УДК 517.581

Н.О. Вірченко, С.М. Заїкіна

УЗАГАЛЬНЕНІ ІНТЕГРАЛЬНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ І ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ

Вступ

Спеціальні функції стали ефективним теоретичним знаряддям і для вчених, і для інженерів. Розвиток математичної фізики, механіки суцільного середовища, теорії імовірностей та математичної статистики, квантової механіки, теорії моделювання, теплофізики, термомеханіки та інших наук стимулює як розвиток теорії спеціальних функцій, так і розмаїтість їх застосувань. Спеціальні функції є і ядрами багатьох інтегральних перетворень. А метод інтегральних перетворень – один із найефективніших аналітичних методів розв'язання крайових задач математичної фізики, широкого класу прикладних задач та ін.

В останні десятиріччя запроваджуються нові типи інтегральних перетворень, які знаходять застосування при розв'язанні складніших задач. Тут слід звернути увагу на працю [1], в якій подано розгорнуту картину сучасного стану теорії інтегральних перетворень, багато місця відведено інтегральним перетворенням, ядра яких містять H-функцію, визначену за допомогою інтеграла Мелліна–Бернса, підінтегральний вираз якого – це добуток ейлерових гамма-функцій.

Постановка задачі

У статті запроваджуються нові узагальнення найбільш відомих і поширених інтегральних перетворень, вивчаються їх властивості, зокрема, встановлюються рівності типу Парсеваля–Гольдштейна для деяких із них.

Класичні інтегральні перетворення

Для викладу подальшого матеріалу нагадаємо найбільш поширені класичні інтегральні перетворення:

перетворення Лапласа [3]

$$L\{f(x);y\}=\int_0^\infty \exp(-xy)f(x)\,dx; \qquad (1)$$

перетворення потенціала за Віддером [4]

$$\mathfrak{P}\{f(x);y\}=\int_0^\infty \frac{xf(x)}{x^2+y^2}dx; \qquad (2)$$

перетворення Стілтьєса [3]

$$\mathfrak{S}\{f(x);y\}=\int_0^\infty \frac{f(x)}{x+y}dx; \qquad (3)$$

узагальнене перетворення Стілтьєса [3]

$$\mathfrak{S}_p\{f(x);y\}=\int_0^\infty \frac{f(x)}{(x+y)^p}dx; \qquad (4)$$

перетворення Мелліна [3]

$$\mathfrak{M}\{f(x);y\}=\int_0^\infty x^{y-1}f(x)\,dx; \qquad (5)$$

$\mathfrak{E}_1$-перетворення [5]

$$\mathfrak{E}_1\{f(x);y\}=\int_0^\infty \exp(xy)\mathrm{E}_1(xy)f(x)\,dx, \qquad (6)$$

де $\mathrm{E}_1(x)$ – експоненціальна інтегральна функція [6]:

$$\mathrm{E}_1(x)=-\mathrm{E}_i(-x)=\int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t}dt. \qquad (7)$$

Основні результати

Запроваджуємо нові узагальнення інтегральних перетворень (1)–(6): за допомогою (τ,β)-узагальненої конфлюентної гіпергеометричної функції ${}_1\Phi_1^{\tau,\beta}(a;c;z)$ [7, 8] маємо

$$ {}_1\Phi_1^{\tau,\beta}(a;c;z)\equiv {}_1\Phi_1^{\tau,\beta}(z)= $$

$$ =\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)}\int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{c-a-1}\times $$

$$ \times\,{}_1\Psi_1\left[\begin{matrix}(c;\tau);\\(c;\beta);\end{matrix}\middle|\, zt^\tau\right]dt, \qquad (8)$$

де $\mathrm{Re}c>\mathrm{Re}a>0$; $\{\tau,\beta\}\subset R$; $\tau>0$; $\beta>0$; $\tau-\beta<1$; $\Gamma(a)$ – класична гамма-функція [6]; ${}_1\Phi_1$ – функція Фокса–Райта [1]; ${}_1\Psi_1(z)$ – частинний випадок узагальненої функції Райта ${}_p\Psi_q(z)$ [1]:

$${}_p\Psi_q(z)\equiv {}_p\Psi_q(z)\left[\begin{matrix}(a_i;\alpha_i)_{1,p};\\(b_j;\beta_j)_{1,q};\end{matrix}\middle|\, z\right], \qquad (9)$$

де $z\in C$; $a_i,b_j\in C$; $\alpha_i,\beta_j\in R=(-\infty,+\infty)$; $(\alpha_i,\beta_j\neq\neq 0$; $i=1,2,\ldots,p$; $j=1,2,\ldots,q)$.

Зображення функції ${}_p\Psi_q$ за допомогою інтеграла Мелліна–Бернса має вигляд [1]

$$ {}_p\Psi_q(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{L_{-\infty}} \frac{\Gamma(s)\prod_{i=1}^{p}\Gamma(a_i-\alpha_i s)}{\prod_{j=1}^{q}\Gamma(b_j-\beta_j s)}(-z)^{-s}ds, \quad (10) $$

де шлях інтегрування $L_{-\infty}$ відокремлює всі полюси $b_l = -l$ $(l = 0, 1, 2, ...)$ функції $\Gamma(s)$ зліва і полюси $a_{ik} = \dfrac{a_i + k}{\alpha_i}$ $(i = 1, 2, ..., p;\ k = 0, 1, 2, ...)$ справа; $L_{-\infty} = L$ – контур, розміщений у горизонтальній смузі, починається з точки $-\infty + i\varphi_1$ і йде до точки $-\infty + i\varphi_2$ $(-\infty < \varphi_1 < \varphi_2 < +\infty)$; $s \in C$.

Запровадимо в такому вигляді нові інтегральні перетворення:

узагальнені інтегральні перетворення Лапласа

$$ \tilde{L}_1\{f(x); y\} = $$

$$ = \int_0^\infty e^{-xy}{}_1\Phi_1^{\tau,\beta}(a; c; -b(xy)^\gamma)f(x)dx, \quad (11) $$

$$ \tilde{L}_2\{f(x); y\} = $$

$$ = \int_0^\infty xe^{-x^2y^2}{}_1\Phi_1^{\tau,\beta}(a; c; -b(x^2y^2)^\gamma)f(x)dx; \quad (12) $$

узагальнені інтегральні перетворення потенціалу

$$ \tilde{\mathfrak{P}}_1\{f(x); y\} = $$

$$ = \int_0^\infty \frac{xf(x)}{x^2+y^2}\,{}_2\Psi_1\left[\begin{matrix}(a,\tau);\ (1,\gamma);\\ (c,\beta);\end{matrix}\middle| -b\left(\frac{x^2}{x^2+y^2}\right)^\gamma\right]dx, \quad (13) $$

$$ \tilde{\mathfrak{P}}_2\{f(x); y\} = $$

$$ = \int_0^\infty \frac{xf(x)}{x^2+y^2}\,{}_2\Psi_1\left[\begin{matrix}(a,\tau);\ (1,\gamma);\\ (c,\beta);\end{matrix}\middle| -b\left(\frac{y^2}{x^2+y^2}\right)^\gamma\right]dx; \quad (14) $$

узагальнені інтегральні перетворення Стілтьєса

$$ \tilde{\mathfrak{S}}_1\{f(x); y\} = $$

$$ = \int_0^\infty \frac{f(x)}{x+y}\,{}_2\Psi_1\left[\begin{matrix}(a,\tau);\ (1,\gamma);\\ (c,\beta);\end{matrix}\middle| -b\left(\frac{x}{x+y}\right)^\gamma\right]dx, \quad (15) $$

$$ \tilde{\mathfrak{S}}_2\{f(x); y\} = $$

$$ = \int_0^\infty \frac{f(x)}{x+y}\,{}_2\Psi_1\left[\begin{matrix}(a,\tau);\ (1,\gamma);\\ (c,\beta);\end{matrix}\middle| -b\left(\frac{y}{x+y}\right)^\gamma\right]dx; \quad (16) $$

узагальнене інтегральне експоненціальне перетворення

$$ \tilde{\mathfrak{E}}_{21}\{f(x); y\} = \int_0^\infty xe^{x^2y^2}\tilde{\mathrm{E}}_1(x^2y^2)f(x)dx, \quad (17) $$

де

$$ \tilde{\mathrm{E}}_1(x) = \int_1^\infty \frac{e^{-xt}}{t}\,{}_2\Psi_1\left[\begin{matrix}(a,\tau);\ (1,\gamma);\\ (c,\beta);\end{matrix}\middle| -b\left(1-\frac{1}{t}\right)^\gamma\right]dt. \quad (18) $$

У формулах (11)–(18) $b \ge 0,\ \gamma > 0$.

Одержимо композиційні співвідношення, рівності типу Парсеваля–Гольдштейна, наведемо ілюстративні приклади.

Лема 1. При умовах існування інтегралів та їх абсолютній збіжності справедливі такі співвідношення:

$$ \tilde{\mathfrak{L}}_2\{\mathfrak{L}_2\{f(x); u\}; y\} = \frac{1}{2}\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)}\,\tilde{\mathfrak{P}}_2\{f(x); y\}, \quad (19) $$

$$ \tilde{\mathfrak{L}}_2\{\mathfrak{L}_2\{f(x); u\}; y\} = \frac{1}{2}\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)}\,\tilde{\mathfrak{P}}_1\{f(x); y\}, \quad (20) $$

де $\tilde{\mathfrak{L}}_2$, $\tilde{\mathfrak{P}}_1$, $\tilde{\mathfrak{P}}_2$ – оператори, задані відповідно формулами (12)–(14), а

$$ \mathfrak{L}_2\{f(x); u\} = \int_0^\infty xe^{-x^2u^2}f(x)dx. \quad (21) $$

Д о в е д е н н я. Використовуючи означення операторів $\tilde{\mathfrak{L}}_2$, $\mathfrak{L}_2$ (формули (12), (21)), маємо

$$ \tilde{\mathfrak{L}}_2\{\mathfrak{L}_2\{f(x); u\}; y\} = $$

$$ = \int_0^\infty ue^{-u^2y^2}{}_1\Phi_1^{\tau,\beta}(a; c; -b(u^2y^2)^\gamma) \times $$

$$ \times\left[\int_0^\infty xe^{-x^2u^2}f(x)dx\right]du. \quad (22) $$

Змінюючи порядок інтегрування у правій частині (22), що можливо завдяки абсолютній збіжності інтегралів, одержимо

$$ \tilde{\mathfrak{L}}_2\{\mathfrak{L}_2\{f(x); u\}; y\} = $$

$$= \int_0^\infty x f(x) \left[\int_0^\infty u e^{-u^2(y^2+x^2)} {}_1\Phi_1^{\tau,\beta}(a; c; -b(u^2y^2)^\gamma) du \right] dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^\infty x f(x) \left[\int_0^\infty e^{-z} {}_1\Phi_1^{\tau,\beta}\left(a; c; -b\left(\frac{y^2 z}{x^2+y^2} \right)^\gamma \right) \frac{dz}{x_2+y^2} \right] dx =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} \int_0^\infty \frac{x f(x)}{x^2+y^2} \times$$

$$\times \left[\sum_{n=0}^\infty \frac{\Gamma(a+\tau n)}{\Gamma(c+\beta n)} \frac{(-b)^n}{n!} \left(\frac{y^2}{x^2+y^2} \right)^{\gamma n} \int_0^\infty e^{-z} z^{\gamma n} dz \right] dx =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} \tilde{\mathfrak{P}}_2\{f(x); y\}.$$

Зауважимо, що при доведенні було використано зображення функції ${}_1\Phi_1^{\tau,\beta}(z)$ у вигляді ряду [7].

Аналогічно доводимо співвідношення (20):

$$\tilde{\mathfrak{L}}_2\{\mathfrak{L}_2\{f(x); u\}; y\} =$$

$$= \int_0^\infty u e^{-u^2y^2} \left[\int_0^\infty x e^{-x^2u^2} {}_1\Phi_1^{\tau,\beta}(a; c; -b(x^2u^2)^\gamma) f(x) dx \right] du =$$

$$= \int_0^\infty x f(x) \left[\int_0^\infty u e^{-u^2(x^2+y^2)} {}_1\Phi_1^{\tau,\beta}(a; c; -b(x^2u^2)^\gamma) du \right] dx.$$

Після перетворень матимемо праву частину формули (20) $= \frac{1}{2} \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} \tilde{\mathfrak{P}}_1\{f(x); y\}$.

Теорема 1 (рівність типу Парсеваля–Гольдштейна щодо узагальнених інтегральних перетворень $\tilde{\mathfrak{L}}_2$ і $\tilde{\mathfrak{P}}_2$). При умовах існування відповідних інтегралів та їх абсолютній збіжності справедлива рівність

$$\int_0^\infty x \tilde{\mathfrak{L}}_2\{f(y); x\} L_2\{g(z); x\} dx =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} \int_0^\infty y f(y) \tilde{\mathfrak{P}}_2\{g(z); y\} dy. \quad (23)$$

Доведення. Застосовуючи формули (12), (21) і змінюючи порядок інтегрування, матимемо

$$\int_0^\infty x \tilde{\mathfrak{L}}_2\{f(y); x\} L_2\{g(z); x\} dx =$$

$$= \int_0^\infty x \mathfrak{L}_2\{g(z); x\} \left(\int_0^\infty y f(y) \times \right.$$

$$\left. \times e^{-x^2y^2} {}_1\Phi_1^{\tau,\beta}(a; c; -b(x^2y^2)^\gamma) dy \right) dx =$$

$$= \int_0^\infty y f(y) \left(\int_0^\infty x e^{-x^2y^2} {}_1\Phi_1^{\tau,\beta}(a; c; -b(x^2y^2)^\gamma dx) \right) dy =$$

$$= \int_0^\infty y f(y) \tilde{\mathfrak{L}}_2\{L_2\{g(z); x\}; y\} dy.$$

Використавши лему 1, одержимо (23).

Наслідок. Із (23) випливає рівність

$$\int_0^\infty x \varphi(x) \tilde{\mathfrak{L}}_2\{f(z); x\} dx = \int_0^\infty y f(y) L_2\{\varphi(x); y\} dy. \quad (24)$$

Справді, якщо покласти $\varphi(x) = \mathfrak{L}_2\{g(z); x\}$ в (23), то одержимо (24).

Покажемо, що деяка композиція узагальнених інтегральних перетворень Лапласа дасть узагальнене інтегральне експоненціальне перетворення $\mathfrak{E}_{21}$. Справедлива така лема.

Лема 2. При умовах існування відповідних інтегралів та їх абсолютній збіжності виконуються співвідношення

$$\mathfrak{L}_2\{\tilde{\mathfrak{L}}_2\{\mathfrak{L}_2\}\} =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} \mathfrak{L}_2\{\tilde{\mathfrak{P}}_2\{f(x); u\}; y\}, \quad (25)$$

$$\tilde{\mathfrak{L}}_2^3\{f(x); y\} = \frac{1}{4} \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} \tilde{\mathfrak{E}}_{21}\{f(x); y\}. \quad (26)$$

Доведення. Розглянемо композицію

$$\mathfrak{L}_2\{\tilde{\mathfrak{L}}_2\{\mathfrak{L}_2\}\} = \frac{1}{2} \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} \mathfrak{L}_2\{\tilde{\mathfrak{P}}_2\{f(x); u\}; y\} =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} \int_0^\infty u e^{-u^2y^2} \left\{ \int_0^\infty \frac{x f(x)}{x^2+u^2} \times \right.$$

$$\left. \times {}_2\Psi_1\left[\begin{matrix} (a,\tau); (1,\gamma); \\ (c,\beta); \end{matrix} \middle| -b\left(\frac{u^2}{x^2+u^2} \right)^\gamma \right] dx \right\} du =$$

$$= \frac{1}{4} \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} \int_0^\infty x f(x) \times$$

$$\times \left\{ \int_0^\infty \frac{e^{-uy^2}}{x^2+u} dx \, {}_2\Psi_1\left[\begin{matrix} (a,\tau); (1,\gamma); \\ (c,\beta); \end{matrix} \middle| -b\left(\frac{u}{x^2+u} \right)^\gamma \right] du \right\}.$$

Зауважимо, що у фігурних дужках підінтегрального виразу останнього інтеграла стоїть узагальнений оператор Стілтьєса $\tilde{\mathfrak{G}}_1\{e^{-uy^2}; x^2\}$. Знаходимо його значення:

$$\tilde{\mathfrak{G}}_1\{e^{-uy^2}; x^2\} = e^{x^2y^2}\tilde{\mathrm{E}}_1(x^2y^2),$$

де $\tilde{\mathrm{E}}_1$ має вигляд (18). Врахувавши (17), одержимо (26).

Теорема 2 (рівність типу Парсеваля—Гольдштейна щодо узагальнених інтегральних перетворень $\mathfrak{L}_2$, $\tilde{\mathfrak{E}}_{21}$, $\tilde{\mathfrak{P}}_2$). При умовах існування відповідних інтегралів та їх абсолютній збіжності справедливі такі рівності:

$$\int_0^\infty y\mathfrak{L}_2\{f(x); y\}\tilde{\mathfrak{P}}_2\{g(u); y\}dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\infty xf(x)\tilde{\mathfrak{E}}_{21}\{g(u); x\}dx, \qquad (27)$$

$$\int_0^\infty y\mathfrak{L}_2\{f(x); y\}\tilde{\mathfrak{P}}_2\{g(u); y\}dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\infty ug(u)\tilde{\mathfrak{E}}_{21}\{f(x); u\}du. \qquad (28)$$

Доведення. Доведемо формулу (27) (доведення співвідношення (28) — аналогічне). Врахувавши означення $\mathfrak{L}_2$, $\tilde{\mathfrak{P}}_2$, матимемо

$$\int_0^\infty y\mathfrak{L}_2\{f(x); y\}\tilde{\mathfrak{P}}_2\{g(u); y\}dy =$$

$$= \int_0^\infty y\tilde{\mathfrak{P}}_2\{g(u); y\} \times$$

$$\times\left[\int_0^\infty xe^{-x^2y^2}f(x)dx\right]dy =$$

$$= \int_0^\infty xf(x)\mathfrak{L}_2\{\tilde{\mathfrak{P}}_2\{g(u); y\}; x\}dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\infty xf(x)\tilde{\mathfrak{E}}_{21}\{g(u); x\}dx.$$

***Приклад* 1.** Якщо $\mathrm{Re}\,\omega < 1$, а відповідні інтеграли абсолютно збігаються, то матимемо рівність

$$\int_0^\infty y^{-\omega}\tilde{\mathfrak{P}}_1\{g(u); y\}dy =$$

$$= \Gamma\left(\frac{1-\omega}{2}\right)\frac{\Gamma(a)}{\Gamma(c)}\int_0^\infty y^{\omega}\tilde{\mathfrak{L}}_2\{f(x); y\}dy. \qquad (29)$$

За допомогою використання інтегрального перетворення Мелліна (5) останню рівність можна подати в такому вигляді:

$$\mathfrak{M}\{\tilde{\mathfrak{P}}_1\{g(u); -\omega+1\} =$$

$$= \Gamma\left(\frac{1-\omega}{2}\right)\frac{\Gamma(a)}{\Gamma(c)}\mathfrak{M}\{\tilde{\mathfrak{L}}_2\{f(x); y\}; \omega+1\}. \qquad (30)$$

Приклад 2. Якщо $\mathrm{Re}\,\omega > -1$, а відповідні інтеграли абсолютно збігаються, то справедлива рівність

$$\int_0^\infty x^{\omega}\tilde{\mathfrak{E}}_{21}\{g(u); x\}dx =$$

$$= \Gamma\left(\frac{\omega+1}{2}\right)\int_0^\infty y^{-\omega}\tilde{\mathfrak{P}}_1\{g(u); y\}dy. \qquad (31)$$

Використавши інтегральне перетворення Мелліна (5), рівність (31) перепишемо у вигляді

$$\mathfrak{M}\{\tilde{\mathfrak{E}}_{21}\{g(u); x\}; \omega+1\} =$$

$$= \Gamma\left(\frac{\omega+1}{2}\right)\mathfrak{M}\{\{\tilde{\mathfrak{P}}_1\{g(u); -\omega+1\}. \qquad (32)$$

Висновки

За допомогою узагальненої виродженої (конфлюентної) гіпергеометричної функції можна запровадити нові інтегральні перетворення. Для деяких із них наведено важливі рівності Парсеваля—Гольдштейна, які дають змогу широко застосовувати ці нові інтегральні перетворення, зокрема, і в прикладному математичному аналізі, математичній фізиці та ін.

Н.А. Вирченко, С.М. Заикина

ОБОБЩЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И ИХ ПРИМЕНЕНИЯ

Введены новые обобщения интегральных преобразований – Лапласа, Стилтьеса, потенциала, экспоненциального типа. Доказаны равенства Парсеваля–Гольдштейна, даны иллюстративные примеры.

N.O. Virchenko, S.M. Zaikina

THE GENERALIZED INTEGRAL TRANSFORMATIONS AND THEIR APPLICATION

We introduce some new generalized integral transformations of Laplace, Stieltjes, potential and exponential type. Furthermore, we prove the Parseval–Goldstein equalities and provide the illustrative examples.

1. *Kilbas A.A.*, *Saigo M.* *H*-Transforms. – Charman and Hall/CRC, 2004. – 390 p.
2. *Debnath L.* Integral Transforms and Their Applications. – Boca Raton: CRC Press, 1995. – 456 p.
3. *Бейтмен Г.*, *Эрдейи А.* Таблицы интегральных преобразований. – М.: Наука, 1968. – Т. 1. – 344 с.
4. *Widder D.V.* A transform related to the Poisson integral for a half-plane // Duke Math. J. – 1966. – **33**. – P. 355–362.
5. *Srivastava H.M.*, *Yiirekli O.* A theorem on Stielties-type integral transforms and its applications // Complex Var. Theory Appl. – 1995. – **28**. – P. 159–168.
6. *Бейтмен Г.*, *Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. – М.: Наука, 1965. – Т. 1. – 296 с.; Т. 2. – 296 с.; Т. 3. – 300 с.
7. *Virchenko N.O.* On some generalizations of the functions of hypergeometric type // Intern. J. Fract. Calculus and Appl. Anal. – 1999. – **2**, N 3. – P. 233–244.
8. *Virchenko N.* On the generalized confluent hypergeometric function and its applications // Ibid. – 2006. – **9**, N 2. – P.101–108.

Рекомендована Радою фізико-математичного факультету НТУУ “КПІ”

Надійшла до редакції 27 жовтня 2008 року