2+1}} dx$ . 5)  $\int \frac{3x+4}{\sqrt{2+3x-x^2}} dx$ .

2)  $\int \frac{dx}{\sqrt{2-x-2x^2}}$ . 6)  $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-x-1}}$ .

3)  $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+9}}$ . 7)  $\int \frac{\sqrt{x}dx}{x-4\sqrt[3]{x^2}}$ .

4)  $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x+2}}$ . 8)  $\int \frac{\sqrt[3]{(1+\sqrt[3]{x})^2}}{x^9\sqrt{x^5}} dx$ .

22.1)  $\int \sqrt{x} \ln x dx$ . 4)  $\int \frac{\arccos x}{\sqrt{1+x}} dx$ .

2)  $\int (x^2+1)e^{-x} dx$ . 5)  $\int (x+6) \cos 4x dx$ .

3)  $\int x \sin(x+4) dx$ . 6)  $\int \operatorname{arctg} \frac{x}{5} dx$ .

23. Обчислити інтеграли:

1)  $\int_1^2 (x-1) \ln x dx$ . 4)  $\int_0^{2\pi} \sin^8 x dx$ ;

2)  $\int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{3-x^2} dx$ . 5)  $\int_2^3 \frac{3x^2+2x-3}{x^3-x} dx$ .

3)  $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{4x^2+4x+5}$ . 6)  $\int_0^{\ln 5} \frac{e^x \sqrt{e^x-1}}{e^x+3} dx$ .

24. Обчислити інтеграли або довести їх розбіжність:

1)  $\int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{\sqrt[3]{(x^3+8)^4}}$ . 2)  $\int_{\frac{1}{4}}^1 \frac{dx}{20x^2-9x+1}$ .

25. Обчислити площі фігур, обмежених кривими:

1)  $y = x^2\sqrt{4-x^2}, y = 0 (0 \leq x \leq 2)$ .

2)  $\begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t), \end{cases} y \geq 3 (0 < x < 4\pi)$ .

3)  $\rho = \sin 3\varphi$ .

26. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої кривими  $x = \sqrt[3]{y-2}, x = 1, y = 1$ , навколо осі  $Ox$ .

27. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням кривої  $x = t - \sin t, y = 1 - \cos t (0 \leq t \leq 2\pi)$  навколо осі  $Ox$ .

## Варіант 22

1. Побудувати графіки функцій:

- 1)  $y = -3 \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$ . 4)  $y = \operatorname{ctg}\left(\frac{1}{2}x + \frac{2\pi}{3}\right)$ .  
2)  $y = 3 \arccos(x + 1)$ . 5)  $y = 5^{x+1}$ .  
3)  $y = -2 \operatorname{arctg}(x + 3)$ . 6)  $y = 2 \lg(2x - 4)$ .

2. Знайти:

а) алгебричну форму  $\frac{z_1}{z_2} + 2z_3 - i^6$ ;

б) тригонометричну форму  $z_3$ ;

в), г)  $(z_1 z_2)^8$  та  $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{10}$ ;

д), е) всі значення  $\sqrt[3]{z_1}$  та  $\sqrt[4]{z_2}$ , якщо:

$$z_1 = 5 - 5i, z_2 = 2\sqrt{3} + 2i, z_3 = -2 - 3i.$$

3. Зобразити множину точок  $z \in \mathbb{C}$ :

- 1)  $2 < |z + 1| < 4, \frac{\pi}{2} < \arg z < \pi$ .  
2)  $|z + i| > |z - 2|, |\operatorname{Im} z| > 3$ .  
3)  $z^3 + 4z^2 + 6z + 4 = 0$ .

Знайти границі (4—7):

4.1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + \sqrt{n} - 1}{2 + 7 + \dots + (5n - 3)}$ .

2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2} - \sqrt{n^2 + 5}}{\sqrt[5]{n^7} - \sqrt{n + 1}}$ .

3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{(n^5 + 1)(n^2 - 1)} - n\sqrt{n(n^4 + 1)}}{n}$ .

5.1)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^2 + x - 5}{x^2 - 2x + 1}$ . 6.1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 5x}{x^2 - x}$ .

2)  $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{8x^3 - 1}{x^2 - \frac{1}{4}}$ . 2)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 5x}{\operatorname{tg} 2x}$ .

3)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + 4x - x^4}{x + 3x^2 + 2x^4}$ . 3)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x}{2^{-3x} - 1} \ln 2$ .

4)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 7x + 1}{x^3 + 4x^2 - 3}$ . 4)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt[4]{x} - 1}$ .

5)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^5 - x^3}{4x^2 + 3x - 6}$ . 5)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - e^{2x}}{\sin 3x - \operatorname{tg} 2x}$ .

6)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{\sqrt{5-x} - \sqrt{5}}$ . 6)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{1 - \cos \sqrt{x}}$ .

7)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1-x}{2-x}\right)^{3x-1}$ . 7)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left(3 - \frac{2}{\cos x}\right)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$ .

8)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{4x+5}\right)^{3x}$ . 8)  $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\ln(2 + \cos x)}{(3^{\sin x} - 1)^2}$ .

7.1)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x - x + 1}{x^x - 1}$ . 3)  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 e^{-0,01x}$ .

2)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 - e^x)^{\frac{1}{x}}$ . 4)  $\lim_{x \rightarrow 0} (\arcsin x)^{\frac{1}{2 + \ln x}}$ .

8. Визначити порядок і головну частину розкладу  $\alpha(x)$  відносно  $\beta(x)$ :

1)  $\alpha(x) = \sqrt{1 + x \sin^4 x} - 1, \beta(x) = \ln(1 + x), x \rightarrow 0$ .

2)  $\alpha(x) = \frac{x+1}{x^4+1}, \beta(x) = \frac{1}{x}, x \rightarrow \infty$ .

3)  $\alpha(x) = 2x \sin^3 x, \beta(x) = e^x - 1, x \rightarrow 0$ .

9. Дослідити функцію на неперервність:

1)  $f(x) = \frac{x}{\cos x}$ .

2)  $f(x) = \begin{cases} -x, & x \leq 0, \\ x^3, & 0 < x \leq 2, \\ x + 4, & x > 2. \end{cases}$

3)  $f(x) = 3^{\frac{2}{x+1}} - 2$  у точках  $x_1 = -1, x_2 = 0$ .

Знайти похідні функцій (10—13):

10.1)  $y = \sqrt{x^3} - \frac{4}{x^5} - \frac{(2x-3)^7}{e^{-2x}}$ .

2)  $y = \sqrt[5]{\cos \ln 13 + x^2} + \frac{\operatorname{tg}^3 7x}{\ln(3x+2)}$ .

3)  $y = \cos \sqrt[5]{x} \cdot \operatorname{arctg} x^4 - \frac{\arcsin^2 3x}{\operatorname{ch}(x-5)}$ .

4)  $y = \lg(x+2) \arcsin^2 3x + \frac{2 \ln(3x-10)}{(x+5)^7}$ .

5)  $y = \operatorname{cth}^3 4x \cdot \arcsin(3x+1) - (\operatorname{tg} 3x^4)^{\sqrt{x}}$ .

6)  $y = (\cos 4x)^{\operatorname{th}(x-7)} + \frac{(x-1)^6(x+2)^3}{(x+1)^2 \sqrt[5]{(x+3)^2}}$ .

11.1)  $xy^2 - y^3 = 4x - 5$ . 2)  $\operatorname{tg} xy = e^x + e^y$ .

12.  $\begin{matrix} y'_x = ? \\ y''_{xx} = ? \end{matrix} : 1) \begin{cases} x = \arccos t, \\ y = \sqrt{1-t^2}. \end{cases} \begin{cases} x = \cos t + t \sin t, \\ y = \sin t - t \cos t. \end{cases}$

13.1)  $y = e^{\frac{x}{2}} \sin 2x, y^{(5)} = ?$

2)  $y = \sin(3x+1) + \cos 5x, y^{(n)} = ?$

14. Скласти рівняння дотичної та нормалі до кривої в заданій точці:

1)  $y = \frac{x^2 - 3x + 3}{3}, x_0 = 3$ .

- 2)  $x = \frac{1+t^3}{t^2-1}, y = \frac{t}{t^2-1}, t_0 = 2.$   
 3)  $x = a \cos t, y = a \sin t, z = a \ln \cos t,$   
 $M_0(a; 0; 0).$

15. Знайти проміжки монотонності функції  $y = \frac{27}{4}(x^3 + x^2) - 5.$

16.  $\max_{[a,b]} f(x) = ?$   
 1)  $y = (x+1)\sqrt[3]{x^2}, [-\frac{4}{5}; 3].$   
 2)  $y = x^2 - 2x + \frac{16}{x-1}, [2; 5].$

17. Дослідити функцію і побудувати її графік:

- 1)  $y = \frac{x^2 + 2x - 1}{\sqrt{x^2 - 1}}.$  5)  $y = \frac{x^5}{x^4 - 1}.$   
 2)  $y = \sqrt[3]{4x(x-1)}.$  6)  $y = x^3 e^{x+1}.$   
 3)  $y = \sqrt[3]{(x+2)(x-4)^2}.$  7)  $y = \frac{4}{3 + 2x - x^2}.$   
 4)  $y = \sqrt[3]{\cos x}.$  8)  $y = -(x+1)e^{x+2}.$

Знайти інтеграли (18—22):

- 18.1)  $\int \frac{dx}{1-7x}.$  7)  $\int \cos(7x+1)dx.$   
 2)  $\int \sqrt[3]{5-2x}dx.$  8)  $\int \frac{\ln^5(x-7)}{x-7}dx.$   
 3)  $\int \frac{dx}{4x^2+3}.$  9)  $\int \frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} 7x}}{\cos^2 7x}dx.$   
 4)  $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2+2}}.$  10)  $\int \sqrt{\cos 7x} \sin 7x dx.$   
 5)  $\int \frac{5x dx}{5x^2-3}.$  11)  $\int \frac{\arccos^7 x}{\sqrt{1-x^2}}dx.$   
 6)  $\int e^{2-6x} dx.$  12)  $\int \frac{x^5 dx}{3x^6-7}.$   
 19.1)  $\int \frac{2x-1}{3x^2+5} dx.$  5)  $\int \frac{(2x^2-26)dx}{(x+5)(x^2+4x+3)}.$   
 2)  $\int \frac{2x^3-3}{x-2} dx.$  6)  $\int \frac{2x^3+2x^2+4x+3}{x^3+x^2} dx.$   
 3)  $\int \frac{dx}{2x^2-3x+2}.$  7)  $\int \frac{8dx}{(x+1)(x^2+6x+13)}.$   
 4)  $\int \frac{(3x+1)dx}{x^2-4x-5}.$  8)  $\int \frac{3x-8}{(x-1)^2(x^2+4)} dx.$   
 20.1)  $\int \operatorname{tg}^3 \frac{x}{2} dx.$  4)  $\int \sin^4 x \cos^3 x dx.$   
 2)  $\int \cos^2 \frac{2x}{5} dx.$  5)  $\int \frac{dx}{2\cos^2 x + 3}.$   
 3)  $\int \sin^2 2x \cos x dx.$  6)  $\int \frac{6\sin x + \cos x}{1 + \cos x} dx.$

- 21.1)  $\int \frac{5-3x}{\sqrt{2x^2+1}} dx.$  5)  $\int \frac{x-6}{\sqrt{3-2x-x^2}} dx.$   
 2)  $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3x-1}}.$  6)  $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{1+x-x^2}}.$   
 3)  $\int x^2 \sqrt{1-x^2} dx.$  7)  $\int \frac{\sqrt{x} + \sqrt[6]{x} + 1}{\sqrt{x} + \sqrt[6]{x^5}} dx.$   
 4)  $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x+4}}.$  8)  $\int \frac{\sqrt[3]{(1+\sqrt[3]{x^2})^2}}{x^2 \sqrt{x}} dx.$   
 22.1)  $\int \frac{\ln(\sin x)}{\cos^2 x} dx.$  4)  $\int x^2 \operatorname{arctg} x dx.$   
 2)  $\int (x^2-1)e^x dx.$  5)  $\int (x-6) \sin \frac{x}{2} dx.$   
 3)  $\int x \cos(x+9) dx.$  6)  $\int \ln(x+12) dx.$

23. Обчислити інтеграли:

- 1)  $\int_{-\frac{1}{2}}^0 x e^{-2x} dx.$  4)  $\int_0^{2\pi} \sin^6 \frac{x}{4} \cos^2 \frac{x}{4} dx.$   
 2)  $\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \frac{x dx}{(x-1)^3}.$  5)  $\int_{-3}^3 x^2 \sqrt{9-x^2} dx.$   
 3)  $\int_{-\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{\sqrt{8+2x-x^2}}.$  6)  $\int_{\ln 2}^{2\ln 2} \frac{dx}{e^x - 1}.$

24. Обчислити інтеграли або довести їх розбіжність:

- 1)  $\int_0^{\infty} \frac{x dx}{\sqrt[4]{(16+x^2)^5}}.$  2)  $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln 2}{(1-x) \ln^2(1-x)} dx.$

25. Обчислити площі фігур, обмежених кривими:

- 1)  $y = \cos x \sin^2 x, y = 0 \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right).$   
 2)  $\begin{cases} x = 16 \cos^3 t, \\ y = \sin^3 t, \end{cases} x = 6\sqrt{3} \ (x \geq 6\sqrt{3}).$   
 3)  $\rho = 6 \sin 3\varphi, \rho = 3 \ (\rho \geq 3).$

26. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої кривими  $y = x e^x, y = 0, x = 1,$  навколо осі  $Ox.$

27. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням кривої  $\rho = 2 \sin \varphi$  навколо полярної осі.

### Варіант 23

1. Побудувати графіки функцій:

- 1)  $y = 2 \sin\left(3x + \frac{2\pi}{3}\right)$ . 4)  $y = \operatorname{tg}\left(\frac{1}{3}x - \frac{\pi}{4}\right)$ .  
2)  $y = \frac{1}{2} \arcsin(x - 1)$ . 5)  $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{1-x}$ .  
3)  $y = \frac{1}{3} \operatorname{arctg}(x - 1)$ . 6)  $y = -\ln(2x - 3)$ .

2. Знайти:

а) алгебричну форму  $\frac{z_1}{z_2} + 2z_3 + i^5$ ;

б) тригонометричну форму  $z_3$ ;

в), г)  $(z_1 z_2)^8$  та  $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{10}$ ;

д), е) всі значення  $\sqrt[3]{z_1}$  та  $\sqrt[4]{z_2}$ , якщо:

$$z_1 = 6 + 6i, z_2 = -3 + 3\sqrt{3}i, z_3 = 3 - 4i.$$

3. Зобразити множину точок  $z \in \mathbb{C}$ :

1)  $2 < |z - i| < 3, \frac{\pi}{3} < \arg z < \frac{3\pi}{2}$ .

2)  $|z - 1| < |z + 3i|, |\operatorname{Re} z| < 1$ .

3)  $z^3 + 6z^2 + 24z + 32 = 0$ .

Знайти границі (4—7):

4.1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{3}{4} + \frac{5}{16} + \dots + \frac{1 + 2^n}{4^n} \right)$ .

2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^7 + 5} - \sqrt{n - 5}}{\sqrt[4]{n^7 + 5} + \sqrt{n - 5}}$ .

3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{(n^4 + 1)(n^2 - 1)} - \sqrt{n^6 - 1}}{n}$ .

5.1)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{-5x^2 + 11x - 2}{3x^2 - x - 10}$ . 6.1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 2x}{x \arcsin x}$ .

2)  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^3 + 3x - 28}{x^2 - 4x}$ . 2)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\ln(1 + 2x)}$ .

3)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 7x^2 - 2}{6x^3 - 4x + 3}$ . 3)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{4x} - 1}{\sin(\pi(\frac{x}{2} + 1))}$ .

4)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^4 - 2x^3 + 3}{2x^2 + 3x - 7}$ . 4)  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\operatorname{tg} \pi x}{x + 2}$ .

5)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + 1}{x^3 - 5x^2 + 4x}$ . 5)  $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{(x^3 - \pi^3) \sin 5x}{e^{\sin^2 x} - 1}$ .

6)  $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{2x + 7} - 5}{3 - \sqrt{x}}$ . 6)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5^{2x} - 2^{3x}}{\sin x + \sin x^2}$ .

7)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{4x - 1}{4x + 1} \right)^{2x}$ . 7)  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{2 - x}{x} \right)^{\frac{1}{\ln(2-x)}}$ .

8)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{5x - 7}{x + 6} \right)^{2x-1}$ . 8)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt[3]{5+x} - 2}{\sin \pi x}$ .

7.1)  $\lim_{x \rightarrow 1} (1 - x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}$ . 3)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1 - x^3}{\sin x - x}$ .

2)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (x - 1)^{\frac{1}{\ln(2x-2)}}$ . 4)  $\lim_{x \rightarrow 0} (\arcsin x)^x$ .

8. Визначити порядок і головну частину розкладу  $\alpha(x)$  відносно  $\beta(x)$ :

1)  $\alpha(x) = e^{x^{10}} - \cos^2 3x^9, \beta(x) = \operatorname{arctg} x, x \rightarrow 0$ .

2)  $\alpha(x) = \sqrt[3]{1 - \sqrt{x}}, \beta(x) = x - 1, x \rightarrow 1$ .

3)  $\alpha(x) = \ln(1 + x^9 \operatorname{tg} x), \beta(x) = \arcsin x, x \rightarrow 0$ .

9. Дослідити функцію на неперервність:

1)  $f(x) = \frac{\arcsin x}{\sin 2x}$ .

2)  $f(x) = \begin{cases} x + 2, & x \leq -1, \\ 1 - x, & -1 < x \leq 1, \\ \ln x, & x > 1. \end{cases}$

3)  $f(x) = 5^{x+4} + 1$  у точках  $x_1 = 5, x_2 = -4$ .

Знайти похідні функцій (10—13):

10.1)  $y = \frac{(3x + 1)^4}{e^{4x}} - \sqrt[5]{x^4} + \frac{8}{x^3}$ .

2)  $y = \sqrt{7x^3 - \ln \cos \frac{1}{3}} + \frac{\operatorname{ctg} \sqrt{x-2}}{\lg(3x+5)}$ .

3)  $y = \operatorname{tg}^6 2x \cdot \cos 7x^2 - \frac{\operatorname{arctg}^3 x}{\operatorname{sh}(2x-5)}$ .

4)  $y = 4^{-\sin x} \operatorname{arctg} 3x + \frac{8 \lg(4x+5)}{(x-1)^5}$ .

5)  $y = \operatorname{ch}^2 5x \cdot \operatorname{arctg} x^4 - (\operatorname{ctg} 2x^3)^{\sin \sqrt{x}}$ .

6)  $y = (\operatorname{tg} 2x)^{\operatorname{ch}(2x-1)} + \frac{(x-1)^4(x-7)^2}{(x+1)^2 \sqrt[3]{(x+2)^5}}$ .

11.1)  $x^2 y^2 + x = 5y^3$ . 2)  $x^2 \sin y + y^2 = r^2$ .

12.  $\begin{matrix} y'_x = ? \\ y''_{xx} = ? \end{matrix} : 1) \begin{cases} x = \frac{1}{t+1}, \\ y = \left(\frac{t}{t+1}\right)^2 \end{cases} 2) \begin{cases} x = e^t, \\ y = \arcsin e^t \end{cases}$

13.1)  $y = (x^2 - x) \ln x, y^{(5)} = ?$

2)  $y = x e^{6x}, y^{(n)} = ?$

14. Скласти рівняння дотичної та нормалі до кривої в заданій точці:

1)  $y = \frac{2x}{x^2 + 1}, x_0 = 1$ .

2)  $x = 3 \cos t, y = 4 \sin t, t_0 = \frac{\pi}{4}$ .

3)  $x = 2 \sin t, y = 2 \cos t, z = \operatorname{tg} t, M_0(\sqrt{2}; \sqrt{2}; 1)$ .

15. Знайти проміжки монотонності функції  $y = \frac{1}{8}(16 - 6x^2 - x^3)$ .

16.  $\max_{[a,b]} f(x) = ?$   
 1)  $y = e^{6x-x^2}, [-3; 3]$ .  
 2)  $y = 2\sqrt{x-1} - x, [1; 5]$ .

17. Дослідити функцію і побудувати її графік:

1)  $y = \sqrt[3]{x(x-2)}$ . 5)  $y = \frac{x^3+4}{x^2}$ .  
 2)  $y = \frac{x^3+x^2-3x-1}{2x^2-2}$ . 6)  $y = x - \ln(1+x^2)$ .  
 3)  $y = \sqrt[3]{(x-6)x^2}$ . 7)  $y = \frac{x^2+2x-7}{x^2+2x-3}$ .  
 4)  $y = \ln(-\sqrt{2} \sin x)$ . 8)  $y = \frac{e^{x+3}}{x+3}$ .

Знайти інтеграли (18—22):

18.1)  $\int \sqrt{5-4x} dx$ . 7)  $\int \cos(7x+3) dx$ .  
 2)  $\int \frac{dx}{1+6x}$ . 8)  $\int \frac{\sqrt{\ln^3(x+3)}}{x+3} dx$ .  
 3)  $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+3}}$ . 9)  $\int \sin^6 3x \cos 3x dx$ .  
 4)  $\int \frac{xdx}{2x^2-7}$ . 10)  $\int \frac{\sqrt[5]{\operatorname{tg}^2 3x}}{\cos^2 3x} dx$ .  
 5)  $\int e^{2-4x} dx$ . 11)  $\int \frac{\sqrt{\arccos 2x}}{\sqrt{1-4x^2}} dx$ .  
 6)  $\int \frac{dx}{2x^2+7}$ . 12)  $\int e^{1-6x^2} x dx$ .  
 19.1)  $\int \frac{2x-7}{x^2-5} dx$ . 5)  $\int \frac{(2x^2+12x-6)dx}{(x+1)(x^2+8x+15)}$ .  
 2)  $\int \frac{2x^2+5}{x+1} dx$ . 6)  $\int \frac{x^3-4x+5}{(x^2-1)(x-1)} dx$ .  
 3)  $\int \frac{dx}{x^2+7x+6}$ . 7)  $\int \frac{(2x^2+4x+20)dx}{(x+1)(x^2-4x+13)}$ .  
 4)  $\int \frac{(x-5)dx}{2x^2+x+1}$ . 8)  $\int \frac{x^2 dx}{x^4+5x^2+4}$ .  
 20.1)  $\int \operatorname{tg}^4 3x dx$ . 4)  $\int \sin^2 x \cos^4 x dx$ .  
 2)  $\int \sin^3 5x dx$ . 5)  $\int \frac{dx}{3-2\sin^2 x}$ .  
 3)  $\int \cos x \cos 7x dx$ . 6)  $\int \frac{dx}{3\cos x - 4\sin x}$ .

21.1)  $\int \frac{3x+4}{\sqrt{2x^2+5}} dx$ . 5)  $\int \frac{2x+3}{\sqrt{2x^2-x+6}} dx$ .  
 2)  $\int \frac{dx}{\sqrt{5-7x-3x^2}}$ . 6)  $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{1-x-x^2}}$ .  
 3)  $\int x^3 \sqrt{1-x^2} dx$ . 7)  $\int \frac{dx}{\sqrt{x}-\sqrt[6]{x}}$ .  
 4)  $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(x-1)}$ . 8)  $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[5]{x^4}}}{x^2 \sqrt[5]{x}} dx$ .

22.1)  $\int \arcsin \frac{x}{5} dx$ . 4)  $\int x \arctg 2x dx$ .  
 2)  $\int x^2 \cos^2 x dx$ . 5)  $\int (x+1) \cos 7x dx$ .  
 3)  $\int (x+3)e^{-x} dx$ . 6)  $\int x \ln(x^2+1) dx$ .

23. Обчислити інтеграли:

1)  $\int_1^{\sqrt{3}} \arctg \frac{1}{x} dx$ . 4)  $\int_0^{2\pi} 2^4 \sin^4 \frac{x}{2} \cos^4 \frac{x}{2} dx$ .  
 2)  $\int_0^2 \frac{dx}{(x+1)(x^2+4)}$ . 5)  $\int_2^{2\sqrt{3}} \frac{dx}{x^4 \sqrt{x^2-3}}$ .  
 3)  $\int_7^{10} \frac{x^3 dx}{x^2-3x+2}$ . 6)  $\int_1^{e^4} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$ .

24. Обчислити інтеграли або довести їх розбіжність:

1)  $\int_0^{\infty} e^{-3x} x dx$ . 2)  $\int_0^1 \frac{x^4 dx}{\sqrt[3]{1-x^5}}$ .

25. Обчислити площі фігур, обмежених кривими:

1)  $y = \frac{x}{(x^2+1)^2}, y = 0, x = 1$ .  
 2)  $\begin{cases} x = 9 \cos t, \\ y = 4 \sin t, \end{cases} y = 2 (y \geq 2)$ .  
 3)  $\rho = \sin 6\varphi$ .

26. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої кривими  $y = 2 - x^2, y = x^2$ , навколо осі  $Ox$ .

27. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням кривої  $\rho = \frac{2}{3} \cos \varphi$  навколо полярної осі.

## Варіант 24

1. Побудувати графіки функцій:

1)  $y = 2 \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ . 4)  $y = \operatorname{ctg}\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{4}\right)$ .

2)  $y = \frac{1}{3} \arccos(x + 2)$ . 5)  $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}$ .

3)  $y = \frac{1}{3} \operatorname{arctg}\left(x - \frac{1}{2}\right)$ . 6)  $y = 3 \ln(5 - x)$ .

2. Знайти:

а) алгебричну форму  $\frac{z_1}{z_2} + 2z_3 - i^6$ ;

б) тригонометричну форму  $z_3$ ;

в), г)  $(z_1 z_2)^8$  та  $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{10}$ ;

д), е) всі значення  $\sqrt[3]{z_1}$  та  $\sqrt[4]{z_2}$ , якщо:

$z_1 = -7 + 7i, z_2 = -2\sqrt{3} - 2i, z_3 = 4 + 5i$ .

3. Зобразити множину точок  $z \in \mathbb{C}$ :

1)  $2 < |z + i| < 3, 0 < \arg z < \pi$ .

2)  $|z + 1| > |z - 3i|, |\operatorname{Im} z| < 2$ .

3)  $z^3 - 7z^2 + 24z - 18 = 0$ .

Знайти границі (4—7):

4.1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + 4 + \dots + 2n}{1 + 3 + \dots + (2n - 1)}$ .

2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2 + 2} - 5n^2}{n - \sqrt{n^4 - n + 1}}$ .

3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (n - \sqrt{n(n-1)})$ .

5.1)  $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{x^2 - 5x - 14}{2x^2 - 9x - 35}$ . 6.1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{x \sin x}$ .

2)  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^2 + 11x + 10}{x^2 - 5x - 14}$ . 2)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 8x}{\operatorname{tg} 4x}$ .

3)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{14x^2 + 3x}{1 + 2x + 7x^2}$ . 3)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{(e^{3x} - 1)^2}$ .

4)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^3 + x^2 - 7}{2x^2 - 5x + 3}$ . 4)  $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 - \sin \frac{x}{2}}{\pi - x}$ .

5)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 - x - 3x^2}{x^3 - 16}$ . 5)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{3x}}{\sin 3x - \operatorname{tg} 2x}$ .

6)  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2 - \sqrt{x}}{\sqrt{6x + 1} - 5}$ . 6)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\operatorname{tg}(x + 1)}{e^{\sqrt[3]{x^3 - 4x^2 + 6}} - e}$ .

7)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x + 4}{3x}\right)^{-2x}$ . 7)  $\lim_{x \rightarrow 0} (2 - e^{x^2})^{\frac{1}{1 - \cos \pi x}}$ .

8)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3 - 4x}{2 - x}\right)^{6x}$ . 8)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\operatorname{ctg} \frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{\cos x}}$ .

7.1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln(x + 1) - x^2}{\operatorname{tg} x - x}$ . 3)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x \operatorname{arctg} x} - \frac{1}{x^2}\right)$ .

2)  $\lim_{x \rightarrow 1-0} (1 - x)^{\log_2 x}$ . 4)  $\lim_{x \rightarrow 1+0} (\operatorname{ctg} \pi x)^{\sin \pi x}$ .

8. Визначити порядок і головну частину розкладу  $\alpha(x)$  відносно  $\beta(x)$ :

1)  $\alpha(x) = \sqrt[3]{1 + x^6} - 1, \beta(x) = e^{x^2} - 1, x \rightarrow 0$ .

2)  $\alpha(x) = \sqrt{1 - 2x} - \sqrt[3]{1 - 3x}, \beta(x) = x, x \rightarrow 0$ .

3)  $\alpha(x) = \ln \cos 2x^2, \beta(x) = \sin x, x \rightarrow 0$ .

9. Дослідити функцію на неперервність:

1)  $f(x) = \frac{1}{\lg x}$ .

2)  $f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ \cos x, & 0 \leq x \leq \pi, \\ 1 - x, & x > \pi. \end{cases}$

3)  $f(x) = \frac{x - 4}{x + 2}$  у точках  $x_1 = -2, x_2 = 1$ .

Знайти похідні функцій (10—13):

10.1)  $y = \frac{7}{x^4} + \sqrt[3]{x^2} - \frac{5x^2 + 4x - 2}{e^{-x}}$ .

2)  $y = \sqrt[3]{8x^4 - \operatorname{ctg} \sin \frac{1}{13}} + \frac{\operatorname{tg}(3x - 5)}{\ln^2(x + 3)}$ .

3)  $y = \operatorname{ctg}^3 4x \cdot \arcsin \sqrt{x} - \frac{2 \log_3(4x - 7)}{(x + 3)^4}$ .

4)  $y = 2^{\cos x} \operatorname{arctg}^3 x + \frac{\arccos^3 5x}{\operatorname{th}(x - 2)}$ .

5)  $y = \operatorname{th}^4 7x \cdot \arccos 3x^3 - (\operatorname{tg} 7x^5)^{\sqrt{x+2}}$ .

6)  $y = (\operatorname{ctg} 7x)^{\operatorname{sh} 3x} + \frac{(x + 7)^2 (x - 3)^5}{(x + 1)^2 \sqrt{x^2 + 3x - 1}}$ .

11.1)  $x^4 + x^2 y^2 + y^3 = 4$ . 2)  $xy - \ln y = 1$ .

12.  $\begin{cases} y'_x = ? \\ y''_{xx} = ? \end{cases} : 1) \begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin^4 \frac{t}{2}. \end{cases} 2) \begin{cases} x = 5 \sin^3 t, \\ y = 3 \cos^3 t. \end{cases}$

13.1)  $y = x^2 \ln(1 - 3x), y^{(5)} = ?$

2)  $y = \frac{11 + 12x}{6x + 5}, y^{(n)} = ?$

14. Скласти рівняння дотичної та нормалі до кривої в заданій точці:

1)  $y = -2(\sqrt[3]{x} + 3\sqrt{x}), x_0 = 1$ .

2)  $x = t - t^4, y = t^2 - t^3, t_0 = 1$ .

3)  $x = t^2, y = 3t^2, z = 1 - 2t, M_0(1; -3; 3)$ .

15. Знайти проміжки монотонності функції  $y = -\frac{1}{16}(x^2 - 4)^2$ .

16.  $\max_{[a,b]} f(x) = ?$  1)  $y = \frac{\ln x}{x}, [1; 4]$ .  
 2)  $y = \sqrt[3]{(x+2)^2(1-x)}, [-3; 4]$ .

17. Дослідити функцію і побудувати її графік.

1)  $y = \sqrt[3]{x^2 - 4x + 3}$ . 5)  $y = \frac{1}{3}\sqrt[3]{x^2}(x - 5)$ .

2)  $y = \frac{x^2 + 6x + 9}{x + 4}$ . 6)  $y = 1 - \ln^3 x$ .

3)  $y = \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{(x-1)^2}$ . 7)  $y = \frac{1}{x^4 - 1}$ .

4)  $y = \sqrt{\cos x}$ . 8)  $y = \ln \frac{x}{x+5} - 1$ .

Знайти інтеграли (18—22):

18.1)  $\int \frac{dx}{2+7x}$ . 7)  $\int \sin(7-4x)dx$ .

2)  $\int \sqrt[5]{(6-5x)^2}dx$ . 8)  $\int \frac{9xdx}{\sqrt{1-9x^2}}$ .

3)  $\int \frac{dx}{\sqrt{3-4x^2}}$ . 9)  $\int \frac{\sqrt[3]{\ln^4(x-5)}}{x-5}dx$ .

4)  $\int \frac{dx}{4x^2-3}$ . 10)  $\int \frac{\sqrt{\operatorname{ctg}^3 5x}}{\sin^2 5x}dx$ .

5)  $\int e^{3-6x}dx$ . 11)  $\int e^{x^3+1}x^2dx$ .

6)  $\int \frac{\cos 6x}{\sin^3 6x}dx$ . 12)  $\int \frac{\operatorname{arctg}^4 5x}{1+25x^2}dx$ .

19.1)  $\int \frac{3x-3}{1-x^2}dx$ . 5)  $\int \frac{(5x^2+5x-58)dx}{(x^2+2x-3)(x-4)}$ .

2)  $\int \frac{x^3+3x+1}{x^2+2}dx$ . 6)  $\int \frac{3x^2+2}{x(x+1)^2}dx$ .

3)  $\int \frac{dx}{2x^2-3x+4}$ . 7)  $\int \frac{(5x+13)dx}{(x+1)(x^2+6x+13)}$ .

4)  $\int \frac{(2x+3)dx}{3x^2+2x-8}$ . 8)  $\int \frac{2x^4+8x^2-8x+2}{x^4+4x^2}dx$ .

20.1)  $\int \operatorname{tg}^3 4x dx$ . 4)  $\int \sin^4 x \cos^2 x dx$ .

2)  $\int \sin^4 x dx$ . 5)  $\int \frac{(3 \operatorname{tg} x - 1)dx}{\sin^2 x + 4 \cos^2 x}$ .

3)  $\int \sin 2x \sin 3x dx$ . 6)  $\int \frac{dx}{5+3 \cos x}$ .

21.1)  $\int \frac{7x-2}{\sqrt{x^2-1}}dx$ . 5)  $\int \frac{x-9}{\sqrt{4+2x-x^2}}dx$ .

2)  $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-x+5}}$ . 6)  $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{1-x-x^2}}$ .

3)  $\int \frac{\sqrt{(4-x^2)^3}}{x^4}dx$ . 7)  $\int \frac{dx}{3\sqrt{x}+\sqrt[6]{x}}$ .

4)  $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x-2}}$ . 8)  $\int \frac{\sqrt[3]{(1+\sqrt[5]{x^4})^2}}{x^2\sqrt[3]{x}}dx$ .

22.1)  $\int x \ln^2 x dx$ . 4)  $\int \operatorname{arctg}(x+5)dx$ .

2)  $\int (x^2+x) \sin x dx$ . 5)  $\int (x+2) \sin \frac{x}{2} dx$ .

3)  $\int \arccos x dx$ . 6)  $\int \ln(2x-1)dx$ .

23. Обчислити інтеграли:

1)  $\int_{-1}^0 x \ln(1-x)dx$ . 4)  $\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 2^8 \sin^2 x \cos^6 x dx$ .

2)  $\int_7^9 \frac{x^2-x+2}{x^4-5x^2+4}dx$ . 5)  $\int_2^4 \frac{\sqrt{16-x^2}}{x^4}dx$ .

3)  $\int_4^{4.5} \frac{x^2 dx}{\sqrt{8x-x^2-15}}$ . 6)  $\int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$ .

24. Обчислити інтеграли або довести їх розбіжність:

1)  $\int_{-\infty}^0 \left( \frac{x^2}{x^3-1} - \frac{x}{1+x^2} \right) dx$ . 2)  $\int_0^2 \frac{x^2 dx}{\sqrt{64-x^6}}$ .

25. Обчислити площі фігур, обмежених кривими:

1)  $x = 4 - y^2, x = y^2 - 2y$ .

2)  $\begin{cases} x = 8(t - \sin t), \\ y = 8(1 - \cos t), \end{cases}$   
 $y = 12 (0 < x < 16\pi, y \geq 12)$ .

3)  $\rho = 2 \cos \varphi, \rho = 3 \cos \varphi$ .

26. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої кривими  $y = 8 - x^2, y = x^2$ , навколо осі  $Ox$ .

27. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням кривої  $x = 3 \cos^3 t, y = 3 \sin^3 t$  навколо осі  $Ox$ .

## Варіант 25

1. Побудувати графіки функцій:

1)  $y = \frac{1}{2} \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$ . 4)  $y = \operatorname{tg}\left(\frac{1}{3}x - \frac{\pi}{6}\right)$ .

2)  $y = 2 \arcsin(x - 2)$ . 5)  $y = -3^{x+2}$ .

3)  $y = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}\left(x + \frac{1}{2}\right)$ . 6)  $y = -2 \lg(x + 3)$ .

2. Знайти:

а) алгебричну форму  $\frac{z_1}{z_2} + 2z_3 + i^7$ ;

б) тригонометричну форму  $z_3$ ;

в), г)  $(z_1 z_2)^8$  та  $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{10}$ ;

д), е) всі значення  $\sqrt[3]{z_1}$  та  $\sqrt[4]{z_2}$ , якщо:

$z_1 = -8 - 8i, z_2 = \sqrt{3} - i, z_3 = -5 + 6i$ .

3. Зобразити множину точок  $z \in \mathbb{C}$ :

1)  $1 < |z - 2| < 3, \frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{\pi}{2}$ .

2)  $|z - 2i| < |z + 1|, |\operatorname{Re} z| > 3$ .

3)  $z^3 - 4z^2 + 4z - 3 = 0$ .

Знайти границі (4—7):

4.1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1 + 5 + \dots + (4n - 3)}{n + 1} - \frac{4n + 1}{2} \right)$ .

2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n + 2} - \sqrt[3]{n^3 + 2}}{\sqrt[4]{n + 2} - \sqrt[5]{n^5 + 2}}$ .

3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^3 (\sqrt[3]{n^2(n^6 + 4)} - \sqrt[3]{(n^8 - 1)})$ .

5.1)  $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{3x^2 - 6x - 45}{2x^2 - 3x - 35}$ . 6.1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 5x - \cos x}{4x^2}$ .

2)  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{3x^2 + x - 10}$ . 2)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{5x} - 1}{\operatorname{tg} 2x}$ .

3)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - 2x^2 + 5x^4}{2 + 3x^2 + x^4}$ . 3)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x - \operatorname{tg}^2 x}{x^4}$ .

4)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^4 + 2x^2 - 8}{8x^3 - 4x + 5}$ . 4)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{1 - 2 \cos x}{\pi - 3x}$ .

5)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 - 10x + 7}{2x^3 - 3x}$ . 5)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{9^x - 2^{3x}}{\operatorname{arctg} 2x - 7x}$ .

6)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{\sqrt{3x} - x}$ . 6)  $\lim_{x \rightarrow 10} \frac{\lg x - 1}{\sqrt{x - 9} - 1}$ .

7)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x - 1}{2x + 4} \right)^{1-x}$ . 7)  $\lim_{x \rightarrow 1} (2 - x)^{\frac{\sin \frac{\pi x}{2}}{\ln(2-x)}}$ .

8)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{1 - 2x}{3 - x} \right)^{-2x}$ . 8)  $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\ln \cos 2x}{\ln \cos 4x}$ .

7.1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{\arcsin x - \ln(1 + x)}$ . 3)  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^n e^{-x^2}$ .

2)  $\lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{ctg} 2x)^{\frac{1}{\ln x}}$ . 4)  $\lim_{x \rightarrow 0} x^{2 \operatorname{tg} x}$ .

8. Визначити порядок і головну частину розкладу  $\alpha(x)$  відносно  $\beta(x)$ :

1)  $\alpha(x) = e^{x^3} - \cos 4x, \beta(x) = \arcsin x, x \rightarrow 0$ .

2)  $\alpha(x) = \frac{1 + x + 2x^2}{x^5}, \beta(x) = \sin \frac{1}{x}, x \rightarrow \infty$ .

3)  $\alpha(x) = \ln(1 + x \sin^5 x), \beta(x) = \operatorname{tg} x; x \rightarrow 0$ .

9. Дослідити функцію на неперервність:

1)  $f(x) = 4^{\frac{x}{1-x^2}}$ .

2)  $f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1, \\ x^2 - 1, & -1 < x \leq 2, \\ 2x, & x \geq 2. \end{cases}$

3)  $f(x) = \frac{x - 4}{x + 3}$  у точках  $x_1 = -3, x_2 = 2$ .

Знайти похідні функцій (10—13):

10.1)  $y = \frac{\sqrt{5x^2 - x + 1}}{e^{3x}} - \frac{5}{x^4} + \sqrt[5]{x^4}$ .

2)  $y = \sqrt{4x^5 + \sin \ln \frac{1}{2}} - \frac{\cos^2 x}{\lg(x^2 - 2x + 1)}$ .

3)  $y = \lg(x - 3) \arcsin^2 5x + \frac{\sqrt{\arccos 3x}}{\operatorname{sh}^2 2x}$ .

4)  $y = \operatorname{tg}^3 x \cdot \operatorname{arctg} 3x - \frac{3 \log_4(2x + 9)}{(x - 7)^2}$ .

5)  $y = \operatorname{cth} 4x^5 \cdot \arccos 2x + (\arccos x)^{\sqrt{\cos x}}$ .

6)  $y = (\operatorname{ch} 3x)^{\cos(x+4)} - \frac{\sqrt[3]{x - 3}(x + 7)^5}{(x + 1)(x - 4)^2}$ .

11.1)  $\sin y = xy^2 + 5$ . 2)  $y = 1 + e^{xy}$ .

12.  $\begin{matrix} y'_x = ? \\ y''_{xx} = ? \end{matrix} : 1) \begin{cases} x = e^{-3t}, \\ y = \ln(1 + e^t). \end{cases} 2) \begin{cases} x = \operatorname{ch}^2 t, \\ y = \sqrt[3]{\operatorname{sh}^2 t}. \end{cases}$

13.1)  $y = (x^2 + 3x + 1)e^{3x+2}, y^{(5)} = ?$

2)  $y = \lg(2x + 7), y^{(n)} = ?$

14. Скласти рівняння дотичної та нормалі до кривої в заданій точці:

1)  $y = \frac{1 + 3x^2}{3 + x^2}, x_0 = 1$ .

2)  $x = t^3 + 1, y = t^2 + t + 1, t_0 = 1$ .

3)  $x = 3 \cos t, y = 4 \sin t, z = e^t, M_0(3; 0; 1)$ .

15. Знайти проміжки монотонності функції  $y = 16x^3 - 36x^2 + 24x - 9$ .

1)  $y = 3x^4 - 16x^3 + 2, [-3; 1]$ .

16.  $\max_{[a,b]} f(x) = ?$

2)  $y = 2x - \frac{x^2}{2} + \frac{8}{x-2}, [-2; 1]$ .

17. Дослідити функцію і побудувати її графік:

1)  $y = 9\sqrt[3]{(x+1)^2} - 6x$ . 5)  $y = \sqrt[3]{x(x-3)^2}$ .

2)  $y = \frac{3x^2 - 10}{\sqrt{4x^2 - 1}}$ . 6)  $y = \frac{x^3}{x^4 - 1}$ .

3)  $y = (x-1)e^{4x+2}$ . 7)  $y = -\left(\frac{x}{x+2}\right)^2$

4)  $y = -(2x+3)e^{2(x+2)}$ . 8)  $y = e^{\cos x - \sin x}$ .

Знайти інтеграли (18—22):

18.1)  $\int \frac{dx}{7-3x}$ . 7)  $\int \cos(3x-7)dx$ .

2)  $\int \sqrt[4]{2-5x}dx$ . 8)  $\int \frac{3xdx}{9x^2+2}$ .

3)  $\int \frac{dx}{\sqrt{9-8x^2}}$ . 9)  $\int \frac{dx}{(x+3)\ln^4(x+3)}$ .

4)  $\int \frac{dx}{3x^2+4}$ . 10)  $\int \frac{e^{\arctg x}}{x^2+1} dx$ .

5)  $\int e^{4-5x} dx$ . 11)  $\int \sqrt{\cos^3 2x} \sin 2x dx$ .

6)  $\int \frac{dx}{\sin^2 x \sqrt{\ctg^4 x}}$ . 12)  $\int \frac{\arcsin^2 5x}{\sqrt{1-25x^2}} dx$ .

19.1)  $\int \frac{5x+2}{x^2+9} dx$ . 5)  $\int \frac{(x^3-12x+13)dx}{(x^2-5x+6)(x+1)}$ .

2)  $\int \frac{x^2+x}{2-x} dx$ . 6)  $\int \frac{(x+5)dx}{x^3-x^2-x+1}$ .

3)  $\int \frac{dx}{5x^2-10x+25}$ . 7)  $\int \frac{4x^2+x+10}{x^3+8} dx$ .

4)  $\int \frac{(x-3)dx}{4x^2+2x-6}$ . 8)  $\int \frac{x^3-x^2+4x}{x^4-1} dx$ .

20.1)  $\int \tg^4 \frac{x}{4} dx$ . 4)  $\int \sin^3 x \cos^8 x dx$ .

2)  $\int \cos^4 x dx$ . 5)  $\int \frac{dx}{5+3\sin^2 x}$ .

3)  $\int \sin 2x \cos 3x dx$ . 6)  $\int \frac{dx}{4\sin x - 6\cos x}$ .

21.1)  $\int \frac{1+3x}{\sqrt{x^2+1}} dx$ . 5)  $\int \frac{2x+7}{\sqrt{x^2+5x-4}} dx$ .

2)  $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x-x^2}}$ . 6)  $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x-x^2}}$ .

3)  $\int \frac{dx}{\sqrt{(4+x^2)^3}}$ . 7)  $\int \frac{\sqrt{x}dx}{1-\sqrt[3]{x}}$ .

4)  $\int \frac{dx}{x\sqrt{x-2}}$ . 8)  $\int \frac{\sqrt[4]{(1+\sqrt[5]{x^4})^3}}{x^2\sqrt[5]{x^2}} dx$ .

22.1)  $\int x^2 \ln x dx$ . 4)  $\int x^2 \arctg x dx$ .

2)  $\int (x^2+x) \cos x dx$ . 5)  $\int x \sin \frac{x}{5} dx$ .

3)  $\int (x^2-3)e^x dx$ . 6)  $\int \ln(2x+3) dx$ .

23. Обчислити інтеграли:

1)  $\int_0^1 \arcsin \frac{x}{2} \frac{dx}{\sqrt{2-x}}$ . 4)  $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 2^8 \cos^8 x dx$ .

2)  $\int_4^6 \frac{xdx}{x^3-6x^2+16x-16}$ . 5)  $\int_0^{\sqrt[3]{7}} x^3 \sqrt{7+x^2} dx$ .

3)  $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+4x+5}$ . 6)  $\int_{e^2}^{e^3} \frac{\ln x dx}{x(1-\ln^2 x)}$ .

24. Обчислити інтеграли або довести їх розбіжність:

1)  $\int_0^{\infty} \frac{dx}{2x^2-2x+1}$ . 2)  $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-2x}}$ .

25. Обчислити площі фігур, які обмежені кривими:

1)  $x = \frac{1}{y\sqrt{1+\ln y}}, x=0, y=1$ .

2)  $\begin{cases} x = 24 \cos^3 t, \\ y = 2 \sin^3 t, \end{cases} x = 9\sqrt{3} \ (x \geq 9\sqrt{3})$ .

3)  $\rho = \cos \varphi + \sin \varphi$ .

26. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої кривими  $y^2 = (x+4)^3, x=0$ , навколо осі  $Ox$ .

27. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням кривої  $x = 2 \cos t, y = 3 + 2 \sin t$  навколо осі  $Ox$ .

## Варіант 26

1. Побудувати графіки функцій:

1)  $y = 3 \cos\left(3x + \frac{4\pi}{3}\right)$ . 4)  $y = \operatorname{ctg}\left(\frac{1}{4}x + \frac{\pi}{4}\right)$ .

2)  $y = 3 \arccos(x - 3)$ . 5)  $y = 4^{x-1}$ .

3)  $y = -2 \operatorname{arctg}(x + 3)$ . 6)  $y = -\lg(6 - 2x)$ .

2. Знайти:

а) алгебричну форму  $\frac{z_1}{z_2} + 2z_3 - i^5$ ;

б) тригонометричну форму  $z_3$ ;

в), г)  $(z_1 z_2)^8$  та  $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{10}$ ;

д), е) всі значення  $\sqrt[3]{z_1}$  та  $\sqrt[4]{z_2}$ , якщо:

$z_1 = 2 - 2i, z_2 = 2 + 2\sqrt{3}i, z_3 = -6 - 7i$ .

3. Зобразити множину точок  $z \in \mathbb{C}$ :

1)  $2 < |z + 2| < 4, \frac{\pi}{3} < \arg z < \pi$ .

2)  $|z + 2i| > |z - 1|, |\operatorname{Im} z| > 1$ .

3)  $z^3 + 6z^2 + 18z + 27 = 0$ .

Знайти границі (4—7):

4.1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 + 3 + \dots + n}{\sqrt[3]{n^6 + 2n^4 + 2}}$ .

2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\sqrt{71n} - \sqrt[3]{64n^6 + 9}}{(n - \sqrt[3]{n})\sqrt{11 + n^2}}$ .

3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (n\sqrt{n} - \sqrt{n(n+1)(n+2)})$ .

5.1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 + x}{4x^2 - 5x + 1}$ . 6.1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x + \sin x}{\arcsin x}$ .

2)  $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{4x^2 + 7x - 15}{x^2 - 6x - 27}$ . 2)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 4x)}{\sin 2x}$ .

3)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 - 2x^2 - 7}{3x^4 + 3x + 5}$ . 3)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x}{\ln(e - x) - 1}$ .

4)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 + 2x - 4}{3x^2 - 4x + 1}$ . 4)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\operatorname{arctg}(x^2 - 2x)}{\sin 3\pi x}$ .

5)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 - 3x + 1}{x^5 + 4x^3}$ . 5)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-2x}}{x + \sin x^2}$ .

6)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + 3x^2} - 1}{x^3 + x^2}$ . 6)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{x+1} - 3}{\ln(1 + x\sqrt{1 + xe^x})}$ .

7)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x + 4}{3x + 5}\right)^{x+1}$ . 7)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + \operatorname{tg} x \cos 2x}{1 + \operatorname{tg} x \cos 5x}\right)^{\frac{1}{x^3}}$ .

8)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{4 + 3x}{5 + x}\right)^{7x}$ . 8)  $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{\sin x}{\sin 3}\right)^{\frac{1}{x-3}}$ .

7.1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln 2x}{\ln \operatorname{tg} x}$ . 3)  $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{x^2} x^{-5}$ .

2)  $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \ln 2x \ln(2x - 1)$ . 4)  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{x+1}}$ .

8. Визначити порядок і головну частину розкладу  $\alpha(x)$  відносно  $\beta(x)$ :

1)  $\alpha(x) = \sqrt[3]{1 + x^2} - 1, \beta(x) = \sin x, x \rightarrow 0$ .

2)  $\alpha(x) = \frac{1}{\sqrt{x^4 + x + 1}}, \beta(x) = \operatorname{tg} \frac{1}{x}, x \rightarrow \infty$ .

3)  $\alpha(x) = \ln \cos 2x, \beta(x) = \operatorname{tg}^2 x, x \rightarrow 0$ .

9. Дослідити функцію на неперервність:

1)  $f(x) = 2^{-\frac{3x}{x+1}}$ .

2)  $f(x) = \begin{cases} x, & x \leq -2, \\ 1 - x, & -2 < x \leq 1, \\ x^2 - 1, & x \geq 1. \end{cases}$

3)  $f(x) = \frac{x + 5}{x - 3}$  у точках  $x_1 = 3, x_2 = 4$ .

Знайти похідні функцій (10—13):

10.1)  $y = \sqrt[4]{x^3} - \frac{4}{x^5} + \frac{e^{-x^2}}{(2x - 5)^7}$ .

2)  $y = \sqrt[6]{(2x^2 - 1)^5} - \sqrt[3]{\cos \sqrt{2}} - \frac{\log_2(3x + 7)}{\operatorname{tg} 3x}$ .

3)  $y = \operatorname{tg} \sqrt{x} \cdot \operatorname{arctg} 3x^5 + \frac{\arcsin^2 3x}{\sqrt{\operatorname{th} x}}$ .

4)  $y = \log_2(x + 3) \cdot \arccos^2 x - \frac{\lg(x^2 + 2x)}{(x + 8)^4}$ .

5)  $y = \operatorname{cth} 3x \cdot \arcsin^4 2x + (\operatorname{ctg} 7x)^{\operatorname{sh}(2x+3)}$ .

6)  $y = (\operatorname{ch} 2x)^{\operatorname{tg}(x+5)} - \frac{\sqrt{x + 10}(x - 8)^3}{(x + 1)^2(x - 1)^5}$ .

11.1)  $x^3 + y^3 = 5xy$ . 2)  $y = \cos(x + y)$ .

12.  $\begin{cases} y'_x = ? \\ y''_{xx} = ? \end{cases} : 1) \begin{cases} x = \sqrt[3]{t} - 1, \\ y = \sqrt[3]{t} - 1. \end{cases} 2) \begin{cases} x = \operatorname{arctg} t, \\ y = \frac{1}{2}t^2. \end{cases}$

13.1)  $y = (5x - 8) \cdot 2^{-x}, y^{(5)} = ?$

2)  $y = \ln(5 + 2x), y^{(n)} = ?$

14. Скласти рівняння дотичної та нормалі до кривої в заданій точці:

1)  $y = 14\sqrt{x} - 15\sqrt[3]{x} + 2, x_0 = 1$ .

2)  $x = 2 \cos t, y = \sin t, t_0 = -\frac{\pi}{3}$ .

3)  $x = e^{-t} \cos t, y = e^{-t} \sin t, z = e^{-t}, M_0(1; 0; 1)$ .

15. Знайти проміжки монотонності функції  $y = \frac{1}{8}(6x^2 - x^3 - 16)$ .

1)  $y = x^5 - 5x^4 + 5x^3, [-1; 2]$ .

16.  $\max_{[a,b]} f(x) = ?$   
 2)  $y = 8x + \frac{4}{x^2}, [\frac{1}{2}; 2]$ .

17. Дослідити функцію і побудувати її графік:

1)  $y = \frac{6\sqrt[3]{6(x+3)^2}}{x^2 + 10x + 33}$ . 5)  $y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x + 3}$ .

2)  $y = \frac{2x^2 + 4x + 2}{2 - x}$ . 6)  $y = x \ln x$ .

3)  $y = \sqrt[3]{x(x+3)^2}$ . 7)  $y = \frac{x^3 - 32}{x^2}$ .

4)  $y = \sqrt[3]{\frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{2}}}$ . 8)  $y = -\frac{e^{2(x-1)}}{2(x-1)}$ .

Знайти інтеграли (18—22):

18. 1)  $\int \frac{dx}{5-2x}$ . 7)  $\int \sin(8x-5)dx$ .

2)  $\int \sqrt[3]{4-2x}dx$ . 8)  $\int \frac{5xdx}{\sqrt{7x^2-1}}$ .

3)  $\int \frac{dx}{4x^2-3}$ . 9)  $\int \frac{\ln^5(x-8)}{x-8} dx$ .

4)  $\int \frac{dx}{\sqrt{8x^2-9}}$ . 10)  $\int \sin^4 8x \cos 8x dx$ .

5)  $\int e^{5-2x} dx$ . 11)  $\int \frac{dx}{\cos^2 x \sqrt[5]{\operatorname{tg}^2 x}}$ .

6)  $\int e^{3x^3} x^2 dx$ . 12)  $\int \frac{dx}{\sqrt{1-25x^2} \arcsin 5x}$ .

19. 1)  $\int \frac{x-5}{x^2+7} dx$ . 5)  $\int \frac{(9x^2+3x)dx}{(x^2+x-2)(x+1)}$ .

2)  $\int \frac{2x^2+5}{x-7} dx$ . 6)  $\int \frac{3x^2-7x+2}{(x^2-x)(x-1)} dx$ .

3)  $\int \frac{dx}{2x^2+6x+7}$ . 7)  $\int \frac{(4x^2+7x+5)dx}{(x-1)(x^2+2x+5)}$ .

4)  $\int \frac{(x+2)dx}{3x^2-x+5}$ . 8)  $\int \frac{2x^3+8x-3x^2-27}{x^4+13x^2+36} dx$ .

20. 1)  $\int \operatorname{tg}^4(x+5)dx$ . 4)  $\int \frac{3 \cos^2 x}{\sin^4 x} dx$ .

2)  $\int \cos^3 4x dx$ . 5)  $\int \frac{\cos^2 x}{1+\sin^2 x} dx$ .

3)  $\int \sin 5x \cos x dx$ . 6)  $\int \frac{dx}{3+5 \sin x+3 \cos x}$ .

21. 1)  $\int \frac{3-2x}{\sqrt{x^2-8}} dx$ . 5)  $\int \frac{3x-4}{\sqrt{2x^2-6x+1}} dx$ .

2)  $\int \frac{dx}{\sqrt{1-2x-x^2}}$ . 6)  $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x-3}}$ .

3)  $\int \frac{\sqrt{x^2+9}}{x^4} dx$ . 7)  $\int \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{x}-\sqrt{x}} dx$ .

4)  $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x-2}}$ . 8)  $\int \frac{\sqrt[3]{1+4\sqrt{x}}}{x\sqrt[3]{x}} dx$ .

22. 1)  $\int x \ln(x+1) dx$ . 4)  $\int x \operatorname{arctg}^2 x dx$ .

2)  $\int (x^2+1)e^x dx$ . 5)  $\int (x+4) \cos \frac{x}{2} dx$ .

3)  $\int x e^{-4x} dx$ . 6)  $\int \arccos \frac{x}{5} dx$ .

23. Обчислити інтеграли:

1)  $\int_1^2 \ln(3x+2) dx$ . 4)  $\int_0^\pi 2^4 \sin^8 x dx$ .

2)  $\int_1^2 \frac{dx}{x^3+1}$ . 5)  $\int \frac{\sqrt{x^2-8}}{x^4} dx$ .

3)  $\int_{-\frac{1}{3}}^0 \frac{dx}{\sqrt{2-6x-9x^2}}$ . 6)  $\int_4^9 \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt{x}-1}$ .

24. Обчислити інтеграли або довести їх розбіжність:

1)  $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2(x+1)}$ . 2)  $\int_1^5 \frac{x^2 dx}{\sqrt{31(x^3-1)}}$ .

25. Обчислити площі фігур, обмежених кривими:

1)  $y = x^{-2} e^{\frac{1}{x}}, y = 0, x = 2, x = 1$ .

2)  $\begin{cases} x = 3 \cos t, \\ y = 8 \sin t, \end{cases} y = 4\sqrt{3} (y \geq 4\sqrt{3})$ .

3)  $\rho = 2 \sin 4\varphi$ .

26. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої кривими  $y = x^3, x = 0, y = 8$ , навколо осі  $Oy$ .

27. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням кривої  $\rho^2 = 9 \cos 2\varphi$  навколо полярної осі.

**Варіант 27**

1. Побудувати графіки функцій:

1)  $y = -2 \sin\left(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{8}\right)$ . 4)  $y = \operatorname{tg}\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$ .

2)  $y = 3 \arcsin\left(x + \frac{1}{2}\right)$ . 5)  $y = 5^{x-2}$ .

3)  $y = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(x - 1)$ . 6)  $y = 2 \ln(2x - 5)$ .

2. Знайти:

а) алгебричну форму  $\frac{z_1}{z_2} + 2z_3 - i^3$ ;

б) тригонометричну форму  $z_3$ ;

в), г)  $(z_1 z_2)^8$  та  $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{10}$ ;

д), е) всі значення  $\sqrt[3]{z_1}$  та  $\sqrt[4]{z_2}$ , якщо:

$z_1 = -4 + 4i, z_2 = -1 - \sqrt{3}i, z_3 = 7 - 8i$ .

3. Зобразити множину точок  $z \in \mathbb{C}$ :

1)  $2 < |z - 2i| < 3, \frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{2\pi}{3}$ .

2)  $|z - 2| < |z - i|, |\operatorname{Re} z| < 2$ .

с)  $z^3 - z^2 - 4z - 6 = 0$ .

Знайти границі (4—7):

4.1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(2n)! - (2n + 1)!}{n(2n - 1)! + (2n)!}$ .

2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+6} - \sqrt{n^2 - 5}}{\sqrt[3]{n^3 + 3} + \sqrt[4]{n^3 + 1}}$ .

3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{n}(\sqrt[3]{n^2} - \sqrt[3]{n(n-1)})$ .

5.1)  $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^2 - 2x - 35}{2x^2 + 11x + 5}$ . 6.1)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^2}$ .

2)  $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{2x^2 - 11x - 6}{3x^2 - 20x + 12}$ . 2)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sin(x-3)}{x^3 - 27}$ .

3)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 - 5x^2 - 3x^5}{x^5 + 6x + 8}$ . 3)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x(1 - \cos 2x)}$ .

4)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{7x^3 - 2x + 4}{2x^2 + x - 5}$ . 4)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x^2}{\sin \pi x}$ .

5)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - 13}{x^7 - 3x^5 - 4x}$ . 5)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{a^{x^2 - a^2} - 1}{\operatorname{tg} \ln \frac{x}{a}}$ .

6)  $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{\sqrt{x+20} - 4}{x^3 + 64}$ . 6)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{5x} - 2^{-7x}}{2x - \operatorname{tg} x}$ .

7)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1+2x}{3+2x}\right)^{1-2x}$ . 7)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - 1}{\sin^2 2x}$ .

8)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3x-1}{2x+5}\right)^{3x}$ . 8)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+x^{3x}}{1+x^{7x}}\right)^{\operatorname{ctg}^2 x}$ .

7.1)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{2x} - 1}{\ln x + 1 - x}$ . 3)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+7)}{\sqrt{x-3}}$ .

2)  $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \left(\frac{3}{3x-1} - \frac{1}{\ln 3x}\right)$ . 4)  $\lim_{x \rightarrow 0} x^{\frac{4}{5+2 \ln x}}$ .

8. Визначити порядок і головну частину розкладу  $\alpha(x)$  відносно  $\beta(x)$ :

1)  $\alpha(x) = e^{x^5} - \cos x^3, \beta(x) = \sin x, x \rightarrow 0$ .

2)  $\alpha(x) = \ln(2x^2 - 2x - 3), \beta(x) = x - 2, x \rightarrow 2$ .

3)  $\alpha(x) = \ln(x^8 + 1), \beta(x) = \sin \sqrt{x}, x \rightarrow 0$ .

9. Дослідити функцію на неперервність:

1)  $f(x) = \frac{\sin 2x}{x}$ .

2)  $f(x) = \begin{cases} \sin x, & x < 0, \\ x, & 0 \leq x \leq 2, \\ 0, & x > 2. \end{cases}$

3)  $f(x) = 3^{\frac{1}{1-x}}$  у точках  $x_1 = 1, x_2 = 2$ .

Знайти похідні функцій (10—13):

10.1)  $y = \frac{e^{\cos 3x}}{(2x+4)^5} - \sqrt[3]{x^5} - \frac{2}{x^4}$ .

2)  $y = \sqrt[3]{4x^5 + \sqrt{\operatorname{tg} \cos 2}} - \frac{\ln^3 x}{\operatorname{ctg}(x-3)}$ .

3)  $y = \operatorname{tg}^3 2x \cdot \arccos 2x^3 + \frac{\operatorname{arctg}^2 5x}{\sqrt[3]{\operatorname{ch} x}}$ .

4)  $y = 2^{-x} \operatorname{arctg}^3 4x - \frac{3 \ln(x^2 + 5)}{(x-7)^2}$ .

5)  $y = \operatorname{th}^5 3x \cdot \operatorname{arctg} \sqrt{x} + (\operatorname{sh} 5x)^{\operatorname{arctg}(x+2)}$ .

6)  $y = (\operatorname{th} 7x)^{\sin(3x+2)} - \frac{\sqrt{(x-2)^3(x-1)^3}}{(x+1)^2(x+3)^4}$ .

11.1)  $\sqrt[3]{y} = e^{xy}$ . 2)  $x^3 + y^3 = \arcsin xy$ .

12.  $\begin{matrix} y'_x = ? \\ y''_{xx} = ? \end{matrix} : 1) \begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 4(2 + \cos t). \end{cases} 2) \begin{cases} x = \ln^2 t, \\ y = t + \ln t. \end{cases}$

13.1)  $y = x^2 \ln(x-1), y^{(5)} = ?$

2)  $y = \frac{x}{x+1}, y^{(n)} = ?$

14. Скласти рівняння дотичної та нормалі до кривої у заданій точці:

1)  $y = 3\sqrt[4]{x} - \sqrt{x}, x_0 = 1$ .

2)  $x = 2 \operatorname{tg} t, y = 2 \sin^2 t + \sin 2t, t_0 = \frac{\pi}{4}$ .  
 3)  $x = 3 \cos t, y = 3 \sin t, z = 5t, M_0(-3; 0; 5\pi)$ .

15. Знайти проміжки монотонності функції  $y = -\frac{1}{16}(x-2)^2(x-6)^2$ .

1)  $y = (3-x)e^{-x}, [0; 5]$ .

16.  $\max_{[a,b]} f(x) = ?$   
 2)  $y = \sqrt[3]{(x+2)^2(x-4)}, [-4; 2]$ .

17. Дослідити функцію і побудувати її графік:

1)  $y = 8x - 6 - 12\sqrt[3]{(x-2)^2}$ . 5)  $y = x^2 + \frac{1}{x^2}$ .

2)  $y = \frac{2x^3 + 2x^2 - 9x - 3}{2x^2 - 3}$ . 6)  $y = -x \ln^2 x$ .

3)  $y = \sqrt[3]{(x+2)^2} - \sqrt[3]{(x+3)^2}$ . 7)  $y = \frac{4(x+1)^2}{x^2 + 2x + 4}$ .

4)  $y = \ln(\cos x - \sin x)$ . 8)  $y = \ln \frac{x-5}{x} + 2$ .

Знайти інтеграли (18—22):

18.1)  $\int \frac{dx}{2x+7}$ . 7)  $\int \cos(8x-4)dx$ .

2)  $\int \sqrt{3-4x}dx$ . 8)  $\int \frac{3xdx}{\sqrt{9x^2+5}}$ .

3)  $\int \frac{dx}{8x^2-9}$ . 9)  $\int \frac{\sqrt{\ln^3(x+6)}}{x+6}dx$ .

4)  $\int e^{7+3x}dx$ . 10)  $\int \frac{\operatorname{tg}^6 2x}{\cos^2 2x}dx$ .

5)  $\int \frac{dx}{\sqrt{5-4x^2}}$ . 11)  $\int \sin^5 4x \cos 4x dx$ .

6)  $\int x^4 e^{-x^5-1}dx$ . 12)  $\int \frac{\operatorname{arctg}^8 3x}{1+9x^2}dx$ .

19.1)  $\int \frac{3-7x}{1+x^2}dx$ . 5)  $\int \frac{(3x^2-13x-38)dx}{(x^2-5x+4)(x+3)}$ .

2)  $\int \frac{2x^2+3}{x-1}dx$ . 6)  $\int \frac{2x^3+3x^2+x+2}{x^3+x^2}dx$ .

3)  $\int \frac{dx}{x^2-6x+8}$ . 7)  $\int \frac{3x^2+2x+1}{x^3-1}dx$ .

4)  $\int \frac{(3x-2)dx}{x^2+5x+7}$ . 8)  $\int \frac{5x^3-x^2+21x-9}{x^4+10x^2+9}dx$ .

20.1)  $\int \operatorname{tg}^3 3x dx$ . 4)  $\int \sin^5 x \sqrt{\cos^3 x} dx$ .

2)  $\int \cos^2 7x dx$ . 5)  $\int \frac{dx}{\sin^2 x - \sin 2x + 1}$ .

3)  $\int \sin x \cos 4x dx$ . 6)  $\int \frac{dx}{\cos x - 3 \sin x}$ .

21.1)  $\int \frac{x-5}{\sqrt{8-4x^2}}dx$ . 5)  $\int \frac{2x+5}{\sqrt{3x^2+9x-4}}dx$ .

2)  $\int \frac{dx}{\sqrt{4-3x-x^2}}$ . 6)  $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x-2}}$ .

3)  $\int \frac{dx}{\sqrt{(9+x^2)^3}}$ . 7)  $\int \frac{\sqrt{x}dx}{1+\sqrt[4]{x}}$ .

4)  $\int \frac{x-1}{x\sqrt{x-2}}dx$ . 8)  $\int \frac{\sqrt[3]{(1+\sqrt[4]{x})^2}}{x^{12}\sqrt{x^5}}dx$ .

22.1)  $\int \sin(\ln x)dx$ . 4)  $\int x^2 \cos \frac{x}{3} dx$ .

2)  $\int (x^2-1)e^{-x}dx$ . 5)  $\int (x+1) \sin \frac{x}{3} dx$ .

3)  $\int (x+1)e^{2x}dx$ . 6)  $\int \operatorname{arctg} \frac{x}{4} dx$ .

23. Обчислити інтеграли:

1)  $\int_0^4 x^3 \sqrt{x^2+9}dx$ . 4)  $\int_0^{2\pi} \sin^6 x \cos^2 x dx$ .

2)  $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{x^5+1}{x^6+x^4}dx$ . 5)  $\int \frac{dx}{\sqrt{2}x^5\sqrt{x^2-1}}$ .

3)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x dx$ . 6)  $\int \frac{x^3}{\sqrt{7}(x^2+1)^{\frac{2}{3}}}dx$ .

24. Обчислити інтеграли або довести їх розбіжність:

1)  $\int_{e^2}^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x-1)^2}$ . 2)  $\int_1^{\frac{3}{2}} \frac{dx}{\sqrt{3x-x^2-2}}$ .

25. Обчислити площі фігур, обмежених кривими:

1)  $y = x^2\sqrt{16-x^2}, y = 0 (0 \leq x \leq 4)$ .

2)  $\begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t), \end{cases}$

$y = 2 (0 < x < 4\pi, y \geq 2)$ .

3)  $\rho = 2 \cos 6\varphi$ .

26. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої кривою  $x = \cos^3 t, y = \sin^3 t$ , навколо осі  $Ox$ .

27. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням кривої  $y = x^3, x = \pm \frac{2}{3}$  навколо осі  $Ox$ .

## Варіант 28

1. Побудувати графіки функцій:

- 1)  $y = 2 \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$ . 4)  $y = \operatorname{ctg}\left(\frac{1}{3}x - \frac{\pi}{4}\right)$ .  
2)  $y = \frac{1}{2} \arccos(x - 2)$ . 5)  $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x + 1$ .  
3)  $y = 2 \arctg(x + 2)$ . 6)  $y = -\lg(2x + 4)$ .

2. Знайти:

а) алгебричну форму  $\frac{z_1}{z_2} + 2z_3 + i^3$ ;

б) тригонометричну форму  $z_3$ ;

в), г)  $(z_1 z_2)^8$  та  $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{10}$ ;

д), е) всі значення  $\sqrt[3]{z_1}$  та  $\sqrt[4]{z_2}$ , якщо:

$$z_1 = -5 - 5i, z_2 = 2\sqrt{3} - 2i, z_3 = 8 + 9i.$$

3. Зобразити множину точок  $z \in \mathbb{C}$ :

1)  $1 < |z + 2i| < 3, 0 < \arg z < \frac{\pi}{4}$ .

2)  $|z + 2| > |z + i|, |\operatorname{Im} z| < 3$ .

3)  $z^3 - 5z^2 + 12z - 18 = 0$ .

Знайти границі (4—7):

4.1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! + (n + 2)!}{(n - 1)! + (n + 2)!}$ .

2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^8 + 6} - \sqrt{n - 6}}{\sqrt[3]{n^8 + 6} + \sqrt{n - 6}}$ .

3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n + 2}(\sqrt{n + 3} - \sqrt{n - 4})$ .

5.1)  $\lim_{x \rightarrow -8} \frac{2x^2 + 15x - 8}{3x^2 + 25x + 8}$ . 6.1)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \operatorname{tg} x$ .

2)  $\lim_{x \rightarrow -6} \frac{x^2 + 2x - 24}{2x^2 + 15x + 18}$ . 2)  $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{\operatorname{tg}(x + 5)}{x^2 - 25}$ .

3)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 - 7x^2 + 3}{2 + 2x - x^3}$ . 3)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x^2 + 1)}{1 - \sqrt{x^2 + 1}}$ .

4)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 + 5x^2 - 3x}{3x^2 + x - 10}$ . 4)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos \frac{\pi x}{2}}{1 - \sqrt{x}}$ .

5)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^3 + 2x^2 + 5}$ . 5)  $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{(x^3 - \pi^3) \sin 3x}{e^{2 \sin^2 x} - 1}$ .

6)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 3}{\sqrt{8 + x} - 3}$ . 6)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - e^x}{\sin 2x - \sin x}$ .

7)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x}{3x + 2}\right)^{x-2}$ . 7)  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \operatorname{tg}^2 x)^{\frac{1}{\ln(1+3x^2)}}$ .

8)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1 - x}{2 - 10x}\right)^{5x}$ . 8)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\frac{18 \sin x}{\operatorname{ctg} x}}$ .

7.1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x - 2x}{x - \sin x}$ . 3)  $\lim_{x \rightarrow +0} x^{\sin 2x}$ .

2)  $\lim_{x \rightarrow 0} (\arcsin x - x) \operatorname{ctg} x$ . 4)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (4x^2 - x)^{\frac{1}{\ln x}}$ .

8. Визначити порядок і головну частину розкладу  $\alpha(x)$  відносно  $\beta(x)$ :

1)  $\alpha(x) = \sqrt[4]{1 + x^4} - 1, \beta(x) = \arcsin 2x, x \rightarrow 0$ .

2)  $\alpha(x) = \sin(\sqrt{x^2 + 9} - 3), \beta(x) = \operatorname{tg} x, x \rightarrow \infty$ .

3)  $\alpha(x) = \cos x - \sqrt[3]{\cos x}, \beta(x) = \ln(1 + \sqrt[3]{x}), x \rightarrow 0$ .

9. Дослідити функцію на неперервність:

1)  $f(x) = e^{-\frac{1}{|x|}}$ .

2)  $f(x) = \begin{cases} 1, & x \leq 0, \\ 2^x, & 0 < x \leq 2, \\ x + 3, & x \geq 2. \end{cases}$

3)  $f(x) = \frac{4x}{x + 5}$  у точках  $x_1 = -5, x_2 = 4$ .

Знайти похідні функцій (10—13):

10.1)  $y = \sqrt{x^3} + \frac{2}{x^3} - \frac{e^{\sin 5x}}{(3x - 2)^2}$ .

2)  $y = \sqrt{3x^7 + \sin \sqrt[3]{\operatorname{tg} 2}} + \frac{\operatorname{tg}^4 5x}{\ln(x + 7)}$ .

3)  $y = 2^{\operatorname{tg} x} \operatorname{arctg}^5 3x - \frac{\operatorname{arctg}^2 5x}{\operatorname{th}(x + 3)}$ .

4)  $y = \arcsin^3 4x \cdot \operatorname{ctg} 3x + \frac{4 \log_2(3x - 5)}{(x - 2)^2}$ .

5)  $y = \operatorname{sh}^4 3x \cdot \arccos 4x^4 - (\operatorname{arctg} x)^{\operatorname{th}(3x+1)}$ .

6)  $y = (\operatorname{ch} 2x)^{\cos(3x+4)} + \frac{\sqrt[4]{(x+1)^3(x-2)^5}}{(x-3)^2(x-1)^3}$ .

11.1)  $\sin y^2 = \frac{x - y}{x + y}$ . 2)  $y = \operatorname{tg}(x + y)$ .

12.  $\begin{cases} y'_x = ? \\ y''_{xx} = ? \end{cases} : 1) \begin{cases} x = e^t, \\ y = te^{-t}. \end{cases} 2) \begin{cases} x = \sin t - t \cos t, \\ y = \cos t + t \sin t. \end{cases}$

13.1)  $y = e^{-x}(2x^2 - 3), y^{(5)} = ?$

2)  $y = \log_3(2x - 1), y^{(n)} = ?$

14. Скласти рівняння дотичної та нормалі до кривої в заданій точці:

1)  $y = \frac{3x - 2x^3}{3}, x_0 = 1$ .

2)  $x = t^3 + 1, y = t^2, t_0 = -2$ .

3)  $x = t \cos t, y = t \sin t, z = t, M_0(0; 0; 0)$ .

15. Знайти проміжки монотонності функції  $y = 16x^3 - 12x^2 - 4$ .

1)  $y = \ln(x^2 - 2x + 2), [0; 3]$ .

16.  $\max_{[a,b]} f(x) = ?$  2)  $y = x^2 + 4x + \frac{16}{x+2}, [-1; 2]$ .

17. Дослідити функцію і побудувати її графік:

1)  $y = -\frac{6\sqrt[3]{6(x-6)^2}}{x^2 - 8x + 24}$ . 5)  $y = \frac{3x^2 - 10}{3 - 2x}$ .

2)  $y = (x + 4)e^{-(x+3)}$ . 6)  $y = \frac{5x^4 + 3}{x}$ .

3)  $y = \sqrt[3]{x(x-6)^2}$ . 7)  $y = x^2 - 2 \ln x$ .

4)  $y = \sqrt{\sin x}$ . 8)  $y = \frac{3x - 2}{x^3}$ .

Знайти інтеграли (18—22):

18.1)  $\int \frac{dx}{2x + 9}$ . 7)  $\int \sin(9x - 1) dx$ .

2)  $\int \sqrt[5]{3 + 2x} dx$ . 8)  $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - 3x^2}}$ .

3)  $\int \frac{dx}{4x^2 + 7}$ . 9)  $\int \frac{dx}{(x - 4) \ln^5(x - 4)}$ .

4)  $\int \frac{2x dx}{5x^2 - 3}$ . 10)  $\int x e^{3-x^2} dx$ .

5)  $\int \frac{dx}{3x^2 - 4}$ . 11)  $\int \frac{\sin 4x}{\sqrt[3]{\cos 4x}} dx$ .

6)  $\int \frac{\sqrt{\operatorname{ctg}^5 x}}{\sin^2 x} dx$ . 12)  $\int \frac{\arccos^2 7x}{\sqrt{1 - 49x^2}} dx$ .

19.1)  $\int \frac{x + 4}{7x^2 + 3} dx$ . 5)  $\int \frac{(7x^2 - 17x) dx}{(x - 2)(x^2 - 2x - 3)}$ .

2)  $\int \frac{1 - x^4}{x^2 + 4} dx$ . 6)  $\int \frac{dx}{x^3 - x^2}$ .

3)  $\int \frac{dx}{1 - 2x - 3x^2}$ . 7)  $\int \frac{6x}{x^3 - 1} dx$ .

4)  $\int \frac{(x - 7) dx}{4x^2 + 3x - 1}$ . 8)  $\int \frac{2x^5 - 2x^3 - x^2}{1 - x^4} dx$ .

20.1)  $\int \operatorname{tg}^3 5x dx$ . 4)  $\int \sin^4 x \cos^5 x dx$ .

2)  $\int \sin^3 4x dx$ . 5)  $\int \frac{dx}{6 - 3 \cos^2 x}$ .

3)  $\int \cos 3x \cos x dx$ . 6)  $\int \frac{dx}{4 - 4 \sin x + 3 \cos x}$ .

21.1)  $\int \frac{8 - 2x}{\sqrt{1 - 3x^2}} dx$ . 5)  $\int \frac{4x + 3}{\sqrt{2x^2 - x + 5}} dx$ .

2)  $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 5x + 1}}$ . 6)  $\int \frac{dx}{x \sqrt{x^2 - 3x + 2}}$ .

3)  $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{9 - x^2}}$ . 7)  $\int \frac{(\sqrt{3x + 1} - 1) dx}{\sqrt[3]{3x + 1} + \sqrt{3x + 1}}$ .

4)  $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x + 6}}$ . 8)  $\int \frac{\sqrt[4]{1 + \sqrt[3]{x}}}{x^{12} \sqrt{x^5}} dx$ .

22.1)  $\int x \sin^2 x dx$ . 4)  $\int x \operatorname{arctg}^2 x dx$ .

2)  $\int (x^2 - 4) \sin x dx$ . 5)  $\int (x + 2) \cos \frac{x}{4} dx$ .

3)  $\int x e^{-5x} dx$ . 6)  $\int \arcsin \frac{x}{7} dx$ .

23. Обчислити інтеграли:

1)  $\int_{-1}^0 (x + 1) e^{-2x} dx$ . 4)  $\int_0^{2\pi} \sin^4 \frac{x}{4} \cos^4 \frac{x}{4} dx$ .

2)  $\int_2^3 \frac{x^3 + x^2 + 2}{x(x^2 - 1)^2} dx$ . 5)  $\int_0^3 x^4 \sqrt{9 - x^2} dx$ .

3)  $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos^5 x dx$ . 6)  $\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{5}{6}} \frac{dx}{\sqrt{8 + 6x - 9x^2}}$ .

24. Обчислити інтеграли або довести їх розбіжність:

1)  $\int_1^{\infty} \frac{dx}{(6x^2 - 5x + 1) \ln \frac{3}{4}}$ . 2)  $\int_0^4 \frac{10x dx}{\sqrt[4]{(16 - x^2)^3}}$ .

25. Обчислити площі фігур, обмежених кривими:

1)  $x = \sqrt{4 - y^2}, x = 0, y = 0, y = 1$ .

2)  $\begin{cases} x = 4\sqrt{2} \cos^3 t, \\ y = \sqrt{2} \sin^3 t, \end{cases} x = 2 (x \geq 2)$ .

3)  $\rho = \cos \varphi - \sin \varphi$ .

26. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої кривими  $2y = x^2, 2x + 2y - 3 = 0$ , навколо осі  $Ox$ .

27. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням дуги кривої  $x = 2 \cos^3 t, y = 2 \sin^3 t$  навколо осі  $Ox$ .

## Варіант 29

1. Побудувати графіки функцій:

1)  $y = \frac{1}{2} \sin\left(3x - \frac{3\pi}{4}\right)$ . 4)  $y = \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{8}\right)$ .

2)  $y = 2 \arcsin(x + 3)$ . 5)  $y = -e^{x-2}$ .

3)  $y = \frac{1}{3} \operatorname{arctg}(x - 2)$ . 6)  $y = -\ln(2x - 3)$ .

2. Знайти:

а) алгебричну форму  $\frac{z_1}{z_2} + 2z_3 + i^8$ ;

б) тригонометричну форму  $z_3$ ;

в), г)  $(z_1 z_2)^8$  та  $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{10}$ ;

д), е) всі значення  $\sqrt[3]{z_1}$  та  $\sqrt[4]{z_2}$ , якщо:

$z_1 = 6 - 6i$ ,  $z_2 = 3 + \sqrt{3}i$ ,  $z_3 = -9 + 8i$ .

3. Зобразити множину точок  $z \in \mathbb{C}$ :

1)  $2 < |z - 3| < 4$ ,  $\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{2\pi}{3}$ .

2)  $|z - 3i| < |z - 2|$ ,  $|\operatorname{Re} z| > 1$ .

3)  $z^3 - 5z^2 + 2z + 78 = 0$ .

Знайти границі (4—7):

4.1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + 6 + 9 + \dots + 3n}{n^2 + 4}$ .

2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - \sqrt{n^3 + 1}}{\sqrt[3]{n^6 + 2} - n}$ .

3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt{n^4 + 3} - \sqrt{n^4 - 2})$ .

5.1)  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3x^2 - 2x - 40}{x^2 - 3x - 4}$ . 6.1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{7x}{\sin x + \sin 7x}$ .

2)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x - 4}{x^2 - 11x + 18}$ . 2)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 8x}{2x^2}$ .

3)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 - 2x + 1}{2x^3 + 3x^2 + 2}$ . 3)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}\left(\pi\left(1 + \frac{x}{2}\right)\right)}{\ln(x + 1)}$ .

4)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 + 10x - 11}{3x^4 - 2x + 5}$ . 4)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3 - \sqrt{10 - x}}{\sin 3\pi x}$ .

5)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 81}{3x^2 + 4x + 2}$ . 5)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - e^x}{x + \operatorname{tg} x^2}$ .

6)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{9 + x} - 3}{x^2 + x}$ . 6)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin^3 x}{\cos^2 x}$ .

7)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x-1}\right)^{3-2x}$ . 7)  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \ln \cos x)^{\operatorname{ctg}^2 x}$ .

8)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3+x}{9x-4}\right)^{2x}$ . 8)  $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{\ln(x+1)}{\ln(2-x)}}$ .

7.1)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\ln\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}{\operatorname{tg} 5x}$ . 3)  $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x)^{2 \cos \frac{\pi x}{2}}$ ;

2)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\pi - 2 \operatorname{arctg} \sqrt{x}) \sqrt{x}$ . 4)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{x}\right)^{\operatorname{tg} x}$ .

8. Визначити порядок і головну частину розкладу  $\alpha(x)$  відносно  $\beta(x)$ :

1)  $\alpha(x) = e^{x^4} - \cos 4x$ ,  $\beta(x) = \operatorname{tg} \sqrt[3]{x^2}$ ,  $x \rightarrow 0$ .

2)  $\alpha(x) = \sqrt{4-x^2} + x^2 - 2$ ,  $\beta(x) = \arcsin x$ ,  $x \rightarrow 0$ .

3)  $\alpha(x) = \ln(1 + \sin x \cdot \operatorname{tg}^6 x)$ ,  $\beta(x) = x$ ,  $x \rightarrow 0$ .

9. Дослідити функцію на неперервність:

1)  $f(x) = \frac{|x-1|}{x^2 - x^3}$ .

2)  $f(x) = \begin{cases} 3x + 4, & x \leq -1, \\ x^2 - 2, & -1 < x < 2, \\ x, & x \geq 2. \end{cases}$

3)  $f(x) = 6^{\frac{2}{4-x}}$  у точках  $x_1 = 3$ ,  $x_2 = 4$ .

Знайти похідні функцій (10—13):

10.1)  $y = \frac{4}{x^3} - \sqrt[5]{x^3} - \frac{\log_3(x+4)}{\cos^5 x}$ .

2)  $y = \sqrt{2x^3 - \cos^2 \sin 3} + e^{x^3} \sqrt{x^2 - 3x - 7}$ .

3)  $y = \sin^5 3x \cdot \operatorname{arctg} \sqrt{x} - \frac{\sqrt{\operatorname{sh}^3 x}}{\operatorname{arctg} 5x}$ .

4)  $y = \lg(x+3) \operatorname{arctg}^2 5x + \frac{2 \ln(2x^2 + 3)}{(x-7)^4}$

5)  $y = e^{-\cos x} \arcsin 2x - (\operatorname{cth} \sqrt{x})^{\sin(x+3)}$ .

6)  $y = (\ln(7x+4))^{\operatorname{tg} x} + \frac{\sqrt[6]{(x-1)^5(x+1)^2}}{(x+2)^4(x-5)^7}$ .

11.1)  $\sin xy^2 = y$ . 2)  $y^x = x^{y^2}$ .

12.  $\begin{cases} y'_x = ? \\ y''_{xx} = ? \end{cases} : 1) \begin{cases} x = 6t^2 - 4, \\ y = 3t^5. \end{cases} 2) \begin{cases} x = \frac{1}{t^2}, \\ y = \frac{1}{t^2 + 1}. \end{cases}$

13.1)  $y = (5x-1) \ln 2x$ ,  $y^{(5)} = ?$

2)  $y = \frac{1+x}{1-x}$ ,  $y^{(n)} = ?$

14. Скласти рівняння дотичної та нормалі до кривої в заданій точці:

1)  $y = \frac{x^2}{10} + 3$ ,  $x_0 = 2$ .

2)  $x = \sin t, y = a^t, t_0 = 0$ .

3)  $x = 2t, y = \ln t, z = t^2, M_0(2; 0; 1)$ .

15. Знайти проміжки монотонності функції  $y = \frac{1}{8}(11 + 9x - 3x^2 - x^3)$ .

1)  $y = 108x - x^4, [-1; 4]$ .

16.  $\max_{[a,b]} f(x) = ?$

2)  $y = \frac{4}{x^2} - 8x, [-2; -\frac{1}{2}]$ .

17. Дослідити функцію і побудувати її графік:

1)  $y = \frac{3\sqrt[3]{6(x-1)^2}}{2(x^2 + 2x + 9)}$ .

5)  $\int \frac{3x-7}{\sqrt{x^2-5x+1}} dx$ .

2)  $\int \frac{dx}{\sqrt{3-x-x^2}}$ .

6)  $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{2-x-x^2}}$ .

3)  $\int \frac{\sqrt{16-x^2}}{x^4} dx$ .

7)  $\int \frac{dx}{4\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}$ .

4)  $\int \frac{dx}{3 + \sqrt{x-6}}$ .

8)  $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[5]{x}}}{x^{15}\sqrt{x^4}} dx$ .

22.1)  $\int \ln(x+5) dx$ .

4)  $\int x^2 \operatorname{arctg} x dx$ .

2)  $\int (x^2 + x) \cos x dx$ .

5)  $\int x \sin \frac{x}{5} dx$ .

3)  $\int x e^{x+3} dx$ .

6)  $\int \arccos x dx$ .

23. Обчислити інтеграли:

1)  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x \operatorname{tg}^2 x dx$ .

4)  $\int_0^{\pi} 2^4 \sin^2 \frac{x}{2} \cos^6 \frac{x}{2} dx$ .

2)  $\int_3^5 \frac{x^3 - 2x^2 + 4}{x^3(x-2)^2} dx$ .

5)  $\int_0^3 \frac{x^3 dx}{\sqrt{9+x^2}}$ .

3)  $\int_2^{\frac{3}{2}} \frac{dx}{\sqrt{4x-3-x^2}}$ .

6)  $\int_{\ln 5}^{\ln 12} \frac{dx}{\sqrt{e^x + 4}}$ .

24. Обчислити інтеграли або довести їх розбіжність:

1)  $\int_1^{\infty} \frac{dx}{9x^2 - 9x + 2}$ .

2)  $\int_0^{\frac{1}{4}} \frac{dx}{\sqrt[3]{1-4x}}$ .

25. Обчислити площі фігур, обмежених кривими:

1)  $y = (x-1)^2, y^2 = x-1$ .

2)  $\begin{cases} x = 2\sqrt{2} \cos t, \\ y = 5\sqrt{2} \sin t, \end{cases} y = 5 (y \geq 5)$ .

3)  $\rho = 3 \sin \varphi, \rho = 5 \sin \varphi$ .

26. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої кривими  $y = x - x^2, y = 0$ , навколо осі  $Ox$ .

27. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням кривої  $x = \cos t, y = 2 + \sin t$  навколо осі  $Ox$ .

Знайти інтеграли (18—22):

18.1)  $\int \frac{dx}{7x-3}$ .

7)  $\int \cos(10x-3) dx$ .

2)  $\int \sqrt[4]{(3+5x)^3} dx$ .

8)  $\int \frac{\ln^6(x+9)}{x+9} dx$ .

3)  $\int \frac{2dx}{4+3x^2}$ .

9)  $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt[3]{\cos^4 2x}} dx$ .

4)  $\int \frac{x dx}{3x^2-2}$ .

10)  $\int \frac{\sqrt[5]{\operatorname{ctg}^2 x}}{\sin^2 x} dx$ .

5)  $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+5}}$ .

11)  $\int \frac{\sqrt[5]{\operatorname{arctg}^3 x}}{1+x^2} dx$ .

6)  $\int e^{8x+1} dx$ .

12)  $\int x e^{-2x^2-1} dx$ .

19.1)  $\int \frac{3x+7}{x^2+4} dx$ .

5)  $\int \frac{6x^4 - 30x^2 + 30}{(x^2-1)(x+2)} dx$ .

2)  $\int \frac{x^2+4}{x-3} dx$ .

6)  $\int \frac{2x^2+1}{x^3-2x^2+x} dx$ .

3)  $\int \frac{dx}{2x^2+3x+6}$ .

7)  $\int \frac{(5x^2+17x+36) dx}{(x+1)(x^2+6x+13)}$ .

4)  $\int \frac{(2x+1) dx}{5x^2+2x+10}$ .

8)  $\int \frac{x^3+x^2+x-1}{x^4+5x^2+4} dx$ .

20.1)  $\int \operatorname{tg}^2 \frac{7x}{4} dx$ .

4)  $\int \sin^4 3x \cos^2 3x dx$ .

2)  $\int \sin^3 4x dx$ .

5)  $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 3 \cos^2 x}$ .

3)  $\int \cos 2x \sin 3x dx$ .

6)  $\int \frac{dx}{3 \sin x - \cos x}$ .

### Варіант 30

1. Побудувати графіки функцій:

- 1)  $y = -\frac{1}{2} \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ . 4)  $y = \operatorname{ctg}\left(\frac{1}{3}x + \frac{\pi}{12}\right)$ .  
 2)  $y = 2 \arccos\left(x - \frac{1}{2}\right)$ . 5)  $y = e^{x+2}$ .  
 3)  $y = 3 \operatorname{arctg}(x + 1)$ . 6)  $y = \lg(5 - 3x)$ .

2. Знайти:

а) алгебричну форму  $\frac{z_1}{z_2} + 2z_3 - i^5$ ;

б) тригонометричну форму  $z_3$ ;

в), г)  $(z_1 z_2)^8$  та  $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{10}$ ;

д), е) всі значення  $\sqrt[3]{z_1}$  та  $\sqrt[4]{z_2}$ , якщо:  
 $z_1 = 7 + 7i, z_2 = -\sqrt{3} + i, z_3 = -8 - 7i$ .

3. Зобразити множину точок  $z \in \mathbb{C}$ :

- 1)  $1 < |z + 3| < 4, \frac{\pi}{3} < \arg z < \pi$ .  
 2)  $|z + 3i| > |z + 2|, |\operatorname{Im} z| > 2$ .  
 3)  $z^3 + 5z^2 + 8z + 6 = 0$ .

Знайти границі (4—7):

- 4.1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{7}{10} + \frac{29}{100} + \dots + \frac{2^n + 5^n}{10^n} \right)$ .  
 2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt[3]{n^3+1}}{\sqrt[4]{n+1} - \sqrt[5]{n^5+1}}$ .  
 3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n(n+1)(n+2)}(\sqrt{n^3-3} - \sqrt{n^3-2})$ .  
 5.1)  $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x^2 + 5x - 3}{3x^2 + 10x + 3}$ . 6.1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos^3 x}{5x^2}$ .  
 2)  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^3 - 64}{7x^2 - 27x - 4}$ . 2)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 5x)}{\sin 3x}$ .  
 3)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 - 3x + 1}{3x^2 + x - 5}$ . 3)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(e^{\pi x} - 1)}{3(\sqrt[3]{1+x} - 1)}$ .  
 4)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^3 + 3x - 4}{2x^2 - 5x + 1}$ . 4)  $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 5x}{\operatorname{tg} 3x}$ .  
 5)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{7x + 4}{3x^3 - 5x + 1}$ . 5)  $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\operatorname{tg}(3\frac{\pi}{x} - 3)}{3^{\cos \frac{3x}{2}} - 1}$ .  
 6)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{4x+1} - 3}{x^3 - 8}$ . 6)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{3x} - 3^{2x}}{x + \arcsin x^3}$ .  
 7)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{4-2x}{1-2x} \right)^{x+1}$ . 7)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\log_3 x - 1}{\operatorname{tg} \pi x}$ .  
 8)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{x+5}{4x-2} \right)^{3x}$ . 8)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( 1 - \sin^2 \frac{x}{2} \right)^{\frac{1}{\ln(1+\operatorname{tg}^2 x)}}$ .

7.1)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2 x - 2 \operatorname{tg} x}{1 + \cos 4x}$ . 3)  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 e^{-x^3}$ .

2)  $\lim_{x \rightarrow 1} (x-1)^{\cos \frac{\pi x}{2}}$ . 4)  $\lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{ctg} x)^{\sin^2 x}$ .

8. Визначити порядок і головну частину розкладу  $\alpha(x)$  відносно  $\beta(x)$ :

1)  $\alpha(x) = \sqrt[4]{1+x^3} - 1, \beta(x) = \operatorname{arctg} x, x \rightarrow 0$ .

2)  $\alpha(x) = \ln(x^2 + 7x + 11), \beta(x) = x + 2, x \rightarrow -2$ .

3)  $\alpha(x) = \ln \cos 2x, \beta(x) = \arcsin x, x \rightarrow 0$ .

9. Дослідити функцію на неперервність:

1)  $f(x) = \frac{1 - \sqrt{x}}{x^2 - 1}$ .

2)  $f(x) = \begin{cases} x+2, & x \leq -1, \\ x^2+1, & -1 < x \leq 1, \\ -x+3, & x > 1. \end{cases}$

3)  $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$  у точках  $x_1 = 2, x_2 = 3$ .

Знайти похідні функцій (10—13):

10.1)  $y = \frac{6}{x^4} - \sqrt{x^7} + \frac{e^{-\operatorname{tg} x}}{4x^2 + 7x - 5}$ .

2)  $y = \sqrt[3]{5x^5 - \sin^3 \cos 2} - \frac{\operatorname{tg}^4 3x}{\lg(x^2 - x + 4)}$ .

3)  $y = \cos^4 3x \cdot \arcsin 3x^2 + \frac{\sqrt[5]{\operatorname{ch} 3x}}{\operatorname{arctg}(x+2)}$ .

4)  $y = \log_5(x+1) \operatorname{arctg}^2 x^3 - \frac{4 \lg(3x+7)}{(x-5)^3}$ .

5)  $y = \operatorname{th}^3 5x \cdot \operatorname{arctg}(2x-5) + (\operatorname{sh} 3x)^{\arccos 2x}$ .

6)  $y = (\lg(8x+3))^{\operatorname{tg} 5x} - \frac{(x+1)^2 \sqrt[5]{(x+2)^3}}{(x-1)^4 (x-3)^5}$ .

11.1)  $\operatorname{ctg}^2(x+y) = 5y$ . 2)  $x^3 + y^3 = 15xy$ .

12.  $\begin{matrix} y'_x = ? \\ y''_{xx} = ? \end{matrix} : 1) \begin{cases} x = \cos t + \sin t, \\ y = \sin 2t. \end{cases} 2) \begin{cases} x = \arcsin t, \\ y = \ln t. \end{cases}$

13.1)  $y = (x^2 + 2x - 1) \sin 2x, y^{(5)} = ?$

2)  $y = \frac{7x+1}{4x+3}, y^{(n)} = ?$

14. Скласти рівняння дотичної та нормалі до кривої в заданій точці:

1)  $y = \frac{x^2 - 2x - 3}{4}, x_0 = 4$ .

$$2) x = \sin t, y = \cos 2t, t_0 = \frac{\pi}{6}.$$

$$3) x = t^3 - 1, y = 3t^2, z = 2t^3 - 1, M_0(0; 3; 1).$$

15. Знайти проміжки монотонності функції  $y = -\frac{1}{16}(x+1)^2(x-3)^2$ .

$$16. \max_{[a,b]} f(x) = ? \quad 1) y = \frac{1}{4}x^4 - 6x^3 + 7, [16; 20].$$

$$\min_{[a,b]} f(x) = ? \quad 2) y = \sqrt[3]{(x+1)^2(x-2)}, [-2; -5].$$

17. Дослідити функцію і побудувати її графік:

$$1) y = \frac{3\sqrt[3]{6(x-1)^2}}{2(x^2+2x+9)}. \quad 5) y = \frac{-8-x^2}{\sqrt{x^2-4}}.$$

$$2) y = \frac{x^3 - 27x + 51}{x^3}. \quad 6) y = \frac{5x}{4-x^2}.$$

$$3) y = \sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt[3]{(x+2)^2}. \quad 7) y = \ln(4-x^2).$$

$$4) y = \sqrt{\frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{2}}}. \quad 8) y = \ln \frac{x+6}{x}.$$

Знайти інтеграли (18—22):

$$18.1) \int \frac{dx}{6x+1}. \quad 7) \int \sin(9x+7).$$

$$2) \int \sqrt[3]{(x-2)^2} dx. \quad 8) \int \frac{\ln(3x+5)}{3x+5} dx.$$

$$3) \int \frac{dx}{3x^2-2}. \quad 9) \int \frac{\cos 6x}{\sin^4 6x} dx.$$

$$4) \int \frac{2dx}{\sqrt{4x^2-3}}. \quad 10) \int \frac{\operatorname{tg}^7 3x}{\cos^2 3x} dx.$$

$$5) \int \frac{7x dx}{7x^2+1}. \quad 11) \int \frac{\operatorname{arctg}^4 8x}{1+64x^2} dx.$$

$$6) \int e^{4-7x} dx. \quad 12) \int e^{4-5x^2} x dx.$$

$$19.1) \int \frac{x-5}{9x^2+4}. \quad 5) \int \frac{(3x^2-17x+2)dx}{(x-1)(x^2+5x+6)}.$$

$$2) \int \frac{2x^3+3}{2x^2-1} dx. \quad 6) \int \frac{2x^3+5x^2-1}{x^3+x^2} dx.$$

$$3) \int \frac{dx}{3x^2+5x+2}. \quad 7) \int \frac{(2x+22)dx}{(x+2)(x^2-2x+10)}.$$

$$4) \int \frac{(x-4)dx}{5x^2-x+1}. \quad 8) \int \frac{(2x+3)dx}{(x-1)^2(x^2+4)}.$$

$$20.1) \int \operatorname{tg}^5 4x dx. \quad 4) \int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[3]{\cos^4 x}} dx.$$

$$2) \int \sin^2 \frac{3x}{4} dx. \quad 5) \int \frac{\sin^2 x}{3\sin^2 x - \cos^2 x} dx.$$

$$3) \int \cos 7x \cos 5x dx. \quad 6) \int \frac{dx}{2-3\cos x + \sin x}.$$

$$21.1) \int \frac{2x-1}{\sqrt{3x^2-4}}. \quad 5) \int \frac{7x-1}{\sqrt{2-3x-x^2}} dx.$$

$$2) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+1}}. \quad 6) \int \frac{dx}{x\sqrt{1-3x-2x^2}}.$$

$$3) \int \frac{\sqrt{16-x^2}}{x^2} dx. \quad 7) \int \frac{(\sqrt{x+1}-1)dx}{(\sqrt[3]{x+1}+1)\sqrt{x+1}}.$$

$$4) \int \frac{dx}{2+\sqrt{x-8}}. \quad 8) \int \frac{\sqrt[5]{1+\sqrt[5]{x}}}{x^{15}\sqrt{x^4}} dx.$$

$$22.1) \int \ln \frac{2-x}{2+x} dx. \quad 4) \int (x^2+4)e^{2x} dx.$$

$$2) \int x \operatorname{arctg} 2x dx. \quad 5) \int (x-9) \sin \frac{x}{2} dx.$$

$$3) \int x \cos(x-2) dx. \quad 6) \int \arccos \frac{x}{3} dx.$$

23. Обчислити інтеграли.

$$1) \int_0^1 x \operatorname{arctg} x dx. \quad 4) \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 2^8 \cos^8 x dx.$$

$$2) \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{x^2 dx}{x^4-1}. \quad 5) \int_0^{\pi} \sin^4 \frac{x}{2} dx.$$

$$3) \int_0^{\sqrt{6}} \sqrt{6-x^2} dx. \quad 6) \int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2+2x+3}.$$

24. Обчислити інтеграли або довести їх розбіжність:

$$1) \int_3^{\infty} \frac{dx}{x^2-3x+2}. \quad 2) \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{(2x-1)^2}.$$

25. Обчислити площі фігур, обмежених кривими:

$$1) y = x^2 \cos x, y = 0 \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right).$$

$$2) \begin{cases} x = 4(t - \sin t), \\ y = 4(1 - \cos t), \\ y = 6 \quad (0 < x < 3\pi, y \geq 6). \end{cases}$$

$$3) \rho = 2 \sin \varphi, \rho = 4 \sin \varphi.$$

26. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої кривими

$$y = 2 - \frac{x^2}{2}, x + y = 2, \text{ навколо осі } Oy.$$

27. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням кривої  $x = \cos t, y = 4 + \sin t$  навколо осі  $Ox$ .

### Додаткові задачі

1. Описати множини  $A \cup B, A \cap B, A \setminus B, B \setminus A, A \Delta B$  переліком всіх елементів якщо:

1)  $A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{2, 3, 4\}$ .

2)  $A = \{4, 5, 6\}, B = \{5, 6, 7\}$ .

3)  $A = (-2, 3], B = [2, 4)$ .

2. Вважаючи  $U = [0, 2]$  універсальною множиною, знайти і зобразити  $\bar{A}$ , якщо  $A$ :

1)  $\{0, 1, 2\}$ . 2)  $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ . 3)  $(0, 1]$ .

3. Знайти  $\max X, \min X, \sup X, \inf X$ , якщо:

1)  $X = \left\{\frac{1}{5^n}, n \in \mathbb{N}\right\}$ . 2)  $X = [0, 1)$ .

4. Знайти множину точок  $z \in \mathbb{C}$ :

1)  $|z - 1| = |\operatorname{Re} z|$ . 4)  $|z| > 2 + \operatorname{Im} z$ .

2)  $\frac{\pi}{4} \leq \arg(z + 2 - i) \leq \frac{3\pi}{4}$ . 5)  $\operatorname{Im} \frac{z - 1}{z + 1} = 0$ .

3)  $\operatorname{Re} \frac{z - 1}{z + 1} = 0$ . 6)  $\arg \frac{z - 1}{z + 1} = 0$ .

5. Довести, що:

1)  $n(2n^2 - 3n + 1) \div 6$ .

2)  $\sqrt{n} < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}$ .

3)  $(1 + x)^n \geq 1 + nx, x > -1$ .

6. Довести, користуючись означенням, що:

1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n - 2}{2n - 1} = \frac{3}{2}$ . 3)  $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x^2 + 5x - 3}{x + 3} = -7$ .

2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n - 1}{2n + 1} = 2$ . 4)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x^2 - 4x - 1}{x - 1} = 6$ .

7. Знайти границі.

1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{4}{n^2} + \dots + \frac{3n - 2}{n^2}\right)$ .

2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{3^n + 2^n}{6^n}\right)$ .

3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n + 2)! - n(n + 1)!}{(n + 1)! + n!}$ .

4)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n)! + n(2n - 1)!}{n^2(2n - 2)! - (2n - 1)!}$ .

8. При яких значеннях  $\alpha$  і  $\beta$  функція  $f(x)$  буде нескінченно малою при  $x \rightarrow +0$ :

1)  $f(x) = x^\alpha \sin \frac{1}{x^\beta}$ . 3)  $f(x) = \frac{\ln(1 + x^\alpha)}{x^\beta}$ .

2)  $f(x) = x^\alpha \operatorname{arctg} \frac{1}{x^\beta}$ . 4)  $f(x) = (1 - x^\alpha)^{x^\beta}$ .

9. Визначити порядок нескінченно великої:

1)  $f(x) = \operatorname{ctg}^2 x^3, x \rightarrow 0$ .

2)  $f(x) = \frac{x^5}{1 + x + 2x^2}, x \rightarrow \infty$ .

3)  $f(x) = \sqrt{x^4 + x + 1}, x \rightarrow \infty$ .

4)  $f(x) = \frac{\ln x}{(x - 1)^2}, x \rightarrow 1$ .

10. Які з пар функцій є функціями одного порядку:

1)  $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1, g(x) = x^3 - x;$   
 $x \rightarrow 1, x \rightarrow \infty$ .

2)  $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x, g(x) = \frac{1}{x}; x \rightarrow \pm\infty$ .

3)  $f(x) = \frac{x^2 \operatorname{arctg} x}{x^2 + x + 1}, g(x) = 1, x \rightarrow \infty;$

4)  $f(x) = x \cos \frac{1}{x}, g(x) = x, x \rightarrow 0?$

11. Визначити при яких значеннях  $\alpha$  та  $\beta$  функції  $f(x)$  та  $g(x) = \alpha x^\beta$  є еквівалентними:

1)  $f(x) = \sqrt{2x + \sqrt{x}}; x \rightarrow +0, x \rightarrow +\infty$ .

2)  $f(x) = \sqrt{1 - 2x} - \sqrt[3]{1 - 3x}, x \rightarrow 0$ .

3)  $f(x) = 2e^{x^4} + (\cos x - 1)^2 + x^5 - 2, x \rightarrow 0$ .

4)  $f(x) = 1 - \cos\left(1 - \cos \frac{1}{x}\right)$ .

12. Знайти корені рівнянь на інтервалах з точністю до 0,1:

1)  $x^3 - 3x + 1, (1; 2)$ .

2)  $x^3 - 6x + 2 = 0, (-3; -2), (0; 1), (2; 3)$ .

3)  $x^3 - 3x^2 + 3 = 0, (-1; 0), (1; 2), (2; 3)$ .

13. Наближено обчислити:

1)  $\arcsin 0,6$ . 2)  $\operatorname{arctg} 0,95$ . 3)  $\sqrt[3]{26,19}$ .

14. Перевірити теорему Ролля:

1)  $f(x) = x(x^2 - 1), x \in [-1; 1], x \in [0; 1]$ .

2)  $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 5x + 6}, x \in [2; 3]$ .

3)  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6, x \in [1; 3]$ .

15. Перевірити теорему Лагранжа:

1)  $f(x) = x^3 - 3x^2 + x + 1, x \in [1; 3]$ .

2)  $f(x) = \operatorname{arctg} x, x \in [1; \sqrt{3}]$ .

16. Довести нерівності:

- 1)  $e^x > 1 + x, x \neq 0$ .
- 2)  $\frac{b-a}{1+b} < \ln \frac{1+b}{1+a} < \frac{b-a}{1+a}, 0 < a < b$ .
- 3)  $\frac{x}{1+x} < \ln x(1+x) < x, x > 0$ .
- 4)  $\frac{2(x-1)}{x+1} \ln x, x > 1$ .
- 5)  $\ln(1+x^2) \leq 2x \operatorname{arctg} x$ .
- 6)  $\frac{\operatorname{arctg} x}{1+x} < \ln(1+x), x > 0$ .
- 7)  $x - \frac{x^3}{6} < \sin x, x > 0$ .
- 8)  $x + \frac{x^3}{3} < \operatorname{tg} x, x \in [0; \frac{\pi}{2}]$ .

17. Перевірити теорему Коші:

- 1)  $f(x) = x^4, \varphi(x) = x^2, [a; b], 0 < a < b$ .
- 2)  $f(x) = \sin x, \varphi(x) = \cos x, x \in [\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}]$ .

18. Розвинути  $f(x)$  за степенями  $g(x)$ :

- 1)  $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 1, g(x) = x + 1$ .
- 2)  $f(x) = x^4 - 2x + 3, g(x) = x - 1$ .

19. Наближено обчислити з похибкою меншою  $10^{-3}$ :

- 1)  $\sqrt[3]{127}$ . 2)  $\sqrt[4]{83}$ . 3)  $\sin 85^\circ$ . 4)  $\ln(1,3)$ .

20. Оцінити абсолютну похибку наближених формул:

- 1)  $e^x \approx \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}, x \in [0; 1]$ .
- 2)  $\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}, |x| < 1$ .
- 3)  $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!}, |x| \leq 0,5$ .
- 4)  $\operatorname{tg} x \approx x + \frac{x^3}{3}, |x| \leq 0,1$ .
- 5)  $\ln(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}, |x| \leq 0,1$ .

21. Дослідити функцію в околі заданих точок:

- 1)  $y = x^2 - 4x - (x-2) \ln(x-1), x_0 = 2$ .
- 2)  $y = 6e^{x-2} - x^3 + 3x^2 - 6x, x_0 = 2$ .
- 3)  $y = \sin^2(x+2) - x^2 - 4x - 4, x_0 = 2$ .

22. Дослідити функцію на екстремум:

- 1)  $f(x) = x + \frac{1}{x}$ . 3)  $f(x) = x^2(2-x)$ .
- 2)  $f(x) = e^x \cos x$ . 4)  $f(x) = xe^{-x^2}$ .

23. Знайти найменше та найбільше значення функції:

- 1)  $y = 2 \sin x + \sin 2x, [0; \frac{3\pi}{2}]$ .
- 2)  $y = 4x + \frac{9\pi^2}{x} + \sin x, x \in [\pi; 2\pi]$ .

24. Дослідити функцію на опуклість:

- 1)  $f(x) = x^3 + 1$ . 5)  $f(x) = e^{-x^2}$ .
- 2)  $f(x) = x^4 - 6x^2 + 2$ . 6)  $y = \frac{x}{x^2 + 1}$ .
- 3)  $f(x) = x^2 \ln x$ . 7)  $f(x) = e^{2x-x^2}$ .
- 4)  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 2x + 10$ .

25. Знайти асимптоти графіка функції:

- 1)  $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{4} = 1$ . 3)  $f(x) = \frac{x^3}{1-x^2}$ .
- 2)  $f(x) = x \operatorname{arctg} x$ . 4)  $f(x) = x(1 - \frac{1}{x})^x$ .

26. Побудувати графік функції:

- 1)  $y = \cos 3x + 3 \cos x$ . 6)  $y = e^{\cos x}$ .
- 2)  $y = \cos x - \ln \cos x$ . 7)  $y = e^{-\operatorname{arctg} x}$ .
- 3)  $y = e^{\sin x + \cos x}$ . 8)  $y = (1+x)^{\frac{1}{x}}$ .
- 4)  $y = \ln(\cos x + \sin x)$ . 9)  $y = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$ .
- 5)  $y = \operatorname{arctg} \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{2}}$ . 10)  $y = (1 + \frac{1}{x})^x$ .

27. Обчислити інтеграли:

- 1)  $\int_0^{\frac{\sqrt{5}}{2}} \frac{dx}{\sqrt{(5-x^2)^3}}$ . 3)  $\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{\sqrt{2} x^4} dx$ .
- 2)  $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$ . 4)  $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^6}$ .

29. Дослідити інтеграли на збіжність:

- 1)  $\int_0^{+\infty} \frac{x^7 dx}{(x^3 + x + 1)^3}$ . 3)  $\int_0^1 \frac{dx}{e^x - \cos x}$ .
- 2)  $\int_0^5 \frac{dx}{\ln x}$ . 4)  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\sqrt{x^3}} dx$ .