

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

В. О. Капустян
Г. А. Мажара

ОПТИМАЛЬНЕ КЕРУВАННЯ ТА ТЕОРІЯ ІГОР В ЕКОНОМІЦІ. КУРСОВА РОБОТА

Методичні рекомендації

Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра
за освітньою програмою «економічна кібернетика»
спеціальності 051 економіка

Електронне мережне навчальне видання

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2022

Рецензент *Кириченко С. О.*, к.е.н., доцент, доцент кафедри економіки і підприємництва.

Відповідальний редактор *Жуковська О. А.* к.ф.-м.н., доцент, доцент кафедри економічної кібернетики

*Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
(протокол № 5 від 26.05.2022 р.)
за поданням Вченої ради факультету менеджменту та маркетингу
(протокол № 9 від 25.04.2022 р.)*

Оптимальне керування та теорія ігор в економіці: курсова робота
методичні вказівки щодо виконання курсової роботи для здобувачів ступеня
бакалавра за спеціальністю «051 – економіка», освітня програма «Економічна
Кібернетика», усіх форм навчання.

Реєстр. № НП 21/22-592. Обсяг 2 авт. арк.

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
проспект Перемоги, 37, м. Київ, 03056
<https://kpi.ua>

Свідectво про внесення до Державного реєстру видавців, виготовлювачів
і розповсюджувачів видавничої продукції ДК № 5354 від 25.05.2017 р.

Зміст

1. Мета і завдання курсової роботи	5
2. Структура і обсяг курсової роботи	8
3. Зміст основних частин курсової роботи	9
4. Правила оформлення курсової роботи.....	12
5. Захист курсової роботи.....	15

1. Мета і завдання курсової роботи

Метою підготовки курсової роботи є поглиблення студентом теоретичних і практичних знань з дисципліни «Оптимальне керування та теорія ігор в економіці» та їх систематизація; набуття досвіду самостійного аналізу праць вітчизняних та зарубіжних фахівців, вивчення та аналіз питань, пов'язаних з різними аспектами теорії оптимального керування та ігор; методики та інструментарію їх розв'язання та аналізу; вироблення умінь застосовувати їх для вирішення конкретних економічних задач.

Виконання курсової роботи з курсу «Оптимальне керування та теорія ігор в економіці» та її захист є формою контролю рівня знань студентів з цієї дисципліни.

Працюючи над курсовою роботою, студент повинен:

- використовувати набуті у процесі навчання знання для розв'язання конкретної проблеми шляхом побудови та застосування кількісних та аналітичних методів, інформаційних систем;
- працювати з науковими статтями, монографіями, з методичними та інструктивними матеріалами, статистичною інформацією, критично аналізувати та виявляти їхні позитивні та негативні сторони;
- узагальнювати та аналізувати фактичний матеріал, виявляючи існуючі тенденції та суттєві чинники щодо цілей дослідження;
- застосовувати сучасний інструментарій та наукову методику дослідження з використанням відповідних математичних методів, інформаційних засобів технологій;
- уміти на основі відомих динамічних моделей економічних систем формулювати неокласичну (екстремальну) задачу та розв'язувати її засобами теорії оптимального керування та теорії ігор.

Курсова робота є результатом самостійної роботи студента за виданою темою. Вона має відрізнятись логічно-послідовним викладом матеріалу, стислістю і точністю формувань, практичною спрямованістю рекомендацій, чіткістю висновків

Результати конкретного курсового дослідження виносяться на

прилюдний захист перед комісією. Такий підхід забезпечує не лише добре володіння підготовленим матеріалом, а й виробляє вміння відстоювати свої переконання, наукові погляди. Під час захисту курсової роботи студенти вчаться стисло й доступно викладати основні результати свого дослідження, виробляти в собі навички публічного виступу й ведення наукової полеміки.

Знання та навички здобуті при виконанні курсової роботи можуть бути використані студентами в подальшій науково-дослідній роботі, при виконанні дипломної роботи та в практичній діяльності.

У процесі підготовки та написанні курсової роботи виділяють такі етапи:

- вибір, обґрунтування та затвердження теми дослідження (протягом двох тижнів з початку семестру чи після проведення установки щодо курсової роботи);
- складання студентом плану курсової роботи та погодження його із з викладачем (протягом трьох тижнів з початку семестру чи після проведення установки щодо курсової роботи);
- підбір та вивчення спеціальної літератури;
- формування студентом інформаційної бази для виконання курсової роботи;
- виконання й оформлення курсової роботи;
- подання курсової роботи на кафедру для перевірки (не пізніше, ніж за дватижні до дати захисту курсової роботи);
- за потреби доопрацювання курсової роботи відповідно до рекомендацій та зауважень викладача (лектора);
- захист курсової роботи перед комісією.

В процесі підготовки та написання курсової роботи студент може отримувати консультації у викладача (лектора) відповідно до графіку проведення консультацій працівників кафедри.

Студент має виконати курсову роботу згідно з графіком та вчасно подати її на кафедру. Курсові роботи, подані на кафедру з порушенням

встановлених графіком кроків без поважних причин не розглядаються і повертаються студентам.

Орієнтована тематика курсових робіт наведена у Додатку А.

Студентам видаються теми курсових робіт із переліку, рекомендованого кафедрою.

Після визначення тем студенту видається завдання на курсову роботу (Додаток Б), відповідно до якого студент складає план роботи і приступає до його виконання.

В деяких випадках складати план курсової роботи доречно після підбору та вивчення літературних джерел та формування масиву вхідної інформації, шляхом погодження такого порядку з викладачем (лектором).

Складений студентом план курсової роботи погоджується з викладачем. До плану курсової роботи можна вносити зміни, але їх обов'язково треба погоджувати з викладачем (лектором).

2. Структура і обсяг курсової роботи

Курсова робота як оригінальне теоретико-прикладне дослідження повинна мати певну логіку побудови, послідовність, завершеність. Рекомендується така структура курсової роботи:

Титульний лист

(додаток В)Зміст

Вступ

Розділ 1. Теоретичні відомості

Розділ 2. Розв’язання математичної задачі

2.1. Постановка задачі

2.2. Підхід до аналітичного розв’язання

2.3. Дискретизація вихідної задачі

2.4. Розділ 3. Розв’язання економічної задачі

3.1. Постановка задачі

3.2. Розв’язання задачі

Висновки та пропозиції.

Список використаної

літератури.

Додатки.

Загальний обсяг курсової роботи – близько 25 сторінок друкованого тексту, не враховуючи списку літератури і додатків.

Курсова робота складається із текстової частини, графіків, рисунків, таблиць, додатків, форм вхідних і вихідних документів, структурних схем, програм тощо.

Мова курсової роботи – державна, стиль – науковий.

3. Зміст основних частин курсової роботи

Кожний розділ слід починати з нової сторінки, нумерувати сторінки у правому верхньому кутку (на титульній сторінці номер не ставиться). Рекомендована література представлена у Додатку Г.

ЗМІСТ включає найменування всіх розділів, підрозділів і пунктів (якщо вони мають найменування) із зазначенням сторінок, з яких починається викладання матеріалу розділу чи пункту.

ВСТУП. У ньому необхідно наголосити на актуальності розробленої теми, її важливості. Зазначити мету, завдання, об'єкт дослідження, основні джерела інформації та методи дослідження, ступінь розробки проблем вітчизняними та зарубіжними вченими.

Найбільш важлива частина вступу - визначення мети та завдань дослідження. Мету дослідження визначають на основі актуальності теми та з визначенням кінцевого результату роботи. Вона формулюється лаконічно, одним реченням і повинна впливати з теми роботи. Оскільки мета - це поняття ширше, ніж завдання, тут часто вживаються означення комплексний, всебічний (комплексне дослідження, всебічне вивчення). Формулювання завдань не повинні повторювати іншими словами мету дослідження. Завдання потрібно не лише правильно й чітко сформулювати, а й поставити їх у певному порядку, так, щоб була зрозуміла програма дослідження.

Об'єкт дослідження - частина об'єктивної реальності, процес або явище, що породжує проблемну ситуацію і обране для вивчення (економічна проблема). Як правило, об'єкт визначають як коло конкретних суспільних відносин, що буде досліджуватись у роботі.

У вступі подається перелік методів дослідження не відірвано від змісту роботи, а саме коротко та змістовно визначаючи, що саме досліджувалось тим чи іншим методом. Це дає змогу пересвідчитись в логічності та прийнятності вибору саме цих методів.

Інформаційною базою дослідження слугують усі види інформації, які використовувалися при написанні курсової роботи (закони, підзаконні акти, наукові публікації, аналітичні матеріали, статистичні щорічники, звітність

підприємств тощо).

Обсяг вступу не повинен перевищувати трьох сторінок.

РОЗДІЛ 1. Теоретичні засади дослідження передбачають розкриття стану напрацювань з обраної теми. Слід подати критичний огляд літературних джерел, викласти основні теоретичні та методичні положення теми, проблемні питання, дискусійні та невирішені аспекти, сформулювати власне ставлення автора до них. Важливе місце аналізу визначених проблем, використовуваних у наступних частинах роботи. Автор має продемонструвати свою обізнаність з методами аналізу. Обсяг першого розділу не повинен перевищувати десятих сторінок.

РОЗДІЛ 2. В розділі приведена математична постановка поставленої задачі. Визначається, якими методами вона буде розв'язана.

Спочатку повністю надається перелік завдань та математична модель, що обумовлюються варіантом курсової роботи. У вигляді завдань можуть бути задачі оптимального керування чи диференційні ігри.

Наступним кроком автор представляє певні математичні викладки, які характеризують особливості отриманого завдання. Наприклад, для задач оптимального керування необхідно навести принцип максимуму Понтрягіна чи рівняння Беллмана.

Останнім етапом проводиться дискретизація вихідної моделі для застосування чисельних алгоритмів її розв'язання. Скорочений приклад дискретизації для систем диференціальних рівнянь з фіксованим часом і вільним правим кінцем траєкторії наведено у Додатку Д.

Обсяг другого розділу не повинен перевищувати 10 сторінок

РОЗДІЛ 3. В цьому розділі для запропонованої в завданні моделі приводиться її економічна інтерпретація. Тобто задача розглядається не в загальному вигляді, а з заданими функціями, що мають певний зміст. На основі результатів розділу 2 проводиться дискретизація моделі економічної задачі та виконується її розв'язання за допомогою математичних пакетів чи написаною програмою на будь-якій мові програмування. Приклад розв'язання задачі та перевірка умов оптимальності наведені у Додатку Є.

Обсяг третього розділу не повинен перевищувати 10 сторінок.

У ВИСНОВКАХ ТА ПРОПОЗИЦІЯХ треба викласти у вигляді коротких тез основні положення виконаної роботи. Ознайомлення з текстом висновків має сформулювати в читача уявлення про ступінь реалізації автором курсової роботи поставленої мети і завдань. Обсяг висновків – 1-2 с.

У СПИСКУ ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ необхідно зібрати у повному обсязі інформацію із законодавчих, нормативних документів, статистичних збірників. Проаналізувати спеціальну літературу, internet-ресурси, періодичні видання. Зібраний матеріал систематизується відповідно до плану курсової роботи. У списку використаних джерел рекомендується включати до 15 найменувань.

ДОДАТКИ. Кожний додаток, наведений у роботі, повинен мати свій порядковий номер і посилання на нього в тексті. У додатках розміщуються громіздкі таблиці допоміжного характеру, блок-схеми, зразки анкет соціологічного опитування, інформаційні матеріали, які становлять базу аналітичних досліджень згідно з обраною темою. Крім того, у додатки можна включати документи *підприємства*, інструкції, ілюстрації допоміжного характеру тощо, на які, якщо необхідно, в роботі наводяться посилання.

4. Правила оформлення курсової роботи

Роботу оформляють згідно з Держстандартом України ДСТУ 3008-2015 «Документація. Звіти у сфері науки і техніки. Структура і правила оформлення», а саме:

Друк тексту - лист білого паперу А4 (210x297 мм); комп'ютерний набір: шрифт Times New Roman, розмір шрифту – 14, інтервал – 1.5; параметри сторінки: ліве поле – 20мм, праве - 10мм, верхнє – 20 мм, нижнє – 20 мм.

Ілюстративний матеріал (схеми, діаграми, графіки тощо) слід подавати безпосередньо після посилання на нього в тексті, де він згаданий вперше, або на наступній сторінці і позначати словом «Рис. _», «Таблиця_» і т.п., нумерувати послідовно. Номер рисунка та його назву розміщують під рисунком. Нумерацію рисунків і таблиць наводять арабськими цифрами без знака №. Сторінки курсової роботи, на яких наведено ілюстративний матеріал, включають до загальної нумерації сторінок. Таблиця має містити: дані, необхідні для вивчення певного явища; загальний та внутрішні заголовки. Загальний заголовок таблиці стисло характеризує її зміст, а також період, за який наведено дані. Внутрішні заголовки зазначають, які показники аналізуються у відповідних рядках і графах таблиці, в яких одиницях виміру. Таблиці нумерують послідовно (за винятком тих, що розміщені у додатках) у межах розділу. У разі перенесення таблиці на іншу сторінку, пишуть «Продовження табл._». Кількість ілюстрацій у курсовій роботі визначається її змістом і доцільно для надання тексту зрозумілості та конкретності.

Формули нумеруються послідовно за текстом роботи; номер формули пишуть у круглих дужках на цьому ж рядку з правого боку сторінки; пояснення значень символів, числових коефіцієнтів розміщують безпосередньо під формулою у тій послідовності, в якій вони наведені у формулі, та кожне з нового рядка. Перший рядок пояснення починається зі слова «де» без двокрапки. Формули слід розміщувати у тексті на окремому рядку, залишаючи між ними не менше одного вільного рядка. Першоджерела

формул зазначаються у квадратних дужках.

Титульну сторінку, яка є першою сторінкою курсової роботи, включають до загальної нумерації сторінок, але не нумерують. Нумерацію наступних сторінок подають арабськими цифрами, які проставляють у правому верхньому куті.

Зміст складається з усіх частин курсової роботи та номерів їх початкових сторінок. Його розміщують після титульної сторінки і нумерують як другу сторінку.

Кожна частина курсової роботи повинна мати заголовок відповідно до плану роботи. Відстань між заголовком і текстом дорівнює трьом інтервалам основного тексту.

На додатки, які містяться у курсовій роботі, мають бути посилання у текстовій частині роботи. Додаток повинен мати заголовок, надрукований угорі малими літерами з першої великої симетрично відносно тексту сторінки. З правого боку рядка малими літерами з першої великої друкується слово «Додаток _» і велика літера, що позначає додаток.

Посилання на використану *літературу* слід наводити у квадратних дужках, наприклад [X, с.N] , де X – порядковий номер літературного джерела у списку, N – сторінка цитованого джерела.

Список використаних джерел слід розміщувати у такій послідовності: спочатку (у хронологічному порядку) Закони України, далі – Укази Президента України, постанови Кабінету Міністрів України, за ними літературні джерела в алфавітному порядку: монографії, підручники, посібники, брошури, журнальні та газетні статті. У кінці списку наводять іншомовні та електронні джерела інформації. Дані про книги обов'язково містять прізвище та ініціали автора, заголовок, місце видання, видавництво, рік видання, кількість сторінок. Дані про журнальні або газетні статті прізвище та ініціали автора, заголовок, назву періодичного видання, серію, рік випуску, номер видання, сторінки.

У списку використаних джерел наукові праці записуються тією мовою, якою вони видані.

Список оформлюється відповідно до вимог держстандартів:

згідно ДСТУ 8302:2015 «Інформація та документація. Бібліографічне посилання. Загальні положення та правила складання» з урахуванням правок (код УКНД 01.140.40).

5. Захист курсової роботи

Студент має виконати курсову роботу і подати її на кафедру у термін, передбачений графіком навчального процесу, але не пізніше 10 днів до захисту.

Спочатку виконана курсова робота реєструється на кафедрі та передається викладачу. Викладач перевіряє роботу. Якщо робота не відповідає темі, завданню та вимогам до курсової роботи, викладач повертає роботу з позначкою «на доопрацювання». У такому разі викладач не допускає студента до захисту та встановлює терміни усунення недоліків. Тільки після доопрацювання, з урахуванням зауважень, викладач допускає роботу до захисту.

Захист курсової роботи проводиться комісією передбаченою розпорядженням по кафедрі. При захисті курсової роботи студент має продемонструвати глибокі знання з досліджуваної теми, вміти чітко викладати власні думки, використовувати ілюстративний матеріал, аргументовано відповідати на питання.

Оцінювання курсової роботи здійснюється за національною шкалою (відмінно, добре, задовільно, незадовільно) та за шкалою ECTS (A, B, C, D, E, FX). На оцінку впливають глибина, змістовність і манера захисту, тобто якість розробленої роботи та її оформлення. Позитивна оцінка заноситься до залікової книжки.

Рейтингова оцінка з курсової роботи матиме дві складові. Перша (стартова) характеризує роботу студента з курсового проектування та її результат – якість пояснювальної записки та графічного матеріалу. Друга складова характеризує якість захисту студентом курсового проекту. Розмір шкали першої складової дорівнює 40 балів, а другої складової – 60 балів.

Система рейтингових балів

1. Стартова складова (r_1):

- своєчасність виконання графіку роботи – 5-3 балів;
- сучасність та обґрунтування прийнятих рішень – 12-7 балів;

- правильність застосування методів аналізу і розрахунку – 10-6 балів;
- якість оформлення, виконання вимог нормативних документів – 6-4 балів;
- якість графічного матеріалу і дотримання вимог ДСТУ – 7-4 балів.
- Складова захисту курсової роботи (r_2):
- ступінь володіння матеріалом – 10-6 балів;
- повнота аналізу можливих варіантів – 15-9 балів;
- ступінь обґрунтування прийнятих рішень – 20-12 балів;
- вміння захищати свою думку – 15-9 балів.

Сума стартових балів і балів за екзаменаційну контрольну роботу переводиться до екзаменаційної оцінки згідно з таблицею:

Бали $R r_1 r_2$	ECTS-оцінка	Екзаменаційна оцінка
95-100	A	відмінно
85-94	B	добре
75-84	C	
65-74	D	задовільно
60-64	E	
Менше 60	Fx	незадовільно
не зарахована робота, або $r_C 25$	F	не допущено

Захищені курсові роботи передаються на кафедру, де вони зберігаються згідно з вимогами до такого виду документів.

Студент, який без поважної причини не подав курсової роботи у зазначений термін або не захистив її, вважається таким, що має академічну заборгованість. При отриманні незадовільної оцінки студент за рішенням комісії виконує курсову роботу за новою темою або переопрацьовує

попередню роботу у термін, визначений деканом факультету (НАКАЗ № 7-124 від 20.07.2020 Про затвердження Положення про організацію освітнього процесу в КПІ ім. Ігоря Сікорського).

Підсумки захистів курсових робіт обговорюються на засіданнях кафедри економічної кібернетики.

**Орієнтовна тематика курсових робіт з дисципліни
«Оптимальне керування та теорія ігор в економіці»
для студентів за спеціальністю «051 – економіка»,
освітня програма «Економічна Кібернетика» (шифр групи –
УК) всіх форм навчання**

1. Принцип максимуму Понтрягіна для систем диференціальних рівнянь з фіксованим часом і фіксованими крайовими умовами.
2. Принцип максимуму Понтрягіна для систем диференціальних рівнянь з нефіксованим часом і вільним правим кінцем траєкторії.
3. Принцип максимуму Понтрягіна для систем диференціальних рівнянь з нефіксованим часом і фіксованими крайовими умовами.
4. Принцип максимуму Понтрягіна для систем диференціальних рівнянь з запізненням по аргументу та з фіксованим часом і вільним правим кінцем траєкторії.
5. Принцип максимуму Понтрягіна для систем диференціальних рівнянь з запізненням по аргументу та з фіксованим часом і фіксованими крайовими умовами.
6. Принцип максимуму Понтрягіна для систем диференціальних рівнянь з запізненням по аргументу та з нефіксованим часом і вільним правим кінцем траєкторії.
7. Принцип максимуму Понтрягіна для систем диференціальних рівнянь з запізненням по аргументу та з нефіксованим часом і фіксованими крайовими умовами.
8. Принцип максимуму Понтрягіна для систем диференціальних рівнянь з інтегральним запізненням по аргументу та фіксованим часом і вільним правим кінцем траєкторії.
9. Принцип максимуму Понтрягіна для систем диференціальних рівнянь з інтегральним запізненням по аргументу та фіксованим часом і фіксованими крайовими умовами.
10. Принцип максимуму Понтрягіна для систем диференціальних рівнянь з інтегральним запізненням по аргументу та нефіксованим часом і

вільним правим кінцем траєкторії.

11. Принцип максимуму Понтрягіна для систем диференціальних рівнянь з інтегральним запізненням по аргументу та нефіксованим часом і фіксованими крайовими умовами.

12. Синтез оптимального керування для систем диференціальних рівнянь з фіксованим часом.

13. Синтез оптимального керування для систем диференціальних рівнянь з нефіксованим часом.

14. Синтез оптимального керування для систем диференціальних рівнянь з запізненням по аргументу та фіксованим часом.

15. Синтез оптимального керування для систем диференціальних рівнянь з запізненням по аргументу та нефіксованим часом.

16. Синтез оптимального керування для систем диференціальних рівнянь з інтегральним запізненням по аргументу та фіксованим часом.

17. Синтез оптимального керування для систем диференціальних рівнянь з інтегральним запізненням по аргументу та нефіксованим часом.

18. Стратегії колективної раціональності в диференціальній грі двох осіб для системи рівнянь.

19. Гарантовані стратегії в диференціальній грі двох осіб для системи рівнянь.

20. Рівноважні за Нешем стратегії в диференціальній грі двох осіб для системи рівнянь.

21. Рівноважні за Берже стратегії в диференціальній грі двох осіб для системи рівнянь.

22. Гарантоване оптимальне керування для систем диференціальних рівнянь з фіксованим часом і вільним правим кінцем траєкторії.

23. Гарантоване оптимальне керування для систем диференціальних рівнянь з фіксованим часом і фіксованими крайовими умовами.

24. Гарантоване оптимальне керування для систем диференціальних рівнянь з нефіксованим часом і вільним правим кінцем

траєкторії.

25. Гарантоване оптимальне керування для систем диференціальних рівнянь з нефіксованим часом і фіксованими крайовими умовами.

26. Гарантоване оптимальне керування для систем диференціальних рівнянь з запізненням по аргументу та з фіксованим часом і вільним правим кінцем траєкторії.

27. Гарантоване оптимальне керування для систем диференціальних рівнянь з запізненням по аргументу та з фіксованим часом і фіксованими крайовими умовами.

28. Гарантоване оптимальне керування для систем диференціальних рівнянь з запізненням по аргументу та з нефіксованим часом і вільним правим кінцем траєкторії.

29. Гарантоване оптимальне керування для систем диференціальних рівнянь з запізненням по аргументу та з нефіксованим часом і фіксованими крайовими умовами.

Додаток Б

**Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»**

кафедра економічної кібернетики

дисципліна оптимальне керування та теорія ігор в економіці

за спеціальністю «051 – економіка»

освітня програма «Економічна Кібернетика»

курс _____ **група** _____ **форма навчання** _____

Завдання на курсову роботу студента

/ Прізвище, Ім'я та по Батькові/

1. Тема роботи _____

/назва теми/

2. Строк здачі студентом закінченої роботи _____ 20 ____ р.

3. План _____

4. Дата видачі завдання _____ 20 ____ р.

Студент _____

підпис

Керівник _____

підпис

*Прізвище, ім'я та по-
батькові*

« ____ » _____ 20 ____ Р.

Додаток В

**Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
факультет менеджменту та маркетингу
кафедра економічної кібернетики**

КУРСОВА РОБОТА

з дисципліни «Оптимальне керування та теорія ігор в економіці»

на тему: _____ / *назва теми* / _____.

Студента(ки) _____ курсу , групи _____

форми навчання _____ факультету _____

/ Прізвище, Ім'я та по Батькові /

Керівник _____

/ науковий ступінь, вчене звання, прізвище та ініціали /

Список рекомендованой литературы

1. Вентцель Е.С. Элементы теории игр. – М.: Гос. изд. физ.-матем. лит., 1961.
2. Егоров А.И. Основы теории управления. – М.: Физматлит, 2004.
3. Интриллигатор М. Математические методы оптимизации и экономическая теория. – М.: Прогресс, 2002.
4. Жуковский В.И., Чикрий А.А. Линейно-квадратичные дифференциальные игры. – К.: Наукова думка, 1994.
5. Сухарев А.Г., Тимохов А.В., Федоров В.В. Курс методов оптимизации.
6. – М.: Наука, 1986.
7. Шикин Е.В., Чкартишвили А.Г. Математические методы и модели в управлении. – М.: КДУ, 2009.
8. Алексеев В.М., Галеев Э.М., Тимохов В.М. Сборник задач по оптимизации. – М.: Наука, 1984.
9. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. – М. Наука, 1980.
10. Воробьев Н.Н. Теория игр для экономистов-кибернетиков. – М.: Наука, 1985.
11. Замков О.О., Толстопятенко А.В., Черемных Ю.Н. Математические методы в экономике. – М.: Изд. „Дело и сервис”, 2009.
12. Охріменко М.Г., Дзюбан І.Ю. Дослідження операцій. – К.: Центр навч. літ., 2006.
13. Замков О.О., Толстопятенко А.В., Черемных Ю.Н. Математические методы в экономике. – М.: Изд. „Дело и сервис”, 2009.

Дискретизація моделі для системи диференціальних рівнянь з фіксованим часом і вільним правим кінцем траєкторії

Метод:

2. Метод наискорейшего спуска

Задані функції:

2. Степенная Функция

$$f_2(x) = (10(x_1 - x_2)^2 + (x_1 - 1)^2)^4, \quad x^{(0)} = (-1, 2; 0, 0);$$

5. Функция Пауэлла

$$f_5(x) = (x_1 + 10x_2)^2 + 5(x_3 - x_4)^2 + 10(x_1 - x_4)^4 + (x_2 - 2x_3)^4, \quad x^{(0)} = (-3; -1; 0; 1);$$

Завдання:

Написати програму пошуку мінімуму заданої функції, використовуючи один з методів. Провести їх дослідження.

Виконання:

Знайдемо мінімум даних функцій за допомогою методу найскорішого спуску. Нам вже задано значення початкових точок $x(0)$ та параметр закінчення програми визначимо як $\epsilon = 0,001$. Знаходимо значення похідних функції, градієнт, довжину кроку. Діємо за алгоритмом даного методу та робимо висновки з отриманих даних.

Алгоритм метода наискорейшего спуска.

Исходные данные :

начальная точка $x^{(0)}$;

параметры окончания $\varepsilon_1, \varepsilon_2$.

- 1) Задать координаты начальной точки $x^{(k)}$, $k=0$.
- 2) Вычислить значение $\nabla f(x^{(k)})$.
- 3) Проверить выполнения неравенства

$$\|\nabla f(x^{(k)})\| \leq \varepsilon_1.$$

Если неравенство выполняется, поиск окончен, иначе п.4.

- 4) Вычисление $\lambda^{(k)}$ при минимизации функции (используется одномерный метод поиска). ε_2 – параметр окончания одномерного метода поиска.
- 5) Определить точку $x^{(k+1)}$

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \lambda^{(k)} \nabla f(x^{(k)}).$$

- 6) Проверить выполнения неравенства

$$\frac{\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|}{\|x^{(k)}\|} \leq \varepsilon_1.$$

Если неравенство выполняется, поиск окончен, иначе $k=k+1$, перейти к п.2.

Степеневая функція

Код програми:

```
import numpy as np
```

```
import math
```

```
def f2(x1, x2):
```

```
    try:
```

```
        f2 = (10*(x1-x2)**2+(x1-1)**2)**4
```

```
        return f2
```

```
    except:
```

```
        pass
```

```
def hx1(x1, x2):
```

```
    return (4*(10*(x1-x2)**2+(x1-1)**2)**3)*(22*x1-20*x1-2)
```

```
def hx2(x1, x2):
```

```
    return (-80*(10*(x1-x2)**2+(x1-1)**2)**3*(x1-x2))
```

```
x1 = 1.2
```

```
x2 = 0
```

```
alpha = 0.001
```

```
#записуємо точки, пройдені градієнтним спуском
```

```
GD_X1 = [x1]
```

```
GD_X2 = [x2]
```

```
GD_Y = [f2(x1, x2)]
```

```
#записуємо кількість ітерацій
```

```
y_change = f2(x1, x2)
```

```
iter_num = 1
```

```
while (y_change > 1e-10 and iter_num < 100):
```

```

tmp_x1 = x1 - alpha * hx1(x1, x2)
tmp_x2 = x2 - alpha * hx2(x1, x2)
tmp_y = f2(tmp_x1, tmp_x2)
if tmp_y == None:
    break
f_change = np.absolute(tmp_y - f2(x1, x2))
x1 = tmp_x1
x2 = tmp_x2
GD_X1.append(x1)
GD_X2.append(x2)
GD_Y.append(tmp_y)
iter_num += 1

print(iter_num)
print((x1, x2))
print(f2(x1, x2))
print(GD_X1)
print(GD_X2)

```

Отриманий результат:

```

3
(2.321534657158188e+16, -1.471440723657895e+19)
2.2254604196923356e+157
[1.2, -3.6174982143999808, 2.321534657158188e+16]
[0, 289.0498928639999, -1.471440723657895e+19]

```

Отже, кількість звернень до підрахунку, для знаходження оптимальної точки в даному випадку становить 3 ітерацій. Оптимальною точкою є (2,3215; -1,4714), значення функції в цій точці дорівнює 2,2255. Вивела значення всіх ітерацій на екран див. 4-5 рядки.

Функція Пауелла

Код програми:

```

import numpy as np
import math

def f5(x1, x2, x3, x4):
    try:
        f5 = (x1 + 10 * x2) ** 2 + 5 * (x3 - x4) ** 2 + 10 * (x1 - x4) ** 4 + (x2 - 2 * x3) ** 4
        return f5
    except:
        pass

def dx1(x1, x2, x4):
    dx1 = 2 * x1 + 20 * x2 + 40 * (x1 - x4) ** 3
    return float(dx1)

def dx2(x1, x2, x3):
    dx2 = 20 * x1 + 200 * x2 + 4 * (x2 - 2 * x3) ** 3
    return float(dx2)

def dx3(x2, x3, x4):

```

```

dx3 = 10 * x3 - 10 * x4 - 8 * (x2 - 2 * x3) ** 3
return float(dx3)

def dx4(x1, x3, x4):
    dx4 = -10 * x3 + 10 * x4 - 40 * (x1 - x4) ** 3
    return float(dx4)

x1 = -3
x2 = -1
x3 = 0
x4 = 1
alpha = 0.001

GD_X1 = [x1]
GD_X2 = [x2]
GD_X3 = [x3]
GD_X4 = [x4]
GD_Y = [f5(x1, x2, x3, x4)]

y_change = f5(x1, x2, x3, x4)
iter_num = 1

while (y_change > 1e-10 and iter_num < 10):
    tmp_x1 = x1 - alpha * dx1(x1, x2, x4)
    tmp_x2 = x2 - alpha * dx2(x1, x2, x3)
    tmp_x3 = x3 - alpha * dx3(x2, x3, x4)
    tmp_x4 = x4 - alpha * dx4(x1, x3, x4)
    tmp_y = f5(tmp_x1, tmp_x2, tmp_x3, tmp_x4)
    if tmp_y == None:
        break
    f_change = np.absolute(tmp_y - f5(x1, x2, x3, x4))
    x1 = tmp_x1
    x2 = tmp_x2
    x3 = tmp_x3
    x4 = tmp_x4
    GD_X1.append(x1)
    GD_X2.append(x2)
    GD_X3.append(x3)
    GD_X4.append(x4)
    GD_Y.append(tmp_y)
    iter_num += 1

print(iter_num)
print((x1, x2, x3, x4))
print(f5(x1, x2, x3, x4))
print([GD_X1])
print([GD_X2])
print([GD_X3])
print([GD_X4])

```

Отриманий результат:

10

```
(-0.5812037644031529, -0.0783720891967141, -0.10979287152955577, -1.2306601916896558)
9.924233559634198
[[-3, -0.41400000000000015, -0.4602441766400001, -0.4917410430314208, -0.5151276905907128, -0.5334927471836464,
-0.5484845631529617, -0.5610663715433379, -0.5718403073465448, -0.5812037644031529]]
[[-1, -0.736, -0.578899104, -0.4532669724173448, -0.35254647737482075, -0.2716662697422256, -0.20664975534964602,
-0.15434929691851001, -0.11225813421098917, -0.0783720891967141]]
[[0, 0.002, -0.016961791999999996, -0.03301190681331033, -0.04748371940424763, -0.06100854394117781,
-0.07388987104835913, -0.0862737396501929, -0.09823014906532522, -0.10979287152955577]]
[[1, -1.5699999999999998, -1.4924878233599999, -1.4337372262216992, -1.3862945039339136, -1.3464601545670056,
-1.3121135116022202, -1.2819195025730066, -1.2549799904591148, -1.2306601916896558]]
```

Отже, кількість ітерацій – 10. Оптимальною точкою є $(-0,5812; -0,0784; -0,1098; -1,2307)$ значення функції в цій точці дорівнює 9,9242. Виведені значення всіх ітерацій на екран див. інші рядки.

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
факультет менеджменту та маркетингу
кафедра економічної кібернетики

КУРСОВА РОБОТА

з дисципліни «Оптимальне керування та теорія ігор в економіці»

на тему: «Синтез оптимального керування для систем диференціальних рівнянь з інтегральним запізненням по аргументу та фіксованим часом»

Студента III курсу , групи УК-81
денної форми навчання факультету ФММ

Керівник: д. ф.-м. н., проф. Капустян В.О.

Прийнято до перевірки:
Оцінка:

ЗМІСТ

ВСТУП.....	3
РОЗДІЛ 1. Теоретичні відомості.....	5
РОЗДІЛ 2. Розв’язання математичної задачі	12
2.1. Постановка задачі.....	12
2.2. Підхід до аналітичного розв’язання	13
2.3. Дискретизація вихідної задачі.....	16
РОЗДІЛ 3. Розв’язання економічної задачі.....	19
3.1. Постановка задачі.....	19
3.2. Розв’язання задачі	24
ВИСНОВОК	29
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	29
ДОДАТКИ.....	30
Додаток А. Реалізація чисельного методу	30

ВСТУП

В ході здобуття студентами освіти за спеціальністю «Економічна кібернетика», основну увагу присвячено набуттю навичок та знань по побудові та управлінню економіко-математичними моделями реальних економічних об'єктів та явищ. Особлива увага наділяється саме оптимізаційним моделям, як тим що надають рекомендації для обрання таких параметрів на які здатний впливати спеціаліст, щоб результат функціонування моделі був оптимальний.

Курс «Оптимальне управління та теорія ігор» якраз присвячено розгляду математичного інструментарію для знаходження таких оптимальних рішень. При чому основну увагу дисципліни присвячено саме динамічним моделям, які мають свій розвиток у часі та відповідно на які ОПР може впливати протягом функціонування системи. Також курс розглядає і моделі з теорії ігор, у яких представлені декілька гравців із різними, часто протилежними, цілями, при чому рішення кожного гравця здатні впливати на результати інших.

Дані теми досить близько моделюють типові економічні та ринкові процеси, і саме тому вони є обов'язковими для освоєння майбутніми спеціалістами для їх подальшого використання у науковій та прикладній діяльності.

Тому **метою** даної курсової роботи є засвоїти базові навички із розв'язування задач оптимального управління та теорії ігор, набути відповідні аналітичні та численні навички по вирішенню таких задач, та набути досвіду із перенесення економічних явищ у модельний вигляд та їх вирішення.

Завданням цієї курсової роботи є:

- Вивчення основних понять оптимального керування, дослідження заданого варіантом аналітичного методу та відповідних чисельних методів;
- Запис рішення задачі у варіанті відповідно до методу;
- Дискретизація задачі, та запис схеми Мойсєєва;
- Підбір до задачі відповідної економічної інтерпретації;

- Реалізація програмного продукту для рішення економічної задачі;

У ході роботи було досліджено праці та думки таких науковців як, Єгоров А.І, Васильєв Ф.П, Моїсєєв Н.Н., Лагоша Б.А., Капустян В.О., Интриллигатор М., тощо.

Об’єктом дослідження цієї роботи є відповідна до варіанту методологія і відповідні до економічної інтерпретації відносини, а саме питання економічного росту.

Предметом дослідження є визначення оптимального керування для математичної задачі і реалізація у прикладному економічному варіанті.

Програмна частина роботи буде виконана на мові програмування Python у середовищі Anaconda.

РОЗДІЛ 1. Теоретичні відомості

Моделі, які представляють економічну дійсність можна поділити на статичні, що визначені для конкретного моменту часу і представлені екзогенними та ендегенними параметрами, та динамічними, коли дані параметри мають тенденцію до зміни із плином часу. Також, до змінних моделей можна віднести ті, на які аналітик здатний впливати та ті, що не залежать від дослідника.

Основою економічної науки, як тої що знаходиться на перетину суспільних, за своєю суттю, та точна, часто за своїми задачами та інструментарієм. Як наслідок, для побудованих моделей часто необхідно знайти відповідно такі параметри, що керуються ОПР, які б переводили систему у оптимальний, з якоїсь точки зору стан.

Нашу увагу у ході написання роботи зосереджено саме на динамічних моделях. Вони на відміну від статичних моделей описуються системами диференціальних рівнянь, які вказують на зміну того чи іншого показника залежно від інших параметрів моделі, серед яких ті, на які ми прямо чи опосередковано можемо впливати.

Загалом, задачами такого типу, а саме знаходження оптимального рішення для динамічних систем займається теорія управління.

Задаймо типову для задачу теорії управління.

Нехай задано деяку систему, що описується часом, та деяким набором показників, або фазових змінних системи (1.1):

$$t \in [t_0, T]$$

$$x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)) \in R^n \quad (1.1)$$

Задані показники можуть змінюватися під впливом іншого набору параметрів, на які здатен впливати аналітик, тобто параметрів управління (1.2):

$$u(t) = (u_1(t), \dots, u_m(t)) \in R^m \quad (1.2)$$

Припустимо, що вектор фазових змінних задовольняють деякі системі диференціальних рівнянь (1.3):

$$\dot{x}(t) = f_i(t, x(t), u(t)), i = \overline{1, n} \quad (1.3)$$

Дана система називається рівнянням еволюції системи. Деяка функція, що відповідає заданим умовам та визначена на проміжку часу називається траєкторією системи.

Припускається, що функції у похідних двічі диференційовані та неперервні по всій сукупності аргументів та допустимі керування це кусково неперервні функції зі скінченною кількістю розривів першого роду.

Також, задані деякі обмеження, або початкові умови на вектор фазових змінних. Одне із таких, найбільш тривіальне, це початкове значення компонент фазових змінних (1.4).

$$x_i(t_0) = x_i^0, i = \overline{1, n} \quad (1.4)$$

При цьому, система описана вище може модифікуватися, в залежності від виду реальних зв'язків та припущень дослідника. Так, правий кінець інтервалу часу може бути як фіксованим, так і не фіксований. Обмеження на фазові змінні системи, можуть мати як і деякий функціональний характер, та і бути точковим, або зовсім представлятися у вигляді простої нерівності, де межі допустимих значень будуть представлені якимись числами. Система диференціальних рівнянь може бути представлена не лише звичайними функціями, а і функціями від моментів часу, що передували дійсному моменту часу, тобто мати деяке фіксоване запізнення, або бути представлено деяким інтегральним виразом, за котрийсь проміжок часу, тобто інтегральним запізненням. Правий і лівий кінець можуть бути як фіксованими, так і вільними, або такими, що повинні задовольняти якійсь нерівності.

Дана модель описує динамічну систему. Щоб модель стала оптимальною необхідно визначити для неї деякий критерій якості, що характеризував би систему (1.1-1.3). Нехай він матиме вигляд (1.5):

$$J(x, u) = \int_0^T f_0(t, x(t), u(t))dt + F(x(t_0), x(T)) \quad (1.5)$$

Дана критерій і буде характеристикою успішності або близькості дослідника до здійснення його завдань або цілей, а в принципі даватиме деяку чисельну характеристику усій системі. Перша частина буде інтервальним членом, а друга термінальним членом нашого критерію. Так, критерій в

залежності від цілей може представлятися як тільки термінальним, так і тільки інтегральним членом.

Визначивши критерій оптимальності ми можемо задати певну задачу виду (1.6):

$$\begin{aligned}
 t &\in [t_0, T] \\
 x(t) &= (x_1(t), \dots, x_n(t)) \in R^n \\
 u(t) &= (u_1(t), \dots, u_m(t)) \in R^m \\
 \dot{x}(t) &= f_i(t, x(t), u(t)), i = \overline{1, n} \\
 x_i(t_0) &= x_i^0, i = \overline{1, n} \\
 J(x, u) &= \int_{t_0}^T f_0(t, x(t), u(t)) dt + F(x(t_0), x(T)) \rightarrow \text{extr}
 \end{aligned}
 \tag{1.6}$$

Ця задача, і пошук таких оптимальних параметрів управління та фазових змінних і є основою вивчення нашої дисципліни та теорії управління.

Загалом, для вирішення цієї задачі існують два підходи або принципи: програмне керування та принцип оберненого зв'язку. Підхід програмного керування полягає в тому, що рішення знаходиться у контексті певних початкових умов. Тому, при зміні цих самих початкових умов для знаходження нового оптимального керування буде необхідно здійснювати пошук рішення заново. У випадку оберненого зв'язку, знайдене деяким методом, оптимальне керування буде залежати не тільки від часу, а і від початкових умов, тому при їх зміні не має необхідності у повторному пошуку рішення. Хоча і такий спосіб побудови оптимального рішення і є кращим, внаслідок відсутності необхідності рішення задачі при кожній зміні початкового стану, однак пошук такого рішення буде набагато складнішим, ніж пошук за принципом програмного керування.

Основними методами, що уособлюють кожен із підходів є принцип максимуму Понтрягіна та динамічне програмування. Історично, перший метод розроблювався радянською математичною спільнотою, і представляє собою множину однотипних теорем для кожного із випадків задачі управління, та представляє собою більш формальний математичний підхід. Динамічне програмування ідейно зародилося і розвивалося у США у 20-му столітті такими

вченими як Руфус Айзекс та Річард Белманн, та загалом представляє собою загальний підхід до вирішення задач оптимізації. [1 с. 5-7, 2 с.209, 3 с. 357-370]

У даній роботі необхідно побудувати рішення саме з використанням принципу оберненого зв'язку, або синтезу оптимального рішення. Тому, детальніше розглянемо основні засади цього методу.

Так, основою динамічного програмування у оптимальному керуванні є наступний принцип, або теорема: оптимальний процес (1.7):

$$(x(t), u(t)), t_0 < t < T \quad (1.7)$$

Цей процес для довільного моменту часу τ лишається оптимальним по критерію, незалежно від того, як система була переведена в стан у цей момент часу (1.8).

$$J(\tau, u) = \int_{t_0}^{\tau} f_0(t, x(t), u(t))dt + F(x(\tau)) \rightarrow \text{extr} \quad (1.8)$$

Слід зауважити, що цей принцип не вимагає доведення як теорема, а є загальний підходом для оптимізації, та береться як факт зі спостереження над реальними процесами.

Для практичного застосування цього принципу вводиться функція Белманна (1.9) вигляду:

$$S[t, x] = \min_{u(\tau) \in U, \tau \in [t_0, T]} \int_{t_0}^T f_0(\tau, x(\tau), u(\tau))d\tau + F(x(T)) \quad (1.9)$$

Очевидний наслідок для функції Белманна (1.9) є наступний вигляд у фінальний момент часу:

$$S[T, x] = F(x(T)) \quad (1.10)$$

Внаслідок деяких перетворень, як будуть детальніше розписані у розділі 2 для нашої задачі, можна дійти до рівняння Белманна (1.11):

$$-\frac{\partial S[t, x(t)]}{\partial t} = \min_{u(\tau) \in U} f_0(t, x(t), u(\tau)) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial S[t, x(t)]}{\partial x_i} f_i(t, x(t), u(t)) \quad (1.11)$$

Із цього рівняння можна знайти загальний вигляд для векторів оптимального управління, в залежності від початкових умов.

Нехай, було знайдене деяке оптимальне керування вигляду:

$$(x(t), u(t))$$

Нехай:

$$u = U\left(t, x, \frac{\partial S}{\partial x_i}\right) \quad (1.12)$$

При цьому, у загальному виді функція не буде однозначною. Рівняння Белманна (1.11) набуває виду:

$$-\frac{\partial S[t, x(t)]}{\partial t} = \min_{u(\tau) \in U} \{f_0(t, x(t), U(t, x, \frac{\partial S}{\partial x_i})) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial S[t, x(t)]}{\partial x_i} f_i(t, x(t), U(t, x, \frac{\partial S}{\partial x_i}))\}$$

Тоді, при існуванні деякого розв'язку, не обов'язково однозначну із (1.9):

$$S = S[t, x] \quad (1.13)$$

Підставляючи функцію управління у (1.12) отримаємо, знову ж таки не обов'язково однозначно:

$$u = \hat{u}(t, x)$$

У розв'язок вище входить і оптимальне рішення. Саме тому, описаний принцип є як необхідною умовою оптимальності.

В загальному випадку, питання існування рішення для задачі, і виділення цього окремого рішення є досить складними.

У випадку, коли заданий розв'язок для деяких (1.12) та (1.13):

$$u = U\left(t, x, \frac{\partial S}{\partial x_i}\right)$$

$$S[t, x(t)]$$

Так, якщо рішення по фазовим змінним системи задачі Коші буде єдиним, при задоволенні умов принципу Белманна, а також:

$$x_i(t_0) = x_i^0$$

$$t_0 < t \leq T$$

Тоді функція, що витікає із формули (1.12):

$$u = U\left(t, x, \frac{\partial S}{\partial x_i}\right)$$

Ця функція буде оптимальним рішенням для задачі оптимального синтезу. Однак, очевидно, що дані умови не завжди будуть виконуватися, так цей розв'язок для задачі Коші необов'язково буде єдиним. В такому разі для

доведення достатніх умов застосовують інші методи, наприклад доводять їх за допомогою і у термінах функції Кротова. [1 с. 354-356, 2 с. 210-219]

Описаний метод є аналітичний, тобто таким, що опирається на апарат математичного аналізу і надає приблизно точний, бо у ході виведення будуть застосовуватися виділення та опущення деяких на порядок менших компонент, часто у вигляді деякої функції, що дозволяє вивести одну деяку єдину формулу для кожного моменту часу.

Тому, для спрощення розрахунків, а також для обчислення задачі на ЕОМ, виконують дискретизацію задачі. Приклад такої дискретизації буде наведено у розділі 2 для практичної задачі варіанту. Зауважимо лише, що ми замінюємо час з неперервного інтервалу, на деяку множину точок, часто рівномірно розподілених на інтервалі. Далі, всі обчислення виконуються для окремої точки, усі аналітичні вирази як інтеграл та похідна замінюються на свої наближенні аналоги, у вигляді деяких сум та різницевих виразів.

Для знаходження оптимальної траєкторії за допомогою ЕОМ будемо використовувати схему Моїсєєва. Так, ми повинні визначити дискретні моменти часу та множини фазових векторів, допустимих для кожного моменту часу. Дані множини загалом утворюють сітку де кожна точка у окремий момент часу є деяку шкалою станів. Шкали H_i та H_{i+1} назвемо сусідніми. Для кожної із допустимих пар точок на двох сусідніх шкалах введемо допоміжну задачу вигляду:

$$\begin{aligned}
 t &\in [t_i, t_{i+1}] \\
 \dot{x}(t) &= f(t, x(t), u(t)) \\
 x(t_i) &= x, x(t_{i+1}) = y \\
 x(t) &\in G(t) \\
 J_i(x, y, u) &= \int_{t_i}^{t_{i+1}} f_0(t, x(t), u(t)) dt \rightarrow \inf
 \end{aligned} \tag{1.14}$$

Дану задачу (1.14) називатимемо елементарною операцією, що поєднує точки x та y . Позначимо як (1.15):

$$M_i(x, y) = \inf_{u \in \Delta(x, y)} J_i(x, y, u) \tag{1.15}$$

Так, якщо:

$$M_i(x, y) = \infty$$

$$\Delta(x, y) = \emptyset$$

У цьому методі, початковий критерій буде представлена, для деяких визначених фазових траєкторії та траєкторії управління як (1.16):

$$\sum_{i=0}^{N-1} M_i(x_{ij}, x_{i+1j}) + F(x_{Nj}) \quad (1.16)$$

Перший індекс відповідає за конкретний момент часу, а другий за конкретне значення точки на траєкторії.

При такому формулюванні методу, початкова задача зводиться до дискретної задачі знаходження мінімального, або максимального, шляху для моменті 0 та T, причому цей шлях буде деякою ламаною лінією.

Для заходження цього оптимального шляху і використовується принцип Белманна. Так, процедура його знаходження буде визначена у вигляді рекурентної формули вигляду (1.17):

$$\begin{aligned} C_N(x) &= F(x) \\ C_{N-1}(x) &= \min_{y \in H_N} [M_{N-1}(x, x_{k+1}^*) + F(x_{k+1}^*)] \\ C_k(x) &= \min_{y \in H_N} [M_k(x_k^*, x_{k+1}^*) + C_{k+1}^*(x_{k+1}^*)] \end{aligned} \quad (1.17)$$

Тобто, за принципом Белманна, ми і знаходимо для кожної задачі меншого розміру оптимальне рішення, при цьому пов'язуючи його із наступною задачею вже більшого розміру. [4 с. 505-509, 5 с. 191-197]

Зауважимо, що при відсутності фазових змінних, сітка може будуватися одразу по параметрам управління, і вирішуватися по ним. [6]

Отже, ми розглянули основну теоретичну базу до написання і вирішення завдання курсової роботи. Перейдемо до заданого за варіантом завдання.

РОЗДІЛ 2. Розв'язання математичної задачі

2.1. Постановка задачі

Нехай ми маємо наступну модель системи (2.1):

$$\begin{aligned}\dot{x}_i(t) &= \int_0^{\tau} f_i(x(t), x(t-\xi), u(t), u(t-\xi), t) d\xi, i = \overline{1, n}, 0 \leq t \leq T \\ x_i(t) &= \phi_i(t), t \in [-\tau, 0], i = \overline{1, n} \\ u_j(t) &= \psi_j(t), t \in [-\tau, 0], j = \overline{1, m}\end{aligned}\quad (2.1)$$

Причому, час у моделі фіксований, тобто T – деяке додатне число, інтегральне запізнення також фіксоване і τ – деяке додатне число, а також $\tau < T$.

Функції $f_i(x(t), x(t-\xi), u(t), u(t-\xi), t), i = \overline{1, n}$ неперервні по всім аргументам і мають частинні похідні по x ; $\phi_i(t), t \in [-\tau, 0], i = \overline{1, n}$ та $\psi_j(t), t \in [-\tau, 0], j = \overline{1, m}$ це кусково неперервні функції по t .

Керування $u_j(t), j = \overline{1, m}$ це кусково неперервні функції по t , для яких виконується, для деяких заданих додатних чисел l_j , виду (2.2):

$$|u_j(t)| \leq l_j \quad (2.2)$$

Дані функції утворюють множину допустимих керувань, яка позначатиметься через U . Задача оптимального управління полягає у наступному: необхідно знайти вектор допустимих керувань $u_*(t) \in U$, який мінімізував критерій якості (2.3):

$$J(x, u) = \int_0^T f_0(t, x(t), u(t)) dt + F(x(T)) \rightarrow \min \quad (2.3)$$

Причому, $f_0(t, x(t), u(t))$ та $F(x(T))$ є невід'ємними та неперервними функціями.

Рішення необхідно знайти у вигляді синтезу оптимального рішення, опираючись на принцип Белманна. До основних характеристик цієї задачі слід віднести заданість системи диференціальних рівнянь через деяке інтегральне запізнення, а також те що кінцевий час у задачі фіксований.

Перейдемо до виведення функції та рівняння Белманна для цієї задачі.

2.2. Підхід до аналітичного розв'язання

У теоретичній частині був представлений загальний підхід до побудови синтезу оптимального керування через застосування принципу Белманна. Нагадаємо, що функція Белманна виду (1.9):

$$S[t, x] = \min_{u(\tau) \in U, \tau \in [t_0, T]} \left\{ \int_{t_0}^T f_0(\tau, x(\tau), u(\tau)) d\tau + F(x(T)) \right\}$$

Уведемо скорочене позначення (2.4):

$$S[t, x] = S_t^T$$

Із правил інтегрування ми можемо переписати вираз вище як (2.5):

$$S_t^T = \min_{u(\tau) \in U, \tau \in [t_0, T]} \left\{ \int_{t_0}^{t_0+\delta t} f_0(\tau, x, u) d\tau + \int_{t_0+\delta t}^T f_0(\tau, x, u) d\tau + F(x(T)) \right\} \quad (2.5)$$

Надалі у деяких випадках ми уникатимемо аргументів у деяких, очевидних випадках для скорочення запису.

Задавши такі межі для приросту, щоб:

$$\frac{o(\delta t)}{\delta t}, \delta t \rightarrow 0$$

Ми можемо записати вираз вище як (2.6):

$$S_t^T = \min_{u(\tau) \in U, \tau \in [t_0, T]} \left\{ f_0(\tau, x, u) \delta t + o(\delta t) + \int_{t_0+\delta t}^T f_0(\tau, x(\tau), u(\tau)) d\tau + F(x(T)) \right\} \quad (2.6)$$

Згідно до принципу оптимальності, ми можемо представити залежність оптимальних управлінь як (2.7):

$$\begin{aligned} S[t + \delta t, x(t + \delta t)] &= S_{t_0+\delta t}^T \\ S_{t_0+\delta t}^T &= \min_{u \in U, \tau \in [t_0+\delta t, T]} \left\{ \int_{t_0+\delta t}^T f_0(\tau, x, u) d\tau + F(x(T)) \right\} \\ S_{t_0}^T &= \min_{u \in U, \tau \in [t_0, t_0+\delta t]} \left\{ f_0(\tau, x, u) \delta t + o(\delta t) + S_{t_0+\delta t}^T \right\} \end{aligned} \quad (2.7)$$

По припущенню $x(t)$ є оптимальним рішенням для деякого оптимального управління $u(t)$. Тому далі встановимо наступні рівності для приростів (2.8-2.9):

$$x(t + \delta t) = x(t) + \delta x \quad (2.8)$$

$$\delta x = \dot{x}(t)\delta t + o(\delta t) = \delta t \int_0^\tau f(x(t), x(t-\xi), u(t), u(t-\xi), t) d\xi + o_1(\delta t) \quad (2.9)$$

$$\frac{o_1(\delta t)}{\delta t}, \delta t \rightarrow 0$$

Далі, допускаємо те, що функція Белманна є неперервно диференційованою по всій сукупності аргументів. Матимемо запис у вигляді формули Тейлора для перших часткових похідних:

$$S[t + \delta t, x(t + \delta t)] = S[t + \delta t, x(t) + \delta x(t)]$$

$$S_{t_0+\delta t}^T = S[t, x(t)] + \frac{\partial S[t, x(t)]}{\partial t} \delta t + \sum \frac{\partial S[t, x(t)]}{\partial x_i} \delta x_i(t) + o_2(\delta t, \delta x) \quad (2.10)$$

Причому:

$$\frac{o_2(\delta t, \delta x)}{r}, r \rightarrow 0, r^2 = \delta t^2 + |\delta x|^2$$

Отримуємо:

$$S_{t_0+\delta t}^T = S[t, x(t)] + \frac{\partial S[t, x(t)]}{\partial t} \delta t + \delta t \sum \frac{\partial S[t, x(t)]}{\partial x_i} \int_0^\tau f_i(\cdot) d\xi + o_3 \quad (2.11)$$

Представивши інтеграл за допомогою формули лівих прямокутників, для спрощеного і однозначного запису, для деякої тісного скупчення K відрізків:

$$S_{t_0+\delta t}^T = S[t, x(t)] + \frac{\partial S[t, x(t)]}{\partial t} \delta t + \delta t \sum \frac{\partial S[t, x(t)]}{\partial x_i} \sum_{j=0}^{K-1} f_i(\cdot) \Delta \xi + o_3 \quad (2.12)$$

$$o_3 \sim o_2$$

Підставивши вираз (2.12) у формулу (2.7), та враховуючи те що операція не впливає на $S[t, x(t)]$, та розділивши отриманий вираз на δt , та винести частинну похідну по часу у ліву частину виразу, отримаємо (2.13):

$$-\frac{\partial S[t, x(t)]}{\partial t} = \min_{u \in U} f_0(\tau, x, u) + \sum \frac{\partial S[t, x(t)]}{\partial x_i} \sum_{j=0}^{K-1} f_i(\cdot) \Delta \xi + o_4 \quad (2.13)$$

Враховуючи:

$$\frac{o_4(\delta t)}{\delta t}, \delta t \rightarrow 0$$

А також враховуючи те, що початковий момент може задаватися довільно отримаємо фінальний вигляд рівняння Белманна для нашої задачі (2.14):

$$-\frac{\partial S[t,x(t)]}{\partial t} = \min_{u \in U} \{f_0(\tau, x, u) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial S[t,x(t)]}{\partial x_i} \sum_{j=0}^{K-1} f_j(x, u, t) \Delta \xi\} \quad (2.13)$$

2.3. Дискретизація вихідної задачі

Виконаємо дискретизацію вхідної задачі, для зведення її до задачі нелінійної оптимізації та вирішення у ЕОМ. Шляхом дискретизації ми замінимо деякі аналітичні операції, як інтегрування та диференціація до своїх наближених чисельних аналогів.

Нехай, ми розбиваємо деякий вхідний інтервал час критерію оптимальності на N інтервалів, або на $N+1$ моментів часу. Матимемо тоді підінтервали довжинами (2.14) [7]:

$$\Delta t = \frac{T}{N} \quad (2.14)$$

Відповідно:

$$t_i = i\Delta t, i = \overline{0, N} \quad (2.15)$$

Також, як вже вказувалося у минулому підрозділі, розіб'ємо ті проміжки на K частин. Маємо:

$$\Delta \tau = \frac{\tau}{K} \quad (2.16)$$

Відповідно:

$$\tau_i = \Delta \tau j, j = \overline{0, K} \quad (2.17)$$

Аргументи, що надходять до неперервних функцій ми представлятимемо для кожного i -го моменту часу як (2.15-2.17):

$$u(t_i) = u^i \quad (2.18)$$

$$x(t_i) = x^i \quad (2.19)$$

Тоді використовуючи формулу лівих прямокутників виду для інтервалів i виду (2.14-2.19):

$$\int_0^T f_0(t, u(t), x(t)) d\xi \approx \sum_{i=0}^{N-1} f_0(x^i, u^i) \Delta t \quad (2.20)$$

$$\int_0^\tau f_i(x(t), x(t - \xi), u(t), u(t - \xi), t) d\xi \approx \sum_{j=0}^{K-1} f_i(x^j, u^j) \Delta \tau \quad (2.18)$$

Частинні похідні ми замінимо на кінцево-різницевиими рівняннями першого порядку, а саме їх невідому праві частини. З цього моменту для спрощення запису представлятимемо не кожне окреме рівняння системи диференціальних рівнянь, а загальну векторну форму. Тоді, матимемо:

$$\frac{x^{i+1} - x^i}{\Delta t} = \sum_{j=0}^{K-1} f(x^j, u^j) \Delta \tau \quad (2.19)$$

Початкові умови будуть виду:

$$\begin{aligned} x_i^k &= \phi_i^k, k = \overline{0, i} = \overline{1, n} \\ u_j^k &= \psi_j^k, k = \overline{0, j} = \overline{1, m} \end{aligned} \quad (2.20)$$

Обмеження на керування:

$$|u_j^i| \leq l_j, i = \overline{0, j} = \overline{1, m} \quad (2.21)$$

Критерій видозміниться до виду:

$$J(x, u) = \sum_{i=0}^{N-1} f_0(x^i, u^i) \Delta t + F(x^N) \rightarrow \min \quad (2.22)$$

Тоді, у дискретному вигляді, вхідна задача (2.1-2.3) матиме вигляд:

$$\begin{aligned} \frac{x^{i+1} - x^i}{\Delta t} &= \sum_{j=0}^{K-1} f(x^j, u^j) \Delta \tau, i = \overline{0, j} = \overline{1, n} \\ \Delta t &= \frac{T}{N} \\ \Delta \tau &= \frac{\tau}{K} \\ x_i^k &= \phi_i^k, k = \overline{0, i} = \overline{1, n} \\ u_j^k &= \psi_j^k, k = \overline{0, j} = \overline{1, m} \end{aligned} \quad (2.23)$$

$$|u_j^i| \leq l_j, i = \overline{0}j = \overline{1}m$$

$$N-1$$

$$J(x, u) = \sum_{i=0}^{N-1} f_0(x^i, u^i) \Delta t + F(x^N) \rightarrow \min$$

Перейдемо до наведення конкретного економічного прикладу і його вирішення за допомогою програмного продукту.

РОЗДІЛ 3. Розв'язання економічної задачі

3.1. Постановка задачі

Класичним прикладом задач оптимізації у економічній науці стали питання економічного росту. Ця тематика із макроекономіки полягає у наступному: описується деяка економічна система, найчастіше національна економіка, параметрами якої є загальні агреговані фактори виробництва, як капітал чи праця, національний дохід або валове виробництво, показники сукупного споживання та інвестицій, а також інші можливі характеристики як безробіття, кредитна ставка, ціна валюти, тощо.

Для описання цієї моделі були досліджені джерела [3 с. 469-505, 8 с. 61-68., 9]. Основна теоретична база для побудови моделі була взята із джерела [8 с. 61-68].

Розглянемо однопродуктову економічну систему, що розвивається неперервно у часі.

Нехай, вона буде характеризуватися валовим випуском продукції, який буде залежати від основних факторів виробництва, праці та капіталу, і буде представлений у вигляді виробничої функції Коба-Дугласа (3.1):

$$X = L^{\alpha} K^{\beta} \quad (3.1)$$

Де, X – валовий випуск продукції, у вартісному представленні;
 L – обсяги трудових ресурсів, у вартісному представленні;
 K – обсяги капіталу, у вартісному представленні;
 α, β – додатні коефіцієнти еластичності по праці та капіталу;

Причому:

Переведемо систему до відносних характеристик вигляду:

$$x = \frac{X}{L} \quad (3.2)$$

$$k = \frac{K}{L} \quad (3.3)$$

Де, x – продуктивність праці;
 k – капіталоозроєність;

Саме дані відносні величини (3.2-3.3) і будуть фазовими змінними системи. Через неї можна представити валовий випуск продукції. Також фазовою змінною системи буде обсяг трудових ресурсів.

Розглянемо параметри управління.

Нехай, у зв'язку із тим що один із параметрів є трудовими ресурсами, ми припустимо що держава, здійснюючи заходи у сфері демографічної та міграційної політики, може здійснювати вплив на темпи приросту населення. Так, серед варіантів, вона може як зовсім не здійснювати заходів, при цьому населення буде змінюватися за власними природньо, економічно та соціально визначеними темпами, або здійснюючи заходи у кожному із періодів надавати приросту темпам у тій чи іншій мірі. Цей параметр матиме вид:

$$0 \leq u_1(t) \leq 1 \quad (3.4)$$

З іншого боку, увесь вироблений країни, згідно до макроекономічної теорії, розподіляється між споживаннями, та різного виду інвестиціями у капітал. Держава здатна своїм впливом на ціни, податкову політику, кредитну ставку тощо, виконувати вплив на відносний обсяг споживання та інвестування. Очевидно, що цей обсяг буде лише долею валового продукту, що йде у одну чи іншу сферу. Введемо до системи відносний обсяг споживання як параметр управління виду:

$$0 \leq u_2(t) \leq 1 \quad (3.5)$$

Ми описали всі суттєві змінні моделі. Тому, визначимо систему рівнянь, що характеризуватимуть еволюцію системи.

Так, зміну у часі обсягів трудових ресурсів представимо як:

$$\dot{L}(t) = nL \left(1 + \int_{t-\tau}^t u_1(\xi) d\xi\right) \quad (3.6)$$

Де, τ – деяке додатне число, що характеризує запізнення;

n – темпи приросту населення;

Інтерпретація рівняння наступна: як зазначалося, населення має власні темпи приросту, а також держава може впливати на дані темпи. Її вплив визначається як накопичений ефект від обраних розмірів демографічно-міграційної та соціальної політики на населення за період за деякий час до поточного моменту і до поточного моменту.

Зміна капіталоозброєності економіки у часу матиме вид:

$$\dot{k}(t) = (1 - a)x(t) \int_{t-\tau}^t 1 - u_2(\xi) d\xi - (\mu + n)k(t) \quad (3.7)$$

Де, μ – коефіцієнт амортизації;

a – деяке число на інтервалі $[0;1]$, визначає міру повернення капіталу у виробництво;

Або, представивши продуктивність праці через обсяги капіталу та праці:

$$\dot{k}(t) = (1 - a) \frac{L(t)^\alpha (k(t)L(t))^\beta}{L(t)} \int_{t-\tau}^t 1 - u_2(\xi) d\xi - (\mu + n)k(t) \quad (3.8)$$

Враховуючи що сума коефіцієнтів дорівнює одиниці:

$$\dot{k}(t) = (1 - a)k(t)^\beta \int_{t-\tau}^t 1 - u_2(\xi) d\xi - (\mu + n)k(t) \quad (3.9)$$

Охарактеризуємо це диференціальне рівняння. Друга частина виразу вказує на зміни приросту у результаті постійних відрахувань на амортизацію та за рахунок сталого збільшення населення. Перша частина вказує на збільшення капітальних ресурсів за рахунок відрахувань у нові інвестиційні проекти та за рахунок накопиченої за період реакції на політику держави.

Зауважимо що дані фазові змінні матимуть стабільний ефект від параметрів управління, так як вони більші за нуль, і всі константи також додатні. Також інтеграл береться по таким функціям, які у кожний момент часу, в незалежності

від параметра управління будуть додатними, тому і самі інтеграли будуть додатними, при чому ми можемо визначити і максимальні і мінімальні значення параметру для найбільшого приросту.

Перейдемо до опису критерія якості. Він матиме наступний вигляд:

$$J(x, u) = \int_0^T \frac{u_2(t)X(t) - (u_1(t)C)^2}{L(t)} dt + x(T)^2 \rightarrow \max \quad (3.10)$$

Де, C – деяка константа, що характеризує витрати на міграційно-демографічну політику;

Розглянемо зміст критерію. У інтегральній частині ми знаходимо різницю між споживанням населення, та витратами на соціально-демографічну політику. Припустимо, що витрати на неї залежать від інтенсивностей заходів держави і змінюється за квадратичним законом в залежності від інтенсивності заходів. При цьому ми ділимо різницю на поточний обсяг трудових ресурсів, шукаючи саме поголовне споживання, а неабсолютне значення. Термінальний член представляє собою квадрат від продуктивності праці. Критерій направлений на максимум, тобто значення продуктивності праці та поголовного споживання повинно бути найбільшим.

Серед необхідних умов для вирішення задачі необхідно мати відомості про політику держави за термін лагу до початку функціонування і керування системи, а також значення трудових ресурсів і капіталу у моменту старту функціонування системи. Припускати, що політика на час лагу була постійною і рівною якомусь числу. Матимемо:

$$L(0) = L_0 \quad (3.11)$$

$$k(0) = k_0 \quad (3.12)$$

$$u_j(t) = u_{0j}, t \in [-\tau, 0], j = \overline{2} \quad (3.13)$$

Отже, отримаємо задачу:

$$\begin{aligned} \dot{L}(t) &= nL \left(1 + \int_{t-\tau}^t u_1(\xi) d\xi \right) \\ \dot{k}(t) &= (1 - a)k(t)^\beta \int_{t-\tau}^t 1 - u_2(\xi) d\xi - (\mu + n)k(t) \end{aligned}$$

$$X = L^\alpha K^\beta$$

$$x = \frac{X}{L}$$

$$k = \frac{K}{L}$$

$$0 \leq u_1(t) \leq 1$$

$$0 \leq u_2(t) \leq 1 \quad (3.14)$$

$$L(0) = L_0$$

$$k(0) = k_0$$

$$u_j(t) = u_{0j}, t \in [-\tau, 0], j = \overline{2}$$

$$J(x, u) = \int_0^T \frac{u_2(t)X(t) - (u_1(t)C)^2}{L(t)} dt + x(T)^2 \rightarrow \max$$

Задача є типовою як і для макроекономічної тематики, так і для публічної економіки. Вона актуальна при цілях держави поліпшити показники та якість життя населення, так і для цілей ефективного функціонування з метою переобрання на нові терміни у подальшому. Тому за час обиратимемо деяку кратну кількість років, які характеризуватимуть діяльність уряду.

Перейдемо до уточнення констант моделі та її чисельного рішення на ЕОМ.

3.2. Розв'язання задачі

Нехай, економіка, що розвивається та оцінюється по задачі (3.14) у моменту початку управління характеризується наступними константами:

$$a = 0.2$$

$$\alpha = 0.6$$

$$\beta = 0.4$$

$$n = 0.05$$

$$\mu = 0.3$$

$$C = 0.5$$

$$\tau = 0.25$$

$$L(0) = 4$$

$$k(0) = 3$$

Представлятимемо наші характеристики у вигляді великих агрегованих чисел, наприклад мільйонів.

$$u_1(t) = 0.3, t \in [-0.25, 0]$$

$$u_2(t) = 0.8, t \in [-0.25, 0]$$

Вважатимемо, що 1 рівна одному реальному року, і нам потрібно керувати системою 10 років. Тоді інтегральне запізнення рівне одному кварталу.

Тоді, у дискредитованому вигляді, задача буде мати вид:

$$\frac{L^{i+1} - \bar{L}}{\Delta t} = 0.05L^{i+1} \left(1 + \sum_{j=0}^{K-1} u_1^{i+1} 0.25\right), i = \bar{N}$$

$$\frac{k^{i+1} - \bar{k}}{\Delta t} = \dot{k}(t) = 0.8x^{i+1} \sum_{j=0}^{K-1} 0.25(1 - u_2^{i+1}), i = \bar{N}, j = \bar{K}$$

$$\Delta t = \frac{10}{N}$$

$$\Delta \tau = \frac{0.25}{K}$$

$$X = L^{0.6} K^{0.6}$$

$$x = \frac{X}{L}$$

$$k = \frac{K}{L}$$

$$L(0) = 4$$

$$k(0) = 3$$

$$0 \leq u_1^i \leq 1, i = \overline{N}$$

$$0 \leq u_2^i \leq 1, i = \overline{N}$$

$$u_1^i = 0.3, t \in [-0.25, 0], i = \overline{N}$$

$$u_2^i = 0.8, t \in [-0.25, 0], i = \overline{N}$$

$$J(x, u) = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{u_2^i X^i - u_1^i C^2}{L^i} \Delta t + x^{2N} \rightarrow \max$$

Далі, для чисельного вирішення, використовуючи схему Моїсеєва (1.14-1.17), необхідно побудувати сітку значень. Наші похідні моделі досить просто визначають на значення параметру управління для досягнення максимального і мінімального приросту. Закріпивши ці значення у похідних, ми зможемо знайти верхню та нижню межі фазових змінних, та побудувати між ними рівномірну сітку значень для кожного із моментів часу.

Матимемо наступні криві:

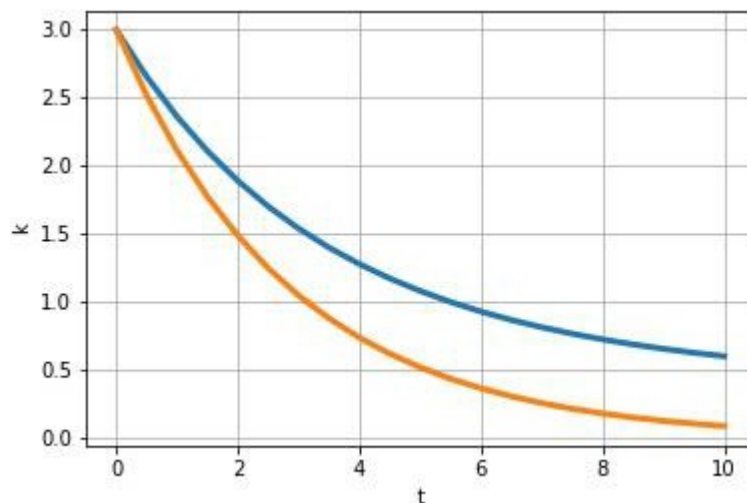


Рисунок 1. Екстремальні рішення для капіталоемкості

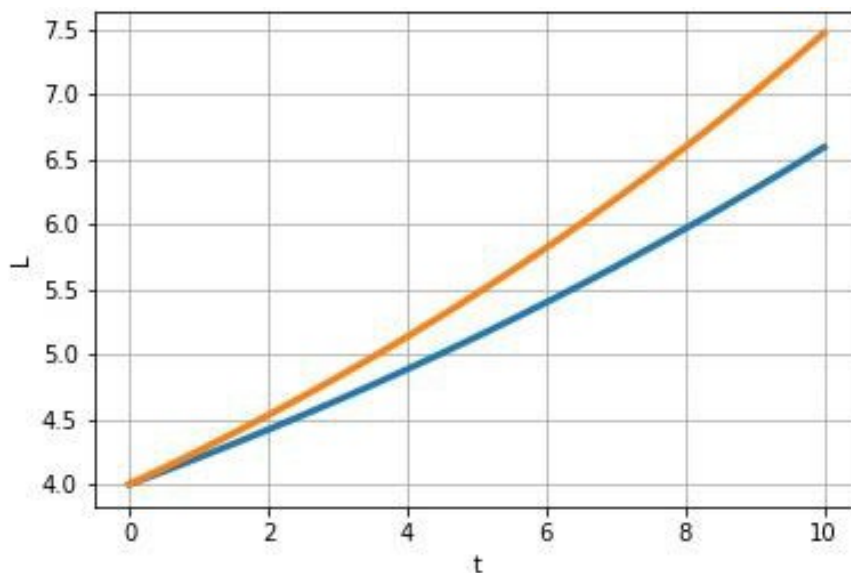


Рисунок 2. Екстремальні рішення для трудових ресурсів

Далі, ми на кожному кроці будемо ділити на рівномірну кількість точок інтервали між цими прямими. Усі поєднання точок між капіталоємкістю та трудовими ресурсами для кожного моменту часу і утворюватимуть сітку.

Далі, на кожному кроці, ми знаходимо, чи існує між двома сусідніми точками, і якщо існує то який оптимальний параметр управління. Вважатимемо що точки сітки та сама поставлена задача поставлена на дуже малому інтервалі, і тому ми можемо змінити диференціальні рівняння на різницеві, а інтеграл розрахувати як площу під прямокутною трапецією.

На останньому кроці, знайшовши ми спочатку рухаючись по сітці знайдемо оптимальне керування до цього моменту для кожному кроці. На останньому кроці, ми знайдемо точку і максимальним значенням критерію та у зворотному напрямку визначимо оптимальні траєкторії.

Код реалізації процедури представлено у Додатку А.

Нехай, ми поділимо наш часовий проміжок на 20 точок, таким чином уникаючи інтегральне запізнення і замінюючи його на площу прямокутника, з відповідним часом та значенням параметру управління.

$$N = 20$$

Тоді, матимемо наступні оптимальні траєкторії.

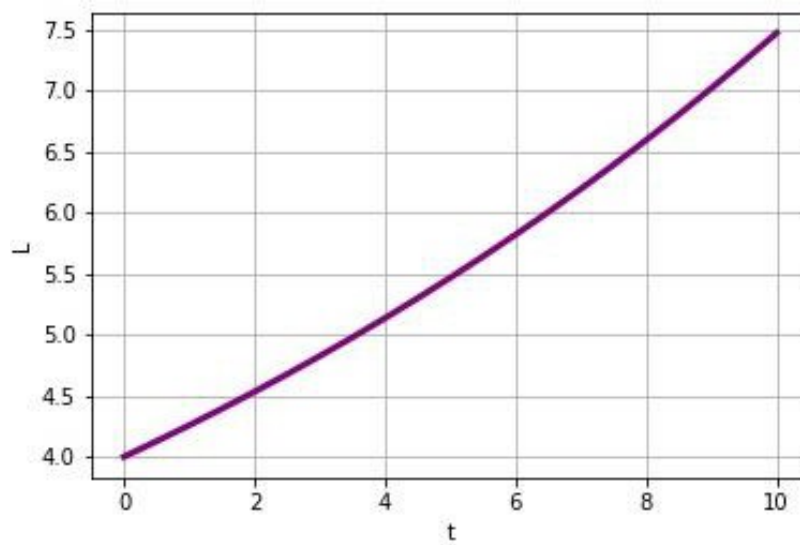


Рисунок 3. Оптимальна траєкторія для трудових ресурсів

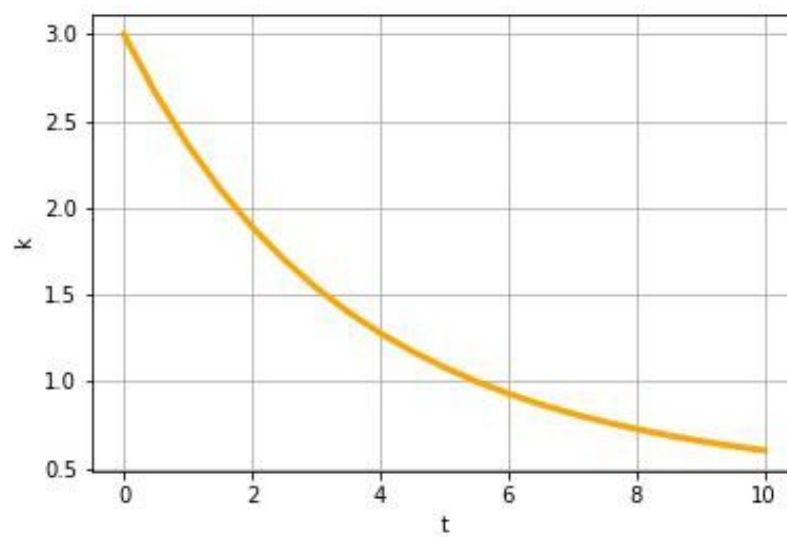


Рисунок 4. Оптимальна траєкторія для капіталоемкості

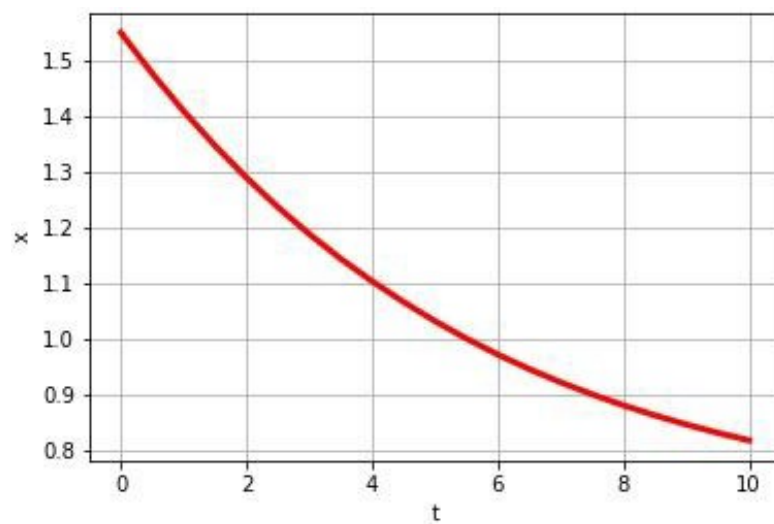


Рисунок 5. Оптимальна траєкторія для продуктивності праці

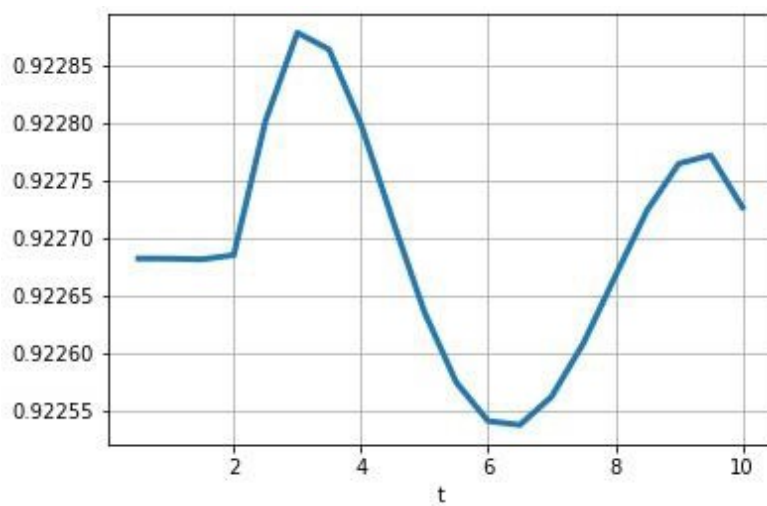


Рисунок 6. Оптимальна траєкторія для міграційної та демографічної політики

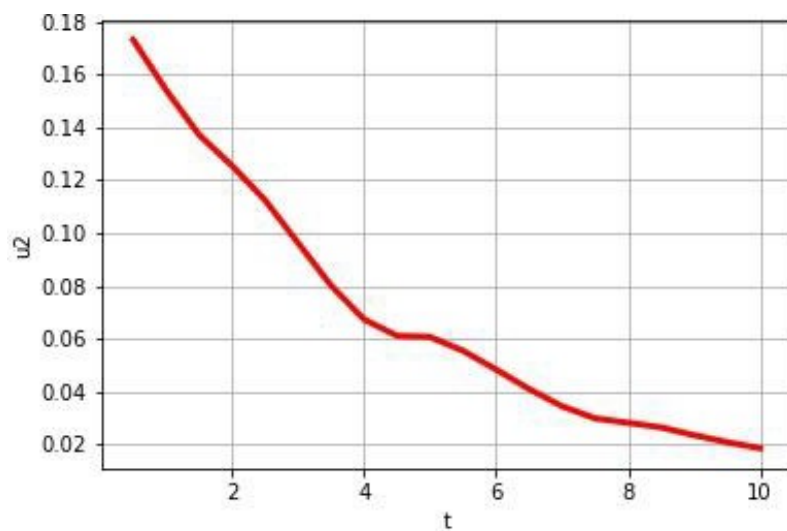


Рисунок 7. Оптимальна траєкторія для відносного обсягу споживання

Критерій дорівнює:

$$J_{\text{opt}} = 19.96$$

Аналогічні близькі результати були отримані і аналітично.

Розглянемо отримане рішення. Так, параметри управління слід спрямовувати чим ближче до границі допустимої області. Причому, державі слід проводити активну політику у сфері соціальної, демографічної та міграційної сфери, і при цьому обмежувати із кожним роком відносне споживання. Так, державна політика у соціальній сфері триматиметься на стабільно високому рівні, а коливання можна пояснити із відхиленнями чисельного методу. Згідно до принципів мальтузіанства, населення зростає набагато швидшими темпами, ніж капітал, тому трудові ресурси будуть збільшуватися та зростати з кожним роком, а всі залежні показники нашої моделі навпаки, спадати до нуля. Оптимальні траєкторії близькі до своїх екстремальних максимальних аналогів. Продуктивність праці, як і капіталоозроєність також буде спадати із плином часу.

ВИСНОВОК

Отже, у даній роботі було розглянуто та удосконалено навички із теорії управління та теорії ігор.

Так, дана галузь знань є необхідною математичною базою для спеціалістів та дослідників різних сфер діяльності, так як вона дозволяє розглядати питання оптимізації, тобто обрання найкращих варіантів із усіх доступних, як для статичних систем, так і для динамічних систем, а також в тому числі і для явищ, що описуються апаратом теорії ігор.

У першому розділі була наведена теоретична база для виконання завдання варіанту курсової роботи. Так, згідно доваріанту, необхідно було побудувати синтез оптимального рішення для задачі із інтегральним запізненням. Це рішення дозволяє у майбутньому отримувати рішення для будь-яких почтакових умов, не вирішуючи завдання знову. Сама метода базується на принципі Белманна, що використовується як універсальний метод для вирішення задач оптимізації у різноманітних моделях. Також було розглянуто метод чисельного вирішення задачі за допомогою схеми Моїсєєва.

У другій частині роботи було вирішено аналітично загальну задачу для варіанту. Було отримане загальна функція та рівняння Белманна, які дають змогу теоретично вирішити задачу.

У третій частині роботи була наведена практична реалізація моделі варіанту на тематику балансу та динаміки зміни основних показників однопродуктової економіки. Дана задача була вирішено чисельно засобами ЕОМ на мові Python у середовищі Anaconda.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Егоров А.И Основы теории управления – М: «Физматлит», 2004 – 504 с.
2. Ройтенберг Я.Н. Автоматическое управление – М: «Наука», 1971 – 396 с.
3. Интрилигатор М. Математические методы оптимизации и экономическая теория. – М: «Прогресс», 2002 – 597 с.
4. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач – М: «Наука», 1988 – 552 с.
5. Моисеев Н.Н Численные методы в теории оптимальных систем – М: «Наука», 1971 – 424 с.
6. Моисеев Н.Н. Методы динамического программирования в теории оптимальных управлений. I – Журнал «Вычислительная математика и физика» , том 4, номер 3, 1964 – 485-494 с.
7. Оптимальне керування та теорія ігор в економіці: методичні вказівки щодо виконання курсової роботи для студентів галузі знань 0305 – «Економіка та підприємництво» напряму підготовки 6.030502 «Економічна кібернетика» усіх форм навчання / Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»; [уклад. В.О. Капустян, І.О. Пишнограєв]. – Київ: НТУУ «КПІ», 2016. – 25 с.
8. Лагоша Б.А. Оптимальное управление в экономика: Учебное пособие — М: Московский государственный университет экономики, статистики и информатики, 2004. – 133 с.
9. Экономический рост и динамическая сбалансированность хозяйственной системы в кейнсианской концепции: Электронне джерело. Режим доступу: https://www.econ.msu.ru/ext/lib/Category/x56/xee/22254/file/параграф%209_6.pdf

ДОДАТКИ

Додаток А. Реалізація чисельного методу

```

import numpy as np
import scipy.integrate
import itertools
import matplotlib.pyplot as plt
%matplotlib inline

N = 20

t, dt = np.linspace(0, 10, N+1, retstep=True)
dtau = 0.25

L0 = 4
k0 = 3

n = 0.05
nu = 0.3
a = 0.2
alph = 0.6
bt = 0.4
C = 0.5

def f0(par):
    return (par[0]*(par[2]*(par[3]**bt))-((par[1]*0.5)**2))/par[2]

def F(par):
    return par[0]**(2*0.4)

```

```

def dL(t, p):
    return p[0]*0.05*(1+p[1]*0.25)

def dLmax(t, p):
    return p[0]*0.05*(1+1*0.25)

def dLmin(t, p):
    return p[0]*0.05

def dk(t, p):
    return (1-0.2)*(p[0]**0.4)*(1-p[1])*0.25-(0.3+0.05)*p[0]

def dkmax(t, p):
    return (1-0.2)*(p[0]**0.4)*0.25-1*(0.3+0.05)*p[0]

def dkmin(t, p):
    return -(0.3+0.05)*p[0]

r1 = scipy.integrate.solve_ivp(dLmax, [0, 10], [L0], t_eval = t)

r2 = scipy.integrate.solve_ivp(dLmin, [0, 10], [L0], t_eval = t)

fig, ax = plt.subplots()

ax.plot(t, r2.y[0], t, r1.y[0], linewidth=3)
ax.set_xlabel('t')
ax.set_ylabel('L')
ax.grid()

```

```
plt.show()
```

```
fig.savefig('Lextr.jpeg')
```

```
max_L = r1.y[0]
```

```
min_L = r2.y[0]
```

```
k1 = scipy.integrate.solve_ivp(dkmax, [0, 10], [k0], t_eval = t)
```

```
k2 = scipy.integrate.solve_ivp(dkmin, [0, 10], [k0], t_eval = t)
```

```
fig, ax = plt.subplots()
```

```
ax.plot(t, k1.y[0], t, k2.y[0], linewidth=3)
```

```
ax.set_xlabel('t')
```

```
ax.set_ylabel('k')
```

```
ax.grid()
```

```
plt.show()
```

```
fig.savefig('kextr.jpeg')
```

```
max_k = k1.y[0]
```

```
min_k = k2.y[0]
```

```
G = []
```

```
G.append([(L0, k0)])
```

```
for i in range(1, N+1):
```

```
    Ls = np.linspace(min_L[i], max_L[i], 20)
```

```
    ks = np.linspace(min_k[i], max_k[i], 20)
```

```

g = itertools.product(Ls, ks)
G.append(list(g))

```

```

M = []

```

```

for k in range(0, len(G) - 1):

```

```

    M.append([])

```

```

    for i in G[k]:

```

```

        for j in G[k+1]:

```

```

            v = [None, None]

```

```

            v.append(i)

```

```

            v.append(j)

```

```

            u1 = (((j[0]-i[0])/dt) - j[0] * n)/(j[0] * n * dtau)

```

```

            u2 = -(((j[1]-i[1])/dt) + (nu + n) * j[1])/((1-a)*(j[1]**bt)*dtau) + 1

```

```

            if 0 <= u2 <= 1 and 0 <= u1 <= 1:

```

```

                v[1] = (u1, u2)

```

```

                v[0] = (f0([u1, u2, j[0], j[1]]) + f0([u1, u2, i[0], i[1]]))/2

```

```

                M[k].append(v)

```

```

M.append([])

```

```

for i in G[N-2]:

```

```

    for j in G[N-1]:

```

```

        v = [None, None]

```

```

        v.append(i)

```

```

        v.append(j)

```

```

        u1 = (((j[0]-i[0])/dt) - j[0] * n)/(j[0] * n * dtau)

```

```

        u2 = -(((j[1]-i[1])/dt) + (nu + n) * j[1])/((1-a)*(j[1]**bt)*dtau) + 1

```

```

        if 0 <= u2 <= 1 and 0 <= u1 <= 1:

```

```

            v[1] = (u1, u2)

```

```

            v[0] = F([j[1]])

```

```

            M[N-1].append(v)

```

```
J = []
```

```
c = 0
```

```
f = len(M)-1
```

```
for i in M:
```

```
    J.append({})
```

```
    NM = [j[3] for j in i]
```

```
    dest = np.unique(NM, axis=0)
```

```
    for j in dest:
```

```
        z = (j[0], j[1])
```

```
        l = [item for item in i if np.all(item[3] == z)]
```

```
        maximum = -np.inf
```

```
        m_dot = 0
```

```
        for k in l:
```

```
            if c == 0:
```

```
                if k[0] > maximum:
```

```
                    maximum = k[0]
```

```
                    m_dot = k.copy()
```

```
            else:
```

```
                if k[2] in J[c-1]:
```

```
                    if k[0] + J[c-1][k[2]][0] > maximum:
```

```
                        maximum = k[0] + J[c-1][k[2]][0]
```

```
                        m_dot = k.copy()
```

```
                J[c][z] = [maximum, m_dot]
```

```
c += 1
```

```
dot_opt = max(J[19], key= lambda k: J[19][k][0])
```

```
Lopt = []
```

```
u1opt = []
```

```
kopt = []
```

```
u2opt = []
```

```
Jopt = 0
```

```
Jopt = J[19][dot_opt][0]
```

```
next_opt = dot_opt
```

```
for i in range(19, -1, -1):
```

```
    Lopt.insert(0, J[i][next_opt][1][3][0])
```

```
    kopt.insert(0, J[i][next_opt][1][3][1])
```

```
    u1opt.insert(0, J[i][next_opt][1][1][0])
```

```
    u2opt.insert(0, J[i][next_opt][1][1][1])
```

```
    next_opt = J[i][next_opt][1][2]
```

```
Lopt.insert(0, L0)
```

```
kopt.insert(0, k0)
```

```
Jopt
```

```
fig, ax = plt.subplots()
```

```
ax.plot(t, kopt, linewidth=3, color = 'orange')
```

```
ax.set_xlabel('t')
```

```
ax.set_ylabel('k')
```

```
ax.grid()
```

```
plt.show()
```

```
fig.savefig('kopt.jpeg')
```

```
fig, ax = plt.subplots()
```

```
ax.plot(t, Lopt, linewidth=3, color = 'purple')
```

```
ax.set_xlabel('t')
```

```
ax.set_ylabel('L')
```

```
ax.grid()
```

```
plt.show()
```

```
fig.savefig('Lopt.jpeg')
```

```
fig, ax = plt.subplots()
```

```
ax.plot(t[1:], u1opt, linewidth=3)
```

```
ax.set_xlabel('t')
```

```
ax.set_ylabel('u1')
```

```
ax.grid()
```

```
plt.show()
```

```
fig.savefig('u1opt.jpeg')
```

```
fig, ax = plt.subplots()
```

```
ax.plot(t[1:], u2opt, linewidth=3, color="red")
```

```
ax.set_xlabel
```

```
('t')
```

```
ax.set_ylabel
```

```
('u2')
```

```
ax.grid()
```

```
plt.show()
```

```
fig.savefig('u2opt.jp
```

```
eg')
```