Міністерство освіти і науки України

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут»

МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ
Похідна та її застосування

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
до виконання розрахункової роботи
для студентів I курсу фізико-математичного та
технічних факультетів

Київ
2008

Міністерство освіти і науки України

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут»

МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ
Похідна та її застосування

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
до виконання розрахункової роботи
для студентів I курсу фізико-математичного та технічних факультетів

Затверджено Методичною радою НТУУ «КПІ»

Київ
НТУУ «КПІ»
2008

Математичний аналіз. Похідна та її застосування [Текст]: метод. вказівки до викон. розрахунк. роботи для студ. І курсу фіз.-мат. та техн. ф-тів / Уклад.: С. О. Рущицька, Л. А. Репета, К. Ю. Мамса та ін. – К., НТУУ «КПІ», 2008. – 84 с.

Гриф надано Методичною радою НТУУ «КПІ»
(Протокол № 10 від 19.06. 2008 р.)

Н а в ч а л ь н е в и д а н н я

Математичний аналіз
Похідна та її застосування

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до виконання розрахункової роботи
для студентів І курсу фізико-математичного
та технічних факультетів

Укладачі: *Рущицька Світлана Остапівна*
Репета Леся Анатоліївна
Мамса Катерина Юріївна
Ільєнко Андрій Борисович
Орловський Ігор Володимирович

Відповідальний
редактор *В. В. Булдигін*, д-р. фіз.-мат. наук, проф.

Рецензент *В. І. Стогній,* канд. фіз.-мат. наук, доц.

За редакцією укладачів

Темплан 2008 р., поз. 2-088
Підп. до друку 25.06. 2008.

ЗАГАЛЬНІ ПОЛОЖЕННАЯ

Методичні вказівки містять теоретичні питання до колоквіуму і завдання типової розрахункової роботи за темою "Похідна та її застосування".

Робота виконується у першому семестрі. Кожен студент готує та здає усно теоретичний матеріал на колоквіумі і у письмовій формі завдання типової роботи, які вказує викладач. Зошит з розв'язаними задачами повинен бути зданий на перевірку викладачеві, який проводить практичні заняття до контрольної роботи (КР-2).

Студент, який не здав колоквіум і типову роботу, не допускається до екзамену як такий, що не виконав навчальний графік.

Титульний аркуш роботи оформляють за зразком, затвердженим кафедрою (див. Додаток).

1. Теоретичні питання

1. Означення похідної функції $y = f(x)$ у точці і односторонніх похідних. Приклад функції, для якої не існує похідна у точці.
2. Зв'язок між неперервністю і існуванням похідної у точці.
3. Фізичний і геометричний зміст похідної функції у точці. Означення і рівняння дотичної і нормалі до графіка функції у точці.
4. Правила знаходження похідних від суми, добутку і відношення функцій.
5. Похідна складеної і функції, яку задано неявно.
6. Похідна оберненої функції. Похідні основних елементарних функцій.
7. Гіперболічні функції, властивості і їх похідні. Похідна функції, яку задано параметричним чином.
8. Означення і геометричний зміст диференціала. Властивості диференціала, інваріантність форми запису.
9. Диференційовність функції у точці. Необхідні і достатні умови диференційовності функції у точці.

10. Похідні вищих порядків. Фізичний зміст другої похідної. Формули знаходження другої похідної функції, яку задано параметрично. Формула Ляйбніца знаходження похідної *n*-го порядку від добутку функцій.
11. Диференціали вищих порядків. Довести, що другий диференціал не інваріантний відносно форми запису.
12. Означення локального екстремуму функції. Теорема Ферма: необхідна умова існування локального екстремуму функції.
13. Теореми Лягранжа, Ролля, Коші про диференційовні функції, їх геометричне трактування.
14. Правила Лопіталя.
15. Невизначенності і способи знаходження границь від цих невизначеностей.
16. Формула Тейлора для многочлена.
17. Формула Тейлора для функції з залишковим членом у формі Коші.
18. Формула Тейлора для функції з залишковим членом у формі Лягранжа.
19. Формула Тейлора для функції з залишковим членом у формі Пеано.
20. Формула Маклорена для функцій $e^x, \sin x, \cos x$ з залишковим членом у формі Лягранжа.
21. Формула Маклорена для функцій $(1+x)^{\alpha}(\alpha \in \mathbb{R})$, $\ln(1+x)$ з залишковим членом у формі Лягранжа.
22. Дослідження поведінки функцій за допомогою похідних: означення вертикальної і похилої асимптот графіка функції. Необхідні і достатні умови існування похилих асимптот.
23. Означення монотонної функції на множині. Довести теорему, що монотонна функція на інтервалі може мати тільки точки розриву першого роду і їх не більше ніж злічене число.
24. Довести теорему, що монотонна функція $y = f(x)$ на інтервалі (a,b), яка набуває усіх значень між $f(a)$ і $f(b)$, є неперервною на $[a,b]$.
25. Необхідні і достатні умови монотонності функції на інтервалі.

26. Означення монотонної функції у точці. Достатні умови монотонної функції у точці.
27. Локальні екстремуми функції. Означення стаціонарної і критичної точок функції. Достатні умови існування локального екстремуму функції у критичній точці.
28. Достатні умови існування локального екстремуму функції у стаціонарній точці. Найбільше та найменше значення функції на сегменті.
29. Достатні умови існування локального екстремуму функції $f(x)$ у стаціонарній точці x_0 за умови $f''(x_0)=0$.
30. Означення опуклої функції на інтервалі. Геометричне трактування. Точки перегину.
31. Необхідні і достатні умови опуклості функції на інтервалі.
32. Необхідна умова існування точки перегину графіка функції.
33. Достатні умови існування точки перегину (сформулювати три теореми, довести одну з них).
34. Нерівність Ієнсена, механічний зміст нерівності.

2. Похідна. Формули і правила знаходження

Розглянемо функцію $y=f(x)$ з областю визначення $D(f)$, x_0 – точку скупчення $D(f)$ і окіл точки x_0: $B(x_0,\delta)= =(x_0-\delta,x_0+\delta)\subset D(f)$ $(\delta>0)$. Для $\forall x\in B(x_0,\delta)$ позначимо приріст аргумента $\Delta x=x-x_0$ $(x\neq x_0)$ і приріст функції $\Delta y=\Delta f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f(x)-f(x_0)$. Якщо існують і скінченні наступні границі $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta x>0}}\dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$, $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta x<0}}\dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$, тоді їх відповідно називають правою $(f'_+(x_0))$ похідною, лівою $(f'_-(x_0))$ похідною, похідною $(f'(x_0))$ функції $f(x)$ у точці x_0.

Для того, щоб існувала похідна функції $f(x)$ у точці x_0, необхідно і достатньо, щоб $f'_+(x_0)=f'_-(x_0)=f'(x_0)$.

Якщо $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}=\infty$, тоді функція $f(x)$ у точці x_0 має похідну рівну ∞.

Сформулюємо основні правила знаходження похідних. Якщо $\exists u'(x_0)<\infty, \exists v'(x_0)<\infty$, тоді

$$(u(x)\pm v(x))'=u'(x)\pm v'(x)\,; \quad (u(x)v(x))'=u'(x)v(x)+v'(x)u(x)\,;$$

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)'=\frac{u'(x)v(x)-v'(x)u(x)}{v^2(x)} \quad \text{за умови } v(x_0)\neq 0\,.$$

Похідні основних елементарних функцій

1. $(c)'=0 \ (c-const)$.
2. $(x^{\alpha})'=\alpha x^{\alpha-1} \ (x>0,\ \alpha\in\mathbb{R})$.
3. $(a^x)'=a^x\ln a \ (a\neq 1,\ a>0,\ x\in\mathbb{R})$.
4. $(e^x)'=e^x \ (x\in\mathbb{R})$.
5. $(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a} \ (x>0,\ a>0,\ a\neq 1)$.
6. $(\ln x)'=\dfrac{1}{x} \ (x>0)$.
7. $(\sin x)'=\cos x \ (x\in\mathbb{R})$.
8. $(\cos x)'=-\sin x \ (x\in\mathbb{R})$.
9. $(\mathrm{tg}\,x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x} \ \left(x\neq\dfrac{\pi}{2}(2n+1),\ n\in\mathbb{Z}\right)$.
10. $(\mathrm{ctg}\,x)'=-\dfrac{1}{\sin^2 x} \ (x\neq\pi n,\ n\in\mathbb{Z})$.
11. $(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \ (|x|<1)$.
12. $(\arccos x)'=\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \ (|x|<1)$.

13. $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2} \quad (x \in \mathbb{R})$.

14. $(\operatorname{arcctg} x)' = \dfrac{-1}{1+x^2} \quad (x \in \mathbb{R})$.

15. $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x \quad (x \in \mathbb{R})$, $\operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$, $\operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.

16. $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x \quad (x \in \mathbb{R})$.

17. $(\operatorname{th} x)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x} \quad (x \in \mathbb{R})$, $\operatorname{th} x = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$.

18. $(\operatorname{cth} x)' = -\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x} \quad (x \neq 0)$, $\operatorname{cth} x = \dfrac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$.

Якщо функція $y = f(x)$ має похідну у точці x_0, а функція $z = g(y)$ у точці $y_0 = f(x_0)$, тоді складена функція (композиція функцій) $z = \varphi(x) = g(f(x)) = g \circ f$ також має похідну у точці x_0 і $\varphi'(x_0) = g'(y_0) f'(x_0)$, або використавши інше позначення похідної: $\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{dz}{dy}\dfrac{dy}{dx}$; Це правило (знаходження похідної складеної функції) поширюється на композицію довільного скінченного числа функцій;

Якщо функції $x = x(t), y = y(t)$ визначені у $B(t_0, \delta)$ і параметрично визначають в околі точки $x_0 = x(t_0)$ функцію $y = y(x)$, тоді за умови $\exists x'(t_0) < \infty, \exists y'(t_0) < \infty$ і $x'(t_0) \neq 0$, функція $y = y(x)$ у точці x_0 має похідну, рівну $y'_x(x_0) = \dfrac{y'_t(t_0)}{x'_t(t_0)} \quad (y'_x(x_0) = \dfrac{dy}{dx}(x_0))$.

Якщо функцію $y = f(x)$, похідна якої існує у кожній точ-ці певного інтервала, задано неявно рівністю $F(x, y) = 0$, тоді $y'(x)$ можна знайти з рівняння $\dfrac{d}{dx} F(x, y) = 0$ (при цьому похід-ну шукають, використовуючи правило знаходження похідної складеної функції).

Приклад 1. Знайти $f'(x)$, обчисливши $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$,

якщо $f(x)=e^x\sin x$;

■ $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{e^{x+\Delta x}\sin(x+\Delta x)-e^x\sin x}{\Delta x}=$

$$=e^x\lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{\Delta x}(\sin x\cos\Delta x+\cos x\sin\Delta x)-\sin x}{\Delta x}=$$

$$=e^x\sin x\lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{\Delta x}\cos\Delta x-1}{\Delta x}+e^x\cos x\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\Delta x}{\Delta x}.$$

Знайдемо

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{\Delta x}\cos\Delta x-1}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}\cos\Delta x+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cos\Delta x-1}{\Delta x}=$$

$$=\left|\begin{array}{l}\Delta x\sim\sin\Delta x\sim e^{\Delta x}-1,\\ \Delta x\to 0\end{array}\right|=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x}\cos\Delta x+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-2\sin^2\frac{\Delta}{2}}{\Delta x}=$$

$=1-\dfrac{1}{2}\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta x^2}{\Delta x}=1+0=1$; $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\sin\Delta x}{\Delta x}=1$ (оскільки кожна границя існує і скінченна, то границя суми функцій рівна сумі границь).

Таким чином $f'(x)=(e^x\sin x)'=e^x\sin x+e^x\cos x$. ■

Приклад 2. Знайти $f'_+(t)$ і $f'_-(t)$, якщо $f(x)=\begin{cases}e^{-1/x}, & x\neq 0;\\ 0, & x=0.\end{cases}$

■ Знайдемо $f'_+(0)=\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta x>0}}\dfrac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to +0}\dfrac{f(\Delta x)-0}{\Delta x}=$

$$=\lim_{\Delta x\to +0}\frac{e^{-1/\Delta x}}{\Delta x}=[e^{-1/+0}=e^{-\infty}=\frac{1}{e^{+\infty}}=\frac{1}{\infty}=0]=0.$$

Інший спосіб. Позначимо $\dfrac{1}{\Delta x}=t$, коли $\Delta x\to 0,\ t\to+\infty$, тоді

$$f'_+(0)=\lim_{t\to+\infty}\frac{e^{-t}}{\frac{1}{t}}=\lim_{t\to+\infty}\frac{t}{e^t}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]\triangleq\lim_{t\to+\infty}\frac{(t)'}{(e^t)'}=\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{e^t}=0.$$

Знайдемо

$$f'_-(0)=\lim_{\substack{\Delta x\to0\\ \Delta x<0}}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0-}\frac{e^{-1/\Delta x}}{\Delta x}=[e^{-1/-0}=e^{+\infty}=+\infty]=$$

$=[\infty\cdot\dfrac{1}{-0}=\infty\cdot(-\infty)=-\infty]=-\infty$; Отже $f'_-(0)=-\infty,\ f'_+(0)=0$. ■

Приклад 3. Знайти $f'(x)$, якщо $y=f(x)=\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt[3]{x^4}\sin x}$

($x\neq\pi n,\ n\in\mathbb{N}$ **).**

■ Прологарифмуємо функцію: $\ln|f(x)|=z=\dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)-\dfrac{4}{3}\ln|x|-\ln|\sin x|$, тоді

$$\frac{dz}{dx}=\frac{2x}{2(1+x^2)}-\frac{4}{3}\frac{1}{x}-\frac{\cos x}{\sin x}.$$

З іншої сторони $\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{d}{dx}(\ln|y(x)|)=\dfrac{1}{y(x)}\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{y(x)}y'(x)$, тоді

$$y'(x)=y(x)\left(\frac{x}{1+x^2}-\frac{4}{3x}-\frac{\cos x}{\sin x}\right)=\frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt[3]{x^4}\sin x}\left(\frac{x}{1+x^2}-\frac{4}{3x}-\frac{\cos x}{\sin x}\right).$$ ■

Приклад 4. Знайти $y'(x)$, якщо функцію $y=y(x)$ задано неявно рівністю $(2a-x)y^2=x^3,\ y<0$.

■ Зауважимо, що $x\in(0,2a)$. Запишемо $F(x,y)=(2a-x)y^2-x^3$, $F(x,y)=0$.

Знайдемо $\dfrac{d}{dx}F(x,y)=-1\cdot y^2+(2a-x)2yy'(x)-3x^2=0$.

Тоді $y'(x)=\dfrac{3x^2+y^2}{2y(2a-x)}=\dfrac{x^2(3a-x)}{y(2a-x)^2}=\dfrac{x^2(3a-x)y}{(2a-x)x^3}=\dfrac{(3a-x)y}{(2a-x)x}$.

Представлення $y'(x)=\dfrac{3x^2+y^2}{2y(2a-x)}$ показує, що $y'(x)$ можна знайти за формулою $y'(x)=-\dfrac{F'_x}{F'_y}$, де кожну з похідних F'_x, F'_y знайдено від функції $F(x,y)$ за вказаною змінною за умови, що друга змінна є *const*. Тобто $F'_x=[(2a-x)y^2-x^3]'_x=-y^2-3x^2$, $F'_y=[(2a-x)y^2-x^3]'_y=(2a-x)2y$. ■

Приклад 5. Знайти $y'(x)$, якщо $y=x^{2^x}$ $(x>0)$.

■ Запишемо $y(x)=\left[u(x)\right]^{v(x)}$ $(u(x)>0)$ і прологарифмуємо:
$\ln|y(x)|=v(x)\ln u(x)$.
Знайдемо $y'(x)$:
$\dfrac{1}{y(x)}y'(x)=\left[v(x)\ln u(x)\right]'$, або $y'(x)=y(x)\left[v(x)\ln u(x)\right]'$. У нашому випадку $\ln|y(x)|=2^x\ln x$. Тоді $\dfrac{1}{y(x)}y'(x)=2^x\ln 2\cdot\ln x+2^x\dfrac{1}{x}$.

Отже $y'(x)=x^{2^x}2^x(\ln 2\cdot\ln x+\dfrac{1}{x})$. ■

Завдання 1

Знайти $f'(x)$, обчисливши $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$, якщо $y=f(x)$ і $x\in D(f)$.

1. $y=2\sin 3x$.
2. $y=x+\operatorname{ctg}x$.
3. $y=x^3+2x$.
4. $y=\dfrac{1}{x}$.
5. $y=\sqrt{x}$.
6. $y=x\sqrt[3]{x}$.

7. $y=\dfrac{1}{1+x^2}$.	8. $y=2^{x+1}$.	9. $y=\ln x$.

10. $y=\sin 2x$.	11. $y=2+\operatorname{ctg} x$.	12. $y=\arcsin x$.

13. $y=\arccos 3x$.	14. $y=7\operatorname{arctg}(x+1)$.	15. $y=\dfrac{1}{x^2}$.

16. $y=\log_2 x$.	17. $y=x^2+\operatorname{ctg} 2x$.	18. $y=\sqrt{x-3}$.

19. $y=x^2\cdot\sqrt[3]{x}$.	20. $y=\dfrac{1}{2+x^2}$.	21. $y=3^{x+3}$.

22. $y=\ln(x+2)$.	23. $y=\sin 3x+x^2$.	24. $y=x+\arcsin x$.

25. $y=x^2+\arccos x$.	26. $y=3\operatorname{arctg}(x+3)$.	27. $y=x\sqrt[3]{x+3}$.

28. $y=5x\cos x$.	29. $y=3x\sin 3x$.	30. $y=3+\arcsin 3x$.

Завдання 2

Знайти односторонні похідні функції $y=f(x)$ ($f'_+(a)$, $f'_-(a)$) у точці $x=a$, якщо

1. $y=\sqrt[3]{x},\ a=0$.

2. $y=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & x\neq 0;\\ 0, & x=0,\end{cases}$, $a=0$.

3. $y=|\sin 2x|,\ a=0$.

4. $y=\begin{cases}e^{1/x}, & x\neq 0;\\ 0, & x=0,\end{cases}$, $a=0$.

5. $y=|x|,\ a=0$.

6. $y=|x^2-5x+6|,\ a=2$.

7. $y=|x^2-5x+6|,\ a=3$.

8. $y=|2^x-2|,\ a=1$.

9. $y=\sqrt[3]{\sin\pi x},\ a=1$.

10. $y=\sqrt[3]{\sin\pi x},\ a=2$.

11. $y=\sqrt{\sin x^2},\ a=0$.

12. $y=\sqrt{\sin x^2},\ a=\sqrt{\pi}$.

13. $y=\sqrt[3]{\sin\pi x},\ a=3$.

14. $y=\sin x|\cos x|+\cos x|\sin x|,\ a=0$.

15. $y=\sin x\,|\cos x|+\cos x\,|\sin x|,\ a=\dfrac{\pi}{2}$.

16. $y=x\,|\cos\dfrac{\pi}{x}|,\ a=2$.

17. $y=x\,|\cos\dfrac{\pi}{x}|,\ a=\dfrac{2}{3}$.

18. $y=\arccos\dfrac{1}{x},\ a=1$.

19. $y=\arccos\dfrac{1}{x},\ a=-1$.

20. $y=\arcsin(\sin x),\ a=\dfrac{\pi}{2}$.

21. $y=\begin{cases} x, & x\le 0; \\ \sqrt[3]{x^4}\ln x, & x>0, \end{cases}\ , a=0$.

22. $y=\begin{cases} 2x, & x<0; \\ \ln(1+\sqrt[5]{x^7}), & x\ge 0, \end{cases}\ , a=0$.

23. $y=\begin{cases} 1+e^{1/x}, & x<0; \\ \sqrt{1+\sqrt[3]{x^4}}, & x\ge 0, \end{cases}\ , a=0$.

24. $y=\begin{cases} \dfrac{x}{|x|}(1-x^2), & x\ne 0; \\ 1, & x=0, \end{cases}\ , a=0$.

25. $y=\begin{cases} \dfrac{1}{1+e^{1/x}}, & x\ne 0; \\ 0, & x=0, \end{cases}\ , a=0$.

26. $y=\sqrt{1-e^{-x^2}},\ a=0$.

27. $y=x\sqrt{\ln(1+x^2)},\ a=0$.

28. $y=\begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}, & x\ne 0; \\ 0, & x=0, \end{cases}\ , a=0$.

29. $y=\begin{cases} \operatorname{arctg}x, & x\ge 0; \\ x^2+x, & x<0, \end{cases}\ , a=0$.

30. $y=\begin{cases}(x-4)\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x-4}, & x\neq 4;\\ 0, & x=4,\end{cases}$, $a=4$.

Завдання 3

Знайти похідну функції $y=y(x)$, яку задано явно (*а*, *б*, *в*); неявно (*г*), параметричним чином (*д*), якщо

1. а) $y=\ln\sqrt{\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}}$; б) $y=x^x$; в) $y=\dfrac{(x-3)^2(2x-1)}{(x+1)^3}$;

   г) $x^4+y^4=x^2y^2$; д) $x=t^3+3t,\ y=t\operatorname{arctg}t-\ln\sqrt{1+t^2}$.

2. а) $y=-\dfrac{\cos x}{2\sin^2 x}+\ln\sqrt{\dfrac{1+\cos x}{\sin x}}$; б) $y=x^{x^2+1}$; в) $y=\sqrt[3]{\dfrac{\sqrt{x-2}\sqrt[5]{x+4}}{(x+2)^2}}$;

   г) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$ $(a>0)$; д) $x=t^2,\ y=\ln\sin t-t\operatorname{ctg}t$.

3. а) $\begin{cases}y=\ln\dfrac{b+a\cos x+\sqrt{b^2-a^2}\sin x}{a+b\cos x}\\ 0\le|a|<|b|\end{cases}$; б) $y=x^{x^3}$;

   в) $y=\dfrac{(x-2)^3(x+3)}{(x^2+1)^4}$; г) $e^x\sin y-e^y\cos x=0$;

   д) $x=a(1+\cos t)\cos t,\ y=a(1-\cos t)\sin t$.

4. а) $y=\dfrac{1}{4x^4}\ln\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{16x^4}$; б) $y=(\sin x)^x$;

   в) $y=x\sqrt[3]{\dfrac{(x-2)^2\sqrt{x+4}}{(x+2)^5}}$; г) $2y\ln y=x$;

   д) $x=a(\cos t-\ln\operatorname{ctg}\dfrac{t}{2}),\ y=a\sin t$.

5. а) $y=\frac{3}{2}(1-\sqrt[3]{1+x^2})+3\ln(1+\sqrt[3]{1+x^2})$; б) $y=(\sin x)^{x^2}$;

в) $y=\frac{(x-2)^3(2x+4)}{(x-3)^3}$; г) $\sin(xy)+\cos(xy)=0$;

д) $x=e^t(\cos t+\sin t),\ y=e^t(\cos t-\sin t)$.

6. а) $y=\ln\left[\frac{1}{x}+\ln(\frac{1}{x}+\ln\frac{1}{x})\right]$; б) $y=(\cos x)^{\sin x}$;

в) $y=\sqrt[3]{\frac{(x+2)(x-1)^2}{x^5}}$; г) $2^x+2^y=2^{x+y}$;

д) $x=a(\sin t-t\cos t),\ y=a(\cos t+t\sin t)$.

7. а) $y=x\left[\sin(\ln x)-\cos(\ln x)\right]$; б) $y=x^{\sin x}$;

в) $y=\frac{(x+1)^2(2x+4)^3}{(x-3)^4}$; г) $x-y=\arcsin x-\arcsin y$;

д) $x=\sqrt{t},\ y=\sqrt[3]{t}$.

8. а) $y=\ln \operatorname{tg}\frac{x}{2}-\cos x\cdot\ln\operatorname{tg}x$; б) $y=(\ln x)^x$;

в) $y=\sqrt{\frac{(x+2)^3(x-3)}{(x+4)^5}}$; г) $\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=\ln\sqrt{x^2+y^2}$;

д) $x=\frac{t+t^3}{1+t^4},\ y=\frac{t-t^3}{1+t^4}$.

9. а) $y=x+\sqrt{1-x^2}\arccos x$; б) $y=(\operatorname{arctg}x)^{x^2}$;

в) $y=\frac{(2x-1)^3(3x+1)^3}{\sqrt{x-4}}$; г) $xy=\operatorname{arctg}\frac{x}{y}$;

д) $x=a\left[e^t(\cos t+\sin t)-1\right],\ y=a\left[e^t(\cos t-\sin t)+1\right]$.

10. а) $y=\ln(1+\sin^2 x)-2\sin x\operatorname{arctg}(\sin x)$; б) $y=(\arcsin x)^x$;

в) $y=\dfrac{(x-3)^3(2x+4)^2}{(3x-8)^4}$; г) $e^x\sin y-e^{-y}\cos x=0$;

д) $x=2t\cos t+(t^2-2)\sin t,\ y=2t\sin t-(t^2-2)\cos t$.

11. а) $y=\ln\dfrac{x+a}{\sqrt{x^2+b^2}}+\dfrac{a}{b}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{b}$; б) $y=(\operatorname{tg}x)^{x^3}$;

в) $y=x\sqrt{\dfrac{x-1}{(x-2)\sqrt{x-2}}}$; г) $e^y+xy=e$;

д) $x=a(\cos t+t\sin t),\ y=a(\sin t-t\cos t)$.

12. а) $y=\dfrac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\dfrac{a^2}{2}\arcsin\dfrac{x}{a}$; б) $y=(\operatorname{tg}x^2)^{x^2}$;

в) $y=\sqrt[3]{\dfrac{(x+1)^2(x-2)}{x^6+1}}$; г) $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$;

д) $x=a\cos t+(at+b)\sin t,\ y=a\sin t-(at+b)\cos t$.

13. а) $y=\dfrac{1}{6}\ln\dfrac{(x+1)^2}{x^2-x+1}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{2x-1}{\sqrt{3}}$; б) $y=(\sin x^2)^x$;

в) $y=\dfrac{x\sqrt{x+2}}{(x-2)^3(x+1)^5}$; г) $x+y=e^{x-y}$;

д) $x=a(t-\sin t),\ y=a\cos t$.

14. а) $y=\dfrac{1}{4\sqrt{2}}\ln\dfrac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\dfrac{x\sqrt{2}}{x^2-1}$; б) $y=(x)^{x^3}$;

в) $y=\sqrt[5]{\dfrac{(x+2)^3(x-4)^2}{\sqrt{x+2}}}$; г) $x^2-1+\cos xy=0$;

д) $x=a\sin t(2-\sin^2 t),\ y=b\sin^2 t\cos t$.

15. а) $y=x(\arcsin x)^2+2\sqrt{1-x^2}\arcsin x-2x$; б) $y=(\operatorname{ctg}x^2)^{x^2}$;

в) $y=\dfrac{(x+2)^3(x-4)^2}{x\sqrt{x+1}}$; г) $x^3+4y^3-3yx^2=2$;

д) $x = a\cos^5 t,\ y = a\sin^5 t$.

16. а) $y = \dfrac{\arccos x}{x} + \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}}$; б) $y = (\cos x)^{\operatorname{tg} x}$;

в) $y = x\sqrt{\dfrac{(x-2)(x+3)}{\sqrt{x+4}}}$; г) $x^2 + 2xy + y^2 - 4x + 2y = 2$;

д) $x = \dfrac{a\cos t}{1+2\cos t},\ y = \dfrac{b\sin t}{1+2\cos t}$.

17. а) $y = \operatorname{arctg}\sqrt{x^2-1} - \dfrac{\ln x}{\sqrt{x^2-1}}$; б) $y = (\operatorname{tg} x)^{\cos x}$;

в) $y = \dfrac{x^3\sqrt{x+2}}{\sqrt[3]{(x+2)(x+4)^2}}$; г) $x(x^2+y^2) = a(x^2-y^2)$;

д) $x = a(1+\cos t)\cos t,\ y = a(1-\cos t)\sin t$.

18. а) $y = \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1-x}{1+x}$; б) $y = x^{x^x}$;

в) $y = x^2\sqrt[3]{\dfrac{(x-2)^2(x+3)}{\sqrt{x+2}}}$; г) $x\cos\pi y - y\sin\pi y = x - 1$;

д) $x = \dfrac{a\cos t}{\sqrt{\cos 2t}},\ y = \dfrac{a\sin t}{\sqrt{\cos 2t}}$.

19. а) $y = \dfrac{1}{12}\ln\dfrac{x^4-x^2+1}{(x^2+1)^2} - \dfrac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{3}}{2x^2-1}$; б) $y = (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} x}$;

в) $y = \dfrac{(x-2)^3 x^5}{\sqrt[3]{(x+2)^2(x+3)}}$; г) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$;

д) $x = a(\cos t - \ln\operatorname{ctg}\dfrac{t}{2}),\ y = a\sin t$.

20. а) $y = \dfrac{3-x}{2}\sqrt{1-2x-x^2} + 2\arcsin\dfrac{1+x}{\sqrt{2}}$; б) $y = (\arcsin x)^{\sin x}$;

в) $y = x^2 \sqrt[5]{\dfrac{(x-1)^4 (x+3)^2}{\sqrt{(x+1)^3}}}$; г) $x^3 + y^3 - 3ayx = 0$;

д) $x = e^{\alpha t} \cos \beta t, \; y = e^{\alpha t} \sin \beta t$.

21. а) $y = \dfrac{1}{4} \ln \dfrac{\sqrt[4]{1+x^4} + x}{\sqrt[4]{1+x^4} - x} - \dfrac{1}{2} \operatorname{arctg} \dfrac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x}$; б) $y = (x)^{\operatorname{ctg} x}$;

в) $y = \dfrac{x^2 (x+4)^3}{\sqrt[3]{x-2}\,(x+3)^3}$; г) $y^2 \cos x = a^2 \sin 3x$;

д) $x = \dfrac{3at}{1+t^3}, \; y = \dfrac{3at^2}{1+t^3}$.

22. а) $y = x \operatorname{arctg} x - \dfrac{1}{2} \ln(1+x^2) - \dfrac{1}{2} (\operatorname{arctg} x)^2$; б) $y = (x^2+1)^x$;

в) $y = x \sqrt{\dfrac{(x-2)\sqrt{x+2}}{(x-1)^5}}$; г) $y^3 - 3y + 2ax = 0$;

д) $x = e^t \sin t, \; y = e^t \cos t$.

23. а) $y = \operatorname{arctg}(x + \sqrt{1+x^2})$; б) $y = (\sqrt{1+x^2})^{\sin x}$;

в) $y = \dfrac{x \sqrt[3]{(x+2)^2}}{\sqrt{x^2+1}\,\sqrt[3]{(x-1)^2}}$; г) $y^2 - 2xy + b^2 = 0$;

д) $x = \dfrac{1+t^3}{t^2-1}, \; y = \dfrac{1}{t^2-1}$.

24. а) $y = \arcsin\left(\dfrac{\sin a \sin x}{1 - \cos a \cos x}\right)$; б) $y = (\sin x)^{x + \sin x}$;

в) $y = \sqrt[3]{\dfrac{\sqrt{x-2}\,\sqrt[5]{x+2}}{(x+1)^4}}$; г) $x^4 + y^4 = x^2 y^2$;

д) $x = \varphi(1 - \sin \varphi), \; y = \varphi \cos \varphi$.

25. а) $y=\dfrac{x\sqrt{1-x^2}}{1+x^2}-\dfrac{3}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\dfrac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1-x^2}}$; б) $y=x^{x^3}$;

в) $y=x\sqrt[3]{\dfrac{(x-2)^2(x+4)}{\sqrt{x+2}}}$; г) $x^3+ax^2y+bxy^2+y^3=0$;

д) $x=\ln(1+t^2),\ y=t-\operatorname{arctg}t$.

26. а) $y=\arccos(\sin x^2-\cos x^2)$; б) $y=(\operatorname{ctg}x)^{\operatorname{tg}x}$;

в) $y=\dfrac{(2x+3)^2(4x-1)^4}{(x^2-1)^3}$; г) $\sin(xy)+\cos(xy)=\operatorname{tg}(x+y)$;

д) $x=\dfrac{1+t}{t},\ y=\dfrac{t-1}{t}$.

27. а) $y=\arcsin(\sin x^2)+\arccos(\cos x^2)$; б) $y=(e^x)^{\ln x}$;

в) $y=\sqrt[3]{\dfrac{x^2(x+4)^4}{\sqrt{x-2}}}$; г) $2^x+2^y=2^{x+y}$;

д) $x=1-t^2,\ y=t-t^3$.

28. а) $y=\operatorname{arctg}e^x-\ln\sqrt{\dfrac{e^{2x}}{e^{2x}+1}}$; б) $y=(3^x)^{\sin x}$;

в) $y=\dfrac{(x-2)^2(4x+3)^3}{(x-2)^5}$; г) $2y\ln y=x$;

д) $x=a(\varphi-\sin\varphi),\ y=a(1-\cos\varphi)$.

29. а) $y=\dfrac{x}{2}\sqrt{x^2+a}+\dfrac{a}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+a})$; б) $y=(2^x)^{\operatorname{tg}x}$;

в) $y=\dfrac{x\sqrt[3]{x+4}}{\sqrt[3]{(x-2)^2(x+3)^3}}$; г) $x-y=\arcsin x-\arcsin y$;

д) $x=a\cos^3\varphi,\ y=b\sin^3\varphi$.

30. а) $y=\ln\operatorname{arctg}\sqrt{1+x^2}+\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})$; б) $y=(x^2+2)^{\sin x}$;

в) $y=\dfrac{(3x-4)^2(2x+1)^3}{(3x+4)^4}$; г) $x\sin y-\cos y+\cos 2y=0$;

д) $x=a\cos t,\ y=b\sin t$.

3. Диференційовність функції

Функцію $y=f(x)$ називають *диференційовною у точці* $x=x_0$, якщо існує $A=const$, яка залежить від x_0 і не залежить від приросту незалежної змінної Δx така, що приріст функції Δy у точці x_0 можна записати так

$$\Delta y=A\Delta x+o(\Delta x),\quad \text{де } o(\Delta x)\to 0 \text{ при } \Delta x\to 0.$$

Для того, щоб $y=f(x)$ була диференційовною у точці x_0 необхідно і достатньо існування $f'(x_0)$. Необхідною умовою диференційовності $f(x)$ у точці x_0 є неперервність $f(x)$ у x_0.

Приклад 1. Нехай $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x},\ x\neq 0\\ 0,\ x=0.\end{cases}$

Перевірити чи є $f(x)$ диференційовною в $\mathbb{R}$. Якщо так, знайти $f'(x)$ для $\forall x\in\mathbb{R}$.

■ Перевіримо необхідну умову диференційовності функції. Задана функція є елементарною функцією, а отже неперервною в області визначення , тобто для усіх $x\in\mathbb{R}$, крім, можливо, точки $x=0$, у якій вона може мати розрив. Для неперервності $f(x)$ у точці x_0 необхідно і достатньо, щоб $f(x_0-0)=f(x_0+0)=f(x_0)$.

Знайдемо $f(0+0)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=\lim\limits_{x\to 0+} x^2\sin\dfrac{1}{x}=0$,

оскільки нескінченно мала функція ($\lim\limits_{x\to 0} x^2=0$) множиться на обмежену функцію $|\sin\dfrac{1}{x}|\leq 1$. (Зауважимо, що не існує $\lim\limits_{x\to 0\pm}\sin\dfrac{1}{x}$).

Аналогічно одержуємо $f(0-0)=0$. За умовою $f(0)=0$. Отже $f(0)=f(0\pm 0)=0$ і $f(x)$ є неперервною у точці $x_0=0$. Необхідна умова диференційовності виконується.

Знайдемо $f'(x)$ спочатку для $x\neq 0$:

$$f'(x)=(x^2\sin\frac{1}{x})'=2x\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}x^2(-\frac{1}{x^2})=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}\quad (x\neq 0).$$

У точці $x_0=0$ знайдемо похідну $f'(0)$, використовуючи означення похідної

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0\pm}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim_{x\to 0\pm}x\sin\frac{1}{x}=0$$

(добуток нескінченно малої функції на обмежену функцію є нескінченно малою функцією (при $x\to 0$)). Таким чином, для $\forall x\in\mathbb{R}\ \exists f'(x)$, функція диференційовна на усій осі і

$$f'(x)=\begin{cases}2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

Зауважимо, що $f'(x)$ вже не є неперервною у точці $x=0$, оскільки $f'(0\pm 0)$ не існують. ■

Приклад 2. Перевірити, чи є диференційовною у точці $x=4$ функція $f(x)=\begin{cases}(x-4)\operatorname{arctg}\frac{1}{x-4}, & x\neq 4\\ 0, & x=4\end{cases}$.

■ Перевіримо необхідну умову диференційовності $f(x)$ у точці $x=4$.

$$f(4-0)=\lim_{\substack{x\to 4\\ x<4}}(x-4)\operatorname{arctg}\frac{1}{x-4}=[(-0)(\operatorname{arctg}\frac{1}{-0})=$$

$$=0\cdot\operatorname{arctg}(+\infty)=0\cdot\frac{\pi}{2}=0]=0.$$

Аналогічно $f(4+0)=0$ і, оскільки $f(4)=0$, то $f(4)=f(4\pm 0)=0$. Функція неперервна у точці $x=4$.

Знайдемо похідну $f(x)$ коли $x\neq 4$.

$$\begin{cases} f'(x)=[(x-4)\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x-4}]'=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x-4}+\dfrac{x-4}{1+(x-4)^2} \\ x\neq 4 \end{cases}.$$

Зауважимо, що

$$f'_+(4)=\lim_{x\to 4+0}f'(x)=\lim_{x\to 4+0}(\operatorname{arctg}\frac{1}{x-4}+\frac{x-4}{1+(x-4)^2})=+\frac{\pi}{2}+0=+\frac{\pi}{2},$$

$$f'_-(4)=\lim_{x\to 4-0}f'(x)=\lim_{x\to 4-0}(\operatorname{arctg}\frac{1}{x-4}+\frac{x-4}{1+(x-4)^2})=-\frac{\pi}{2}+0=-\frac{\pi}{2}.$$

Отже, $f'_+(4)=+\dfrac{\pi}{2}\neq -\dfrac{\pi}{2}=f'_-(4)$ ($\nexists f'(4)$ і функція не є диференційовною у точці $x=4$). ■

Завдання 4

1. Нехай $f(x)=\begin{cases}\varphi(x), & x\geq 0\\ \psi(x), & x<0.\end{cases}$ Яку умову повинні задовольняти неперервні функції $\varphi(x), \psi(x)$, щоб функція $f(x)$ була диференційовною на усій числовій осі?

У задачах 2-21 перевірити диференційовність функцій у точці $x=a$. Знайти $f'_+(a), f'_-(a)$, якщо вони існують.

2. $f(x)=\begin{cases}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ $a=0.$

3. $f(x)=\begin{cases}\operatorname{arctg}x, & x\geq 0,\\ x^2+x, & x<0,\end{cases}$ $a=0.$

4. $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, \ x\neq 0, \\ 0, \ x=0, \end{cases}$ $\quad a=0.$

5. $f(x)=\begin{cases} \sin(x^4\sin\dfrac{5}{x}), \ x\neq 0, \\ 0, \ x=0, \end{cases}$ $\quad a=0.$

6. $f(x)=\begin{cases} x^3\sin\dfrac{1}{x}, \ x\neq 0, \\ 0, \ x=0, \end{cases}$ $\quad a=0.$

7. $f(x)=\begin{cases} x^2\cos\dfrac{4}{3x}+\dfrac{x}{2}, \ x\neq 0, \\ 0, \ x=0, \end{cases}$ $\quad a=0.$

8. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x}}, \ x\neq 0, \\ 0, \ x=0, \end{cases}$ $\quad a=0.$

9. $f(x)=|\sin x|, \quad a=0.$

10. $f(x)=\begin{cases} 1+x, \ x\leq 0, \\ x, \ 0<x<1, \\ 2-x, \ 1\leq x\leq 2, \\ 3x-x^2, \ x>2, \end{cases}$ $\quad \forall x\in\mathbb{R}.$

11. $f(x)=|x^3|, \quad a=0.$

12. $f(x)=e^{-|x|}, \quad a=0.$

13. $f(x)=\begin{cases} x\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}, \ x\neq 0, \\ 0, \ x=0, \end{cases}$ $\quad a=0.$

14. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{1+e^{1/x}},\ x\neq 0,\\ 0,\ x=0,\end{cases}\quad a=0.$

15. $f(x)=|x|(1-\cos x),\quad a=0.$

16. $f(x)=\begin{cases}\sin(x^5\sin\dfrac{1}{x}),\ x\neq 0,\\ 0,\ x=0,\end{cases}\quad a=0.$

17. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}+x,\ x\neq 0,\\ 1,\ x=0,\end{cases}\quad a=0.$

18. $f(x)=\begin{cases}(x+1)\operatorname{arctg}^2\dfrac{1}{x+1}+2x,\ x\neq -1,\\ -2,\ x=-1,\end{cases}\quad a=-1.$

19. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{2^{1/x}-1},\ x\neq 0,\\ 0,\ x=0,\end{cases}\quad a=0.$

20. $f(x)=\begin{cases}x\arcsin(\cos\dfrac{1}{x}),\ x\neq 0,\\ 0,\ x=0,\end{cases}\quad a=0.$

21. $f(x)=\begin{cases}|x^3|\cos\dfrac{\pi}{|x|},\ x\neq 0,\\ 0,\ x=0,\end{cases}\quad a=0.$

У задачах 22–30 знайти сталі (a,b,α,β) за яких наступні функції диференційовні на усій числовій осі.

22. $f(x)=\begin{cases}ax+b,\ x\leq 1,\\ x^2,\ x>1.\end{cases}$

23. $f(x)=\begin{cases} a+bx^2, \ x<1, \\ \dfrac{1}{|x|}, \ x\geq 1. \end{cases}$

24. $f(x)=\begin{cases} ax^3+bx, \ |x|\leq 2, \\ \dfrac{1}{\pi}\arcsin\dfrac{1}{x}, \ |x|>2. \end{cases}$

25. $f(x)=\begin{cases} 2x-2, \ x\leq 1, \\ a(x-1)(x-2)(x-b), \ 1<x<2, \\ \dfrac{x}{2}-1, \ x\geq 2. \end{cases}$

26. $f(x)=\begin{cases} (x+a)e^{-bx}, \ x<0, \\ ax^2+bx+1, \ x\geq 0. \end{cases}$

27. $f(x)=\begin{cases} ax+b, \ x<0, \\ a\cos x+b\sin x, \ x\geq 0. \end{cases}$

28. $f(x)=\begin{cases} ax^2+b, \ x>1, \\ x\sin\pi x, \ -1\leq x\leq 1, \\ \alpha x+\beta, \ x<-1. \end{cases}$

29. $f(x)=\begin{cases} ax+b, \ x>\dfrac{\pi}{2}, \\ \cos x, \ -\dfrac{\pi}{2}\leq x\leq\dfrac{\pi}{2}, \\ \alpha x+\beta, \ x<-\dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$

30. $f(x)=\begin{cases} a(x-2)^2+b, & x>1, \\ x^2\operatorname{arctg}x, & |x|\le 1 \\ \alpha(x+2)^2+\beta, & x<-1. \end{cases}$

4. Геометричний і фізичний зміст похідної

Задача 1. (Геометричний зміст похідної). Побудуємо графік функції $y=f(x)$ в околі точки $x=x_0$ (рис. 1). $(M_0M)-$ січна, визначена за допомогою точки $M_0(x_0,y_0)$ і кута α. Якщо існує граничне положення січної за умови $M\to M_0$, тоді січну у цьому положенні називають *дотичною* до кривої $y=f(x)$ у точці $M_0(x_0,f(x_0))$. Знайдемо $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{1}{\Delta x}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]$.

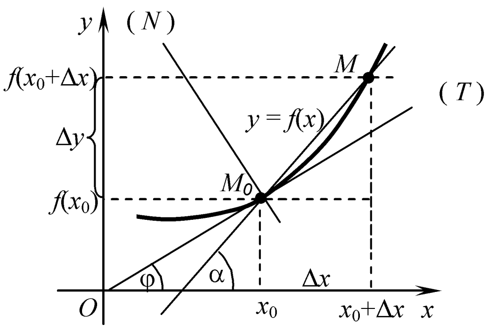


Рис. 1

Коли змінна точка M прямує вздовж кривої $y=f(x)$ до точки M_0 $(\Delta x\to 0)$, отримуємо $\operatorname{tg}\alpha\to\operatorname{tg}\varphi$. З іншої сторони, за означенням похідної і припущенням її існування, отримуємо $\operatorname{tg}\varphi=f'(x_0)$. Отже, $\varphi-$ кут, який утворює дотична (T) до графіка функції у точці з абсцисою $x=x_0$ з додатним напрямком осі Ox.

Запишемо рівняння дотичної (T) і нормалі (N) до графіка функції $y = f(x)$ у точці $M_0(x_0, y_0 = f(x_0))$:

$$(T) \qquad y - y_0 = k(x - x_0),$$

$$(N) \qquad y - y_0 = -\frac{1}{k}(x - x_0), \quad \text{де } k = f'(x_0).$$

<u>*Задача 2.*</u> (Миттєва швидкість). Нехай матеріальна точка M рухається нерівномірно по прямій (числовій прямій, рис. 2) і $s(t)$ – шлях, який точка пройшла за час t (координата точки M у момент t). Тоді середня швидкість руху за час Δt: $v_{\text{сер.}} = \dfrac{\Delta s(t)}{\Delta t}$ ($\Delta s(t)$ – шлях, який пройшла точка за час Δt). Миттєва швидкість (швидкість точки у момент t) $v_{\text{мит.}} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} v_{\text{сер.}} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta s(t)}{\Delta t} = s'(t)$.

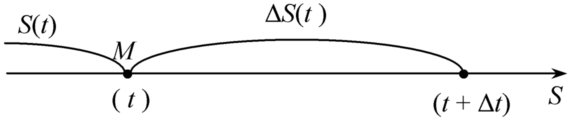


Рис. 2

Отже, швидкість руху точки у момент t: $v(t) = s'(t)$. Зауважимо, що прискорення у момент t: $a(t) = v'(t) = (s'(t))' = s''(t)$.

<u>*Задача 3.*</u> (Густина маси). Розглянемо неоднорідний стрижень (рис. 3).

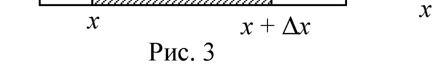


Рис. 3

Позначимо його масу $m = m(x)$. Подібно до зробленого у задачі 2,

$m'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta m(x)}{\Delta x} = \gamma(x)$. Тобто густина маси $\gamma(x) = m'(x)$.

Завдання 5

Записати рівняння дотичної і нормалі до графіка функції $y = f(x)$ у точці з абсцисою $x = x_0$, якщо

1. $y = \mathrm{tg}\, x,\ x_0 = 0$.
2. $y = \ln x,\ x_0 = 1$.
3. $y = e^{1-x^2}$, $x_0 = -1$.

Записати рівняння дотичної і нормалі до графіка функції $x = x(t),\ y = y(t)$ у точці $M(x_0, y_0) = M(t_0)$, якщо

4. $x = t^2 - 3t + 4,\ y = t^2 - t + 1,\ M_0(2,1)$.
5. $x = t^2 - 1,\ y = t^2 + t - 3,\ M_0(3,-1)$.
6. $x = t^2 - 3t - 3,\ y = t^2 - 4t + 3,\ M_0(1,-1)$.

Записати рівняння дотичної і нормалі до графіка функції, яку задано рівністю $F(x, y) = 0$ у точці $M(x_0, y_0)$.

7. $x^5 + y^5 - 2xy = 0,\ M_0(1,1)$.
8. $x^2 + 2xy^2 + 3y^4 = 6,\ M_0(1,-1)$.
9. $3x^2 + 4xy + 5y^2 - 7x - 8y - 3 = 0,\ M_0(2,1)$.
10. Знайти рівняння дотичних до кола $x^2 + y^2 = 52$, які паралельні прямій $2x + 3y = 6$.
11. Знайти рівняння дотичних до кола $x^2 + y^2 = 32$, які перпендикулярні до прямої $x + y + 4 = 0$.
12. Знайти рівняння дотичних до кола $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 3 = 0$ у точках перетину кола з віссю *Ox*.
13. Знайти кут нахилу до осі *Ox* дотичної до кривої $y = x^3$ у точці з абсцисою $x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

14. За якого значення числа a крива $y = a^x$ перетинає вісь Oy під кутом $\frac{\pi}{4}$?

15. Знайти точку на кривій $y^2 = 2x^3$, у якій дотична до кривої перпендикулярна прямій $4x - 3y + 2 = 0$.

16. Знайти кут між кривими $y = x^3$ і $y = \frac{1}{x^2}$.

17. Знайти рівняння спільної дотичної до кривих $y = x^2 + 4x + 8,\ y = x^2 + 8x + 4$.

18. Хорда параболи $y = x^2 - 2x + 5$ з'єднує точки з абсцисами $x_1 = 1$ і $x_2 = 3$. Знайти рівняння дотичної до параболи, яка паралельна цій хорді.

19. Під яким кутом крива $y = \ln x$ перетинає вісь Ox?

20. Довести, що дотичні, проведені до графіка функції $y = \frac{x-4}{x-2}$ у точках перетину його з осями координат, паралельні між собою.

21. Записати рівняння нормалі до кривої $y = 2 - \sqrt{x}$ у точці перетину її з бістрисою першого координатного кута.

22. Знайти рівняння дотичних до графіка функції $y = \sqrt{x}$, які проходять через точку $M(2, \frac{3}{2})$.

23. На кривій $x = 2t^3 - 9t^2 + 12t - 1,\ y = t^2 + t + 1$ знайти точки, у яких дотичні до кривої паралельні осі Oy.

24. Знайти рівняння дотичних до гіперболи $9y^2 - 4x^2 = 36$, які перпендикулярні до прямої $5x + 2y = 10$.

25. На кривій $y = x^2(x-2)^2$ знайти точки, у яких дотична до кривої паралельна до осі абсцис.

26. У якій точці дотична до параболи $y = x^2 - 7x + 3$ паралельна до прямої $5x + y - 3 = 0$?

27. Знайти точки, у яких дотичні до кривих $y = x^3 - x - 1$ і $y = 3x^2 - 4x + 1$ паралельні між собою.

28. Під яким кутом графік функції $y = e^{x/2}$ перетинає пряму $x = 2$?

29. Знайти координати точок перетину з віссю Ox дотичних до графіка функції $y = \dfrac{x+1}{x-3}$, які утворюють з віссю Ox кут $\dfrac{3}{4}\pi$.

30. У якій точці кривої $y = x^2 - 5x + 6$ треба провести дотичну, щоб дотична проходила через точку $M(1,1)$?

Завдання 6

1. Швидкість тіла, яке рухається прямолінійно визначається формулою $v = 3t + t^2$. Яке прискорення буде мати тіло через 4 с після початку руху?

2. Тіло, маса якого 100 кг рухаєтся прямолінійно згідно з законом $s = 2t^2 + 3t + 1$. Знайти кінетичну енергію $(\dfrac{mv^2}{2})$ тіла через 5 с після початку руху.

3. Шлях тіла, яке рухається прямолінійно, дорівнює $s(t) = 3t^5 - 5t^3 + 5t - 7$. У який момент швидкість руху буде найменшою?

4. Точка рухається по кубічній параболі $12y = x^3$. Яка з її координат замінюється швидше?

5. Закон прямолінійного руху тіла, маса якого 6 г, рівний $s(t) = (t+1)^3 - 1 + \ln(t+1)$. Знайти кінетичну енергію тіла через 1 с після початку руху.

6. Швидкість прямолінійного руху тіла пропорційна $\sqrt{s(t)}$ ($s(t)$ - закон руху тіла). Довести, що тіло рухається під дією сталої сили.

7. Довести, що якщо тіло рухається за законом $s(t) = ae^t + be^{-t}$, тоді його прискорення чисельно рівне шляху, яке пройшло тіло.

8. На кривій $y = x^2 - 2x + 5$ знати точку, у якій ордината зростає у 4 рази швидше ніж абсциса.

9. За якого значення x ордината кривої $y = \frac{x^2}{2}$ буде зростати у 4 рази швидше ніж ордината кривої $y = \ln x$?

10. Шлях, який проходить тіло при вільному падінні у безповітряному просторі $s = \frac{gt^2}{2}$. В початковий момент $t = 0$ відомі $s(0) = 0$ і $v(0) = 0$, g – прискорення сили тяжіння. Знайти закон зміни швидкості тіла при вільному падінні.

11. Радіус кулі росте рівномірно зі швидкістю 10 см/с. З якою швидкістю зростає об'єм кулі у момент, коли його радіус стає рівним 100 см?

12. Закон прямолінійного руху матеріальної точки $s(t) = \frac{1}{4}t^4 - 4t^3 + 16t^2$. У які моменти часу напрямок її руху збігається з додатним напрямом осі Ox?

13. Закон прямолінійного руху матеріальної точки $s(t) = \frac{1}{4}t^4 - 4t^3 + 16t^2$. У які моменти часу її прискорення рівне нулеві?

14. Знайти швидкість гармонійного коливання маятника з амплітудою a, частотою ω і початковою фазою $\varphi = 0$.

15. Тіло, маса якого чисельно рівна 4, рухається прямолінійно за законом $s(t) = t^2 + t + 1$. Знайти кінетичну енергію тіла у момент $t = 5$.

16. Точка рухається по логарифмічній спіралі $r = e^{a\varphi}$. Знайти швидкість зміни полярного кута, якщо відомо, що він повертається зі сталою швидкістю ω?

17. Точка рухається по колу $\rho = 2a\cos\varphi$. Знайти швидкість зміни абсциси і ординати точки, якщо полярний кут повертається з кутовою швидкістю ω?

18. В якій точці еліпса $16x^2 + 9y^2 = 400$ ордината спадає з тією ж швидкістю, з якою зростає абсциса?
19. Радіус кулі змінюється зі швидкістю v. З якою швидкістю змінюється об'єм і площа поверхні кулі?
20. Вздовж осі Ox рухаються дві точки, які мають закон руху $x = 100 + 5t$ і $x = \frac{1}{2}t^2$ $(t \geq 0)$. З якою швидкістю віддаляються ці точки одна від другої в моменти зустрічі?
21. Неоднорідний стрижень AB має довжину 12 см. Маса його частини AM росте пропорційно квадрату відстані змінної точки M від кінця A і рівна 10 г при AM = 2 см. Знайти масу всього стрижня і лінійну густину маси у точках M, A, B.
22. Точка рухається гіперболою $y = \frac{10}{x}$ так, що її абсциса x росте рівномірно зі швидкістю 1 за секунду. З якою швидкістю змінюється її ордината в момент, коли точка проходить положення (5,2) ?
23. Драбина, довжина якої 10 м, одним кінцем спирається на вертикальну стіну, а другим на підлогу. Нижній кінець драбини відсувається від стіни зі швидкістю 2 м/хв. З якою швидкістю опускається верхній кінець драбини, якщо відстань основи її від стінки 6 м?
24. Поїзд і повітряна куля відправляються в один і той самий момент з одного і того ж самого місця. Поїзд рухається рівномірно зі швидкістю 50 км/год, куля піднімається (також рівномірно) зі швидкістю 10 км/год. З якою швидкістю вони віддаляються один від одного?
25. Чоловік, зріст якого є 1,7 м, віддаляється від джерела світла, яке розташоване на висоті 3 м, зі швидкістю 6,34 км/год. З якою швидкістю рухається тінь від його голови?

5. Похідні і диференціали вищих порядків

Якщо для $\forall x \in (a,b)$ $\exists f'(x) < \infty$, тоді функцію $\varphi(x) = f'(x)$ називають *похідною першого порядку* від $f(x)$. Якщо для

$\forall x \in (a,b)\ \exists \varphi'(x) < \infty$, тоді $\varphi'(x) = [f'(x)]'$ називають *похідною другого порядку* від $f(x)$ на (a,b) і позначають $f''(x)$ або $\dfrac{d^2 f}{dx^2}$. Аналогічно означають похідну *n*-го порядку від $f(x)$ на (a,b): $f^{(n)}(x) = [f^{(n-1)}(x)]'$.

Перший диференціал функції $f(x)$, при вказаних умовах означають як $dy = df = f'(x)dx$, другий – $d^2 f = d[df]$ і *n*-ий диференціал $f(x)$ – $d^n f = d[d^{(n-1)} f]$.

Позначимо $\Delta x = x - x_0$ $(x \neq x_0)$ приріст незалежної змінної і $\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ приріст функції $y = f(x)$ при зміні незалежної змінної від x_0 до $x = x_0 + \Delta x$. Перший диференціал функції $y = f(x)$ є головна лінійна частина приросту функції: $\Delta f(x_0) = df(x_0) + o(\Delta x) = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)$, де $o(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Тоді наближене значення функції, за умови зміни незалежної змінної від x_0 до $x_0 + \Delta x$, дорівнює

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x .$$

Запишемо формулу знаходження другої похідної функції $y = y(x)$, яка задана параметричним чином $x = x(t),\ y = y(t)$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = y''(x) = \frac{y''(x)x'(t) - x''(t)y'(t)}{(x'(t))^3}$$

і формулу Лейбніца знаходження похідної *n*-го порядку від добутку функцій $u(x)$ і $v(x)$:

$$(u(x)v(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n)}(x) v^{(n-k)}(x) .$$

Приклад 1. Знайти перший і другий диференціал складеної функції:

$$\begin{cases} y = f(z) \\ z = g(x) \quad \Rightarrow y = f[g(x)] = F(x) \\ R(g) \subset D(f) \end{cases}$$

за умови $f(z) = z^3$ і $g(x) = x^2$.

■ За означенням першого диференціала

$$dy = dF(x) = F'(x)dx = f'(z) \cdot z'(x)dx = f'(z)g'(x)dx =$$

$$= \left| y = f(z) \equiv z^3, \; z = g(x) \equiv x^2 \right| = 3z^2 \cdot 2xdx = 6x^5 dx.$$

Знайдемо dy, вважаючи z незалежною змінною: $dy = 3z^2 dz$, враховуючи, що $dz = z'(x)dx = 2xdx$, отримуємо $dy = 3z^2 \cdot 2xdx =$ $= 3x^4 \cdot 2xdx = 6x^5 dx$, що вказує на інваріантність форми першого диференціала.

Знайдемо другий диференціал. Якщо z є незалежна змінна, то за означенням $d^2 y = f''(z)dz^2$ $(dz^2 = (dz)^2)$. Якщо z є залежною змінною, то отримуємо наступну формулу

$$d^2 y = d(dy) = d[f'(z)dz] = d[f'(z)]dz + f'(x)d(dz) =$$

$$= f''(z)dz^2 + f'(z)d^2 z,$$

що вказує на неінваріантність форми другого диференціала.

Отже, в нашому випадку, знаходимо

$$d^2 y = f''(z)dz^2 + f'(z)d^2 z = \left| y = f(z) \equiv z^3, \; z = g(x) \equiv x^2 \right|, \text{ тоді}$$

$$\left| \begin{array}{c} y = z^3, \; f'(z) = 3z^2, \; f''(z) = 6z \\ dz = z'(x)dx = 2xdx, \; dz^2 = (dz)^2 = 4x^2 (dx)^2 = 4x^2 dx^2 \\ d^2 z = d(dz) = z''(x)dx^2 = 2dx^2 \end{array} \right|$$

$$= 6zdz^2 + 3z^2 d^2 z = 6x^2 \cdot 4x^2 dx^2 + 3x^4 \cdot 2dx^2 = 30x^4 dx^2 \; ■$$

Завдання 7

Використовуючи метод математичної індукції або формулу Лейбніца, знайти похідну n-го порядку від наступних функцій

1. $y=\sin 2x \sin x$.

2. $y=x\cos 3x$.

3. $y=\dfrac{1}{1+x}$.

4. $y=\ln(1+x)$.

5. $y=\cos^3 2x$.

6. $y=xe^{2x}$.

7. $y=x^2e^{-\frac{x}{a}}$.

8. $y=\cos^3(3+x)$.

9. $y=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$.

10. $y=e^{at},\ x=e^{-at}\quad (a>0)$.

11. $y=\sqrt{x}$.

12. $y=3^x+3^{-x}$.

13. $y=\dfrac{1}{x(x+1)}$.

14. $y=\cos x\cos 3x$.

15. $y=\dfrac{1}{1-x^2}$.

16. $y=e^{-x^2}$.

17. $y=x\,\mathrm{sh}\,x$.

18. $y=\sin 2x\cos 4x$.

19. $y=x^{n-1}\ln x$.

20. $y=\dfrac{1+x}{1-x}$.

21. $y=5-3\cos^2 x$.

22. $y=x\cos x$.

23. $y=\dfrac{1}{\sqrt{1-3x}}$.

24. $y=\dfrac{x}{3+x}$.

25. $y=e^x\sin\sqrt{3}x$.

26. $y=\dfrac{1}{x(2-x)}$.

27. $y=\dfrac{1}{4-x^2}$.

28. $y=x^n\sqrt{x}$.

29. $y=e^x\sin x$.

30. $y=x^3\ln x$

Завдання 8

Функцію $y=y(x)$ задано неявно рівністю $F(x,y)=0$.

1). Перевірити, що точка $M_0(x_0, y_0)$ належить графіку функції $y = y(x)$.

2). Знайти значення диференціала функції $y = y(x)$ при зміні незалежної змінної від x_0 до $x_0 + \Delta x$.

3). Знайти наближене значення функції $y = y(x)$ за умови, що незалежна змінна отримала приріст Δx.

1. $x^3 - 2x^2y^2 + 5x + y - 5 = 0,\quad M_0(1,1),\quad \Delta x = 0,3$.
2. $x^4 + y^4 = 2x^2y^2,\quad M_0(1,-1),\quad \Delta x = 0,1$.
3. $2y\ln y = x,\quad M_0(0,1),\quad \Delta x = 0,1$.
4. $2^x + 2^y = 2^{x+y+1},\quad M_0(0,0),\quad \Delta x = 0,2$.
5. $x - y = \arcsin x - \arcsin y,\quad M_0(0,0),\quad \Delta x = 0,1$.
6. $\mathrm{arctg}\dfrac{y}{x} = \ln\sqrt{x^2 + y^2},\quad M_0(1,0),\quad \Delta x = 0,1$.
7. $xy = \mathrm{arctg}\dfrac{x}{y},\quad M_0(0,1),\quad \Delta x = 0,2$.
8. $2^{x/y} = 2\left(\dfrac{x}{y}\right)^2,\quad M_0(1,1),\quad \Delta x = 0,1$.
9. $y = x + \mathrm{arctg}\, y,\quad M_0(0,0),\quad \Delta x = 0,2$.
10. $2e^y = x + y,\quad M_0(2,0),\quad \Delta x = 0,2$.

Знайти перший і другий диференціал складеної функції. Показати, що перший диференціал інваріантний, а другий не є інваріантний, відносно форми запису через незалежну і залежну змінні.

11. $y = \sqrt[3]{x^2 + 5x},\quad x = t^3 + 2t + 1$.
12. $y = \cos^2 z,\quad z = \dfrac{1}{4}(t^2 + 1)$.

13. $y = \operatorname{arctg} z, \quad z = \dfrac{1}{\operatorname{tg} t}$.

14. $y = 3^{-1/x}, \quad x = \ln \operatorname{tg} t$.

15. $y = (z^2 + 1)e^z, \quad z = t^2 e^{2t}$.

Знайти $y''(x)$, якщо функцію $y = y(x)$ задано параметрично:

16. $x = \ln \operatorname{tg}\left(\dfrac{t}{2}\right), \quad y = \ln \operatorname{tg} t$.

17. $x = \log_5 \sin t, \quad y = \log_5 \cos t$.

18. $x = \arcsin \operatorname{tg} t, \quad y = \sqrt{\cos 2t}$.

19. $x = a\cos^3 t, \quad y = a\sin^3 t$.

20. $x = e^{-t}\cos t, \quad y = e^{-t}\sin t$.

Знайти d^2y у точці $M_0(x_0, y_0)$ для функції $y = y(x)$, яку задано неявно рівністю:

21. $x^2 + 2xy + y^2 - 4x - 2y - 2 = 0, \quad M_0(1,1)$.

22. $2\ln(x - y) + \sin xy = 0, \quad M_0(0,1)$.

23. $x^3 y + \arcsin(x - y) = 1, \quad M_0(1,1)$.

24. $3(y - x + 1) + \operatorname{arc\,tg}\left(\dfrac{y}{x}\right) = 0, \quad M_0(1,0)$.

25. $y - x \operatorname{tg} \ln\sqrt{x^2 + y^2} = 0, \quad M_0(0,1)$.

26. Знайти приріст об’єму V кулі, яка має радіус $R = 2$, якщо зміна довжини радіуса $\Delta R = 0,5$ або $\Delta R = 0,1$ або $\Delta R = 0,01$.

27. Довести, використовуючи закон Ома $I = \dfrac{E}{R}$, що малу зміну струму, зумовлену малою зміною опору, можна знайти наближено за формулою $\Delta I = -\dfrac{I}{R}\Delta R$.

28. Мідний куб, ребро якого дорівнює 5 см, рівномірно шліфують з усіх сторін. Знаючи, що його вага зменшилася на 0,96 г і, вважаючи питому вагу міді рівну 8, знайти на скільки зменшилися розміри куба (тобто на скільки скоротилося його ребро).

29. Знайти наближене значення для приросту об'єму V прямого кругового циліндра, висота якого h, за умови, що радіус основи r змінився на величину Δr.

30. Згідно з законом Клапейрона об'єм V, який займає газ, тиск газу p і абсолютна температура T зв'язані рівнянням $pV = RT$, де R - газова стала. Знайти наближене значення для приросту ΔV об'єму V, якщо тиск p змінився на величину Δp (вважати температуру T сталою).

6. Теореми про диференційовні функції. Правила Лопіталя

Теорема Лягранжа. Якщо $f(x)$ неперервна на $[a,b]$ і диференційовна на (a,b), тоді існує принаймні одна точка $c \in (a,b)$ така, що $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$.

Теорема Ролля. Якщо $f(x)$ неперервна на $[a,b]$ і диференційовна на (a,b) і $f(a) = f(b)$, тоді існує принаймні одна точка $c \in (a,b)$ така, що $f'(c) = 0$.

Теорема Коші. Якщо функції $f(x)$, $\varphi(x)$ неперервні на $[a,b]$, диференційовні на (a,b) і $\varphi'(x) \neq 0$ для $\forall x \in (a,b)$, тоді існує принаймні одна точка $c \in (a,b)$ така, що

$$\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}.$$

Ознака сталості функції. Якщо $f'(x) = 0$ для $\forall x \in (a,b)$, тоді $f(x) \equiv const$ на (a,b).

Сформулюємо правила Лопіталя у випадку невизначеностей $\left[\frac{0}{0}\right]$ і $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

Теорема 1 $\left[\frac{0}{0}\right]$. Нехай $f(x)$, $\varphi(x)$ визначені на $\overset{\circ}{B}(a,\delta)=(a-\delta,a)\bigcup(a,a+\delta)$, диференційовні на $\overset{\circ}{B}(a,\delta)$ і $\varphi'(x)\neq 0$ для $\forall x\in\overset{\circ}{B}(a,\delta)$. Якщо $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=0$ і $\exists\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}=\mathrm{A}$, тоді $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\mathrm{A}$.

Теорема 2 $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Нехай $f(x)$, $\varphi(x)$ визначені на $\overset{\circ}{B}(a,\delta)$, диференційовні на $\overset{\circ}{B}(a,\delta)$ і $\varphi'(x)\neq 0$ для $\forall x\in\overset{\circ}{B}(a,\delta)$. Якщо $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=\infty$ і $\exists\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}=\mathrm{A}$, тоді $\exists\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\mathrm{A}$.

Теорема 3 . Невизначеність $[0\cdot\infty]$ зводять до невизначеностей $\left[\frac{0}{0}\right]$ або $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

Дійсно, при $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$ і $\lim\limits_{x\to ax}\varphi(x)=\infty$, невизначеність

$$\left[0\cdot\infty=f\cdot\varphi=\frac{f}{\frac{1}{\varphi}}=\frac{0}{0}\right]\quad \text{або}\quad \left[0\cdot\infty=f\cdot\varphi=\frac{\varphi}{\frac{1}{f}}=\frac{\infty}{\infty}\right].$$

Теорема 4 **.** Невизначеності $\left[1^{\infty}\right]$, $\left[0^{0}\right]$, $\left[\infty^{0}\right]$ зводять до невизначеності $[0\cdot\infty]$.

Дійсно $\lim\limits_{x\to a}\left[u(x)\right]^{v(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a} v(x)\ln u(x)}$.

Приклад 1 **.** Довести нерівність $\left|\cos x - \cos y\right| \le \left|x - y\right|$ для $\forall x, y \in R$.

■ Розглянемо функцію $z = \cos t$, яка неперервна на $\left[x, y\right]$, диференційовна на (x, y) для $\forall x, y \in R$ і таких, що $x < y$.
Отже виконуються умови теореми Лягранжа, тобто $\exists\, c \in (x, y)$ таке, що $\left|\cos x - \cos y\right| \le \left|z'(c)(x - y)\right| = \left|\sin c\right| \cdot \left|x - y\right|$.
Оскільки $\left|\sin t\right| \le 1$ для $\forall t \in R$, то $\left|\cos x - \cos y\right| \le \left|x - y\right|$ для $\forall x, y \in R$. ■

Приклад 2. Використовуючи теорему Ролля довести, що похідна многочлена $f(x) = x^3 - x^2 + 11x - 6$ має дійсний нуль, який належить інтервалу $(1, 3)$.

■ Функція $f(x)$ задовольняє умови теореми Ролля: неперервна на $\left[1, 3\right]$, диференційовна на $(1, 3)$ і $f(1) = f(3) = 0$. Тоді існує принаймні одна точка $c \in (1, 3)$ така, що $f'(c) = 0$. Знайдемо значення c: $f'(c) = 3c^2 - 12c + 11 = 0$.

Звідси $c_{1,2} = 2 \pm \dfrac{\sqrt{3}}{3} \approx 2 \pm 0{,}58$. Таким чином похідна функції $f(x)$ має два дійсних нулі, які належать $(1, 3)$. ■

Приклад 3 **.** Перевірити справедливість теореми Коші для функцій $f(x) = x^2 - 2x + 3$ і $\varphi(x) = x^3 - 7x^2 + 20x - 5$ на сегменті $\left[1, 4\right]$. Знайти відповідне середнє значення.

■ Функції $f(x)$, $\varphi(x)$ задовольняють умови теореми Коші на $\left[1, 4\right]$: неперервні на $\left[1, 4\right]$, диференційовні на $(1, 4)$ і

$\varphi'(x) = 3x^2 - 14x + 20 \neq 0$ для $\forall x \in R (D = 7^2 - 3 \cdot 20 < 0)$. Тоді $\exists\ c \in (1, 4)$ така, що

$$\frac{f(4) - f(1)}{\varphi(4) - \varphi(1)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)} \text{ або } \frac{11-2}{27-9} = \frac{2c-2}{3c^2 - 14c + 20}.$$

Розв'язуючи це рівняння, отримуємо $c = 2$ і $c = 4$. З цих двох значень тільки $c = 2$ є внутрішньою точкою сегмента $[1, 4]$. ■

Приклад 4 . Довести, що функція $y = x^2$ рівномірно неперервна на проміжку $(0, 2)$.

■ Нагадаємо достатню ознаку рівномірної неперервності функції на проміжку: якщо $f(x)$ має обмежену похідну на проміжку, тоді $f(x)$ рівномірно неперервна на ньому (наслідок теореми Лягранжа). Отже $f(x) = x^2$, $f'(x) = 2x$ і $|f'(x)| = |2x| < 4$, що доводить рівномірну неперервність функції $y = x^2$ на $(0, 2)$. ■

Завдання 9

У задачах 1-14 довести нерівності, використовуючи теорему Лягранжа.

1. $n(b-a)a^{n-1} < b^n - a^n \quad (0 < a < b, n \in N)$.
2. $n(b-a)b^{n-1} < b^n - a^n \quad (0 < a < b, n \in N)$.
3. $\dfrac{x}{1+x} < \ln(1+x), \quad x > 0$.
4. $x > \ln(1+x), \quad x > 0$.
5. $e^x > 1 + x, \quad x \in R$.
6. $e^x > x \cdot e, \quad x > 1$.
7. $x^a |\ln x| < \dfrac{1}{a \cdot e} \quad (0 < x < 1, a > 0)$.

8. $\left|\sin x - \sin y\right| \le \left|x - y\right|, \quad x, y \in R$.

9. $\left|\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y\right| \le \left|x - y\right|, \quad x, y \in R$.

10. $\left|\sqrt{x} - \sqrt{y}\right| \le \dfrac{1}{2}\left|x - y\right|, \quad x, y \in [1, \infty)$.

11. $\dfrac{a-b}{a} < \ln\dfrac{a}{b} \quad (0 < b < a)$.

12. $\dfrac{a-b}{b} > \ln\dfrac{a}{b} \quad (0 < b < a)$.

13. $\dfrac{\alpha-\beta}{\cos^2\beta} \le \operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta \quad \left(0 < \beta \le \alpha < \dfrac{\pi}{2}\right)$.

14. $\dfrac{\alpha-\beta}{\cos^2\alpha} \ge \operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta \quad \left(0 < \beta \le \alpha < \dfrac{\pi}{2}\right)$.

15. Довести, використовуючи теорему Ролля, що похідна многочлена $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$ має дійсний нуль в інтервалі $(-1, 1)$ і знайти його.

16. Перевірити справедливість теореми Коші для функцій $f(x) = x^2 + 4x$ і $\varphi(x) = x^3 - x - 2$ на сегменті $[1, 3]$. Знайти відповідне середнє значення.

17. Перевірити справедливість теореми Лягранжа для $f(x) = \ln x$ на $[1, e]$. Знайти відповідне середнє значення.

18. Перевірити справедливість теореми Коші для функцій $f(x) = \sqrt{x+9}$, $\varphi(x) = \sqrt{x}$ на сегменті $[1, 16]$. Знайти відповідне середнє значення.

19. Використовуючи теорему Лягранжа, знайти на дузі AB кривої $f(x) = x^2 - 8x$ точку M, у якій дотична до кривої $f(x)$ паралельна хорді AB, якщо $A(-1, 9)$, $B(5, -15)$.

20. Довести, використовуючи теорему Ролля, що похідна многочлена $f(x)=x^3-6x^2+11x-6$ має дійсний нуль в $(0,3)$.

21. Використовуючи теорему Лягранжа, знайти на дузі AB кривої $f(x)=2x-x^2$ точку M, в якій дотична до кривої $f(x)$ паралельна хорді AB, якщо $A(1,1)$, $B(3,-3)$.

22. Довести, що рівняння $3x^5+15x-8=0$ має тільки один дійсний корінь.

23. Перевірити, що функції $f(x)=x^2-2x+3$,

$\varphi(x)=x^3-7x^2+20x-5$ задовольняють умовам теореми Коші на відрізку $[1,4]$, знайти відповідне середнє значення.

Користуючись ознакою сталості функції, довести наступні рівності (24-26).

24. $\arcsin x+\arccos x=\dfrac{\pi}{2}$. 25. $2\sin^2 x=1-\cos 2x$.

26. $\arccos\dfrac{1-x^2}{1+x^2}=2\,\mathrm{arctg}\,x \ (x\geq 0)$.

27. Використовуючи теорему Ролля, довести, що $f'(x)$ функції

$$f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{\pi}{x}, & x\neq 0; \\ 0, & x=0, \end{cases}$$

рівна нулеві у нескінченному числі точок на $(0,1)$.

28. Довести, що усі три корені рівняння $f'(x)=0$ дійсні, якщо $f(x)=x(x-1)(x-2)(x-3)$.

29. Довести, що рівняння $16x^4-64x+31=0$ не може мати двох різних дійсних коренів на $(0,1)$.

30. Довести, що рівняння $e^{x-1}+x-2=0$ має корінь $x=1$ і не має інших дійсних коренів.

31. Записати формулу Лягранжа для функції $y=x\left(1-ln\,x\right)$ на проміжку $\left[a,b\right]\left(a,b>0\right)$.

Довести, що функція $y=f\left(x\right)$ рівномірно неперервна на вказаному проміжку $\left(32-35\right)$:

32. $y=\operatorname{arc\,tg} x,\quad x\in\left(-\infty,\infty\right)$.

33. $y=\sqrt{x},\ x\in\left[1,+\infty\right)$.

34. $y=\dfrac{x}{4-x^2},\quad x\in\left[-1,1\right]$.

35. $y=\dfrac{\sin x}{x},\quad x\in\left(0,\pi\right)$.

Завдання 10

Використовуючи правила Лопіталя, знайти

1. а) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt[3]{x^2}-16}{\sqrt{x}-2}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos 2x}{\sin 2x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\operatorname{arc\,tg} x}-\dfrac{1}{x}\right)$;

г) $\lim\limits_{x\to +0}\left(\operatorname{ctg} x\right)^{1/\ln x}$; д) $\lim\limits_{x\to +\infty}(\ln x-\sqrt{x})$.

2. а) $\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{10-x-6\sqrt{1-x}}{2+\sqrt[3]{x}}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\operatorname{arc\,tg} x}{x^3}$;

в) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{x}{\operatorname{ctg} x}-\dfrac{\pi}{2\cos x}\right)$; г) $\lim\limits_{x\to 1}x^{\frac{1}{1-x}}$; д) $\lim\limits_{x\to 1+}\ln x\cdot(\ln(x-1))$.

3. а) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt[3]{x^3+8}}{\sqrt[3]{x-6}+2}$; б) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^m-a^m}{x^n-a^n}\ (m\neq n,\ a\neq 0)$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\operatorname{ctg}^2 x\right)$; г) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}(\operatorname{tg} x)^{2x-\pi}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x)^x$.

4. а) $\lim\limits_{x\to16}\dfrac{\sqrt[4]{x}-2}{\left(\sqrt{x}-4\right)^{2/3}}$; б) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\sin ax}{\ln\sin bx}$;

в) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$; г) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)^x$; д) $\lim\limits_{x\to0+}\left(\ln\dfrac{1}{x}\right)^x$.

5. а) $\lim\limits_{x\to8}\dfrac{\sqrt[3]{x}-2}{\sqrt{9+2x}-5}$; б) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{2x}-1}{\arcsin 3x}$;

в) $\lim\limits_{x\to1}(x-1)\operatorname{ctg}\pi(x-1)$; г) $\lim\limits_{x\to0}(\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}}$; д) $\lim\limits_{x\to1-0}(1-x)^{\ln x}$.

6. а) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{1-2x+3x^2}-(1+x)}$; б) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\cos ax}{\ln\cos bx}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{a}{x}$; г) $\lim\limits_{x\to0}(e^x+x)^{1/x}$; д) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln 2x)^{1/\ln x}$.

7. а) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[7]{x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$; б) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x+e^{-x}-2x}{x-\sin x}$;

в) $\lim\limits_{x\to0+0}\left[\ln(x+e)\right]^{1/x}$; г) $\lim\limits_{x\to3}\left(2-\dfrac{x}{3}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{6}}$;

д) $\lim\limits_{x\to+0}\left[\ln(x)\ln(x-1)\right]$.

8. а) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{27+x}-\sqrt[3]{27-x}}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[5]{x}}$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\pi-2\operatorname{arctg}x}{e^{3/x}-1}$;

в) $\lim\limits_{x\to1+0}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{x}{\ln x}\right)$; г) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{(1+x)^{1/x}}{e}\right)^{\frac{1}{x}}$; д) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{ax}-e^{-2ax}}{\ln(1+x)}$.

9. а) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{8+3x-x^2}-2}{\sqrt[3]{x^3+x^2}}$; б) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sec^2x-2\operatorname{tg}x}{1+\cos 4x}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty} x^n \sin\dfrac{a}{x}$ $(n>0)$; г) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)\operatorname{tg} x$; д) $\lim\limits_{x\to 0} x^x$.

10. а) $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x^2}-4}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{x^5}$; в) $\lim\limits_{x\to 1}(\ln x)(\ln(x-1))$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\sin^2 x\right)^{1/\operatorname{tg}^2 x}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{\cos 3x-e^{-x}}$.

11. а) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt[3]{16x}-4}{\sqrt{4+x}-\sqrt{2x}}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$; в) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{x}{\operatorname{ctg} x}-\dfrac{\pi}{2\cos x}\right)$;

г) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}\right)$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\sin x}$.

12. а) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x+2}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\pi/x}{\operatorname{ctg}\dfrac{\pi x}{2}}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}(x-\ln^3 x)$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$; д) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{a^{\ln x}-x}{\ln x}$.

13. а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt[3]{9x}-3}{\sqrt{3+x}-\sqrt{2x}}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\sin mx)}{\ln\sin x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}(\arcsin x)\operatorname{ctg} x$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{ctg} x\right)^{\sin x}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x-x}{x-\sin x}$.

14. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{x^2-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{\operatorname{ctg} x}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\dfrac{a}{x}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}(e^x+x)^{1/x}$; д) $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}$.

15. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{4x}-2}{\sqrt{2+x}-\sqrt{2x}}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\sin x}{\operatorname{ctg} x}$; в) $\lim\limits_{x\to a}\left(2-\dfrac{x}{a}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2a}}$;

г) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-4\sin^2\left(\pi x/6\right)}{1-x^2}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\arcsin\dfrac{x-a}{a}\right)\operatorname{ctg}(x-a)$.

16. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$; б) $\lim\limits_{x\to 3+0}\dfrac{\cos x\ln(x-3)}{\ln^2(x-3)}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x)\operatorname{ctg} x$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\ln(1+x)^{1+x}}{x^2}-\dfrac{1}{x}\right)$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}(\pi-2\operatorname{arctg})\ln x$.

17. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{1+x}-2\sqrt{x}}$; б) $\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{\ln x}{1+2\ln\sin x}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty} x\ln^3 x$;

г) $\lim\limits_{x\to 0} x^{\sin x}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}(a^{1/x}-1)x$ $(a>0)$.

18. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{27+x}-\sqrt[3]{27-x}}{x+2\sqrt[3]{x^4}}$; б) $\lim\limits_{x\to 1-0}\dfrac{\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}}{\ln(1-x)}$;

в) $\lim\limits_{x\to\pi}(\pi-x)\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$; г) $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)^{\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{2}}$; д) $\lim\limits_{x\to 0} x^{1/\ln(e^x-1)}$.

19. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{8+3x+x^2}-2}{x^2+x}$; б) $\lim\limits_{x\to 3+0}\dfrac{\cos x\ln(x-3)}{\ln(e^x-e^3)}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg} x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}(e^x+e^{-x}-2)\operatorname{ctg} x$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\operatorname{ctg}^2 x\right)$.

20. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-2x+x^2}-(1+x)}{\sin x}$; б) $\lim\limits_{x\to 1-0}\dfrac{\ln(1-x)+\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}}{\operatorname{ctg}\pi x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} x^2 e^{1/x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x^2)^{1/x}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]$.

21. а) $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^3}$;

в) $\lim\limits_{x\to 1}\sin(x-1)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{1/x^2}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\operatorname{ch}\dfrac{a}{x}-1\right]$.

22. а) $\lim\limits_{x\to 16}\dfrac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{1-\sin\dfrac{\pi x}{2}}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}x(e^{1/x}-1)$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}x^{\frac{3}{4+\ln x}}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{5}{2+\sqrt{9+x}}\right)^{\frac{1}{\sin x}}$.

23. а) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{ch}t-1}{1-\cos x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{ctg}x-\dfrac{1}{x}\right)$;

г) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{4}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{1/x^2}-1}{2\operatorname{arctg}x^2-\pi}$.

24. а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x-\sin x}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}x^n e^{-x}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{ctg}x)^{\frac{1}{\ln x}}$; д) $\lim\limits_{x\to +0}(\ln\operatorname{ctg}x)^{\frac{1}{\operatorname{tg}x}}$.

25. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x^2}-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\ln(1+x)}$; в) $\lim\limits_{x\to a}\left[(a^2-x^2)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2a}\right]$;

г) $\lim\limits_{x\to +\infty}(x+2^x)^{1/x}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(a+x)^x-a^x}{x^2}$ $(a>0)$.

26. а) $\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-3x-1}{\sin^2 5x}$; в) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{x}{\ln x}\right)$;

г) $\lim\limits_{x\to +\infty}x^{1/x}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\operatorname{ch}x}{\sqrt[m]{\operatorname{ch}x}-\sqrt[n]{\operatorname{ch}x}}$.

27. а) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$; б) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\operatorname{ctg}x-1}{\sin 4x}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)\right]$;

г) $\lim\limits_{x\to+0} \dfrac{1}{x^{\ln(e^x-1)}}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2}{\pi}\arccos x\right)^{\frac{1}{x}}$.

28. а) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{1+x}-2\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-4x^2+5x-2}{x^3-5x^2+7x-3}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{ctg} x-\dfrac{1}{x}\right)$; г) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0} (\pi-2x)^{\cos x}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\cos x}{\operatorname{ch} x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

29. а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x+2\sqrt[3]{x^4}}$; б) $\lim\limits_{\begin{cases}x\to+\infty\\(m>0)\end{cases}} \dfrac{\ln x}{x^m}$; в) $\lim\limits_{x\to 0} x^2 e^{1/x^2}$;

г) $\lim\limits_{x\to+0} (\arcsin x)^{\operatorname{tg} x}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{ctg} x-\dfrac{1}{x}\right)$.

30. а) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{3+x}-\sqrt{2x}}{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}$; б) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-\sin x}{x-\operatorname{tg} x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{\cos\dfrac{\pi x}{2}\ln(1-x)}$; г) $\lim\limits_{x\to 0+} x^{\sin x}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\arcsin x}{x}\right)^{1/x^2}$.

7. Формула Тейлора

Для функції $y=f(x)$ $\exists f^{(n)}(x)<\infty$ і вона неперервна для $\forall x\in[a,a+\delta]$, крім цього $\exists f^{(n+1)}(x)<\infty$ для $\forall x\in(a,a+\delta)$ $(\delta>0)$. За цих умов справедлива формула

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+$$

$$+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+r(x),$$

яку називають *формулою Тейлора* n–го порядку функції $f(x)$ за степенями $(x-a)$ (в околі точки $x=a$) з залишковим членом $r(x)$, який може бути записаний, наприклад, у формі Лягранжа

$$r(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{(n+1)},\text{ де } \xi\in(a,a+\delta),$$

або у формі Пеано

$$r(x)=0\left((x-a)^n\right) \text{ при } x\to a.$$

Якщо $a=0$, тоді формулу Тейлора називають *формулою Маклорена.* Зауважимо, що формулу Тейлора (з відповідними умовами на $f(x)$) можна записати і для $\forall x\in(a-\delta,a)$ або $\forall x\in(a-\delta,a+\delta)$. У цьому випадку зручно середню точку ξ записувати таким чином $\xi=a+\theta(x-a)$, де $\theta\in(0,1)$.

Запишемо найбільш вживані формули Маклорена для елементарних функцій з залишковим членом у формі Пеано (всюди нижче, записуючи $o(x^n)$, будемо вважати, що $x\to 0$):

1. $e^x=1+\dfrac{x}{1!}+\dfrac{x^2}{2!}+...+\dfrac{x^n}{n!}+0(x^{(n)})$.

2. $\sin x=\dfrac{x}{1!}-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}-...+(-1)^k\dfrac{1}{(2k+1)!}x^{2k+1}+0(x^{2k+1})$.

3. $\cos x=1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}-\dfrac{x^6}{6!}+...+(-1)^k\dfrac{x^{2k}}{(2k)!}+0(x^{2k})$.

4. $\begin{cases}(1+x)^\alpha=1+\dfrac{\alpha}{1!}x+\dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+...+\\ +\dfrac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n+0(x^n), \quad \alpha\in R.\end{cases}$

5. $\begin{cases} \ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n} + 0(x^n), \\ |x| < 1. \end{cases}$

6. $\begin{cases} \ln(1 - x) = -\left(x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + \ldots + \dfrac{x^n}{n} \right) + 0(x^n), \\ |x| < 1. \end{cases}$

7. $\operatorname{sh} x = x + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \ldots + \dfrac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + 0(x^{2k+1})$.

8. $\operatorname{ch} x = 1 + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \ldots + \dfrac{x^{2k}}{(2k)!} + 0(x^{2k})$, де $n = 0, 1, 2, \ldots$

Приклад 1. Записати формулу Маклорена 4-ого порядку для функції $f(x) = e^x \ln(1+x)$.

■ Функція $f(x)$ неперервно диференційовна до четвертого порядку в околі точки $x = 0$, тому, використовуючи формули (1.5), отримуємо

$$f(x) = e^x \ln(1+x) =$$

$$= \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + 0(x^3)\right)\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + 0(x^4)\right) =$$

$$= x + \left(-\frac{1}{2} + 1\right)x^2 + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)x^3 + \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6}\right)x^4 + 0(x^4) =$$

$$= x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + 0(x^4),\ x \to 0.$$

При цьому ми користувалися формулами:

$0(x^n) + 0(x^n) = 0(x^n)$. $0(x^n) \cdot 0(x^m) = 0(x^{n+m})$. $0(x^n) = 0(x^k)$ при $n \ge 2,\ k = 1, 2, \ldots, n-1$.

$x^n 0(x^m) = 0(x^{n+m}) \quad \big(m, n \in N,\ x \to 0\big)$. ■

Приклад 2. Знайти головну частину функції $f(x) = \sin\big(\sin x\big) - x\sqrt[3]{1-x^2}$ за шкалою $\left\{x^k\right\} = G$.

■ Для функції $f_1(x) = \sin\big(\sin x\big)$ застосуємо формулу (2), оскільки $\sin x \to 0$ при $x \to 0$:

$$\sin(\sin x) = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3!} + \frac{\sin^5 x}{5!} + 0(x^5),$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + 0(x^5).$$

Запишемо

$$\sin^3 x = \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + 0(x^5)\right)^3 =$$

$$= (x + \alpha(x))^3 = x^3 + 3x^2\alpha(x) + 3x\alpha^2(x) + \alpha^3(x),$$

де $\alpha(x) = -\dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120} + 0(x^5) = -\dfrac{x^3}{6} + 0(x^3)$.

Тоді $x\alpha^2(x) = x\dfrac{x^6}{6^2} = 0(x^5)$. $\alpha^3(x) = -\dfrac{x^9}{216} = 0(x^5)$,

$$3x^2\alpha(x) = 3x^2\left(-\frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + 0(x^5)\right) = -\frac{1}{2}x^5 + 0(x^5),$$

$\sin^3 x = x^3 - \dfrac{1}{2}x^5 + 0(x^5)$. Крім цього $\sin^5 x = x^5 + 0(x^5)$.

Отже $f_1(x) = \left(x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120} + 0(x^5)\right) - \dfrac{1}{6}\left(x^3 - \dfrac{1}{2}x^5 + 0(x^5)\right) +$

$$+ \frac{1}{120}x^5 + 0(x^5) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} + 0(x^5).$$

Для функції $f_2(x) = x\sqrt[3]{1-x^2}$, використовуючи формулу (4), запишемо

$$f_2(x) = x(1-x^2)^{1/3} = x\left(1 + \frac{1}{3}(-x^2) + \frac{\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3}\right)}{2!}(-x^2)^2 + 0(x^4)\right) =$$

$$= x\left(1 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{9}x^4 + 0(x^4)\right) = x - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{9}x^5 + 0(x^5),$$

де $x \cdot 0(x^4) = 0(x^5)$.

Тоді формула Маклорена для $f(x)$ п'ятого порядку має вигляд

$$f(x) = \sin\left(\sin x\right) - x\sqrt[3]{1-x^2} = \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} + 0(x^5)\right) -$$

$$-\left(x - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{9}x^5 + 0(x^5)\right) = \frac{19}{90}x^5 + 0(x^5).$$

Відповідь. Функція $g(x) = \frac{19}{90}x^5$ є головною частиною функції

$f(x) = \sin\left(\sin x\right) - x\sqrt[3]{1-x^2}$ за шкалою $G = \left\{x^{\text{K}}\right\}$. ■

Приклад 3. Використовуючи формулу Тейлора, знайти

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin\left(\sin x\right) - x\sqrt[3]{1-x^2}}{\operatorname{tg}^5 x}.$$

■ При $x \to 0$ маємо невизначеність $\left[\frac{0}{0}\right]$. Знайдемо головну

частину функції $f(x) = \sin\left(\sin x\right) - x\sqrt[3]{1-x^2}$ за шкалою $\left\{x^{\text{K}}\right\}$ (див. приклад 2):

$\sin\left(\sin x\right) - x\sqrt[3]{1-x^2} = \frac{19}{90}x^5 + 0(x^5)$ і функції

$g(x) = \text{tg}^5 x = x^5 + 0(x^5)$.

Тоді $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin\left(\sin x\right) - x\sqrt[3]{1-x^2}}{\text{tg}^5 x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{19}{90}x^5 + 0(x^5)}{x^5 + 0(x^5)} =$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{19}{90} + \frac{0(x^5)}{x^5}}{1 + \frac{0(x^5)}{x^5}}$, оскільки $\dfrac{0(x^5)}{x^5} \to 0$ при $x \to 0$. ■

Приклад 4. Знайти наближене значення функції $y = \cos x$ при $x = 5^0$, взявши три перших члени розкладу її за формулою Тейлора. оцінити похибку обчислення.

■ Оскільки обчислення треба вести при значенні x близькому до нуля, то застосуємо формулу Маклорена (3). Запишемо три перших члени розкладу і залишковий член у формі Лагранжа:

$$\cos x = 1 + \frac{0}{1!}x - \frac{x^2}{2!} + r(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + r(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{f'''(\xi)}{3!}x^3,$$

де $\xi \in (0, x)$.

Оскільки $x = 5^0 \sim \dfrac{\pi}{36}$ радіан і $\cos 5^0 = \cos\dfrac{\pi}{36}$,

$\dfrac{x^2}{2!} = \dfrac{\pi}{2\cdot 36^2} \approx 0,003808$, то $\cos 5^0 \approx 1 - 0,003808 = 0,99619$.

Зауважимо, що четвертий член розкладу функції $\cos x$ у формулі Маклорена рівний нулеві, тому похибка обчислення може бути зменшена.

Оцінимо $\left|\dfrac{f^{(4)}(\xi)}{4!}x^4\right| = \dfrac{|\cos\xi|}{4!}\cdot\dfrac{\pi^4}{36^4} \le \dfrac{\pi^4}{4!36^4} < 2{,}5\cdot 10^{-6}$. ■

Завдання 11

Знайти головну частину функції $y = f(x)$ за шкалою $G = \left\{(x-a)^k\right\}$ (при $x \to a$), якщо

1. $y = \dfrac{x}{1-x} - \ln(1+x+x^2),\ a = 0$.
2. $y = e^x - 1 - \ln\left(1 + x + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^4}{8}\right),\ a = 0$.
3. $y = \sqrt[4]{x^2 - x + 1} - \sqrt[8]{e^{x^2-1}},\ a = 1$.
4. $y = \operatorname{tg} x - \ln(x + \sqrt{1+x^2}),\ a = 0$.
5. $y = \arccos x,\ a = 1-0$.
6. $y = \ln\sin\dfrac{\pi x}{2},\ a = 1-0$.
7. $y = 3\cdot 2^x - 2\cdot 3^x,\ a = 1-0$.
8. $y = x\sqrt[3]{\cos x} - \sin x,\ a = 0$.
9. $y = \sin(\sin x) - \operatorname{th} x,\ a = 0$.
10. $y = \sqrt{\cos x} - \sqrt[4]{e^{-x^2}},\ a = 0$.
11. $y = \ln\cos x^2 + \sqrt[6]{1+3x^4} - 1,\ a = 0$.
12. $y = \cos 2x - e^{-2x^2 + \frac{4}{3}x^4},\ a = 0$.

13. $y = 2\sin^2 x - 1 + e^{-2x^2 + \frac{4}{3}x^4}$, $a = 0$.

14. $y = \left(1 + x^2\right)^{\frac{1}{x} + 5} - e^x$, $a = 0$.

15. $y = \operatorname{tg} x - x\sqrt[3]{1 + x^2}$, $a = 0$.

16. $y = 18\sqrt[3]{\sin x^3} - 18x + x^7$, $a = 0$.

17. $y = \left(\cos x\right)^{\sin x} - \sqrt{1 - x^2}$, $a = 0$.

18. $y = \ln\cos^2 x + x^2\sqrt{1 + x^2 - x^4}$, $a = 0$.

19. $y = \cos\left(\sin x\right) - \sqrt{1 - x^2 + x^4}$, $a = 0$.

20. $y = \operatorname{tg}\left(\sin x\right) - \operatorname{sh} x$, $a = 0$.

21. $y = \left(\sqrt[5]{\cos x} - 1\right)^2 \operatorname{arctg} x$, $a = 0$.

22. $y = x^3\sqrt{1 + x} - \sin^3 x - \dfrac{x^3}{2}\operatorname{tg} x$, $a = 0$.

23. $y = \ln(1 + x^2)(\sqrt[3]{1 + 2x^3} - 1)$, $a = 0$.

24. $y = e^{x^2}\cos x - \operatorname{ch} x - e^{-x^2}\operatorname{ch} x + \cos x$, $a = 0$.

25. $y = \sqrt[3]{1 + 3\sin x} - e^{-x^2} - \operatorname{sh} x$, $a = 0$.

26. $y = e^x - \cos x\sqrt[3]{1 + 3x + 6x^2}$, $a = 0$.

27. $y = \sin\left(xe^{\frac{x^2}{6}}\right) - x\cos x^2$, $a = 0$.

28. $y = x\sqrt{1 - x^2} - \cos x \cdot \ln\left(1 + x\right) - \dfrac{x^2}{2}$, $a = 0$.

29. $y = \ln\dfrac{\sin x}{x} + e^{\frac{x^2}{6}} - 1$, $a = 0$.

30. $y = \ln\cos x + \sqrt{1+x^2} - 1, \quad a = 0$.

Завдання 12

Використовуючи формулу Тейлора, знайти наступні границі.

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x+x^2) - \dfrac{x}{x-1}}{\sin x^2}$.

2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1 + \ln\left(1 + x + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^4}{8}\right)}{x\ln(1+x^2)}$.

3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - \ln(x + \sqrt{1+x^2})}{x \operatorname{tg} x^2}$. 4. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[4]{x^2 - x + 1} - \sqrt[8]{e^{x^2} - 1}}{(x-1)^3}$.

5. $\lim\limits_{x\to 1-0} \dfrac{\ln\sin\dfrac{\pi x}{2}}{\sin(1-x)^2}$.

6. $\lim\limits_{x\to 1-0} \dfrac{\arccos x}{\sqrt{1-x}}$.

7. $\lim\limits_{x\to 1-0} \dfrac{3\cdot 2^x - 2\cdot 3^x}{1-x}$.

8. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(\sin x) - \operatorname{th} x}{x^5}$.

9. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\sqrt[3]{\cos x} - \sin x}{\operatorname{tg} x^5}$.

10. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{\cos x} - \sqrt[4]{e^{-x^2}}}{x\sin x^3}$.

11. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\cos x^2 + \sqrt[6]{1+3x^4} - 1}{x^4\ln(1+x^4)}$.

12. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos 2x - e^{-2x^2 + \frac{4}{3}x^4}}{\operatorname{tg} x^4}$.

13. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\sin^2 x - 1 + e^{-2x^2 + \frac{4}{3}x^4}}{x^2\ln(1+x^2)}$.

14. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x^2)^{\frac{1}{x}+5} - e^x}{\ln\cos x}$.

15. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - x\sqrt[3]{1+x^2}}{x^2\sin^3 x}$. 16. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{18\sqrt[3]{\sin x^3} - 18x + x^7}{x^{13}}$.

17. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\cos^2 x + x^2\sqrt[6]{1+x^2-x^4}}{x^2\sin^2 x^2}$.

18. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(\sin x) - \sqrt{1-x^2+x^4}}{\ln(1+x^4)}$.

19. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg}(\sin x) - \operatorname{sh} x}{(\sqrt[5]{\cos x}-1)\operatorname{arctg} x}$. 20. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2\sqrt{1+x} - \sin^2 x - \dfrac{x^3}{2}\operatorname{tg} x}{x^2(\sqrt[3]{1+2x^3}-1)}$.

21. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+3\sin x} - e^{-x^2} - \operatorname{sh} x}{\arcsin x^3}$. 22.

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - \cos x\sqrt[3]{1+3x+6x^2}}{(\arcsin 2x)\cdot(\operatorname{tg} x)\cdot \operatorname{sh} 3x}$.

23. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{-x^2/2} - \sqrt[4]{\cos 2x}\cdot \operatorname{ch} x^3}{\ln^2(\cos 2x)}$. 24. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x^2}\cos x - \operatorname{ch} x}{x^5 + x^3\sin x^3}$.

25. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x^2}\cos x - \operatorname{ch} x + x^5}{x^6 + x^2\sin^3 x}$. 26. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+2\operatorname{tg} x} - e^x + x^2}{\arcsin x - x}$.

27. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\operatorname{arctg} x} - \dfrac{1}{1-x} + \dfrac{x^2}{2}}{\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) - 2x}$. 28. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos\left(\operatorname{sh}\dfrac{x}{\sqrt{5}}\right) - \sqrt[5]{1-\dfrac{x^2}{2}}}{\operatorname{ch}(\sin x) - e^{\frac{x^2}{2}}}$.

29. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - x + \dfrac{x^3}{6}}{x - \operatorname{th} x}$.

30. $\lim\limits_{x\to 0}\left[\cos(xe^{x})-\ln(1-x)-x\right]^{\operatorname{ctg} x^{3}}$.

Завдання 13

Знайти наближене значення функції $y=f(x)$ при $x=x_0$, взявши два ненульових члени розкладу її за формулою Тейлора. Оцінити похибку обчислення (задачі 1-10):

1. $y=\ln(1+x),\quad x_0=0,3$.
2. $y=\sqrt{x+1},\quad x_0=0,08$.
3. $y=\cos x,\quad x_0=5^0$.
4. $y=\sin x,\quad x_0=10^0$.
5. $y=\sin x,\quad x_0=18^0$.
6. $y=\cos x,\quad x_0=6^0$.
7. $y=\sqrt[3]{1+x},\quad x_0=0,01$.
8. $y=\sqrt[3]{1+x},\quad x_0=0,12$.
9. $y=\ln(1+x),\quad x_0=0,1$.
10. $y=\ln(1+x),\quad x_0=0,3$.

Обчислити наближено з заданою точністю ε, використовуючи представлення формулою Маклорена відповідної функції і оцінку залишкового члена у формі Лагранжа (задачі 11-30):

11. $\sqrt[3]{e},\quad \varepsilon=10^{-3}$.
12. $\operatorname{arctg} 0,8,\quad \varepsilon=10^{-3}$.
13. $\sqrt[3]{1,4},\quad \varepsilon=10^{-3}$.
14. $\sqrt[5]{250},\quad \varepsilon=10^{-3}$.
15. $\sin 45^0,\quad \varepsilon=10^{-3}$.
16. $\sqrt[10]{1,5},\quad \varepsilon=10^{-4}$.
17. $(1,2)^{0,5},\quad \varepsilon=10^{-3}$.
18. $\dfrac{1}{\sqrt[4]{e}},\quad \varepsilon=10^{-3}$.
19. $\cos^2 10^0,\quad \varepsilon=10^{-3}$.
20. $\sin^2 10^0,\quad \varepsilon=10^{-3}$.
21. $\ln 1,1,\quad \varepsilon=10^{-4}$.
22. $\sin 18^0,\quad \varepsilon=10^{-4}$.
23. $\cos 18^0,\quad \varepsilon=10^{-4}$.
24. $\sqrt[5]{34},\quad \varepsilon=10^{-4}$.
25. $\arcsin 0,1,\quad \varepsilon=10^{-5}$.
26. $\sin 1^0,\quad \varepsilon=10^{-5}$.
27. $\sqrt[4]{90},\quad \varepsilon=10^{-4}$.
28. $\ln 1,5,\quad \varepsilon=10^{-3}$.
29. $e,\quad \varepsilon=10^{-3}$.
30. $\ln 1,2,\quad \varepsilon=10^{-3}$.

8. Застосування похідних при вивченні властивостей функції.

При вивченні властивостей функції $y = f(x)$ і побудові графіка функції можна притримуватися наступної схеми.
1. Знайти область визначення функції, проміжки знакосталості, точки перетину з осями координат.
2. Перевірити чи є функція парною або непарною або загального вигляду. Перевірити чи є функція періодичною.
3. Знайти поведінку функції у граничних точках області визначення (в тому числі і при $+\infty$ і $-\infty$), інтервали неперервності функції, точки розриву і поведінку функції в околі точок розриву. Вказати наявність вертикальних асимптот.
4. Знайти похилі асимптоти.
5. Знайти похідну функції, критичні точки, проміжки монотонності функції і локальні екстремуми.
6. Знайти другу похідну функції і за її допомогою проміжки, на яких функція опукла вверх або вниз, а також точки перегину.
7. За результатами проведеного дослідження побудувати графік функції.

Приклад 1. Провести повне дослідження властивостей функції $y = x\,e^{-1/x}$ і побудувати її схематичний графік.
1. Область визначення функції $D(y) = R \setminus \{0\}$. Оскільки $e^{-1/x} > 0$ для $\forall x \in D(y)$, то $\operatorname{sgn} y = \operatorname{sgn} x$. Отже графік функції розташований у I і III чверті декартової системи координат XoY. Оскільки $x \neq 0$, а отже і $y \neq 0$, то графік функції $(\Gamma f(x))$ не перетинає осей координат.
2. Перевіримо умову парності (непарності) функції:
$f(-x) = f(x)\ (f(-x) = -f(x))$ $\quad f(-x) = (-x)e^{-1/-x} =$
$= -x\,e^{1/x} \neq f(x)$, а також $f(-x) \neq -f(x)$. Отже функція загального вигляду. Перевіримо умову періодичності

$f(x+T)=f(x)$, $T>0$. Очевидно, що дана функція не є періодичною.

3. Точка $x=0$ є точкою розриву функції, отже функція неперервна (як елементарна функція) в області визначення. Знайдемо поведінку функції в околі точки розриву:

$$y(0-0)=\lim_{\substack{\begin{cases}x\to 0\\ x<0\end{cases}}} f(x)=\lim_{x\to 0-0} x\,e^{-\frac{1}{x}}=\left[0\cdot e^{-\frac{1}{-0}}=0\cdot e^{+\frac{1}{0}}=0\cdot e^{\infty}=0\cdot\infty\right]$$

Покладемо $t=\dfrac{1}{x}$, тоді при $x\to 0-0$ змінна $t\to-\infty$.

Тоді $y(0-0)=\lim\limits_{t\to-\infty}\dfrac{1}{t}e^{-t}=\left[\dfrac{e^{+\infty}}{-\infty}=\dfrac{\infty}{-\infty}\right]\triangleq\lim\limits_{t\to-\infty}\dfrac{(e^{-t})'}{(t)'}=$

$$=\lim_{t\to-\infty}\frac{-e^{-t}}{1}=\left[-e^{+\infty}=-\infty\right]=-\infty.$$

$$y(0+0)=\lim_{x\to 0+0} x\,e^{-\frac{1}{x}}=$$

$$=\left[0\cdot e^{-\frac{1}{+0}}=0\cdot e^{-\infty}=0\cdot\frac{1}{e^{+\infty}}=0\cdot\frac{1}{+\infty}=0\cdot 0=0\right]=0.$$

Таким чином точка $x=0$ є точкою розриву II роду функції, а пряма $x=0$ – вертикальною асимптотою.

4. Знайдемо, якщо вона існує, похилу асимптоту $y=kx+b$,

де $\quad k=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\,e^{-1/x}}{x}=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-\frac{1}{x}}=\left[e^{-\frac{1}{+\infty}}=e^{-0}=e^{0}=1\right]=1$. очевидно, що і при $x\to-\infty$ отримуємо $k=1$.

$$b=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to+\infty}\left(x\,e^{-\frac{1}{x}}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}x\left(e^{\frac{-1}{x}}-1\right)=\left[\infty\cdot 0\right].$$

Для розкриття цієї невизначеності зробимо заміну $t=\dfrac{1}{x}$ $(x\to+\infty,\ t\to 0+)$ і застосуємо правило Лопіталя.

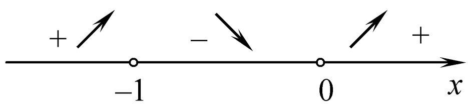
$b=\lim\limits_{t\to0+}\dfrac{1}{t}(e^{-t}-1)=\lim\limits_{t\to0+}\dfrac{e^{-t}-1}{t}=\left[\dfrac{0}{0}\right]\triangleq\lim\limits_{t\to0+}\dfrac{-e^{-t}}{1}=-1$. Очевидно, що і при $x\to-\infty$ отримуємо $b=1$. Таким чином рівнянням похилої асимптоти є $y=x-1$.

5. Знайдемо $f'(x)=(x\,e^{-1/x})'=1\cdot e^{-1/x}+x\cdot e^{-1/x}\cdot\left(-\dfrac{-1}{x^2}\right)=$

$$=e^{-1/x}\left(1+\frac{1}{x}\right)=\frac{x+1}{x}e^{-1/x}.$$

Прирівнюємо $f'(x)=0$, отримуємо стаціонарну точку $x=-1$ $(e^{-1/x}>0$ для $\forall x\in D(y))$ і критичну точку $x=0$ (у якій $\nexists f'(x)$). Точка $x=0$ є точкою розриву функції, отже не може бути точкою локального екстремуму.

Знайдемо інтервали монотонності $f\left(x\right)$: дослідимо зміну знаку $f'(x)$: $\operatorname{sgn} f'(x)=\operatorname{sgn}\dfrac{x+1}{x}e^{-1/x}=\operatorname{sgn}x(x+1)$. Отримуємо



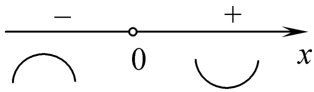
$f(x)\uparrow$ при $x\in(-\infty,-1)\bigcup(0,+\infty)$ і $f(x)\downarrow$ при $x\in(-1,0)$. Точка $x=-1$ задовольняє достатню умову $\exists\,\textit{лokextr}$, а саме, в ній є $\textit{лok max}$. Знайдемо значення функції у цій точці $y_{\max}(x)=y(-1)=-e$.

6. Знайдемо другу похідну функції:

$$f''(x)=\left[e^{-1/x}\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]'=e^{-1/x}\left(-\frac{1}{-x^2}\right)\left(1+\frac{1}{x}\right)+e^{-1/x}\left(-\frac{1}{x^2}\right)=$$

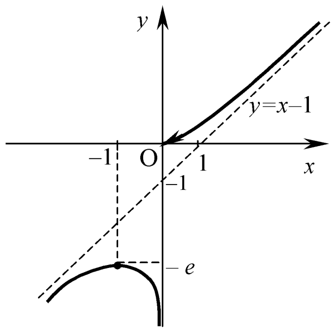
$$=\frac{1}{x^2}e^{-1/x}\left(\cancel{1}+\frac{1}{x}-\cancel{1}\right)=\frac{1}{x^3}e^{-1/x}.$$

Дослідимо знак $f''(x)$: $\operatorname{sgn} f''(x)=\operatorname{sgn} x$,



отже $f(x)$ опукла вниз при $x\in(0,+\infty)$. Точка $x=0$ є точкою розриву функції, тому не може бути точкою перегину графіка функції.

7. Побудуємо схематичний графік функції



При доведенні певних нерівностей між функціями часто використовують поведінку похідних функцій, які описують ці нерівності. Нагадаємо основні означення і теореми.

Означення 1. Функція $f(x)$ строго монотонно зростає (не спадає) на проміжку $X\in R$, якщо для $\forall x_1,x_2\in X$ і таких, що $x_1<x_2$ виконується нерівність

$$f(x_1) < f(x_2) \qquad (f(x_1) \le f(x_2)).$$

(Для строго монотонно спадної (не зростаючої) функції виконується нерівність $f(x_1) > f(x_2) \quad (f(x_1) \ge f(x_2))$. У всіх вказаних випадках $f(x)$ називають монотонною на X.

Сформулюємо необхідні і достатні умови монотонності функції.

Теорема. Нехай $f(x) \in \mathbb{C}\left[a,b\right]$ і диференційовна на (a,b). Для того, щоб $f(x)$ була не спадною (не зростаючою) на (a,b) необхідно і достатньо, щоб $f'(x) \ge 0 \quad (f'(x) \le 0)$ для $\forall x \in (a,b)$.

Означення 2. Точку $x = x_0$ називають *точкою локального максимума* $лok \max\ f(x)$ (*локального мінімума*: $лok \min\ f(x)$), якщо $\exists B(x_0, \delta)$ такий, що для $\forall x \in B(x_0, \delta)$ виконується нерівність $f(x) \le f(x_0) \quad (f(x) \ge f(x_0))$. Точки $лok \max$ і $лok \min\ f(x)$ називають точками локального екстремума $(лokextr) f(x)$, їх слід шукати серед стаціонарних точок $f(x)$, тобто точок, у яких $f'(x) = 0$ або серед точок у яких $\nexists f'(x)$. Точки підозрілі на $(лokextr) f(x)$ називають *критичними точками*.

Дослідження критичних точок на $(лokextr) f(x)$ полягає в перевірці достатніх умов $\exists\, лokextr\ f(x)$. Сформулюємо їх.

Теорема 1. (Достатні умови $\exists\, лokextr\ f(x)$ у критичній точці). Припустимо, що 1) $f(x)$ неперервна в точці x_0, 2) $f(x)$ диференційовна у $B(x_0, \delta)$, крім, можливо, точки $x = x_0$, 3) x_0 – критична точка. Якщо $f'(x)$ при переході через x_0 змінює знак з "+" на " – " (з " – " на " + "), тоді x_0 є точкою $лok \max\ f(x)$ ($лok \min\ f(x)$).

Теорема 2. (Достатні умови $\exists \text{лок} extr\, f(x)$ у стаціонарній точці). Припустимо, що 1) $\exists f^{(n-1)}(x) < \infty$ для $\forall x \in B(x_0, \delta)$, 2) x_0 стаціонарна точка $f(x)$ і

$f'(x_0) = f''(x_0) = ... = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, 3) $\exists f^{(n)}(x_0) < \infty$ і $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Якщо

1) n – парне і $f^{(n)}(x_0) < 0$, тоді x_0 є точкою $\text{лок}\min\ f(x)$;

2) n – парне і $f^{(n)}(x_0) > 0$, тоді x_0 є точкою $\text{лок}\max\ f(x)$;

3) n – непарне, тоді $\nexists(\text{лок} extr) f(x)$ в точці x_0.

Означення 3. Функцію $f(x)$ називають опуклою вниз ($\cup$) на $(a,b) \subset D(f)$, якщо для $\forall x_1, x_2 \in (a,b)$ і $\alpha \in [0,1]$ виконується нерівність $f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \leq \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2)$. Функцію $f(x)$ називають опуклою вверх ($\cap$) на (a,b), якщо $[-f(x)]$ є опуклою вниз на (a,b).

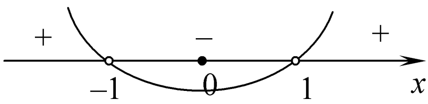
Сформулюємо необхідні і достатні умови опуклості функції на інтервалі.

Теорема. Припустимо, що $\exists f''(x) < \infty$ для $\forall x \in (a,b)$. Для того, щоб $f(x)$ була опукла вниз ($f \cup$) (опукла вверх: ($f \cap$)) на (a,b) необхідно і достатньо, щоб $f''(x) \geq 0$ ($f''(x) \leq 0$) для $\forall x \in (a,b)$.

Точки, у яких $f(x)$ змінює характер опуклості, називають точками перегину.

Приклад 2. Довести нерівність $\operatorname{arctg} x \leq x - \dfrac{x^3}{6}$ для $\forall x \in [0,1]$.

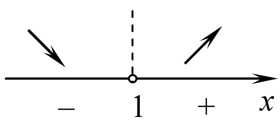
■ Розглянемо функцію $f(x) = \operatorname{arctg} x - x + \frac{x^3}{6}$, яка неперервна на $[0,1]$. Знайдемо $f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - 1 + \frac{x^2}{2} = \frac{x^2(x^2-1)}{2(1+x^2)}$ і дослідимо її на монотонність: $\operatorname{sgn} f'(x) = \operatorname{sgn}(x^2-1)$.



Коли $x \in (0,1)$ $\operatorname{sgn} f(x) = -1$, отже для $\forall x \in (0,1)$ виконується нерівність $f(x) < f(0) = 0$, тобто $\operatorname{arctg} x - x + \frac{x^3}{6} \le 0$ для $\forall x \in [0, 1]$. ■

Приклад 3. Довести нерівність $x^3 \ge 1 + 3\ln x$ для $x > 0$.

■ Розглянемо функцію $f(x) = x^3 - 1 - 3\ln x$ і дослідимо її на екстремум при $x > 0$. Знайдемо $f'(x) = 3x^2 - \frac{3}{x} = \frac{3(x^3-1)}{x}$. Оскільки $x > 0$, то $\operatorname{sgn} f(x) = \operatorname{sgn}(x^3-1) = \operatorname{sgn}(x-1)$



*Лок*min

і $f(x)\downarrow$ при $x \in (0,1)$ і $f(x)\uparrow$ при $x > 1$. Функція $f(x)$ має *min* у точці $x = 1$, тобто для $\forall x > 0$ виконується нерівність $f(x) \ge f(1) = 0$. Отже $x^3 - 1 - 3\ln x \ge 0$ для $\forall x \in (0, \infty)$. ■

Приклад 4. Довести нерівність $e^{\frac{x+2y}{3}} \le \frac{1}{3}e^x + \frac{2}{3}e^y$ для $\forall x, y \in R$.

■ Розглянемо функцію $f(x) = e^x$. Оскільки $f'(x) = f''(x) = e^x > 0$ для $\forall x \in R$, то $f(x) = e^x$ опукла вниз на всій числовій осі. Тоді згідно з означенням опуклої вниз функції, для $\forall x_1 = x,\ x_2 = y \in R$ і $\alpha = \frac{1}{3},\ 1 - \alpha = \frac{2}{3}$ виконується нерівність

$$f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) = e^{\frac{x}{3}+\frac{2}{3}y} \le \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2) = \frac{1}{3}e^x + \frac{2}{3}e^y. ■$$

Приклад 5. Знайти найбільше і найменше значення функції $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x - 8$ на сегменті $[-3, 6]$.

■ Функція $f(x) \in \mathbb{C}[-3, 6]$, отже, згідно з другою теоремою Вейерштраса про неперервні функції на сегменті, набуває на цьому сегменті свої найбільше і найменше значення. Ці значення слід шукати серед точок $(лоkextr) f(x)$ і значень $f(a)$ і $f(b)$.

Знайдемо $f(a) = f(-3) = 19$. $f(b) = f(6) = 100$. Знайдемо $лоkextr\ f(x)$: $f'(x) = 6x^2 - 6x - 36 = 6(x+2)(x-3)$. Точки $x = -2$ і $x = 3$ є стаціонарними точками $f(x)$, які належать сегменту $[-3, 6]$. Знайдемо $f''(x) = 12x - 6$. Оскільки $f''(-2) = -24 - 6 < 0$, то точка $x = -2$ є точкою $лоk\max\ f(x)$: $f(-2) = 36$. При $x = 3$: $f''(3) = 36 - 6 > 0$, то точка $x = 3$ є точкою $лоk\min\ f(x)$ і $f(3) = -89$. Таким чином

$$\sup_{[-3,6]} f(x) = \max\{-89,19,36,100\} = f(6) = 100$$

$$\inf_{[-3,6]} f(x) = \min\{-89,19,36,100\} = f(3) = -89. \blacksquare$$

При побудові графіка функції $y = f(x)$, яка задана параметричним чином $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in (\alpha, \beta)$, треба враховувати той факт, що одному і тому ж значенню x може відповідати декілька значень y (функція не є однозначною). Тому не можна запропонувати схему дослідження, яку застосовуємо у тому випадку, коли функція задана явно і є однозначною. Корисно спочатку побудувати графіки функцій $x = x(t)$ і $y = y(t)$ у декартовій системі координат tox і toy (вважаючи t незалежною змінною). Розбити вісь Ot на інтервали, у кожному з яких обидві функції монотонні. На кожному з цих інтервалів, згідно з теоремою про існування оберненої функції, існують функції $t = t(x)$ і $t = t(y)$, до яких можна застосувати раніше запропоновану схему дослідження.

Приклад 6. Побудувати схематичний графік функції $y = y(x)$, яка задана неявно рівністю $x^3 + y^3 = 3xy$ (декартів лист).

Зауважимо, що крива симетрична відносно прямої $y = x$. Перейдемо до полярної системи координат:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases} \begin{pmatrix} \varphi \in [0, 2\pi) \\ \rho \ge 0 \end{pmatrix},$$

отримаємо $\rho^3\cos^3\varphi + \rho^3\sin^3\varphi = 3\rho^3\cos\varphi\,\sin\varphi$, або

$$\rho = \frac{3\sin\varphi\,\cos\varphi}{\sin^3\varphi + \cos^3\varphi}.$$

Якщо $\cos\varphi = 0$, тоді $\rho = 0$ або $x = y = 0$ (точка $O(0,0)$). При $\cos\varphi \neq 0$ покладемо $t = \mathrm{tg}\varphi$ і отримаємо параметричне представлення функції:

$$x = \rho\cos\varphi = \frac{3\sin\varphi\cos^2 t}{\sin^3\varphi + \cos^3\varphi} = \frac{3t}{1+t^3},$$

$$y = \rho\sin\varphi = \frac{3\sin^2\varphi\cos\varphi}{\sin^3\varphi + \cos^3\varphi} = \frac{3t^2}{1+t^3}.$$

Отже $\begin{cases} x(t) = \dfrac{3t}{1+t^3} \\ y(t) = \dfrac{3t^2}{1+t^3} \end{cases}, \quad -\infty < t < +\infty;\ t \neq -1.$

Побудуємо схематичні графіки $x = x(t)$ і $y = y(t)$ (рис. 1, 2)

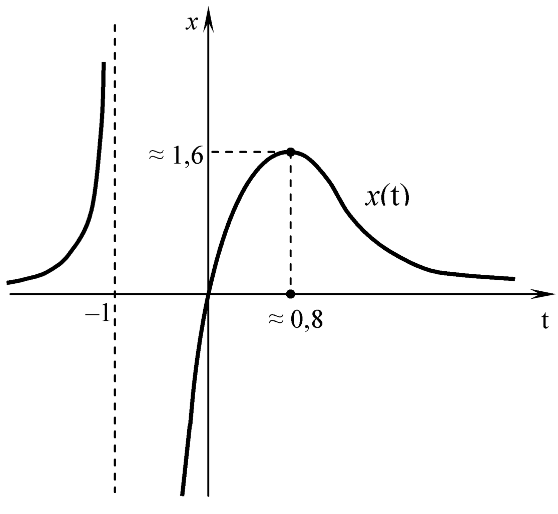


Рис. 1

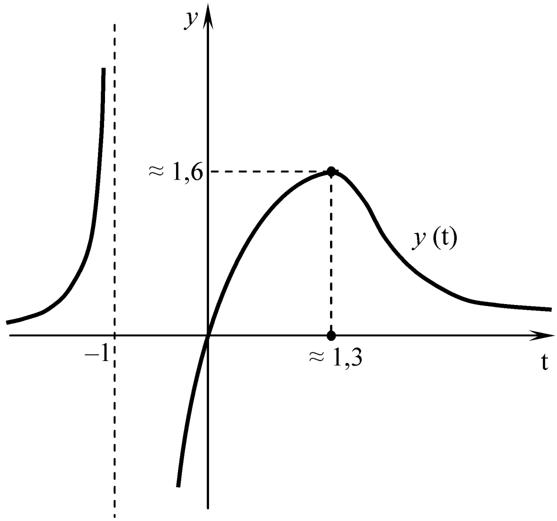


Рис. 2

Точка $t=-1$ є точкою розриву II роду функцій $x=x(t)$ і $y=y(t)$. При $t\to-1$ $x(t)\to\infty$, а саме $x(-1+0)=-\infty$, $x(-1-0)=+\infty$, тобто крива $y=y(x)$ може мати похилу аси-мптоту: $y=kx+b$. Знайдемо її

$$k=\lim_{t\to-1\pm0}\frac{y(t)}{x(t)}=\lim_{x\to-1\pm0}\frac{3t^2(1+t^3)}{(1+t^3)3t}=\lim_{t\to-1\pm0}t=-1\ ,$$

$$b=\lim_{t\to-1\pm0}(y(t)-kx(t))=\lim_{t\to-1\pm0}\left(\frac{3t^2}{1+t^3}+\frac{3t}{1+t^3}\right)=$$

$$=\lim_{t\to-1\pm0}\frac{3t}{(t+1)(t^2-t+1)}=\frac{-3}{3}=-1\,.$$

Таким чином, пряма $y=-x-1$ є похилою асимптотою графіка функції $y=y(x)$ (рис.3).

Зауважимо, що $\lim\limits_{t\to\pm\infty}x(t)=\lim\limits_{t\to\pm\infty}y(t)=0$, це означає, що змінна точка $M(t)$, рух якої при зміні t описує криву $y=y(x)$, попадає в початок декартової системи координат $\mathrm{O}(0,0)$ при значеннях $t=0$ і $t=\pm\infty$. При зміні t від $-\infty$ до $-1-0$ змінна x змінюється від 0 до $+\infty$ (див. рис. 1). Знайдемо поведінку функції $y=y(x)$ при зміні x від 0 до $+\infty$. Для цього знайдемо

$$y'(x)=\frac{y'(t)}{x'(t)}=\frac{3t(2-t^3)}{(t^3+1)^2}\cdot\frac{(t^3+1)^2}{3(1-2t^2)}=\frac{t(2-t^3)}{1-2t^3}=\frac{t(t^3-2)}{(\sqrt{2}t)^3-1}=$$

$$=\frac{t(t-\sqrt[3]{2})(t^2+\sqrt[3]{2}t+\sqrt[3]{4})}{(\sqrt[3]{2}t-1)(\sqrt[3]{4}t^2+\sqrt[3]{2}t+1)}.\ \operatorname{sgn} y'(x)=\operatorname{sgn} t(t-\sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{2}t-1)$$

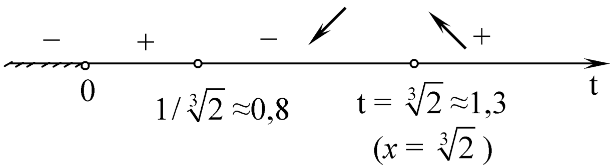


Рис. 3

Отже, при $t\in(-\infty,-1)$ функція $y(x)$ спадає ($y'(x)<0$, рис. 3) і змінна точка M рухається вздовж кривої $y=y(x)$ від точки $O(0,0)$, якій відповідає $M(t=-\infty)$, до $-\infty$ вздовж дуги (I) (рис. 5), наближаючись до асимптоти. З'ясуємо опуклість знайшовши

$$y'(x)=\frac{y'(t)x'(t)-x''(t)y'(t)}{(x'(t))^3}=\frac{2(1+t^3)^4}{3(1-2t^3)^3},$$

тоді $\operatorname{sgn} y''(x)=\operatorname{sgn}(1-\sqrt[3]{2}t)$ (рис.4)

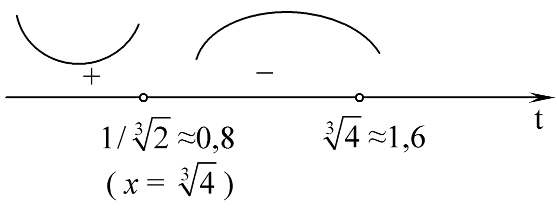


Рис. 4

і крива $y(x)$ (дуга (I)) опукла вниз.

Розглянемо зміну t від $-1+0$ до 0, тоді змінна x змінюється від $-\infty$ до 0 (рис. 1), а змінна точка M рухається вздовж дуги (II) від $-\infty$ до 0, оскільки $y'(x)<0$ (див. рис. 3). Дуга (II) опукла вниз, оскільки $y''(x)<0$ (див. рис. 4).

Точка $M(t=0)$ є точкою $лок \min y(x)$, оскільки при переході через цю точку $(t=0)$ $y'(x)$ змінює знак з "–" на "+" (рис. 3).

Нарешті розглянемо зміну t від 0 до $+\infty$. У цьому випадку змінна x змінюється від 0 до $\sqrt[3]{4}$. Дослідимо точку $x=\sqrt[3]{4}$ (їй відповідає $t=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$). Оскільки $\lim\limits_{t\to\frac{1}{\sqrt[3]{2}}-0} y'(x)=+\infty$ і $\lim\limits_{t\to\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+0} y'(x)=-\infty$, то дотична до кривої $y=y(x)$ у точці $A(x=\sqrt[3]{4},\ y=\sqrt[3]{2})$, якій відповідає $t=1/\sqrt[3]{2}$ перпендикулярна до осі Ox. На проміжку $t\in\left(0,\ 1/\sqrt[3]{2}\right)$ $y(x)$ зростає $(y'(x)>0)$ і опукла вниз $(y''(x)>0)$. Змінна точка M рухається вздовж петлі лінії $y=y(x)$ проти годинникової стрілки.

Від точки $A\left(t=1/\sqrt[3]{2}\right)$ змінна точка M продовжує рух при зміні t від $1/\sqrt[3]{2}$ до $+\infty$, при цьому змінна x (див. рис. 1) змінюється від $x=\sqrt[3]{4}$ до $x=0$ $(t=+\infty)$ так, що $y(x)$ зростає від $x=\sqrt[3]{4}$ до $x=\sqrt[3]{2}$ $(t=\sqrt[3]{2})$, а потім спадає при переході через точку $B(x=\sqrt[3]{2},\ y=\sqrt[3]{4})$ (див. рис. 3). Отже у точці B функція $y(x)$ має $лок\, max$. При $x\in(\sqrt[3]{2},\ \sqrt[3]{4})$ $y''(x)<0$, тоді $y(x)$ опукла вверх і у точці B має горизонтальну дотичну. При $t\to+\infty$ $y''(x)<0$, отже дуга (III) опукла вверх.

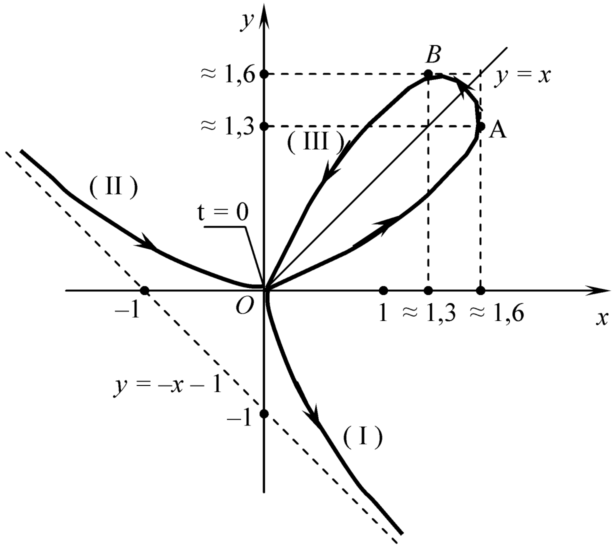


Рис. 5

Оскільки $\lim\limits_{t \to +\infty} y'(x) = +\infty$, то у точці $M(t = +\infty)\ (O(x = 0))$ крива має вертикальну асимптоту.

Побудуємо схематичний графік кривої (рис. 5).

Завдання 14

Довести наступні нерівності

1. $e^x > 1 + x,\ \forall x \in \mathbb{R}$. 2. $x^\alpha \ge 1 + \alpha \ln x,\quad x > 0,\ \alpha > 0$.

3. $e^{\frac{x}{2}+\frac{y}{2}} \le \frac{1}{2}(e^x + e^y),\quad x, y \in \mathbb{R}$. 4. $e^x \ge x \cdot e,\quad x \in R$.

5. $x - \frac{x^2}{2} < \ln(1 + x),\quad x > 0$. 6. $\frac{x}{x+1} < \ln(1 + x) < x,\quad x > 0$.

7. $1-2\ln x \le \dfrac{1}{x^2}, \quad x>0$.

8. $e^x > 1+\ln(1+x), \quad x>0$.

9. $\dfrac{\ln x}{x-1} \le \dfrac{1}{\sqrt{x}}, \quad x>0, \ x \ne 1$.

10. $\cos x \ge 1-\dfrac{x^2}{2}, \quad x \in \mathbb{R}$.

11. $\operatorname{ch} x \ge 1+\dfrac{x^2}{2}, \quad x \in \mathbb{R}$.

12. $\operatorname{tg} x > x+\dfrac{x^3}{3}, \quad 0<x<\dfrac{\pi}{2}$.

13. $\operatorname{arctg} x \le x, \quad x \ge 0$.

14. $\sin x \ge \dfrac{2}{\pi}x, \quad 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}$.

15. $x-\dfrac{x^3}{6} < \sin x < x-\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^5}{120}, \quad x \in \mathbb{R}$.

16. $\sin x+\operatorname{tg} x > 2x, \quad 0<x<\dfrac{\pi}{2}$.

17. $x-\dfrac{x^3}{3} < \operatorname{arctg} x, \quad 0<x\le 1$.

18. $\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^3 \ge \cos x, \quad 0<|x|\le \dfrac{\pi}{2}$.

19. $\dfrac{x-y}{x} < \ln\dfrac{x}{y}, \quad x>y>0$.

20. $\ln\dfrac{x}{y} < \dfrac{x-y}{y}, \quad x>y>0$.

21. $1+\dfrac{x}{2}-\dfrac{x^2}{8} < \sqrt{1+x}, \quad x>0$.

22. $\sqrt{1+x} < 1+\dfrac{x}{2}, \quad x>0$.

23. $\operatorname{tg} x-8\sin x \ge -3\sqrt{3}, \quad 0<x<\dfrac{\pi}{2}$.

24. $\operatorname{tg} x > x-\dfrac{x^3}{3}, \quad 0<x<\dfrac{\pi}{2}$.

25. $x\ln x+y\ln y > (x+y)\ln\dfrac{x+y}{2}, \quad x,y>0$.

26. $\operatorname{tg} x - \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x < x, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}$.

27. $\frac{1}{3}\operatorname{tg} x + \frac{2}{3}\sin x > x, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}$.

28. $\sin x > x - \frac{2x^2}{\pi}, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}$.

29. $\frac{x^{100} + y^{100}}{2} > \left(\frac{x+y}{2}\right)^{100}, \quad x, y > 0, \quad x \neq y$.

30. $\operatorname{arctg} x < x - \frac{x^3}{6}, \quad 0 < x \leq 1$.

Завдання 15

Провести повне дослідження функції $y = f(x)$ і побудувати її схематичний графік:

1. $y = \frac{x^4}{x^3 - 2}$. 2. $y = \sqrt[3]{\frac{x^2}{1 - x^2}}$. 3. $y = \sqrt[3]{\frac{1 - x^2}{x^2}}$.

4. $y = \sqrt[3]{x(x-3)^2}$. 5) $y = \frac{x^3(x+2)}{(x+1)^3}$. 6. $y = \frac{x^3(3x+4)}{(x+1)^3}$.

7. $y = \sqrt[3]{x^2}\, e^{-\frac{2x}{3}}$. 8) $y = (x-6)e^{-1/x}$. 9. $y = \sqrt{x}\ln x$.

10. $y = x^2 \ln^2 x$. 11) $y = x\sqrt[3]{\ln^2 x}$. 12. $y = x^2 e^{-x^2}$.

13. $y = x^2 e^{-x}$. 14. $y = 2x + 4\operatorname{arctg} x$. 15. $y = \frac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$.

16. $y = (x-5)\sqrt[3]{x^2}$. 17. $y = \frac{x^3}{4(2-x)^2}$. 18. $y = x\sqrt[3]{(x+1)^2}$.

19. $y = \sqrt{\frac{x^3 - 2x^2}{x - 3}}$. 20. $y = \frac{x^2 - 4}{x} e^{-\frac{5}{3x}}$. 21. $y = \frac{(x-1)^2}{(x+1)^3}$.

22. $y=\dfrac{x^3}{x^2-1}$. 23. $y=\dfrac{x^4}{x^3+2}$. 24. $y=\dfrac{x^4}{(x+1)^3}$.

25. $y=\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^4$; 26. $y=x+\sqrt{x^2-1}$; 27. $y=x-\sqrt{x^2-2x}$;

28. $y=\dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+2}}$. 29. $y=\dfrac{8x}{\sqrt{x^2-4}}$. 30. $y=\dfrac{\sqrt{x^2-4x}}{2-x}$.

31. $y=\dfrac{x}{\ln x}$. 32. $y=\sqrt{1+x^2}-2x$. 33. $y=xe^{-x^2/2}$.

34. $y=\sqrt{\dfrac{x^3}{x-2}}$. 35. $y=(x+2)e^{1/x}$. 36. $y=\dfrac{1+x^2}{1-x^2}$.

37. $y=\dfrac{12}{x-3}-x$. 38. $y=xe^{-1/x}$. 39. $y=\sqrt{1-\ln^2 x}$.

40. $y=x+2\operatorname{arctg} x$. 41. $y=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$. 42.

$y=x^2\ln x$.

43. $y=\dfrac{x^2+1}{x+1}$. 44. $y=x-\ln(x+1)$. 45. $y=\dfrac{\ln^2|x|}{x^2}$.

46. $y=2\ln(x-2)-x^2+4x+1$. 47. $y=1+xe^{2x}$.

48. $y=\dfrac{x^2}{2}-\ln x$. 49. $y=1+x^2\ln x$. 50. $y=x^2-\ln x$.

51. $y=\sqrt[3]{3x-x^3}$. 52. $y=\operatorname{arctg}\left(-\dfrac{1}{x}\right)$. 53. $y=e^{-x^2-2x}$. 54.

$y=(x-2)e^{1/x}$. 55. $y=(x-2)e^{-1/x}$.

56. $y=x\left(\operatorname{arctg} x-\dfrac{\pi}{2}\right)$. 57. $y=\dfrac{e^x}{1+x}$. 58. $y=x^2e^{-2/x}$.

59. $y = x\ln^2 x$. 60. $y = 2x + 1 + \dfrac{1}{x+1}$.

Завдання 16

Побудувати графік функції $y = y(x)$, яка задана параметрично.

1. $x = t^3 + 3t + 1,\ \ y = t^3 - 3t + 1$. 2. $x = \dfrac{t^2}{4(1-t)},\ \ y = \dfrac{t^3}{8(t-1)}$.

3. $x = t - \sin t,\ \ y = 1 - \cos t$. 4. $x = \dfrac{t^2}{t-1},\ \ y = \dfrac{t^2 - 1}{t}$.

5. $x = \dfrac{(t+1)^2}{t},\ \ y = \dfrac{t+1}{t+2}$. 6. $x = e^t - t,\ \ y = e^{2t} - 2t$.

7. $x = t\,e^t,\ \ y = t\,e^{-t}$. 8. $x = t\ln t,\ \ y = \dfrac{\ln t}{t}$.

9. $y = 2t - t^2,\ \ y = 3t - t^3$. 10. $x = \dfrac{a}{\cos^3 t},\ \ y = a\,\mathrm{tg}^3 t\ (a > 0)$.

11. $x = \dfrac{t^2}{t-1},\ \ y = \dfrac{t}{t^2 - 1}$. 12. $x = t + e^{-t},\ \ y = 2t + e^{-2t}$.

13. $x = a\sin t,\ y = b\sin 2t\ (a, b > 0)$.

14. $x = \dfrac{t}{3}(6 - t),\ \ y = \dfrac{t^2}{8}(6 - t)$.

15. $x = t^2,\ \ y = t - \dfrac{t^3}{3}$.

16. $x = a\cos t(1 + \cos t),\ \ y = a\sin t(1 + \cos t)\ (a > 0)$.

17. $x = a\cos t,\ \ y = b\sin^3 t\ (a, b > 0)$.

18. $x = t^2 - 1,\ \ y = t^3 - t$. 19. $x = 2t - t^2,\ \ y = 2t^2 - t^3$.

20. $x = t^2, \quad y = \frac{t}{3}(3 - t^2)$. 21. $x = a\cos^3 t, \quad y = a\sin^3 t \ (a > 0)$.

22. $x = \sqrt{3}\, t^2, \quad y = t - t^3$. 23. $x = 4\sqrt{2}\sin t, \quad y = a\sin 2t \ (a > 0)$.

24. $x = e^t \sin t, \quad y = e^t \cos t$. 25. $x = t^2 - 2t, \quad y = t^2 + 2t$.

26. $x = a\cos^3 t, \quad y = a\sin t \ (a > 0)$. 27. $x = \cos^4 t, \quad y = \sin^4 t$.

28. $x = \frac{1}{t^2} - t, \quad y = \frac{1}{t} - t^2$.

Записати рівняння кривих $y = y(x)$ в параметричній формі і побудувати їх графіки.

29. $x^3 + y^3 - 3a\,xy = 0 \ (a > 0)$. 30. $x^2 y^2 = x^3 - y^3$.

31. $x^y = y^x \ (x > 0, \ y > 0)$. 32. $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$.

Завдання 17

Побудувати графіки функцій, які задані у полярній системі координат.

1. $\rho = \dfrac{2a}{1 - \cos\varphi} \ (a > 0)$. 2. $\rho = 1 + \cos\varphi$. 3. $\rho = 2\cos\varphi$.

4. $\rho = \sqrt{3}\sin\varphi$. 5. $\rho = 2(1 - \cos\varphi)$. 6. $\rho = 2\cos^3\varphi$.

7. $\rho = \sqrt{\cos 2\varphi}$. 8. $\rho = \cos^2\varphi$. 9. $\rho = 3\sin^3\dfrac{\varphi}{3}$.

10. $\rho = 4\sin^4\dfrac{\varphi}{4}$. 11. $\rho = 3\sec(\varphi - \dfrac{\pi}{3})$. 12. $\rho = 1 + 2\cos\varphi$.

13. $\rho = 2 + \cos\varphi$. 14. $\rho = 2 - \cos\varphi$. 15. $\rho = 2\sin 2\varphi$.

16. $\rho = 3\cos 3\varphi$. 17. $\rho = 3\sin 3\varphi$. 18. $\rho = 2\sin^2\varphi$.

19. $\rho = 2\cos^2 2\varphi$. 20. $\rho^2 = \cos 4\varphi$. 21. $\rho = 3\cos^3\varphi$.

22. $\rho = 3\sin^3 3\varphi$. 23. $\rho = 3(1-\sin 3\varphi)$. 24. $\rho = 2(1-\sin 2\varphi)$.

25. $\rho = 2\sin^2 \dfrac{\varphi}{2}$. 26. $\rho = 3\sin^2 \dfrac{\varphi}{3}$. 27. $\rho = 4\sin^2 \dfrac{\varphi}{4}$.

28. $\rho = 4\cos^2 \dfrac{\varphi}{4}$. 29. $\rho = 3\sin \dfrac{\varphi}{3}$. 30. $\rho = 4\sin \dfrac{\varphi}{4}$.

Завдання 18

Задачі на знаходження найбільших і найменших значень.

1. Серед усіх рівнобедрених трикутників, вписаних у певне коло, знайти той, який має найбільший периметр.
2. Знайти радіус основи циліндра, вписаного у кулю з радіусом R, який має найбільший об’єм.
3. Знайти розміри закритої коробки, яка має об’єм V, в основі якої лежить квадрат, на виготовлення якої затрачено найменшу кількість матеріалу.
4. На відрізку, який має довжину a і який з’єднує два джерела світла сили S_1 і S_2, знайти найменш освітлену точку. Вважати, що освітленість прямо пропорційна силі джерела світла і обернено пропорційна квадрату відстані від джерела.
5. Спортсмен штовхнув ядро з початковою швидкістю υ_0 під кутом α до горизонту. Нехтуючи опором повітря, знайти при якому α дальність польоту ядра буде найбільшою.
6. Внутрішній опір гальванічного елементу дорівнює r. При якому зовнішньому опорі потужність струму, який отримується від цього елемента, у зовнішньому ланцюгу буде найбільшою?
7. У чашку, яка має форму півкулі з радіусом R, опущено однорідний стрижень, довжина якого l $(2r < l \leq 4R)$. Знайти положення рівноваги стрижня.

8. До річки, ширина якої a, під прямим кутом побудовано канал, ширина якого b. Знайти найбільшу довжину колоди, яку можна сплавити з річки у канал.

9. Щоб зменшити тертя рідини в стінки каналу, площа, яка змочується водою, повинна бути по можливості найменшою. Показати, що найкращою формою відкритого прямокутного каналу, з заданою площею поперечного перерізу, є така, за якої ширина каналу в 2 рази більша ніж його висота.

10. Посудина з вертикальною стінкою, яка має висоту h, стоїть на горизонтальній площині. З отвору, який є у стінці посудини, витікає струмінь води. Знайти положення отвору, при якому дальність струменя буде найбільшою, якщо швидкість води, яка витікає, дорівнює $\sqrt{2gx}$, де x – глибина отвору (закон Торічеллі).

11. На якій висоті над центром круглого столу, що має радіус R слід повісити електричну лампу, щоб освітленість краю стола була найбільшою?

12. Електрична лампа, що освітлює поверхні двох куль, розташована зовні цих куль і лежить на лінії, яка з'єднує їх центри. При якому положенні лампи сума площ освітлених частин поверхонь куль буде найбільшою?

13. Груз, який лежить на горизонтальній площині (π), треба зрушити з місця силою, прикладеною до цього грузу. Знайти кут, що утворює ця сила з площиною (π), при якому величина сили буде найменшою, якщо коефіцієнт тертя грузу рівний k.

14. Міцність бруса з прямокутним поперечним перерізом пропорційна добутку основи на квадрат висоти цього прямокутника. Знайти форму такого брусу, який витесано з колоди, поперечним перерізом якої є круг з радіусом a, і який допускає найбільше навантаження.

15. Дві точки рівномірно рухаються вздовж осей координат. Швидкість першої точки υ_1, другої υ_2. В певний момент часу точки займали положення $A(a,0)$, $B(0,b)$ відповідно. Знайти можливу найкоротшу відстань між ними.

9. Задачі теоретичного характеру

1. Навести приклад функції, яка не має похідної у жодній точці $x \in R$, але квадрат якої має похідну в кожній точці $x \in R$.

2. Навести приклад недиференційовних функцій у точці x_0, добуток яких є диференційовною функцією у цій точці.

3. Навести приклад недиференційовних функцій у точці x_0, сума яких є диференційовною функцією у цій точці.

4. Навести приклад недиференційовних функцій у точці x_0, відношення яких є диференційовною функцією у цій точці.

5. Довести, що для функції $y = x\left|sin\,x\right|$ існує $y'(0)$ і знайти її.

6. Довести, що для функції $y = x\left|x^3\right|$ існує $y'(0)$ і знайти її.

7. Навести приклад монотонної функції, похідна якої не є монотонною функцією.

8. Нехай $f(x)$ непарна і диференційовна на R. Довести, що $f'(x)$ є парною функцією.

9. Довести, що похідна періодичної функції є періодичною функцією.

10. Довести, що $f(x) = \sin x + \cos\sqrt{2}x$ не є періодичною функцією.

11. Навести приклад функції $f(x)$ такої, що $f'(x)$ існує для $\forall x \in (-1,1)$, $f(x)$ обмежена і має розрив у точці $x = 0$.

12. Навести приклад функції $f(x)$, яка диференційовна на (0,1), $\lim\limits_{x \to 0+} f'(x) = +\infty$, але $f(x)$ обмежена на $(0,1)$.

13. Навести приклад функції, яка неперервна у точці $x = 0$, але не має у цій точці ні лівої, ні правої похідної.

14. На відрізку $\left[-1,1\right]$ для функції $y = \left|x\right|$ не існує точки, у якій похідна функції обертається в ноль. Яка умова теореми Ролля не виконується?

15. На відрізку $\left[-1,1\right]$ для функції $y=\sqrt[3]{x^2}$ не існує точки, в якій похідна рівна нулеві. Яка умова теореми Ролля не виконується?
16. Довести, що функція $f:(a,b)\to R$, яка має обмежену похідну на (a,b) є рівномірно неперервною на (a,b).
17. Нехай $f(x)$ диференційовна на $\left[x_1,x_2\right]$ $(0<x_1<x_2)$. Довести, що $\frac{1}{x_2-x_1}(x_1 f(x_2)-x_2 f(x_1))=f(\xi)-\xi f'(\xi)$, де $\xi\in(x_1,x_2)$.
18. Відомо, що $f(x)$ диференційовна при $x\ge a$, не змінює напрямку опуклості на $\left[a,+\infty\right]$. Пряма $y=kx+b$ є асимптотою $f(x)$ при $x\to+\infty$ і графік $f(x)$ розташований нижче асимптоти. Довести, що $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=k$ і $f(x)$ опукла вверх.
19. Чи вірне твердження: для того, щоб диференційовна функція $f(x)$ на (a,b) мала монотонну похідну, необхідно, щоб $f(x)$ була монотонна на (a,b).
20. Чи вірне твердження: для того, щоб диференційовна функція $f(x)$ на (a,b) мала на (a,b) монотонну похідну, достатньо, щоб $f(x)$ була монотонна на (a,b).
21. Чи вірне твердження: для того, щоб диференційовна функція $f(x)$ мала періодичну похідну, необхідно, щоб $f(x)$ була періодичною.
22. Довести, що функція $f(x)=\begin{cases} e^{1/x^2}, & x\ne 0\\ 0\ , & x=0\end{cases}$ безмежно диференційовна на всій осі і знайти $f^{(n)}(x),\ n\in N$.
23. Довести, що e – ірраціональне число.
24. Використовуючи формулу Маклорена функції $f(x)=\frac{x^3}{2}-\operatorname{tg}x+\sin x$, довести, що $x=0$ є її точкою перегину.

25. Довести, що графік функції $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+1}$ має три точки перегину, які лежать на одній прямій.

26. Довести, що точки перегину графіка функції $f(x) = x\sin x$ лежать на кривій $y^2(4+x^2) = 4x^2$.

27. Нехай $f(x) = \begin{cases} x^2\left(2+\cos\dfrac{2}{x^2}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$.

Довести, що графік $f(x)$ у точці $(0,0)$ має дотичну, але ця точка не є точкою перегину графіка функції $f(x)$.

28. Чи може точка перегину графіка функції $f(x)$ бути точкою екстремума $f(x)$?

29. Довести, що у два рази диференційовної функції, між двома точками екстремуму лежить принаймні одна точка перегину. Навести приклад.

30. Довести, що у два рази диференційовної функції, між точками перегину функції може не бути точок екстремуму. Навести приклад.

Додаток

Міністерство освіти і науки України
НТУУ "КПІ"
Кафедра математичного аналізу і теорії ймовірностей

Типовий розрахунок
з математичного аналізу
"Похідна та її застосування"
Студента (ки) ………………
Групи…….факультету………
Варіант_______
"__"______________200…р.

Оцінка…………
Роботу перевірив……………………/……………………/
/підпис/

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Дороговцев А.Я.* Математичний аналіз. Ч. 1. – К.: Либідь; 1993.–320 с.

2. *Фихтенгольц Г.М.* Курс интегрального и дифференциального исчисления. Т. 3. – М.: Физматгиз, 1963.– 624 с.

3. *Демидович Б.П.* Сборник задач и упражнений по математическому анализу. – М.: ГИТТЛ, 1956.– 628 с.

4. *Березин Ф.А., Гвишиани А.Д., Горин Е.А., Кириллов А.А.* Сборник задач по функциональному анализу. - М.: Изд-во МГУ, 1977.– 288 с.

5. *Очан Ю.С.* Сборник задач и теорем по теории функций действительного переменного. –М.: Просв., 1965.– 324 с.

5. *Теляковский С.А.* Сборник задач по теории функций действительного переменного. - М.: Наука, 1980.– 340 с.

6. *Макаров И.П.* Теория функций действительного переменного. – М.: Высш. шк., 1962.– 420 с.

7. *Рудин У*. Основы математического анализа - М.: Мир, 1966.– 240 с.

8. *Фролов Н.А.* Теория функций действительного переменного. - М.: Учпедгиз РСФСР, 1961.– 480 с.

ЗМІСТ