

**НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»
Інститут прикладного системного аналізу
Кафедра математичних методів системного аналізу**

До захисту допущено
Завідувач кафедри
_____ Оксана Тимошук
« ____ » _____ 20__ р.

Дипломна робота

**на здобуття ступеня бакалавра
за освітньо-професійною програмою «Системний аналіз і управління»
спеціальності 124 «Системний аналіз»
на тему: «Математичні моделі динаміки популяцій»**

Виконала:

Студентка IV курсу, групи КА-71
Дунебабіна Олена Андріївна _____

Керівник:

доц. Мальцев А.Ю. _____

Консультант з економічного розділу:
доцент, к.е.н., доцент кафедри ТТІЕ _____

Консультант з нормоконтролю:
доцент, к.т.н., доцент кафедри ММСА _____

Рецензент:

к.ф.-м.н., доцент Ілленко А.Б. _____

Засвідчую, що у цій дипломній роботі
немає запозичень з праць інших авторів
без відповідних посилань.

Студент _____

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
Інститут прикладного системного аналізу
Кафедра математичних методів системного аналізу

Рівень вищої освіти – перший (бакалаврський)

Спеціальність – 124 «Системний аналіз»

Освітньо-професійна програма «Системний аналіз і управління»

ЗАТВЕРДЖУЮ

Завідувач кафедри

_____ О.Л. Тимошук

«__» _____ 20__ р.

ЗАВДАННЯ
на дипломну роботу студентці
Дунебабіній Олені Андріївні

1. Тема роботи «Математичні моделі динаміки популяцій», керівник роботи доцент Мальцев А.Ю, затверджені наказом по університету від «__» _____ 20__ р. № _____
2. Термін подання студентом роботи
3. Вихідні дані до роботи: відсутні
4. Зміст роботи: дослідження та особливості різних моделей популяцій, аналіз власних моделей
5. Перелік ілюстративного матеріалу (із зазначенням плакатів, презентацій тощо): презентація
6. Консультанти розділів роботи

Розділ	Прізвище, ініціали та посада консультанта	Підпис, дата	
		завдання видав	завдання прийняв
Економічний	канд.економ.наук, доцент Рощина Н.В.		

7. Дата видачі завдання: 22.03.2021

Календарний план

№ з/п	Назва етапів виконання дипломної роботи	Термін виконання етапів роботи	Примітка
1	Затвердження теми ДР	22.03.2021-26.03.2021	виконано
2	Ознайомлення зі структурою БДР згідно з Положенням про державну атестацію студентів НТУУ «КПІ ім. І. Сікорського»	29.03.2021-02.04.2021	виконано
3	Ознайомлення з ДСТУ 3008-2015 та стандарти ЄСПД	05.04.2021-11.04.2021	виконано
4	Проведення дослідження за темою БДР під керівництвом керівника	12.04.2021-25.04.2021	виконано
5	Завершення роботи над першим варіантом частини БДР	26.04.2021-02.05.2021	виконано
6	Проведення роботи над експериментальною частиною БДР	03.05.2021-19.05.2021	виконано
7	Проведення роботи над програмним продуктом	19.05.2021-26.05.2021	виконано
8	Оформлення БДР та аналіз отриманих результатів	19.05.2021-26.05.2021	виконано

Студент

Дунебабіна О.А

Керівник

Мальцев А.Ю.

РЕФЕРАТ

Дипломна робота: 101 с., 29 рис., 16 табл., 2 додатки, 17 джерел.
ДИНАМІКА ПОПУЛЯЦІЙ, МОДЕЛІ ПОПУЛЯЦІЇ, ЄМНІСТЬ
СЕРЕДОВИЩА, КОЕФІЦІЄНТ ПРИРОСТУ, ЧИСЕЛЬНІСТЬ.

Об'єкт дослідження: динаміка чисельності популяції.

Мета дослідження: проаналізувати математичні моделі популяцій, які були запропоновані науковцями, розробити власні системи популяцій та провести порівняльний аналіз розроблених моделей.

Використані моделі: у програмній реалізації були використані математично побудовані моделі.

Отримані результати: проведено порівняльний аналіз побудованих моделей.

У рамках подальшого дослідження пропонується підбирати більше обмежень та параметрів для моделі, додавати розподіл популяції на статі, робити коефіцієнт приросту динамічним та додавати «позитивний» вплив на популяцію, який викликає активне збільшення чисельності популяції.

ABSTRACT

Diploma: 101 pages of text, 29 illustrations, 16 tables, 2 appendices, 17 bibliographic references.

POPULATION DYNAMICS, POPULATION MODELS, ENVIRONMENTAL CAPACITY, GROWTH RATIO, NUMBER.

Object of research: population dynamics.

Purpose: to analyze the mathematical models of populations that have been proposed by scientists, to develop their own population systems and to conduct a comparative analysis of the developed models.

Used models: mathematically constructed models were used in the software implementation.

Results: a comparative analysis of the constructed models.

Further research proposes to select more constraints and parameters for the model, add population distribution by sex, make the growth rate dynamic and add a "positive" effect on the population, which causes an active increase in population size.

ЗМІСТ

ВСТУП	8
РОЗДІЛ 1 ПОПУЛЯЦІЙНА ДИНАМІКА	10
1.1 Актуальність проблеми.....	10
1.2. Історія розвитку моделювання динаміки.....	11
1.3. Числа Фібоначчі як найперша модель популяційної динаміки	12
1.4 Загальні положення про динаміку популяцій	13
1.5 Сучасна теорія динаміки чисельності популяції	18
1.6 Класифікація моделей.....	20
Висновки.....	21
РОЗДІЛ 2. ОДНОМІРНІ ДИНАМІЧНІ СИСТЕМИ З ДИСКРЕТНИМ ЧАСОМ	23
2.1 Чому одномірні динамічні системи?.....	23
2.2 Експоненційний ріст	24
2.3 Модель Ферхюльста-П'єра	26
2.4 Модель Рікера.....	29
2.5 Огляд інноваційних моделей	29
2.5.1 Моделі з урахуванням смертності особин у популяції	30
2.5.2 Моделі з урахуванням смертності та приходом нових особин	32
2.5.3 Моделі із випадковим збуренням	35
Висновки.....	40
РОЗДІЛ 3 АНАЛІЗ ПОБУДОВАНИХ МОДЕЛЕЙ.....	41
3.1 Необхідні умови для моделей	41
3.2 Порівняльна характеристика моделей з різними параметрами.....	41
3.3 Порівняння моделей із зовнішнім збуренням	51
Висновки.....	57
РОЗДІЛ 4 ФУНКЦІОНАЛЬНО-ВАРТІСНИЙ АНАЛІЗ ПРОГРАМНОГО ПРОДУКТУ	58
4.1 Постановка задачі проектування	58
4.2 Обґрунтування функцій програмного продукту.....	59
4.3 Обґрунтування системи параметрів ПП	62
4.4 Аналіз експертного оцінювання параметрів	65
4.5 Аналіз рівня якості варіантів реалізації функцій.....	69

4.6 Економічний аналіз варіантів розробки ПП.....	71
4.7 Вибір кращого варіанту ПП техніко-економічного рівня	77
4.8 Висновки..	77
ВИСНОВКИ.....	79
СПИСКИ ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....	80
Додаток А. Лістинг програмного модулю	82
Додаток Б. Презентація.....	92

ВСТУП

Екосистема – це не просте співтовариство видів, що взаємодіють один з одним, рухаються разом у просторі і постійно змінюють свою чисельність. На всі популяції, які існують в екосистемі, додатково впливають різноманітні абіотичні і антропогенні фактори. Чисельність популяції безпосередньо залежить від таких факторів як: погодні умови, хімічний склад навколишнього середовища і ступеня її забруднення. Господарська діяльність людини, яка нарощує свої потужності шаленими темпами, поступово і незворотно призводить до змін у багатьох природних системах. Відновлення природних систем і їх найбільш раціональна експлуатація є на сьогоднішній день однією з найбільш важливих завдань людства, так як подальше благополучне існування і розвиток суспільства можливо тільки в повній гармонії з природою.

Для створення будь-якої підходящої наукової основи раціонального та гуманного використання найбільш корисних тварин і боротьби зі шкідниками, однозначно необхідно вивчати закономірності динаміки чисельності популяції. Невід'ємною частиною при цьому є такий метод як математичне моделювання.

Математична модель дозволяє виділити найбільш важливі фактори, які впливають на динаміку тієї чи іншої популяції, спрямувати вектор досліджень і скласти план необхідних спостережень. Переваги математичних методів в даному випадку очевидні: математичне моделювання не тільки допомагає привести знання про об'єкт до формальної моделі, а й іноді дати кількісний опис процесу, навіть передбачити його перебіг і ефективність та дати рекомендації щодо оптимізації управління цим процесом. Це особливо важливо для тих біологічних процесів, які мають велике не тільки прикладне але і промислове значення - біотехнологічних систем, агробіоценозів, експлуатованих природних екосистем, продуктивність яких визначається закономірностями зростання популяцій живих організмів.

Перший розділ даної роботи присвячений аналізу предметної області. В ньому буде розказано більш детально про актуальність вивчення динаміки популяцій, а також про проблеми, з якими дослідники в даній області стикаються, про історію становлення та розвитку моделей динаміки чисельності популяцій. У другому розділі проведено огляд і аналіз основних типів моделей популяцій, починаючи від перших розроблених моделей і закінчуючи сучасним етапом досліджень.

РОЗДІЛ 1

ПОПУЛЯЦІЙНА ДИНАМІКА

1.1 Актуальність проблеми

Людство сьогодні, як ніколи, має брати на себе відповідальність за виживання різних видів тварин та рослин, адже в сучасному світі ми беремо участь майже в усіх процесах, що відбуваються навколо.

Інтенсивне втручання людини вже призвело до зникнення великої кількості видів тварин, ще більше видів поставлені під загрозу. Це відбувається з абсолютно різних причин.

Браконьєрство, яке дуже поширене в усіх країнах світу, не оминуло й Україну. За офіційною статистикою обсяги незаконного вилову риби фактично зрівнялися з обсягами легальним риболовством. Щоденно браконьєри виловлюють з українських водойм більше, ніж 190 тон риби. Щороку в карпатському регіоні браконьєри вбивають 40-50 ведмедів, популяція яких рахується лиш сотнями на території нашої країни. Але ми маємо брати відповідальність не лише за пряме незаконне вбивство тварин, але й за вторгнення в природне існування та знищення місць для існування тварин- за даними Держслужби статистики, за останні 10 років вирубано понад 4 млн га лісів, а відновлено всього трохи понад 0,5 млн га.

Глобальне потепління призводить до того, що щороку колосальні 750 мільярдів тон льоду тануть та сотні різних видів на планеті втрачають свої домівки.

Для того щоб правильно передбачати заходи по відновленню чисельності постраждалих видів, необхідно розуміти механізми взаємодії тварин в нових для них умовах.

Одночасно з цим, зростання населення призводить до постійного збільшення потреби в їжі. Для задоволення цих потреб ще більше земель використовують під поля, знову забираючи домівки в різних видів тварин. Аби

не втратити цінні види через людську недбалість та продовжити мирно співіснувати, людству треба оптимізувати відтворення біоресурсів.

Щосекунди на планеті помирає 18 людей, а народжується 21 людина, і поки планета здатна впоратися з такою шаленою домінацією одного виду на планеті, але тим не менш, перенаселення планети людьми є не меншою проблемою, аніж вбивство цінних видів задля забавки людини.

Завдяки вибору та побудові правильної моделі можна спрогнозувати динаміку зміни параметрів системи. Особливе значення має врахування не тільки внутрішніх чинників, характерних для певного процесу, а й зовнішніх впливів, які штучно створює людина. Різні чинники живої природи впливають на вибір математичного апарату для досліджень.

Тому актуальність завдання математичного моделювання біологічних систем складно переоцінити.

1.2. Історія розвитку моделювання динаміки

Різні рівні розвитку живого організму змушують по-різному проявляти різні продукційні життєдіяльні процеси, хоча кожен живий організм завжди проходить через наступні стадії: народження, розвиток у дорослу особину, взаємодія із навколишнім середовищем, у тім числі і з рештою представників свого виду або й особинами інших видів та смерть особини.

Ці фактори й дозволяють застосувати спільний математичний апарат опису моделей розмноження і розвитку у таких, нібито, віддалених один від одного по сходах рівнів організації живої матерії, як клітинна популяція і спільнота видів в екосистемі.

Популяційна динаміка - це процес відтворення зміни чисельності популяції в часі. Популяційна динаміка - це частина такого прогресивного напрямку як математична біологія, яка найбільш далеко просунулася в розумінні опису формального математичного апарату, для випробування різних теоретичних ідей, гіпотез та уявлень про закони розвитку і еволюції як

біологічних видів, так і популяцій, а так же спільнот. Можливість опису популяцій, які мають різну біологічну природу однаковими математичними співвідношеннями обумовлюється тим фактом, що з динамічної точки зору, зростання і смертність організмів в ході процесу еволюції відбувається за принципом "Кінетичної досконалості".

Людина за своєю природою схильна міркувати про предмети та явища, які є життєво близькі їй, так не дивно, що перші згадки і найпростіші моделі популяційної динаміки ми знаходимо в ранніх наукових працях.

1.3. Числа Фібоначчі як найперша модель популяційної динаміки

Одна з найперших моделей динаміки популяцій, яка дійшла до нас, описана в книзі "Трактат з арифметики" одного з найбільших італійських вчених Леонардо Фібоначчі. У цій книзі наводиться опис наступної задачі: "Хтось вирощує кролів в просторі, з усіх боків обнесений високим муром. Скільки пар кроликів народжується в один рік від однієї пари, якщо через місяць пара кроликів справляє на світло іншу пару, а народжують кролики, починаючи з другого місяця після свого народження".

Рішення цієї задачі представлено у вигляді такого ряду:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, \dots \quad (1.1)$$

Два перших елемента відповідають першому і другому періоду розмноження. 12 наступних - місячного приросту поголів'я кроликів. Кожен наступний елемент ряду дорівнює сумі двох попередніх. Даний ряд (1.1) лишився в історії як ряд Фібоначчі, а кожен член ряду отримав назву - числа Фібоначчі. Французький математик Альберт Гієр записав рекурентну формулу для членів ряду Фібоначчі в 1634р.

$$U_{n+2}=U_{n+1}+U_n \quad (1.2)$$

Тут U є членом послідовності, а нижній індекс - номер члену в ряду чисел.

Варто зауважити, що в цій моделі кролі ніколи не помирають і всі мають здорову репродуктивну функцію.

1.4 Загальні положення про динаміку популяцій

Популяційна динаміка - це процеси зміни її основних біологічних показників, таких як чисельність, біомаса, структура, в часі в залежності від екологічних факторів.

Наступною математичною моделлю, яка розглядала б задачу про динаміку чисельності популяції і стала всесвітньо відомою, є класична модель необмеженого зростання популяції - дискретна геометрична прогресія.

Теоретично кожна популяція здатна до безлімітного росту чисельності, якщо її не обмежують жодні фактори зовнішнього середовища. У такому випадку швидкість зростання популяції буде визначатися величиною біотичного потенціалу. Біотичний потенціал – це умовний показник, який дає оцінку того, як якісно популяція є здатною приносити нащадків. Чим більшим є цей умовний показник – тим більш крутою буде експонента та тим швидше буде збільшуватися кількість особин у даній популяції.

Ця динаміка описується диференціальним рівнянням:

$$\frac{dN}{d\tau} = rN,$$

де N - число особин в популяції,

τ - час,

r - біотичний потенціал,

d - диференціал.

Якщо $r > 0$, чисельність популяції спершу зростає повільно з часом, а потім починає рости швидко, згідно експоненціального закону, тобто крива зростання популяції приймає J-подібний вид – експоненційна крива.

На рисунку 1.1 зображено типи кривих росту чисельності популяцій, таких як експоненційний ріст та логістична крива.

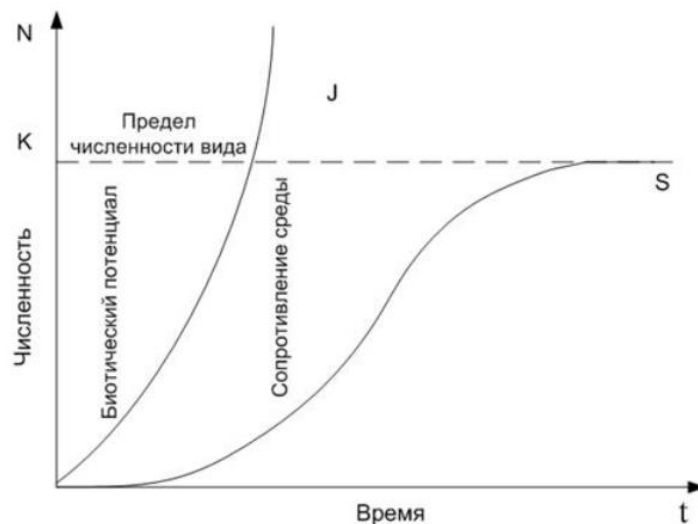


Рисунок 1.1 Моделі зростання популяції

Дана модель заснована на припущенні, що зростання популяції не залежить від її початкової чисельності і буде зростати, допоки не заселить всю Землю.

Дану ідею висунув англійський економіст Томас Р. Мальтус, який є основоположником теорії мальтузіанства, ще на межі 18-19 століть.

Очевидно, що ця модель не може бути втіленою в реальне життя, враховуючи кількість різних факторів, що обмежують розмноження видів. Тим не менш, Мальтус зробив великий прорив у цій галузі біології та математики, показавши, що за умови такого швидкого зростання популяції, харчові ресурси не встигнуть відновитися. У своїй праці «Дослід щодо закону народонаселення» він показав, що поки популяція росте з експоненційною швидкістю, харчові ресурси лиш із арифметичною. Зробивши логічний висновок, що в якийсь момент часу експонента обійде лінійну функцію, що

означатиме настання неминучого голоду на всій планеті. Це песимістична теорія, яка каже про те, що ресурсів не буде досить, а враховуючи зростання кількості людей на планеті, є доволі актуальною зараз. Його вчення називається «Економічний песимізм», а вирішенням проблеми він називає регуляцію народжуваності, особливо для бідних верств населення.

Можна сказати, що Томас Мальтус був першим вченим демографом, який зробив висновки на основі побудованої моделі і забив тривогу з приводу теперішньої моделі існування людства та ставлення до ресурсів.

Однозначним недоліком цієї моделі є те, що вона не враховує цілу низку природних обмежень, які самостійно регулюють чисельність населення, навіть таких як народжуваність та смертність.

На рисунку 1.2 відображено графічне представлення теорії мальтузіанства. Де на осі абсцис показаний час, на осі ординат – кількість представників популяції, а на графіку швидкість зростання популяції та продуктів харчування. Перетин графіків означає точку катастрофи для популяції.

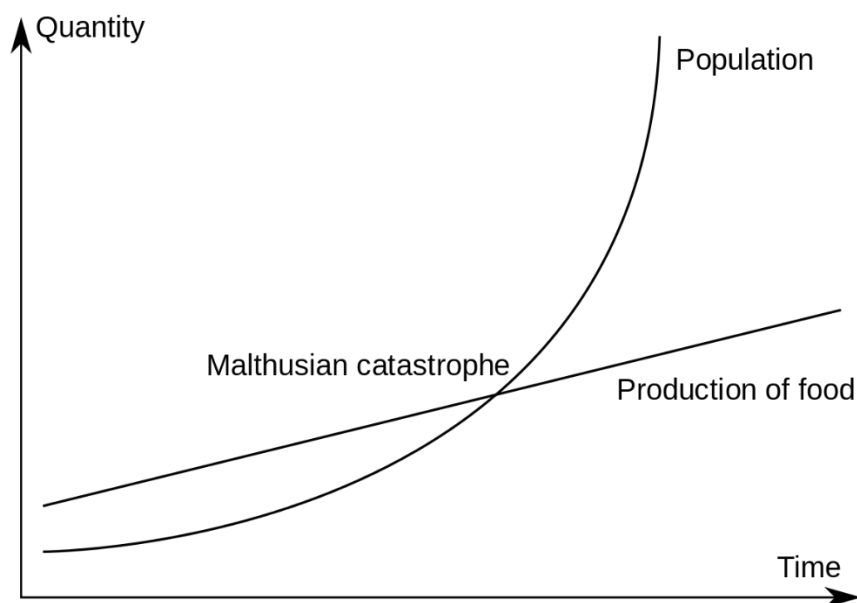


Рисунок 1.2 модель Мальтуса

У реальних умовах існують обмеження, які лімітують ріст популяцій. Такі як обмеження харчових ресурсів, боротьба за виживання, хижаки, зменшення площі дикої природи, накопичення токсичних продуктів власного метаболізму.

Наприклад, розмноження дріжджів в пивному суслі обмежується в зв'язку з нестачею в ньому асимільованого азоту, солей цинку, заліза і пантотенової кислоти. Також їх обмежує в розмноженні накопичення спирту, яке утворюється в процесі метаболізму організмів.

Розмноження диких козлів обмежує невелика кількість їстівних ресурсів, яка наявна на території їхнього проживання.

Такі обмеження або ліміти називаються ємністю середовища. Очевидно, що вона є різною для різних популяцій.

Наприклад, листяний ліс є більш ємним для тварин улітку, аніж узимку. А хвойний ліс є більш ємним для шишкаря ялинового, аніж листяний або мішаний, бо пташка в основному годується насінням ялини.

Модель, яка б передбачала зміну чисельності популяції з урахуванням ресурсів, що її обмежують у розвитку, запропонували Раймонд Пірл та П'єр Франсуа Ферхюльст. Ферхюльст – відомий бельгійський математик, який прославився роботами в напрямку моделювання чисельності населення. А Раймонд Пірл – американський біолог та демограф.

$$\frac{dN}{d\tau} = r\left(\frac{K-N}{K}\right),$$

де K – ємність середовища.

Початкове експоненційне зростання в початкових сприятливих умовах не може безперервно продовжуватися з часом і в певний момент починає поступово заповільнюватися та крива виходить на певний стабільний рівень. Логістична крива – крива, яка графічно відображає динаміку росту популяції, коли в неї обмежені ресурси.

Вираз $(\frac{K-N}{K})$ характеризує супротив середовища, тобто всі ті фактори, які здатні лімітувати ріст популяції.

Рівняння Пірла – Ферхюльста лежить в основі багатьох математичних моделей біотичних відносин у популяціях, описує ріст чисельності популяцій під впливом сукупності зовнішніх факторів на неї. Екологічні дослідження виявили таку закономірність – тим більш ріст щільності їх популяцій ближчий до логістичного типу, чим більший є організм.

Популяція пристосовується до зміни умов середовища проживання за допомогою оновлення та заміщення особин. Якщо ж інтенсивність імміграції та еміграції збалансовані, так само як народжуваності та смертності, то формується стабільна популяція, чисельність якої лишається сталою. Її ареал проживання також лишається сталим. Але очевидно, що в реальних умовах у природі не існує таких популяцій, що їх чисельність була б сталою.

Популяція є тією, що зростає, якщо народжуваність є вищою за смертність. Але за правилом харчової кореляції, яке було сформовано Вінн-Едварсом, у процесі еволюції можуть зберегтися лиш ті популяції, у яких швидкість розмноження корелює з наявною кількістю харчових ресурсів середовища їх проживання. Бо за умови занадто активного розвитку популяції відбувається ущільнення та погіршуються умови існування популяції. Недотримання цього правила призводить до зменшення чисельності популяції, вона перестає бути тією, що зростає і стає тією, що зменшується. Якщо кількість ресурсів зменшиться різко – дуже імовірним є настання краху популяції і вона може припинити своє існування взагалі.

Згідно принципу агрегації особин, який запропонував В. Оллі, скупчення особин загалом посилює конкуренцію між особинами всередині популяції за харчові ресурси та простір, але призводить до того, що вся популяція стає більш придатною до виживання. Звідси випливає, що розвиток популяції лімітується не лише перенаселенням, але й недонаселенням.

1.5 Сучасна теорія динаміки чисельності популяції

Сучасна теорія динаміки чисельності популяцій вважає коливання кількості особин авторегульованим процесом. Вона виокремлює дві різні за принципами сторони популяційної динаміки: регуляцію та модифікацію.

Для кожної популяції в різних конкретних умовах властивий певний рівень чисельності, який є середнім і навколо якого відбуваються коливання. Коливання від цього рівня має різну амплітуду залежно від зовнішніх умов, але в нормі після кожного такого відхилення чисельність популяції вирівнюється до оптимального середнього значення.

Модифікація – випадкові відхилення чисельності популяції, яке виникає в результаті дії різноманітних факторів на особин у популяції, які не є пов'язаними із її щільністю.

Фактори, які модифікують та викликають зміни в чисельності популяції, не піддаються впливу цих змін. Отже, їхня дія є односторонньою. До факторів, які модифікують чисельність популяції, відносять абіотичні впливи на самі організми, кількість та якість їхнього харчування, наявність та активність їхніх ворогів. Сприятливі погодні умови та високий рівень харчів з року в рік може стати причиною масового спалаху розмноження тих чи інших популяцій, що призведе до перенаселення території, яку вони заселяють. Негативна же дія факторів, що модифікують, знижує чисельність популяцій та може призвести до її повного зникнення.

Регуляція – це повернення популяції після моменту відхилення до початкового стану, яке відбувається під впливом факторів, сила дії яких визначається щільністю популяції.

Фактори, що регулюють, не просто впливають на чисельність популяції, але ще й згладжують її коливання, приводячи її після чергового відхилення від

оптимального рівня знову до нього. Це спричинено тим, що ефект від впливу факторів, що регулюють, сильніший тоді, коли щільність популяції є вищою.

В якості сил, що регулюють, вступають внутрішньовидові та міжвидові стосунки між організмами. Різні типи таких стосунків визначають швидкість, з якою буде дана відповідна реакція на зміну чисельності популяцій.

Гомеостаз популяції – підтримання такої чисельності популяції, що є оптимальною за даних умов. У природних умовах чисельність популяції піддається постійним коливанням. Їхні період та амплітуда залежать від особливостей виду і умов середовища проживання. У великих ссавців чисельність зазвичай змінюється в декілька разів, тоді як у популяціях комах бувають різкі спалахи чисельності, які виникають через надзвичайно сприятливі умови, які викликають збільшення популяції в мільйони разів (наприклад, сарана). Гомеостатичні можливості популяцій є різними і вони здійснюються через взаємовідносини особин з навколишнім середовищем та між собою.

Коливання чисельності популяції можуть носити як регулярний, так і нерегулярний характер. Для позначення коливань чисельності особин популяції у 1928 році М.В.Тимофєєв-Ресовський ввів поняття «популяційні хвилі» або «хвилі життя».

У суспільствах популяцій, що є штучно створеними людиною чи спрощеними у результаті антропогенних впливів, регуляторні зв'язки з ослабленими, і тому в них можливі як катастрофічні для біоценоза розмноження окремих видів – шкідників сільськогосподарських рослин та лісових насаджень, паразитів, збудників різних хвороб, так і зменшення чисельності та розповсюдженості інших популяцій.

Таким чином, як масштаби, так і хід коливання чисельності будь-якого виду в природних суспільства історично зумовлені природним відбором у залежності від особливостей біології, характеру внутрішньовидових зв'язків і

міжвидових стосунків, до яких даний вид є пристосований в визначених умовах середовища.

Для кожного біологічного виду існує оптимум екологічних факторів, які характеризуються найбільшим ступенем сприятливості для існування виду.

Помірна швидкість розвитку організмів при мінімальній витраті енергії та найменша смертність, а також найбільша тривалість існування дорослих особин та їхня висока плодючість означають, що усі зовнішні фактори максимально позитивно впливають на організми.

1.6 Класифікація моделей

Математичні моделі, що є застосованими в математичній екології, прийнято розділяти на різноманітні типи. Розрізняють детерміновані, стохастичні та емпірико-статистичні моделі. Детерміновані математичні моделі засновані на внутрішньому описі самої системи та представляють собою зв'язки між компонентами цієї системи.

Математичні моделі, які включають в себе випадкові функції, зазвичай відносять до стохастичних. Емпірико-статистичні моделі використовують описану емпіричну інформацію про систему, яку розглядають, для побудови необхідних функціональних залежностей (регресійних моделей) між вхідними та вихідними змінними системами. При побудові емпірико-статистичних моделей також застосовують методи математичної статистики.

Моделі, які враховують в себе зміни змінних систем у часі, прийнято називати динамічними. Моделі, які описують стан системи без залежності від часу, називають стаціонарними.

Розрізняють також неперервні та дискретні математичні моделі. Неперервні моделі описують зміни змінних системи в будь-який випадковий момент часу на інтервалі, що розглядається. Дискретні моделі дають значення змінних системи у визначені проміжки часу (наприклад, кожну годину, кожен місяць і так далі).

За способом побудови та видами рішень розрізняють аналітичні та чисельні моделі. У випадку, якщо рівняння моделі можуть бути вирішені в аналітичному вигляді, тобто виходять визначені явні функції для змінних на виході, у такому випадку такі моделі називають аналітичними. Але зазвичай коло таких моделей досить обмежений, більшість же реальних моделей найчастіше не допускають отримання аналітичного рішення. У такому випадку, знаходження рішення моделі досягається, спираючись на чисельні методи. Результатом рішення в такому випадку будуть табличні функції, які задаються в дискретній множині точок.

Також у математичній екології виокремлюють три основні групи математичних моделей, які розділяються на моделі теорії популяцій, задачі розповсюдження забруднень у водних та повітряних середовищах та еколого-економічні моделі. Ще математичні моделі розділяють за типом застосованих математичних методів:

1. Моделі на основі диференціальних рівнянь
2. Матричні моделі
3. Різницеві моделі
4. Оптимізаційні моделі
5. Імітаційні моделі – моделі, побудовані на межі наших знань про об'єкт і реалізовані на комп'ютері за блочним принципом.
6. Регресійні моделі дають нам функціональні зв'язки між вхідними та вихідними змінними, спираючись на методи апроксимації статистичних даних, застосовуються вони на етапі емпірико-статистичного моделювання.

Висновки

У першому розділі була встановлена актуальність даної теми, та проведено опис розвитку вчення про динаміку популяцій.

Важлива задача, яка зараз постала перед людьми – не перейти через точку, після якої немає повернення назад. Математичний апарат, який ми

маємо сьогодні здатен нам допомогти у вирішенні цієї задачі. На плечах нашого покоління лежить проблема, з якою впоратися поки не виходить, навіть навпаки – вона стає більш і більш гострою. Це одночасно проблема перенаселення планети людьми, нестачі харчових ресурсів та втручання в природні умови проживання тварин задля розваги або ж заради збільшення кількості продуктів харчування для людей.

Розглянуті вищі моделі показують, що багато математиків, біологів та демографів у різні часі підіймали це питання, намагалися знайти його вирішення, пропонуючи ті и інші ідеї. Один науковець підходив до нього з одного боку, інший – з іншого. Тим не менш, інтерес до цієї теми тягнеться ще з 17го століття. Кожен наступний науковець пропонував більш і більш складну модель. Складну в тому розумінні, що модель враховувала більше чинників, більше факторів, які впливають на чисельність популяції. Маючи наробки усіх, хто приклав руки та мізки до цієї проблеми, можна спробувати спрогнозувати розвиток певної популяції.

РОЗДІЛ 2

ОДНОМІРНІ ДИНАМІЧНІ СИСТЕМИ З ДИСКРЕТНИМ ЧАСОМ

2.1 Чому одномірні динамічні системи?

Ми розглянемо цілий клас динамічних систем, які активно використовуються для моделювання біологічних процесів – це дискретні відображення. Окрім того, що вони несуть практичну значущість, одномірні дискретні відображення є найпростішими системами, рішення яких можуть демонструвати хаотичні режими.

Багато біологічних популяції не мають властивості безперервного виміру чисельності, адже зростання чисельності послідовних поколінь відбувається в дискретні моменти часу. Для примітивних організмів проміжки між цими моментами часу можуть бути досить короткими, і в цьому випадку безперервна за часом модель може бути підходящою ідеалізацією реального процесу. Однак, в залежності від конкретного біологічного виду, довжина кроку часу може сильно варіюватися.

В основному, властивість поколінь, що не перекриваються, відноситься до різних видів комах (стандартний життєвий цикл: личинка, лялечка, доросла комаха, яке встигає померти до того, як потомство подорослішає) або риб. Математичні моделі, таким чином, повинні виражати чисельність популяції в момент часу $t+1$, яку позначимо N_{t+1} , через чисельність у попередній момент часу t , яку позначимо як N_t (тобто чисельність популяції через задану одиницю часу повністю визначається цим моментом часу).

Це призводить до необхідності вивчення динамічних систем із дискретним часом у формі:

$$N_{t+1} = f(N_t), N_t \in \mathbb{R}, f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad (2.1)$$

або, в інших позначеннях,

$$N \mapsto f(N), N \in \mathbb{R},$$

де f – задане відображення, яке зазвичай залежить від ряду параметрів.

Наприклад, дискретне логістичне рівняння (відображення Ферхюльста) є окремим випадком динамічної системи виду (2.1). Про це відображення було детально розказано в попередньому розділі.

Відмінною рисою скалярних дискретних динамічних систем виду (2.1), є можливість їх простого ітерування при заданні деякої початкової умови (початкової чисельності популяції) N_0 . Однак навіть таке просте ітерування може виявитися надзвичайно корисним, що відзначав один з творців сучасної біоматематики, теоретичний біолог Роберт Мей. Він зробив величезний внесок у популяризацію моделі Ферхюльста і в 1976 році він написав:

«Тому я наполегливо раджу, щоб люди знайомилися, скажімо, з відображенням Ферхюльста на ранньому етапі свого навчання математики. Це рівняння можна вивчати феноменологічно, ітеруя його на калькуляторі або навіть вручну. Його вивчення не вимагає усієї множини складних понять, які використовуються в елементарному аналізі. Таке вивчення дуже збагачувало б інтуїтивні уявлення учня про нелінійні системи. Для всіх нас було б краще, якби не тільки в науковій роботі, а й в повсякденному політичному та економічному житті якомога більше людей зрозуміло, що прості нелінійні системи не завжди володіють простими динамічними властивостями. »

2.2 Експоненційний ріст

Розглянемо наступну задачу. Нехай N_0 - початкова чисельність популяції, N_t - її чисельність через t років. Коефіцієнтом приросту називається відносне зміна чисельності за рік:

$$r(t) = \frac{N_{t+1} - N_t}{N_t} \quad (2.2)$$

Якщо ця величина постійна, тобто $r(t) = r = \text{const}$, то закон, який керує динамікою чисельності, має вигляд

$$N_{t+1} = (1 + r)N_t \quad (2.3)$$

Рівняння (2.3) лінійно і легко вирішується. Через t років чисельність популяції дорівнює

$$N_t = (1 + r)^t N_0 \quad (2.4)$$

На рисунку 2.1 зображено графік динаміки популяції за експоненційною моделлю.

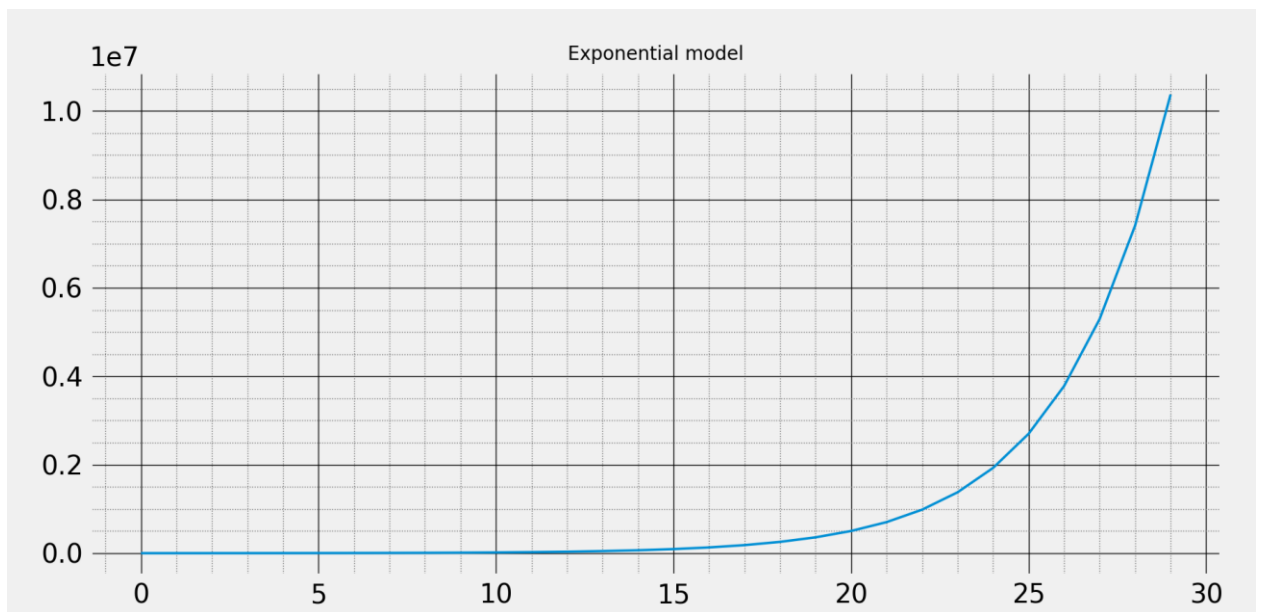


Рисунок 2.1 Експоненційна модель динаміки популяції

Залежно від знаку параметра чисельність необмежено зростає в геометричній прогресії, якщо $r > 0$, прямує до нуля, якщо $-1 < r < 0$, і залишається незмінною, якщо $r = 0$.

Експоненціальне зростання чисельності популяції не може тривати нескінченно. Розглянемо, наприклад, модель поділу клітини. Припустимо, що

всі клітини діляться одночасно, і кожна породжує а дочірніх клітин. Якщо N_t -число клітин в t -му поколінні, то рівняння динаміки такої популяції має знайомий вигляд:

$$N_{t+1} = aN_t, \quad (2.5)$$

а його рішення $N_t = a^t N_0$, де N_0 - початкове число клітин.

Якщо припустити, що $a = 2$, тобто при кожному діленні з'являється дві нові клітини з однієї старої, а початкова чисельність дорівнює одній єдиній одноклітинній бактерії (для визначеності *E.coli*, середній час ділення якої дорівнює 12 хвилинам), то всього через добу чисельність популяції бактерій буде дорівнює 10^{36} , для такої кількості бактерій просто не вистачить місця на планеті Земля.

У загальному випадку, з огляду на ефекти перенаселення, обмеженості ресурсів і саморегуляції, природно припустити, що існує деяка максимально допустима при незмінних зовнішніх умовах чисельність популяції N_{max} , причому при $N < N_m$, де $N_m = f^{-1}(N_{max})$, графік функції $f(N)$ зростає і зменшується при $N > N_m$. Іншими словами, коефіцієнт приросту популяції виявляється величиною не постійною, а залежить від поточної чисельності N_t .

Формально можна врахувати таку залежність в наступному вигляді:

$$N_{t+1} = (1 + r(N_t))N_t \quad (2.6)$$

2.3 Модель Ферхюльста-П'єра

Щоб не допустити експоненціального зростання чисельності популяції, яке описане рівнянням (2.3), була запропонована модель (так зване дискретне логістичне рівняння), в якій коефіцієнт приросту непостійний:

$$N_{t+1} = rN_t \left(1 - \frac{N_t}{K}\right) \quad (2.7)$$

У літературі рівняння (2.7) також називають рівнянням Ферхюльста з дискретним часом.

Відзначимо, втім, що в контексті моделей з дискретним часом ім'я Ферхюльста часто асоціюється з іншим відображенням, особливо в англomовній літературі.

Причина даного різночитання полягає в наступному.

Рівняння (3.3) можна отримати, використовуючи явну схему дискретизації для логістичного рівняння

$$\dot{N} = rN \left(1 - \frac{N}{K}\right),$$

де $r > 0, K > 0$,

тобто замінюючи похідну за часом на різницю

$$\dot{N} = \frac{\Delta N}{\Delta t},$$

де $\Delta N = N(t + \Delta t) - N(t)$.

Якщо ми покладемо $\Delta t = 1$, то отримаємо, що

$$N(t + 1) = N(t) + rN(t) \left(1 - \frac{N(t)}{K}\right), \quad (2.8)$$

від якого за допомогою очевидних перепозначень можна перейти до (2.7), яке цілком природно назвати дискретним логістичним рівнянням.

З іншого боку, розглянемо дискретне відображення у вигляді

$$N_{t+1} = \frac{R_0 N_t}{1 + \frac{N_t}{M}}, \quad (2.9)$$

де $R_{0,M}$ - невід'ємні параметри, причому $K = (R_0 - 1)M$ дає потенційну ємність екологічної системи. Рівняння (2.9) можна вирішити в явному вигляді, причому рішення має наступний вигляд:

$$N_t = \frac{KN_0}{N_0 + (K - N_0)R_0^{-t}} \quad (2.10)$$

На рисунку 2.2 зображено графік динаміки популяції за моделлю Ферхюльста-П'єра.

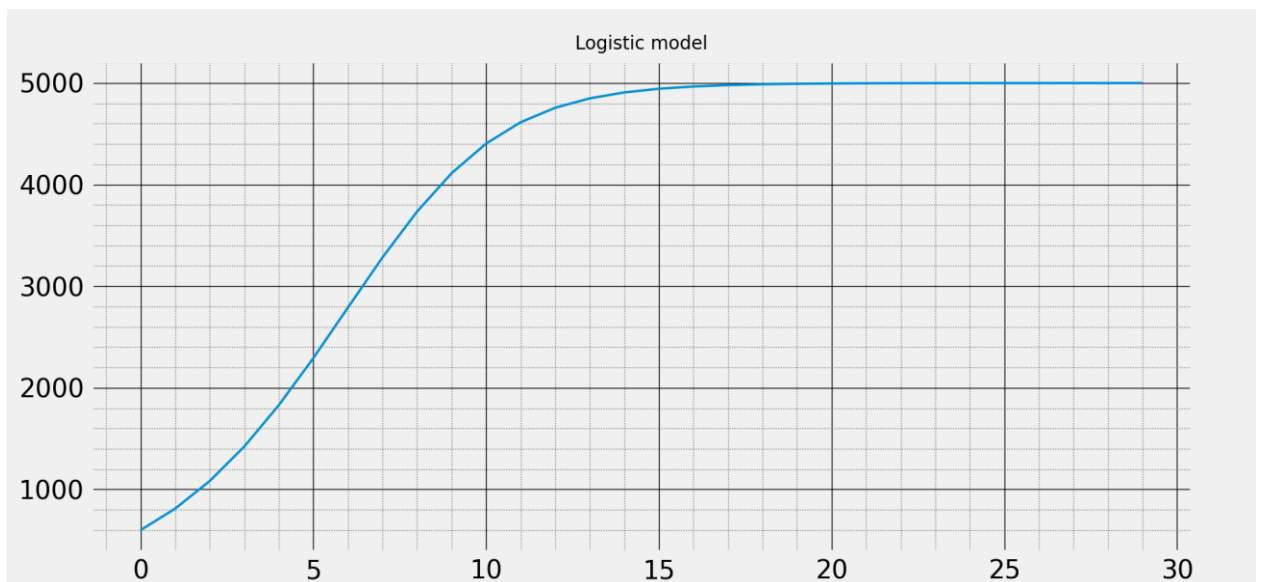


Рисунок 2.2 Модель Ферхюльста-П'єра з ємністю середовища 5000

Модель (2.9) має рівно той же набір динамічних поведень, що і логістичне рівняння з безперервним часом, тому його також логічно назвати на честь більш відомого рівняння.

Рівняння (2.9) часто називають моделлю Бевертон-Холта, а будь-яку

модель у вигляді $N_{t+1} = \frac{AN_t}{1+BN_t}$ - дискретним рівнянням Ферхюльста.

Таку ж термінологію будемо дотримуватися і ми, називаючи (2.7) дискретним логістичним рівнянням, а моделі виду (2.9) - дискретним рівнянням Ферхюльста.

Повертаючись до (2.7). Очевидний недолік рівняння (2.7) полягає в тому, що якщо $N_t > K$, то $N_{t+1} < 0$, що вступає в протиріччя з екологічної інтерпретацією моделі, так як чисельність популяції не може бути від'ємною.

2.4 Модель Рікера

Іншим прикладом відомої моделі, в якій чисельність не може стати від'ємною ні за яких N_t , є таке рівняння.

Модель, або відтворення, Рікера, має такий вигляд:

$$N_{t+1} = N_t e^{r(1-\frac{N_t}{K})},$$

де $r > 0$,

$K > 0$.

Тут $N_t > 0$ для всіх t , якщо $N_0 > 0$.

На рисунку 2.1 зображено графік динаміки популяції за моделлю Рікера.

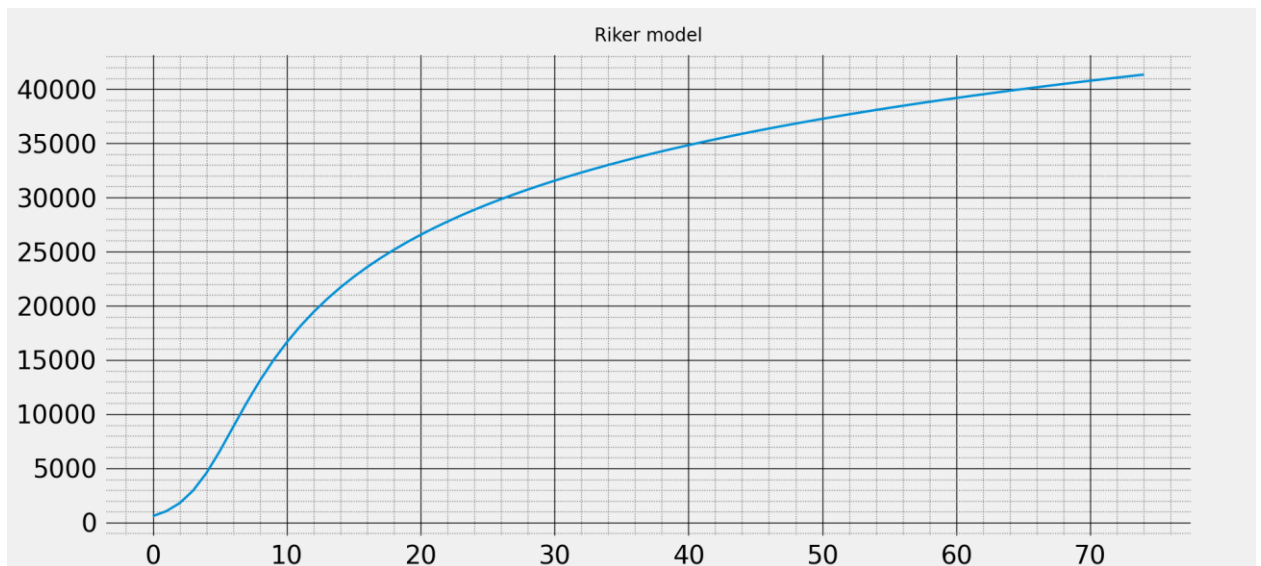


Рисунок 2.3 Модель Рікера

2.5 Огляд інноваційних моделей

Без заперечення можна сказати, що попередні моделі заклали вагомий фундамент для вивчення динаміки популяцій. Адже це були перші спроби для прогнозів динаміки. Але вони є доволі примітивними, детерміністськими та враховують мало різних зовнішніх та внутрішніх факторів. Тим не менш, на основі цих простих моделей можна спробувати побудувати власні моделі з урахуванням тих факторів, які вважаються важливими в тих чи інших умовах.

Варто зауважити, що в таких моделях ми розглядаємо популяцію у штучно створених умовах, адже популяція не взаємодіє з іншими видами на території свого існування.

На основі експоненційної моделі та моделі Ферхюльста-П'єра побудуємо нові моделі, які мають певні додаткові обмеження, що наближують ці моделі до реального життя.

Продублюємо спершу моделі (2.3) та (2.7), щоб зручніше було показувати зміни в них.

$$N_{t+1} = (1 + r)N_t \quad (2.3)$$

$$N_{t+1} = rN_t \left(1 - \frac{N_t}{K}\right) \quad (2.7)$$

2.5.1 Моделі з урахуванням смертності особин у популяції

Обидві моделі (2.3) та (2.7) мають суттєвий недолік – вони не враховують той факт, що жодна особина не може жити вічно.

Тому, перше, що хотілося б додати, аби наблизити їх до реальності – додати фактор смертності у зв'язку зі старістю особини.

Для цього треба задати вік, через який особина помирає. Параметри, які впливали на динаміку популяцій у початкових моделях – N_0 , що вказує на початкову чисельність населення популяції та r , що вказує на біотичний потенціал популяції у моделі (2.3) та ще й K , що вказує на ємність середовища (обмежує популяцію зверху).

Нова модель матиме вигляд:

$$N_{t+1} = (1 + r)N_t - \Delta_{t-d}, \quad (2.11)$$

де N_t – чисельність популяції у момент t ,

r – коефіцієнт проросту,

d – тривалість життя особи в популяції,

$$\Delta_{t-d} = \begin{cases} N_{t-d} - N_{t-d-1}, & t \geq d \\ 0, & \text{інакше} \end{cases} \quad \text{– приріст популяції за момент } (t - d).$$

На рисунку можна побачити динаміку популяції за 30 моментів часу з такими параметрами: $N=600, r=0.4, d=10$.

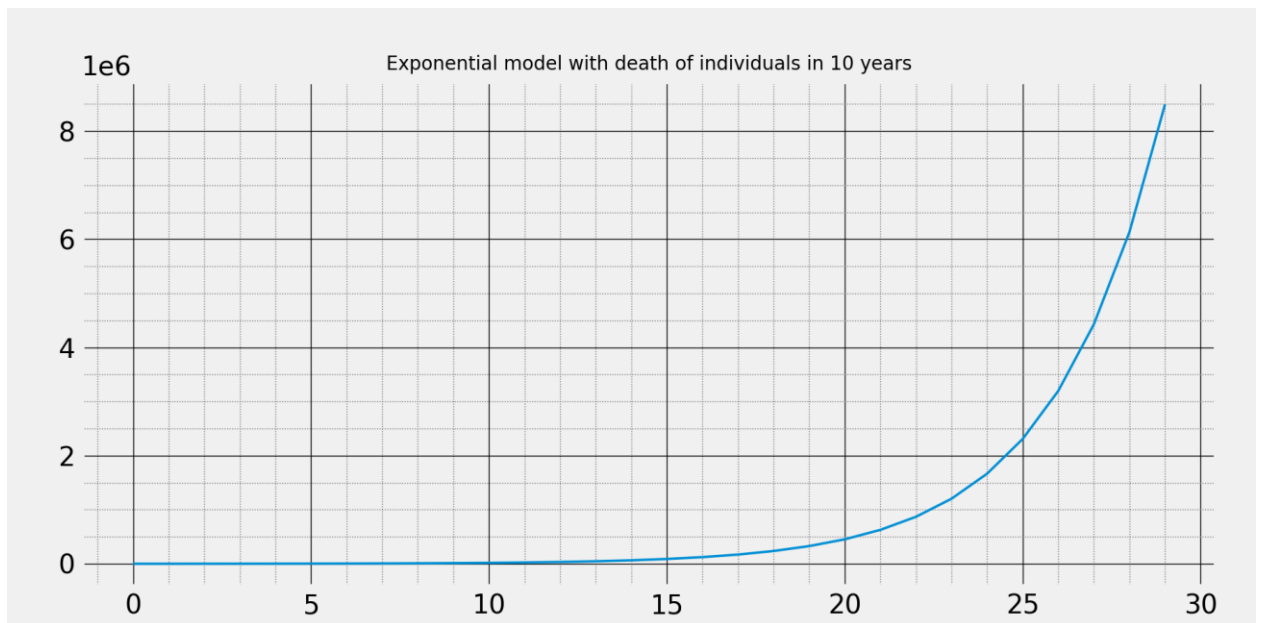


Рисунок 2.4 Експоненційна модель з урахуванням смертності за 10 моментів часу

Очевидно, що зі смертністю особин модель лишиться експоненційною, лиш чисельність популяції буде меншою.

Наступна модель зроблена на основі моделі (2.7). Таким же чином врахуємо факт того, що особи можуть померати від старості.

$$N_{t+1} = rN_t \left(1 - \frac{N_t}{K}\right) - \Delta_{t-d}, \quad (2.12)$$

де N_t – чисельність популяції у момент t ,

r – коефіцієнт проросту,

K – ємність середовища,

d – тривалість життя особини в популяції,

$\Delta_{t-d} = \begin{cases} N_{t-d} - N_{t-d-1}, & t \geq d \\ 0, & \text{інакше} \end{cases}$ – приріст популяції за момент $(t - d)$.

На рисунку можна побачити динаміку популяції за 30 моментів часу з такими параметрами: $N = 600, r = 0.4, d = 10, K = 5000$.

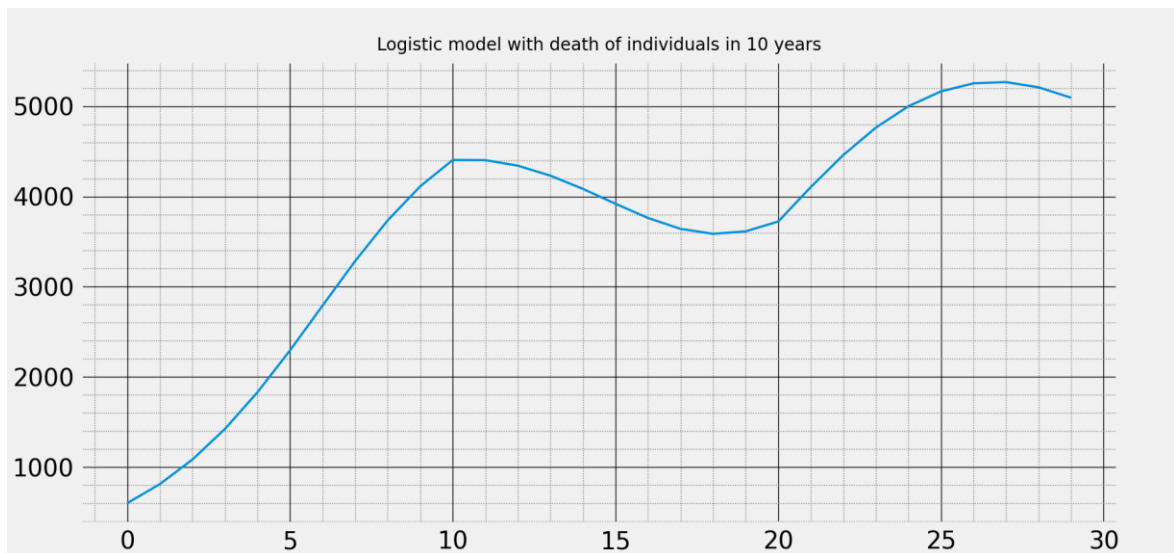


Рисунок 2.5 Логістична модель з урахуванням смертності за 10 років

Цікаво зауважити, що кількість особин у популяції не сильно виходить за межі параметру K , хоча модель більше не є суто логістичним дискретним рівнянням.

2.5.2 Моделі з урахуванням смертності та міграції

Наступні дві моделі будуть продовженнями попередніх моделей. У реальному житті, якщо популяція зменшується в чисельності, то місце, яке

вона звільняє на території свого проживання, не буде вільним довго. На місце, яке звільнилося, прийдуть нові особини.

Хоча дані моделі є лиш допоміжними для наступних пунктів, розглянемо їх та їхні графіки.

Модель, заснована на експоненційній моделі, матиме ще два додаткових параметри. Перший – це «умова», коли популяція стає меншою за неї, приходять нові особини. Другий – це кількість нових особин, що прийшли на місце померлих особин.

$$N_{t+1} = (1 + r)N_t - \Delta_{t-d} + n, \quad (2.13)$$

де N_t – чисельність популяції у момент t ,

r – коефіцієнт проросту,

d – тривалість життя особини в популяції,

$$\Delta_{t-d} = \begin{cases} N_{t-d} - N_{t-d-1}, & t \geq d \\ 0, & \text{інакше} \end{cases} \quad \text{– приріст популяції за момент } (t - d),$$

conditional – умова для міграції,

$$n = \begin{cases} n, & \text{якщо } N_{t+1} - n < \text{conditional} \\ 0, & \text{інакше} \end{cases} \quad \text{– значення міграції}$$

На рисунку можна побачити динаміку популяції за 30 років з такими параметрами: $N = 600, r = 0.4, d = 10, \text{conditional} = 2000, n = 500$.

Модель досі лишається експоненційною, хоча тепер кількість особин у популяції є більшою, аніж була в минулій експоненційній моделі.

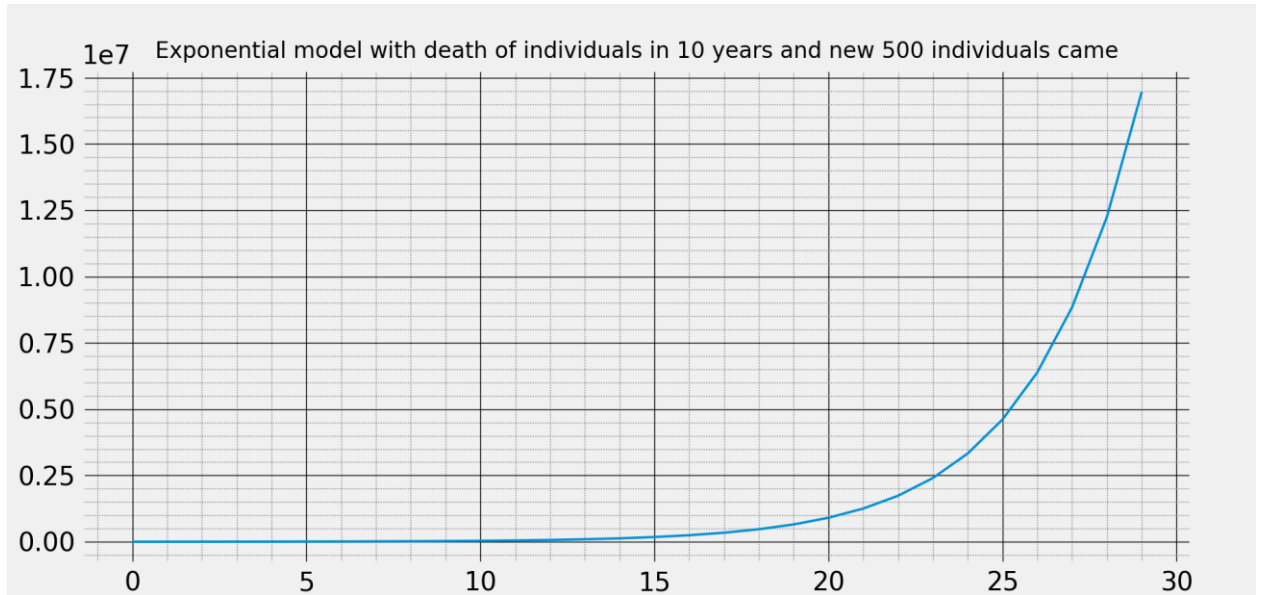


Рисунок 2.6 Експоненційна модель з урахуванням смертності за 10 моментів часу та приходом 500 нових особин

Модель, заснована на моделі Ферхюльста-П'єра, матиме такий вигляд:

$$N_{t+1} = rN_t \left(1 - \frac{N_t}{K}\right) - \Delta_{t-d} + n, \quad (2.14)$$

де N_t – чисельність популяції у момент t ,

r – коефіцієнт проросту,

K – ємність середовища,

d – тривалість життя особини в популяції,

$$\Delta_{t-d} = \begin{cases} N_{t-d} - N_{t-d-1}, & t \geq d \\ 0, & \text{інакше} \end{cases} \quad \text{– приріст популяції за момент } (t-d),$$

conditional – умова для міграції,

$$n = \begin{cases} n, & \text{якщо } N_{t+1} - n < \text{conditional} \\ 0, & \text{інакше} \end{cases} \quad \text{– кількість особин, які приходять на}$$

місце померлих.

На рисунку можна побачити динаміку популяції за 30 років з такими параметрами: $N = 600, r = 0.4, d = 10, \text{conditional} = 2000, n = 500$.

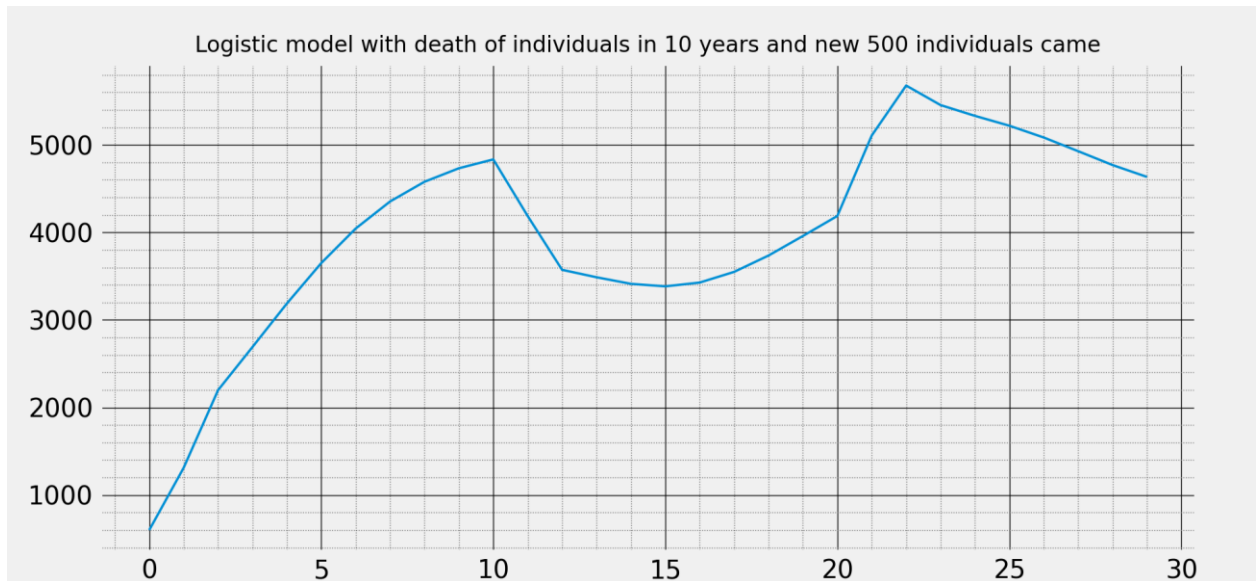


Рисунок 2.7 Логістична модель з урахуванням смертності за 10 моментів часу та приходом 500 нових особин

Різке зростання чисельності популяції в один рік призвела до спалаху смертності після десятого моменту часу спостережень за популяцією.

2.5.3 Моделі із випадковим збуренням

Моделі, що були розглянуті в попередніх пунктах є детерміністські, адже вони залежать лише від фіксованих параметрів. Відповідно, вони не можуть врахувати чинники, які виводять систему з під контролю.

У реальному житті час від часу трапляються неочікувані події, які негативно впливають на чисельність популяції. Чого тільки варта пандемія коронавірусу, яка триває вже другий рік.

Наступні чотири моделі будуть стохастичними – у випадковий момент часу на популяцію впливатиме випадкове збурення.

Випадкове збурення – це відсоток популяції, який лишиться після його дії. Відповідно, 1 – збурення не мало жодного впливу, значення в межах між 0 та 1 – від популяції лишився певний відсоток чисельності.

Побудуємо таке випадкове збурення, що частка значень, відмінних від 1, складатиме 15%.

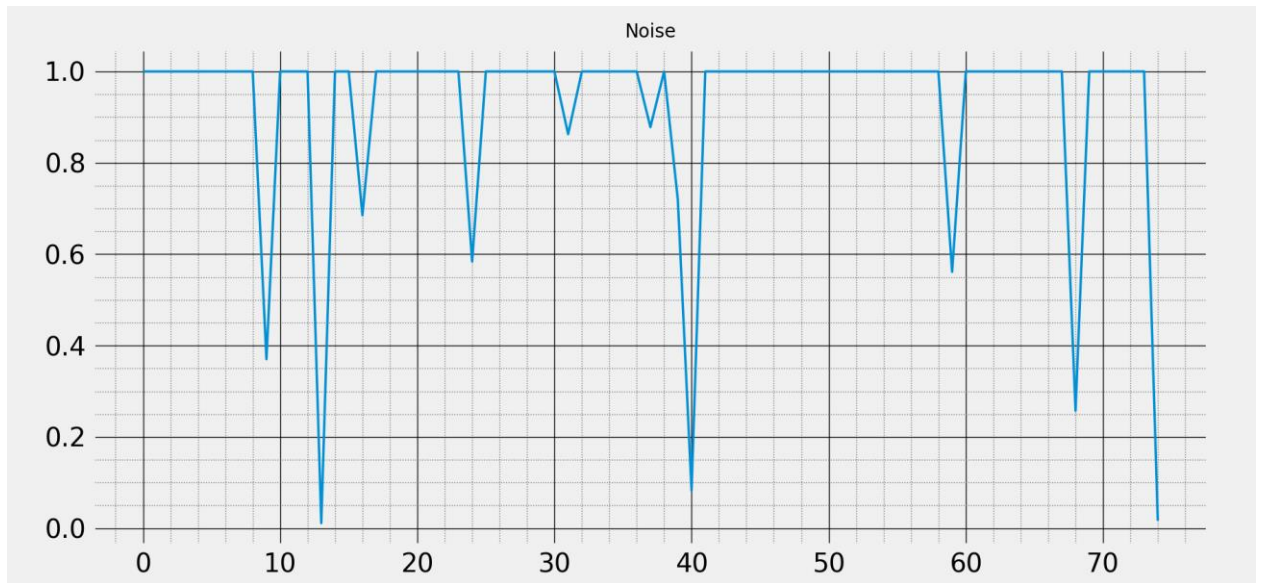


Рисунок 2.8 Випадкове збурення

Знову ж таки розглянемо експоненційну модель та модель Ферхюльста-П'єра.

- 1) Експоненційна модель з урахуванням смертності та зовнішнім збуренням

$$N_{t+1} = (1 + r)N_t * eps_t - \Delta_{t-d} * eps_{t-d} \quad (2.15)$$

де N_t – чисельність популяції у момент t ,

r – коефіцієнт проросту,

$duration$ - тривалість життя особини в популяції,

$$\Delta_{t-d} = \begin{cases} N_{t-d} - N_{t-d-1}, & t \geq d \\ 0, & \text{інакше} \end{cases} \quad \text{– приріст популяції за момент } (t - d),$$

eps – зовнішнє збурення.

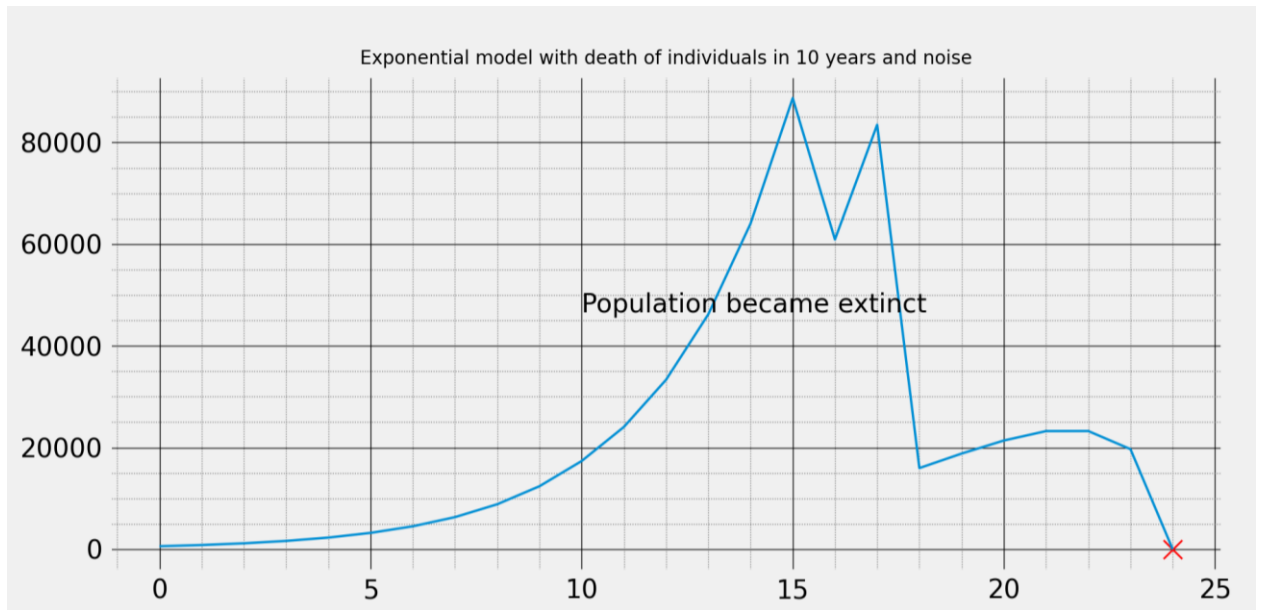


Рисунок 2.9 Експоненційна модель з урахуванням смертності за 10 моментів часу та зовнішнім збуренням

- 2) Експоненційна модель з урахуванням смертності, приходом нових особин та зовнішніх збурень

$$N_{t+1} = (1 + r)N_t * eps_t - \Delta_{t-d} * eps_{t-d} + n, \quad (2.16)$$

де N_t – чисельність популяції у момент t ,

r – коефіцієнт приросту,

d - тривалість життя особини в популяції,

$\Delta_{t-d} = \begin{cases} N_{t-d} - N_{t-d-1}, & t \geq d \\ 0, & \text{інакше} \end{cases}$ – приріст популяції за момент $(t - d)$,

conditional – умова для міграції,

$n = \begin{cases} n, & \text{якщо } N_{t+1} - n > \text{conditional} \\ 0, & \text{інакше} \end{cases}$ – кількість особин, які приходять на

місце померлих,

eps – зовнішнє збурення.

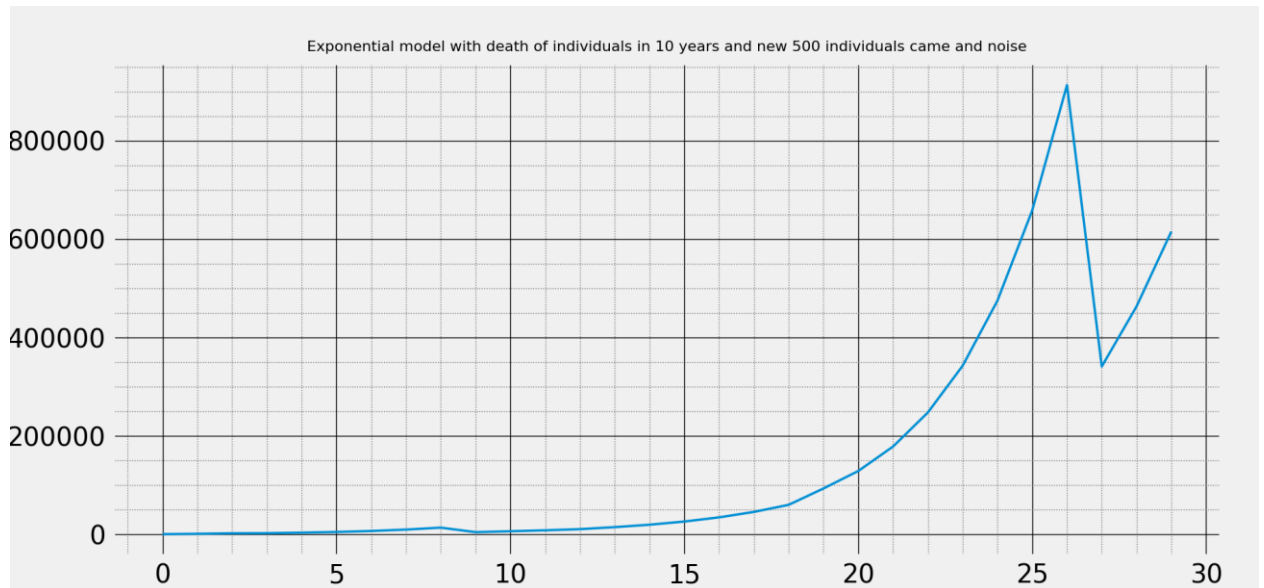


Рисунок 2.10 Експоненційна модель з урахуванням смертності за 10 моментів часу, приходом нових особин та зовнішнім збуренням

3) Логістична модель з урахуванням смертності та зовнішнім збуренням

$$N_{t+1} = \left(r N_t \left(1 - \frac{N_t}{K} \right) \right) * eps_t - \Delta_{t-d} * eps_{t-d} \quad (2.17)$$

де N_t – чисельність популяції у момент t ,

r – коефіцієнт проросту,

K – ємність середовища,

$duration$ – тривалість життя особини в популяції,

$\Delta_{t-d} = \begin{cases} N_{t-d} - N_{t-d-1}, & t \geq d \\ 0, & \text{інакше} \end{cases}$, – приріст популяції за момент часу $(t -$

$d)$,

eps – зовнішнє збурення.

На рисунку 2.8 можна побачити приклад популяції, яка повністю вимерла за роки дослідження (приблизно 20й рік). Якщо популяція стає рівною нулю, то подальше дослідження немає сенсу.

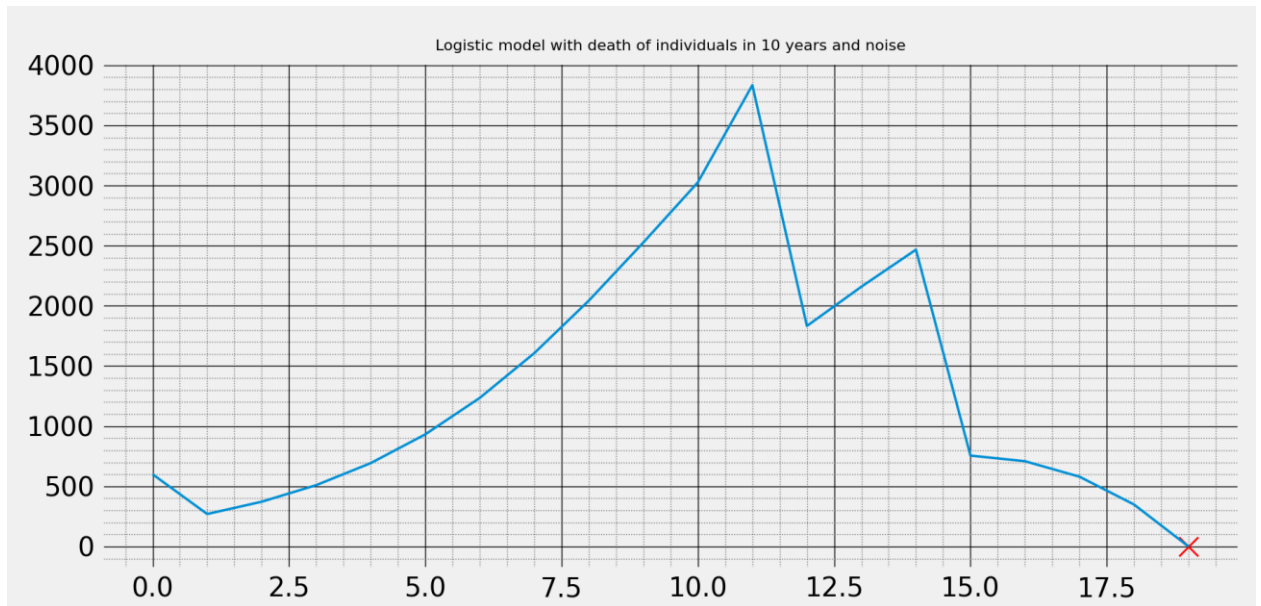


Рисунок 2.11 Логістична модель з урахуванням смертності за 10 років та зовнішнім збуренням

- 4) Логістична модель з урахуванням смертності, приходом нових особин та зовнішніх збурень

$$N_{t+1} = \left(r N_t \left(1 - \frac{N_t}{K} \right) \right) * eps_t - \Delta_{t-d} * eps_{t-d} + n, \quad (2.18)$$

де *duration* – тривалість життя особини в популяції,

$$\Delta_{t-d} = \begin{cases} N_{t-d} - N_{t-d-1}, & t \geq d \\ 0, & \text{інакше} \end{cases} \quad \text{– приріст популяції за момент } (t - d),$$

conditional – умова для міграції,

$$n = \begin{cases} n, & \text{якщо } N_{t+1} - n > conditional \\ 0, & \text{інакше} \end{cases} \quad \text{– кількість особин, які приходять на}$$

місце померлих,

eps – зовнішні збурення.

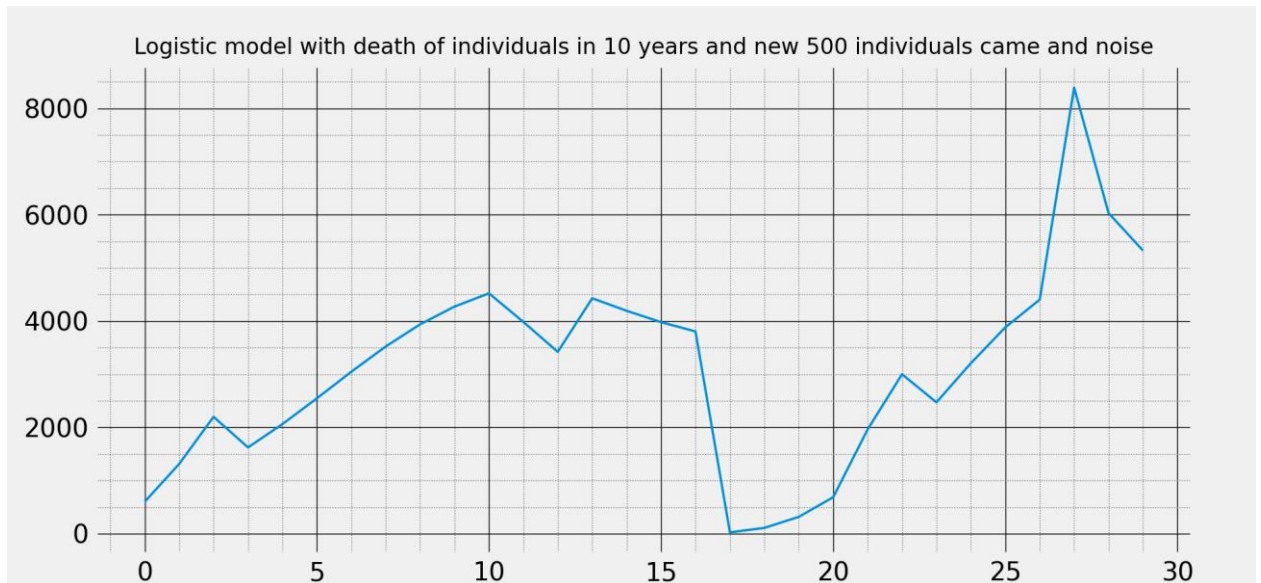


Рисунок 2.12 Логістична модель з урахуванням смертності за 10 років, приходом нових особин та зовнішнім збуренням

Висновки

Для вирішення проблеми прогнозування динаміки популяції застосовуються різні методи та підходи. Серед них моделі Ферхюльста, Рікера, експоненційна модель. Кожна з яких враховує певні особливості розвитку популяцій. Але, як було показано, кожна з цих моделей не враховує багато зовнішніх та внутрішніх чинників, які відбуваються в популяції.

Тому було запропоновано вісім нових моделей, кожна з яких просуває початкові моделі (експоненційну модель та модель Ферхюльста-П'єра) ближче до реального життя. Чотири з них є детерміністськими, отже вони є можливими лише в лабораторних умовах. А решта чотири – стохастичними, які включають надзвичайні обставини, які можуть повпливати на популяцію.

РОЗДІЛ 3

АНАЛІЗ ПОБУДОВАНИХ МОДЕЛЕЙ

3.1 Необхідні умови для моделей

Варто зауважити, що дані моделі розглядають популяцію в доволі обмеженому середовищі, без впливів інших видів, без міжвидової боротьби та боротьби за ресурси.

Також, оскільки внутрішньо видова поведінка ссавців є дуже важкою, то вони більше підходять для істот з більш простою поведінкою, таких як комахи, пташки.

3.2 Порівняльна характеристика моделей з різними параметрами

Проведемо порівняльну характеристику моделей, які були запропоновані в попередньому розділі. Візьмемо кожен модель, та розглянемо чисельність популяції з різними параметрами.

Мінятимемо такі параметри: початкова чисельність популяції від 0 до 1000 з дискретністю 100 та коефіцієнт приросту від 0.1 до 1 з дискретністю 0.1.

Будемо вести спостереження протягом 60 дискретних одиниць часу, зі смертністю особин через 3 одиниці часу. Коли чисельність популяції ставатиме менше за 2000, на це місце буде приходити 500 нових осіб. Ємність середовища для логістичної моделі – 10000 особин.

Таблиця 3.1 Логістична дискретна модель

	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
100	7614,0	9994,5	9999,9	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000
	08	65	96	0	0	0	0	0	0	0

Продовження таблиці 3.1

	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
200	8723,4	9997,6	9999,9	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000
	57	96	98	0	0	0	0	0	0	0
300	9149,1	9998,6	9999,9	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000
	08	12	99	0	0	0	0	0	0	0
400	9370,8	9999,0	9999,9	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000
	02	34	99	0	0	0	0	0	0	0
500	9505,7	9999,2	10000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000
	07	73		0	0	0	0	0	0	0
600	9595,9	9999,4	10000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000
	86	24		0	0	0	0	0	0	0
700	9660,4	9999,5	10000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000
	13	28		0	0	0	0	0	0	0
800	9708,5	9999,6	10000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000
	75	04		0	0	0	0	0	0	0
900	9745,8	9999,6	10000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000
	66	61		0	0	0	0	0	0	0

Таблиця 3.2 Логістична модель з урахуванням смертності

	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	4150,	9563,	8920,	9697,	1047	1067	9930,	9473,	9806,	9999,
0	522	615	08	122	8,02	3,38	763	627	497	506
20	5382,	9313,	9099,	1017	1068	1019	9586,	9703,	9964,	1000
0	767	867	45	1,13	1,98	5,14	225	174	947	0
30	6043,	9069,	9357,	1043	1057	9908,	9589,	9834,	9988,	1000
0	103	802	996	4,12	1,81	131	959	706	926	0

Продовження таблиці 3.2

	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
400	6474, 892	8926, 801	9592, 619	10558 ,77	10416 ,61	9763, 288	9647, 425	9899, 045	9995, 291	100 00
500	6781, 754	8859, 164	9789, 909	10604 ,46	10274 ,75	9693, 433	9704, 994	9933, 464	9997, 613	100 00
600	7009, 517	8841, 822	9951, 301	10606 ,11	10156 ,66	9663, 234	9753, 32	9953, 547	9998, 644	100 00
700	7183, 4	8857, 419	10081 ,56	10583 ,39	10061 ,31	9654, 503	9792, 275	9966, 112	9999, 165	100 00
800	7319, 098	8894, 408	10185 ,81	10547 ,52	9985, 179	9657, 552	9823, 488	9974, 417	9999, 454	100 00
900	7427, 107	8945, 069	10268 ,62	10505 ,03	9924, 665	9667, 035	9848, 627	9980, 152	9999, 626	100 00

Таблиця 3.3 Логістична модель з урахуванням смертності та приходом нових
особин

	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
0	6662, 996	9184, 259	1031 0,7	1051 4,19	1000 4	9644, 116	9696, 078	9918, 529	9995, 889	100 00
10	6765, 214	9249, 867	1037 2,04	1046 4,83	1007 1,16	9654, 136	9748, 469	9945, 866	9997, 947	100 00
20	6858, 596	9316, 942	1041 8,59	1052 0,02	9986, 335	9649, 42	9790, 194	9961, 943	9998, 845	100 00
30	6959, 578	9383, 989	1033 7,36	1047 3,27	9919, 436	9655, 279	9823, 154	9972, 072	9999, 294	100 00
40	7051, 082	9449, 98	1038 8,81	1042 4,62	9866, 777	9666, 68	9849, 351	9965, 196	9999, 071	100 00

Продовження таблиці 3.3

	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
50	7135,	9278,	1042	1037	9825,	9680,	9825,	9973,	9999,	100
0	026	212	7,84	6,16	404	831	705	961	406	00
60	7212,	9343,	1045	1032	9793,	9668,	9850,	9979,	9999,	100
0	915	796	6,73	9,1	002	396	822	942	601	00
70	7300,	9408,	1047	1028	9851,	9682,	9871,	9984,	9999,	100
0	13	353	7,33	4,12	657	003	16	18	721	00
80	7372,	9471,	1049	1037	9817,	9696,	9887,	9987,	9999,	100
0	773	211	1,1	4,43	022	928	808	279	798	00
90	7439,	9531,	1045	1032	9789,	9712,	9901,	9989,	9999,	100
0	856	916	0,42	9,67	891	242	583	603	85	00

Таблиця 3.4 Логістична модель з урахуванням смертності, приходом нових особин та випадковим збуренням

	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
0	4224,	3766,	10962	11481	8088,	0	0	5579,	0	0
	858	936	,9	,91	493			493		
10	0	0	12718	0	9163,	4095,	6941,	3307,	0	0
0			,56		77	3	342	788		
20	2288,	9339,	0	0	4854,	1153,	2268,	8764,	0	0
0	516	137			094	623	051	464		
30	5561,	0	8400,	0	0	4853,	0	0	0	0
0	259		065			85				
40	4703,	0	1274,	0	6424,	0	0	0	0	0
0	629		547		054					
50	3673,	1823,	3534,	0	0	0	0	0	0	0
0	462	166	541							

Продовження таблиці 3.5

	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
900	0	0	0	0	0	0	7658,6 6	0	0	0

Таблиця 3.6 Експоненційна модель

	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
100	2768 0,15	4695 626	5,28 E+08	4,18 E+10	2,45 E+12	1,1E +14	3,95 E+15	1,15 E+17	2,8E +18	5,76 E+19
200	5536 0,3	9391 252	1,06 E+09	8,37 E+10	4,9E +12	2,21 E+14	7,9E +15	2,3E +17	5,59 E+18	1,15 E+20
300	8304 0,45	1408 6879	1,58 E+09	1,26 E+11	7,35 E+12	3,31 E+14	1,18 E+16	3,45 E+17	8,39 E+18	1,73 E+20
400	1107 20,6	1878 2505	2,11 E+09	1,67 E+11	9,8E +12	4,42 E+14	1,58 E+16	4,6E +17	1,12 E+19	2,31 E+20
500	1384 00,7	2347 8131	2,64 E+09	2,09 E+11	1,23 E+13	5,52 E+14	1,97 E+16	5,76 E+17	1,4E +19	2,88 E+20
600	1660 80,9	2817 3757	3,17 E+09	2,51 E+11	1,47 E+13	6,63 E+14	2,37 E+16	6,91 E+17	1,68 E+19	3,46 E+20
700	1937 61	3286 9383	3,7E +09	2,93 E+11	1,72 E+13	7,73 E+14	2,76 E+16	8,06 E+17	1,96 E+19	4,04 E+20
800	2214 41,2	3756 5010	4,22 E+09	3,35 E+11	1,96 E+13	8,83 E+14	3,16 E+16	9,21 E+17	2,24 E+19	4,61 E+20
900	2491 21,3	4226 0636	4,75 E+09	3,77 E+11	2,21 E+13	9,94 E+14	3,55 E+16	1,04 E+18	2,52 E+19	5,19 E+20

Таблиця 3.7 Експоненційна модель з урахуванням смертності

	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
--	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	---

Продовження таблиці 3.7

	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
100	9520, 899	27676 82	4,29E +08	3,85E +10	2,37E +12	1,09E +14	3,92E +15	1,15E +17	2,79E +18	5,76E +19
200	1904 1,8	55353 64	8,58E +08	7,71E +10	4,74E +12	2,18E +14	7,85E +15	2,3E+ 17	5,58E +18	1,15E +20
300	2856 2,7	83030 46	1,29E +09	1,16E +11	7,11E +12	3,27E +14	1,18E +16	3,44E +17	8,38E +18	1,73E +20
400	3808 3,6	11070 728	1,72E +09	1,54E +11	9,48E +12	4,35E +14	1,57E +16	4,59E +17	1,12E +19	2,3E+ 20
500	4760 4,5	13838 410	2,14E +09	1,93E +11	1,18E +13	5,44E +14	1,96E +16	5,74E +17	1,4E+ 19	2,88E +20
600	5712 5,39	16606 092	2,57E +09	2,31E +11	1,42E +13	6,53E +14	2,35E +16	6,89E +17	1,68E +19	3,46E +20
700	6664 6,29	19373 774	3E+0 9	2,7E+ 11	1,66E +13	7,62E +14	2,75E +16	8,03E +17	1,95E +19	4,03E +20
800	7616 7,19	22141 457	3,43E +09	3,08E +11	1,9E+ 13	8,71E +14	3,14E +16	9,18E +17	2,23E +19	4,61E +20
900	8568 8,09	24909 139	3,86E +09	3,47E +11	2,13E +13	9,8E+ 14	3,53E +16	1,03E +18	2,51E +19	5,18E +20

Таблиця 3.8 Експоненційна модель з урахуванням смертності та приходом нових особин

	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
0	1188 13,7	2766 9165	3,85E +09	3,05E +11	1,67E +13	5,53E +14	1,83E +16	4,96E +17	1,12E +19	2,16E +20

Продовження таблиці 3.8

	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
100	1283	30436	4,28E	3,44E	1,55E	6,61E	2,23E	6,11E	1,4E+	2,74E
	34,6	847	+09	+11	+13	+14	+16	+17	19	+20
200	1111	33204	4,71E	3,12E	1,79E	7,7E+	2,62E	7,25E	1,68E	3,31E
	69,6	529	+09	+11	+13	14	+16	+17	+19	+20
300	1206	35972	4,17E	3,51E	2,03E	8,79E	3,01E	8,4E+	1,57E	3,17E
	90,5	211	+09	+11	+13	+14	+16	17	+19	+20
400	1302	31034	4,59E	3,89E	2,26E	9,88E	2,72E	7,78E	1,85E	3,74E
	11,4	924	+09	+11	+13	+14	+16	+17	+19	+20
500	1397	33802	5,02E	4,28E	2,5E+	8,84E	3,12E	8,93E	2,13E	4,32E
	32,3	606	+09	+11	13	+14	+16	+17	+19	+20
600	1492	36570	5,45E	4,66E	2,21E	9,93E	3,51E	1,01E	2,41E	4,9E+
	53,2	288	+09	+11	+13	+14	+16	+18	+19	20
700	1301	39337	5,88E	4,07E	2,45E	1,1E+	3,9E+	1,12E	2,69E	5,47E
	58,9	970	+09	+11	+13	15	16	+18	+19	+20
800	1396	42105	5,05E	4,45E	2,68E	1,21E	4,29E	1,24E	2,97E	6,05E
	79,8	652	+09	+11	+13	+15	+16	+18	+19	+20
900	1492	44873	5,48E	4,84E	2,92E	1,32E	4,69E	1,35E	3,25E	6,62E
	00,7	334	+09	+11	+13	+15	+16	+18	+19	+20

Таблиця 3.9 Експоненційна модель з урахуванням смертності, приходом нових особин та зовнішнім збуренням

	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
0	1532	0	0	1,49E	1,44E	6,06E	9,84E	1,35E	3,49E	4,86E
	2,26			+08	+09	+12	+12	+14	+14	+16
100	0	1984	0	0	0	2,77E	1,13E	1,53E	7,17E	1,55E
		5,88				+12	+13	+13	+14	+16

Продовження таблиці 3.9

	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
200	6025, 723	0	0	3,15E +09	9,26E +08	4,4E+ 10	6,49E +12	7,33E +13	2,99E +15	2,84E +17
300	1892 3,85	0	2400 363	0	0	1,6E+ 11	4,59E +13	1,42E +15	2,85E +14	2,85E +18
400	0	4076 9,56	0	8,12E +08	0	0	0	1,02E +14	1,62E +16	6,19E +17
500	0	0	0	8,92E +08	0	3,44E +10	9,63E +11	2,45E +16	4,38E +17	9,86E +16
600	1593 7,93	0	0	4,76E +08	5,81E +10	3,32E +13	1,82E +11	1,22E +14	7,94E +16	7,28E +18
700	6079, 48	0	0	7,91E +08	2,52E +10	2,72E +12	0	1,03E +15	2,64E +16	1,75E +14
800	2705, 767	0	0	1,69E +08	0	6,83E +11	0	4,28E +14	7,35E +16	1,49E +18
900	0	0	0	0	2,49E +10	1,34E +12	2E+1 1	2,46E +15	2,51E +15	9,22E +15

Таблиця 3.10 Експоненційна модель з урахуванням смертності та зовнішнім збуренням

	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
100	0	8782, 862	0	0	1,62E +08	0	2,16E +13	4E+1 1	1,44E +15	7,45E +16
200	0	0	0	0	0	4,75E +09	1,72E +12	7,71E +12	1,43E +15	5,93E +16
300	0	0	3223 14	0	1,18E +10	0	4,98E +10	2,39E +14	9,44E +14	4,24E +14

Продовження таблиці 3.10

	0,1	0, 2	0, 3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
400	0	0	0	0	0	3,56E +12	1,16E +13	4,87E +14	1,28E +13	6,08E +18
500	0	0	0	0	4,9E+ 09	0	2,66E +10	1,12E +16	1,55E +14	2,63E +17
600	2062, 343	0	0	0	8,65E +09	1,59E +11	1,54E +12	5,94E +12	7,36E +15	2,88E +15
700	0	0	0	4,34E +09	41832 621	4,96E +10	2,66E +12	2,19E +14	4,55E +15	2,4E+ 18
800	0	0	0	0	51674 122	2,62E +11	0	7,67E +14	8,4E+ 13	1,16E +17
900	0	0	0	3,62E +08	0	3,22E +10	8,25E +12	3,53E +12	2,89E +16	3,81E +17

На даних таблицях можна проспостерігати кінцеві чисельності популяцій через 60 одиниць часу. У моделях із зовнішнім збуренням фігурують нулі – це значить, що популяція вимерла. Якщо початкова чисельність популяції була рівна нулю, то в моделях без приходу нових особин, чисельність лишилась нульовою. А в моделях із міграцією, на другому кроці чисельність стане рівною 500.

Моделі на основі експоненційної моделі дають дуже високу чисельність популяції за 60 моментів часу. Тим не менш, вони так само піддаються зовнішньому збуренню, як і моделі на основі логістичної дискретної моделі.

Моделі на основі логістичної моделі є більш реалістичними за кінцевими чисельностями. Цікавим є той факт, що хоча ємність середовища є фіксованою і складає 10000 особин, у моделях, запропонованих для досліджень, це значення не є таким чітким. І в деяких випадках чисельність популяції переходить значення в 10000. Можна зробити висновок, що

популяція буде існувати в певних обмежених ресурсів. Тим не менш, природний баланс має призвести до того, що чисельність вирівняється протягом наступних моментів часу.

3.3 Порівняння моделей із зовнішнім збуренням

У цьому пункті розглянемо моделі із зовнішнім збуренням таким чином: в ітеративному процесі побудуємо динаміку ста популяцій. Та подивимося, який відсоток лишиться, який помре, яка середня чисельність популяцій буде за таких параметрів та скільки років у середньому живе популяція. Візьмемо такі початкові параметри: початкова чисельність – 600 особин, коефіцієнт приросту – 0.3, ємність середовища – 7500, тривалість життя особини – 12 моментів часу. Спостереження будемо проводити для 75 моментів часу.

На кожену модель впливають різні зовнішні збурення, тим не менш, на двох графіках, які представлені для кожної моделі, збурення є однаковим для наглядності.

На синіх графіках будуть намальовані чисельності ста популяцій через 75 моментів часу для кожної з представлених моделей та середня чисельність особин. На оранжевих гістограмах зображені роки, в які популяція вимерла. Якщо ж на момент закінчення дослідження за популяціями, популяція лишилась із чисельністю, відмінною від нуля, то вона буде знаходитися на графіку зі значенням 75. Звісно ж, імовірно, у цьому значенні можуть бути й популяції, які вимерли на 75у моменті досліджень.

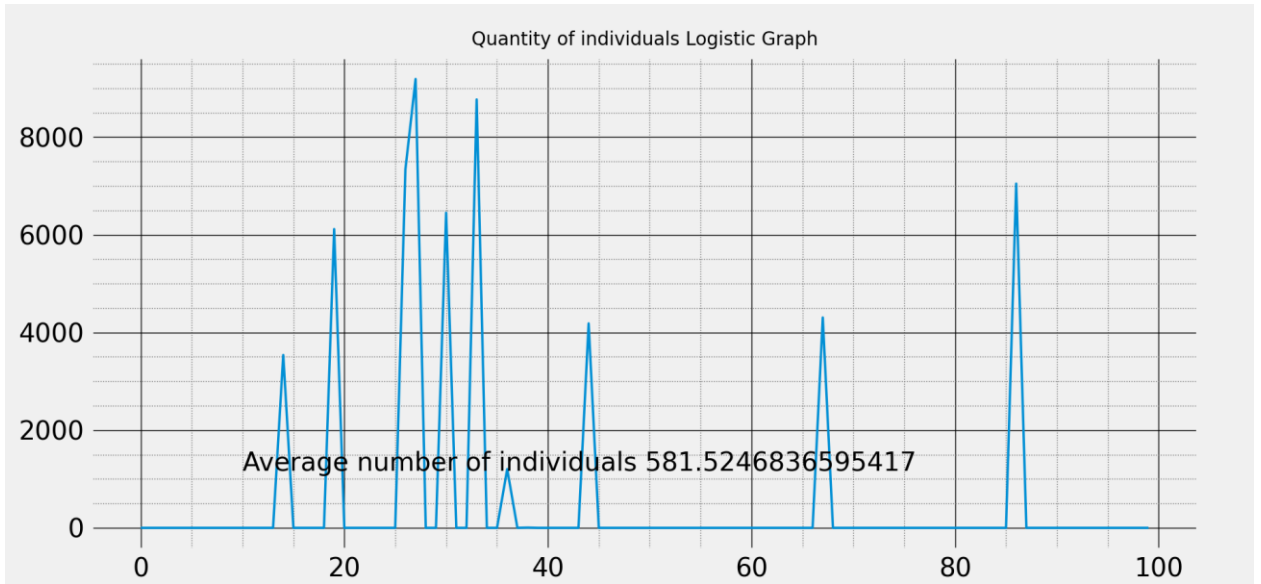


Рисунок 3.1 Чисельність 100 популяцій у логістичній моделі з урахуванням смертності

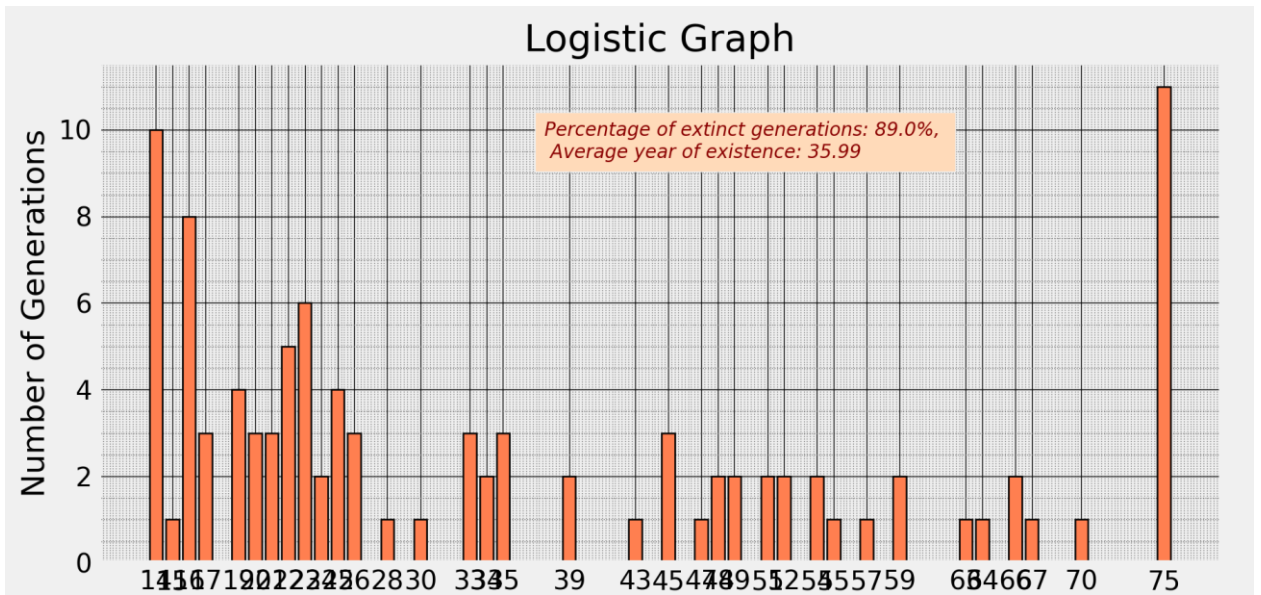


Рисунок 3.2 Роки існування популяцій логістичної моделі з урахуванням смертності

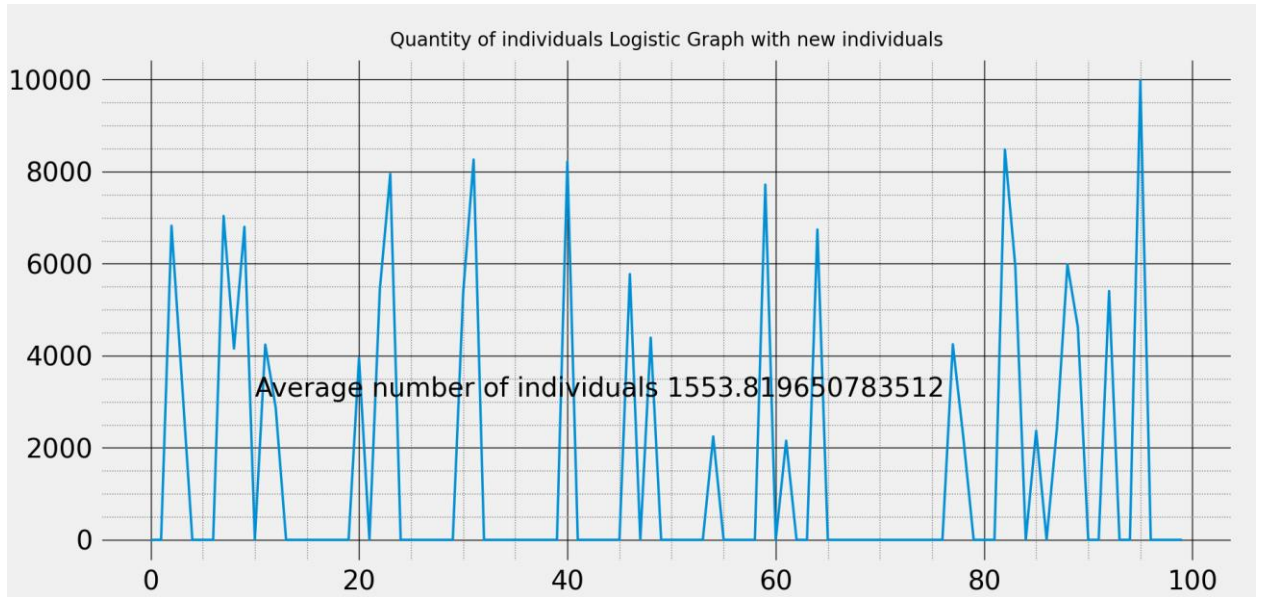


Рисунок 3.3 Чисельність 100 популяцій у логістичній моделі з урахуванням смертності та приходом нових особин

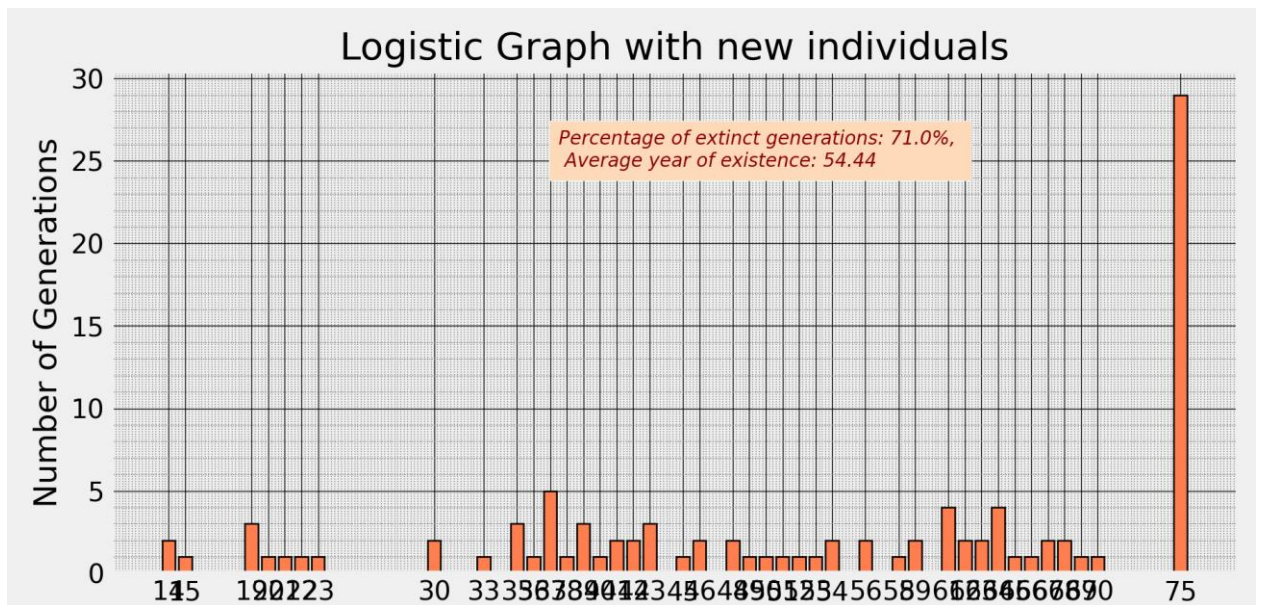


Рисунок 3.4 Роки існування популяцій логістичної моделі з урахуванням смертності та приходом нових особин

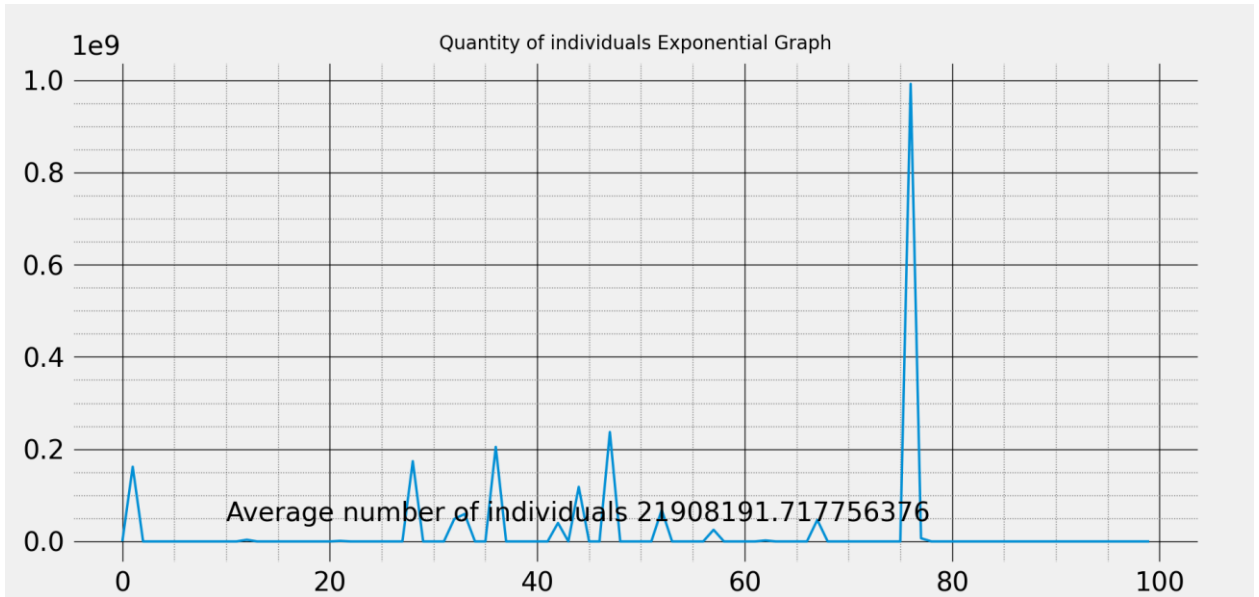


Рисунок 3.5 Чисельність 100 популяцій в експоненційній моделі з урахуванням смертності

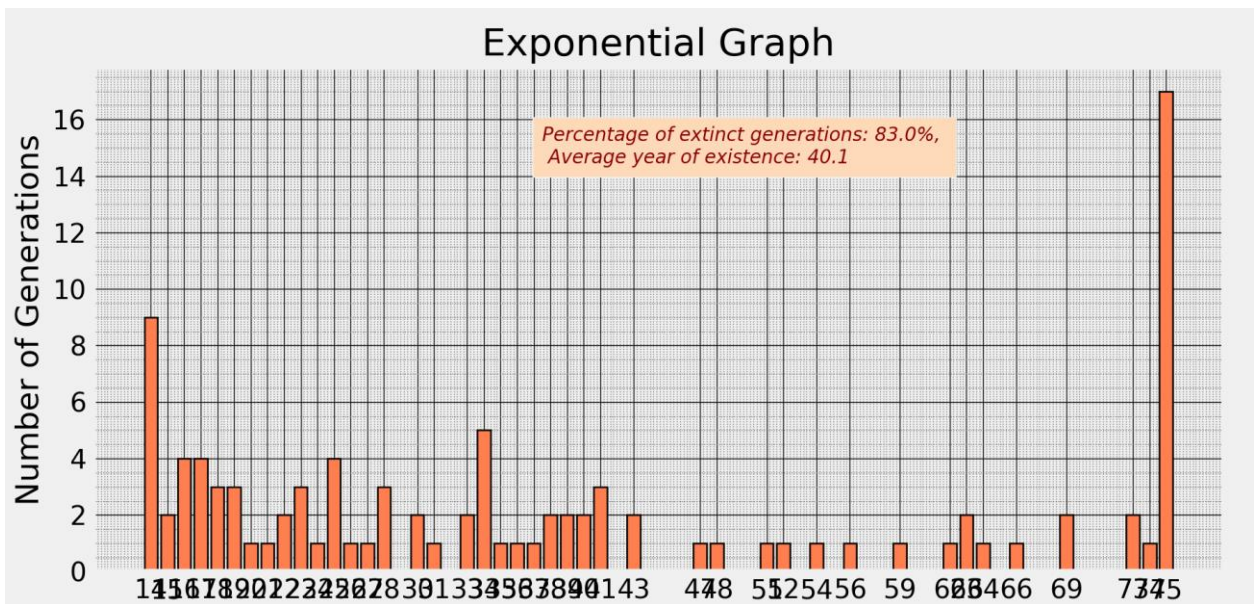


Рисунок 3.6 Роки існування популяцій експоненційної моделі з урахуванням смертності

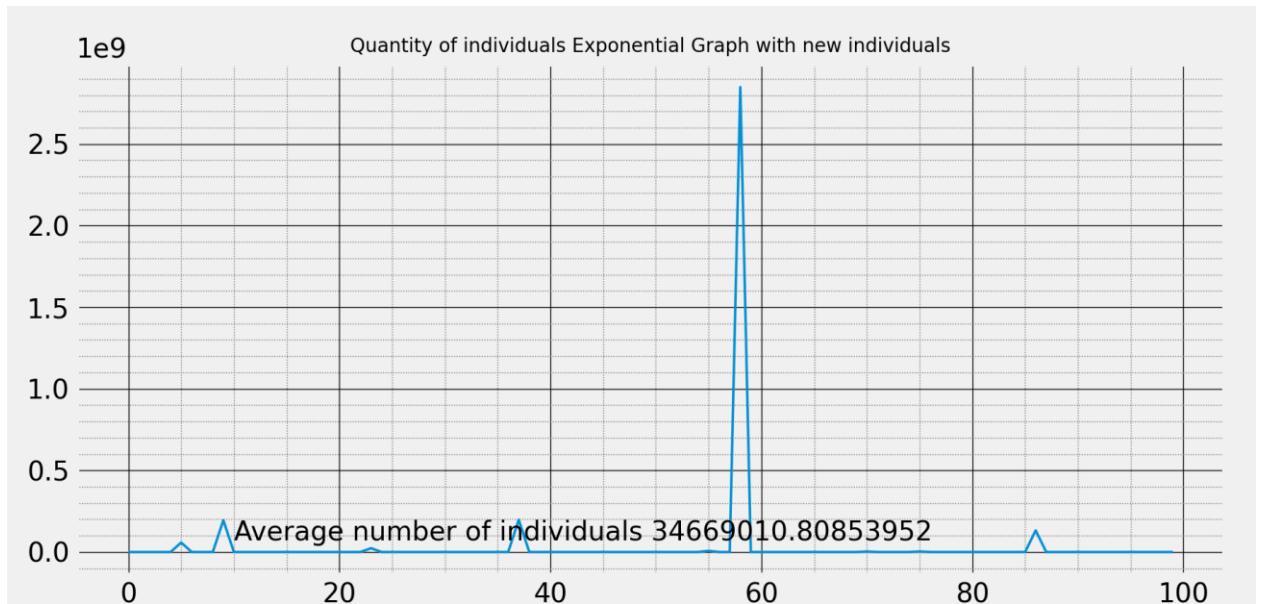


Рисунок 3.7 Чисельність 100 популяцій в експоненційній моделі з урахуванням смертності та міграції

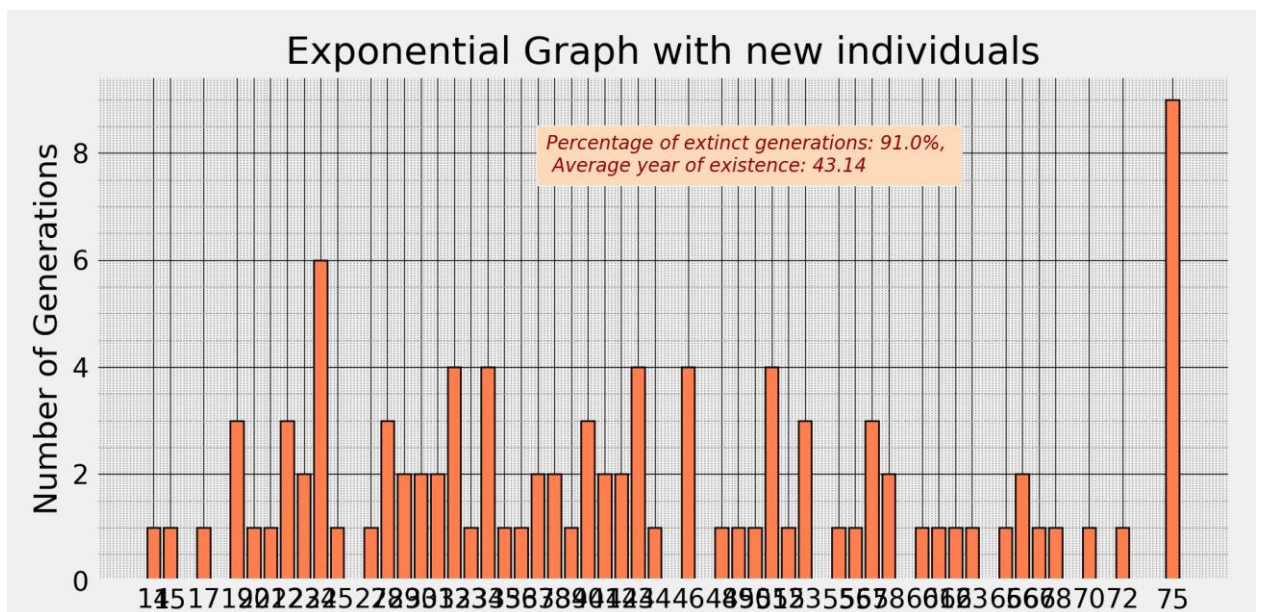


Рисунок 3.8 Роки існування популяцій експоненційної моделі з урахуванням смертності та міграції

У кожній моделі доволі великий відсоток популяцій вимирає, що є доволі логічним, враховуючи те, що період спостереження є доволі тривалим. Якщо ж ми спостерігатимемо за популяціями впродовж меншого періоду часу, можна зробити припущення, що менший відсоток популяцій помре.

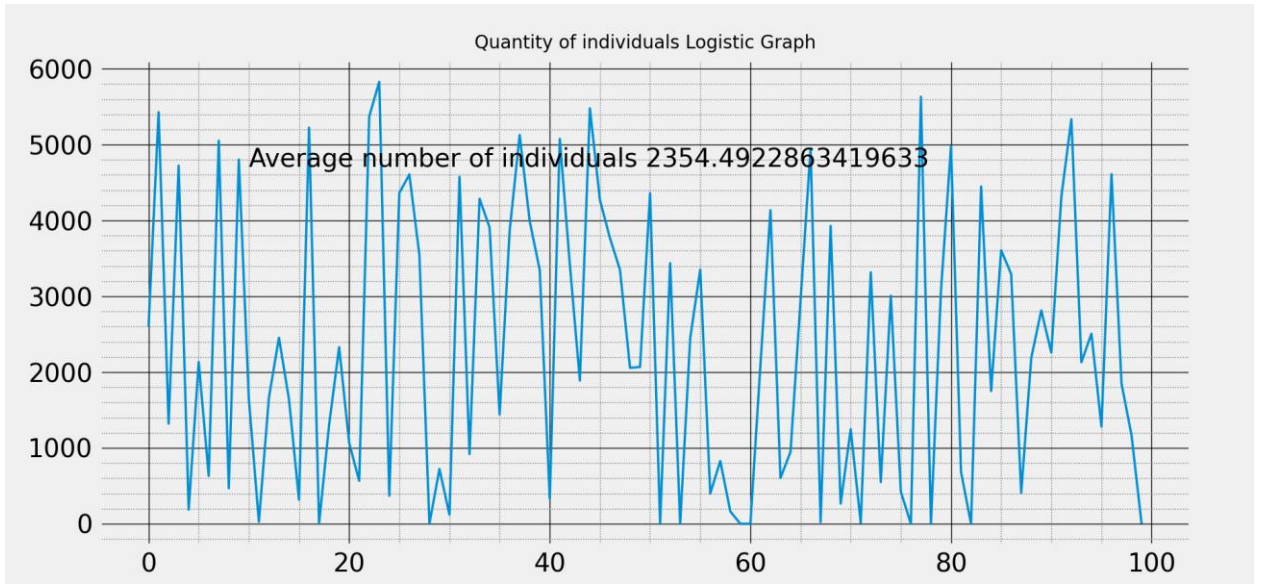


Рисунок 3.9 Чисельність 100 популяцій у логістичній моделі з урахуванням смертності, спостереження триває 15 моментів часу

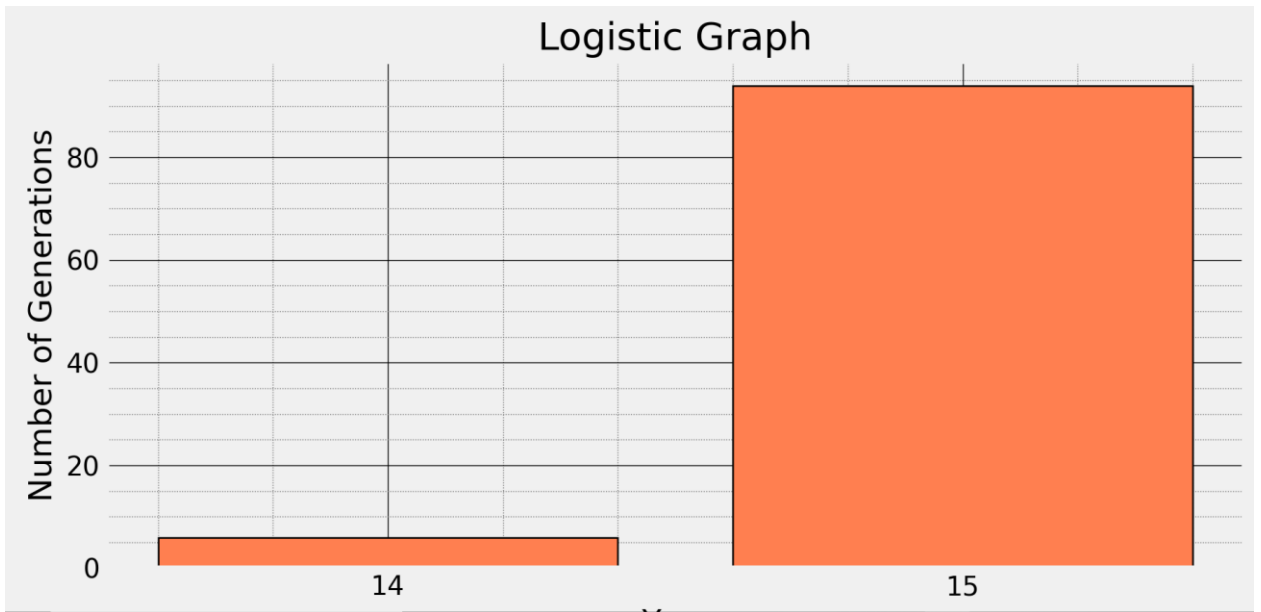


Рисунок 3.10 Роки існування популяцій логістичної моделі з урахуванням смертності, спостереження триває 15 моментів часу

Середні значення чисельності для моделей, де є прихід міграція, є більшими за ті, де його немає, що відповідає реальним уявленням про те, як міняється динаміка популяції.

Висновки

У даному розділі був проведений порівняльний аналіз 8 моделей, побудованих на основі моделей Ферхюльста-П'єра та експоненційної моделі. Основне дослідження було зроблене для моделей із випадковим збуренням. Був знайдений середні значення чисельності популяцій, тривалості життя популяцій та відсоток популяцій, які припинили своє існування. Також було проведено дослідження того, як різні параметри впливають тривалість життя популяцій.

Великий вплив на імовірність виживання популяції грає зовнішнє збурення. Залежно від обставин, в яких знаходиться популяція, відсоток значень, відмінних від 1, може варіюватися. Чим більший цей відсоток, тим більш імовірно популяція загине за якийсь проміжок часу.

Можна зробити такий висновок, що експоненційна модель, навіть із накладеними обмеженнями є не надто реалістичною. А модель Ферхюльста-П'єра краще відображає поведінку популяції. Серед побудованих моделей найкращою, найбільш чіткою та тією, що найкраще описує характер динаміки чисельності популяцій є логістична модель зі смертю особин через фіксовану кількість років, міграцією та зовнішнім збуренням.

РОЗДІЛ 4

ФУНКЦІОНАЛЬНО-ВАРТІСНИЙ АНАЛІЗ ПРОГРАМНОГО ПРОДУКТУ

У даному розділі проводиться оцінка основних характеристик програмного продукту, розробленого для вирішення задач прогнозування динаміки популяцій.

Нижче наведено аналіз різних варіантів реалізації модулю з метою вибору оптимальної, з огляду при цьому як на економічні фактори, так і на характеристики продукту, що впливають на продуктивність роботи і на його сумісність з апаратним забезпеченням. Для цього було використано апарат функціонально-вартісного аналізу.

Функціонально-вартісний аналіз (ФВА) – це технологія, яка дозволяє оцінити реальну вартість продукту або послуги незалежно від організаційної структури компанії. ФВА проводиться з метою виявлення резервів зниження витрат за рахунок ефективніших варіантів виробництва, кращого співвідношення між споживчою вартістю виробу та витратами на його виготовлення. Для проведення аналізу використовується економічна, технічна та конструкторська інформація.

Алгоритм функціонально-вартісного аналізу включає в себе визначення послідовності етапів розробки продукту, визначення повних витрат (річних) та кількості робочих часів, визначення джерел витрат та кінцевий розрахунок вартості програмного продукту.

4.1 Постановка задачі проектування

У роботі застосовується метод ФВА для проведення техніко-економічного аналізу розробки динаміки популяцій. Оскільки рішення

стосовно проектування та реалізації компонентів, що розробляється, впливають на всю систему, кожна окрема підсистема має її задовольняти. Тому фактичний аналіз представляє собою аналіз функцій програмного продукту, призначеного для збору, обробки та проведення аналізу даних по популяціях.

Технічні вимоги до програмного продукту є наступні:

- функціонування на персональних комп'ютерах із стандартним набором компонентів;
- зручність та зрозумілість для користувача;
- швидкість обробки даних та доступ до інформації в реальному часі;
- можливість зручного масштабування та обслуговування;
- мінімальні витрати на впровадження програмного продукту.

4.2 Обґрунтування функцій програмного продукту

Головна функція F_0 – розробка програмного продукту, який вирішує задачу прогнозування динаміки популяцій та будує його модель. Беручи за основу цю функцію, можна виділити наступні:

F_1 – вибір мови програмування;

F_2 – вибір середовища розробки.

Кожна з цих функцій має декілька варіантів реалізації:

Функція F_1 :

а) Python

б) C++

Функція F_2 :

а) Jupyter Notebook;

б) Visual Studio Code.

в) PyCharm IDE

г) Google Colaboratory

Варіанти реалізації основних функцій наведені у морфологічній карті системи (рис. 4.1).

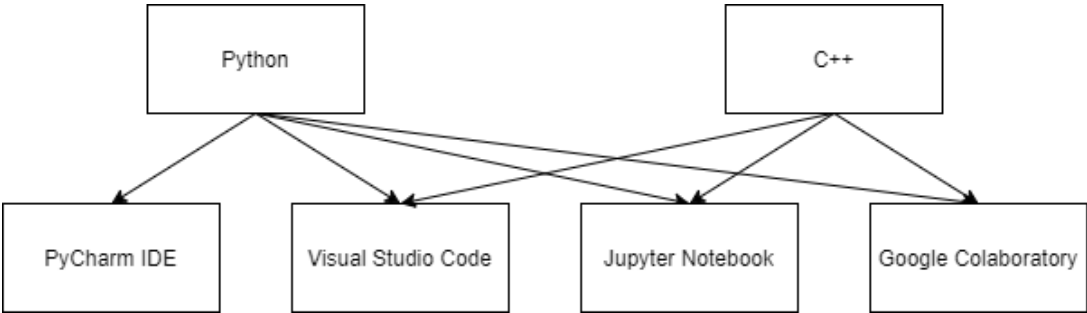


Рисунок 4.1 – Морфологічна карта

Морфологічна карта відображає множину всіх можливих варіантів основних функцій.

Таблиця 4.1 - Позитивно-негативна матриця

Функції	Варіанти реалізації	Переваги	Недоліки
F_1	A	Швидка розробка програми, доступність бібліотек, кросплатформеність	Низька швидкість роботи, особливо, якщо потрібно обробляти велику кількість даних
	B	Код швидко виконується	Іде багато часу на розробку програми

Продовження таблиці 4.1

Функції	Варіанти реалізації	Переваги	Недоліки
F_2	<i>A</i>	Підтримується багатьма мовами програмування, запускається на будь-якому сервері	Відсутня можливість працювати без мережі
	<i>B</i>	Надійне середовище, має багато інструментів, підтримує багато мов програмування	Додатковий час на інсталяцію та вивчення
	<i>B</i>	Зручний процес дебагу	Підтримує лише одну мову програмування
	<i>Г</i>	Не потребує інсталяції на комп'ютері, хмарне зберігання	Імовірна втрата даних через тимчасову сесію, є можливість перезатерти зміни іншої людини

На основі цієї карти будуюмо позитивно-негативну матрицю варіантів основних функцій (Таб.4.1). Робимо висновок, що при розробці програмного продукту деякі варіанти реалізації функцій варто відкинути, тому що вони не відповідають поставленим перед програмним продуктом задачам. Ці варіанти відзначені у морфологічній карті.

Функція F_1 :

Перевагу віддаємо швидкості вивчення, простоті використання та наявності стандартних бібліотек для обчислення. Для спрощення роботи по написанню коду варіант Б має бути відкинтий.

Функція F_2 :

Відкинемо варіанти В та Г.

Таким чином, будемо розглядати такий варіанти реалізації ПП:

$$F_{1a} - F_{2a}$$

$$F_{1a} - F_{2б}$$

Для оцінювання якості розглянутих функцій обрана система параметрів, описана нижче.

4.3 Обґрунтування системи параметрів ПП

На основі даних, розглянутих вище, визначаються основні параметри вибору, які будуть використані для розрахунку коефіцієнта технічного рівня.

Для того, щоб охарактеризувати програмний продукт, будемо використовувати наступні параметри:

- X_1 – швидкодія мови програмування;
- X_2 – об'єм пам'яті для обчислень та збереження даних;
- X_3 – час навчання даних;
- X_4 – потенційний об'єм програмного коду.

Гірші, середні і кращі значення параметрів вибираються на основі вимог замовника й умов, що характеризують експлуатацію ПП як показано у таблиці 4.2.

Таблиця 4.2 - Основні параметри ПП

Назва Параметра	Умовні позначення	Одиниці виміру	Значення параметра		
			гірші	середні	кращі
Швидкодія мови програмування	X_1	оп/мс	9000	16000	22000
Об'єм пам'яті	X_2	Мб	420	240	128
Час попередньої обробки даних	X_3	мс	5	4	3

Продовження таблиці 4.2

Назва Параметра	Умовні позначення	Одиниці виміру	Значення параметра		
			гірші	середні	кращі
Потенційний об’єм програмного коду	X4	кількість рядків коду	1200	800	500

За даними таблиці 4.2 будуються графічні характеристики параметрів –
рис. 4.2 – рис. 4.5

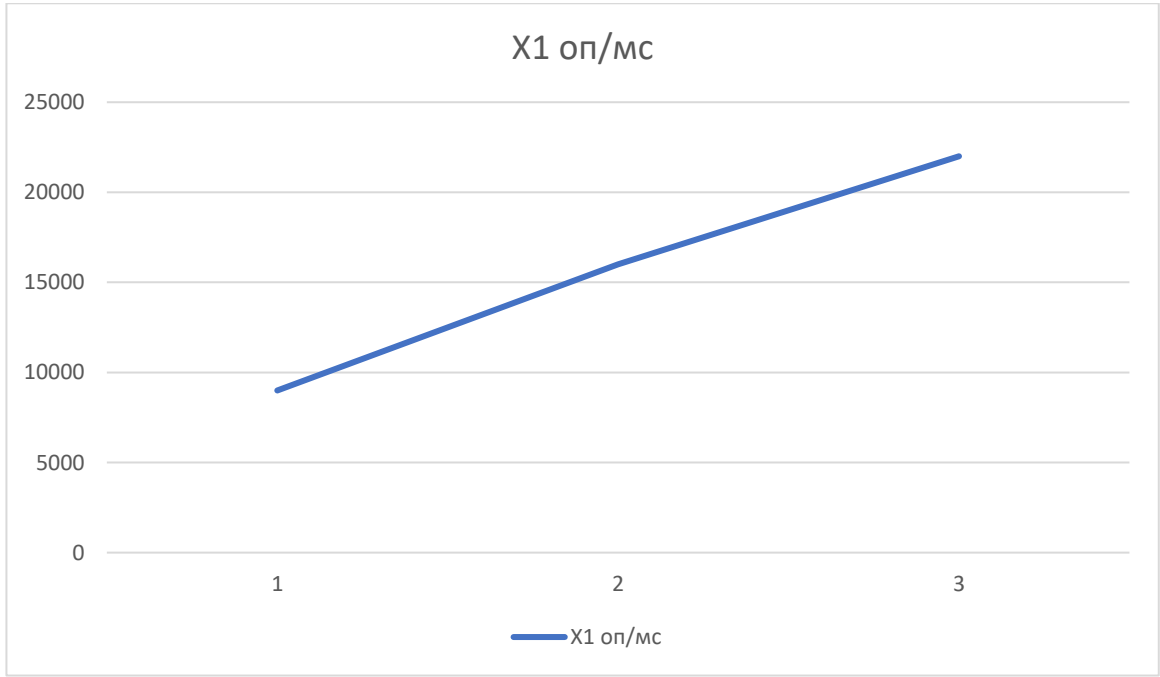


Рисунок 4.2 – X1, швидкодія мови програмування

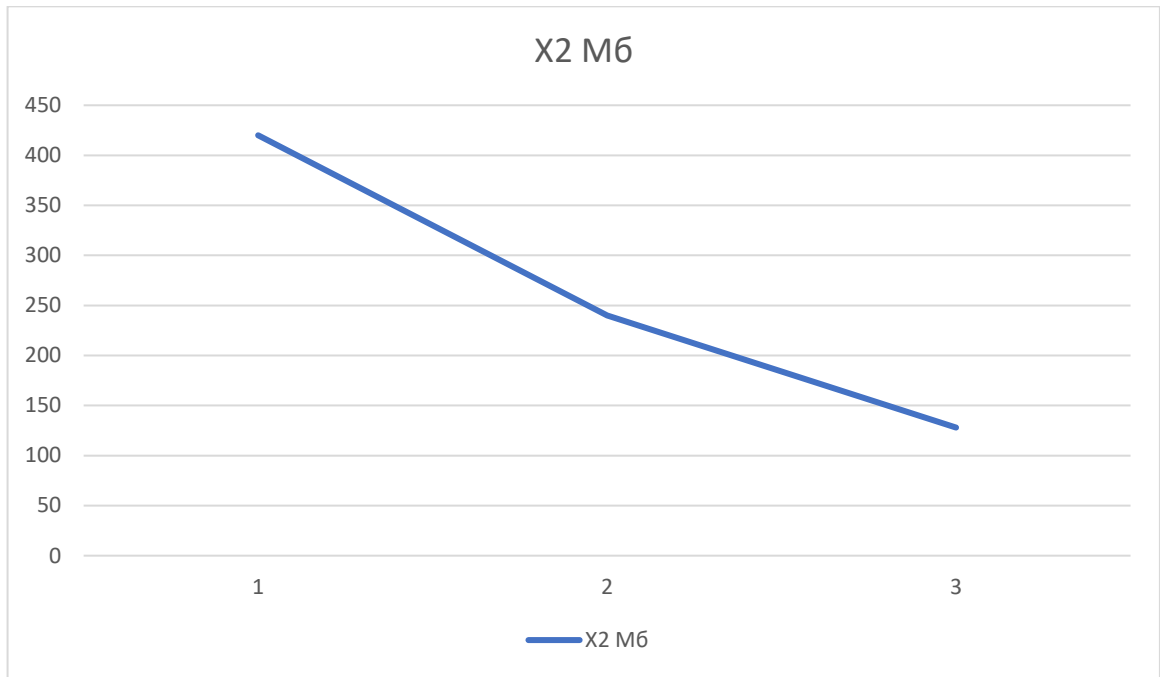


Рисунок 4.3 – X2, об'єм пам'яті

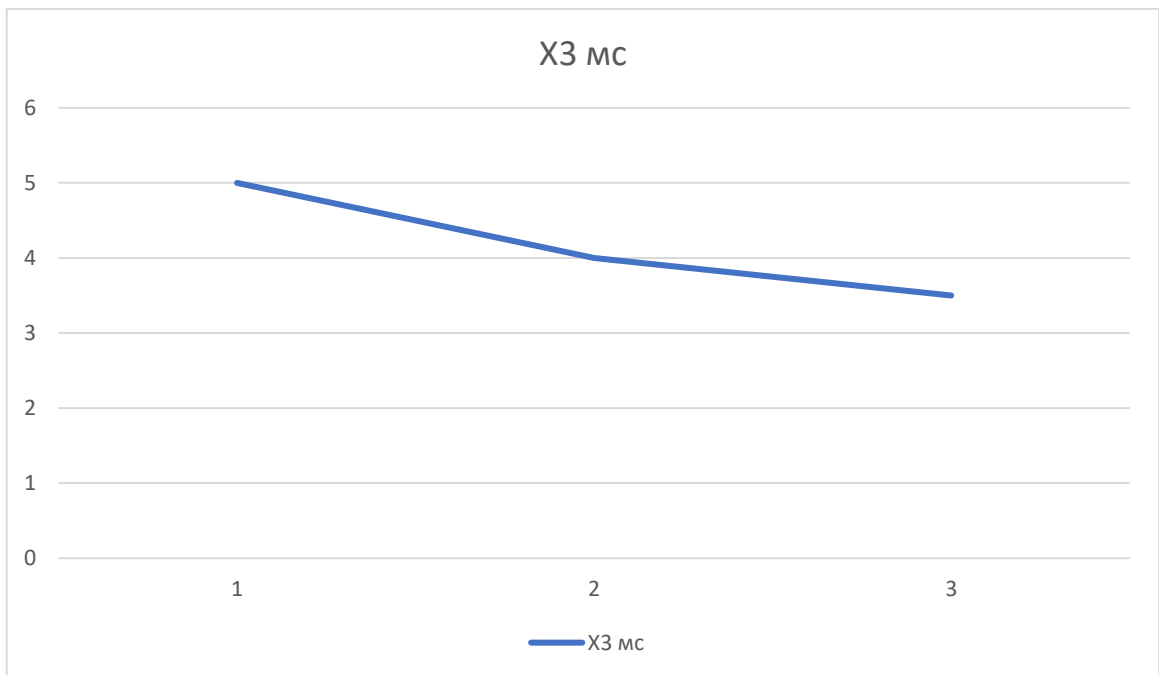


Рисунок 4.4 – X3, час попередньої обробки даних



Рисунок 4.5 – X4, потенційний об'єм програмного коду

4.4 Аналіз експертного оцінювання параметрів

Після детального обговорення й аналізу кожний експерт оцінює ступінь важливості кожного параметру для конкретно поставленої цілі – розробка програмного продукту, який дає найбільш точні результати при знаходженні параметрів моделей адаптивного прогнозування і обчислення прогнозних значень.

Значимість кожного параметра визначається методом попарного порівняння. Оцінку проводить експертна комісія із 7 людей. Визначення коефіцієнтів значимості передбачає:

- визначення рівня значимості параметра шляхом присвоєння різних рангів;
- перевірку придатності експертних оцінок для подальшого використання;
- визначення оцінки попарного пріоритету параметрів;
- обробку результатів та визначення коефіцієнту значимості.

Результати експертного ранжування наведені у таблиці 4.3.

Таблиця 4.3 - Результати ранжування параметрів

Позначення параметра	Назва параметра	Одиниці виміру	Ранг параметра за оцінкою експерта							Сума рангів R_i	Відхилення Δ_i	Δ_i^2
			1	2	3	4	5	6	7			
X_1	Швидкодія мови програмування	Оп/мс	4	3	2	4	5	4	5	27	2,5	6,25
X_2	Об'єм пам'яті	Мб	2	1	3	1	2	1	2	13	-11,5	132,25
X_3	Час попередньої обробки даних	мс	5	3	5	5	4	5	3	29	4,5	20,25
Час попередньої обробки даних	мс	5	3	5	5	4	5	3	29	4,5	20,25	Час попередньої обробки даних
Потенційний об'єм програмного коду	Кількість рядків коду	3	5	4	3	5	4	4	29	4,5	20,25	Потенційний об'єм програмного коду
Разом		12	15	15	14	14	14	14	98	0	179	Разом

Для перевірки степені достовірності експертних оцінок, визначимо наступні параметри:

а) сума рангів кожного з параметрів і загальна сума рангів:

$$R_i = \sum_{j=1}^N r_{ij} R_{ij} = \frac{Nn(n+1)}{2} = 98, \quad (4.1)$$

де N – число експертів,
 n – кількість параметрів;
 б) середня сума рангів:

$$T = \frac{1}{n} R_{ij} = 24,5 \quad (4.2)$$

в) відхилення суми рангів кожного параметра від середньої суми рангів:

$$\Delta_i = R_i - T. \quad (4.3)$$

Сума відхилень по всім параметрам повинна дорівнювати 0;

г) загальна сума квадратів відхилення:

$$S = \sum_{i=1}^N \Delta_i^2 = 179. \quad (4.4)$$

Порахуємо коефіцієнт узгодженості:

$$W = \frac{12S}{N^2(n^3 - n)} = \frac{12 \cdot 179}{7^2(4^3 - 4)} = 0,73 > W_k = 0,67. \quad (4.5)$$

Ранжування можна вважати достовірним, тому що знайдений коефіцієнт узгодженості перевищує нормативний, котрий дорівнює 0,67.

Скориставшись результатами ранжирування, проведемо попарне порівняння всіх параметрів і результати занесемо у таблицю 4.4.

Таблиця 4.4 - Попарне порівняння параметрів.

Параметри	Експерти							Кінцева оцінка	Числове значення
	1	2	3	4	5	6	7		
X1 і X2	>	>	<	>	>	>	>	>	1,5
X1 і X3	<	=	<	<	>	<	>	<	0,5
X1 і X4	>	<	<	>	=	=	>	>	1,5
X2 і X3	<	<	<	<	<	<	<	<	0,5
X2 і X4	<	<	<	<	<	<	<	<	0,5
X3 і X4	>	<	>	>	<	>	<	>	1,5

Числове значення, що визначає ступінь переваги i -го параметра над j -тим, a_{ij} визначається по формулі:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1.5 \text{ при } X_i > X_j \\ 1.0 \text{ при } X_i = X_j \\ 0.5 \text{ при } X_i < X_j \end{cases} \quad (4.6)$$

З отриманих числових оцінок переваги складемо матрицю $A = \| a_{ij} \|$.

Для кожного параметра зробимо розрахунок вагомості K_{ei} за наступними формулами:

$$K_{Bi} = \frac{b_i}{\sum_{i=1}^n b_i} \quad (4.7)$$

$$b_i = \sum_{i=1}^N a_{ij} \quad (4.8)$$

Відносні оцінки розраховуються декілька разів доти, поки наступні значення не будуть незначно відрізнятися від попередніх (менше 2%). На другому і наступних кроках відносні оцінки розраховуються за наступними формулами:

$$K_{bi} = \frac{b'_i}{\sum_{i=1}^n b'_i}, \quad (4.9)$$

$$b'_i = \sum_{j=1}^N a_{ij} b_j \quad (4.10)$$

.Як видно з таблиці 4.5, різниця значень коефіцієнтів вагомості не перевищує 2%, тому більшої кількості ітерацій не потрібно.

Таблиця 4.5 - Розрахунок вагомості параметрів

Параметрих _i	Параметрих _j				Перша ітер.		Друга ітер.		Третя ітер	
	X1	X2	X3	X4	b_i	K_{bi}	b_i^1	K_{bi}^1	b_i^2	K_{bi}^2
X1	1,0	1,5	0,5	1,5	4,5	0,36	17,75	0,25	73,38	0,25
X2	0,5	1,0	1,5	0,5	3,5	0,28	15,75	0,22	65,63	0,23
X3	1,5	1,5	1,0	1,5	5,5	0,44	22,75	0,33	93,6	0,32
X4	0,5	1,5	0,5	1,0	3,5	0,28	13,75	0,2	57,63	0,2
Всього:					12,5	1	70	1	290,25	1

4.5 Аналіз рівня якості варіантів реалізації функцій

Визначаємо рівень якості кожного варіанту виконання основних функцій окремо.

Абсолютні значення параметрів X2 (Об'єм пам'яті), X3 (час попередньої обробки даних) та X4 (потенційний об'єм програмного коду) відповідають технічним вимогам умов функціонування даного ПП.

Абсолютне значення параметра X1 (швидкість роботи мови програмування) обрано не найгіршим.

Коефіцієнт технічного рівня для кожного варіанта реалізації ПП розраховується так (таблиця 5.7):

$$K_K(j) = \sum_{i=1}^n K_{\epsilon i,j} B_{i,j}, \quad (4.11)$$

де n – кількість параметрів;

$K_{\epsilon i}$ – коефіцієнт вагомості i -го параметра;

B_i – оцінка i -го параметра в балах.

Таблиця 4.6 - Розрахунок показників рівня якості варіантів реалізації основних функцій ПП

Основні функції	Варіант реалізації функції	Параметри	Абсолютне значення параметра	Бальна оцінка параметра	Коефіцієнт вагомості параметра	Коефіцієнт рівня якості
F1	А	X1	9000	7	0,25	1,75
F2	А	X2	128	4	0,23	0,92
	Б	X2	240	2	0,32	0,64

За даними з таблиці 4.6 за формулою:

$$K_K = K_{\text{ТУ}}[F_{1k}] + K_{\text{ТУ}}[F_{2k}] + \dots + K_{\text{ТУ}}[F_{zk}], \quad (4.12)$$

визначаємо рівень якості кожного з варіантів:

$$K_{K1} = 1,5 + 1,15 + 1,6 = 2,67,$$

$$K_{K2} = 1,5 + 0,64 + 1,6 = 2,39.$$

Як видно з розрахунків, кращим є перший варіант, для якого коефіцієнт технічного рівня має найбільше значення.

4.6 Економічний аналіз варіантів розробки ПП

Для визначення вартості розробки ПП спочатку проведемо розрахунок трудомісткості.

Всі варіанти включають в себе два окремих завдання:

1. Розробка проекту програмного продукту;
2. Розробка програмної оболонки;

Завдання 1 за ступенем новизни відноситься до групи А, завдання 2 – до групи Б. За складністю алгоритми, які використовуються в завданні 1 належать до групи 1; а в завданні 2 – до групи 3.

Для реалізації завдання 1 використовується довідкова інформація, а завдання 2 використовує інформацію у вигляді даних.

Проведемо розрахунок норм часу на розробку та програмування для кожного з завдань.

Загальна трудомісткість обчислюється як

$$T_0 = T_P \cdot K_{\Pi} \cdot K_{СК} \cdot K_M \cdot K_{СТ} \cdot K_{СТ.М}, \quad (4.13)$$

де T_P – трудомісткість розробки ПП;

K_{Π} – поправочний коефіцієнт;

$K_{СК}$ – коефіцієнт на складність вхідної інформації;

K_M – коефіцієнт рівня мови програмування;

$K_{СТ}$ – коефіцієнт використання стандартних модулів і прикладних програм;

$K_{СТ.М}$ – коефіцієнт стандартного математичного забезпечення

Для першого завдання, виходячи із норм часу для завдань розрахункового характеру ступеню новизни А та групи складності алгоритму 1, трудомісткість дорівнює: $T_P = 75$ людино-днів. Поправочний коефіцієнт, який враховує вид нормативно-довідкової інформації для першого завдання:

$K_{\Pi} = 1.7$. Поправочний коефіцієнт, який враховує складність контролю вхідної та вихідної інформації для всіх семи завдань рівний 1: $K_{СК} = 1$. Оскільки при розробці першого завдання використовуються стандартні модулі, врахуємо це за допомогою коефіцієнта $K_{СТ} = 0.8$. Тоді загальна трудомісткість програмування першого завдання дорівнює:

$$T_1 = 75 \cdot 1.7 \cdot 0.8 = 102 \text{ людино-днів.}$$

Проведемо аналогічні розрахунки для подальших завдань.

Для другого завдання (використовується алгоритм третьої групи складності, степінь новизни Б), тобто $T_P = 18$ людино-днів, $K_{\Pi} = 0.9$, $K_{СК} = 1$, $K_{СТ} = 0.8$:

$$T_2 = 18 \cdot 0.9 \cdot 0.8 = 12.96 \text{ людино-днів.}$$

Складаємо трудомісткість відповідних завдань для кожного з обраних варіантів реалізації програми, щоб отримати їх трудомісткість:

$$T_I = (102 + 12.96 + 4.8 + 12.96) \cdot 8 = 1061,76 \text{ людино-годин.}$$

$$T_{II} = (102 + 12.96 + 6.91 + 12.96) \cdot 8 = 1078.64 \text{ людино-годин.}$$

Найбільш високу трудомісткість має варіант II.

В розробці беруть участь два програмісти з окладом 15000 грн., один аналітик в області даних з окладом 17500. Визначимо середню зарплату за годину за формулою:

$$C_{\text{ч}} = \frac{M}{T_m \cdot t} \text{ грн.}, \quad (4.14)$$

де M – місячний оклад працівників;
 T_m – кількість робочих днів тиждень;
 t – кількість робочих годин в день.

$$C_{\text{ч}} = \frac{15000 + 15000 + 17500}{3 \cdot 21 \cdot 8} = 94,24 \text{ грн.} \quad (4.15)$$

Тоді, розрахуємо заробітну плату за формулою:

$$C_{\text{зп}} = C_{\text{ч}} \cdot T_i \cdot K_d, \quad (4.16)$$

де $C_{\text{ч}}$ – величина погодинної оплати праці програміста;
 T_i – трудомісткість відповідного завдання;
 K_d – норматив, який враховує додаткову заробітну плату.
 Зарплата розробників за варіантами становить:

$$\text{I.} \quad C_{\text{зп}} = 94.24 \cdot 1061.76 \cdot 1.2 = 120072,31 \text{ грн.}$$

$$\text{II.} \quad C_{\text{зп}} = 94.24 \cdot 1078.64 \cdot 1.2 = 121981,24 \text{ грн.}$$

Відрахування на єдиний соціальний внесок становить 22%:

$$\text{I.} \quad C_{\text{вд}} = C_{\text{зп}} \cdot 0.22 = 120072,31 \cdot 0.22 = 26415,9 \text{ грн.}$$

$$\text{II.} \quad C_{\text{вд}} = C_{\text{зп}} \cdot 0.22 = 121981,24 \cdot 0.22 = 26935,87 \text{ грн.}$$

Тепер визначимо витрати на оплату однієї машино-години. (C_M)

Так як одна ЕОМ обслуговує одного програміста з окладом 15000 грн.,
 з коефіцієнтом зайнятості 0,2 то для однієї машини отримаємо:

$$C_{\Gamma} = 12 \cdot M \cdot K_3 = 12 \cdot 15000 \cdot 0,2 = 36000 \text{ грн.}$$

З урахуванням додаткової заробітної плати:

$$C_{3П} = C_{\Gamma} \cdot (1 + K_3) = 36000 \cdot (1 + 0,2) = 43200 \text{ грн.}$$

Відрахування на соціальний внесок:

$$C_{ВІД} = C_{3П} \cdot 0,22 = 43200 \cdot 0,22 = 9504 \text{ грн.}$$

Амортизаційні відрахування розраховуємо при амортизації 25% та вартості ЕОМ – 20000 грн.

$$C_A = K_{TM} \cdot K_A \cdot Ц_{ПР} = 1,15 \cdot 0,25 \cdot 20000 = 5750 \text{ грн.,}$$

де K_{TM} – коефіцієнт, який враховує витрати на транспортування та монтаж приладу у користувача;
 K_A – річна норма амортизації;
 $Ц_{ПР}$ – договірна ціна приладу.

Витрати на ремонт та профілактику розраховуємо як:

$$C_P = K_{TM} \cdot Ц_{ПР} \cdot K_P = 1,15 \cdot 20000 \cdot 0,05 = 1150 \text{ грн.,}$$

де K_P – відсоток витрат на поточні ремонти.

Ефективний годинний фонд часу ПК за рік розраховуємо за формулою:

$$T_{ЕФ} = (D_K - D_B - D_C - D_P) \cdot t_3 \cdot K_B = (365 - 104 - 12 - 16) \cdot 8 \cdot 0,9 =$$

$$= 1677.6 \text{ годин,}$$

- де D_K – календарна кількість днів у році;
 D_B, D_C – відповідно кількість вихідних та святкових днів;
 D_P – кількість днів планових ремонтів устаткування;
 t – кількість робочих годин в день;
 K_B – коефіцієнт використання приладу у часі протягом зміни.

Витрати на оплату електроенергії розраховуємо за формулою:

$$C_{\text{ЕЛ}} = T_{\text{ЕФ}} \cdot N_C \cdot K_3 \cdot C_{\text{ЕН}} = 1677.6 \cdot 0,3 \cdot 0,2 \cdot 3,52 = 354,3 \text{ грн.,}$$

- де N_C – середньо-споживча потужність приладу;
 K_3 – коефіцієнтом зайнятості приладу;
 $C_{\text{ЕН}}$ – тариф за 1 КВт-годин електроенергії.

Накладні витрати розраховуємо за формулою:

$$C_H = C_{\text{ПР}} \cdot 0.67 = 20000 \cdot 0,67 = 13400 \text{ грн.}$$

Тоді, річні експлуатаційні витрати будуть:

$$C_{\text{ЕКС}} = C_{\text{ЗП}} + C_{\text{ВІД}} + C_A + C_P + C_{\text{ЕЛ}} + C_H, \quad (4.17)$$

$$C_{\text{ЕКС}} = 43200 + 9504 + 5750 + 1150 + 354,3 + 13400 = 73358,3 \text{ грн.}$$

Собівартість однієї машино-години ЕОМ дорівнюватиме:

$$C_{M-\Gamma} = C_{EKC} / T_{EF} = 73358,3 / 1677,6 = 43,73 \text{ грн/год.}$$

Оскільки в даному випадку всі роботи, які пов'язані з розробкою програмного продукту ведуться на ЕОМ, витрати на оплату машинного часу, в залежності від обраного варіанта реалізації, складає:

$$C_M = C_{M-\Gamma} \cdot T, \quad (4.18)$$

$$\text{I.} \quad C_M = 43,73 \cdot 1061,76 = 46430,76 \text{ грн.}$$

$$\text{II.} \quad C_M = 43,73 \cdot 1078,64 = 47168,93 \text{ грн.}$$

Накладні витрати складають 67% від заробітної плати:

$$C_H = C_{ЗП} \cdot 0,67, \quad (4.19)$$

$$\text{I.} \quad C_H = 120072,31 \cdot 0,67 = 80448,45 \text{ грн.}$$

$$\text{II.} \quad C_H = 121981,24 \cdot 0,67 = 81727,43 \text{ грн.}$$

Отже, вартість розробки ПП за варіантами становить:

$$C_{ПП} = C_{ЗП} + C_{ВІД} + C_M + C_H, \quad (4.20)$$

$$\text{I.} \quad C_{ПП} = 120072,31 + 26415,9 + 46430,76 + 80448,45 = 273367,42 \text{ грн.}$$

$$\text{II.} \quad C_{ПП} = 121981,24 + 26935,87 + 47168,93 + 81727,43 = 277813,47 \text{ грн.}$$

4.7 Вибір кращого варіанту ПП техніко-економічного рівня

Розрахуємо коефіцієнт техніко-економічного рівня за формулою:

$$K_{\text{ТЕР}j} = K_{kj} / C_{\Phi j}, \quad (4.21)$$

$$K_{\text{ТЕР}1} = 2,67 / 273367,42 = 9,77 \cdot 10^{-6},$$

$$K_{\text{ТЕР}2} = 2,39 / 277813,47 = 8,6 \cdot 10^{-6}.$$

Як бачимо, найбільш ефективним є перший варіант реалізації програми з коефіцієнтом техніко-економічного рівня $K_{\text{ТЕР}1} = 9,77 \cdot 10^{-6}$.

Після виконання функціонально-вартісного аналізу програмного комплексу що розроблюється, можна зробити висновок, що з альтернатив, що залишились після першого відбору двох варіантів виконання програмного комплексу оптимальним є перший варіант реалізації програмного продукту. У нього виявився найкращий показник техніко-економічного рівня якості $K_{\text{ТЕР}} = 8,52 \cdot 10^{-6}$.

Цей варіант реалізації програмного продукту має такі параметри:

- мова програмування – Python;
- використання стандартного інтерфейсу візуалізації, швидкість розробки

Даний варіант виконання програмного комплексу дає користувачу непоганий функціонал і швидкодію.

4.8 Висновки

Проведено повний функціонально-вартісний аналіз програмного продукту. Визначено та проведено оцінку основних функцій програмного продукту. Визначено параметри, які характеризують програмний продукт. Проведено експертне оцінювання параметрів та аналіз якості варіантів реалізації функцій.

Проведено економічний аналіз варіантів розробки – трудомісткість, витрати на заробітну плату та інші витрати.

На основі аналізу вибрано варіант реалізації програмного продукту.

ВИСНОВКИ

На сьогоднішній день тема вивчення динаміки популяцій є дуже актуальною у світі біології та демографії. Біологи та демографи вирішують проблеми з геть різних боків – біологи переймаються видами тварин, що зникають, а демографи проблемою перенаселення планети. Тим не менш, вони мають дещо спільне – математичний апарат та математичні моделі, винайдені математиками.

Моделі, що були побудовані та досліджені, є лише маленьким кроком до глибокого вивчення динаміки чисельності популяцій та того, що на неї впливає.

Мабуть, оптимальної моделі не існує, адже вона була б перенасичена параметрами, які б точно почали корелювати один з одним. Тим не менш, кожна з них враховує свої певні моменти. Надалі, залежно від проблеми, яку науковець прагне вирішити, він буде обирати модель, яка пасує йому більше. Отже, розвиток людства дійшов до такого рівня, що ми маємо нарешті почати брати відповідальність за всі дії, які робимо із навколишнім світом. І бережливо ставитися до тварин, які живуть коло нас – одна зі справді важливих тем для побудови справді здорового суспільства.

СПИСКИ ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Арнольд В. И. Теория катастроф / Владимир Игоревич Арнольд. – Москва: Наука, 1990. – 128 с.
2. Шильников Л. П. Гомоклинические траектории: от Пуанкаре до наших дней / Леонид Павлович Шильников. – Москва: ФАЗИС, 2003. – 465 с.
3. Базыкин А. Д. Математическая биофизика взаимодействующих популяций / Александр Дмитриевич Базыкин. – Москва: Наука, 1985. – 181 с.
4. Бигон М. Экология. Особи, популяции и сообщества. Том 1 / М. Бигон, Д. Харпер, К. Таунсенд. – Москва: Мир, 1989. – 667 с.
5. Бигон М. Экология. Особи, популяции и сообщества. Том 2 / М. Бигон, Д. Харпер, К. Таунсенд. – Москва: Мир, 1989. – 477 с.
6. Пайтген Х. Красота фракталов. Образы комплексных динамических систем / Х. Пайтген, Г. Рихтер. – Москва: Мир, 1993.
7. Ризниченко Г. Ю. Математические модели биологических продукционных процессов / Г. Ю. Ризниченко, А. Б. Рубин. – Москва: МГУ, 1993. – 301 с.
8. Свирижев Ю. М. Устойчивость биологических сообществ / Ю. М. Свирижев, Д. О. Логофет. – Москва: Наука, 1978. – 352 с.
9. Капица С. П. Синергетика и прогнозы будущего / С. П. Капица, С. П. Курдюмов, Г. Г. Малинецкий. – Москва: Эдиториал УРСС, 2001. – 288 с.
10. Verhulst P. Notice sur la loi que la population poursuit dans son accroissement / P.F Verhulst., 1838.
11. Some further notes on the use of matrices in population mathematics [Електронний ресурс]. – 1948. – Режим доступу до ресурсу: <https://academic.oup.com/biomet/article-abstract/35/3-4/213/280269?redirectedFrom=fulltext>.
12. Malthus T. An essay on the principal of Population / Thomas Robert Malthus., 1798.

13. May R. When two and two make four: nonlinear phenomena in ecology / Robert May. – London, 1986. – (B228).
14. Лутц М. Изучаем Python. Том 1 / Марк Лутц., 2019. – 832 с.
15. Лутц М. Изучаем Python. Том 2 / Марк Лутц., 2020. – 720 с.
16. Маккини У. Python и анализ данных / Уэс Маккини., 2020. – 540 с.

Додаток А. Лістинг програмного модулю

create_excel_table.py

```
import numpy as np
```

```
import pandas as pd
```

```
def create_table(duration_of_life, new_individuals, K, logistic_model,
    exponential, exponential_death, exponential_death_new,
    exponential_death_new_eps, exponential_death_eps, logic_death,
    logic_death_new, logic_death_new_eps, logic_death_eps, boolean):
    Logic = []
    Logic_death = []
    Logic_death_new = []
    Logic_death_new_eps = []
    Logic_death_eps = []
    Exp = []
    Exp_death = []
    Exp_death_new = []
    Exp_death_new_eps = []
    Exp_death_eps = []
    n_array = []
    for n in range (0,1000,100):
        logic_arr = []
        logic_death_arr = []
        logic_death_new_arr = []
        logic_death_new_eps_arr = []
        logic_death_eps_arr = []
        exp_arr = []
        exp_death_arr = []
        exp_death_new_arr = []
        exp_death_new_eps_arr = []
        exp_death_eps_arr = []
        r_array = []
        for R in np.linspace(0.1, 1, num=10):
            logic_arr.append((logistic_model(n, R, K))[-1])
            logic_death_arr.append((logic_death(n, R, K, duration_of_life))[-1])
            logic_death_new_arr.append((logic_death_new(n, R, K, duration_of_life,
new_individuals))[-1])
            logic_death_new_eps_arr.append((logic_death_new_eps(n, R, K,
duration_of_life, new_individuals, boolean))[-1])
            logic_death_eps_arr.append((logic_death_eps(n,R,K,duration_of_life,
boolean))[-1])
            exp_arr.append((exponential(n, R))[-1])
```

```

        exp_death_arr.append((exponential_death(n, R, duration_of_life))[-1])
        exp_death_new_arr.append((exponential_death_new(n, R,
duration_of_life, new_individuals))[-1])
        exp_death_new_eps_arr.append((exponential_death_new_eps(n, R,
duration_of_life, new_individuals, boolean))[-1])
        exp_death_eps_arr.append((exponential_death_eps(n,R,duration_of_life,
boolean))[-1])
        r_array.append(R)
        n_array.append(n)
        Logic.append(logic_arr)
        Logic_death.append(logic_death_arr)
        Logic_death_new.append(logic_death_new_arr)
        Logic_death_new_eps.append(logic_death_new_eps_arr)
        Logic_death_eps.append(logic_death_eps_arr)
        Exp.append(exp_arr)
        Exp_death.append(exp_death_arr)
        Exp_death_new.append(exp_death_new_arr)
        Exp_death_new_eps.append(exp_death_new_eps_arr)
        Exp_death_eps.append(exp_death_eps_arr)

log = pd.DataFrame(Logic,index = n_array,columns = r_array)
log_death = pd.DataFrame(Logic_death,index = n_array,columns = r_array)
log_death_new = pd.DataFrame(Logic_death_new,index = n_array,columns =
r_array)
log_death_new_eps = pd.DataFrame(Logic_death_new_eps,index =
n_array,columns = r_array)
log_death_eps = pd.DataFrame(Logic_death_eps,index = n_array,columns =
r_array)
expon = pd.DataFrame(Exp,index = n_array,columns = r_array)
expon_death = pd.DataFrame(Exp_death,index = n_array,columns = r_array)
expon_death_new = pd.DataFrame(Exp_death_new,index = n_array,columns =
r_array)
expon_death_new_eps = pd.DataFrame(Exp_death_new_eps,index =
n_array,columns = r_array)
expon_death_eps = pd.DataFrame(Exp_death_eps,index = n_array,columns =
r_array)

with pd.ExcelWriter('models.xlsx') as writer:
    log.to_excel(writer, sheet_name = 'Logic')
    log_death.to_excel(writer, sheet_name = 'Logic death')
    log_death_new.to_excel(writer, sheet_name = 'Logic death new_individuals')
    log_death_new_eps.to_excel(writer, sheet_name = 'Logic death
new_individuals eps')
    log_death_eps.to_excel(writer, sheet_name = 'Logic death eps')

```

```

    expon.to_excel(writer, sheet_name = 'Exponential')
    expon_death.to_excel(writer, sheet_name = 'Exponential death')
    expon_death_new.to_excel(writer, sheet_name = 'Exponential death
new_individuals')
    expon_death_new_eps.to_excel(writer, sheet_name = 'Exponen death
new_individuals eps')
    expon_death_eps.to_excel(writer, sheet_name = 'Exponential death eps')

```

diploma.py

```

from operator import length_hint
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from numpy.lib.function_base import append, quantile
from create_excel_table import create_table
import math

#np.random.seed(seed=91) # not extinct
#np.random.seed(seed=1) # extinct

N_initial = 600
r = 0.3
K = 7500
duration_of_life = 12
years_of_observation = 75
conditional = 2000
new_individuals = 500

def epsilon():
    number_of_catastrophes = int(0.15 * years_of_observation)
    number_of_ok = int(0.85 * years_of_observation)

    if (number_of_catastrophes + number_of_ok != years_of_observation):
        number_of_ok += years_of_observation - number_of_catastrophes -
number_of_ok
    arr_rand = np.random.sample(number_of_catastrophes)
    arr_1 = np.array([1 for i in range(number_of_ok)])
    eps = np.concatenate((arr_1, arr_rand))
    np.random.shuffle(eps)
    print ('eps', len(eps), 'ok', len(arr_1), 'not', len(arr_rand))
    return eps

```

```
noise = epsilon()
```

```
def Riker ():
```

```
    arr_logistic = [N_initial]
    for i in range(1, years_of_observation):
        x = arr_logistic[i - 1] + r * arr_logistic[i - 1] * math.exp(((1-(arr_logistic[i - 1]
/ K)))
        arr_logistic.append(x)
    return arr_logistic
```

```
def exponential_model(N_initial,r):
```

```
    arr = [N_initial]
    for i in range(1, years_of_observation):
        x = (1 + r) * arr[i - 1]
        arr.append(x)
    return arr
```

```
def exponential_model_with_death(N_initial,r,duration_of_life):
```

```
    arr = [N_initial]
    population_growth = [0]
    for i in range (1, years_of_observation):
        x = (1 + r) * arr[i - 1]
        if (i >= duration_of_life):
            x -= population_growth[i - duration_of_life]
        population_growth.append(x - arr[i - 1])
        if(x <= 0):
            arr.append(0)
            return arr
        arr.append(x)
    return arr
```

```
def exponential_model_with_death_new_individuals(N_initial, r, duration_of_life,
new_individuals):
```

```
    arr = [N_initial]
    population_growth = [0]
    for i in range(1, years_of_observation):
        x = (1 + r) * arr[i - 1]
        if (i >= duration_of_life):
            x -= population_growth[i - duration_of_life]
        if (x <= conditional):
            x += new_individuals
        population_growth.append(x - arr[i - 1])
        if (x <= 0):
```

```

        arr.append(0)
        return arr
    arr.append(x)
    return arr

```

```

def exponential_model_with_death_new_individuals_noise(N_initial, r,
duration_of_life, new_individuals, noise_diff):
    arr = [N_initial]
    population_growth = [0]
    if (noise_diff == True):
        eps = epsilon()
    else:
        eps = noise
    for i in range(1, years_of_observation):
        x = (1 + r) * arr[i - 1] * eps[i]
        if (i >= duration_of_life):
            x -= population_growth[i - duration_of_life]*eps[i-duration_of_life]
        if (x <= conditional):
            x += new_individuals
        population_growth.append(x - arr[i - 1])
        if (x <= 0):
            arr.append(0)
            return arr
        arr.append(x)
    return arr

```

```

def exponential_model_with_death_noise(N_initial, r, duration_of_life,
noise_diff):
    arr = [N_initial]
    delta = [0]
    if (noise_diff == True):
        eps = epsilon()
    else:
        eps = noise
    for i in range(1, years_of_observation):
        x = (1 + r) * arr[i - 1] * eps[i]
        if (i >= duration_of_life):
            x -= delta[i - duration_of_life]*eps[i-duration_of_life]
        delta.append(x - arr[i - 1])
        if (x <= 0):
            arr.append(0)
            return arr
        arr.append(x)
    return arr

```

```
def logistic_model(N_initial, r, K):
    arr_logistic=[N_initial]
    for i in range (1, years_of_observation):
        x = arr_logistic[i - 1] + r * arr_logistic[i - 1] * (1-(arr_logistic[i - 1] / K))
        arr_logistic.append(x)
    return arr_logistic
```

```
def logistic_model_death(N_initial, r, K, duration_of_life):
    arr_logistic = [N_initial]
    population_growth = [0]
    for i in range (1, years_of_observation):
        x = arr_logistic[i - 1] + r * arr_logistic[i - 1] * (1-(arr_logistic[i - 1] / K))
        if(i >= duration_of_life):
            x -= population_growth[i-duration_of_life]
        population_growth.append(x - arr_logistic[i - 1])
        if(x <= 0):
            arr_logistic.append(0)
            return arr_logistic
        arr_logistic.append(x)
    return arr_logistic
```

```
def logistic_model_death_new_individuals(N_initial, r, K, duration_of_life,
new_individuals):
    arr_logistic=[N_initial]
    population_growth=[0]
    for i in range (1, years_of_observation):
        x = arr_logistic[i - 1] + r * arr_logistic[i - 1] *(1-(arr_logistic[i - 1] / K))
        if(i >= duration_of_life):
            x -= population_growth[i - duration_of_life]
        if(x <= conditional):
            x+=new_individuals
        population_growth.append(x - arr_logistic[i - 1])
        if(x<=0):
            arr_logistic.append(0)
            return arr_logistic
        arr_logistic.append(x)
    return arr_logistic
```

```
def logistic_model_death_new_individuals_noise(N_initial, r, K, duration_of_life,
new_individuals, noise_diff):
    arr_logistic = [N_initial]
    population_growth = [0]
    if (noise_diff == True):
```

```

    eps = epsilon()
else:
    eps = noise
for i in range (1, years_of_observation):
    x = (arr_logistic[i - 1] + r * arr_logistic[i - 1] * (1 - (arr_logistic[i - 1] / K))) *
eps[i]
    if (i >= duration_of_life):
        x -= population_growth[i - duration_of_life]*eps[i-duration_of_life]
    if (x <= conditional):
        x += new_individuals
    population_growth.append(x - arr_logistic[i - 1])
    if (x <= 0):
        arr_logistic.append(0)
    return arr_logistic
    arr_logistic.append(x)
return arr_logistic

def logistic_model_death_noise(N_initial, r, K, duration_of_life, noise_diff):
    arr_logic = [N_initial]
    delta = [0]
    if (noise_diff == True):
        eps = epsilon()
    else:
        eps = noise
    for i in range (1, years_of_observation):
        x = (arr_logic[i - 1] + r * arr_logic[i - 1] * (1 - (arr_logic[i - 1] / K))) * eps[i]
        if (i >= duration_of_life):
            x -= delta[i - duration_of_life]*eps[i-duration_of_life]
        delta.append(x - arr_logic[i - 1])
        if (x <= 0):
            arr_logic.append(0)
        return arr_logic
        arr_logic.append(x)
    return arr_logic

def bar_plot(arr, xlabel, ylabel, title, bool):
    plt.style.use('fivethirtyeight')
    fig, ax = plt.subplots(figsize=(8, 5))

    gens = np.zeros(len(np.unique(arr)))
    for i, el in enumerate(np.unique(arr)):
        gens[i] = np.count_nonzero(arr == el)
    dead_gens_perc = np.count_nonzero(arr < years_of_observation) * 100 /
len(arr)

```

```

plt.minorticks_on()
ax.bar(np.unique(arr), gens, edgecolor='#000000', color='coral', linewidth=0.9)
ax.set_xticks(np.unique(arr))
ax.set(xlabel=xlabel, ylabel=ylabel, title=title)
ax.grid(True, which='major', linestyle='-', color='black', lw=0.5)
ax.grid(True, which='minor', lw=0.5, linestyle=':', color='dimgrey')
if (bool == True):
    ax.text(0.5*max(np.unique(arr)), 0.85*max(gens), f'Percentage of extinct
generations: {dead_gens_perc}%, \n Average year of existence: {np.mean(arr)}',
    fontsize=10, style='italic', color='darkred', bbox={'facecolor': 'peachpuff',
'alpha': 1, 'pad': 5})
else:
    ax.text(0.5*max(np.unique(arr)), 0.85*max(gens), f'Average number of
individuals: {np.mean(arr)}',
    fontsize=10, style='italic', color='darkred', bbox={'facecolor': 'peachpuff',
'alpha': 1, 'pad': 5})
plt.show()

def population_plot(popul, title, boolean):
    plt.style.use('fivethirtyeight')
    fig, ax = plt.subplots(figsize=(8, 5))
    plt.minorticks_on()
    ax.grid(True, which='major', linestyle='-', color='black', lw=0.5)
    ax.grid(True, which='minor', lw=0.5, linestyle=':', color='dimgrey')

    if (popul[-1] == 0 and boolean==True):
        plt.plot(len(popul)-1, popul[-1], 'x', ms=10, color='red')
        plt.text(10, np.mean(popul)*2, 'Population became extinct')
    if (boolean == False):
        plt.text(10, np.mean(popul)*2, f'Average number of individuals
{np.mean(popul)}')
    plt.plot(popul, linewidth=1.3)
    plt.title(title, fontsize = 10)
    plt.show()

def logic_iteration(N_populations):
    length_arr = []
    quantity_arr = []
    for i in range(N_populations):
        arr = logistic_model_death_noise(N_initial, r, K, duration_of_life, True)
        quantity_arr.append(arr[-1])
        length_arr.append(len(arr))
    return np.array(length_arr), np.array(quantity_arr)

```

```

def logic_iteration_new(N_populations):
    length_arr = []
    quantity_arr = []
    for i in range(N_populations):
        arr = logistic_model_death_new_individuals_noise(N_initial, r, K,
duration_of_life, new_individuals, True)
        quantity_arr.append(arr[-1])
        length_arr.append(len(arr))
    return np.array(length_arr), np.array(quantity_arr)

def exp_iteration(N_populations):
    length_arr = []
    quantity_arr = []
    for i in range(N_populations):
        arr = exponential_model_with_death_noise(N_initial, r, duration_of_life,
True)
        quantity_arr.append(arr[-1])
        length_arr.append(len(arr))
    return np.array(length_arr), np.array(quantity_arr)

def exp_iteration_new(N_populations):
    length_arr = []
    quantity_arr = []
    for i in range(N_populations):
        arr = exponential_model_with_death_new_individuals_noise(N_initial, r,
duration_of_life, new_individuals, True)
        quantity_arr.append(arr[-1])
        length_arr.append(len(arr))
    return np.array(length_arr), np.array(quantity_arr)

if __name__ == '__main__':
    #population_plot(Riker(),'Riker model', True)

    logic_iteration_length, logic_iteration_quantity = logic_iteration(100)
    logic_iteration_new_length, logic_iteration_new_quantity =
logic_iteration_new(100)
    exp_iteration_length, exp_iteration_quantity = exp_iteration(100)
    exp_iteration_new_length, exp_iteration_new_quantity =
exp_iteration_new(100)

```

```

    population_plot(logic_iteration_quantity, 'Quantity of individuals Logistic
Graph', False)
    population_plot(logic_iteration_new_quantity, 'Quantity of individuals Logistic
Graph with new individuals', False)
    population_plot(exp_iteration_quantity, 'Quantity of individuals Exponential
Graph', False)
    population_plot(exp_iteration_new_quantity, 'Quantity of individuals
Exponential Graph with new individuals', False)

```

```

    bar_plot(logic_iteration_length, 'Year', 'Number of Generations', 'Logistic Graph',
True)
    bar_plot(logic_iteration_new_length, 'Year', 'Number of Generations', 'Logistic
Graph with new individuals', True)
    bar_plot(exp_iteration_length, 'Year', 'Number of Generations', 'Exponential
Graph', True)
    bar_plot(exp_iteration_new_length, 'Year', 'Number of Generations', 'Exponential
Graph with new individuals', True)

```

```

    population_plot(exponential_model(N_initial, r), 'Exponential model', True)

```

```

population_plot(exponential_model_with_death(N_initial, r, duration_of_life), 'Expo
nential model with death of individuals in '+str(duration_of_life)+ ' years', True)

```

```

population_plot(exponential_model_with_death_new_individuals(N_initial, r, durat
ion_of_life, new_individuals), 'Exponential model with death of individuals in
'+str(duration_of_life)+ ' years and new '+str(new_individuals)+' individuals came',
True)

```

```

population_plot(exponential_model_with_death_new_individuals_noise(N_initial,
r, duration_of_life, new_individuals, True), 'Exponential model with death of
individuals in '+str(duration_of_life)+ ' years and new '+str(new_individuals)+'
individuals came and noise', True)

```

```

population_plot(exponential_model_with_death_noise(N_initial, r, duration_of_life,
True), 'Exponential model with death of individuals in '+str(duration_of_life)+ '
years and noise', True)

```

```

    population_plot(logistic_model(N_initial, r, K), 'Logistic model', True)
    population_plot(logistic_model_death(N_initial, r, K, duration_of_life), 'Logistic
model with death of individuals in '+str(duration_of_life)+ ' years', True)

```

```

population_plot(logistic_model_death_new_individuals(N_initial, r, K, duration_of_
life, new_individuals), 'Logistic model with death of individuals in

```

```
'+str(duration_of_life)+ ' years and new '+str(new_individuals)+' individuals came',
True)
```

```
population_plot(logistic_model_death_new_individuals_noise(N_initial,r,K,duration_of_life,new_individuals, True),'Logistic model with death of individuals in '+str(duration_of_life)+ ' years and new '+str(new_individuals)+' individuals came and noise', True)
```

```
population_plot(logistic_model_death_noise(N_initial,r,K,duration_of_life, True),'Logistic model with death of individuals in '+str(duration_of_life)+ ' years and noise', True)
```

```
population_plot(noise, 'Noise', True)
```

```
create_table(duration_of_life, new_individuals, K, logistic_model,
exponential_model, exponential_model_with_death,
exponential_model_with_death_new_individuals,
exponential_model_with_death_new_individuals_noise,
exponential_model_with_death_noise,
logistic_model_death,logistic_model_death_new_individuals,
logistic_model_death_new_individuals_noise, logistic_model_death_noise,
True)
```

Додаток Б. Презентація



Актуальність теми



Постановка задачі

Об'єкт дослідження: динаміка популяцій

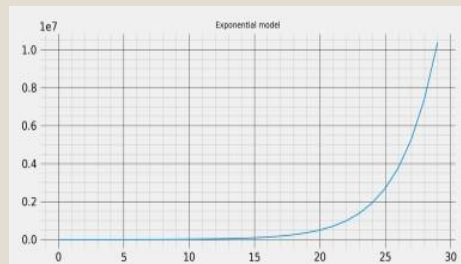
Використані моделі: математичні моделі Ферхюльста та експоненційного росту

Мета: побудувати моделі на основі моделей Ферхюльста та експоненційного росту, дослідити популяції за наявності зовнішнього випадкового впливу, порівняти кінцеву чисельність популяцій за різних моделей для різних параметрів

Відомі моделі динаміки популяцій

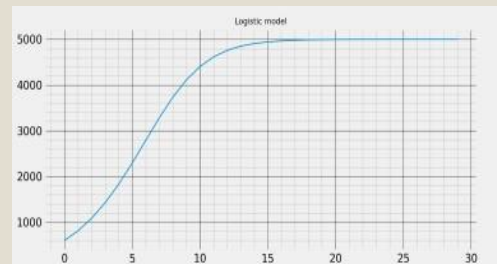
• Експоненційний ріст

$$N_{t+1} = (1 + r)N_t$$



• Логістична крива

$$N_{t+1} = rN_t \left(1 - \frac{N_t}{K}\right)$$

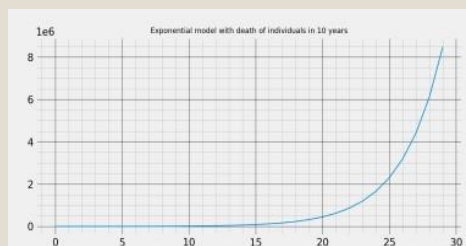


r — коефіцієнт приросту, K — ємність середовища, N_t — чисельність популяції у момент часу t

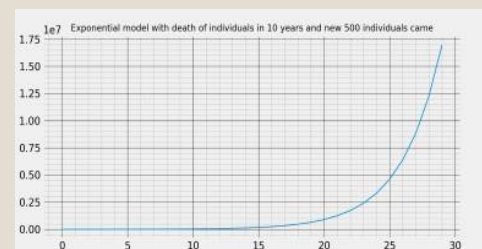
Запропоновані детерміністські моделі

Експоненційний ріст

$$N_{t+1} = (1 + r)N_t - \Delta_{t-d}$$



$$N_{t+1} = (1 + r)N_t - \Delta_{t-d} + n$$



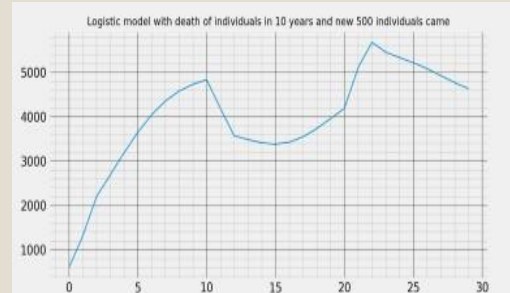
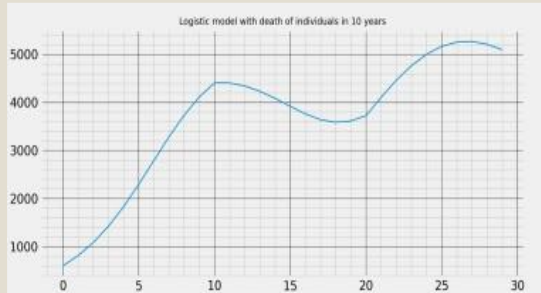
N_t — чисельність популяції у момент t , r — коефіцієнт проросту,
 d — тривалість життя особини, Δ_{t-d} — приріст популяції у момент $t - d$, n — нові особини

o

Логістична модель

$$N_{t+1} = rN_t \left(1 - \frac{N_t}{K}\right) - \Delta_{t-d}$$

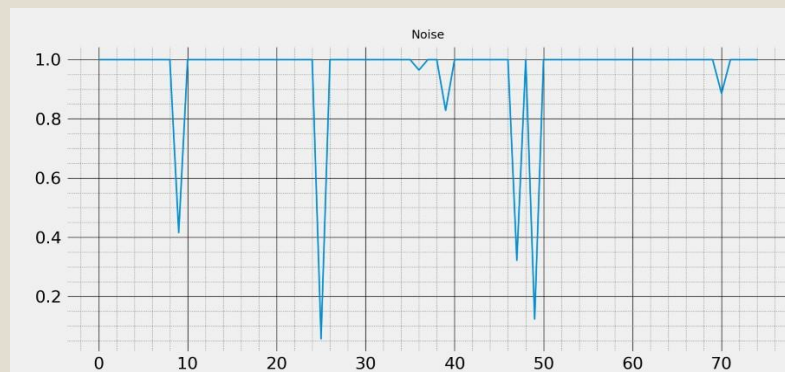
$$N_{t+1} = rN_t \left(1 - \frac{N_t}{K}\right) - \Delta_{t-d} + n$$



r – коефіцієнт приросту, K – ємність середовища, N_t – чисельність популяції у момент часу t
 d – тривалість життя особини, Δ_{t-d} – приріст популяції у момент $t - d$, n – нові особини

Випадкове збурення

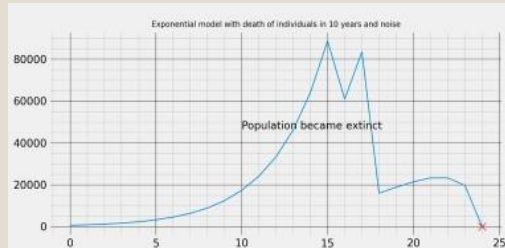
Додамо випадковий вплив на популяцію для кожного моменту часу.



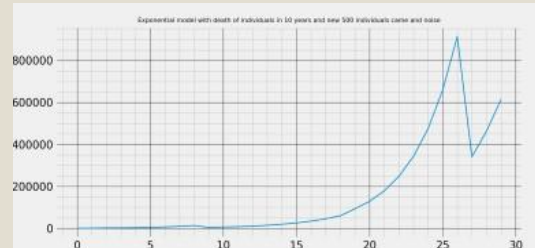
Запропоновані стохастичні моделі

Експоненційний ріст

$$N_{t+1} = (1 + r)N_t * eps - \Delta_{t-d}$$



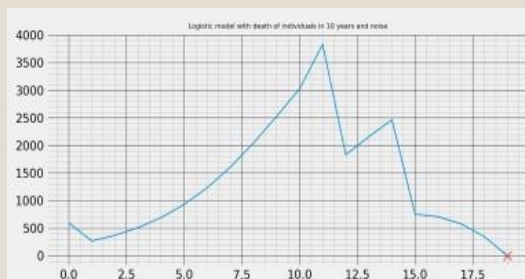
$$N_{t+1} = (1 + r)N_t * eps - \Delta_{t-d} + n$$



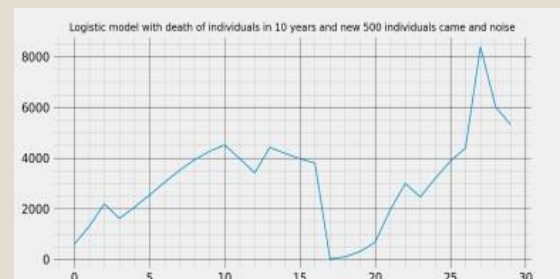
N_t – чисельність популяції у момент t , r – коефіцієнт проросту, eps – випадкове збурення
 d – тривалість життя особи, Δ_{t-d} – приріст популяції у момент $t - d$, n – нові особи

Логістична модель

$$N_{t+1} = \left(rN_t \left(1 - \frac{N_t}{K} \right) \right) * eps - \Delta_{t-d}$$



$$N_{t+1} = \left(rN_t \left(1 - \frac{N_t}{K} \right) \right) * eps - \Delta_{t-d} + n$$



r – коефіцієнт проросту, K – ємність середовища, N_t – чисельність популяції у момент часу t
 d – тривалість життя особи, Δ_{t-d} – приріст популяції у момент $t - d$, n – нові особи
 eps – випадкове збурення

Дослідження моделей із різними параметрами

	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
0	4224,858	3766,936	10962,9	11481,91	8088,493	0	0	5579,493	0	0
100	0	0	12718,56	0	9163,77	4095,3	6941,342	3307,788	0	0
200	2288,516	9339,137	0	0	4854,094	1153,623	2268,051	8764,464	0	0
300	5561,259	0	8400,065	0	0	4853,85	0	0	0	0
400	4703,629	0	1274,547	0	6424,054	0	0	0	0	0
500	3673,462	1823,166	3534,541	0	0	0	0	0	0	0
600	6445,133	4451,957	0	0	0	9387,87	0	0	0	10494,55
700	4876,016	10810,79	0	7839,722	0	1884,462	0	2443,098	0	8686,928
800	0	0	0	0	0	0	6548,124	8222,359	4045,838	0
900	0	0	0	0	0	0	0	1055,426	0	0

Логістична модель зі смертністю особин, міграцією та зовнішнім збуренням

	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
100	4150,522	9563,615	8920,08	9697,122	10478,02	10673,38	9930,763	9473,627	9806,497	9999,506
200	5382,767	9313,867	9099,45	10171,13	10681,98	10195,14	9586,225	9703,174	9964,947	10000
300	6043,103	9069,802	9357,996	10434,12	10571,81	9908,131	9589,959	9834,706	9988,926	10000
400	6474,892	8926,801	9592,619	10558,77	10416,61	9763,288	9647,425	9899,045	9995,291	10000
500	6781,754	8859,164	9789,909	10604,46	10274,75	9693,433	9704,994	9933,464	9997,613	10000
600	7009,517	8841,822	9951,301	10606,11	10156,66	9663,234	9753,32	9953,547	9998,644	10000
700	7183,4	8857,419	10081,56	10583,39	10061,31	9654,503	9792,275	9966,112	9999,165	10000
800	7319,098	8894,408	10185,81	10547,52	9985,179	9657,552	9823,488	9974,417	9999,454	10000
900	7427,107	8945,069	10268,62	10505,03	9924,665	9667,035	9848,627	9980,152	9999,626	10000

Логістична модель зі смертністю особин

	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
0	15322,26	0	0	1,49E+08	1,44E+09	6,06E+12	9,84E+12	1,35E+14	3,49E+14	4,86E+16
100	0	19845,88	0	0	0	2,77E+12	1,13E+13	1,53E+13	7,17E+14	1,55E+16
200	6025,723	0	0	3,15E+09	9,26E+08	4,4E+10	6,49E+12	7,33E+13	2,99E+15	2,84E+17
300	18923,85	0	2400363	0	0	1,6E+11	4,59E+13	1,42E+15	2,85E+14	2,85E+18
400	0	40769,56	0	8,12E+08	0	0	0	1,02E+14	1,62E+16	6,19E+17
500	0	0	0	8,92E+08	0	3,44E+10	9,63E+11	2,45E+16	4,38E+17	9,86E+16
600	15937,93	0	0	4,76E+08	5,81E+10	3,32E+13	1,82E+11	1,22E+14	7,94E+16	7,28E+18
700	6079,48	0	0	7,91E+08	2,52E+10	2,72E+12	0	1,03E+15	2,64E+16	1,75E+14
800	2705,767	0	0	1,69E+08	0	6,83E+11	0	4,28E+14	7,35E+16	1,49E+18
900	0	0	0	0	2,49E+10	1,34E+12	2E+11	2,46E+15	2,51E+15	9,22E+15

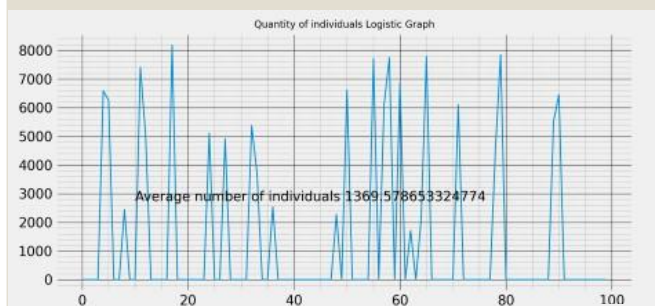
Експоненційна модель зі смертністю особин, міграцією та зовнішнім збуренням

	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
0	118813,7	27669165	3,85E+09	3,05E+11	1,67E+13	5,53E+14	1,83E+16	4,96E+17	1,12E+19	2,16E+20
100	128334,6	30436847	4,28E+09	3,44E+11	1,55E+13	6,61E+14	2,23E+16	6,11E+17	1,4E+19	2,74E+20
200	111169,6	33204529	4,71E+09	3,12E+11	1,79E+13	7,7E+14	2,62E+16	7,25E+17	1,68E+19	3,31E+20
300	120690,5	35972211	4,17E+09	3,51E+11	2,03E+13	8,79E+14	3,01E+16	8,4E+17	1,57E+19	3,17E+20
400	130211,4	31034924	4,59E+09	3,89E+11	2,26E+13	9,88E+14	3,12E+16	7,78E+17	1,85E+19	3,74E+20
500	139732,3	33802606	5,02E+09	4,28E+11	2,5E+13	8,84E+14	3,12E+16	8,93E+17	2,13E+19	4,32E+20
600	149253,2	36570288	5,45E+09	4,66E+11	2,21E+13	9,93E+14	3,51E+16	1,01E+18	2,41E+19	4,9E+20
700	130158,9	39337970	5,88E+09	4,07E+11	2,45E+13	1,1E+15	3,9E+16	1,12E+18	2,69E+19	5,47E+20
800	139679,8	42105652	5,05E+09	4,45E+11	2,68E+13	1,21E+15	4,29E+16	1,24E+18	2,97E+19	6,05E+20
900	149200,7	44873334	5,48E+09	4,84E+11	2,92E+13	1,32E+15	4,69E+16	1,35E+18	3,25E+19	6,62E+20

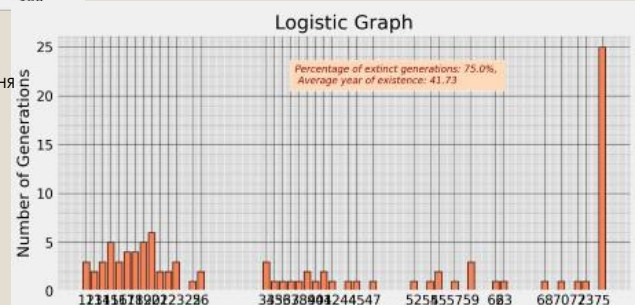
Експоненційна модель зі смертністю особин міграцією

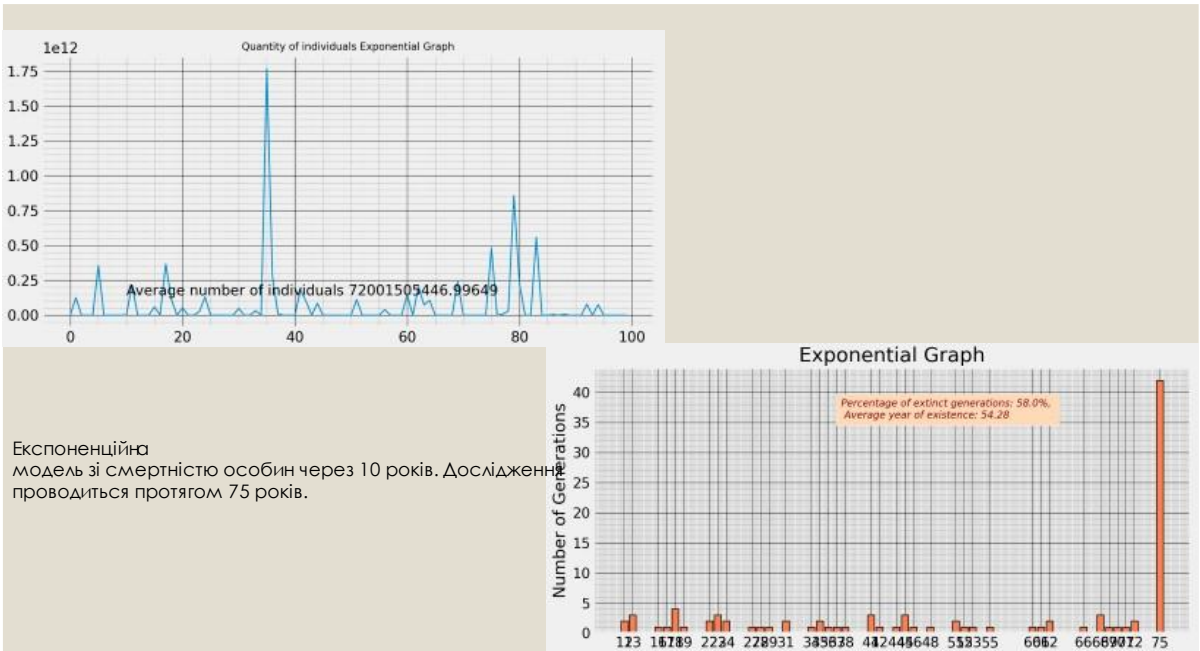
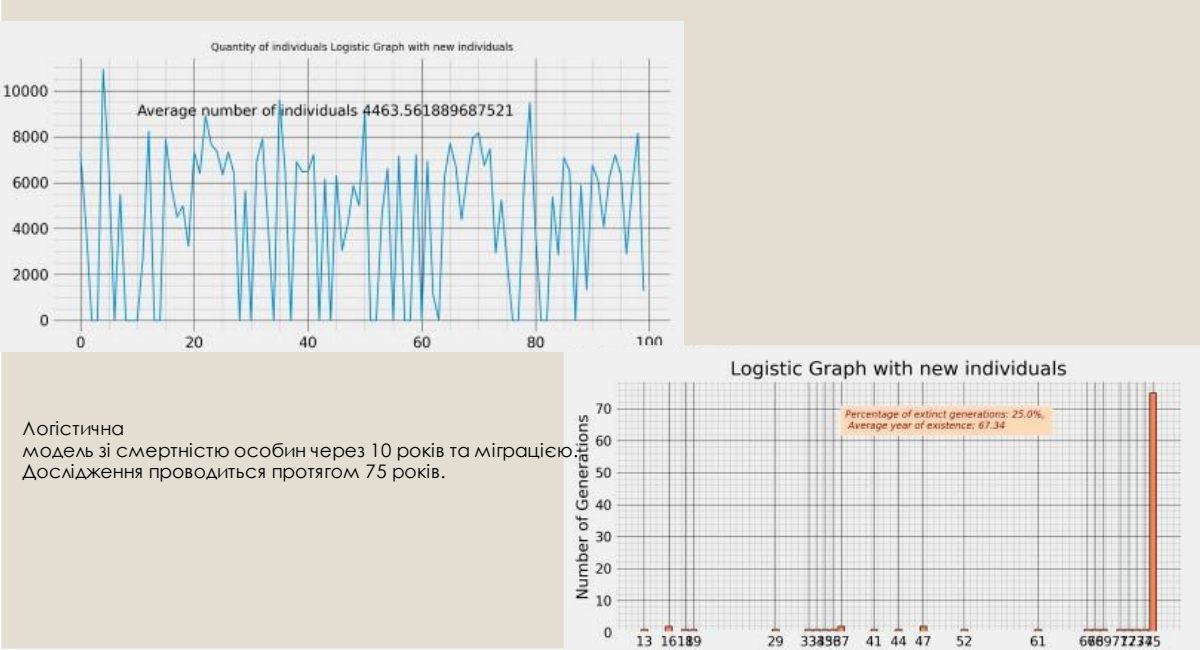
Дослідження стохастичних моделей

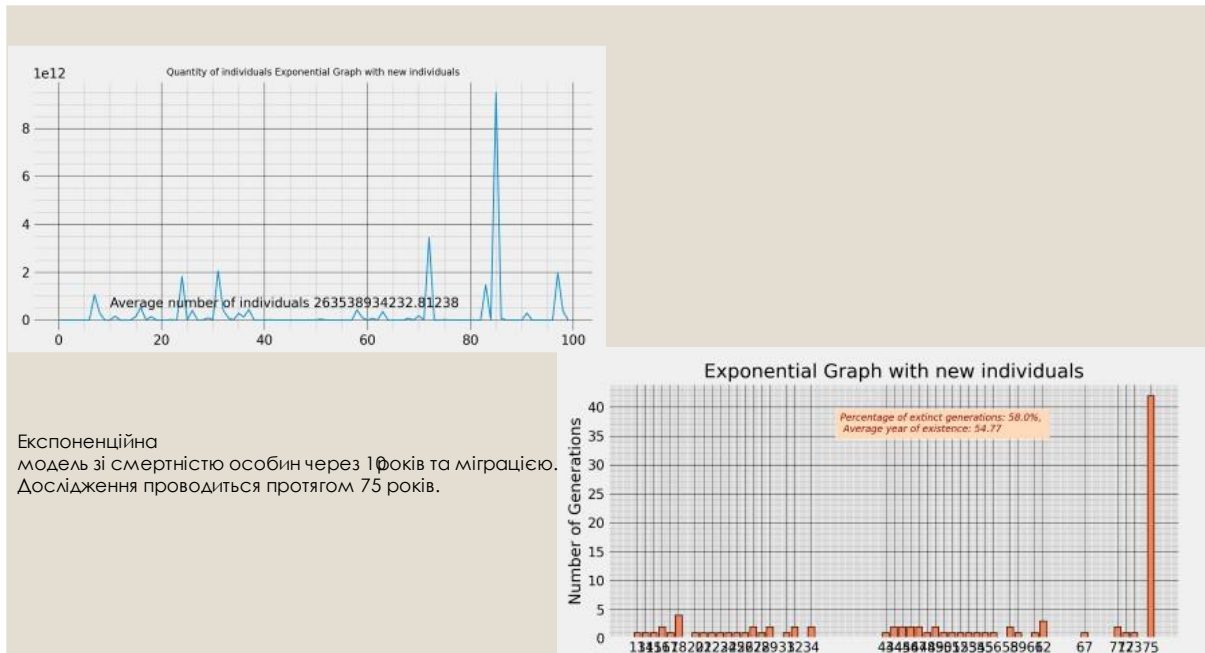
- На наступних графіках будуть представлені значення 100 популяцій, до яких було застосоване випадкове збурення: чисельність популяції на момент закінчення спостереження, кількість років, які популяція проіснувала, відсоток популяції, які припинили своє існування та середні значення.
- Дослідження проводилося за таких параметрів:
- $r = 0.4, N = 600, K = 7500, d = 10, year = 75, n = 500, cond = 2000$



Логістична модель зі смертністю особин через 10 років. Дослідження проводиться протягом 75 років.

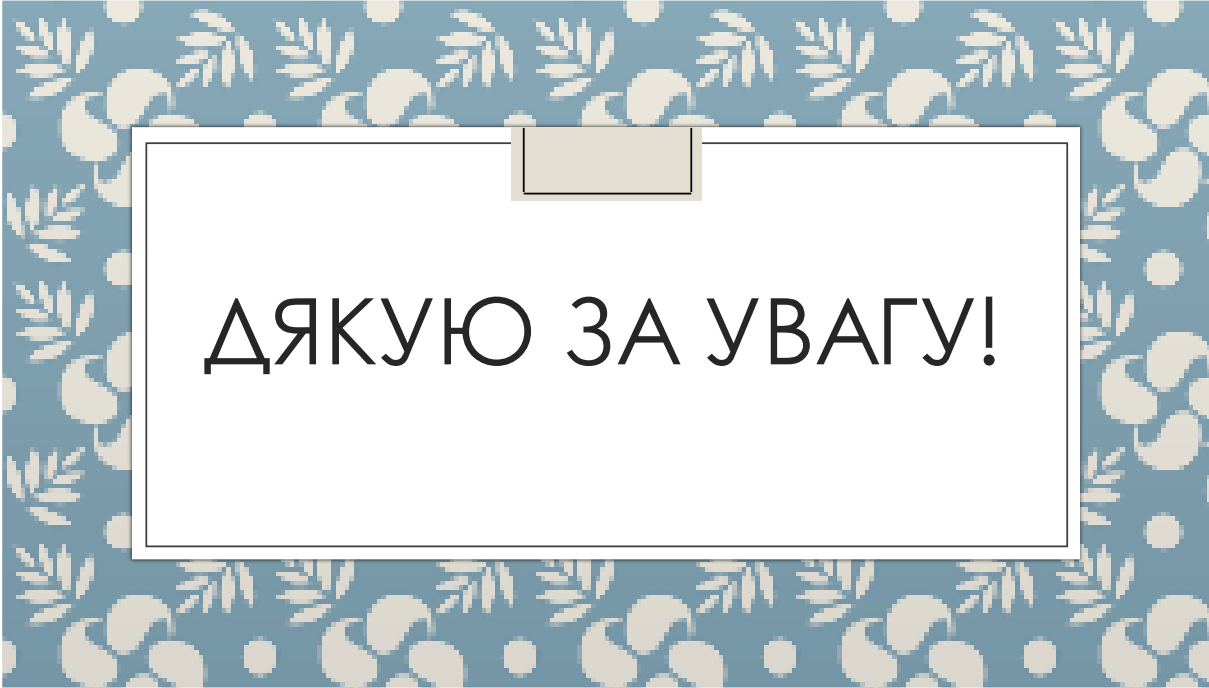






Висновки

1. Були побудовані моделі на основі експоненційної моделі та моделі Ферхюльста
2. Для проведення дослідження була написана програма мовою Python
3. За допомогою програми для стохастичних і детерміністських моделей були побудовані таблиці, в яких усі побудовані моделі розглянуті з різними параметрами: r – коефіцієнт приросту, від 0.1 до 1 з дискретністю 0.1, N – початкова чисельність популяції, від 0 до 900 з дискретністю 100.
4. Також був проведений аналіз побудованих стохастичних моделей для 100 популяцій.
5. Логістична модель зі смертю особин від старості, з міграцією та зовнішнім збуренням є найбільш наближеною до реального життя.



ДЯКУЮ ЗА УВАГУ!