

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
“КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО”

В.І. Солодкий



ФОРМОУТВОРЕННЯ ГВИНТОВИХ ПОВЕРХОНЬ МЕТОД РУХОМОЇ ПЛОЩИНИ

Монографія

Рекомендовано Вченою радою КПІ ім. Ігоря Сікорського

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2025

УДК 621.914(075.8)
С60

*Гриф надано Вченою радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
(протокол № 5 від 12.05.2025 р.)
за поданням Вченої ради навчально-наукового
механіко-машинобудівного інституту
(протокол № 8 від 31 березня 2025 р.)*

Рецензенти:

О. А. Охріменко д-р. техн. наук, проф.,
Національний технічний університет України
“Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського”

В. С. Антонюк д-р. техн. наук, проф., акад. Академії інженерних наук України,
Національний технічний університет України
“Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського”

Солодкий В. І.

С60 Формоутворення гвинтових поверхонь. Метод рухомої площини : монографія за освіт. програмою “Конструювання та дизайн машин” спец. 131 – Прикладна механіка / В. І. Солодкий ; КПІ ім. Ігоря Сікорського. – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, Вид-во “Політехніка”, 2025. – 231 с.
ISBN 978-966-990-149-1

Розглянуто проблеми формоутворення гвинтових поверхонь постійного кроку. Запропоновано та детально проаналізовано методи рухомої площини, який дозволяє розв’язати пряму задачу пошуку початкової інструментальної поверхні та виконати аналіз порушення умов формоутворення гвинтової поверхні без розв’язання зворотної задачі профілювання. Показано визначення чисельної величини похибки обробки гвинтової поверхні у разі порушення умов формоутворення різними типами інструментів.

Для викладачів та студентів усіх форм навчання за технічними спеціальностями.

УДК 621.914(075.8)

ISBN 978-966-990-149-1

© В. І. Солодкий
© КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2025

Зміст

ВСТУП	11
1. СУЧАСНА ТЕОРІЯ ФОРМОУТВОРЕННЯ	12
1.1. Методи визначення спряжених поверхонь	14
1.1.1. Графічні методи визначення спряженого профілю	14
1.1.2. Аналітичні методи визначення спряжених поверхонь ..	16
1.1.2.1. Метод диференціальної геометрії	16
1.1.2.2. Метод Гохмана	17
1.1.2.3. Кінематичний метод	19
1.1.2.4. Проблеми кінематичного методу	21
1.2. Способи представлення поверхонь	23
1.2.1. Аналітичні способи представлення поверхні	23
1.2.1.1. Матричний спосіб представлення поверхні	24
1.2.1.2. Векторний спосіб представлення поверхні	26
1.2.1.3. Параметричний спосіб подання поверхонь	27
1.2.1.4. Явне та неявне представлення поверхні	29
1.2.1.5. Подання поверхні локальними відсіками	29
1.2.1.6. Апроксимація сплайнами	32
1.3. Чисельні методи подання поверхні	35
1.3.1. Інтерполювання поверхні	35
1.3.1.1. Інтерполювання колом	36
1.3.1.2. Інтерполювання степеневим поліномом	36
1.3.1.3. Інтерполяція за Ейткенем	38
1.3.1.4. Інтерполяція сплайнами	39
1.3.2. Локальна геометрія поверхні представленої реперною сіткою	41
1.4. Класифікація інструмента для обробки гвинтових поверхонь	42
1.5. Висновки	44
2. ТЕОРІЯ ФОРМОУТВОРЕННЯ ГВИНТОВИХ ПОВЕРХОНЬ	45
2.1. Представлення поверхні сукупністю траєкторій	45
2.2. Достовірність уявлення та щільність утворення номінальної поверхні	47
2.2.1. Критерій достовірності	48
2.2.2. Критерій щільності	49
2.3. Параметри гвинтової поверхні	50
2.4. Параметри взаємного розташування інструмента та деталі .	53

2.5. Рухома поверхня у формоутворенні	54
2.5.1. Визначення початкової інструментальної поверхні для заданої гвинтової поверхні	55
2.5.2. Визначення профілю різальної кромки інструмента ...	61
2.5.3. Визначення профілю деталі за відомої початковою інструментальною поверхнею	62
2.5.3.1. Управління якістю формоутворення	64
2.6. Чисельне визначення огинаючої	65
2.6.1. Чисельне визначення огинаючої з використанням кола	66
2.6.1.1. Проблеми ітерації	68
2.6.2. Чисельне визначення огинаючої за допомогою сплайну	69
2.6.2.1. Проблеми визначення критерію	72
2.6.2.2. Висновки	72
2.6.3. Початкова реперна точка	73
2.6.4. Додаткова реперна точка	73
2.6.5. Проблеми пошуку огинаючої	76
2.6.6. Критичні випадки визначення огинаючої	77
2.6.6.1. Кінцева точка огинаючої	79
2.6.6.2. Порушення умов формоутворення	80
2.7. Заміна теоретично точної огинаючої часиною дуги кола ...	81
2.7.1. Послідовне вирішення системи рівнянь	82
2.7.2. Глобальне вирішення системи рівнянь	83
2.8. Загальна методика способу рухомої площини при формоутворенні гвинтових поверхонь	88
2.8.1. Послідовність визначення початкової інструментальної поверхні	89
2.8.2. Послідовність визначення профілю різальної кромки інструмента	91
2.8.3. Послідовність визначення профілю деталі за відомої початкової інструментальної поверхні	92
2.8.4. Методика аналізу умов формоутворення	93
2.9. Висновки	95
3. ТРИАНГУЛЯЦІЯ ГВИНТОВИХ ПОВЕРХОНЬ	96
3.1. Постановка задачі	98
3.2. Представлення поверхні сукупністю траєкторій	98
3.3. Апроксимація торцевого перерізу гвинтової поверхні дугою кола	101
3.4. Достовірність подання номінальної поверхні	106

3.5. Диференціальна геометрія локальної ділянки триангульованої поверхні	108
3.6. Висновки	111
4. ДИСКОВИЙ ІНСТРУМЕНТ	112
4.1. Профіль початкової інструментальної поверхні	112
4.1.1. Взаємне розташування об'єктів формоутворення	112
4.1.2. Побудова сліду перетину гвинтової траєкторії з рухомою площиною	114
4.1.3. Профіль початкової інструментальної поверхні	117
4.1.4. Вплив параметрів установки на профіль початкової інструментальної поверхні	119
4.1.4.1. Вплив кута між осями інструмента та деталі	120
4.1.4.2. Вплив відстані між осями деталі та інструмента	120
4.1.4.3. Вплив орієнтації профілю гвинтової поверхні	122
4.1.5. Висновки	125
4.2. Гвинтова поверхня утворена відомим інструментом	126
4.2.1. Взаємне розташування об'єктів формоутворення	126
4.2.2. Побудова сліду	128
4.2.3. Аналіз умов формоутворення	132
4.2.4. Висновки	134
4.3. Профіль різальної кромки	135
4.3.1. Взаємне розташування об'єктів формоутворення	135
4.3.2. Побудова сліду в передній поверхні зубця	137
4.3.3. Вплив переднього кута на форму різальної кромки	138
4.3.4. Висновки	139
5. ОБКАТНИЙ ІНСТРУМЕНТ	140
5.1. Довбачі	140
5.1.1. Взаємне розташування об'єктів дослідження	142
5.1.2. Побудова слідів перетину гвинтової траєкторії з рухомою поверхнею	143
5.1.3. Початкова інструментальна поверхня	148
5.1.3.1. Перехід від конічної поверхні до площини	148
5.1.3.2. Інструментальна поверхня за умови нульового переднього кута	149
5.1.3.3. Перетворення просторової задачі у плоску	149
5.1.4. Різальна кромка	149
5.1.5. Аналіз теоретичних результатів	152

5.1.5.1. Результати визначення початкової інструментальної поверхні	152
5.1.5.2. Результати визначення різальної кромки	156
5.1.5.3. Висновки	162
5.1.6. Зворотна задача формоутворення	164
5.1.6.1. Зворотна задача у площині	164
5.1.6.2. Зворотна задача у просторі	170
5.1.6.3. Висновки	176
6. РЕЙКОВИЙ ІНСТРУМЕНТ	177
6.1. Пряма задача формоутворення	177
6.1.1. Взаємна орієнтація об'єктів дослідження	177
6.1.2. Побудова сліду перетину гвинтової траєкторії з рухо- мою площиною	178
6.1.3. Обкочування по гвинтовий траєкторії	183
6.1.4. Аналіз результатів дослідження формоутворення гвин- тових поверхонь рейковим інструментом	186
6.1.5. Висновки	188
6.2. Зворотна задача формоутворення	189
6.2.1. Орієнтація об'єктів формоутворення	189
6.2.2. Побудова слідів перетин траєкторій розрахункових то- чок з рухомою площиною	190
6.2.3. Аналіз результатів формоутворення гвинтової поверхні відомим інструментом рейкового типу	194
6.2.4. Висновки	195
7. КІНЦЕВИЙ ІНСТРУМЕНТ	196
7.1. Пряма задача формоутворення	196
7.1.1. Взаємне розташування об'єктів дослідження	196
7.1.2. Побудова сліду	197
7.1.3. Профіль інструменту	198
7.1.4. Висновки	199
7.2. Профіль гвинтової поверхні за відомого інструмента	200
7.2.1. Взаємне розташування об'єктів формоутворення	200
7.2.2. Побудова сліду траєкторії у рухомій площині	201
7.2.3. Аналіз результатів формоутворення	203
7.2.4. Висновки	204
8. ТОРЦЕВИЙ ІНСТРУМЕНТ	205
8.1. Взаємне розташування об'єктів формоутворення	205

8.1.1. Побудова сліду перетину гвинтової траєкторії та рухо- мої площини	207
8.1.2. Профіль початкової інструментальної поверхні	210
8.2. Висновки	211
9. ЧЕРВ'ЯЧНИЙ ІНСТРУМЕНТ	212
9.1. Взаємне розташування об'єктів формоутворення	212
9.2. Слід перетину гвинтової траєкторії з рухомою площиною .	213
9.3. Профіль початкової інструментальної поверхні	215
9.4. Висновки	216
10. УЗАГАЛЬНЕННЯ	217
10.1. Узагальнена схема дослідження умов формоутворення ме- тодом рухомої поверхні	217
10.2. Узагальнена орієнтація об'єктів формоутворення	220
10.3. Узагальнені залежності визначення сліду перетину гвинто- вої траєкторії з рухомою площиною	222
10.4. Висновки	227

Перелік ілюстрацій

1.1.	Односторонні поверхні:	22
2.1.	Критерій достовірності	48
2.2.	Критерій щільності	49
2.3.	Формоутворення дисковим інструментом	56
2.4.	Формоутворення кінцевим інструментом	56
2.5.	Формоутворення циліндричним інструментом	57
2.6.	Формоутворення черв'ячним інструментом	58
2.7.	Огинаюча до сімейства слідів	58
2.8.	Формоутворення гвинтової поверхні	58
2.9.	Профіль початкової інструментальної поверхні	59
2.10.	Визначення профілю деталі	63
2.11.	Висота нерівностей	63
2.12.	Варіант утворення поверхні	64
2.13.	Визначення огинаючої за допомогою кола	67
2.14.	Сплайн-огинаюча	71
2.15.	Критерій пошуку огинаючої	72
2.16.	Початкова реперна точка	73
2.17.	Додаткова реперна точка	74
2.18.	Координати додаткової реперної точки	75
2.19.	Слід подібний до петлі	76
2.20.	Сусідні сліди	78
2.21.	Одиночний слід	78
2.22.	Кінцева точка	79
2.23.	Порушення умов формоутворення	80
2.24.	Поєднання дуг	87
3.1.	Тріангуляція трикутниками	100
3.2.	Тріангуляція гвинтовими траєкторіями	100
3.3.	Орієнтація кола залежно від напрямку групування реперних точок	103
3.4.	Тріангуляція гвинтовими траєкторіями	105
3.5.	Елемент тріангуляційного трикутника	105
3.6.	Достовірність представлення поверхні	106
3.7.	Достовірність за відстанню	107
3.8.	Достовірність за площею	107
4.1.	Взаємне розташування деталі та інструменту	113
4.2.	Торцевий профіль гвинтової поверхні	117
4.3.	Сімейство слідів та огинаюча до них	118

4.4.	Точка перелому початкової інструментальної поверхні . .	118
4.5.	Вплив кута між осями інструмента та заготовки на характер слідів	121
4.6.	Міжосьова відстань та характер слідів	123
4.7.	Орієнтація торцевого перерізу свердла	124
4.8.	Взаємна орієнтація систем координат	127
4.9.	Профіль початкової інструментальної поверхні	132
4.10.	Сімейство слідів	132
4.11.	Поверхню деталі утворюють декілька слідів	133
4.12.	Поверхню деталі утворює тільки один слід	133
4.13.	Кут між осями інструмента та деталі менший за “опти- мальний”	134
4.14.	Кут між осями інструмента та деталі більший за “опти- мальний”	134
4.15.	Рухома площина, як передня поверхня зубця фрези.	136
4.16.	Профіль різальної кромки	138
5.1.	Орієнтація систем координат	142
5.2.	Конічна система координат	150
5.3.	Профіль деталі	152
5.4.	Сукупність слідів та огинаюча дол низ	153
5.5.	Околиці зони порушення умов формоутворення	155
5.6.	Профілі інструментальної поверхні у площині перпен- дикулярній до осі інструмента	157
5.7.	Проекція просторової різальної кромки на площину ор- тогональну до осі інструмента	159
5.8.	Проекція просторової різальної кромки на площину ор- тогональну до осі інструмента при обробці гвинтової поверхні	161
5.9.	Викривлення зубця	162
5.10.	Різальна кромка у конічній системі координат	163
5.11.	Орієнтація систем координат	165
5.12.	Профіль початкової інструментальної поверхні	168
5.13.	Сукупність слідів, що визначають профіль деталі	169
5.14.	Конічна система координат	170
5.15.	Системи координат	171
6.1.	Системи координат рейкового інструменту	178
6.2.	Орієнтація похилої рухомої поверхні	184
6.3.	Торцевий профіль деталі	187
6.4.	Сукупність слідів та огинаюча до них	187

6.5.	Околиці точки <i>B</i>	188
6.6.	Сукупність слідів утворення гвинтової поверхні	188
6.7.	Орієнтація систем координат	189
6.9.	Огинаюча при формоутворенні рейковим інструментом .	194
6.8.	Різальна кромка рейкового інструменту	194
7.1.	Орієнтація систем координат	196
7.2.	Профіль деталі	198
7.3.	Сімейство слідів початкової інструментальної поверхні .	199
7.4.	Орієнтація систем координат	200
7.5.	Сімейство слідів, що визначають профіль деталі	204
8.1.	Орієнтація систем координат	206
8.2.	Сімейство слідів при утворенні гвинтової поверхні торцевим інструментом	210
9.1.	Орієнтація об'єктів формоутворення черв'ячним інструментом	212
9.2.	Торцевий профіль гвинтової поверхні	215
9.3.	Сукупність слідів q при формоутворенні черв'ячним інструментом	215
10.1.	Узагальнена схема формоутворення гвинтових поверхонь	219
10.2.	Узагальнена схема орієнтації об'єктів формоутворення .	221

ВСТУП

Процес формоутворення поверхні деталі відбувається за рахунок послідовного проникнення різальних кромок у матеріал заготовки та його видалення з метою надання заготовці форми деталі, яка буде відповідати кресленню. У результаті видалення припуску здійснюється утворення деталі. Тому форма обробленої деталі залежить від форми і розмірів різальних кромок інструмента, а також від взаємних рухів інструмента та заготовки.

Значною проблемою сучасної теорії формоутворення є неспроможність відомих методик профілювання дати відповідь на питання, саме які точки початкової інструментальної поверхні є формотворчими, а які виконують тільки чорнову роботу з видалення припуску на обробку.

Метою роботи є розробка теорії формоутворення фасонних гвинтових поверхонь із застосуванням рухомої поверхні, що забезпечує створення інструмента з раціональними схемами завантаження різальних елементів та аналіз характеру завантаження окремих ділянок різальної кромки.

Запропонований метод рухомої поверхні забезпечує комплексне вирішення питань теорії формоутворення гвинтових поверхонь за єдиною методикою для різних інструментів та дозволяє на стадії пошуку початкової інструментальної поверхні, без вирішення зворотної задачі формоутворення визначити характер і чисельну величину відхилення утвореної поверхні від номінальної, а також досліджувати умови формоутворення.

Розроблений метод дозволяє безпосередньо за кінематичною схемою формоутворення, знаючи тільки форму передньої або задньої поверхні майбутнього інструмента та її орієнтацію в просторі, визначити форму різальної кромки інструмента, минаючи стадію визначення початкової інструментальної поверхні.

1. СУЧАСНА ТЕОРІЯ ФОРМОУТВОРЕННЯ

Питання теорії формоутворення поверхонь тісно пов'язані з характером взаємних переміщень інструмента та заготовки. В інструментальному виробництві сукупність цих рухів прийнято називати кінематичною схемою формоутворення або просто формоутворенням [1, 2].

Вперше питання формоутворення поверхонь були розглянуті наприкінці 40-х років минулого століття Г.І. Грановським¹, який розробив класифікацію схем формоутворення, що містить вісім груп і тридцять підгруп різних комбінацій взаємних рухів інструмента та деталі.

Пізніше, проф. П.Р. Родін² виконавши ряд теоретичних узагальнень, розробив класифікацію схем формоутворення поверхонь, засновану на поєднанні двох рівномірних рухів: прямолінійно-поступального та обертального [3]. Охоплюючи практично всі можливі схеми формоутворення поверхонь, класифікація Родіна містить всього три класи і п'ять типів схем, що робить її універсальною³.

Особливо слід виділити внесок П. Р. Родіна в теорію формоутворення гвинтових поверхонь, який він зробив сформулювавши два основні поняття, на яких базується сучасна теорія формоутворення:

- було введено поняття про “... ковзання поверхні самої по собі ...”, що дозволило суттєво спростити математичну сторону задачі профілювання інструменту для гвинтових поверхонь;
- було введено поняття про початкову інструментальну поверхню (ППП), котра інваріантна щодо методу формоутворення та конструктивного виконання інструменту.

¹Герберт Іванович Грановський (14 [27] лютого 1901 – 8 квітня 1983) – вчений у галузі різання металів та різального інструменту, дійсний член Академії наук Латвії (з 1958 року).

Основні праці: “Кінематика різання” (1948), “Різання металів” (1954, з колективом авторів), “Металорізальні інструменти. Конструкція та експлуатація: Довідковий посібник” (1952), “Фасонні різці” (1975), “Різання металів” (1985), “Обробка результатів експериментальних досліджень різання металів” (1982).

²Родін Петро Родіонович (17 червня 1922 р. – 24 січня 2008) – засновник кафедри інструментального виробництва Київського політехнічного інституту ім. Ігоря Сікорського, чл.-кор. НАН України.

³Родін П. Р. Основи формоутворення поверхонь різанням. Київ : Вища шк., 1977. 192 с.

Розроблені Родіним положення розвинені у наукових роботах виконаних під його керівництвом: Bui-Shong-Kau⁴ (Корея), О.Н. Чкалова⁵, С.П. Радзевич⁶.

Різними питаннями формоутворення в інструментальному виробництві займалися: І. А. Наумов⁷, Б.А. Перепелиця⁸ (Харків), А.І. Грабченко⁹ (Харків), Н.М. Голованов¹⁰ (Україна).

Питаннями кривини поверхонь в околиці точки їхнього взаємного торкання займалися: Ф.Л. Літвін¹¹, П. Кормак¹² (Америка).

В даний час задача формоутворення зводиться до двох окремих випадків (варіантів):

- визначення сполученої (спряженої) поверхні;
- та дослідження умов формоутворення для локальних елементів різальних кромок.

Однак, існуючі методики для вирішення цих задач, мають ряд недоліків, які ускладнюють їх застосування:

- жодна з існуючих методик, визначення спряженої поверхні, не дозволяє встановити величину відхилення обробленої поверхні від

⁴Bui-Shong-Kau. Theory of design of cutting heads for cutting spiral-toothed bevel wheels using a new continuous method : dissertation of Doctor of Technical Sciences : 050301. Kyiv, 1988. 241 p.

⁵Чкалова О. Н. Формоутворення зубчастих коліс : дис. канд. техн. наук : 050301. Київ, Київський політехнічний інститут, 1983. 210 с.

⁶Степан Pavlovich Radzevich (19 лютого 1953 року Біла Церква, Київська область) – з 2000 року працює в автомобільній промисловості США.

Основні праці: Радзевич С. П. Формоутворення поверхонь деталей. Київ : Растан, 2002. 591 с.; Radzevich, S. P. (Stephen P.) Geometry of surfaces : a practical guide for mechanical engineers / by Stephen P. Radzevich.; S.P. Radzevich, Sculptured Surface Machining on Multi-Axis CNC Machine (in Russian), p. 192, Monograph, Kyiv, Vishcha Shkola.

⁷Наумов І.А. До питання про наукові зв'язки Харківської геометричної школи з прибалтійськими геометрами // Матеріали ІХ міжреспубліканської конференції з історії природознавства та техніки у Прибалтиці. - Вільнюс: АН Литви, 1972. - С. 155 - 157.

⁸Перепелиця Б. А. Відображення афінного простору теорії формоутворення поверхні різанням. Харків : Вища шк., 1981. 152 с.; Перепелиця Б. А. Автоматизоване профілювання різальних інструментів. Харків : ХПІ, 1985. – 107 с.

⁹Грабченко А. І., Доброскок В. Л. Теорія 3D моделювання. Харків : Харків. політехн. ін-т, 2009. 230 с.

¹⁰Голованов М. М. Геометричне моделювання. Київ, Растан. 2021. 408 с.

¹¹Litvin, F.L., Fuentes, A., Gear Geometry and Applied Theory, 2nd Edition, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2004, 800 p.

¹²Cormac, P., A Treatise on Screws and Worm Gear, Their Mills and Hobs, London, Chapman & Hall, Ltd., 1936, 138p.

- номінальної, яка виникає через порушення умов формоутворення, без вирішення зворотної задачі формоутворення;
- неможливо, на стадії визначення ППП, встановити які точки різальної кромки інструмента будуть формотворчими, а які тільки видалятимуть припуск під обробку;
 - неможливо вказати, як саме повинні бути розташовані різальні елементи збірного інструменту, що дискретно реалізує безперервну ППП, щоб їх завантаження було раціональним, саме раціональним, а не рівномірним.

Перераховане вище визначає основні напрями розвитку теорії формоутворення гвинтових поверхонь:

- розробка єдиної методики представлення гвинтових поверхонь різної форми;
- розробка методики, яка дозволяє на стадії пошуку вихідної інструментальної поверхні, визначити, у чисельній формі, величину відхилення утвореної поверхні від номінальної;
- розробка єдиної методики, яка дозволяє не тільки визначити завантаження дискретної точки різальної кромки, але і встановити чи є вона формоутворюючою, або тільки здійснює чорнове видалення припуску.

1.1. Методи визначення спряжених поверхонь

1.1.1. Графічні методи визначення спряженого профілю

Найбільш простим методом визначення спряженого профілю, є метод копіювання послідовних положень відомого профілю, коли спряжений профіль визначається як сукупність послідовних положень, які займає об'єкт з відомим профілем щодо об'єкта профіль якого визначається (спряженого профілю).

Такий метод часто застосовують під час візуалізації графічних побудов на екранах обчислювальної техніки, що дозволяє наочно простежити за всім процесом формоутворення заданої поверхні деталі.

Іншим графічним методом, визначення сполученої поверхні, є метод визначення шуканої поверхні як поверхні, що огинає відомий об'єкт при його переміщенні у просторі за відповідними законами.

Однак, він пов'язаний із значними труднощами виявлення самої огинаючої, яку на практиці доводиться знаходити “вручну”, що не є

достатньо точним способом через багатоваріантність проведення огинаючої.

Подальшим розвитком графічних методів визначення спряжених профілів є метод, запропонований на початку 18 століття німецькими математиком і геометром Рело¹³. Теоретичною основою методу Рело служить загальна теорема Віллліса¹⁴,

Теорема Віллліса

Миттєвий полюс відносного обертання перебуває у точці перетину контактної нормалі з лінією центрів.

Метод Рело дещо змінює зміст теореми Віллліса, яка за ним може бути сформульована в наступній формі.

Метод Рело

У точці торкання спряжених поверхонь, нормалі до них проходять через загальний полюс зачеплення і збігаються між собою.

Звідси і походить інша назва методу Рело, а саме – метод загальних нормалей.

Різновидом методу Рело є метод Понселе¹⁵, при якому пов'язаний профіль визначається як огинаюча до кіл, центри яких розташовані на полоїді, а радіуси рівні довжині відповідних нормалей, від досліджуваної точки вихідного профілю до полоїди¹⁶.

Графічні методи мають ту перевагу, що є наочними і досить стійкими до появи помилок, проте вони не забезпечують високої точності визначення спряженої поверхні, особливо при формуутворенні гвинтових поверхонь.

¹³Франц Релó (нім. *Franz Reuleaux*; 30 вересня 1829, Ешвайлер, Пруссія - 20 серпня 1905, Берлін, Німецька імперія) - німецький вчений в галузі механіки та машинобудування, лектор Берлінської королівської технічної академії, що став згодом. Навчався в Політехнікумі Карлсруе (1850-1852). Учень Фердінанда Редтенбахера. З 1856 по 1864 працював у Цюріхському політехнікумі, з 1864 по 1905 - в Берлінській Королівській технічній академії.

¹⁴Роберт Віллліс (*Willis Robert* 27.02.1800 – 28.02.1875). Англійський вчений у галузі механіки, член Лондонського королівського товариства (з 1832). Закінчив Кембриджський університет (1826). У 1837-1875 – професор цього університету, в 1853 – лектор у Гірській школі (Лондон)

¹⁵Жан-Віктор Понселе (фр. *Jean-Victor Poncelet*; 1 липня 1788, Мец — 22 грудня 1867, Париж) – французький математик та інженер, член Французької академії наук з 1834 року.

¹⁶Dyson, A., *A General Theory of the Kinematics and Geometry of Gears in Three Dimensions*, Clarendon Press, Oxford, 1969, 141 p.

1.1.2. Аналітичні методи визначення спряжених поверхонь

Результатом графічних методів визначення спряженої поверхні є графік, що створює певні труднощі для подальшого використання отриманих результатів, зокрема чисельне уявлення знайденого профілю [4, 5]. На відміну від них, аналітичні методи, визначення спряженої поверхні, завжди представляють результат у чисельному вигляді.

1.1.2.1. Метод диференціальної геометрії

Суть методу диференціальної геометрії викладено ще в середині минулого століття в роботах Ж. Фавара¹⁷ та пізніш Амінова (Харків Україна¹⁸) і полягає в наступному.

У системі координат $\{\Psi\}$, пов'язаної з відомою поверхнею Ψ , записують рівняння цієї поверхні у загальному вигляді

$$F_{\Psi}(x_{\Psi}, y_{\Psi}, z_{\Psi}) = 0. \quad (1.1)$$

Далі, з шуканою спряженою поверхнею Σ , зв'язують систему координат $\{\Sigma\}$ і складають рівняння відомої поверхні у цій системі координат:

$$F_{\Sigma}(x_{\Sigma}, y_{\Sigma}, z_{\Sigma}, \varphi) = 0. \quad (1.2)$$

де φ – параметр сімейства поверхонь.

Тоді, відповідно до методів диференціальної геометрії, шукана спряжена поверхня визначається як огинаюча однопараметричного сімейства системою рівнянь:

$$\begin{cases} F_{\Sigma}(x_{\Sigma}, y_{\Sigma}, z_{\Sigma}, \varphi) = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial \varphi}(x_{\Sigma}, y_{\Sigma}, z_{\Sigma}, \varphi) = 0. \end{cases} \quad (1.3)$$

Рішення системи рівнянь (1.3) дає рівняння шуканої спряженої поверхні.

У тому випадку, коли сполучені поверхні є двопараметричними поверхнями, що залежать від двох параметрів ϕ і φ , система рівнянь, що

¹⁷Жан Фавар (*фр. Jean Favard*; 28 серпня 1902 - 21 січня 1965) – французький математик. Його роботи 1920-х - 1940-х років зробили великий вплив на розвиток теорії функцій та теорії наближень.

¹⁸Aminov Y. Differential Geometry and Topology of Curves (B. Verkin Institute for Low Temperature Physics and Engineering of the National Academy of Sciences, Kharkiv, Ukraine). Amsterdam : Gordon and Breach Science Publishers, 2000. 342 p.

описує спряжену поверхню набуває більш складного вигляду:

$$\begin{cases} F(x, y, z, \varphi, \Phi) = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z, \varphi, \Phi) = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z, \varphi, \Phi) = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z, \varphi, \Phi) = 0. \end{cases} \quad (1.4)$$

Викладений метод є класичним методом диференціальної геометрії, який розглядає задачу визначення спряжених поверхонь, як окремий випадок вирішення системи рівнянь не торкаючись питань формоутворення реальної деталі на верстаті.

Тобто не враховуючи ні кінематичну схему верстату, ні кінематику взаємних рухів інструмент-деталь.

1.1.2.2. Метод Гохмана

Першим аналітичним методом, розробленим безпосередньо для пошуку спряжених поверхонь реальних деталей, є метод запропонований у 1886 році Х. І. Гохманом¹⁹, який започаткував аналітичну теорію просторових зачеплень²⁰.

Згодом аналітична теорія зачеплення була розвинена Н. І. Колчіним²¹, А. Ф. Миколаєвим²², М. Є. Єрбохіним²³, Я. С. Довидовим²⁴ та іншими.

¹⁹Гохман Хаїм Ісгудович (21.01.1851, Дрогичин Гроднен. губ., – 17.01.1916, Одеса) – математик, механік. Доктор приклад. математики (1890). Закін. Новорос. університет в Одесі (1876). У 1881–83 – у наук. відрядженні за кордоном; 1883–86 – інспектор (зав. учбової частини) Житомир. євр. учител. інституту; від 1887 – приват-доцент кафедри механіки Новорос. університету (з перервою). Заклав основи сучас. аналіт. теорії зачеплень; створив інж. методи розрахунку та проектування зубчастих зачеплень, розвинув теорію кінематич. пар; дослідив структуру та вивів заг. рівняння механізмів. Один із засн. (1876) Матем. відділ. Новорос. товариства природознавців, чл. Одес. відділ. Рос. тех. товариства.

<https://esu.com.ua/article-31638> Професори Одеського (Новоросійського) університету: Біографічний словник: У 4 т. 2-е вид., О., 2005. [Дата звернення: 12.06.2024].

²⁰Гохман Х. І. Теория зацеплений, обобщенная и развитая путем анализа // Зап. Император. Одеського університету. 1887. Т. 45.

²¹Колчін Н. І. Аналітичний розрахунок плоских та просторових зачеплень. *Теорія передач та машин. Одеський політехнічний інститут*. 1949. 42 с.

²²Миколаєв А. Ф. Діаграма гвинта та її застосування до визначення спряжених поверхонь. *Труди семінару з теорії машин та механізмів. НАН України*. 1950. Т. 37 АН С. 52–160.

²³Єрбохін М. Є. Метод послідовного огинання. *Механіка машин, НАН України*. 1972, вип. № 31-32. С. 12–52.

²⁴Давидов Я. С. Про одне узагальнення методу Олів'є для утворення спряжених поверхонь у зубчастих передачах. *Теорія передач та машин. Одеський політехнічний інститут*. 1963. Т. 3.

В основу свого методу Гохман поклав дві теореми, які він назвав "... способами віднайдення спряжених поверхонь за Олів'є²⁵ ..." , і сформулював їх у наступному вигляді²⁶:

"... дві поверхні, пов'язані третьою, можуть бути, за певних умов, пов'язані між собою..."

"... поверхні, що взаємоогинаять у відносному русі, сполучаються між собою ..."

Сформульовані теореми, дозволили Гохману суттєво спростити математичну сторону визначення спряжених поверхонь. Відповідно до методу Гохмана, шукане рівняння лінії контакту записується у вигляді системи двох рівнянь

$$\begin{cases} F_1(x_1, y_1, z_1) = 0, \\ \frac{\partial F_\Psi}{\partial x_\Psi} \cdot \frac{\partial x_\Psi}{\partial \varphi} + \frac{\partial F_\Psi}{\partial y_\Psi} \cdot \frac{\partial y_\Psi}{\partial \varphi} + \frac{\partial F_\Psi}{\partial z_\Psi} \cdot \frac{\partial z_\Psi}{\partial \varphi} = 0, \end{cases} \quad (1.5)$$

де

$$x_\Psi = x_\Psi(x_\Sigma, y_\Sigma, z_\Sigma, \varphi),$$

$$y_\Psi = y_\Psi(x_\Sigma, y_\Sigma, z_\Sigma, \varphi),$$

$$z_\Psi = z_\Psi(x_\Sigma, y_\Sigma, z_\Sigma, \varphi).$$

У цьому випадку, шукана пов'язана поверхня визначається безпосередньо в системі координат пов'язаної з шуканою поверхнею.

Порівняно з методом класичної диференціальної геометрії, метод Гохмана дозволив значно спростити розрахунки, проте суть методу залишилася незмінною. Обидва методи надзвичайно громіздкі та їм притаманні такі недоліки:

- у більшості випадків, досить складно визначити які точки спряжених поверхонь, вступають у взаємний контакт. Можна говорити тільки про те, що для деякої відомої поверхні існує певна пов'язана поверхня;

²⁵Olivier T. Théorie géométrique de l'engrenage. Paris, 1842.

²⁶Гохман Х. І. Теорія зачеплень, узагальнена та розвинена шляхом аналізу. Одеса, 1886. 123 с.

- неможливо, за видом знайденої сполученої поверхні, виявити можливі порушення умов формоутворення. Тільки вирішення зворотної задачі формоутворення, дозволяє визначити виникає порушення умов формоутворення спряжених поверхонь чи ні.

1.1.2.3. Кінематичний метод

Недосконалість методів диференціальної геометрії спонукала низку авторів шукати більш прості та більш інформативні методи визначення спряжених поверхонь.

Незалежно один від одного Камус²⁷ та Кормак²⁸ сформулювали умову взаємного торкання спряжених поверхонь, у вигляді "... умови взаємного розташування відносної швидкості руху точок торкання спряжених поверхонь, та їх загальної дотичної площини ...".

Аналогічна умова була сформульована Я.С. Давидовим²⁹ як "... теорема про рівність складових абсолютної швидкості спряжених поверхонь у кожному точці їх взаємного дотику. . . " .

Кінематичне формулювання, умови торкання пов'язаних поверхонь, покладено також і в основу поняття "... характеристичної конгруенції кривих ...", введенного в теорію визначення спряжених поверхонь Д. М. Гузевічем³⁰.

В основу методу пошуку спряженої поверхні, було покладено узагальнене формулювання умови торкання спряжених поверхонь у наступному вигляді (Ф.Л. Литвин³¹), "...в точці торкання спряжених поверхонь, яка повинна бути звичайною, вектор швидкості відносного руху повинен лежати в плоскості, що стосується до поверхонь, що сполучаються...", що математично виражається залежністю

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (1.6)$$

де $\mathbf{n}$ – вектор нормалі до загальної дотичної площини, в точці взаємного дотику до спряжених поверхонь;

²⁷Camus, C.-E.-L., "Sur la figure des dents des rouës, et des ai les des pignons, pour rendre les horloges plus parfaites," 1733

²⁸Cormac, P., A Treatise on Screws and Worm Gear, Their Mills and Hobs, Chapman & Hall, Ltd., London, 1936, 138 p.

²⁹Давидов Я.С. Неевольвентні зачеплення. *Теорія та розрахунок зубчастих передач*. 1948. Т. 7. С. 62–98.

³⁰Гузевіч Д. М. Метод конгруенцій теоретично вищих кінематичних пар. *Вісник інженерів та техніків Харків. пол. інс-т.*, № 3, 1941.

³¹Литвин Ф. Л. Теорія зубчастих зачеплень. *Теорія та розрахунок зубчастих передач*. 1951. Т. 2. С. 25–47.

$\mathbf{v}$ – вектор нормалі до загальної дотичної площості, в точці взаємного дотику до спряжених поверхонь.

При такому формулюванні умови взаємного торкання лінія контакту спряжених поверхонь знаходилася із спільного рішення рівнянь

$$\begin{cases} \mathbf{r} = \mathbf{r}(u, q), \\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = 0. \end{cases} \quad (1.7)$$

Вектор $\mathbf{r}$ розглядався як двопараметрична вектор-функція, що описує відому поверхню, що знаходиться у взаємному дотику.

Запропонований метод дозволив значно спростити розрахунковий бік задачі формоутворення гвинтових поверхонь. Його подальший розвиток був спрямований на вдосконалення способу визначення вектора $\mathbf{v}$ відносної швидкості, зокрема – без використання поняття про миттєві осі обертання при гвинтовому русі, що знайшло своє відображення в роботах В.А. Шишкова³² та Д. Лі³³.

Пізніше, кінематичний метод теорії формоутворення гвинтових поверхонь використовували при дослідженні:

- кривини огинаючої двопараметричного сімейства поверхонь зубчастих зачеплень (Н.Н. Крилов³⁴);
- параметрів верстатного зачеплення, при якому відсутнє підрізування зубів (І. І. Дусев³⁵);
- умови торкання просторового зачеплення поверхонь, що обертаються навколо осей, що перетинаються, але не лежать в одній спільній площині (С. П. Радзевич³⁶).

Поява електронних обчислювальних машин дозволила розширити коло задач, аналітичного профілювання, що реалізуються чисельними

³²Шишков В.А. Елементи кінематики утворення та зачеплення зубчастих передач. *Теорія та розрахунок зубчастих передач, ЛОНИТОМАШ*, № 6, Краматорськ, 1948.

³³Lee J. M. Riemannian Manifolds An Introduction to Curvature. Washington : Department of Mathematics University of Washington Seattle, 1950. 243 p.

³⁴Крилов Н. М. Теорія зачеплення огинальних двопараметричного сімейства поверхонь. *Технологія та організація виробництва. Київ*, № 12, 1963. С. 24-37.

³⁵Дусев І. І. Підрізання зубів зубчастих коліс при нарізуванні. *Технологія та організація виробництва. Київ*, № 6, 1965. С.18-27.

³⁶Радзевич С.П. Формоутворення поверхонь деталей. Основи теорії : Монографія. – Київ : Растан, 2001. – 593 с.

методами. Внесок у розвиток цього напрямку зробили І.І. Котов³⁷, Ф. Л. Литвин³⁸, В. І. Гольцфарт³⁹, Г. І. Шевельова⁴⁰ та вчені Японії⁴¹.

Працями Б. А. Перепелиці⁴² (Харківський політехнічний інститут, Україна) розроблено метод профілювання інструменту з використанням апарату багатопараметричних відображень, що стало новим напрямом у розвитку визначення сполучених поверхонь в інструментальному виробництві.

Слід відзначити роботи М.Д. Златопольського⁴³ в яких як математичний апарат для вирішення задач формування гвинтових поверхонь, використовується гвинтове обчислення. Якщо векторне обчислення оперує з поняттям спрямованого відрізка, то гвинтове обчислення оперує з поняттям гвинта (афінора), що дозволяє вирішувати задачі пов'язані з гвинтовими поверхнями в надзвичайно компактній формі.

1.1.2.4. Проблеми кінематичного методу

У той же час, застосування кінематичного методу пов'язане з певними труднощами, зумовленими неоднозначністю результату, коли знайдена поверхня може виявитися внутрішню сторону спряженої поверхні.

Це впливає із самої умови контакту – нормаль $\mathbf{n}$ до поверхні і вектор $\mathbf{v}$ відносної швидкості повинні бути взаємно перпендикулярні. Але, як вони взаємно орієнтовані у просторі ніяк не враховується.

³⁷Математичні способи задання та побудови технічних форм поверхонь. Автореф. ... д-за техн. наук. – Тбілісі : ТБНІ. – 1983. – 48 с.

³⁸Литвин Ф.Л. Визначення огинаючих ліній контакту взаємоогинаючих поверхонь. *Вісник ВНЗ, Математика*, 1973 № 10. С. 17-25.

³⁹Гольцфарт В. І., Несмелов І. Л. Рациональний підхід до вирішення завдань огинання. *Сб. Механіка машин, НАН України вип. 61*, 1983. С. 32-47.

⁴⁰Shevelyova G. Theory of shape formation and contact of moving bodies. London : Peter Harrington Rate Books, 2017. 496 p.

⁴¹Заявка № 59-152043 (Японія). Спосіб розрахунку просторової траєкторії переміщення інструменту. / Кісі Хадзімото, Секі Санскі, Фанаку Кісо. – Заявл. 17.02.1983, № 58-25187, опубл. 30.08.1984. МКІ В23 Q 15/00. D 23 Q 21/00.

Заявка № 60-48244 (Японія). Спосіб призначення траєкторії обробки складних поверхонь. / Кісі Хадзімото, Секі Санскі, Фанаку Маку. МКІ D 23Q 15/00/ G 05 B 19/403 – Заявл. 29.08.83, № 58-157431, опубл. 15.03.85.

⁴²Перепелиця Б.А. Відображення афінного простору в теорії формування поверхонь різанням – Харків, Вища школа, 1981. 152 с.; Перепелиця Б.А. Різальні інструменти як афінні різноманіття. Харків, *Різання та інструмент*, 1976, вип. 16, С. 36-40.; Перепелиця Б.А. Про системи параметрів відображення афінного простору. Харків, *Прикл. геометрія та інж. графіка*. 1977, вип. 1, С. 6-7.

⁴³Златопольський М.Д. Основи гвинтової теорії просторових зачеплень. *Таллінський технічний університет (ТТУ) (ест. Tallinna Tehnikaülikool TTU)* вип. 25, 1953. С. 18-32.

У той же час, формоутворенні поверхні (за винятком поверхонь Мебіуса і Клейна рис. 1.1) мають дві сторони – внутрішню та зовнішню. В силу цього напрямки нормалей $\mathbf{n}$ до двох сторін поверхні в кожній її точці колінеарний, але взаємно протилежний. При цьому умова контакту спряжених поверхонь тобто - взаємна перпендикулярність векторів нормалі $\mathbf{n}$ і швидкості $\mathbf{v}$, виконується при двох взаємно протилежних напрямках вектора нормалі і вектора відносної швидкості.

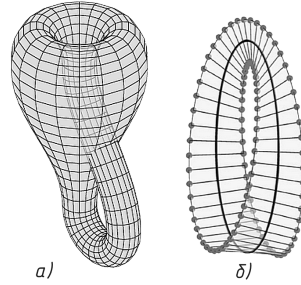


Рис. 1.1. Односторонні поверхні:
а – поверхня Мебіуса;
б – поверхня Клейна

Таким чином, умові контакту ($\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = 0$) можуть задовольняти чотири варіанти взаємного розташування векторів $\mathbf{n}$ і $\mathbf{v}$. Як наслідок цього, можливе отримання чотирьох рішень рівняння контакту, з яких тільки одне відповідає реальній схемі формоутворення поверхні деталі на верстаті. З трьох варіантів, що залишилися, – два варіанти, відповідають обробці поверхні деталі з її внутрішньої сторони, тобто з матеріалу деталі, а третій – відповідає взаємному руху деталі і інструмента "задом наперед".

При цьому встановити, який із чотирьох варіантів розв'язання умови контакту ($\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = 0$) відповідає реальній схемі формоутворення, а який ні – без вирішення зворотної задачі формоутворення практично неможливо.

Отже, кінематичний метод визначення спряжених поверхонь має наступні проблеми.

Проблема 1

Багатоваріантність умови взаємної перпендикулярності нормалі $\mathbf{n}$ до поверхні і швидкості $\mathbf{v}$ відносного руху, яка відповідає чотирьом схемам формоутворення з яких тільки одна схема відповідає обробці деталі на верстаті, а решта три нереальні. При цьому встановити в ході вирішення задачі пошуку спряженої поверхні, який з варіантів рішення дійсний, а який уявний – практично неможливо.

Проблема 2

Для переважної більшості кінематичних схем формоутворення гвинтових поверхонь, умова взаємного дотику ($\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = 0$) виражається трансцендентним рівнянням, яке має нескінченну кількість рішень з періодом

близьким до 2π , величина якого непередбачено змінюється від однієї точки рішення до іншої.

Проблема 3

Неможливо, на стадії визначення спряженої поверхні (початкової інструментальної поверхні) визначити не тільки чисельну величину відхилення формоутвореної поверхні від номінальної, а й визначити чи будить це відхилення взагалі чи ні.

Проблема 4

Для того щоб визначити існування відхилення формоутвореної поверхні від номінальної необхідно вирішити "зворотну задачу" формоутворення, яка має ті ж проблеми, що і пряма задача визначення спряженої поверхні.

1.2. Способи представлення поверхонь

Існуючи способи представлення поверхонь можна розділити на аналітичні та дискретні [6].

При аналітичних способах, поверхня задається однією або декількома функціональними залежностями, які дозволяють визначити положення довільної точки поверхні та її локальні диференціально-геометричні характеристики.

Дискретний метод завдання поверхні, поділяється на два принципово різних класи:

- представлення поверхні сукупністю окремих відсіків, поверхня яких описується своєю функціональною залежністю.
- чисельне представлення поверхні числовим масивом координат точок (реперною сіткою).

1.2.1. Аналітичні способи представлення поверхні

Аналітичне представлення поверхні зручно використовувати в тих випадках, коли представлена поверхня допускає ковзання "самої по собі", що характерно для гвинтових поверхонь. У цьому випадку, достатньо визначити функціональною залежністю, якусь лінію, що належить цій поверхні (твірну лінію). Тоді поверхню в цілому можна представити, як сукупність послідовних положень твірної лінії.

Перевагою аналітичного способу представлення поверхні є простота визначення характеристик її локальної геометрії – дотичні, нормалі і

кривина. Однак, якщо поверхня є складною та не допускає руху "самої по собі", то визначення єдиної функціональної залежності для всієї поверхні стає досить складним завданням.

Серед аналітичних способів представлення поверхні можна виділити такі: матричний, векторний, параметричний, у явній і не явній формі, локальними відсіками, апроксимація сплайнами.

Застосування того чи іншого способу представлення поверхні визначається характером розв'язуваної задачі формоутворення.

1.2.1.1. Матричний спосіб представлення поверхні

Матричний спосіб представлення поверхні найбільш широко застосовується на етапі безпосереднього формоутворення поверхні деталі на верстатах з ЧПК так як:

- обчислювальні системи сучасних верстатів з ЧПК засновані на матричному обчисленні, що дозволяє вводити дані про формоутворення без будь-якої попередньої адаптації;
- дозволяє математично просто і апаратно швидко здійснювати операції лінійного перетворення простору, якими супроводжується процес формоутворення на багатокоординатних верстатах.

Спочатку, поверхня параметризується двома параметрами (u, v) , геометричний образ яких являють собою систему координат, яка належить досліджуваній поверхні. У цьому випадку довільна точка $M(u, v)$ поверхні однозначно переноситься на систему координат $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$.

На другому етапі представлення поверхні, вводять базис $\{e_1, e_2, e_3\}$ зображення 3D простору. Тоді матрична форма представлення поверхні остаточно набуває вигляду

$$[\mathbf{r}] = \begin{bmatrix} e_1(u, v) \\ e_2(u, v) \\ e_3(u, v) \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1(u, v), & e_2(u, v), & e_3(u, v), & 1 \end{bmatrix}^T. \quad (1.8)$$

Як правило, базис $\{\mathbf{e}_i\} : (i = 1, 2, 3)$ визначає ортогональну систему координат, для якої справедливі наступні умови:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 &= 0, & \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_3 &= 0, & \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3 &= 0, \\ \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 &= \mathbf{e}_3, & \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_3 &= -\mathbf{e}_2, & \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 &= \mathbf{e}_1, \\ |\mathbf{e}_1| &= 1, & |\mathbf{e}_2| &= 1, & |\mathbf{e}_3| &= 1. \end{aligned} \quad (1.9)$$

При матричному способі представлення поверхні, дотичні до поверхні визначаються, як дотичні до координатних ліній

$$\left[\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{e}_1}{\partial u}(u,v) \\ \frac{\partial \mathbf{e}_2}{\partial u}(u,v) \\ \frac{\partial \mathbf{e}_3}{\partial u}(u,v) \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \left[\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{e}_1}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial \mathbf{e}_2}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial \mathbf{e}_3}{\partial v}(u,v) \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (1.10)$$

Положення нормалі $\mathbf{N}$ до поверхні визначається як результат операції тензорного множення матриць, що визначають напрям дотичних до координатних ліній u і v

$$\begin{aligned} [\mathbf{N}] &= \left[\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \right]^T \otimes \left[\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right] = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{e}_2}{\partial u}(u,v) \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_3}{\partial v}(u,v) - \frac{\partial \mathbf{e}_3}{\partial u}(u,v) \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_2}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial \mathbf{e}_3}{\partial u}(u,v) \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_1}{\partial v}(u,v) - \frac{\partial \mathbf{e}_1}{\partial u}(u,v) \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_3}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial \mathbf{e}_1}{\partial u}(u,v) \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_2}{\partial v}(u,v) - \frac{\partial \mathbf{e}_2}{\partial u}(u,v) \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_1}{\partial v}(u,v) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Недоліком матричного способу представлення поверхні є те що:

- математичний зміст матриці залежить від розташування ортів базису $\mathbf{e}_i$: ($i = 1, 2, 3$), тобто від досвіду розробника;
- матричний спосіб подання поверхні, не має наочності подання геометричних образів, що ускладнює процес аналізу умов формоутворення.

Слід зазначити, що формоутворення гвинтових поверхонь на верстатах з числовим програмним керуванням можливе, проте ні економічне і технологічно не виправдано. З економічної точки зору, вартість верстата з ЧПК незрівнянно вища за вартість фасонного інструменту, що застосовується для обробки гвинтової поверхні.

При цьому з технологічного боку мікрогеометрія поверхні обробленої на верстаті з ЧПК сферичними фрезами вкрай незадовільна і вимагає подальшої опрацювання. Тому, в даний час, формоутворення гвинтових поверхонь здійснюється переважно спеціальним фасонним інструментом, який забезпечує високу продуктивність і якість обробленої поверхні.

1.2.1.2. Векторний спосіб представлення поверхні

При векторному способі представлення поверхні вона представляється (задається) радіус-вектором $\mathbf{r}$, що залежить від двох параметрів (u, v)

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v). \quad (1.12)$$

Геометрично параметри (u, v) є зображенням координатних ліній, не обов'язково прямолінійних і не обов'язково ортогональних. Важливо, що у системі криволінійних координат $\{u, v\}$ поверхня є двовимірною, оскільки однозначно визначається лише двома координатними лініями (u, v) .

Напрямок двох векторів $\mathbf{k}_u^{(M)}(u, v)$ і $\mathbf{k}_v^{(M)}(u, v)$, дотичних до ліній координатної сітки в довільній точці M , можна визначити як

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_u^{(M)}(u, v) &= \frac{\partial \mathbf{r}(u, v^{(M)})}{\partial u}, \\ \mathbf{k}_v^{(M)}(u, v) &= \frac{\partial \mathbf{r}(u^{(M)}, v)}{\partial v}. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Тоді нормаль $\mathbf{n}$ у точці M визначається як результат векторного добутку двох дотичних векторів $\mathbf{k}_u^{(M)}(u, v)$ і $\mathbf{k}_v^{(M)}(u, v)$

$$\begin{aligned} \mathbf{n}^{(M)}(u, v) &= \mathbf{k}_u^{(M)}(u, v) \times \mathbf{k}_v^{(M)}(u, v) = \\ &= \frac{\partial \mathbf{r}(u, v^{(M)})}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}(u^{(M)}, v)}{\partial v}. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Якщо між параметрами u і v існує функціональний взаємозв'язок виду $u = u(v)$ або $u = t, v = v(t)$, то вектор нормалі $\mathbf{n}$ до поверхні у довільній точці M набуває вигляду

$$\mathbf{n}^{(M)} = \frac{\partial \mathbf{r}(u^{(M)}(t), v(t))}{\partial v} \frac{\partial v(t)}{\partial t} \times \frac{\partial \mathbf{r}(u(t), v^{(M)}(t))}{\partial u} \frac{\partial u(t)}{\partial t}. \quad (1.15)$$

Інструментальне виробництво характеризуються наявністю поверхонь складної форми, тобто таких, що не допускають ковзання "самих по собі". В цьому випадку поверхню розбивають на кілька $k : (k = 1, 2, 3 \dots)$ "простих" відсіків. Для кожного відсіку вводиться індивідуальна система координат $\{u^k, v^k\}$, яка дозволяє досить просто представити конкретний відсік поверхні індивідуальним радіус-вектором $\mathbf{r}^k(u^k, v^k)$.

Після опису всіх відсіків поверхні її "збирають воедино" у базисі $\{\mathbf{e}_i\} : (i = 1, 2, 3)$, єдиному для всієї поверхні. Практично це означає перехід від кількох двовимірних систем координат $\{u^k, v^k\} : (k = 1, 2, 3 \dots)$ до однієї тривимірної системи $\{e_1, e_2, e_3\}$. Процес "збирання" зазвичай називають синтезом поверхні. У цьому випадку радіус-вектор $\mathbf{r}(e_i)$ точки M поверхні набуває вигляду

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(e_i) &= \\ &= \mathbf{e}_1 \cdot e_1(u^k, v^k) + \mathbf{e}_2 \cdot e_2(u^k, v^k) + \mathbf{e}_3 \cdot e_3(u^k, v^k) = \\ &= \sum_{i=1}^3 \mathbf{e}_i \cdot e_i(u^k, v^k). \end{aligned} \quad (1.16)$$

Відповідно вектор нормалі $\mathbf{n}(e_i)$ набуде вигляду

$$\mathbf{n}(e_i) = \frac{\partial \mathbf{r}(e_i(u, v))}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}(e_i(u, v))}{\partial v}, \quad (i = 1, 2, 3). \quad (1.17)$$

Векторна форма представлення поверхні оперує з наочними геометричними об'єктами і лінійно-кутовими величинами (довжина, відстань, нахил, площа, швидкість та ін.), тому вона найбільш часто застосовується на стадії дослідження умов формоутворення і характеру дотику пов'язаних поверхонь.

Недоліком векторної форми подання поверхні є:

- складність, а найчастіше і неможливість, описати однієї вектор-функцією складну поверхню, яка не допускає ковзання "самою по собі";
- залежність виду вектор-функції від орієнтації базису.

У той же час, поєднання циліндричної системи координат і векторного числення дозволяє дуже просто і наочно уявити будь-яку гвинтову поверхню (поверхню загального типу).

1.2.1.3. Параметричний спосіб подання поверхонь

Якщо на поверхню нанести координатну сітку (u, v) то незалежно від просторової форми цієї поверхні, кожна точка M поверхні однозначно визначатиметься двома координатами (u, v) двовимірного простору.

Отже, при переході від двовимірного простору u, v до тривимірного простору ортогонального базису $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, коли точка M поверхні визначається проєкціями вектора $\mathbf{r}_{\{e_i\}}^{(M)}(u, v)$ на відповідні орти $\{\mathbf{e}_i\} : (i = 1, 2, 3)$

тривимірного простору отримаємо:

$$\begin{aligned} e_1 &= e_1 \left(\mathbf{r}_{\{e_i\}}^{(M)}(u,v) \right) = e_1(u,v), \\ e_2 &= e_2 \left(\mathbf{r}_{\{e_i\}}^{(M)}(u,v) \right) = e_2(u,v), \\ e_3 &= e_3 \left(\mathbf{r}_{\{e_i\}}^{(M)}(u,v) \right) = e_3(u,v). \end{aligned} \quad (1.18)$$

Таким чином, параметричний спосіб представлення поверхні можна розглядати, як розгорнуту форму запису векторного способу представлення поверхні, коли оперують не з вектором, а з його компонентами по ортах ортогонального базису $\{e_i\} : (i = 1,2,3)$.

При параметричному способі представлення поверхні координатні лінії (u,v) матимуть три компоненти для кожного з напрямків (u,v)

$$\begin{aligned} \frac{\partial e_1}{\partial u} &= \frac{\partial e_1}{\partial u}(u,v), & \frac{\partial e_1}{\partial v} &= \frac{\partial e_1}{\partial v}(u,v), \\ \frac{\partial e_2}{\partial u} &= \frac{\partial e_2}{\partial u}(u,v), & \frac{\partial e_2}{\partial v} &= \frac{\partial e_2}{\partial v}(u,v), \\ \frac{\partial e_3}{\partial u} &= \frac{\partial e_3}{\partial u}(u,v), & \frac{\partial e_3}{\partial v} &= \frac{\partial e_3}{\partial v}(u,v). \end{aligned} \quad (1.19)$$

У цьому випадку нормаль до поверхні у довільній точці M можна визначити як:

$$\frac{e_1 - e_1^{(M)}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial e_2}{\partial u} & \frac{\partial e_3}{\partial u} \\ \frac{\partial e_2}{\partial v} & \frac{\partial e_3}{\partial v} \end{vmatrix}} = \frac{e_2 - e_2^{(M)}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial e_3}{\partial u} & \frac{\partial e_1}{\partial u} \\ \frac{\partial e_3}{\partial v} & \frac{\partial e_1}{\partial v} \end{vmatrix}} = \frac{e_3 - e_3^{(M)}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial e_1}{\partial u} & \frac{\partial e_2}{\partial u} \\ \frac{\partial e_1}{\partial v} & \frac{\partial e_2}{\partial v} \end{vmatrix}}. \quad (1.20)$$

Параметричний спосіб подання поверхні, використовується в основному, як частина векторного способу подання поверхні:

- на стадії контролю результатів досліджень умов формоутворення;
- на стадії перетворення векторних величин у їх чисельні уявлення, для безпосереднього здійснення механічної обробки на верстаті;
- при орієнтації різального інструменту на верстатах з ЧПК.

Недоліки параметричного способу представлення поверхні - ті ж, що й у векторного:

- складність вибору функціональної залежності;
- залежність математичного подання результатів від орієнтації бази-су прийнятої системи координат.

1.2.1.4. Явне та неявне представлення поверхні

Представлення поверхні в явній формі є окремим випадком параметричного представлення, коли складові по двох ортах $\{e_1, e_2\}$ тривимірного простору, вказуються в явному вигляді, а складова по третьому орту $\{e_3\}$, задається функціональною залежністю

$$\left. \begin{aligned} e_1 &= e_1, \\ e_2 &= e_2, \\ e_3 &= e_3(e_1, e_2), \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} e_1 &= u, \\ e_2 &= v, \\ e_3 &= e_3(u, v) \end{aligned} \quad (1.21)$$

Якщо поверхня задана в явній формі, то нормаль до неї в точці M визначається рівнянням

$$\frac{e_1 - e_1^{(M)}}{\frac{\partial e_3}{\partial e_1}} = \frac{e_2 - e_2^{(M)}}{\frac{\partial e_3}{\partial e_2}} = \frac{e_3 - e_3^{(M)}}{-1}. \quad (1.22)$$

При неявному способі уявлення поверхні вона виражається функціональною залежністю типу

$$f(e_1, e_2, e_3) = 0. \quad (1.23)$$

В цьому випадку нормаль до поверхні визначається залежністю

$$\frac{e_1 - e_1^{(M)}}{\frac{f(e_1, e_2, e_3)}{\partial e_1}} = \frac{e_2 - e_2^{(M)}}{\frac{f(e_1, e_2, e_3)}{\partial e_2}} = \frac{e_3 - e_3^{(M)}}{\frac{f(e_1, e_2, e_3)}{\partial e_3}}. \quad (1.24)$$

Слід зазначити, що обидва способи подання поверхні (явний та неявний) використовуються рідко. Основною причиною цього є громіздкість математичних перетворень, особливо при використанні на верстатах з ЧПК які орієнтовані на матричний спосіб обчислення.

1.2.1.5. Подання поверхні локальними відсіками

У тому випадку, коли представлення складної поверхні однією функціональною залежністю не можливе, поверхню фрагментують на окремі відсіки, кожен з яких представляється більш простою функціональною залежністю, ніж вся поверхня в цілому.

Подання поверхні відсіками найчастіше здійснюється простими поверхнями другого (рідше третього) порядку. Зазвичай це:

- циліндрична поверхня – чи площина загального виду;
- циліндричний парабол або циліндричний гіперболоїд;
- поверхня обертання – куля, конічна, еліпсоїд обертання;
- гіперболоїд – односмуговий, двопорожнинний;
- параболоїд – еліптичний, гіперболічний.

Представлення складної просторової поверхні відсіками площин спочатку використовувалося тільки при чорновій обробці, проте останнім часом воно стало застосовуватися на операціях фінішного формоутворення складних поверхонь, таких як оптичні елементи навігаційної апаратури та світлотехнічних приладах.

Застосування циліндричної поверхні, для апроксимації окремих відсіків, обумовлено способом утворення циліндричної поверхні, яка утворюється рухом прямої лінії (утворювальної) паралельно самій собі і ковзає по деякій напрямній кривій.

В окремому випадку, коли напрямна є плоскою лінією, у якості апроксимуючої циліндричної поверхні, використовують еліптичний, параболічний⁴⁴ або гіперболічний циліндр⁴⁵.

Напрямною еліптичного циліндра служить еліпс, а твірна (пряма лінія) перпендикулярна до площини еліпса. Рівняння еліптичного циліндра у просторі ортогонального базису $\{e_i\}$: $(i = 1, 2, 3)$ має вигляд

$$\frac{(e_1)^2}{a^2} + \frac{(e_2)^2}{b^2} = 1. \quad (1.25)$$

Напрямною параболічного циліндра служить параболо

$$(e_2)^2 = 2pe_1, \quad (1.26)$$

де p – відстань від фокусу параболоїди до директриси. При цьому твірна перпендикулярна до орта $\{e_3\}$ базису $\{e_i\}$: $(i = 1, 2, 3)$.

При використанні гіперболічної поверхні для подання відсіку, як направляюча служить параболо

$$\frac{(e_1)^2}{a^2} - \frac{(e_2)^2}{b^2} = 1. \quad (1.27)$$

⁴⁴Параболічний циліндр – циліндрична поверхня другого порядку, для якої напрямною служить параболо. Її отримують при переміщенні твірної прямої по напрямній параболі. Тоді слідом від переміщення прямої параболі буде параболічний циліндр.

⁴⁵Гіперболічний циліндр – поверхня другого порядку, напрямною для якої служить гіперболо. Гіперболічний циліндр отримується при переміщенні гіперболи по прямій.

Слід зазначити, що заміна відсіку поверхні циліндричною поверхнею, зручна не тільки математичною простотою реалізації, а й простотою реалізації інструменту (зазвичай різального).

При апроксимації циліндричною поверхнею, твірна може бути відтворена як лінія – це дозволяє використовувати один і той же різальний елемент для формоутворення циліндричних поверхонь утворених різними твірними, які займають різне положення в просторі. Зрештою, це сприяє скороченню номенклатури інструменту, що застосовується.

Апроксимація поверхні відсіку конічної поверхнею використовується тільки в тому випадку, якщо сама поверхня є конічною. Однак конічні перерізи (тобто слід перетину конуса і площини) використовуються досить часто. Це пояснюється тим, що в залежності від їх взаємного розташування, слідом перетину буде – еліпс, парабола або гіпербола.

Розглянуті вище способи апроксимації, використовуються при описі простих поверхонь, які допускають рух "самих по собі".

При формоутворенні складних поверхонь, що не допускають цього руху, для апроксимації окремих відсіків використовують відсіки поверхонь обертання – еліпсоїд, гіперболоїд, параболоїд.

Перевагою еліпсоїда

$$\frac{(e_1)^2}{a^2} + \frac{(e_2)^2}{b^2} - \frac{(e_3)^2}{c^2} = 1 \quad (1.28)$$

є те, що в залежності від співвідношення величин півосей a, b, c еліпсоїд можна трансформувати в різні геометричні образи: точка $\rightarrow$ куля $\rightarrow$ еліпсоїд $\rightarrow$ циліндр $\rightarrow$ площина. Ця обставина зумовила його широке застосування для апроксимації відсіків складних поверхонь.

У тому випадку, коли апроксимація еліпсоїдом не забезпечує необхідної точності представлення поверхні, використовуються односмуговий гіперболоїд

$$\frac{(e_1)^2}{a^2} + \frac{(e_2)^2}{b^2} - \frac{(e_3)^2}{c^2} = -1 \quad (1.29)$$

та двосмуговий гіперболоїд

$$\frac{(e_1)^2}{p} + \frac{(e_2)^2}{q} = 2e_3. \quad (1.30)$$

Аналогічну сферу застосування, хоч і значно рідше, має еліптичний параболоїд

$$\frac{(e_1)^2}{p} - \frac{(e_2)^2}{q} = e_3, \quad (p, q > 0). \quad (1.31)$$

Слід зазначити, що всі розглянуті вище способи апроксимації відсіку поверхні (циліндр, еліпс, конус, гіперболоїд) в якості апроксимувальної поверхню 2-го порядку використовують поверхню додатної Гаусової кривини.

У тому випадку, коли вихідна поверхня має від'ємну Гаусову кривину, відсіки на які вона фрагментується, доцільно апроксимувати також поверхнею від'ємної кривини. Серед поверхонь 2-го порядку поверхнею з від'ємною Гаусовою кривиною, є гіперболічний параболоїд, який є рівнянням

$$\frac{(e_1)^2}{2p} - \frac{(e_2)^2}{2q} = e_3, \quad (p, q > 0). \quad (1.32)$$

Гіперболічний параболоїд має дві особливості:

- перетин гіперболічного параболоїда площиною дає параболу або гіперболу, залежно від напрямку, через який проходить січна площина;
- будучи поверхнею другого порядку гіперболічний параболоїд, в той же час є лінійною поверхнею, яка може бути утворена однією прямою лінією.

Це дозволяє відносно просто реалізувати його на верстатах з ЧПК, використовуючи конструктивно простий однолезовий інструмент.

Недоліком всіх способів представлення поверхні сукупністю локальних відсіків є нестикування на межах суміжних відсіків, що призводить до появи ребер та розривів поверхні.

Що стосується гвинтових поверхонь, їх зручніше представляти не локальними відсіками, а локальними стрічками. В цьому випадку гвинтова поверхня ніби виклеюється стрічками, що йдуть вздовж осі поверхні. При цьому торцевий перетин таких стрічок можна окреслити дугою кола, що істотно спрощує як математичну сторону вирішення завдань формоутворення, так і технологію виготовлення різального інструменту.

1.2.1.6. Апроксимація сплайнами

Останнім часом, для представлення складних поверхонь, коли межі відсіків є просторовими кривими, у яких не тільки кривина, але й крутість не дорівнюють нулю, застосовується апроксимація бікубічними сплайнами.

У цьому випадку відсік представляється шматком поверхні, яка обмежена межами, довжина кожної прийнята рівною одиниці. Вектор-

функція $\mathbf{r}(u, v)$, що описує відсік поверхні бікубичним сплайном представляється як сума поліномів третього ступеня і має вигляд

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(u, v) = & a_{00} + a_{01}v + a_{02}v^2 + a_{03}v^3 + \\ & + a_{10}u + a_{11}u \cdot v + a_{12}uv^2 + a_{13}uv^3 + \\ & + a_{20}u^2 + a_{21}u^2 \cdot v + a_{22}u^2v^2 + a_{13}u^2v^3 + \\ & + a_{30}u^3 + a_{31}u^3 \cdot v + a_{32}u^3v^2 + a_{33}u^3v^3.\end{aligned}\quad (1.33)$$

або у більш компактному вигляді

$$\mathbf{r}(u, v) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 a_{ij} u^i v^j. \quad (1.34)$$

При такому способі завдання поверхні відсіку, що стосуються координатних ліній (u, v) визначаються шляхом наступних математичних перетворень. Точка поверхні описується рівнянням

$$\mathbf{r}(u, v) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 (a_{ij} u^i v^j) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 \left[\left(\prod_{q=1}^n a_{ij}^q \right) u^i v^j \right] \quad (1.35)$$

або у розгорнутому вигляді

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 \left[\left(\prod_{q=1}^n a_{ij}^q \right) u^i v^j \right] = & \left(\prod_{q=1}^n a_{00}^q + \prod_{q=1}^n a_{01}^q v + \prod_{q=1}^n a_{02}^q v^2 + \prod_{q=1}^n a_{03}^q v^3 \right) + \\ & + \left(\prod_{q=1}^n a_{10}^q u + \prod_{q=1}^n a_{11}^q uv + \prod_{q=1}^n a_{12}^q v^2 u + \prod_{q=1}^n a_{13}^q v^3 u \right) + \\ & + \left(\prod_{q=1}^n a_{20}^q u^2 + \prod_{q=1}^n a_{21}^q u^2 v + \prod_{q=1}^n a_{22}^q u^2 v^2 + \prod_{q=1}^n a_{23}^q u^2 v^3 \right) + \\ & + \left(\prod_{q=1}^n a_{30}^q u^3 + \prod_{q=1}^n a_{31}^q u^3 v + \prod_{q=1}^n a_{32}^q u^3 v^2 + \prod_{q=1}^n a_{33}^q u^3 v^3 \right).\end{aligned}\quad (1.36)$$

Виносячи параметр u за дужки отримаємо

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 \left[\left(\prod_{q=1}^n a_{ij}^q \right) u^i v^j \right] = & \left(\prod_{q=1}^n a_{00}^q + \prod_{q=1}^n a_{01}^q v + \prod_{q=1}^n a_{02}^q v^2 + \prod_{q=1}^n a_{03}^q v^3 \right) + \\
 & + \left(\prod_{q=1}^n a_{10}^q + \prod_{q=1}^n a_{11}^q v + \prod_{q=1}^n a_{12}^q v^2 + \prod_{q=1}^n a_{13}^q v^3 \right) u + \\
 & + \left(\prod_{q=1}^n a_{20}^q + \prod_{q=1}^n a_{21}^q v + \prod_{q=1}^n a_{22}^q v^2 + \prod_{q=1}^n a_{23}^q v^3 \right) u^2 + \\
 & + \left(\prod_{q=1}^n a_{30}^q + \prod_{q=1}^n a_{31}^q v + \prod_{q=1}^n a_{32}^q v^2 + \prod_{q=1}^n a_{33}^q v^3 \right) u^3. \quad (1.37)
 \end{aligned}$$

Отриманий вираз можна представити як добуток векторів та ортогональної матриці

$$\mathbf{r}(u, v) = \begin{bmatrix} u^3 & u^2 & u & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \prod_{q=1}^n a_{00}^q & \prod_{q=1}^n a_{01}^q & \prod_{q=1}^n a_{02}^q & \prod_{q=1}^n a_{03}^q \\ \prod_{q=1}^n a_{10}^q & \prod_{q=1}^n a_{11}^q & \prod_{q=1}^n a_{12}^q & \prod_{q=1}^n a_{13}^q \\ \prod_{q=1}^n a_{20}^q & \prod_{q=1}^n a_{21}^q & \prod_{q=1}^n a_{22}^q & \prod_{q=1}^n a_{23}^q \\ \prod_{q=1}^n a_{30}^q & \prod_{q=1}^n a_{31}^q & \prod_{q=1}^n a_{32}^q & \prod_{q=1}^n a_{33}^q \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v^3 \\ v^2 \\ v \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (1.38)$$

Тоді остаточно у згорнутому вигляді отримаємо

$$\mathbf{r}(u, v) = \begin{bmatrix} u^3 & u^2 & u & 1 \end{bmatrix} \cdot \left[\prod_{q=1}^n a_q^n \right] \cdot \begin{bmatrix} v^3 & v^2 & v & 1 \end{bmatrix}^T. \quad (1.39)$$

Таким чином, напрямок дотичних до координатних ліній (u, v) визначатиметься рівняннями

$$\left[\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \right] = \begin{bmatrix} 3u & 2u & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \left[\prod_{q=1}^n a_q^n \right] \cdot \begin{bmatrix} v^3 & v^2 & v & 1 \end{bmatrix}^T, \quad (1.40)$$

$$\left[\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{v}} \right] = \begin{bmatrix} u^3 & u^2 & u & 1 \end{bmatrix} \cdot \left[\prod_{q=1}^n a_q^n \right] \cdot \begin{bmatrix} 3v & 2v & v & 1 \end{bmatrix}^T. \quad (1.41)$$

Апроксимація відсіків поверхні сплайнами, дозволяє представити початкову поверхню практично будь-якої форми, але сам спосіб має наступні недоліки:

- апроксимація відсіків поверхні сплайнами, пов’язана зі значним обсягом обчислення, коли загальна кількість коефіцієнтів, що описують сплайн, досягає кількох тисяч;
- апроксимація сплайном може бути виконана лише за наявності опорних точок реперної сітки поверхні.

В інструментальному виробництві сплайн-апроксимація отримала поширення не як спосіб представлення поверхні, а при визначенні профілю гвинтової поверхні або профілю початкової інструментальної поверхні.

1.3. Чисельні методи подання поверхні

У сучасному машинобудуванні поверхні деталей складної форми найбільш часто задаються координатами опорних точок у тривимірному ортогональному базисі (реперною сіткою). Як правило це поверхні отримані методами чисельних розрахунків, або в результаті проведення досліджень з оптимізації експлуатаційних характеристик об’єктів обмежених цими поверхнями.

1.3.1. Інтерполювання поверхні

Геометрична інформація про поверхню, задану дискретними значеннями її координат, може бути отримана на основі чисельного інтерполювання між вузлами реперної сітки. Подання поверхні методом інтерполяції має дві основні переваги

- при інтерполюванні значення інтерполяційного функціоналу завжди збігається зі значеннями реперних точок;
- чисельні значення координат поверхні в ортогональному 3D просторі можна представити у явній формі у вигляді тривимірної матриці, тому інтерполяція більш раціонально ніж апроксимація.

При інтерполюванні поверхня розглядається в деякій околиці точки $M_{i,j}$, яка приймається за опорну, базову точку. Тоді положення довільної точки поверхні визначається як результат інтерполювання по одному з напрямків (u або v) як $M|_{j=Const}^{i=Var}$ або $M|_{j=Var}^{i=Const}$. Якщо необхідно визначити положення точки $M|_{j=Var}^{i=Var}$, його знаходять як середнє

$$M|_{j=Var}^{i=Var} = \frac{1}{2} \left(M|_{j=Const}^{i=Var} + M|_{j=Var}^{i=Const} \right). \quad (1.42)$$

1.3.1.1. Інтерполювання колом

Найбільш простим способом інтерполювання, є інтерполювання колом яке проходить через три точки, коли координати (X_{oi}, Y_{oi}) центру кола радіуса R визначаються з вирішення системи рівнянь

$$\begin{cases} (x_i - X_{oi})^2 + (y_i - Y_{oi})^2 &= R_i^2, \\ (x_{i-1} - X_{oi})^2 + (y_{i-1} - Y_{oi})^2 &= R_i^2, \\ (x_{i+1} - X_{oi})^2 + (y_{i+1} - Y_{oi})^2 &= R_i^2, \end{cases} \quad (1.43)$$

де (X_{i-1}, Y_{i-1}) , (X_i, Y_i) та (X_{i+1}, Y_{i+1}) – координати трьох реперних точок розташованих послідовно у напрямку i . Аналогічно можна визначити параметри замінного кола в напрямку j . Однак інтерполювання колом через три точки не забезпечує високої точності.

1.3.1.2. Інтерполювання степеневим поліномом

Застосування в якості інтерполюючої функції степеневого полінома, дозволяє значно підвищити точність інтерполювання [7]. При інтерполюванні на основі рівномірної реперної сітки з постійним кроком $h = Const$ використовуються інтерполяційні формули⁴⁶ Стірлінга⁴⁷, Бесселя⁴⁸, Еверетта, Стеффенсена⁴⁹.

⁴⁶ Ушаков Р., Гайштудт О., Шамонович О. Математика : Довідник. Україна, Літера ПДТ, 2018. 624 с. ; Шинкарик М. І. Вища математика. Тернопіль : Вид-во Карп'юка., 2003. 480 с.

⁴⁷ Джеймс Стірлінг (англ. *James Stirling*, травень 1692 – 5 грудня 1770) – шотландський математик.

⁴⁸ Фрідріх Вільгельм Бессель (нім. *Friedrich Wilhelm Bessel*; 22 липня 1784, Мінден – 17 березня 1846, Кенігсберг) – німецький математик і астроном, учень Карла Фрідріха Гауса. Іноземний член Лондонського королівського товариства (1825), Паризької академії наук (1840; кореспондент з 1816).

⁴⁹ Джордж Стефенсон (англ. *George Stephenson*; 9 червня 1781, Уїлем – 12 серпня 1848, Честерфілд) – англійський винахідник, інженер-механік. Винайшов паровоз. Вважається одним із “батьків” залізниць.

Достатньо зручною є інтерполяційна формула Стірлінга

$$\begin{aligned}
 P_n(x_0 + th) = & y_0 + t\delta y_0 + \frac{t^2}{2}\delta^2 y_0 + \dots \\
 & \dots + \frac{t(t^2 - 1) \dots (t^2 - (n-1)^2)}{(2n-1)!} \delta^{2n-1} y_0 + \\
 & + \frac{t^2(t^2 - 1) \dots (t^2 - (n-1)^2)}{(2n)!} \delta^{2n} y_0, \quad (1.44)
 \end{aligned}$$

де $t = \frac{x - x_0}{h}$, δ^k – центральна кінцева різниця порядку k .

Має широкє застосування інтерполяційна формула Ньютона

$$\begin{aligned}
 P_n(x_0 + th) = & y_0 + t\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2}\Delta^2 y_0 + \dots \\
 & \dots + \frac{t(t-1) \dots (t-n+1)}{n!} \Delta^n y_0, \quad (1.45)
 \end{aligned}$$

де Δ – кінцева різниця порядку k .

Зауваження. При виборі тієї чи іншої форми математичної реалізації методів інтерполяції треба мати на увазі, що їх математичні інтерпретації у різних довідниках інколи мають досить значну різницю. Тому для практичної роботи доцільно застосовувати найбільш зручну у кожному конкретному випадку.

При нерівномірному розташуванні вузлів реперної сітки застосовуються методи, що базуються на положеннях теорії розділених різниць⁵⁰. Найчастіше, для інтерполювання по нерівномірно розташованим вузлам реперної сітки, застосовують поліном Лагранжа

$$L(x) = \sum_{k=0}^n f(x_k) l_k(x), \quad (1.46)$$

$$f(x_i) = y_i, \quad (1.47)$$

$$l_i(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)}. \quad (1.48)$$

⁵⁰Розділена різниця – узагальнення поняття похідної. Розділена різниця нульового порядку функції – сама функція.

Або спосіб Ньютона, який представляє інтерполяційний багаточлен у вигляді полінома

$$N(x) = f(x_0) + \sum_{i=0}^{n-1} B_i \prod_{k=0}^i (x - x_k), \quad (1.49)$$

$$B_i = f(x_0, \dots, x_i) = \frac{f(x_{i-1} - x_i) - f(x_0 - x_{i-1})}{x_i - x_0}. \quad (1.50)$$

Обидва способи дозволяють інтерполяція за будь-якою кількості вузлів n довільно розташованої сітки.

1.3.1.3. Інтерполяція за Ейткенем

У тих випадках, коли вид інтерполюючого полінома не має значення, застосовується інтерполяція за методом Ейткена⁵¹. Його суть полягає в послідовному обчисленні функції $y(x)$ у довільно розташованих вузлах, без явної побудови інтерполяційної функції.

Остаточний результат знаходять шляхом послідовних ітерацій⁵²:

$$y(x, x_0, x_1) = \frac{1}{x - x_0} \begin{vmatrix} y_0 & x_0 - x \\ y_1 & x_1 - x \end{vmatrix}, \quad (1.51)$$

$$y(x, x_0, x_2) = \frac{1}{x_2 - x_0} \begin{vmatrix} y_0 & x_0 - x \\ y_2 & x_2 - x \end{vmatrix}, \quad (1.52)$$

$$y(x, x_0, x_1, x_2) = \frac{1}{x_2 - x_1} \begin{vmatrix} y(x, x_0, x_1) & x_1 - x \\ y(x, x_0, x_2) & x_2 - x \end{vmatrix} \text{ і так далі.} \quad (1.53)$$

Метод Ейткена дозволяє зробити висновки про характер процесу інтерполювання. Якщо значення функції $y(x, x_0, x_1, \dots)$ змінюються монотонно, можна говорити про достатню достовірність результатів інтерполювання, і навпаки. Обчислення припиняють, коли сусідні ітераційні значення мають однакову кількість рівних знаків.

⁵¹ Aitken, Alexander (1926). "On Bernoulli's numerical solution of algebraic equations". Proceedings of the Royal Society of Edinburgh. 46: 289–305. doi:10.1017/S0370164600022070.

⁵² Достатньо зрозумілий приклад використання методу Ейткена можна знайти у довіднику Бронштейн І.М., Семендяев К.А. Довідник з математики для інженерів та учнів ВНТЗ. 1967. 607 с. на сторінках 574-575.

1.3.1.4. Інтерполяція сплайнами

Загальним недоліком розглянутих методів інтерполювання є наступне:

- при інтерполяції поліномами на великих відрізках збільшується похибка інтерполювання;
- інтерполяційна крива на кінцях відрізка інтерполювання набуває хвилеподібного характеру.

У зв'язку з цим останнім часом при описі поверхонь складної форми широко застосовується сплайн-інтерполювання. У загальному випадку глобального інтерполювання, при нерівномірно розташованих вузлах реперної сітки, сплайн-інтерполяційна формула має вигляд

$$s(x) = -s_{i-1} \frac{(x - x_i)^2}{6h_i} + s_i \frac{(x_i - x_{i-1})^2}{6h_i} + y_i \left(\frac{y_i}{h_i} - \frac{s_i h_i}{6} \right) (x - x_{i-1}) - \left(\frac{y_{i-1}}{h_i} - \frac{s_i h_i}{6} \right) (x - x_i) \quad (1.54)$$

де параметр h_i дорівнює

$$h_i = z_i - x_{i-1}, \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n). \quad (1.55)$$

Коефіцієнти $s_i (i = 0, 1, 2, \dots, n)$ сплайну $s(x)$ визначаються з розв'язання системи рівнянь:

$$s_{i-1} \frac{h_i}{6} + s_i \frac{h_i - h_{i-1}}{3} + s_{i+1} \frac{h_{i+1}}{6} = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i}, \quad (1.56)$$

$$s_0 = s_n = 0, \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n). \quad (1.57)$$

У разі локального сплайн інтерполювання, інтерполяційна формула набуває вигляду:

$$\begin{aligned} s_{lok} = & \frac{(x_{i+1} - x)^2 (2(x - x_i) + h_i)}{(h_i)^3} y_i + \\ & + \frac{(x - x_{i+1})^2 (2(x_{i+1} - x_i) + h_i)}{(h_i)^3} y_{i+1} + \\ & + \frac{(x_{i+1} - x)^2 (x - x_i)}{(h_i)^3} m_i + \\ & + \frac{(x - x_i)^2 (x - x_{i+1})}{(h_i)^3} m_{i+1}, \end{aligned} \quad (1.58)$$

де коефіцієнти m_i та h_i знаходяться як:

$$m_i = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h_i}, \quad (1.59)$$

$$h_i = x_{i+1} - x_{i-1} \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n-1). \quad (1.60)$$

При чисельному поданні поверхні тривимірним масивом координат (x, y, z) іноді застосовується інтерполювання за двома параметрами одночасно. Зазвичай у таких випадках використовується чотири або шість вузлів реперної сітки. При інтерполюванні по чотирьох вузлах поверхня відображається функціональною залежністю виду

$$f(x, y) = (1-p)(1-q)f_{0,0} + p(1-q)f_{1,0} + q(1-p)f_{0,1} + pqf_{1,1}, \quad (1.61)$$

$$p = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}, \quad q = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}. \quad (1.62)$$

Точніше інтерполювання виконується по шести вузлах реперної сітки. Інтерполяційна формула в цьому випадку має вигляд

$$f(x, y) = \frac{q(q+1)}{2}f_{0,-1} + \frac{p(p-1)}{2}f_{-1,0} + \\ + (1 + pq + p^2 + q^2)f_{0,0} + \frac{p(p-2q+1)}{2} + \\ + \frac{q(q-2p+1)}{2}f_{0,1} + pqf_{1,1}. \quad (1.63)$$

Загальним недоліком всіх методів інтерполювання є:

- залежність достовірності представлення поверхні від частоти реперної сітки;
- неоднозначність результатів інтерполювання, які залежать від кількості розрахункових точок;
- вплив напрямку ходу інтерполювання (зростання-зменшення), і розташування базової точки в ряді реперних точок (початок-середина-кінець) на результати розрахунків.

1.3.2. Локальна геометрія поверхні представленої реперною сіткою

Для поверхні представленої реперною сіткою⁵³ положення дотичної і нормалі визначається чисельними методами. У найбільш простому випадку інтерполювання колом, що проходить через три точки, дотична $\mathbf{k}$ визначається, як перпендикуляр до радіусу замінного кола

$$\mathbf{k} = \begin{vmatrix} y & -y_c \\ x_c & -x \end{vmatrix}. \quad (1.64)$$

Нормаль $\mathbf{n}$ визначається як результат векторного добутку

$$\mathbf{n} = \mathbf{k}_u \times \mathbf{k}_v \quad (1.65)$$

або як сума векторів $\mathbf{R}$ колінеарних радіусам кіл, що замінюють поверхню та проходять через досліджувану точку M поверхні

$$\mathbf{n} = \mathbf{R}_u + \mathbf{R}_v. \quad (1.66)$$

Важливо, що при інтерполяції реперної сітки колом, модуль дотичних і нормалей не характеризують ніякі властивості поверхні, оскільки після апроксимуванні колом, реальна поверхня замінюється частиною кулі, тобто, зовсім іншою поверхнею.

Якщо реперна сітка визначена з досить дрібним кроком, і поверхня, що представляється нею, має незначну кривину, то можливе визначення дотичної площини як площини, яка проходить через три точки A , B і C реперної сітки у вигляді визначника

$$\begin{vmatrix} x_A - x_B & y_A - y_B & z_A - z_B \\ x_C - x_B & y_C - y_B & z_C - z_B \\ x - x_B & y - y_B & z - z_B \end{vmatrix} = 0. \quad (1.67)$$

В даному випадку параметри x , y , z – це координати довільної точки M , що належить площині, проведеної через три реперні точки A , B і C .

⁵³Реперні точки – це спеціальний знак, який використовується у нівелірній мережі. У перекладі з французької репер – початкова точка, позначка. Реперна мережа подібна до гігантської сітки з координатами по якій встановлюють точне положення об'єктів.

Тоді нормаль n до площини в точці M буде визначатися як

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_x & n_y & n_z \end{bmatrix}^T, \quad (1.68)$$

$$n_x = \begin{vmatrix} y_C - y_B & z_C - z_B \\ y - y_B & z - z_B \end{vmatrix}, \quad (1.69)$$

$$n_y = \begin{vmatrix} x_C - x_B & z_C - z_B \\ x - x_B & z - z_B \end{vmatrix}, \quad (1.70)$$

$$n_z = \begin{vmatrix} x_C - x_B & y_C - y_B \\ x - x_B & y - y_B \end{vmatrix}. \quad (1.71)$$

Визначення напрямку дотичної до поверхні, на основі трійки реперних точок, не забезпечує високої точності, а також не враховує характер локальної геометрії поверхні в околиці досліджуваної точки M .

Ближче до дійсного розташування дотичної можна отримати при використанні розділених різниць інтерполювання. Однак останнім часом, чисельні методи знаходять все більше застосування особливо при використанні обробних центрів, оснащених ЕОМ.

1.4. Класифікація інструмента для обробки гвинтових поверхонь

В даний час існує два основних способи формоутворення гвинтових поверхонь, кожен з яких можна охарактеризувати використанням певного виду інструменту:

- формоутворення гвинтових поверхонь на верстатах з ЧПК з використанням універсального інструменту, зазвичай сферичної фрези;
- формоутворення гвинтових поверхонь на універсальних верстатах з використанням спеціального фасонного інструменту.

Сучасні верстати з ЧПК дозволяють одним інструментом обробляти фасонну поверхню будь-якої форми і розмірів, проте при цьому процес формоутворення на верстатах з ЧПК мало продуктивний і не забезпечує необхідної якості поверхні.

Це зумовлено тим, що універсальний інструмент (сферична фреза) як правило, контактує з номінальною поверхнею деталі тільки в точці. В

результаті цього необхідно багаторазове повторення проходів інструмента. В іншому випадку поверхня деталі є чергуванням гребінців і канавок, що повторюють переміщення інструмента.

Зменшення кроку подачі частково вирішує цю проблему, проте при цьому знижується продуктивність обробки. Тому формоутворення гвинтових поверхонь на верстатах з ЧПК із застосуванням універсального інструменту поширення не отримало.

При формоутворенні гвинтових поверхонь на універсальних верстатах (токарної або фрезерної групи) використовується відносно дорогий і складний фасонний інструмент.

У переважній більшості випадків такий інструмент має лінійний контакт з номінальною поверхнею деталі, що дозволяє формоутворювати її за рахунок руху подачі. В результаті цього процес формоутворення є високопродуктивним і забезпечує високу якість обробленої поверхні.

Таким чином, у роботі розглядається лише фасонний інструмент для гвинтових поверхонь, який можна класифікувати за табл. 1.1.

Табл. 1.1. Класифікація інструменту

Інструмент	Рух заготовки	Рух інструмента	Відносний рух
Дисковий	Поєднання рівномірного поступального та рівномірного обертального	Обертання відносно нерухомої осі, що не перетинає вісь заготовки	Гвинтовий
Кінцевий	Поєднання рівномірного поступального та рівномірного обертального	Обертання відносно нерухомої осі перетинає вісь заготовки	Гвинтовий
Обкатний	Рівномірне обертання	Поєднання рівномірного поступального та рівномірного обертального	Гвинтовий
Черв'ячний	Рівномірне обертання	Рівномірне обертання та поступальне вздовж осі заготівлі	Гвинтовий

Отже, маємо такі типи інструментів;

- дисковий фасонний інструмент (дискові фрези, абразивні круги);

- кінцевий фасонний інструмент (кінцеві фрези, абразивні голівки);
- фасонний обкатний інструмент (обкатні різці, зуботочіння);
- черв'ячні фрези (зуборізні та для неевольвентного профілю).

Слід також відзначити точіння гвинтових поверхонь фасонними різцями – метричні різби, ходові гвинти, черв'яки передач. Однак, враховуючи простоту профілювання різців для їх обробки, в даній роботі цей спосіб формоутворення гвинтової поверхні не розглядається.

1.5. Висновки

Проведений аналіз історії та основних положень сучасної теорії формоутворення, зокрема методів знаходження сполученої (спряженої) поверхні та способів подання (представлення) поверхні деталі, дозволяє зробити наступні висновки.

Наявні методи визначення сполученої поверхні орієнтовані на чисто геометричне рішення задачі формоутворення і не дозволяють на стадії визначення сполученої поверхні встановити, які точки початкової інструментальної поверхні (ППП) будуть формотворчими, а які будуть виконувати тільки чорнову роботу з видалення припуску.

Наявні методи визначення сполученої поверхні не дозволяють на стадії визначення ППП встановити не лише чисельну величину відхилення формоутвореної поверхні від номінальної, а й встановити ділянку поверхні, де вона виникає.

Наявні способи представлення поверхні не відображають технологічної сторони утворення поверхні на верстаті.

Подальшим розвитком теорії формоутворення поверхонь є розробка таких методів визначення сполучених поверхонь, які дозволяли б на стадії пошуку ППП, визначити характер можливих відхилень формоутвореної поверхні деталі від номінальної, а також встановити чисельну величину цього відхилення.

Окремим напрямком розвитку способів представлення поверхонь є розробка такого способу, який би враховував технологічні сторони обробки деталі на верстаті.



2. ТЕОРІЯ ФОРМОУТВОРЕННЯ ГВИНТОВИХ ПОВЕРХОНЬ

Мінімальним геометричним елементом, за допомогою сукупності яких може бути задана поверхня довільної форми, є точка [8]. Однак, такі геометричні поняття як нормаль, кривина, дотична і ряд інших параметрів, що визначають локальну геометрію поверхні, до точки не застосовуються.

Тому зручніше розглядати поверхню як сукупність ліній, що належать даній поверхні. При цьому самі лінії, що утворюють поверхню, можна розглядати як траєкторії точок, що рухаються у просторі за відомим законом.

2.1. Представлення поверхні сукупністю траєкторій

Теоретично, форма траєкторій точок, сукупність яких утворює поверхню, може бути довільною, однак кожна твірна траєкторія повинна належати досліджуваній поверхні. У загальному випадку, поверхню можна представити як сукупність нескінченно великої кількості не повторюваних, не ідентичних одна одній траєкторій утворених точками, які здійснюють невпорядковані рухи. Проте більш доцільним є утворення регулярної сукупності траєкторій, як результату одноманітного формування траєкторій, що й покладено основою досліджень викладених у цій роботі.

При цьому важливо відзначити, що траєкторії утворюють поверхню (називатимемо їх утворюючими траєкторіями) можуть мати різну форму для однієї і тієї ж поверхні.

Наприклад, площину можна розглядати як сукупність або прямих ліній, або дуг кіл, або еліпсів.

Гвинтову поверхню можна розглядати як сукупність торцевих перерізів, тобто траєкторій точок, що рухаються по гвинтовій поверхні перпендикулярно її осі, або як сукупність гвинтових траєкторій точок, що рухаються вздовж осі гвинтової поверхні.

Незважаючи на те, що кожне з цих сімейств траєкторій утворено різними формою лініями, всередині кожного сімейства вони мають загальний характер.

З погляду формоутворення поверхонь є доцільним за траєкторій що утворюють поверхню, приймати такі траєкторії, які б певною мірою характеризували форму всієї поверхні, і в той же час були б досить простими кривими. Що стосується гвинтових поверхонь, такими траєкторіями можуть бути гвинтові траєкторії точок, що належать торцевому перерізу.

Вибір гвинтових траєкторій як ліній, що представляють гвинтову поверхню, має ряд переваг перед лініями іншого типу. Розглянемо їх докладніше.

З точки зору процесу формоутворення гвинтової поверхні на верстаті, гвинтова траєкторія має ту перевагу, що, по-перше, практично завжди збігається з рухом подачі, а по-друге, її форма досить повно характеризує гвинтову поверхню. Зокрема, один з основних параметрів гвинтової поверхні, її крок.

Не менш важливими властивостями гвинтові траєкторії (лінії) мають і з точки зору теорії поверхонь, тому що підпадають під клас геодезичних ліній, які мають ряд властивостей, а саме:

- є найкоротшими;
- фронтальними;
- і найпрямішими на гвинтовій поверхні.

Найкоротша

Властивість геодезичної лінії як найкоротшої показує, що будь-яка досить мала дуга геодезичної лінії, є найкоротшою лінією на поверхні між двома довільними точками.

З погляду технології обробки деталі на верстаті – властивість геодезичної лінії як найкоротшої, відповідає найкоротшій траєкторії інструмента, за якої можлива обробка деталі, тобто найбільшої продуктивності.

Особливо важливим це є при формуванні гвинтових поверхонь дисковим або кінцевим інструментом, коли рух подачі інструмента відносно деталі є гвинтовим.

Фронтальна

Властивість геодезичної лінії вказує, що дотична до неї завжди збігається з напрямком ковзання поверхні самої по собі.

З точки зору технології виготовлення ця властивість геодезичної лінії (гвинтової траєкторії) дозволяє утворювати гвинтові поверхні методом видавлювання.

З погляду теорії профілювання, властивість геодезичної ліній як таких що ковзають самі по собі, дозволяє використовувати поняття про "ковзанні поверхонь самих собою", введене професором Родіним П.Р. в теорію профілювання інструменту, і значно спростити процес пошуку сполучених поверхонь.

Найпряміша

Властивість геодезичної лінії як найпрямішої вказує, що нормаль до поверхні збігається з площиною геодезичної лінії, що стикається.

З погляду теорії формоутворення, це дозволяє досить просто визначити такі геометричні параметри гвинтової поверхні як дотична, нормаль, кривина, які є базою для дослідження характеру дотику сполучених (спряжених) поверхонь.

Висновки

Враховуючи викладене вище, в подальших дослідженнях, що проводяться в даній роботі, будемо представляти гвинтову поверхню сукупністю гвинтових траєкторій окремих точок, що належать її торцевому перерізу і має розглянуті вище властивості геодезичних ліній.

Зауваження. У той же час слід зазначити, що це не виключає можливості представлення поверхні сукупністю ліній або траєкторій іншого характеру, яка найбільше узгоджується з формою поверхні, що утворюється, або особливостями кінематичної схеми формоутворення.

2.2. Достовірність уявлення та щільність утворення номінальної поверхні

При поданні (представленні, задавання) поверхні у вигляді сімейства траєкторій окремих точок виникає питання про повноцінність уявлення поверхні¹.

Можна стверджувати, що чим ближче одна до одної розташовані утворюючі траєкторії, тим повніше представлена поверхня. У той же

¹Тобто повноти визначення всіх параметрів гвинтової поверхні, яку задають сімейством траєкторій.

час слід зазначити, що при одній й тій-же самій відстані між сусідніми траєкторіями, достовірність представлення різних відсіків поверхні не однакова і залежить від її форми.

Наприклад, якщо представлена поверхня є площиною, то для її повного уявлення досить двох утворюючих ліній, розташованих на протилежних кінцях (сторонах) площини.

У той же час, представлення складної поверхні зі значними змінами форми (наприклад, скульптурні), за допомогою кінцевої, навіть дуже великої сукупності траєкторій, може бути недостатньою.

У зв'язку з цим доцільно запровадити критерій достовірності уявлення (представлення) поверхні.

2.2.1. Критерій достовірності

Під достовірністю $\aleph$ представлення поверхні будемо розуміти, відношення довжини s_T прямої лінії, що з'єднує дві точки на сусідніх утворюючих траєкторіях T і T' , до довжини s_N найкоротшої лінії, що належить номінальній поверхні між цими точками рис. 2.1,а.

$$\aleph = \frac{s_T}{s_N}. \quad (2.1)$$

Такий критерій зручний тим, що при повному збігу номінальної поверхні і поверхні представленої дискретною кількістю утворюючих траєкторій, чисельне значення критерію достовірності дорівнюватиме одиниці, а за наявності відхилення (зазору) між поверхнями його значення буде менше одиниці.

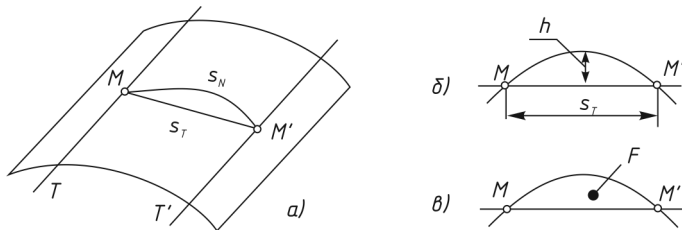


Рис. 2.1. Критерій достовірності

Слід зазначити, що можливо декілька варіантів формулювання критерію достовірності подання поверхні.

Так, можна використовувати величину відношення відстані s_T між утворюючими траєкторіями, до найбільшої відстані h між номінальною поверхнею і поверхнею утвореною траєкторіями рис. 2.1,б.

Однак таке визначення критерію не зовсім зручне, тому що при повному збігу поверхонь його чисельне значення виявляється рівним нескінченності. Якщо ж як критерій брати зворотну величину, то повному збігу поверхонь відповідає значення критерію, що дорівнює нулю. В обох випадках це не зручно.

Іншим варіантом критерію достовірності подання поверхні за допомогою утворюючих траєкторій, може бути інтегральний показник площі F між кривими номінальної поверхні та тої що представляється у деякому перерізі рис. 2.1,в. Проте, він теж не дуже зручний, оскільки результат залежить від прийнятого масштабу лінійних вимірів, що призводить до неоднозначності чисельного значення критерію.

Таким чином, можна стверджувати, що найбільш доцільно прийняти, як критерій достовірності представлення поверхні, відношення довжини s_T прямої найкоротшої відстані між точками, що належать сусіднім утворюючим траєкторіям T і T' , до довжини лінії s_N , яка належить номінальній поверхні, проведеної між цими точками за формулою (2.1).

2.2.2. Критерій щільності

Слід відзначити, що критерій $\aleph$ достовірності подання поверхні належать більше до галузі теорії диференціальної геометрії ніж до виготовлення деталі.

Стосовно процесу реалізації деталі на верстаті, доцільно використовувати критерій щільності $\aleph$ формоутворення поверхні деталі (щільності формотворчих траєкторій) рис. 2.2. Такий критерій може мати якісний характер і використовуватися для визначення характеру зміни щільності утворюючих траєкторій, тобто, характеру зміни відстані між двома сусідніми траєкторіями за їхньої довжини.

Чисельно, критерій щільності $\aleph$ формоутворення поверхні може бути виражений як середня відстань між сусідніми утворюючими траєкторіями, віднесена до одиниці довжини

$$\aleph = \frac{\frac{1}{n} \sum d}{l}. \quad (2.2)$$

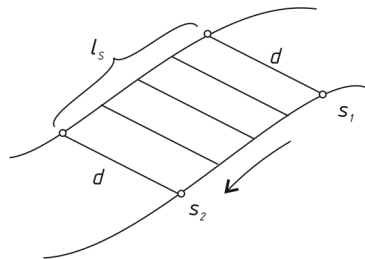


Рис. 2.2. Критерій щільності

Подібний критерій характеризує певною мірою технологічну сторону формоутворення поверхні на верстаті і пов'язаний з рухом подачі. У загальному випадку можливі такі види розподілу щільності утворюючих траєкторій:

- постійна – коли відстань між двома сусідніми утворюючими траєкторіями не змінюється на всій поверхні;
- зменшується (схожа) – коли відстань між сусідніми траєкторіями монотонно зменшується в напрямку руху твірних точок за своїми траєкторіями;
- збільшується (розбіжна) – коли відстань між сусідніми траєкторіями монотонно збільшується в напрямку руху утворюючих точок за своїми траєкторіями;
- змінна по всій поверхні – коли вся поверхня складається з відсіків з різною щільністю твірних траєкторій;
- змінна по локальній ділянці – коли на поверхні з незмінним характером щільності утворюючих траєкторій, є локальні ділянки з іншою щільністю траєкторій.

Враховуючи величину критерію щільності формоутворення поверхні деталі на верстаті, можна, певною мірою, керувати якістю обробленої поверхні, вибираючи траєкторії руху інструмента таким чином, щоб величина критерію щільності була рівномірною по всій поверхні деталі.

2.3. Параметри гвинтової поверхні

Гвинтова поверхня може бути представлена у різний спосіб. У той же час, для розробки єдиних принципів теорії формоутворення гвинтових поверхонь, необхідно використання єдиних параметрів, що її характеризують.

Раніше було запропоновано представляти гвинтову поверхню, як сукупність гвинтових траєкторій, кожна з яких має властивості геодезичної лінії. Відповідно до цього, будемо в даній роботі представляти гвинтову поверхню сукупністю гвинтових траєкторій точок, що належать цій поверхні.

Гвинтовий рух для довільної точки гвинтової поверхні можна охарактеризувати гвинтовим параметром p . Чисельно гвинтовий параметр p може бути виражений по-різному.

З геометричної точки зору він дорівнює відношенню довжини проекції $l = f_l(t)$ шляху пройденого точкою при її гвинтовому русі на

вісь гвинтової поверхні, до величини кута $\omega = f_{\omega}(t)$ на який точка повернеться навколо осі гвинтового руху

$$p = \frac{f_l(t)}{f_{\omega}(t)}. \quad (2.3)$$

З кінематичного погляду, гвинтовий параметр можна представити, як відношення проекції на вісь W гвинтового руху вектора $\mathbf{v}$ швидкості, з якою точка рухається за траєкторією, до проекції вектора $\boldsymbol{\omega}$ швидкості кутового руху на вісь W . Тоді можна записати

$$p = \frac{\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{W}}{|\mathbf{W}|}}{\frac{\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{W}}{|\mathbf{W}|}} = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{W}}{|\mathbf{W}|} \cdot \frac{|\mathbf{W}|}{\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{W}} = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{W}}{\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{W}}. \quad (2.4)$$

Якщо вектор $\mathbf{W}$ є вектором одиничної довжини, наведений вище вираз можна записати у вигляді

$$p = \frac{v}{\omega}, \quad (2.5)$$

де v – чисельне значення швидкості руху точки гвинтової поверхні вздовж її осі

ω – чисельне значення швидкості кутового обертання точки при гвинтовому русі.

Якщо гвинтова поверхня є поверхнею типу равлика, тобто змінного осьового і радіального кроку, то гвинтовий параметр такої поверхні буде різним у кожній її точці. У цьому випадку його можна визначити як функцію від деякого параметра t

$$p(t) = \frac{\frac{\partial f_h(t)}{\partial t}}{\frac{\partial f_{\omega}(t)}{\partial t}}. \quad (2.6)$$

Як параметр t можна приймати величину кута повороту точки гвинтової поверхні, при її гвинтовому русі вздовж осі гвинтової поверхні між двома фіксованими положеннями точки.

У той же час, як параметр t можливо приймати час, що зручніше, тому що дозволяє встановити відповідність між різними рухами, які

визначають схему формоутворення. При цьому, якщо рух точки збігається з спрямуванням осі W гвинтової поверхні, то параметр $t > 0$, якщо протилежно то $t < 0$.

У найбільш простому випадку, коли гвинтова поверхня має постійний крок H , а гвинтові траєкторії її точок розташовані на відповідних циліндрах, параметр гвинт дорівнює $p = \frac{H}{2\pi}$.

З теоретичної точки зору не має значення, яке положення точки гвинтової поверхні приймати за початкове, при формуванні гвинтової траєкторії. Однак більш зручним, буде приймати початкове положення точок, що представляють гвинтову поверхню, в перерізі перпендикулярному осі W гвинтового руху. У цьому випадку торцевий профіль гвинтової поверхні може бути заданий в полярних координатах, полярним радіус-вектором ρ і полярним кутом δ .

Введемо систему ортів $\{e\} : (e_1, e_2, e_3)$ пов'язану з гвинтовою поверхнею деталі та орієнтовану наступним чином:

- додатній напрямок орта e_3 збігається з додатнім напрямом осі W гвинтового руху (вісь W гвинтової поверхні), при цьому за додатній напрямок гвинтового руху вважатимемо правий гвинтовий рух;
- вихідний торцевий переріз гвинтової поверхні збігається з площиною ортів (e_1, e_2) ;
- полярний радіус-вектор ρ розташований у площині ортів (e_1, e_2) , його початок збігається з точкою O_e початку системи ортів $\{e\}$, а кінець із розрахунковою точкою M_T торцевого профілю;
- полярний кут ω відраховується у напрямку проти руху годинникової стрілки від орта e_1 до радіуса вектора ρ розрахункової точки M_T .

У цьому випадку, положення точки M при її русі по гвинтовій траєкторії T , можна визначити вектором r

$$r = \begin{vmatrix} \rho \cos (\delta + t) \\ \rho \sin (\delta + t) \\ p t \end{vmatrix}. \quad (2.7)$$

Якщо профіль гвинтової поверхні заданий в її осьовому перерізі координатами e_1 і e_2 , то полярні координати і торцевого перерізу гвинтової

поверхні можна визначити як:

$$p = e_2, \quad \delta = \begin{cases} \frac{e_3}{p} \text{ при } e_3 > 0, \\ \frac{\pi}{2} - \frac{e_3}{p} \text{ при } e_3 < 0. \end{cases} \quad (2.8)$$

Вектор $\mathbf{k}_r$ дотичний до гвинтової поверхні в напрямку руху вздовж гвинтової траєкторії можна визначити як:

$$\mathbf{k}_r = \frac{\partial r(t)}{\partial t} = \begin{vmatrix} -\rho \sin(\delta + t) \\ \rho \cos(\delta + t) \\ p \end{vmatrix}.$$

Вектор $\mathbf{k}_T$, дотичний до профілю торцевого перерізу гвинтової поверхні, можна визначити як

$$k_T = \begin{vmatrix} \sin \eta \\ \cos \eta \\ 0 \end{vmatrix} \quad (|k_T| = 1). \quad (2.9)$$

де η – кут між напрямком орта e_1 і додатнім напрямом дотичного вектора $\mathbf{k}_T$, який відраховується проти годинникової стрілки від орта e_1 до вектора $\mathbf{k}_T$.

Тоді вектор нормалі до гвинтової поверхні у розрахунковій точці буде

$$\mathbf{n} = \mathbf{k}_r \times \mathbf{k}_T = \begin{vmatrix} -p \sin \eta \\ p \cos \eta \\ -\rho \cos(\delta + t) \cos \eta - \rho \sin(\delta + t) \sin \eta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -p \sin \eta \\ p \cos \eta \\ -\rho(\delta + t - \eta) \end{vmatrix}. \quad (2.10)$$

Таким чином, знаючи профіль торцевого перерізу гвинтової поверхні і гвинтовий параметр p можна визначити основні параметри гвинтової поверхні для подальшого аналізу умов формоутворення.

2.4. Параметри взаємного розташування інструмента та деталі

Для того щоб встановити взаємну орієнтацію деталі (заготовки) та інструмента, будемо використовувати дві системи координат: систему $\{\Delta\}$ – пов'язану з деталлю, та систему $\{\Psi\}$ – пов'язану з інструментом.

Права система координат $\{\Delta\} : (X^\Delta Y^\Delta Z^\Delta)$ пов'язана з деталлю, орієнтована щодо неї в такий спосіб. Вісь Z^Δ збігається з ортом e_3 і віссю гвинтового руху W . Додатній напрямок осі Z^Δ збігається з напрямком правого гвинтового руху. Координатна площина $(X^\Delta Y^\Delta)$ збігається з торцевим перетином гвинтової поверхні.

Права система координат $\{\Psi\} : (X^\Psi Y^\Psi Z^\Psi)$ пов'язана з інструментом, орієнтована щодо нього наступним чином. Вісь Z^Ψ збігається з віссю обертання інструмента. Напрямок осі Z^Ψ орієнтований таким чином, щоб для кінцевого інструменту орт z^Ψ осі Z^Ψ був спрямований від деталі до шпинделя верстата. Для інших типів інструменту напрям осі Z^Ψ будемо вибирати таким, щоб кут між осями Z^Δ та Z^Ψ був гострим, тобто менше $\pi/2$ радіан.

Взаємну орієнтацію систем координат $\{\Delta\}$ і $\{\Psi\}$ будемо визначати найкоротшою відстанню d (або вектором $\mathbf{d}$) між початками O^Δ та O^Ψ систем координат $\{\Delta\}$ і $\{\Psi\}$, а також відповідними кутами між осями систем координат, залежно від конкретної кінематичної схеми формоутворення.

При формоутворенні гвинтових поверхонь велике значення мають відстань m між осями інструмента та деталі, а також кут ε між ними.

У той же час, встановити загальні рекомендації щодо вибору параметрів m і ε практично неможливо, оскільки з одного боку їх величини впливають на умови контакту деталі та інструмента, що у свою чергу залежить від профілю гвинтової поверхні деталі [9, 10]. А з іншого, зачіпають конструктивні та технологічні сторони, як виготовлення інструменту так і процесу обробки деталі. Тому в подальших дослідженнях будемо встановлювати величини параметрів m і ε виходячи з конкретної схеми формоутворення.

2.5. Рухома поверхня у формоутворенні

При вирішенні завдань формоутворення як інструмент дослідження будемо використовувати деяку просторову поверхню, у загальному випадку складної форми [11, 12, 13]. Позначатимемо її як Ω . Поверхню Ω будемо зв'язувати з деталлю або інструментом і переміщати в просторі деяким чином, що залежить від розв'язуваної задачі формоутворення. Тому, надалі будемо називати її рухомою поверхнею Ω .

Розрізнятимемо три види задачі формоутворення, залежно від мети якої, рухома поверхня Ω буде пов'язана певним чином з деталлю або інструментом:

- задача визначення профілю початкової інструментальної поверхні (ППП);
- задача визначення профілю різальної кромки різального елемента;
- задача визначення профілю та умов формоутворення деталі інструментом реалізованим на базі відомої інструментальної поверхні.

Якщо завданням профілювання є визначення профілю початкової інструментальної поверхні, то руху поверхню Ω спрощуємо до площини, яка проходить через вісь обертання інструмента і дозволяє однозначно встановити профіль початкової інструментальної поверхні.

Якщо завданням профілювання буде визначення безпосередньо форми різальної кромки інструмента, то в якості рухомої поверхні будемо приймати поверхню, ідентичну передній або задній поверхні зубця інструмента.

Якщо завданням профілювання буде визначення профілю та умов формоутворення деталі, інструментом, реалізованому на базі відомої інструментальної поверхні, то в якості рухомої поверхні Ω будемо приймати поверхню, ідентичну передній поверхні різального елемента інструменту, тобто поверхню в якій розташована різальна кромка.

2.5.1. Визначення початкової інструментальної поверхні для заданої гвинтової поверхні

Розглянемо можливі варіанти розташування рухомої поверхні при визначенні профілю початкової інструментальної поверхні, для різних схем формоутворення гвинтової поверхні.

Дисковий інструмент

Якщо кінематична схема формоутворення відповідає обробці гвинтової поверхні дисковим інструментом² рис. 2.3, то рухома поверхня Ω може бути представлена площиною, яка проходить через вісь Z^{Ψ} обертання інструмента.

Якщо врахувати, що гвинтова поверхня представлена сукупністю гвинтових траєкторій T , кожна з цих траєкторій при обертанні поверхні Ω навколо осі Z^{Ψ} опише на ній деякий слід q . Можна стверджувати, що сукупність слідів q всіх траєкторій T на рухомій поверхні Ω буде характеризувати профіль початкової інструментальної поверхні. У даному випадку профіль інструментальної поверхні типу диск.

²Наприклад, дисковою фасонною фрезою або фасонним абразивним шліфувальним кругом.

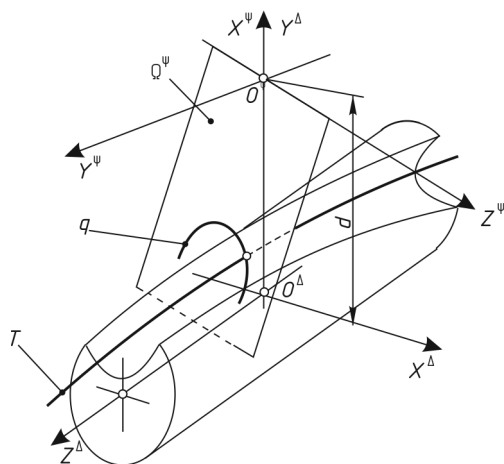


Рис. 2.3. Формоутворення дисковим інструментом

Кінцевий інструмент

Для випадку формоутворення гвинтової поверхні кінцевим інструментом рис. 2.4, рухома поверхня Ω може проходити через вісь обертання Z^ψ інструмента, яка перетинає вісь Z^δ гвинтової поверхні.

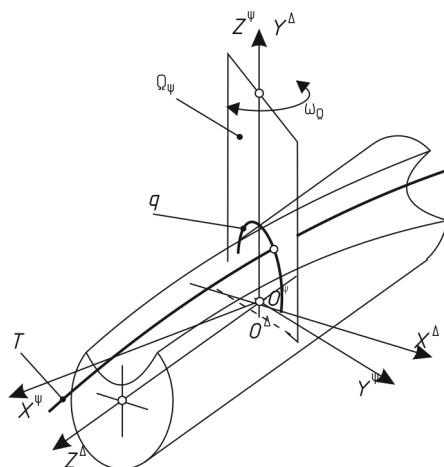


Рис. 2.4. Формоутворення кінцевим інструментом

Необхідно відзначити, що за такої схеми формоутворення, профіль початкової інструментальної поверхні має бути симетричним відносно

осі обертання інструмента. Ця обставина накладає певні обмеження на розташування торцевого профілю гвинтової поверхні щодо осі обертання інструмента.

Циліндричний інструмент

У тому випадку, коли гвинтова поверхня формуються за рахунок поступального руху інструмента рис. 2.5, рухома поверхні Ω може бути орієнтована перпендикулярно напрямку руху інструмента.

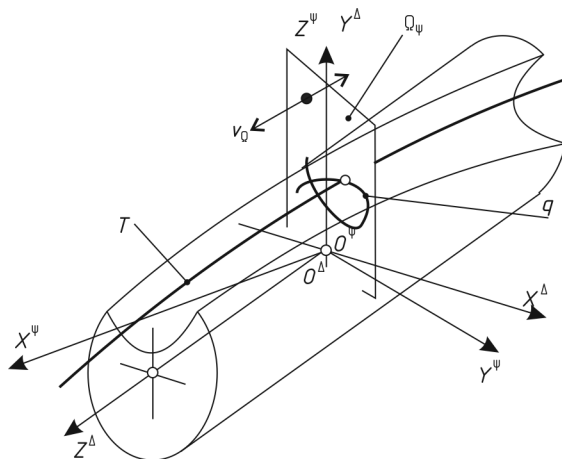


Рис. 2.5. Формоутворення циліндричним інструментом

Черв'ячні фрези

При обробці гвинтових поверхонь черв'ячними фрезами, що відповідає випадку нарізання косозубих зубчастих коліс на зубофрезерному верстаті, рухома поверхня Ω проходить через вісь обертання інструмента Z^ψ (фрези) обертаючись навколо неї, і одночасно з цим здійснює узгоджений поступальний рух рис. 2.6.

Незалежно від кінематичної схеми формоутворення, профіль початкової інструментальної поверхні будемо визначати, як огинаючу Θ до сімейства слідів q утворених при перетині рухомої поверхні Ω з траєкторіями T що представляють відому поверхню деталі.

У цьому випадку, профіль сполученої поверхні визначатиметься, як огинаюча Θ до сімейства слідів q рис. 2.7, залишених гвинтовими траєкторіями T на рухомій площині Ω , при її русі відповідно до прийнятої схеми формоутворення. Тоді сама сполучена поверхня, може бути отримана як слід руху в просторі огинаючої Θ_ψ .

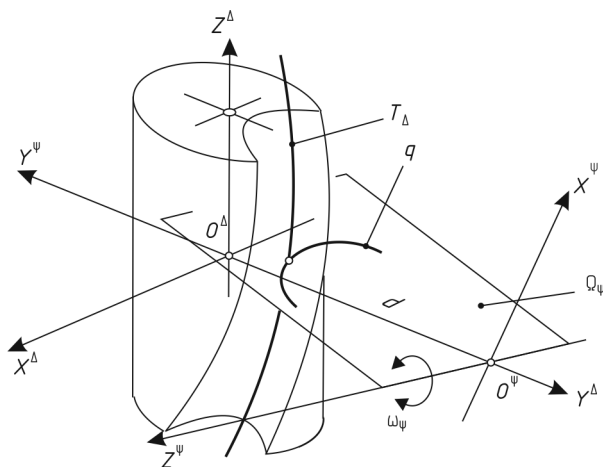


Рис. 2.6. Формоутворення черв'ячним інструментом

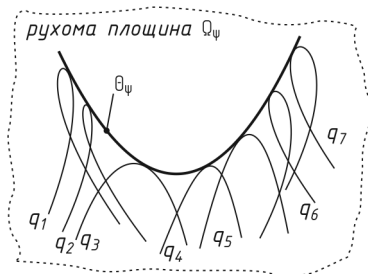


Рис. 2.7. Огинаюча до сімейства слідів

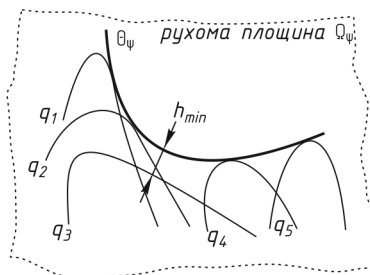


Рис. 2.8. Формоутворення гвинтової поверхні

Незалежно від того, для яких інструментів здійснюють пошук початкової інструментальної поверхні, за характером розташування слідів q , щодо загальної огинаючої Θ_ψ , можна встановити:

- чи будуть усі точки профілю деталі формоутворені чи ні;
- яка чисельна величина відхилення, формоутвореного профілю в досліджуваній точці його поверхні, від номінального профілю.

Розглянемо рис. 2.8, на якому зображено сімейство слідів q у рухомій площині Ω для реального випадку формоутворення гвинтової поверхні дисковим інструментом.

На наведеному рисунку видно, що слід q_3 не торкається з огинаючої Θ_Ψ . Отже, точка гвинтової поверхні, якій відповідає цей слід, не буде контактувати з початковою інструментальною поверхнею і, відповідно до цього, не буде формоутворена.

Таким чином, можна стверджувати, що в тому випадку, коли частина слідів q не є дотичною до огинаючої – формоутворити задану гвинтову поверхню, без відхилення від номінальної форми, неможливо.

Визначимо чисельну величину відхилення формоутвореної поверхні від номінальної. Розглянемо слід q_3 , що не є дотичним до огинаючої Θ_Ψ . Цей слід q_3 , який можна розглядати, як слід руху точки гвинтової поверхні щодо осьового профілю початкової інструментальної поверхні.

У цьому випадку відстань від точок сліду q до огинаючої Θ_Ψ безперервно змінюється, приймаючи в якийсь момент найменшу величину $h_{\min}$.

Отже, можна стверджувати, що для розрахункової точки номінальної поверхні деталі, якій відповідає аналізований слід q_3 , відхилення формоутвореної поверхні від номінальної буде дорівнює $h_{\min}$. Подібним чином, можна для будь-якої точки формоутворювальної поверхні визначити чисельну величину її відхилення від номінальної форми.

Розглянемо визначення початкової інструментальної поверхні більш детально. На рис. 2.9 представлений фрагмент сімейства слідів q і огинаюча Θ_Ψ .

Огинаюча Θ_Ψ торкається не всіх слідів q . Сліди q_2 і q_3 не торкаються огинаючої і тому точки гвинтової поверхні їм відповідні оброблені не будуть.

Виділимо на загальній огинаючій Θ_Ψ дві ділянки NK та KM . Теоретично, ділянка NK є частиною сліду q_1 до перетину в точці K зі слідом q_4 .

У свою чергу ділянка KM складається з двох ділянок – ділянки $M'M$, яка є огинаючою (дотичною) до слідів $q_5 \dots q_7$, і ділянка KM' , яка плавно з'єднує точку K з огинаючою $M'M$. При цьому необхідно відзначити, що точка K отримана не як точка торкання огинаючої слідом, а як точка перетину двох слідів q_1 і q_4 .

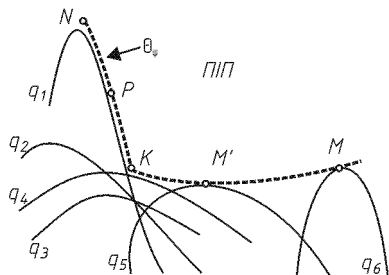


Рис. 2.9. Профіль початкової інструментальної поверхні

Це дозволяє зробити два висновки:

- у загальному випадку загальна огинаюча Θ_Ψ може складатися з комбінації кількох огинаючих, які в місцях з'єднання мають точку перелому або повернення (точка K);
- ті ділянки загальної огинаючої Θ_Ψ , які збігаються з якимось слідом q (у нашому випадку слід q_1) реально можуть не існувати на інструменті.

Розглянемо останнє твердження докладніше. Справді, будь-яка формотворна точка P профілю початкової інструментальної поверхні, розташована на відрізьку NK огинаючої, в деякий момент формоутворення буде торкатись сліду q_1 , тобто точки гвинтової поверхні, що рухається по гвинтовій траєкторії і залишила цей слід на поверхні Ω .

Отже, можна стверджувати, що в даному випадку, профіль початкової інструментальної поверхні, може бути обмежений не всієї огинаючою Θ_Ψ (від точки N до точки M), а тільки ділянкою KM . Це дозволяє зробити досить важливе твердження.

Твердження. Реальний інструмент може не містити ділянку NK профілю. Іншими словами достатньо, якщо в точці K встановити різальний елемент з точковою схемою різання, і інструмент такого виконання буде працювати з такою ж ефективністю, як і інструмент з "повною" огинаючою NM .

Другий, не менш важливий висновок з результатів аналізу взаємного розташування слідів q щодо огинаючої полягає в наступному.

Твердження. Не здійснюючи рішення зворотної задачі формоутворення, можливо встановити які ділянки профілю гвинтової поверхні деталі будуть утворені з відхиленням від номінальної форми. Більше того – можливо встановити величину цього відхилення в чисельній формі.

В даному випадку це точки деталі, яким відповідають сліди q_2 і q_3 , які не є дотичними до загальної огинаючої Θ_Ψ , точніше її ділянки KM .

Раніше було відзначено, що чисельна величина похибки формоутворення, тобто величина відхилення утвореної поверхні від номінальної, визначається як найкоротша відстань від огинаючої Θ_Ψ до відповідного сліду q . У нашому випадку це найкоротша відстань від слідів q_2 та q_3 до точки K .

Слід зазначити, що на відміну всіх методів які існують для визначення сполученої поверхні, запропонована методика дозволяє отримати чисельні результати похибки формоутворення.

2.5.2. Визначення профілю різальної кромки інструмента

У випадку, коли завданням формоутворення є визначення профілю різальної кромки, в якості рухомої поверхні Ω необхідно приймати або передню (Π) або задню (Σ) поверхню різального елемента. Позначатимемо рухомі поверхні відповідно Ω_{Π} або Ω_{Σ} .

Так як практично всі інструменти, що застосовуються для обробки гвинтових поверхонь, мають у своїй конструкції однозначно визначену вісь (зазвичай вісь обертання), то орієнтацію поверхні Ω_{Π} або Ω_{Σ} щодо інструмента доцільно здійснювати відносно цієї осі. В інструментальному виробництві форму різальної кромки прийнято визначати в передній поверхні.

У тому випадку якщо передня поверхня плоска, то її орієнтацію відносно осі обертання інструмента можна задавати двома параметрами:

- найкоротшою відстанню a від площини до осі обертання заданому в торцевому перерізі інструмента;
- кутом між віссю обертання і передньою поверхнею визначеною в будь-якому фіксованому перерізі інструмента, наприклад, в осьовому або торцевому.

Якщо передня поверхня є гвинтовою, її доцільно задавати наступними параметрами:

- вісь W гвинтової поверхні, яка зазвичай збігається з віссю обертання інструмента;
- кроком H , або гвинтовим параметром p гвинтової поверхні;
- формою твірної гвинтової поверхні. У інструментальному виробництві, як правило, це пряма лінія.

Незалежно від форми передньої поверхні, для фіксування її початкового положення у просторі, доцільно визначати деяку базову точку через яку проходить твірна у початковий момент руху рухомий поверхні Ω .

Форма різальної кромки, визначається як огинаюча $\Theta_{П/3}$ до сімейства слідів q перетину гвинтових траєкторій T точок, що належать гвинтовій поверхні, з рухомою поверхнею $\Omega_{П/3}$.

Слід зазначити, що як і для випадку визначення профілю початкової інструментальної поверхні, за характером взаємного розташування слідів q і огинаючої $\Theta_{П/3}$ можна судити про можливі відхилення формоутворення профілю деталі від його номінальної форми, і про чисельну величину цього відхилення.

Практично, визначення профілю різальної кромки можна розглядати, як окремий випадок визначення профілю початкової інструментальної поверхні, при якому рухома поверхня Ω збігається з передньою поверхнею різального елемента.

2.5.3. Визначення профілю деталі за відомої початковою інструментальною поверхнею

У тому випадку, коли завданням формоутворення є визначення профілю гвинтової поверхні деталі, або умов формоутворення гвинтової поверхні, будемо представляти рухому поверхню Ω , площиною пов'язаною з оброблюваною деталлю і здійснює ті рухи, які здійснює деталь в процесі її обробки. Будемо позначати її як Ω_{Δ} .

У цьому випадку поверхня інструмента (початкова інструментальна поверхня) представляється сукупністю траєкторій T точок, що належить різальній кромці³.

Для інструментів створених на базі початкової інструментальної поверхні типу тіла обертання, траєкторії T , що представляють початкову інструментальну поверхню інструмента, будуть колами. У цьому випадку огинаюча Θ_{Δ} до слідів q , які були утворені траєкторіями T_{Δ} на рухомій поверхні Ω_{Δ} , визначатимуть профіль торцевого перерізу гвинтової поверхні деталі.

Розглянемо рис. 2.10 на якому представлено сімейство слідів q_{Ψ} , в рухомій поверхні Ω_{Δ} , при обробці гвинтової поверхні дисковим інструментом. Рухома поверхня Ω_{Δ} збігається з торцевим перерізом деталі. Огинаюча Θ_{Δ} , окреслює профіль гвинтової поверхні у її торцевому перерізі.

³У загальному випадку різальна кромка може бути не тільки плоскою, але і просторовою. Все залежить від типу різального інструменту.

Виділимо на загальній огинальній дві ділянки KL та LM . Ділянка KL огинаючої збігається зі слідом q_1 . Ділянка LM огинаючої є дотичною до слідів q_3 , q_4 і так далі.

Можна стверджувати, що в даному випадку, гвинтова поверхня буде формоутворена точками ППІ, які відповідають слідам q_1 , q_3 , q_4 і так далі. У той же час, слід q_2 не торкається загальної огинаючої Θ_Δ .

Отже, точки початкової інструментальної поверхні відповідні сліду q_2 не братимуть участі в процесі формоутворення. Вони виконують тільки чорнову роботу з видалення припуску.

Якщо розглядати подані сліди q , як сліди вершин дискретних різальних елементів збірного інструменту, можна говорити про величину нерівностей обробленої поверхні рис. 2.11.

У той же час, результати аналізу характеру взаємного розташування слідів q дозволяють вибирати розташування різальних елементів збірного інструменту таким чином, щоб висота нерівностей h не перевищувала допустимої величини $h_{\text{доп}}$. Це можна здійснити кількома способами:

- більш щільним розташуванням різальних елементів. Однак це не завжди можливе;
- розташуванням дискретних різальних елементів у кілька рядів, умовно розділивши їх на чистові та чорнові.

Необхідно також відзначити, що аналізуючи характер розташування слідів q щодо огинаючої Θ_Δ , можна вибрати раціональну величину відстані, на якій необхідно розташувати дискретні різальні елементи збірного інструменту, один від одного.

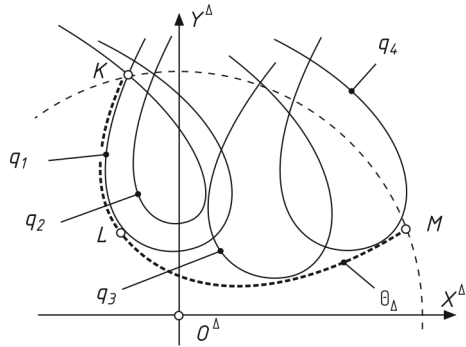


Рис. 2.10. Визначення профілю деталі

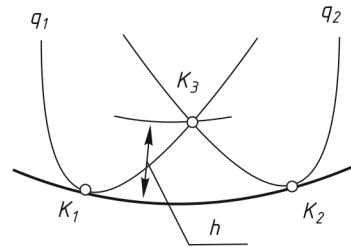


Рис. 2.11. Висота нерівностей

2.5.3.1. Управління якістю формоутворення

Розглянемо рис. 2.12 на якому зображені два варіанти впливу форми слідів q на форму обробленої поверхні.

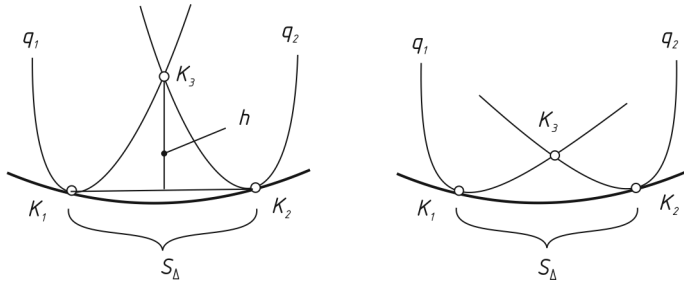


Рис. 2.12. Варіант утворення поверхні

При однаковій відстані s_{Δ} між точками K_1 і K_2 вздовж огинаючої, величина відхилення формоутвореної поверхні від номінальної форми, буде різною. Цю величину можна охарактеризувати критерієм достовірності $\mathfrak{I}$ формоутворення поверхні, чисельна величина якого дорівнює відношенню, довжини дуги s_{Δ} огинаючої між точками K_1 і K_2 , до суми довжин дуг s_{q1} і s_{q2} слідів q_1 та q_2

$$\mathfrak{I} = \frac{s_{\Delta}}{s_{q1} + s_{q2}}. \quad (2.11)$$

З точністю, достатньою для практичного застосування, довжини дуг s_{q1} та s_{q2} можна замінити відрізками відповідних прямих. Тоді при відомих координатах точок $K_1(x_1, y_1)$, $K_2(x_2, y_2)$ і $K_3(x_3, y_3)$, критерій достовірності $\mathfrak{I}$ формоутворення поверхні деталі, можна визначити з трикутника $K_1K_2K_3$ як

$$\mathfrak{I} = \frac{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}{\sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2} + \sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2}}. \quad (2.12)$$

Отже, можна стверджувати, що метод рухомої поверхні, що використовується в роботі, дозволяє встановити ділянки різальних кромок інструмента, які братимуть участь у формоутворенні, а також ті ділянки які будуть здійснювати тільки чорнове видалення припуску. Це в свою чергу дозволяє проектувати інструмент збірної конструкції з різальними елементами, які мають експлуатаційні параметри відповідні

функціональним особливостям конкретної ділянки різальної кромки. Таким чином можна говорити про управління якістю інструменту.

2.6. Чисельне визначення огинаючої

Визначення огинаючої до сімейства слідів q можливо декількома способами. Найбільш простий – це графічна побудова кривої, що плавно торкається всіх слідів q .

Використання ЕОМ і графічних пакетів що оперують з кривими Без'є і підтримують технології "Plag and Draw", дозволяє досить просто побудувати огинаючи, проте вимагає від оператора ЕОМ "ручного керування". Серед графічних пакетів, такого типу, слід відзначити пакет CorelDRAW фірми Corel Corporation⁴, що займає 75% ринку програм графічного спрямування.

Слід вказати, що графічна побудова огинаючої в середовищі пакетів, що підтримують технології Plag and Draw⁵, має ту перевагу, що дозволяє візуально контролювати весь процес пошуку огинаючої, вносячи необхідні корекції безпосередньо в ході вирішення задачі формоутворення. У той же час необхідно брати до уваги, що результат графічної побудови залежить від суб'єктивного візуального сприйняття оператора та його досвіду.

Іншим напрямом визначення огинаючої є аналітичний, коли огинаюча визначається методами диференціальної геометрії та теорії огинаючих. Математична сторона аналітичного визначення огинаючої зараз опрацьована досить повно, проте її практичне застосування надзвичайно важко, оскільки пов'язане з колосальними проблемами математичного характеру, і економічно виправдано тільки при підготовці масового виробництва, та й то не завжди.

У даній роботі пропонуються два способи чисельного визначення координат огинаючої не поступаються за точністю одержуваного результату аналітичним способам, але суттєво перевершували їх за простотою рішення, а саме:

⁴CorelDRAW – графічний редактор векторної графіки, розроблений канадською корпорацією Corel.

У пакет CorelDRAW також входить редактор растрової графіки Corel Photo-Paint та інші програми, наприклад, для захоплення зображень з екрану Corel Capture. Програма векторизації растрової графіки Corel Trace до 12-ї версії входила в пакет як самостійна програма.

⁵Технологія роботи з графічним зображенням. Її особливість полягає в тому, що оператор змінює об'єкт редагування за допомогою візуальних інструментів, таких як курсор мишки.

- визначення координат огинаючої з використання кола;
- визначення координат огинаючої з використання інтерполяції сплайнами.

Необхідно відзначити, що пропонувані чисельні способи визначення огинаючої можуть широко використовувати графічні методи комп'ютерної візуалізації проміжних результатів побудови огинаючої, а відповідно і профілю вихідної інструментальної поверхні. Це вигідно відрізняє їх від традиційних способів розрахункового подання огинаючої набором цифр, що важко піддаються аналізу.

2.6.1. Чисельне визначення огинаючої з використанням кола

Розглянемо метод визначення огинаючої з використання дуги допоміжного кола рис. 2.13. Алгоритм методу наступний⁶:

- вибираємо три, послідовно розташованих, сліди q_{i-1} , q_i і q_{i+1} утворених перетином траєкторій розрахункових точок з рухомою площиною⁷ Ω ;
- на кожному сліді вибираємо по одній, довільно розташованій точці. Позначимо їх відповідно Q_{i-1}^0 , Q_i^0 та Q_{i+1}^0 (нульова ітерація);
- через вибрані точки Q_{i-1}^0 , Q_i^0 та Q_{i+1}^0 провидимо дугу кола і визначаємо положення її центру O_0 ;
- на слідах q_{i-1} , q_i і q_{i+1} знаходимо точки Q_{i-1}^1 , Q_i^1 та Q_{i+1}^1 , які найменш віддалені від центру O_0 кола (перша ітерація);
- через знайдені точки Q_{i-1}^1 , Q_i^1 та Q_{i+1}^1 , проводимо нову дугу кола та визначаємо нове положення центру O_1 кола;
- оцінюємо відстань між центрами O_0 і O_1 кіл, і якщо вона виявиться меншою за задану величину, то за точку, що належить до огинаючої Θ приймаємо центральну точку Q_i^1 на середньому сліді q_i . В іншому випадку, знаходимо нові точки Q_{i-1}^2 , Q_i^2 і Q_{i+1}^2 , найменш віддалені від центру O_1 і повторюємо пошук (друга ітерація).

⁶Реально, це метод послідовних ітерацій, коли рішення знаходять у результаті послідовного виконання тих самих дій.

⁷Загалом у якості рухомої площини може бути прийнята будь-яка поверхня, навіть фасонна. Основною перевагою використання площини є простота математичних рішень. До того ж більшість поверхонь різальних інструментів є площинами або такими, що близькі до них і можуть бути замінені саме площиною.

Послідовно перебираючи, таким чином, усі трійки слідів q , визначаємо точки огинаючої.

Визначимо математичні залежності необхідні знаходження координат центру O кола яка проходить через три розрахункові точки Q_{i-1} , Q_i та Q_{i+1} .

Нехай, в деякій двовимірній системі координат (XY) існують три точки $M_1 : (x_1, y_1)$, $M_2 : (x_2, y_2)$ та $M_3 : (x_3, y_3)$, через які проходить дуга кола. Необхідно визначити координати центру $O : (x_c, y_c)$ цього кола та його радіус R .

Складемо систему рівнянь

$$\begin{cases} f_1 = (x_1 - x_c)^2 + (y_1 - y_c)^2 - R^2 = 0, \\ f_2 = (x_2 - x_c)^2 + (y_2 - y_c)^2 - R^2 = 0, \\ f_3 = (x_3 - x_c)^2 + (y_3 - y_c)^2 - R^2 = 0. \end{cases} \quad (2.13)$$

Вирішуємо рівняння f_1 відносно R

$$R = \sqrt{(x_1 - x_c)^2 + (y_1 - y_c)^2}. \quad (2.14)$$

Вирішуємо рівняння f_2 щодо x_c

$$x_c = \frac{x_1^2 - x_2^2 - 2y_c y_1 + y_1^2 + 2y_c y_2 - y_2^2}{2(x_1 - x_2)}. \quad (2.15)$$

Вирішуємо рівняння f_3 щодо y_c

$$y_c = \frac{K_1}{K_2}, \quad (2.16)$$

де

$$\begin{aligned} K_1 = & x_1^2 + \frac{x_1 x_2^2 + x_1^3 x_3 - x_1^3 - x_2^2 x_3}{x_1 - x_2} - x_3^2 + \\ & + y_1^2 + \frac{x_3 y_1^2 + x_1 y_2^2 - x_1 y_2^2 - x_3 y_2^2}{x_1 - x_2} - y_3^2, \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$K_2 = 2y_1 + \frac{2x_3 y_1 + 2x_1 y_2 - 2x_1 y_1 - 2x_3 y_2}{x_1 - x_2} - 2y_3. \quad (2.18)$$

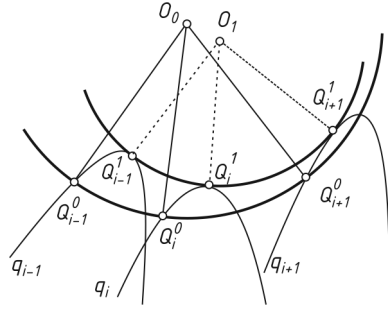


Рис. 2.13. Визначення огинаючої за допомогою кола

Таким чином, підставляючи до отриманих залежностей координати точок Q_{i-1} , Q_i та Q_{i+1} за схемою

$$\begin{aligned}x_1 &= x^{(Q_{i-1})}, & y_1 &= y^{(Q_{i-1})}, \\x_2 &= x^{(Q_i)}, & y_2 &= y^{(Q_i)}, \\x_3 &= x^{(Q_{i+1})}, & y_3 &= y^{(Q_{i+1})}.\end{aligned}\tag{2.19}$$

можна розрахувати координати (x_c, y_c) центру O кола, що проходить через три точки Q_{i-1} , Q_i та Q_{i+1} , а також його радіус R .

Відстань Δ_c між центрами O_i та O_{i+1} можна визначити за залежністю

$$\Delta_c = \sqrt{(x_{c_1} - x_{c_{i+1}})^2 + (y_{c_1} - y_{c_{i+1}})^2}.\tag{2.20}$$

Слід уточнити, що в тому випадку, коли огинаюча звернена опуклою стороною до слідів q , на кожній наступній ітерації необхідно шукати точки на слідах q найменш віддалені від центру O кола.

Однак у тому випадку, коли огинаюча звернена до слідів q своєю увігнутою стороною, то на наступних ітераціях необхідно шукати точка на слідах q найбільш віддалені від центру O кола.

2.6.1.1. Проблеми ітерації

Запропонований спосіб визначення точки огинаючої Q за трьома слідами q_{i-1} , q_i і q_{i+1} має ту перевагу, що не вимагає складних математичних обчислень.

Однак йому притаманний той недолік, що у визначенні точок огинаючої використовуються тільки три сліди. При такому алгоритмі не враховується загальний вигляд огинаючої, в силу цього, спосіб чисельного визначення координат огинаючої за допомогою кола, доцільно використовувати в тих випадках, коли огинаюча носить монотонний характер.

Слід зазначити ще один недолік способу кіл, який має суто математичний характер. У тому випадку, коли огинаюча є лінією близькою до прямої і має незначну кривину, значення радіуса R кола прагне до нескінченності.

У цих умовах отримати відстань між центрами послідовних кіл O_i і O_{i+1} малої величини практично неможливо. У таких випадках ітераційні процеси необхідно припиняти після деякої наперед заданої кількості ітерацій, проте це завжди пов'язане з ризиком отримання помилкових результатів.

2.6.2. Чисельне визначення огинаючої за допомогою сплайну

У загальному випадку, використання сплайну при чисельному визначенні огинаючої до сімейства слідів q , може виконуватися за довільною кількістю реперних точок. У зв'язку з цим будемо розрізняти локальну побудову сплайну, коли кількість слідів q дорівнює трьом, та глобальне при якому огинаюча визначається з урахуванням всіх наявних слідів q досліджуваних траєкторій⁸.

Слід зазначити, що серед всіх кривих інтерполяції, що двічі диференціюються на ділянці $[a, b]$ функцій $\varphi(x)$ тільки інтерполяційна сплайн-функція $s(x)$ дозволяє записати нерівність

$$\int_a^b (s''(x))^2 dx \leq \int_a^b (\varphi''(x))^2 dx. \quad (2.21)$$

Ця властивість дозволяє стверджувати, що інтегральна кривина сплайн-кривої $s(x)$ є найбільш "плавною" серед усіх інтерполяційних функцій $\varphi(x)$. З енергетичної точки зору, сплайн це стрижень вигнутий з найменшою витратою енергії. Отже, можна стверджувати, що сплайн-крива, це найбільш плавна крива, яка проходить через реперні точки.

Локальна сплайн-крива, яка проходить через три точки, визначається багаточленом

$$\begin{aligned} s_{lok}(x) = & \frac{(x_{i+1} - x)^2 (2(x - x_i) + h_i)}{h_i^3} y_i + \\ & + \frac{(x - x_i)^2 (2(x_{i+1} - x) + h_i)}{h_i^3} y_{i+1} + \\ & + \frac{(x_{i+1} - x)^2 (x - x_i)}{h_i} m_i \\ & + \frac{(x - x_i)^2 (x - x_{i+1})}{h_i^3} m_{i+1}, \end{aligned} \quad (2.22)$$

⁸Необхідно підкреслити, що навіть у разі локальної побудови сплайну, за трьома точками (на трьох слідах q), отримана крива істотно відрізнятиметься від дуги кола проведеного через ці ж точки, так як на форму сплайн-кривої впливає не тільки кількість точок, але й характер їхнього взаємного розташування.

де

$$m_i = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h_i},$$
$$h_i = x_{i+1} - x_{i-1}, \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n-1).$$

З наведеної залежності видно, що локальний сплайн розраховують за трьома сусідніми точками Q_{i-1} , Q_i і Q_{i+1} , що належать трьом сусіднім слідам q_{i-1} , q_i і q_{i+1} .

Локальний спосіб сплайн інтерполювання зручний тим, що для його реалізації не потрібно зберігання всіх коефіцієнтів m_i . У той же час він дає дещо меншу точність, ніж при глобальному методі.

Побудова локальної сплайн-кривої доцільна в тих випадках, коли передбачається, що огинаюча буде монотонною, або розрахунки мають попередній характер. В інших випадках необхідно визначати обгинаючу за допомогою глобальної сплайн-кривої, яка є дотичною одночасно до всіх слідів q .

Загалом глобальна сплайн-крива, при нерівномірно розташованих вузлах реперної сітки, визначається багаточленом

$$s(x) = -s_{i-1} \frac{(x - x_i)^2}{6h_i} + s_i \frac{(x_i - x_{i-1})^2}{6h_i} +$$
$$+ \left(\frac{y_i}{h_i} - \frac{s_i h_i}{6} \right) (x_i - x_{i-1}) - \left(\frac{y_{i-1}}{h_i} - \frac{s_{i-1} h_i}{6} \right) (x - x_i), \quad (2.23)$$

де

$$h_i = x_i - x_{i-1}, \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n-1).$$

Коефіцієнти s_i ($i = 0, 1, 2, \dots, n$) сплайну $s(x)$ визначаються з розв'язання системи рівнянь

$$\begin{cases} s_{i-1} \frac{h_i}{6} + s_i \frac{h_i + h_{i+1}}{3} + s_{i+1} \frac{h_{i+1}}{6} = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i}, \\ s_0 = s_n = 0 \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n-1). \end{cases} \quad (2.24)$$

При такій формі представлення сплайна, кількість одночасно вирахованих коефіцієнтів s_i відповідає кількості вузлів реперної сітки⁹.

⁹Недоліком глобального сплайну є потреба в зберіганні значної кількості коефіцієнтів.

Алгоритм чисельного визначення огинаючої із застосуванням сплайн-кривої може бути таким (рис. 2.14).

Етап 1

На кожному сліді q ($q_i; i = 0...n$) вибираємо реперну точку Q , яка є найімовірнішою точкою загальної огинаючої або близької до такої. Отримуємо сімейство реперних точок

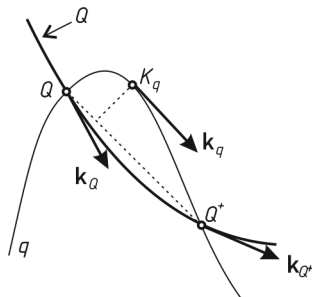


Рис. 2.14. Сплайн-огинаюча

Етап 2

Визначаємо сплайн-криву $s(x)$ яка проходить через вибрані реперні точки Q всього сімейства.

Етап 3

На кожному сліді q визначаємо (знаходимо графічно або аналітично) додаткову точку Q^+ , яка утворена перетином сплайн-кривою $s(x)$ зі слідом q .

Етап 4

На ділянці QQ^+ сплайн-кривої визначаємо точку K_Q із середнім нахилом дотичної k_Q розуміючи під середнім нахилом, середнє значення кута нахилу дотичних на ділянці QQ^+ сплайн-кривої (середнє значення похідної).

Етап 5

На сліді q знаходимо точку K_q у якій дотична k_q до сліду q колінеарна "середньої" дотичної k_Q до сплайн-кривій $s(x)$.

Етап 6

Приймаємо знайдену точку K_q за нове положення реперної точки та визначаємо нову сплайн-криву $s(x)$, яка проходить через цю точку¹⁰.

Процес ітерації повторюється доти, поки не задовольняться задані критеріальні умови¹¹. Остаточна отримана сплайн-крива і буде огинаючою, яка "найбільш плавно" торкається сімейства слідів q .

¹⁰Ці дії виконуємо для всіх слідів q , які досліджуються. Тобто отримуємо нове сімейство реперних точок.

¹¹Що саме має бути прийняте за критерій, вирішує розробник. Зазвичай це або геометричні, або технологічні умови. Інколи критерієм є експлуатаційні умови виробу, але сформулювати їх у математичному вигляді досить важко.

2.6.2.1. Проблеми визначення критерію

Як критерій, який визначає момент припинення ітераційного пошуку сплайн-кривою можна приймати такі параметри (рис. 2.15):

- відстань між точками Q та Q^+ ;
- відстань між точками K та K_q ;
- відстань від точки K_q до прямої лінії, яка з'єднує точки Q та Q^+ ;
- довжина дуги на ділянці сплайн-кривої $s(x)$ між точками Q та Q^+ ;
- довжина ділянки сліду q між точками Q та Q^+ .

Теоретично, вибір будь-якого з перерахованих вище критеріїв припинення ітераційного процесу пошуку сплайн-огинаючої, взаємно інваріантні, що не виключає їх комплексного використання.

Слід зазначити, що визначення додаткових точок Q^+ і точок K_q (K_Q) можна виконувати, як графічно так і аналітично.

Графічне визначення

При графічному визначенні додаткових точок Q^+ взаємного перетину сплайн-кривої $s(x)$ зі слідом q , а також точки K_q торкання дотичної до сліду q можливі два варіанти:

- суто графічні побудови на папері у збільшеному масштабі;
- комп'ютерна візуалізація в середовищі графічних пакетів, коли всі побудови виконують на екрані монітора.

Аналітичне визначення

При аналітичному визначенні точок Q^+ та K_q (K_Q) можливо використання чисельних методів, зокрема сплайн-функцій, які мають безперервну похідну на всій ділянці апроксимації.

2.6.2.2. Висновки

На думку автора, найбільш доцільно використовувати в якості критерію відстань h від точки K_q до прямої лінії, яка з'єднує точки Q і Q^+ (рис. 2.15). Це можна аргументувати тим, що в такому випадку, чисельна величина критерію, досить однозначно характеризує відстань від поточної сплайн-огинаючої $s(x)$ до теоретично точної огинаючої.

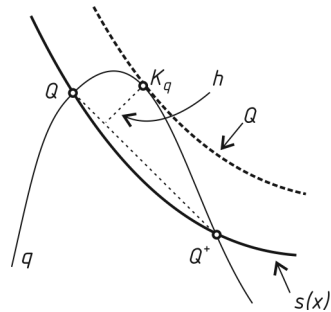


Рис. 2.15. Критерій пошуку огинаючої

2.6.3. Початкова реперна точка

Теоретично, початкове положення реперної точки Q , через яку проходить сплайн-крива огинаючої може бути довільним. Однак, більш доцільним є приймати як реперну, ту точку на сліді q , яка найближче розташована до осі інструмента.

По-перше, це вносить деяку однозначність в критерій вибору початкового розташування реперних точок.

По-друге, це дозволяє вже в нульовому наближенні оцінити форму огинаючої Q , що дозволяє на початковій стадії проектування, виявити можливі порушення умов формоутворення.

На рис. 2.16 представлені окремі випадки обгинаючих проведених через точки, слідів q гвинтових траєкторій, розташованих найближче до осі обертання інструмента. Видно, що повністю реалізувати інструмент неможливо, тому що відбувається його самопідрізання при обертанні навколо осі інструмента.

Отже, подальші дії щодо уточнення профілю початкової інструментальної поверхні не мають сенсу, і необхідно коригувати схему формоутворення.

Описані результати, попереднього аналізу форми огинаючої, проведеної через точки найбільш близькі до осі інструмента, є однією з переваг пропонованої теорії формоутворення гвинтових поверхонь.

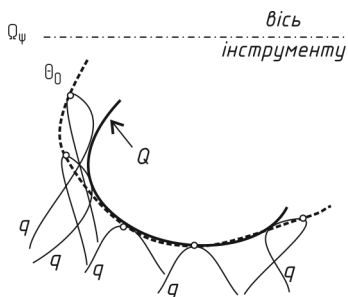


Рис. 2.16. Початкова реперна точка

2.6.4. Додаткова реперна точка

Відповідно до викладеної вище методики визначення сплайн-кривої, що є огинаючою (дотичною) до слідів q , необхідно знати положення додаткової реперної точки Q^+ . Найбільш просто додаткова реперна точка Q^+ може бути визначена, як точка перетину сліду q і сплайн-огинаючої¹².

¹²Це можна здійснити при візуалізації цих кривих у середовищі таких пакетів як MathSoft Axum, SPSS sigmaPlot, ALTEIR HYPERGRAPH, COHORT COPLOT, Colden Software Grapher інших. Ці пакети дозволяють візуально контролювати положення додаткової реперної точки Q^+ , а її координати можна визначити безпосередньо з екрана монітора і, відповідно до цього, перевірити форму огинаючої Q .

У той же час, можливе і чисельне визначення координат додаткової реперної точки, використовуючи наступний алгоритм (рис. 2.17).

Етап 1

На кожному сліді q , перетину траєкторії T розрахункової точки з рухомою поверхнею Ω , як початок для пошуку положення додаткової реперної точки Q^+ , приймаємо основну¹³ реперну точку Q . Позначимо її Q_0 .

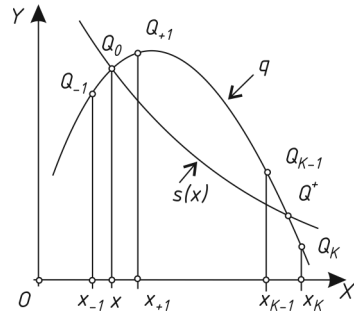


Рис. 2.17. Додаткова реперна точка

Етап 2

Визначаємо сплайн-функцію $s_0(x)$, яка проходить через реперні точки Q_0 всіх слідів q і описує сплайн-огинаючу початкового наближення.

Етап 3

Для точок Q_{-1} та Q_{+1} сліду q визначаємо значення їх координат. Вони відомі, оскільки по них будували сліди q ;

Етап 4

Для сплайн-кривої $s_0(x)$, що описує сплайн-огинаючу θ , розраховуємо значення функції $y_{-1} = s_0(x_{-1})$ та $y_{+1} = s_0(x_{+1})$.

Етап 5

Попарно порівнюємо значення координат для сліду q і сплайн-кривої θ в точках x_{-1} і x_{+1} .

Етап 6

За подальший напрямок пошуку додаткової реперної точки Q^+ приймаємо той напрямок, у якому виконується умова $y_q > y_s$. тобто координата y_q сліду q виявилася більшою за координату y_s сплайн-кривої $s_0(x)$ яку шукають¹⁴.

¹³Доцільно приймати за таку точку ту точку за якою побудовано сплайн-криву, тобто звичайну розрахункову точку яка і найближчою до осі обертання інструмента. Математично це можна здійснити досить простими методами звичайного перебору послідовних координат розрахункових точок.

¹⁴Цю операцію можливо автоматизувати математичними методами, що значно спрощує розв'язання задачі пошуку огинуючої. На практиці цей етап є вирішальним для тому доцільно приділити його реалізації достатню увагу.

Етап 7

Послідовно здійснюємо рух уздовж сліду q за його точками Q , доки умова $y_q > y_s$ не буде порушена. Точку в якій відбулося порушення умови $y_q > y_s$ позначимо як Q_K (кінцева).

Етап 8

Ділянку сліду q між точками Q_{K-1} і Q_K інтерполюємо поліномом, або новим сплайном $s_q(x)$ і на відрізку $[x_{K-1}; x_K]$ чисельним способом здійснюємо пошук додаткової реперної точки Q^+ .

Слід зазначити, що пошук додаткової реперної точки Q^+ з використанням інтерполяційних поліномів або сплайнів, досить складний. При цьому потрібно враховувати, що в кінцевому рахунку результат визначення огинаючої значною мірою залежить від щільності розташування розрахункових точок на сліді q . Більше того, саме густина розташування цих точок надає найбільший вплив на похибку визначення огинаючої Θ .

У загальному випадку, можлива апроксимація сплайнами не тільки огинаючої Θ , але і всіх слідів q . Однак доцільніше збільшити кількість розрахункових точок, якими побудовані сліди q , перетину траєкторій T з рухомою поверхнею Ω .

Досить простий, але не менш надійний спосіб визначення положення додаткової реперної точки Q^+ , можна отримати виходячи з наступних міркувань.

Якщо відрізки кривих сліду q і сплайн-кривої $s(x)$, розташовані на відрізку $[x_{K-1}; x_K]$, замінити прямими лініями за рис. 2.18, тоді можливо записати таке співвідношення

$$\frac{y_{Q_{K-1}} - s(x_{K-1})}{s(x_K) - y_{Q_K}} = \frac{x_{Q^+} - x_{K-1}}{x_K - x_{Q^+}}. \quad (2.25)$$

Звідки отримуємо

$$x_{Q^+} = \frac{mem_1}{mem_2}, \quad (2.26)$$

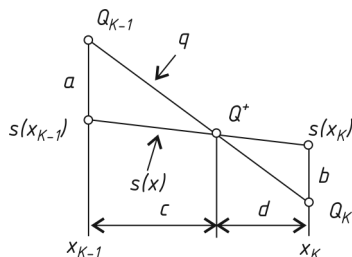


Рис. 2.18. Координати додаткової реперної точки

$$\begin{aligned}
mem_1 &= s(x_{K-1})x_K - x(x_K)x_{-1} + s(x_{K-1})x_{Q^+} + \\
&\quad + x_{K-1}y_{Q_K} - x_{Q^+}y_{Q_K} - x_Ky_{Q_{K-1}}, \\
mem_2 &= s(x_{K-1}) - y_{Q_{K-1}}.
\end{aligned}$$

Отримані таким способом значення координат x_{Q^+} додаткової реперної точки Q^+ , підставляють в рівняння сплайн-функції $s(x_{Q^+})$ і розраховують положення точки Q^+ . Можна стверджувати, що при даному способі визначення додаткової реперної точки Q^+ , її положення мало відрізнитиметься від теоретично точного, особливо при досить великій кількості розрахункових точок, за якими побудовані сліди q .

2.6.5. Проблеми пошуку огинаючої

Раніше було зазначено, що на кожному наступному кроці ітераційного процесу пошуку огинаючої Θ , в якості нової реперної точки приймається точка K_q в якій нахил дотичної k_q збігається із середнім нахилом дотичних k до огинаючої Θ , на ділянці між основною Q і додатковою Q^+ сплайн-кривою.

Можна припустити, що з теоретичної точки зору, таке рішення є найточнішим. Однак на практиці його досить складно реалізувати, особливо в тих випадках, коли крива q має петлеподібну форму, характерну для обробки гвинтових поверхонь, наприклад за рис. 2.19.

У цьому випадку на інтервалі від x_1 до x_2 одна і та ж координата x відповідає двом точкам на сліді q , що не дозволяє описати слід одним інтерполяційним поліномом або сплайном. Теоретично, це утруднення можна обійти, виділивши на сліді кілька ділянок. Однак, здійснити це практично не представляється реальним, через значну громіздкість.

Розглянемо положення двох огинаючих. Перша огинаюча Θ_0 проведена через реперні точки Q , і Q^+ . Друга, теоретично точна огинаюча Θ , яка дотична до сліду q .

Можна стверджувати, що в цьому випадку відстань між точкою торкання K_q та огинаючою Θ_0 має бути найбільшою. Отже,

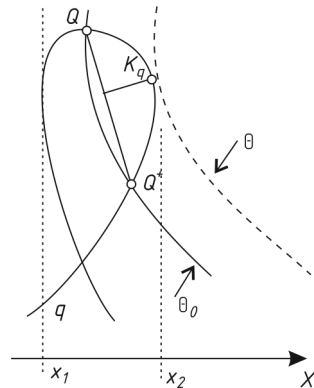


Рис. 2.19. Слід подібний до петлі

як реперну точку, на кожному наступному кроці ітераційного процесу пошуку огинаючої, можливо приймати точку K_q сліду q яка буде найбільш віддаленою від сплайн-кривої огинаючої Θ_0 .

Якщо врахувати ітераційний характер визначення огинаючої, в основу якого покладено поступове (покрокове) наближення до шуканого рішення, то як точка K_q , що приймається за реперну на наступному ітераційному кроці, можна брати точку сліду q найбільш віддалену від прямої, яка з'єднує основну Q і додаткову Q^+ реперні точки.

Якщо вважати відомими координати точок Q , Q^+ і K_q (тобто точок сліду q якими вони побудовані), то в трикутнику QQ^+K_q можна визначити його висоту h . Використовуючи теорему косинусів та виконавши деякі перетворення, можна визначити висоту h

$$h = \frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{c}, \quad (2.27)$$

$$c = \sqrt{(x_Q - x_{Q^+})^2 + (y_Q - y_{Q^+})^2}, \quad (2.28)$$

$$b = \sqrt{(x_K - x_Q)^2 + (y_K - y_{Q^+})^2}, \quad (2.29)$$

$$a = \sqrt{(x_K - x_{Q^+})^2 + (y_K - y_Q)^2}, \quad (2.30)$$

$$p = \frac{a + b + c}{2}. \quad (2.31)$$

Виконавши перебір точок сліду q , якими він побудований на відрізку $\overline{QK_q}$, розраховуємо ряд значень висот h . Ту точку, на для якої висота h трикутника буде найбільшою $h = h_{\max}$, приймаємо як нову реперну точку для наступного ітераційного кроку, пошуку огинаючої до сімейства слідів q .

2.6.6. Критичні випадки визначення огинаючої

Розглянемо взаємне розташування слідів q і огинаючих зображене на рис. 2.20. Такий тип слідів q виникає на ділянках профілю початкової інструментальної поверхні, які мають значний нахил щодо осі обертання інструмента.

При такому розташуванні слідів можливо не здійснювати пошук додаткової точки Q^+ , а прийняти замість неї точку Q_S , тобто сусідню реперну

точку на сусідньому сліді q . У цьому випадку відпадає необхідність у досить складному пошуку додаткової точки.

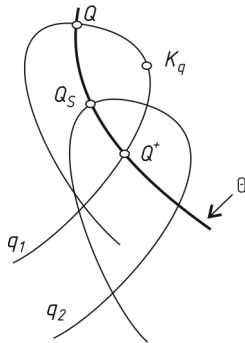


Рис. 2.20. Сусідні сліди

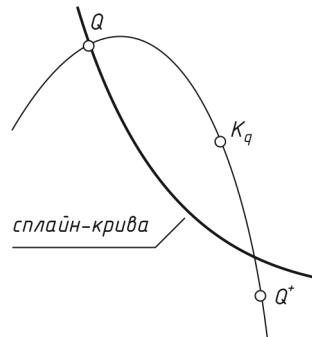


Рис. 2.21. Одиночний слід

Точку K_q найбільш віддалену від прямої лінії $\overline{QQ_s}$, можна визначити послідовним обчисленням величини h для точок сліду q за залежностями:

$$h = \frac{C_2^2 + C_1^2 - C_3^2}{2C_1}, \quad (2.32)$$

$$C_1 = \sqrt{(x_Q - x_{Q_s})^2 + (y_Q - y_{Q_s})^2}, \quad (2.33)$$

$$C_2 = \sqrt{(x_K - x_Q)^2 + (y_K - y_Q)^2}, \quad (2.34)$$

$$C_3 = \sqrt{(x_K - x_{Q_s})^2 + (y_K - y_{Q_s})^2}. \quad (2.35)$$

Відповідно до запропонованої методики побудови огинаючої Θ , як реперна точка Q на кожному кроці приймається точка сліду q , координати якої відомі (по них будується слід q). У цьому випадку в кінці ітераційного процесу пошуку огинаючої, можливий варіант за рис. 2.21, коли між основною реперною точкою Q і додатковою Q^+ розташована тільки одна проміжна реперна точка сліду q .

У цьому випадку, не має сенсу проводити якісь розрахунки, і достатньо прийняти цю точку за точку контакту огинаючої Θ з розглянутим слідом q .

2.6.6.1. Кінцева точка огинаючої

У тих випадках, коли на останньому ітераційному кроці пошуку огинаючої додаткова точка Q^+ виявляється на сусідньому сусідньому з основною реперною точкою (рис. 2.22) можливо два варіанти закінчення ітераційного процесу.

Варіант 1

Припинити подальші ітерації пошуку огинаючої і прийняти точку Q як точку торкання огинаючої Θ з даним слідом q .

Варіант 2

Уточнити положення точки K_q дотику сліду q та огинаючої Θ і продовжити ітераційний пошук.

Уточнення положення точки K_q на останньому етапі ітераційного процесу можна виконати провівши через три останні розрахункові точки сліду коло.

Таким чином кінцева частина сліду буде штучно подовжена на деяку величину, одночасно зберігши загальний характер кривої.

Це можна здійснити, як суто графічно, так і математично. У будь-якому випадку це можна виконати в такій послідовності.

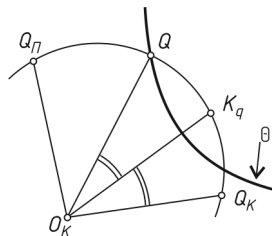


Рис. 2.22. Кінцева точка

Етап 1

На сліді q по обидві сторони від реперної точки Q вибираємо по одній сусідній точці, позначимо їх точками Q_P (попередня) та Q_K (кінцева).

Етап 2

Через три точки Q , Q_P і Q_K проводимо коло та визначаємо положення його центру $O_c(x_c, y_c)$ та значення радіуса r .

Етап 3

Як точку K_q останнього ітераційного кроку приймаємо точку, котра лежить на дузі кола радіуса r і ділить дугу QQ_K навпіл.

Координати центру $O_c(x_c, y_c)$ та значення радіуса r можна визначити за залежностями:

– координати y_c та x_c центру кола:

$$y_c = \frac{C_1}{C_2}, \quad (2.36)$$

$$C_1 = x_{Q\Pi}^2 + \frac{x_{Q\Pi}x_Q^2 + x_{Q\Pi}^3x_K - x_{Q\Pi}^3 - x_Q^2x_{QK}}{x_{Q\Pi} - x_Q} - x_{Q\Pi}^2 + \\ + y_{Q\Pi}^2 + \frac{x_Q^2y_{Q\Pi}^2 + x_{Q\Pi}y_Q^2 - x_{Q\Pi}y_{Q\Pi}^2 - x_{QK}y_Q^2}{x_{Q\Pi} - x_Q} - y_{QK}^2, \quad (2.37)$$

$$C_2 = 2y_{Q\Pi} + \frac{2x_{QK}y_{Q\Pi} + 2x_{Q\Pi}y_Q - 2x_{Q\Pi}y_{Q\Pi} - 2x_{QK}y_Q}{x_{Q\Pi} - x_Q} - 2y_{QK}, \quad (2.38)$$

$$x_c = \frac{x_{Q\Pi}^2 - x_Q^2 - 2y_c y_{Q\Pi} + y_{Q\Pi}^2 + 2y_c y_Q - y_Q^2}{2(x_{Q\Pi} - x_Q)}. \quad (2.39)$$

– радіус r кола

$$r = \sqrt{(x_Q - x_c)^2 + (y_Q - y_c)^2}. \quad (2.40)$$

У той же час, необхідно відзначити, що найбільш доцільним при знаходження кінцевої точки ітераційного процесу визначення огинаючої, є збільшення кількості розрахункових точок на сліді q .

2.6.6.2. Порушення умов формоутворення

Розглянуті вище випадки відносяться до визначення огинаючої Θ , коли виконуються всі умови формоутворення і всі сліди q , залишені розрахунковими точками на рухомій площині Ω , є дотичними до огинаючої Θ .

Однак, у тому випадку, коли на ділянці профілю не виконуються умови формоутворення, застосування розглянутої методики пошуку огинаючої не забезпечує необхідного результату.

Розглянемо рис. 2.23. В даному випадку визначення профілю початкової

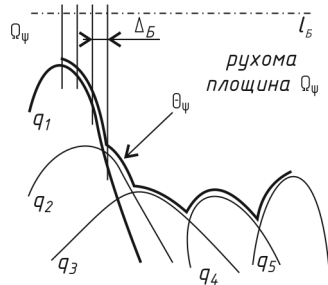


Рис. 2.23. Порушення умов формоутворення

інструментальної поверхні, як огинаючої до всіх слідів неможливе, так як частина слідів перекриває один одного. Тому необхідно застосовувати наступну послідовність операцій.

Етап 1

Вибирають базову лінію l_B , яка досить віддалена від передбачуваної огинаючої Θ , зазвичай це вісь обертання інструмента.

Етап 2

Базову лінію розбивають по довжині на ряд послідовно розташованих ділянок, фіксованої довжини l_B .

Етап 3

Для кожної ділянки Δ_B визначають точки слідів q , які розташовані ближче за всіх щодо базової лінії.

Етап 4

Отримане сімейство "найближчих" точок приймають за перше наближення огинаючої (на рис. 2.23 виділена товстою лінією).

Подальше уточнення огинаючої можна проводити за викладеною вище методикою.

Слід зазначити, що запропонована в роботі теорія формоутворення гвинтових поверхонь дозволяє здійснювати візуальний комп'ютерний контроль характеру розташування слідів q , перетину траєкторій розрахункових точок і рухомої поверхні Ω , що дозволяє візуально контролювати процес побудови огинаючої Θ .

2.7. Заміна теоретично точної огинаючої часиною дуги кола

Огинаючу отриману як сплайн-криву $s(x)$, можна розглядати теоретично точною. У той же час, при виготовленні інструменту, виходячи з технологічних умов, доцільно замінити теоретично точну огинаючу однією або декількома дугами кола.

Отримана розрахунковим шляхом огинаюча представляється масивом точок, координати яких відомі з попередніх розрахунків. Розглянемо їх у двовимірній системі координат (XY). Виконати заміну ряду точок частиною дуги можна декількома способами, проте найчастіше це спосіб спільного розв'язання рівнянь або спосіб найменших квадратів. Слід

вказати, що за досить великої кількості розрахункових точок обидва способи дають практично однакові результати.

Розглянемо способи заміни розрахункової кривою частиною дуги кола. Цей спосіб поділяється на два варіанти вирішення:

- почергове вирішення групи систем рівнянь з подальшим усередненням результатів;
- одночасне вирішення всієї сукупності рівнянь без наступного усереднення результатів.

2.7.1. Послідовне вирішення системи рівнянь

Розглянемо метод послідовного розв'язання групи рівнянь з наступним усередненням результатів. Нехай розрахункова крива (огинаюча) задана масивом координат $(x_i; y_i) : (i = 0 \dots n)$. У загальному випадку рівняння кола можна записати у вигляді

$$(x_i - x_c)^2 + (y_i - y_c)^2 = r^2, \quad (2.41)$$

де x_i, y_i – поточні координати точок, що належить до кола;

x_c, y_c – координати центру кола;

r – радіус кола.

Дане рівняння містить три невідомі параметри x_c, y_c і r , тому для їх знаходження необхідно вирішити систему з трьох рівнянь

$$\begin{cases} (x_1 - x_c)^2 + (y_1 - y_c)^2 = r^2, \\ (x_2 - x_c)^2 + (y_2 - y_c)^2 = r^2, \\ (x_3 - x_c)^2 + (y_3 - y_c)^2 = r^2. \end{cases} \quad (2.42)$$

Послідовно вирішуючи наведену систему рівнянь, отримаємо наступні залежності параметрів, що входять до неї

$$y_c = \frac{-x_2^2 x_3 + x_1^2 (x_3 - x_2) + x_1 (x_2^2 - x_3^2 + y_2^2 - y_1^2) + x_2 (x_3^2 - y_1^2 + y_3^2)}{2 (x_3 (y_1 - y_2) + x_1 (y_2 - y_3) + x_2 (y_3 - y_1))}, \quad (2.43)$$

$$x_c = \frac{x_1^2 - x_2^2 - 2y_c y_1 + y_1^2 + 2y_c y_1 - y_1^2}{2 (x_1 - x_2)}, \quad (2.44)$$

$$r = \sqrt{(x_1 - x_c)^2 + (y_1 - y_c)^2}. \quad (2.45)$$

Отримані параметри x_c , y_c та r характеризують коло, яке проходить тільки через три вибрані точки. Для того, щоб отримати параметри кола, яке проходить через весь масив точок розрахункової кривої, необхідно:

- розбити всі розрахункові точки на групи по три точки¹⁵;
- для кожної групи розрахункових точок, знайти параметри кола, що проходить через них;
- отримані значення розрахункових параметрів, усереднити та прийняти за остаточні.

Розглянутий спосіб зручний тим, що не містить складних обчислень та може бути реалізований у цехових умовах виробництва.

2.7.2. Глобальне вирішення системи рівнянь

Спосіб глобального вирішення систем рівнянь, дозволяє визначити параметри кола що замінює криву одночасно, по всіх розрахункових точках кривої при вирішенні системи з трьох рівнянь

$$\begin{cases} f_1(x_i; y_i; x_c; y_c; r) = 0 & (i = 1 \dots n), \\ f_2(x_i; y_i; x_c; y_c; r) = 0 & (i = 1 \dots n), \\ f_3(x_i; y_i; x_c; y_c; r) = 0 & (i = 1 \dots n). \end{cases} \quad (2.46)$$

де функції f_1 , f_2 та f_3 мають наступні значення:

$$\begin{aligned} f_1 = & -2 \sum_{i=1}^n x_i^3 + 6 \sum_{i=1}^n x_i^2 x_c - 6 \sum_{i=1}^n x_i x_c^2 + n 2 x_c^3 - 2 \sum_{i=1}^n y_i^2 x_i + \\ & + 2 \sum_{i=1}^n y_i^2 x_c + 4 y_c \sum_{i=1}^n x_i y_i - 4 \sum_{i=1}^n y_i y_c x_c - \\ & - 2 \sum_{i=1}^n y_c^2 x_i + 2 n y_c^2 x_c + 2 r^2 \sum_{i=1}^n x_i - 2 n r^2 x_c, \end{aligned} \quad (2.47)$$

¹⁵При цьому групування точок може бути довільним з частковим одночасним повторенням, тобто групувати можна будь-які точки, але все ж таки бажано у розумних межах таким чином щоб вибрані точки більш-менш описувались одним колом.

$$\begin{aligned}
f_2 = & -2 \sum_{i=1}^n x_i^2 y_i + 2 \sum_{i=1}^n x_i^2 y_c + 4 \sum_{i=1}^n x_i y_i x_c - 4 \sum_{i=1}^n x_i x_c y_c - \\
& - 2x_c^2 \sum_{i=1}^n y_i + 2nx_c^2 y_c + 6 \sum_{i=1}^n y_i y_c^2 + \\
& + 2ny_c^3 + 2r \sum_{i=1}^n y_i - 2nr^2 y_i, \quad (2.48)
\end{aligned}$$

$$f_3 = \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2 \sum_{i=1}^n x_i x_c + nx_c^2 + \sum_{i=1}^n y_i^2 - 2 \sum_{i=1}^n y_i y_c + ny_c^2 - nr^2. \quad (2.49)$$

Отримані параметри x_c , y_c і r відповідають описують коло, яке проходить через базові розрахункові точки з найменшою похибкою.

У тому випадку, коли координати центру кола відомі або задані (наприклад, вісь інструмента), радіус r змінного кола можна визначити як

$$r = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 - 2 \sum_{i=1}^n x_i x_c + nx_c^2 + \sum_{i=1}^n y_i^2 - 2 \sum_{i=1}^n y_i y_c + ny_c^2}{n}}. \quad (2.50)$$

Для того, щоб у явному вигляді визначити математичні залежності для обчислення параметрів x_c , y_c і r кола, яке замінює всю сукупність розрахункових точок кривої одночасно, будемо використовувати метод найменших квадратів. Запишемо рівняння кола у вигляді

$$(x_i - x_c)^2 + (y_i - y_c)^2 = r^2. \quad (2.51)$$

Тоді шукана функція методу найменших квадратів¹⁶ набуде вигляду

$$f = \left(\left(\sum_{i=1}^n x_i - x_c \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n y_i - y_c \right)^2 - r^2 \right) = 0. \quad (2.52)$$

¹⁶Метод найменших квадратів (МНК) - математичний метод, що застосовується для вирішення різних завдань, що базуються на мінімізації суми квадратів відхилень деяких функцій від експериментальних вхідних даних. Він може використовуватися для «вирішення» перевизначених систем рівнянь (коли кількість рівнянь перевищує кількість невідомих), для пошуку рішення у разі звичайних (не перевизначених) нелінійних систем рівнянь, для апроксимації точкових значень певної функції.

Виконавши диференціювання рівняння $f = 0$ за параметрами x_c , y_c і r отримаємо систему рівнянь

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_c} = nr^2 - r \sum_{i=1}^n x_i^2 + 2rx_c \sum_{i=1}^n x_i - nrx_c^2 - \\ - r \sum_{i=1}^n y_i^2 + 2ry_c \sum_{i=1}^n y_i - ny_c^2 = 0. \end{aligned} \quad (2.53)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y_c} = r^2 \sum_{i=1}^n x_i - \sum_{i=1}^n x_i^3 - nr^2 x_c + 3x_c \sum_{i=1}^n x_i^2 - 3x_c^2 \sum_{i=1}^n x_i + \\ + nx_c^3 - \sum_{i=1}^n (x_i + y_i^2) + x_c \sum_{i=1}^n y_i^2 + 2y_c \sum_{i=1}^n (x_i - y_i) - \\ - 2x_c y_c \sum_{i=1}^n y_i - y_c^2 \sum_{i=1}^n x_i + nx_c y_c^2 = 0. \end{aligned} \quad (2.54)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial r} = r^2 \sum_{i=1}^n y_i - \sum_{i=1}^n (y_i + x_i^2) + 2x_c \sum_{i=1}^n (y_i + x_i) - x_c^2 \sum_{i=1}^n y_i - \\ - \sum_{i=1}^n y_i^3 + nr^2 y_c + y_c \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2x_c y_c \sum_{i=1}^n x_i + \\ + nx_c^2 y_c + 3y_c \sum_{i=1}^n y_i^2 - 3y_c^2 \sum_{i=1}^n y_i + ny_c^3 = 0. \end{aligned} \quad (2.55)$$

Вирішивши цю систему рівнянь, отримаємо формули для визначення шуканих параметрів x_c , y_c і r кола, яке найкращим чином¹⁷ проходить через масив точок $x_i, y_i : (i = 1 \dots n)$.

Отже, координата x_c центру кола що проходить через масив точок $(x_i; y_i : (i = 1 \dots n))$ кривої яку воно замінює

$$x_c = \frac{K_1}{K_2},$$

¹⁷Треба враховувати, що коло параметри якого визначені за методом найменших квадратів може взагалі не проходити через жодну точку розрахункової кривої. Але сума квадратів відхилень (похибок) заміни буде мінімальною.

де K_1 та K_2 коефіцієнти, які мають такі значення

$$\begin{aligned}
K_1 = & n \sum_{i=1}^n y_i x_i^2 \sum_{i=1}^n y_i x_i - \sum_{i=1}^n x_i^2 \sum_{i=1}^n y_i \sum_{i=1}^n y_i x_i - \sum_{i=1}^n y_i \sum_{i=1}^n y_i x_i \sum_{i=1}^n y_i^2 + \\
& + \sum_{i=1}^n x_i^3 \left(\left(\sum_{i=1}^n y_i \right)^2 - n \sum_{i=1}^n y_i^2 \right) + \left(\sum_{i=1}^n y_i \right)^2 \sum_{i=1}^n y_i x_i^2 - \\
& - n \sum_{i=1}^n y_i^2 \sum_{i=1}^n x_i y_i^2 + n \sum_{i=1}^n y_i x_i \sum_{i=1}^n y_i^3 + \\
& + \sum_{i=1}^n x_i \left(- \sum_{i=1}^n y_i x_i^2 \sum_{i=1}^n y_i + \sum_{i=1}^n x_i^2 \sum_{i=1}^n y_i^2 \right) + \\
& + \sum_{i=1}^n x_i \left(\left(\sum_{i=1}^n y_i^2 \right)^2 - \sum_{i=1}^n y_i \sum_{i=1}^n y_i^3 \right), \quad (2.56)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_2 = & -4 \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i \sum_{i=1}^n x_i y_i + 2n \left(\sum_{i=1}^n x_i y_i \right)^2 + \\
& + 2 \left(\sum_{i=1}^n x_i y_i \right)^2 \sum_{i=1}^n y_i^2 + 2 \sum_{i=1}^n x_i^2 \left(\left(\sum_{i=1}^n y_i \right)^2 - n \sum_{i=1}^n y_i^2 \right). \quad (2.57)
\end{aligned}$$

Координата y_c центру кола що проходить через масив точок кривої яку воно замінює

$$\begin{aligned}
y_c = & \frac{2x_c \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 - \sum_{i=1}^n x_i \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{i=1}^n y_i^2 \right)}{-2 \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i + 2n \sum_{i=1}^n y_i x_i} + \\
& + \frac{n \left(-2x_c \sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{i=1}^n x_i^3 + \sum_{i=1}^n y_i^2 x_i \right)}{-2 \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i + 2n \sum_{i=1}^n y_i x_i}. \quad (2.58)
\end{aligned}$$

Радіус r кола, що описує криву

$$r = \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{nx_c^2 + ny_c^2 - 2x_c \sum_{i=1}^n x_i + \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2y_c \sum_{i=1}^n y_i + \sum_{i=1}^n y_i^2}. \quad (2.59)$$

Отримані рівняння дозволяють безпосередньо визначити значення параметрів x_c , y_c та r замінного кола. При цьому, положення центру кола завжди розташоване з увігнутого боку кривої, яка замінюється дугою кола.

Профіль різальних кромek інструменту, для формоутворення гвинтових поверхонь, зазвичай неможливо описати однією дугою без значної похибки.

У цьому випадку криву, яка підлягає заміні дугою, замінюють частинами кількох дуг, які повинні з'єднуватися плавно без перегину (рис. 2.24).

Це виконується у разі якщо точка K з'єднання двох сусідніх дуг r_1 і r_2 та їх центрів O_1 та O_2 розташовані однієї прямої.

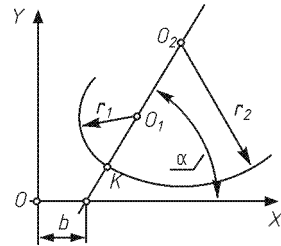


Рис. 2.24. Пос'єднання дуг

Заміна кривої сукупністю дуг декількох кіл може бути виконана в декілька послідовних етапів.

Етап 1

Визначають координати центру (x_{c_1}, y_{c_1}) та радіус r_1 крайньої ділянки кривої яку необхідно подовжити.

Етап 2

Вибираємо положення точки K майбутнього з'єднання дуг. Бажано щоб це була не остання розрахункова точка кривої.

Етап 3

Розраховуємо значення коефіцієнтів рівняння прямої, яка проходить через точки K та O_1 . Це можна зробити, адже положення центру O_1 та вибраної на попередньому етапі точки K відомо.

Етап 4

Вирішивши спільно рівняння прямої, яка проходить через точки K і O_1 та рівняння кола r_2 , визначаємо параметри сусіднього кола, що продовжує заміну кривої.

Рівняння прямої, яка проходить через точки K та O_1 можна записати у вигляді

$$y = (x - b) \operatorname{tg} \alpha, \quad (2.60)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y_{c1} - y_K}{x_K - y_{c1}}, \quad (2.61)$$

$$b = x_{c1} - \frac{y_{c1}}{\operatorname{tg} \alpha}. \quad (2.62)$$

Рівняння кола радіуса r з координатами центру $O_2(x_{c2}, y_{c2})$ можна записати у вигляді

$$(x - x_{c2})^2 + (y - (y_{c2} - b) \operatorname{tg} \alpha)^2 = r^2. \quad (2.63)$$

Розв'язавши систему рівнянь

$$\begin{cases} r_2^2 = (x_1 - x_{c2})^2 + (y_1 - (x_{c2} - b) \operatorname{tg} \alpha)^2, \\ r_2^2 = (x_2 - x_{c2})^2 + (y_2 - (x_{c2} - b) \operatorname{tg} \alpha)^2, \end{cases}$$

отримуємо залежності, які визначають значення радіуса r_2 та координати (x_{c2}, y_{c2}) центру другого замінного кола r_2 , дуга якого плавно з'єднується з дугою попереднього кола r_1 , в саме

$$r_2 = \sqrt{(x_1 - x_{c2})^2 + (y_1 - (y_{c2} - b) \operatorname{tg} \alpha)^2}, \quad (2.64)$$

$$x_{c2} = \frac{x_1^2 - x_2^2 + y_1^2 - y_2^2 + 2by_1 \operatorname{tg} \alpha - 2by_2 \operatorname{tg} \alpha}{2(x_1 - x_2 + y_1 \operatorname{tg} \alpha - y_2 \operatorname{tg} \alpha)}, \quad (2.65)$$

$$y_{c2} = (x_{c2} - b) \operatorname{tg} \alpha. \quad (2.66)$$

Послідовно перебираючи ділянки кривої, що підлягає апроксимації, підбираємо ряд замінних кіл, які плавно переходять одне в інше без утворення особливих точок на загальній кривій.

2.8. Загальна методика способу рухомої площини при формоутворенні гвинтових поверхонь

Раніше було зазначено, що спосіб рухомої поверхні можна використовувати при вирішенні трьох типів задач формоутворення:

- визначення початкової інструментальної поверхні;

- визначення профілю різальної кромки інструмента;
- визначення профілю деталі та дослідження умов формоутворення за відомої початковою інструментальною поверхнею.

Сформулюємо послідовність розв'язання кожної з цих задач орієнтуючись на чисельні методи, викладені в попередніх розділах.

2.8.1. Послідовність визначення початкової інструментальної поверхні

Вихідними даними визначення профілю вихідної інструментальної поверхні є:

- координати розрахункових точок торцевого перерізу гвинтової поверхні, виражені в полярній системі радіус-вектором ρ та полярним кутом δ ;
- кут ε між осями інструмента та деталі;
- найкоротша відстань m між осями інструмента та деталі.

Послідовність визначення профілю початкової інструментальної поверхні методом рухомої площини може бути такою.

Етап 1

Орієнтуємо рухому поверхню (зазвичай це площина) таким чином, щоб вона проходила через вісь обертання інструмента.

Етап 2

На торцевому профілі гвинтової поверхні, вибираємо ряд розрахункових точок M_T з відомими параметрами ρ та δ . У результаті маємо масив розрахункових точок, що описують форму (профіль) торцевого перерізу гвинтової поверхні.

Етап 3

Для кожної розрахункової точки M_T торцевого профілю, розраховуємо координати сліду q , як сукупності точок перетину гвинтової траєкторії T точки M_T з рухомою поверхнею Ω .

Етап 4

Створюємо масив значень координат слідів q . Графічно це є сімейство кривих (сімейство кривих q) на рухомій площині Ω .

Етап 5

Розбиваємо вісь інструмента на дискретні ділянки рівної довжини. Їхня кількість залежить від складності профілю проєктованого інструмента і зазвичай знаходиться в межах 20...50 ділянок.

Етап 6

Для кожного інтервалу осі інструмента, знаходимо ту точку з усіх слідів q , що потрапляють у цей інтервал, яка розташована найближче до осі інструмента. Сукупність цих точок для всіх інтервалів приймаємо за початкове наближення профілю огинаючої шуканого профілю початкової інструментальної поверхні. Тобто приймаємо за перше (початкове) наближення початкової інструментальної поверхні.

Етап 7

На кожному сліді q , початкового наближення огинаючої Θ , знаходимо точки Q , які розташовані найближче до осі інструмента. Знайдені точки є основними реперними точками для побудови сплайн-кривої огинаючої.

Етап 8

За основними реперними точками Q визначаємо сплайн-функцію $s(x)$ огинаючої Θ ;

Етап 9

Знаючи сплайн-функцію $s(x)$ та координати точок слідів q , визначаємо для кожної основної реперної точки Q додаткову реперну точку Q^+ .

Етап 10

Для кожного сліду q визначаємо точку K_q , яка буде реперною на наступному ітераційному кроці пошуку огинаючої.

Етап 11

Знаходимо новий вираз для сплайн-функції $s_1(x)$ та визначаємо нове положення додаткових реперних точок Q^{+1} .

Етап 12

Повторюємо розрахунки до тих пір, поки не буде задоволено критерій $[h]$ припинення ітераційного процесу¹⁸ пошуку огинаючої до слідів q ;

¹⁸Графічна інтерпретація критерію $[h]$ була подана на рис. 2.15 на с. 72. Там же було описано його застосування та обґрунтування.

Етап 13

Отриману, в результаті ітерацій, криву огинаючої приймаємо за шуканий профіль початкової інструментальної поверхні.

Величину критерію $[h]$ необхідно приймати порівнянню з допуском IT виготовлення профілю інструмента. Для більшості випадків достатньо приймати $[h] = \frac{1}{3}IT$.

Необхідно підкреслити, що похибка визначення огинаючої залежить не від величини критерію $[h]$, а від кількості розрахункових точок за якими побудовані сліди q , оскільки саме вони є реперними точками при побудові сплайн-кривої $s(x)$ огинаючої Θ .

2.8.2. Послідовність визначення профілю різальної кромки інструмента

Вихідними даними визначення профілю початкової інструментальної поверхні є:

- координати розрахункових точок торцевого перерізу гвинтової поверхні, виражені в полярній системі радіус-вектором ρ та полярним кутом δ ;
- кут ϵ між осями інструмента та деталі;
- найкоротша відстань m між осями інструмента та деталі.

В якості рухомої поверхні Ω приймаємо передню поверхню різального елемента інструмента, який підлягає проєктуванню¹⁹. Необхідно відзначити, що рухома поверхня Ω повинна мати не тільки форму, ідентичну передній поверхні зуба, але і займати ідентичне положення щодо осі інструмента.

В інструментальному виробництві, для дискового фасонного інструменту, в якості передньої поверхні приймається площина, положення якої визначається кутами γ і λ , а також деякою вершинною точкою на зубці, через яку вона проходить.

Загальна послідовність визначення профілю різальної кромки, така ж як і при визначенні профілю початкової інструментальної поверхні, детально викладена в попередньому розділі. В даному випадку, враховуючи форму та орієнтацію рухомої поверхні Ω , профіль огинаючої відповідає профілю різальної кромки зубця інструмента.

¹⁹Зазвичай це площина дотична до передньої поверхні інструмента в околицях різальної кромки

2.8.3. Послідовність визначення профілю деталі за відомої початкової інструментальної поверхні

Вихідними даними щодо профілю деталі є:

- координати осьового перерізу вихідної інструментальної поверхні, задані в системі координат пов'язаної з інструментом;
- кут ε між осями інструмента та деталі;
- найкоротша відстань m між осями інструмента та деталі.

Послідовність визначення профілю деталі методом рухомої поверхні може бути такою.

Етап 1

Орієнтуємо рухому поверхню (рухому площину) Ω таким чином, щоб вона була розташована перпендикулярно до осі гвинтової поверхні деталі.

Етап 2

На профілі відомої початкової інструментальної поверхні вибираємо ряд розрахункових точок M . Бажано щоб вони були рівномірно віддалені одна від одної²⁰.

Етап 3

Визначаємо сліди q перетину траєкторій розрахункових точок M початкової інструментальної поверхні з рухомою поверхнею Ω та створюємо масив значень координат слідів q .

Етап 4

На кожному сліді q , початкового наближення²¹ огинаючої Θ_0 знаходимо точки Q_0 , які розташовані якнайдалі від осі інструмента. Знайдені точки є основними реперними точками для побудови сплайн-кривої огинаючої Θ_0 . За основними реперними точками Q_0 визначаємо сплайн-функцію $s_0(x)$ огинаючої Θ_0 ;

²⁰Ця умова не є обов'язковою. Але у такому разі за результатами профілювання можливо буде визначити не тільки профіль деталі, а ще й оцінити характер взаємодії інструмента з деталлю, тобто навантаження окремих точок інструмента. Ця обставина може бути основою для подальшої оптимізації конструкції інструмента або параметрів технологічного процесу виготовлення деталі.

²¹Маємо на увазі, що процес пошуку профілю гвинтової поверхні оброблюваної деталі має ітераційний характер при якому остаточний результат профілювання є результат наближень до виконання наперед заданого критерію припинення ітераційний.

Етап 5

Знаючи сплайн-функцію $s_0(x)$ та координати точок слідів q , визначаємо для кожної основної реперної точки Q_0 додаткову реперну точку Q_0^+ , тобто здійснюємо перший крок ітераційного пошуку.

Етап 6

Для кожного сліду q визначаємо точку K_q , яка буде реперною на наступному ітераційному кроці пошуку огинаючої.

Етап 7

Знаходимо новий математичний вираз для сплайн-функції $s_1(x)$ та визначаємо нове положення додаткових реперних точок Q_1^{+1} здійснюючи таким чином наступний крок інтеграційного процесу.

Етап 8

Повторюємо розрахунки (ітерації) до тих пір, поки не буде задоволено критерій $[h]$ припинення ітераційного процесу пошуку огинаючої до слідів q .

Етап 9

Отриману, в результаті ітерацій криву огинаючої приймаємо за шуканий профіль утвореної деталі.

Головною проблемою при визначенні профілю деталі, що утворюється відомою. початковою поверхнею є порушення умов формоутворення. Це пов'язано з тим, що один і той же інструмент залежно від параметрів взаємного розташування інструмент/деталь може працювати як без порушення умов формоутворення так і з ними.

Отже, головним є вірний вибір орієнтації інструмента відносно деталі, а саме відстань між осями інструмент/деталь та кут їх взаємного перехрещування.

2.8.4. Методика аналізу умов формоутворення

Вихідними даними під час аналізу умов формоутворень є:

- координати профілю різальної кромки різального елемента, задані в системі координат, пов'язаної з інструментом;
- кут ε між осями інструмента та деталі;
- найкоротша відстань m між осями інструмента та деталі.

Аналіз умов формоутворення заснований на вивченні характеру взаємного розташування слідів q на рухомій поверхні Ω , яка пов'язана з формоутворюваною деталлю.

Послідовність аналізу умов формоутворення гвинтових поверхонь може бути наступною.

Етап 1

На різальному інструменті вибирають групу різальних кромок, мінімальна сукупність яких може повністю утворити профіль гвинтової поверхні²². Слід зазначити, що для інструменту цільної конструкції або збірної, коли різальна кромка оформлена повністю на одному зубі, як розрахункові точки можна прийняти точки різальної кромки²³.

Однак у тому випадку, коли різальні кромки інструмента є дискретними (змінні пластинки тощо), від правильного вибору групи різальних елементів залежить результат аналізу умов формоутворення. В цьому випадку необхідно об'єднувати в групу елементи, розташовані конструктивно близько один до одного.

Етап 2

Далі, на різальних елементах групи вибирають розрахункові точки і по отриманих слідах q будують огинаючу Θ , яка буде профілем деталі. Після визначення огинаючої необхідно встановити, які сліди q торкаються її, а які ні.

Ті сліди, що торкаються огинаючої відповідають тим точкам різальних кромок, які будуть формотворчими (утворювати номінальну поверхню деталі). Це твірні точки різальної кромки.

Сліди, що не торкаються огинаючої Θ , відповідають тим точкам різальних кромок, які виконуватимуть тільки чорнове видалення припуску під обробку.

Розподіл точок на твірні та чорнові, дозволяє проектувати інструмент раціональної конструкції, застосовуючи змінні різальні елементи з експлуатаційними характеристиками, які відповідають характеру виконуваної ними роботи.

²²Слід мати на увазі, що одну і ту ж саму поверхню можна утворити різним інструментом з різною формою та кількістю різальних кромок. Це буде впливати на продуктивність технологічного процесу та якість обробленої поверхні деталі, що необхідно враховувати при виборі інструмента.

²³Загалом можливі варіанти конструктивного виконання інструмента. Інструмент може мати одну безперервну різальну кромку (наприклад, цільна дискова фреза) або декілька ділянок кромок розташованих на різних зубцях які утворюють повний профіль "перекриваючи" одна одну.

2.9. Висновки

Розроблена методика представлення гвинтової поверхні сукупністю траєкторій точок, що належать торцевому перерізу гвинтової поверхні. Запропоновано та обґрунтовано критерії оцінки достовірності подання номінальної поверхні деталі та інструмента сукупністю траєкторій. Метод рухомої поверхні (площини) дозволяє визначати профіль поверхні, пов'язаної із заданою гвинтовою поверхнею, а також дослідити умови формоутворення гвинтових поверхонь.

Аналіз отриманих результатів дозволяє стверджувати, що запропонований метод рухомої поверхні для визначення спряженої поверхні, на відміну від інших методів, дозволяє:

- безпосередньо на стадії визначення початкової інструментальної поверхні, без вирішення зворотної задачі формоутворення, встановити характер відхилення утвореної поверхні деталі від її номінальної форми, а також виразити величину цього відхилення в чисельній формі;
- минаючи стадію визначення профілю початкової інструментальної поверхні, визначити профіль фасонної різальної кромки інструмента, що формує гвинтову поверхню при будь-якій схемі формоутворення;
- при аналізі умов формоутворення гвинтової поверхні інструментом з відомою формою встановити, які дискретні ділянки початкової інструментальної поверхні (або які ділянки різальної кромки) будуть формоутворюючими, а які здійснюватимуть тільки чорнове видалення припуску.

Запропоновано і теоретично обґрунтовано метод чисельного визначення огинаючої до плоских кривих, які представлені сукупністю точок, у вигляді сплайн-кривої мінімальної інтегральної кривини.

Сукупність викладених висновків дозволяє стверджувати, що запропонований метод рухомої поверхні, має ту перевагу перед іншими методами визначення початкової інструментальної поверхні, що дозволяє проєктувати інструмент з керованою, для кожної дискретної точки різальної кромки, схемою зняття припуску.



3. ТРІАНГУЛЯЦІЯ ГВИНТОВИХ ПОВЕРХОНЬ

У тривимірному просторі тріангуляцію поверхні можна інтерпретувати, як заміну поверхні сукупністю елементарних геометричних фігур – кінцевих тріангуляційних елементів¹.

У загальному випадку, кінцеві тріангуляційні елементи можуть бути криволінійними, оскільки вони належать до просторової поверхні. Так тріангуляцію сфери можна реалізувати вписавши у сферу тетраедр і зробивши проекцію його ребер із центру сфери на її поверхню. В даному випадку поверхня сфери буде тріангульована чотирма криволінійними (сферичними) трикутниками.

Тріангуляцію широко застосовують при вирішенні задач опору матеріалів і теорії пружності². Це дозволяє застосовувати, добре розроблені, методи механіки стрижневих систем до розрахунку навантажень і деформацій у складних просторових деталях. В цьому випадку, об'ємну деталь представляють сукупністю плоских елементарних фігур, зазвичай трикутників або паралелепіпедів.

Тріангуляцію складних поверхонь широко використовують при формуванні деталей на верстатах з числовим програмним управлінням. Так само широко тріангуляція просторових об'єктів використовуються як складова частина методу кінцевих елементів, при вирішенні задач дослідження напруженого стану, або деформаційних переміщень складних просторових систем³. Теоретичним та практичним аспектам застосуван-

¹Тріангуляція - розбиття геометричного об'єкта на елементарні геометричні фігури. Наприклад, на площині це розбиття на трикутники, звідки і походить ця назва. Прикладом вдалої тріангуляції може слугувати оболонка футбольного м'яча, коли сфера (тобто м'яч) створено як сукупність плоских фігур (п'яти- та шестигранників).

²Амиро І. Я., Заруцькі В. А. Теорія ребристих оболонок. Київ : Наук. думка, 1980. 368 с.
Гавриленко Г. Д., Трубицина О. А. Коливання та стійкість ребристих оболонок обертання. Дніпро : Ін-т механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України, 2008. 155 с.

³Бразалук Ю.В., Євдокимов Д.В., Поляков Н.В. Спільне застосування методу малого параметра та методу граничних елементів для чисельного вирішення еліптичних завдань із малими обуреннями. – *Вісник ХНУ*, № 703. - Харків, 2005. - С. 50-66.

Оробей, В. Ф. Метод граничних елементів у завданнях з нестійкими рішеннями / В. Ф. Оробей, О. Ф. Дашенко, О. М. Лімаренко // *Пр. Одеса. політехн. ун-т. – Одеса*, 2013. – Вип. 2 (41). – С. 27-31.

ня методу кінцевих елементів зокрема, питанням дослідження динаміка та міцності систем, присвячене значну кількість праць.

В інструментальному виробництві триангуляція використовується для представлення складних поверхонь деталей, або початкових інструментальних поверхонь при дослідженні процесів формоутворення.

Основною проблемою, яка виникає в інструментальному виробництві при триангуляції поверхні, є варіаційність результату, який значною мірою залежить від форми та розмірів елементів якими здійснюється триангуляція.

Розподіл поверхні на триангуляційні елементи, можна розглядати, як окремий випадок задачі нанесення розрахункової сітки в методах кінцевих відмінностей (запропонованого ще у середині минулого століття⁴), або варіаційних методах пошуку системи переміщень, що має мінімум повної потенційної енергії⁵. Це накладає дві суперечливі умови.

З одного боку, точність розрахунків залежить від кількості елементів на які розбита триангулюєма поверхня, яка потребує їх максимальної кількості.

З іншого, розбивка поверхні на велику кількість елементів значно ускладнює розрахунки і зводить нанівець практичні переваги триангуляції.

При розв'язанні задач формоутворення із застосуванням триангуляції поверхонь, виникає проблема адекватного відображення локальних диференційних характеристик поверхні, а саме:

- положення площини дотичної до поверхні деталі;
- напрямок нормалі;
- кривина і кручення.

Для поверхні не підданої триангуляції ці параметри змінюються плавно і безперервно у всьому досліджуваному просторі. У той же час, триангульована поверхня що представлена сукупністю плоских триангуляційних елементів, має лише дискретні значення зазначених параметрів локальної геометрії поверхні.

Це вносить значні похибки у результати дослідження умов формоутворення. Крім цього, такі поняття, як кривина та кручення щодо плоского елемента не зовсім коректні.

⁴Варвак П.М. Розвиток та додаток методу сіток до розрахунку пластин. Київ: Вид. НАН України, 1949, ч. 1, – 120 с.; 1952, ч. 2, – 244 с.

⁵Міхлін С.Г. Варіаційні методи математичної фізики. Київ: Наука, 1970 – 226 с.

3.1. Постановка задачі

Одним із способів, який дозволяє перейти від дискретного представлення параметрів локальної геометрії триангульованої поверхні до безперервного, може бути використання поняття про гвинтові траєкторії, як про межі триангуляційних елементів.

Гвинтову поверхню можна розглядати як сукупність гвинтових траєкторій точок, які належать її довільному перерізу⁶. У цьому випадку, використовуючи гвинтові траєкторії як межі триангуляційних елементів, можна перейти від дискретних значень локальних диференціальних характеристик поверхні, до безперервних уздовж кордонів цих елементів.

Одночасно, це дозволяє використовувати замість плоского кінцевого елемента, частину циліндричної поверхні постійного радіусу, який має велику гомеоморфність⁷ щодо гвинтової поверхні.

Отже, метою цієї роботи є розробка способу триангуляції гвинтової поверхні за допомогою гвинтових траєкторій.

3.2. Представлення поверхні сукупністю траєкторій

Мінімальним геометричним елементом, сукупністю яких може бути задана поверхня довільної форми є точка. Однак такі поняття як нормаль, кривина і дотична, які характеризують локальну геометрію поверхні, не можуть бути застосовні до точки. Тому зручніше розглядати поверхню, як сукупність ліній які їй належать.

У загальному випадку, поверхню можна представити, як сукупність нескінченної кількості ліній не ідентичних одна одній, проте більш доцільним є утворення регулярної сукупності ліній, які мають однакові геометричні ознаки.

Слід зазначити, що лінії, які утворюють поверхню можуть мати різну форму для однієї і тієї ж поверхні. Так, площину можна розглядати як сукупність будь-яких геометричних фігур, розташованих в одній площині, наприклад, прямих ліній, дуг кіл або еліпсів.

⁶Теоретично це так, але на практиці краще використовувати перерізи орієнтовані певним чином відносно конкретних елементів інструмента. Наприклад, торцевий або осьовий переріз.

⁷Яковець В.П., Боровик В.Н. Курс диференціальної геометрії. Ніжин : НДПУ, 2004. – 237 с.

Гвинтову поверхню можна розглядати, як сукупність торцевих січень (точніше сукупність профілів торцевих січень) або як сукупність гвинтових траєкторій точок, що рухаються вздовж осі гвинтової поверхні.

Не дивлячись те що, що з цих сукупностей утворена різними формою лініями, всередині кожної сукупності вони підпорядковані загальним умовам. При цьому важливим є те, що ці лінії можна розглядати, як траєкторії точок, які рухаються у просторі за відомим законом єдиним для всіх точок.

З погляду формоутворення поверхонь, доцільно використовувати такі траєкторії, які певною мірою характеризують форму всієї поверхні і водночас є досить простими кривими. Щодо гвинтових поверхонь, такими траєкторіями можуть бути гвинтові траєкторії точок, що належать її торцевому перерізу⁸. Вибір гвинтових траєкторій має кілька переваг перед лініями іншого типу. Розглянемо їх докладніше.

З точки зору процесу формоутворення гвинтової поверхні на верстаті, гвинтова траєкторія має ту перевагу, що завжди збігається з рухом інструмента відносно деталі, а її форма досить повно відображає основні характеристики гвинтової поверхні. Зокрема – її крок, напрям дотичної, кут нахилу твірної, гвинтовий параметр поверхні⁹.

Не менш важливі властивості гвинтові траєкторії мають і з точки зору теорії поверхонь, адже вони є геодезичними лініями, які мають кілька особливих властивостей, а саме є найкоротшими, фронтальними і найбільш прямими¹⁰.

Властивість геодезичної лінії, як найкоротшої полягає в тому, що всяка, досить маленька дуга геодезичної лінії, є найкоротшою лінією на поверхні між двома довільними точками.

З точки зору технології обробки деталі на верстаті – властивість геодезичної лінії як найкоротшої, відповідає найкоротшій траєкторії інструмента при якій можлива формоутворення гвинтової поверхні деталі.

⁸Солодкий В.І. Модифікований кінематичний метод визначення огинаючої до гвинтової поверхні. *Вісник національного технічного університету України "КПІ". Машинобудування*. Вип. 33, Київ, 1998. С. 169-174.

⁹Людшин В.С. Теорія гвинтових поверхонь у проектуванні різальних інструментів. Київ, Наука, 1967 - 372 с.,

Cormac P. A treatise on screws and worm gear, their mills and hobs. Capman & Hall Ltd., London, 1936, - 140 pg.

Солодкий В.І., Ладижов А.Л. Профілювання інструменту для обробки гелікоїдальних гвинтових поверхонь. *Вісник національного технічного університету України «КПІ». Машинобудування*. Вип.34, Київ 1999. С.145-150.

¹⁰Гільберт Д., Кон-Фоссен С. Наочна геометрія. Перек. з нім. - 3-тє вид. - : Наука, 1984, - 344 с.

Це забезпечує найбільшу продуктивність обробки, особливо у разі коли рух подачі інструмента щодо деталі є гвинтовим.

Властивість геодезичної лінії як фронтальної полягає в тому, що дотична до неї завжди збігається з напрямком ковзання поверхні сам по собі. З технологічної точки зору ця властивість геодезичної лінії (гвинтової траєкторії) дозволяє утворювати гвинтові поверхні шляхом видавлювання.

З погляду теорії профілювання властивість геодезичної лінії як лінії ковзання, дозволяє використовувати поняття про “ковзання поверхні сам по собі” введене професором Родіним П.Р. у теорію профілювання інструменту у середині минулого століття¹¹, що значно спрощує процес пошуку початкової інструментальної поверхні.

Властивість геодезичної лінії як найбільш прямий полягає в тому, що нормаль до поверхні збігається з дотичною площиною геодезичної лінії. З точки зору теорії формоутворення, це дозволяє досить просто визначити такі геометричні параметри гвинтової поверхні як дотична, нормаль, кривина, які є основними параметрами при дослідженні характеру дотику спряжених поверхонь.

На рис. 3.1 зображена гвинтова поверхня, яка була триангульована площинними трикутниками за традиційною методикою, та сукупністю гвинтових траєкторій T_1 , T_2 , T_3 рис. 3.2.

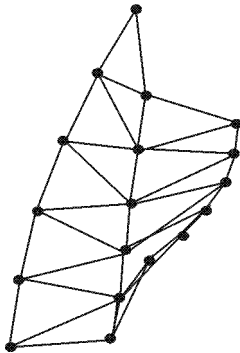


Рис. 3.1. Триангуляція трикутниками

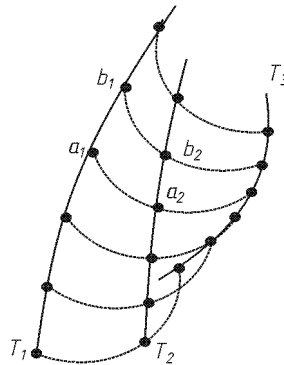


Рис. 3.2. Триангуляція гвинтовими траєкторіями

¹¹Родін П.Р. Основи теорії проєктування різальних інструментів. Київ, Науково думка, 1960 – 160 с.

В обох випадках триангуляція поверхні була здійснена за одними і тими ж реперними точками. Якщо (у разі застосування традиційної методики триангуляції) елементарний елемент має форму площинного трикутника, то при застосуванні триангуляції гвинтовими траєкторіями, він має форму тривимірного чотирикутника $a_1b_1a_2b_2$.

При цьому його сторони a_1b_1 і a_2b_2 є гвинтовими траєкторіями, а сторони a_1a_2 і b_1b_2 є частинами торцевого перерізу гвинтової поверхні, яке може бути представлене дугою кола, що детально розглянуто нижче.

Слід зазначити, що при триангуляції трикутними елементами, визначити напрямок дотичної до поверхні в реперній точці досить складно, так як жодна з меж трикутника не збігається з гвинтовою поверхнею.

У той же час, при триангуляції поверхні гвинтовими траєкторіями – напрямком дотичних уздовж двох протилежних кордонів a_1a_2 і b_1b_2 триангуляційного елемента, можливо визначити не тільки наближено, а й теоретично точно, що дозволяє здійснити дослідження умов формотворення з мінімальною похибкою.

3.3. Апроксимація торцевого перерізу гвинтової поверхні дугами кола

Раніше було зазначено, що як початкове положення точок, які утворюють сукупність гвинтових траєкторій, доцільно приймати точки торцевого перерізу досліджуваної поверхні. У той же час, в інструментальному виробництві, досить часто, здійснюється заміна теоретично точного торцевого профілю гвинтової поверхні, дугами кола.

Це дозволяє описати торцевий профіль гвинтової поверхні більш простими функціональними залежностями і, що більш важливе, визначити диференціальні характеристики локальної ділянки гвинтової поверхні, після її триангуляції гвинтовими траєкторіями.

Знаючи рівняння гвинтової траєкторії та параметри кола, що проходить через точки торцевого перерізу гвинтової поверхні, можна визначити напрямок нормалі та положення площини дотичної до поверхні, величини головних кривин та нормальної кривини, а також ряд інших параметрів.

Нехай торцевий переріз гвинтової поверхні представлений сукупністю точок M_i з координатами x_i та y_i при $i = 1 \dots n$. Якщо здійснити заміну дугою кола всіх n точок торцевого профілю, то координати x_c і y_c центру O_c кола та його радіус R можна знайти із системи рівнянь

$$\begin{cases} (x_p - x_c)^2 + (y_p - y_c)^2 = R^2, \\ (x_q - x_c)^2 + (y_q - y_c)^2 = R^2, \\ (x_s - x_c)^2 + (y_s - y_c)^2 = R^2. \end{cases} \quad (3.1)$$

Стохастично даючи параметрам p , q і s довільні значення в межах від 1 до n , і довільно групуючи трійки рівнянь наведених вище, можна визначити значення параметрів R , x_c та y_c для кожної трійки рівнянь¹².

Тоді, за остаточний результат приймають їх середні арифметичні значення. Як альтернативний спосіб визначення параметрів R , x_c і y_c , можливо використовувати метод найменших квадратів, вирішивши систему рівнянь

$$\sum \frac{\left(\sqrt{(x_i - x_c)^2 + (y_i - y_c)^2} + R \right) (2x_c - 2x_i)}{\sqrt{(x_i - x_c)^2 + (y_i - y_c)^2}} = 0, \quad (3.2a)$$

$$\sum \frac{\left(\sqrt{(x_i - x_c)^2 + (y_i - y_c)^2} + R \right) (2y_c - 2y_i)}{\sqrt{(x_i - x_c)^2 + (y_i - y_c)^2}} = 0, \quad (3.2b)$$

$$\sum \left(2R - 2\sqrt{(x_i - x_c)^2 + (y_i - y_c)^2} \right) = 0. \quad (3.2c)$$

Недоліком способу заміни всіх n точок профілю одним колом є те, що отримане коло не проходить через жодну з реперних точок. Цю проблему можна уникнути, виконуючи заміну торцевого профілю декількома дугами, які проходять через послідовні групи реперних точок.

Якщо коло проходить через три реперні точки M_1 , M_2 та M_3 , то її параметри R , x_c та y_c можна визначити безпосередньо із системи рівнянь

$$\begin{cases} (x_1 - x_c)^2 + (y_1 - y_c)^2 - R^2 = 0, \\ (x_2 - x_c)^2 + (y_2 - y_c)^2 - R^2 = 0, \\ (x_3 - x_c)^2 + (y_3 - y_c)^2 - R^2 = 0. \end{cases} \quad (3.3)$$

¹²Справочник по математике для научных работников и инженеров. Корн Г., Корн Т. Київ: Наука. Головна редакція фізико-математичної літератури, 1984, – 832 с.

Таким чином, групуючи всі точки профілю на трійки, можливо послідовно описати дугами весь торцевий профіль гвинтової поверхні. Проте, у такому разі виникають найменше дві проблеми.

По-перше, знайдені кола не враховують характер розташування сусідніх точок профілю.

По-друге, параметри кола залежать від напрямку їхнього групування. Так для двох точок M_2 та M_3 рис. 3.3 маємо два різних кола $R_{(1,2,3)}$ і $R_{(2,3,4)}$ в залежності від того, з якого боку групують реперні точки.

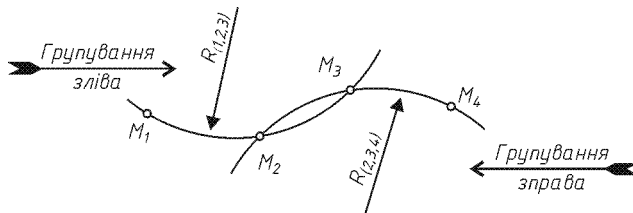


Рис. 3.3. Орієнтація кола залежно від напрямку групування реперних точок

У той же час, використовуючи метод найменших квадратів і даючи реперним точкам торцевого профілю гвинтової поверхні різні коефіцієнти значимості, можливо провести коло через дві точки (саме через дві), враховуючи характер розташування сусідніх реперних точок. Покажемо це з прикладу групи з чотирьох, послідовно розташованих, точок M_1 , M_2 , M_3 і M_4 .

Будемо будувати коло між двома середніми точками M_2 та M_3 , маючи точки M_1 та M_4 як допоміжні. Дано точкам M_1 і M_4 коефіцієнт значимості (ваговий коефіцієнт) рівний p_1 , а точкам M_2 і M_3 рівний p_2 . І нехай $p_1 \ll p_2$. Тоді система рівнянь за методом найменших квадратів набуде такого вигляду

$$p_1 \sum_k \frac{\left(\sqrt{(x_k - x_c)^2 + (y_k - y_c)^2} + R \right)^2 (2x_c - 2x_k)}{\sqrt{(x_k - x_c)^2 + (y_k - y_c)^2}} +$$

$$+ p_2 \sum_l \frac{\left(\sqrt{(x_l - x_c)^2 + (y_l - y_c)^2} + R \right)^2 (2x_c - 2x_l)}{\sqrt{(x_l - x_c)^2 + (y_l - y_c)^2}} = 0, \quad (3.4)$$

$$p_1 \sum_k \frac{\left(\sqrt{(x_k - x_c)^2 + (y_k - y_c)^2} + R \right)^2 (2y_c - 2y_k)}{\sqrt{(x_k - x_c)^2 + (y_k - y_c)^2}} +$$

$$+ p_2 \sum_l \frac{\left(\sqrt{(x_l - x_c)^2 + (y_l - y_c)^2} + R \right)^2 (2y_c - 2y_l)}{\sqrt{(x_l - x_c)^2 + (y_l - y_c)^2}} = 0, \quad (3.5)$$

$$p_1 \sum_k \left(2R - 2\sqrt{(x_k - x_c)^2 + (y_k - y_c)^2} \right) +$$

$$+ p_2 \sum_l \left(2R - 2\sqrt{(x_l - x_c)^2 + (y_l - y_c)^2} \right) = 0. \quad (3.6)$$

У наведених залежностях параметр k приймає значення рівні 1 та 4, а параметр l значення рівні 2 та 3. Чисельна величина коефіцієнтів значущості p_1 і p_2 може набувати будь-яких значень, наприклад $p_1 = 0,5$ і $p_2 = 20$.

У даному випадку похибка проходження дуги кола через точки M_2 і M_3 буде в $p_2/p_1 = 20/0,5 = 40$ разів менше, ніж у точках M_1 і M_4 . Важливим є відносини коефіцієнтів, а не їх чисельна величина.

Природно, що дуга кола ніколи точно не пройде через реперні точки M_2 та M_3 , однак, використовуючи викладену методику, можна зменшити похибку до допустимої величини. При цьому дуга, проведена через дві точки M_2 та M_3 враховуватиме положення зовнішніх сусідніх точок M_1 та M_4 .

Аналогічно, можна провести дугу кола через дві точки з урахуванням розташування чотирьох сусідніх. У цьому випадку, основними будуть точки M_3 та M_4 , а пари точок (M_1 та M_6) та (M_2 та M_5) допоміжними, з відповідними коефіцієнтами значущості p_1 , p_2 та p_3 . Тоді кожне рівняння, у наведеній вище системі з трьох рівнянь, набуде вигляду

$$p_1 \sum_k (\dots) + p_2 \sum_l (\dots) + p_3 \sum_m (\dots) = 0. \quad (3.7)$$

Три точки у дужках відповідають виразам сум у розглянутій вище системі рівнянь. Параметри k , l , m приймають фіксовані значення

($k = 1; 6$), ($l = 2; 5$), ($m = 3; 4$) а коефіцієнти значущості задовольняють співвідношенню $p_1 < p_2 < p_3$.

Розглянута методика дозволяє замінити складний криволінійний профіль торцевого перерізу гвинтової поверхні сукупністю дуг, які проходять через реперні точки з допустимим відхиленням і враховують характер розташування сусідніх реперних точок.

На рис. 3.4 зображена частина гвинтової поверхні, яка була триангульована за допомогою двох гвинтових траєкторій T_1 та T_2 , а на рис. 3.5 елементарний триангуляційний чотирикутник $a_1b_1a_2b_2$, що обмежений двома гвинтовими траєкторіями T_1 і T_2 та двома дугами радіусу R .

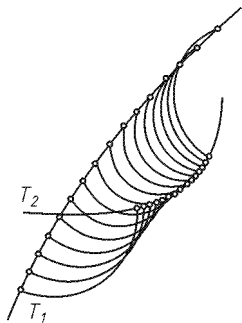


Рис. 3.4. Триангуляція гвинтовими траєкторіями

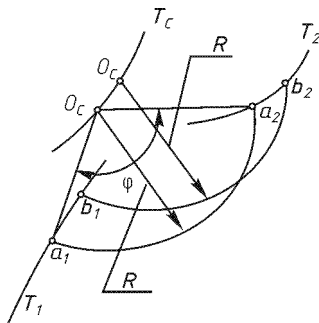


Рис. 3.5. Елемент триангуляційного трикутника

Необхідно відзначити, що центр O_c кола радіуса R рухається в просторі також по гвинтовій траєкторії T_c з гвинтовим параметром рівним гвинтовому параметру гвинтової поверхні.

Слід зазначити, що у випадку традиційної триангуляції трикутника, для представлення всієї гвинтової поверхні, необхідно зберігати інформацію про всі реперні точки розташовані на початковій гвинтовій поверхні, яка вимагає значних інформаційних витрат.

У той же час, при триангуляції гвинтовими траєкторіями достатньо зберігати інформацію тільки про радіус R , величину кута φ , що обмежує дугу кола і гвинтову траєкторію T_c . Вся інша інформація про триангулює гвинтову поверхню, може бути отримана на підставі розрахунків, однакових для будь-якої її ділянки.

3.4. Достовірність подання номінальної поверхні

Тріангуляція гвинтової поверхні за допомогою сукупності гвинтових траєкторій дозволяє розглянути питання про достовірність подання тріангульованої поверхні. Можна стверджувати, що чим ближче, одна до одної, розташовані утворюють траєкторії, тим більше достовірно представлена поверхня.

Слід зазначити, що можливо кілька варіантів формулювання критерію достовірності подання поверхні.

Достовірність за довжиною

У той же час слід зазначити, що при тій самій відстані між сусідніми траєкторіями, достовірність уявлення поверхні залежить від її форми. У зв'язку з цим доцільно ввести поняття про критерій достовірності подання поверхні.

Критерій достовірності $\aleph$

Критерій достовірності подання тріангульованої поверхні, це відношення довжини s_T прямої лінії, яка з'єднує дві точки на сусідніх траєкторіях T_1 і T_2 , до довжини s_N найкоротшої лінії, що належить до номінальної поверхні між цими точками.

Отже, математично критерій достовірності $\aleph$ подання тріангульованої поверхні можна записати як

$$\aleph = \frac{s_T}{s_N}. \quad (3.8)$$

Тоді графічну інтерпретацію критерію $\aleph$ можна розглядати за рис. 3.6. Такий критерій зручний тим, що у разі повного збігу номінальної поверхні та поверхні, представленій дискретною кількістю траєкторій, чисельне значення критерію достовірності дорівнюватиме одиниці $\aleph = 1$, а за наявності відхилення (зазору) між номінальною та тріангульованою поверхнями, його значення буде менше одиниці.

Як площину в якій лежать відрізки s_T і s_N можна використовувати площину торцевого перерізу гвинтової поверхні, або нормальну площину

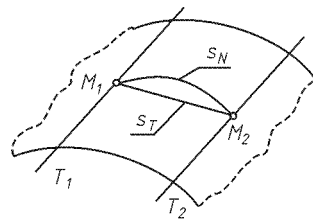


Рис. 3.6. Достовірність представлення поверхні

до однієї з гвинтових траєкторій. Це дозволяє говорити про нормальний і торцевий критерії достовірності уявлення гвинтової поверхні.

Достовірність за відстанню

Як інший варіант критерію достовірності $\aleph_h$ можна використовувати величину відношення найбільшої відстані h між номінальною та триангульованою поверхнями до відстані s_T між гвинтовими траєкторіями, що представляють гвинтову поверхню рис. 3.7., що математично можна записати як

$$\aleph_h = \frac{h}{s_T}. \quad (3.9)$$

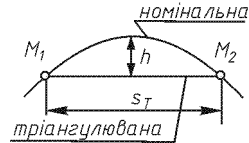


Рис. 3.7. Достовірність за відстанню

Таке визначення критерію достовірності має ту перевагу, яка дозволяє вимірювати значення параметрів, що входять до нього, безпосередньо на деталі. Однак його чисельне уявлення не зовсім коректне, оскільки у разі повного збігу поверхонь величина критерію виявляється рівною нулю.

Іншим варіантом критерію $\aleph_h$ може бути відношення s_T до h , тобто $\aleph_h = z_T/h$. Але у такому випадку повного збігу номінальної та триангулювання поверхні (тобто у випадку $h = 0$) критерій достовірності буде дорівнювати нескінченності. Що також не дуже коректно.

Достовірність за площею

Ще одним варіантом критерію достовірності подання поверхні може бути інтегральний показник площі F обмежений кривими номінальної s_N та триангульованої s_T поверхонь у деякому перерізі рис. 3.8.

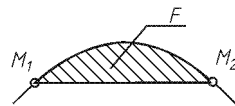


Рис. 3.8. Достовірність за площею

Проте, у цьому разі результат залежить від прийнятого масштабу лінійних вимірів, що призводить до неоднозначності чисельного представлення критерію.

Висновки

Таким чином, найбільш доцільною формою критерію достовірності подання гвинтової поверхні, яка була триангульована за допомогою гвинтових траєкторій, є відношення довжини прямої s_T найкоротшої

відстані між точками M_1 та M_2 , що належать сусіднім твірним траєкторіям T_1 і T_2 , до довжини лінії s_N , що належить до номінальної поверхні проведеної між цими точками.

3.5. Диференціальна геометрія локальної ділянки триангульованої поверхні

Розглянемо способи визначення диференціальних характеристик гвинтової поверхні триангульованої за допомогою гвинтових траєкторій.

З гвинтовою поверхнею зв'яжемо систему координат $\Delta : (X^\Delta Y^\Delta Z^\Delta)$, що орієнтована у такий спосіб. Вісь Z^Δ збігається з віссю гвинтової поверхні, а координатна площина $(X^\Delta Y^\Delta)$ збігається з її торцевим перерізом, профіль якого визначений полярним радіус-вектором ρ та полярним кутом δ .

Рівняння гвинтової траєкторії T довільної точки M , що належить до торцевого перерізу гвинтової поверхні, можна подати у векторній формі радіусом-вектором $\mathbf{r}$

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} \rho \cos(\delta + t) & \rho \sin(\delta + t) & p t \end{bmatrix}^T, \quad (3.10)$$

де t – змінний параметр, чисельна величина якого дорівнює куту повороту точки M щодо осі Z . Практично, це кут на який повернулась точка M навколо осі під час руху по гвинтовій траєкторії;

ρ – полярний радіус-вектор точки M у торцевому перерізі гвинтової поверхні;

δ – полярний кут точки M у торцевому перерізі гвинтової поверхні;

p – гвинтовий параметр гвинтової поверхні $p = \frac{H}{2\pi}$, де параметр H – крок гвинтової траєкторії.

Тоді вектор $\mathbf{k}_T$ дотичний до гвинтової траєкторії можна визначити як

$$\mathbf{k}_R = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} = \begin{bmatrix} -\rho \sin(\delta + t) & \rho \cos(\delta + t) & p \end{bmatrix}^T. \quad (3.11)$$

Знаючи параметри R , x_c і y_c кола, можливо визначити вектор $\mathbf{k}_T$ до профілю гвинтової поверхні у її торцевому перерізі

$$\mathbf{k}_T = \begin{bmatrix} \cos \xi & \sin \xi & 0 \end{bmatrix}^T. \quad (3.12)$$

У наведеному виразі параметр ξ це кут між додатнім напрямом осі X^Δ і напрямом дотичної $\mathbf{k}_T$ до профілю поверхні у її торцевому перерізі.

Положення двох векторів $\mathbf{k}_R$ і $\mathbf{k}_T$ дотичних до поверхні однозначно визначає положення площини дотичної до гвинтової поверхні і нормаль $\mathbf{n}$ до неї, яку можна знайти як векторний добуток $\mathbf{n} = \mathbf{k}_R \times \mathbf{k}_T$ або у розгорнутому виді

$$\begin{aligned} \mathbf{n} = \mathbf{k}_R \times \mathbf{k}_T &= \begin{bmatrix} -\rho \sin(\delta + t) \\ \rho \cos(\delta + t) \\ p \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \cos \xi \\ \sin \xi \\ 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} -p \sin \xi \\ p \cos \xi \\ -\rho \cos(t + \delta - \xi) \end{bmatrix}. \quad (3.13) \end{aligned}$$

Слід зазначити, що вектор $\mathbf{k}_R$ описує дотичну до безперервної траєкторії T , а вектор $\mathbf{k}_T$ дотичну до кола між двома реперними точками і тому обидва вектора $\mathbf{k}_R$ і $\mathbf{k}_T$ є безперервними параметрами.

Отже, триангуляція гвинтової поверхні з використанням гвинтових траєкторій дозволяє отримати безперервні характеристики положення дотичної площини і нормалі до гвинтової поверхні, у всій області її існування, яке не можливо при традиційних способах триангуляції площинними кінцевими елементами.

У більшості випадків формоутворення гвинтової поверхні, гвинтові траєкторії збігаються з напрямом руху інструмента щодо заготовки.

Визначимо диференціальні геометричні характеристики гвинтової поверхні враховуючи, що при застосуванні верстатів з числовим програмним керуванням для формоутворення гвинтових поверхонь триангуляційна гвинтова траєкторія збігається з траєкторією руху інструмента.

Приймаючи за додатній напрямок гвинтової траєкторії напрямок, який збігається з рухом точки M при зростанні параметра t , можна визначити диференціал дуги ds як

$$\begin{aligned} ds = |d\mathbf{r}| &= \sqrt{\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)^2} dt = \\ &= \sqrt{\rho^2 \sin^2(\delta + t) + \rho^2 \cos^2(\delta + t) + p^2} dt = \sqrt{\rho^2 + p^2} dt. \quad (3.14) \end{aligned}$$

Тоді орт $\boldsymbol{\tau}$ дотичної до гвинтової траєкторії можна визначити як

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{\begin{bmatrix} -\rho \sin(\delta + t) & \rho \cos(\delta + t) & p \end{bmatrix}}{\sqrt{\rho^2 + p^2}}. \quad (3.15)$$

Чисельне значення кривини K гвинтової траєкторії в розрахунковій точці M можна визначити як

$$K = \left| \frac{d\tau}{ds} \right| = \frac{\rho}{\rho^2 + p^2}, \quad (3.16)$$

$$d\tau = \frac{\begin{bmatrix} -\rho \sin(\delta + t) & -\rho \cos(\delta + t) & p \end{bmatrix}}{\sqrt{\rho^2 + p^2}} dt. \quad (3.17)$$

Звідки можна визначити орт ν головної нормалі

$$\nu = \frac{1}{K} \cdot \frac{d\tau}{ds} = \begin{bmatrix} -\cos(\delta + t) & -\sin(\delta + t) & 0 \end{bmatrix}^T. \quad (3.18)$$

Знаючи вирази для ортів дотичної τ та головної нормалі ν , можна визначити напрямок орта бінормалі β

$$\begin{aligned} \beta = \tau \times \nu &= \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + p^2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -\rho \sin(\delta + t) & \rho \cos(\delta + t) & p \\ -\cos(\delta + t) & -\sin(\delta + t) & 0 \end{bmatrix} = \\ &= \frac{\begin{bmatrix} -p \sin(\delta + t) & -p \cos(\delta + t) & \rho \end{bmatrix}}{\sqrt{\rho^2 + p^2}}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Величину кручення T можна визначити через орт головної нормалі ν та орт бінормалі β як

$$T = -\nu \frac{d\beta}{ds} = -\frac{-p \cos^2(\delta + t) - p \sin^2(\delta + t)}{\rho^2 + p^2} = \frac{p}{\rho^2 + p^2}. \quad (3.20)$$

Отже, в кожній точці що належить межі триангуляційного елемента¹³, можливо безперервно і теоретично точно визначити основні диференційні геометричні параметри гвинтової поверхні, що в свою чергу дозволяє виконати теоретично коректне дослідження формоутворення гвинтової поверхні.

Необхідно відзначити, що при триангуляції плоскими елементами, параметри локальної геометрії триангульованої поверхні стрибкоподібно змінюють свої значення від елемента до елемента.

У той же час, при використанні гвинтових траєкторій з одночасною заміною криволінійного торцевого профілю дугами кола, чисельне значення цих параметрів буде безперервно і плавно змінюватися вздовж кожної, з чотирьох меж (кордонів) триангуляційного елемента.

¹³Тобто лежить на кордоні двох суміжних елементів, що використовуються для триангуляції гвинтової поверхні.

3.6. Висновки

Тріангуляція гвинтової поверхні сукупністю гвинтових траєкторій, дозволяє перейти від дискретного подання диференціальних характеристик локальної геометрії тріангульованої поверхні, до безперервного. Це дає можливість теоретично точно визначати положення нормалей і дотичних у будь-якій точці на межі сусідніх тріангуляційних елементів.

Подання гвинтової поверхні сукупністю гвинтових траєкторій, з одночасною інтерполяцією профілю торцевого перерізу гвинтової поверхні частиною дуги кола, дозволяє визначати диференціальні характеристики гвинтової поверхні для будь-якої точки тріангуляційного елемента. У той час, як при тріангуляції плоскими елементами, ці характеристики є постійними в межах одного елемента, що не відповідає дійсності.

При використанні тріангуляції гвинтової поверхні сукупністю гвинтових траєкторій і дуг кола достатньо зберігати інформацію тільки про торцевий переріз поверхні і один пласт тріангуляційних елементів.

Повне уявлення всієї поверхні та її диференціальні характеристики, у будь-якій точці, можна отримати шляхом розрахунків за наведеними вище залежностям, однаковою для будь-якої точки гвинтової поверхні.

Подальшим напрямком розвитку викладеного матеріалу, може бути вибір оптимального кроку розташування гвинтових траєкторій, при якому похибка тріангуляції однакова для всієї гвинтової поверхні.



4. ДИСКОВИЙ ІНСТРУМЕНТ

Дисковий інструмент використовується при формоутворенні гвинтових поверхонь стружкових канавок різального інструменту (свердла, зенкери, фрези), а також при виготовленні зубчастих коліс великого модулю з нахиленим зубцем¹.

4.1. Профіль початкової інструментальної поверхні

Профіль початкової інструментальної поверхні залежить не тільки від форми та розмірів деталі, але і від взаємного розташування інструмента та заготовки, що необхідно враховувати під час профілювання.

4.1.1. Взаємне розташування об'єктів формоутворення

У якості гвинтової поверхні будемо розглядати праву гвинтову поверхню визначену: прямою віссю W , гвинтовим параметром p , а також профілем свого торцевого перерізу.

Відповідно до прийнятої в роботі методики, будемо представляти гвинтову поверхню сукупністю гвинтових траєкторій T_Δ , руху точок, що належать торцевому перерізу.

З гвинтовою поверхнею деталі зв'яжемо праву систему координат $\{\Delta\} : (X^\Delta Y^\Delta Z^\Delta)$, яка орієнтована в такий спосіб рис. 4.1. Вісь Z^Δ збігається з віссю W гвинтової поверхні і спрямована у бік правого гвинтового руху. Координатна площина $(X^\Delta Y^\Delta)$ збігається з торцевим перерізом гвинтової поверхні.

Торцевий профіль гвинтової поверхні визначений у координатній площині $(X^\Delta Y^\Delta)$ полярним кутом δ та полярним радіус-вектором ρ . Полярний кут δ відраховується від осі X^Δ у напрямку проти ходу годинникової стрілки до радіус-вектора $\rho^{(M)}$ розрахункової точки M_T . Полярний кут δ може набувати значень від 0 до 2π .

З інструментом зв'яжемо праву систему координат $\{\Psi\} : (X^\Psi Y^\Psi Z^\Psi)$. Точка O^Ψ початку системи координат $\{\Psi\}$ збігається і точкою перетину

¹Зубчасті колеса евольвентного зачеплення з нахиленим зубцем є різновидом гвинтової поверхні. Таку поверхню можна утворити, як огинаючу до гвинтового руху евольвенти.

осі Y^Δ системи $\{\Delta\}$ та осі $O_{\text{ін}}$ обертання інструмента. Вісь Z^Ψ збігається з віссю обертання інструмента і становить із віссю Z^Δ гострий кут ε .

Найкоротша відстань між точками O^Δ та O^Ψ початку відповідних систем координат позначимо як d . Вісь X^Ψ збігається за орієнтацією та положенням з віссю Y^Δ .

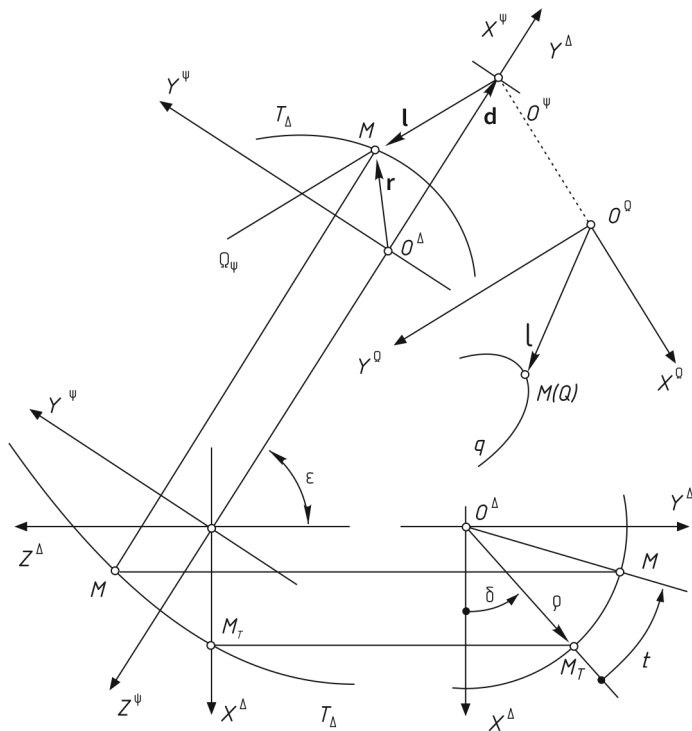


Рис. 4.1. Взаємне розташування деталі та інструменту

Як рухому поверхню приймемо площину Ω , яка проходить через вісь O_Ψ обертання інструмента і відповідно через координатну вісь Z^Ψ . Рухома площина Ω_Ψ може здійснювати обертальний рух щодо осі Z^Ψ і в початковий момент збігається і координатною площиною $(X^\Psi Z^\Psi)$, тобто проходить через осі початку O^Δ та O^Ψ систем координат $\{\Delta\}$ деталі та $\{\Psi\}$ інструмента.

З рухомою площиною Ω_Ψ зв'яжемо двовимірну систему координат $\{\Omega\} : (X^\Omega Y^\Omega)$ орієнтовану в такий спосіб. Точка O^Ω початку системи координат $\{\Omega\}$ збігається з точкою O^Ψ системи координат $\{\Psi\}$. Вісь Y^Ω

у початковий момент збігається за положенням з віссю X^Ψ (і віссю Y^Δ), але орієнтована у протилежний бік, тобто $e_1^\Psi = -e_2^\Delta$.

4.1.2. Побудова сліду перетину гвинтової траєкторії з рухомою площиною

Точка Q сліду q_Δ відповідає точці M гвинтової траєкторії, через яку проходить рухома площина Ω . Положення розрахункової точки M , можна визначити радіус-вектором $\mathbf{r}$, який у системі координат $\{\Delta\}$ має такі компоненти

$$\mathbf{r}^{\Delta(M)} = \begin{bmatrix} \rho^{(M)} \cos(\delta^{(M)} + t) \\ \rho^{(M)} \sin(\delta^{(M)} + t) \\ p t \end{bmatrix}, \quad (4.1)$$

де $\rho^{(M)}$ – полярний радіус-вектор точки M у системі координат $\{\Delta\}$;

$\delta^{(M)}$ – полярний кут точки M у системі координат $\{\Delta\}$;

t – параметр, чисельно рівний величині кута повороту проєкції точки M , при її гвинтовому русі, на координатну площину $(X^\Delta Y^\Delta)$.

Координати точки Q сліду q_Δ утвореного взаємним перетином рухомої площини Ω_Ψ та гвинтовою траєкторією T_Δ , можна визначити вектором $\mathbf{r}^\Omega$ компоненти якого представлені у двовимірній системі координат $\{\Omega\}$, що належить рухомій площині Ω_Ψ . Вектор $\mathbf{r}$ визначимо як результат послідовного виконання операторів

$$\mathbf{r}^\Omega = \mathbf{Res}(\Delta, \Psi) \mathbf{Res}(\Psi, \Omega). \quad (4.2)$$

Оператор $\mathbf{Res}(\Delta, \Psi)$ переходу від системи координат $\{\Delta\}$ до системи координат $\{\Psi\}$ можна розглядати як результат двох послідовних операцій. Повороту $\mathbf{Rot}(\Delta, Y^\Delta, \varepsilon) \equiv \{\Delta^1\}$ системи координат $\{\Delta\}$ навколо осі Y^Δ на кут ε , в результаті якого отримаємо проміжну систему координат $\{\Delta^1\}$. І наступного перенесення $\mathbf{Trans}(\Delta^1, Y^\Delta, d)$ проміжної координатної системи $\{\Delta^1\}$ вздовж осі Y^Δ на величину d .

Оператор повороту $\mathbf{Rot}(\Delta, Y^\Delta, \varepsilon) : (\Delta \rightarrow \Delta^1) \equiv \{\Delta^1\}$ системи координат $\{\Delta\}$ навколо її осі Y^Δ на кут ε (тобто перехід від системи координат

$\{\Delta\}$ до проміжної системи $\{\Delta^1\}$ можна реалізувати квадратною матрицею $[\Phi]_{(\Delta \rightarrow \Delta:1)}$ у вигляді

$$\mathbf{Rot}(\Delta, Y^\Delta, \varepsilon) = [\Phi]_{(\Delta \rightarrow \Delta:1)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\cos \varepsilon & 0 & \sin \varepsilon \\ \sin \varepsilon & 0 & \cos \varepsilon \end{bmatrix}. \quad (4.3)$$

Оператор перенесення $\mathbf{Trans}(\Delta^1, Y^\Delta, d)$ реалізується матрицею

$$\mathbf{Trans}(\Delta^1, Y^\Delta, d) = \begin{bmatrix} 0 \\ -d \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4.4)$$

Тоді остаточно оператор $\mathbf{Res}(\Delta, \Psi)$ переходу від системи координат $\{\Delta\}$ до системи координат $\{\Psi\}$ набуде вигляду

$$\begin{aligned} \mathbf{Res}(\Delta, \Psi) &= \mathbf{Rot}(\Delta, Y^\Delta, \varepsilon) \cdot \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix}^\Delta + \mathbf{Trans}(\Delta^1, Y^\Delta, d) = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\cos \varepsilon & 0 & \sin \varepsilon \\ \sin \varepsilon & 0 & \cos \varepsilon \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix}^\Delta + \begin{bmatrix} 0 \\ -d \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (4.5) \end{aligned}$$

де $[\]^\Delta$ – стовпцевий вектор, компоненти якого представлені у системі координат $\{\Delta\}$.

Таким чином, для вектора $\mathbf{r}^{\Psi(M)} \equiv \mathbf{r}^{\Psi(Q)}$ який визначає положення розрахункових точок M сліду q_Δ у системі координат $\{\Delta\}$ отримаємо

$$\begin{aligned} \mathbf{r}^{\Psi(M)} &\equiv \mathbf{r}^{\Psi(Q)} = \mathbf{Rot}(\Delta, Y^\Delta, \varepsilon) \cdot \mathbf{r}^\Delta + \mathbf{Trans}(\Delta^1, Y^\Delta, d) = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\cos \varepsilon & 0 & \sin \varepsilon \\ \sin \varepsilon & 0 & \cos \varepsilon \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \rho^{(M)} \cos(\delta^{(M)} + t) \\ \rho^{(M)} \sin(\delta^{(M)} + t) - d \\ p t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -d \\ 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \rho^{(M)} \sin(\delta^{(M)} + t) - d \\ p t \sin \varepsilon - d - \rho^{(M)} \cos(\delta^{(M)} + t) \cos \varepsilon \\ p t \cos \varepsilon + \rho^{(M)} \cos(\delta^{(M)} + t) \sin \varepsilon \end{bmatrix}. \quad (4.6) \end{aligned}$$

Виконаємо перехід від ортогональної тривимірної системи координат $\{\Psi\}$ до ортогональної двовимірної системи координат $\{\Omega\}$ у якій визначено слід q_Δ , перетину гвинтової траєкторії T_Δ та рухомої площини Ω .

При прийнятій орієнтації системи $\{\Omega\}$ вісь X^Ω збігається з віссю Z^Ψ . Тоді можна записати

$$x^\Omega = y^\Psi = p t \sin \varepsilon - d - \rho \cos (\delta + t) \cos \varepsilon. \quad (4.7)$$

Вісь Y^Ω , за прийнятими раніше умовами завжди збігається з проекцією вектора $\mathbf{r}^{\Psi(M)}$ на координатну площину $(X^\Psi Y^\Psi)$, тому можна записати

$$y^\Omega = \sqrt{(x^\Psi)^2 + (y^\Psi)^2}. \quad (4.8)$$

Або у розгорнутому вигляді

$$y^\Omega = \sqrt{(\rho \sin (\delta + y) - d)^2 + (p t \sin \varepsilon - d - \rho \cos (\delta + t) \cos \varepsilon)^2}. \quad (4.9)$$

Для зручності подальших досліджень будемо позначати положення точки Q у рухомій площині Ω (в системі координат $\{\Omega\}$) вектором $\mathbf{l}$ (вектор $\mathbf{r}^{\Omega(M)}$ точки M у системі координат $\{\Omega\}$). Початок вектора $\mathbf{l}$ розташований у точці O^Ω початку системи координат $\{\Omega\}$, а кінець у точці Q сліду q_Δ (точка M гвинтової траєкторії T_Δ). Тоді

$$\mathbf{l}^{\Omega(Q)} = \begin{bmatrix} l_x^{(M)} \\ l_y^{(M)} \end{bmatrix}, \quad (4.10)$$

$$x^{\Omega(Q)} = y^{\Psi(M)} = p t \sin \varepsilon - d - \rho^{(M)} \cos (\delta^{(M)} + t) \cos \varepsilon, \quad (4.11)$$

$$y^{\Omega(Q)} = \sqrt{(\rho^{(M)} \sin (\delta^{(M)} + y) - d)^2 + (p t \sin \varepsilon - d - \rho^{(M)} \cos (\delta^{(M)} + t) \cos \varepsilon)^2}. \quad (4.12)$$

Послідовність визначення координат точок Q сліду q_Δ перетину гвинтової траєкторії T_Δ з рухомою площиною Ω у двовимірній системі координат $\{\Omega\}$ може бути наступна:

- на торцевому профілі гвинтової поверхні вибирають ряд розрахункових точок M_T ;
- за залежностями (4.11) та (4.12) визначають координати $x^{\Omega(Q)}$ та $y^{\Omega(Q)}$ точок Q сліду q_Δ розташованого в рухомій площині Ω .

Далі визначають огинаючу до сімейства слідів q_Δ і приймають її за осьовий профіль вихідної інструментальної поверхні.

4.1.3. Профіль початкової інструментальної поверхні

Визначимо профіль початкової інструментальної поверхні дискового інструменту на прикладі формоутворення гвинтової стружкової канавки стандартного спірального свердла [14, 15, 16], торцевий профіль якого представлений на рис. 4.2.

Для спіральних свердел стандартної конструкції при зовнішньому діаметрі свердла $D = 20$ мм, кут нахилу стружкової канавки на зовнішньому діаметрі свердла дорівнює $\omega = 29^\circ$. Тоді гвинтовий параметр p гвинтової поверхні стружкової гвинтової канавки дорівнюватиме

$$p = \frac{D}{2 \operatorname{tg} \omega} = \frac{20}{2 \operatorname{tg} 29^\circ} = 18,0405. \quad (4.13)$$

Приймемо кут ε між осями інструмента та деталі рівний

$$\varepsilon = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{180} \omega = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{180} 29^\circ = 1,0647 = 1, \quad (4.14)$$

а відстань d між ними рівну

$$d = 1,5D = 1,5 \cdot 20 = 30 \text{ мм}. \quad (4.15)$$

Сімейство слідів розраховане за залежностями (4.11) та (4.12), представлене на рис. 4.3. Огинаюча Θ_Ψ до слідів q_Δ визначає профіль початкової інструментальної поверхні типу дискового інструменту в її осьовому перерізі.

Виконаємо аналіз одержаних результатів. Загальна огинаюча може бути поділена на дві ділянки NK та KM . Ділянка NK огинаючої окреслена одним слідом q_0 розрахункової точки "0" торцевого перерізу гвинтової поверхні. Отже, всі точки поверхні деталі, сліди яких розташовані ліворуч від сліду q_0 і не торкаються огинаючої, утворені не будуть.

Точка K отримана як результат взаємного перетину слідів q_0 та q_{12} . Тому вона утворює на загальній огинаючій Θ_Ψ особливу точку перелому профілю вихідної інструментальної поверхні. Таким чином, точки поверхні деталі від 1 до 12 не будуть формоутворені відповідно до кресленника.

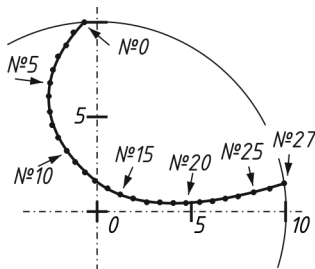


Рис. 4.2. Торцевий профіль гвинтової поверхні

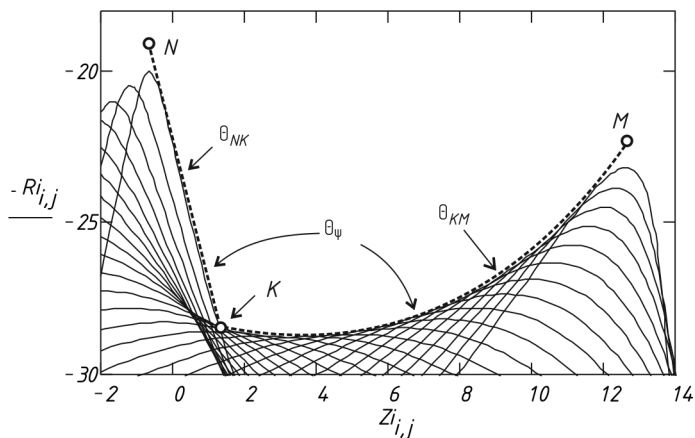


Рис. 4.3. Сімейство слідів та огинаюча до них

Ділянка KM огинаючої торкається слідів q_{13} і q_{27} . Тому точки торцевого перерізу яким вони відповідають (тобто точки від 13 по 27) будуть формоутворені повністю.

Визначимо величину похибки формоутворення для точок гвинтової поверхні слідів q , які не стосуються огинаючої Ω_{Ψ} . Розглянемо рис. 4.4 на якому у збільшеному вигляді представлені околиці точки K загальної огинаючої Θ_{Ψ} .

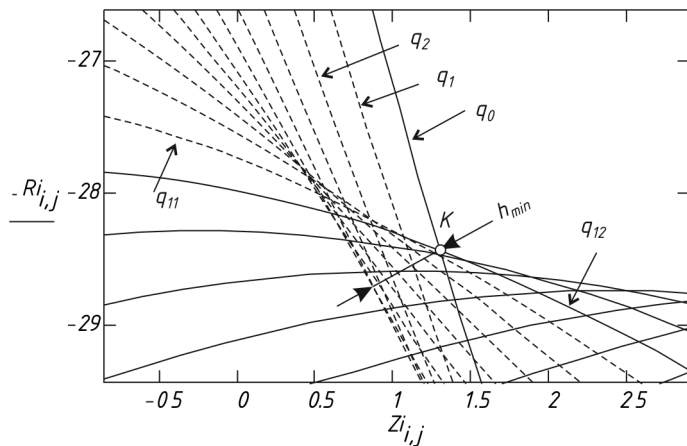


Рис. 4.4. Точка перелому початкової інструментальної поверхні

Безпосередньо з рис. 4.4 можна визначити відстань від точки K до слідів q чисельний вираз яких і буде величиною відхилення формоутвореної деталі від номінальної в даній розрахунковій точці торцевого перерізу.

Для сліду q_4 ця відстань дорівнює $h_{\min} = 0,542$ мм. Таким чином, найбільша похибка формоутворення буде в точці 4 торцевого профілю гвинтової поверхні, а її величина становитиме 0,542 мм.

Слід зазначити, що жоден з методів визначення огинаючої поверхні, що існують у теперішній час, не дозволяє отримати подібні результати без вирішення зворотної задачі. У той же час результати формоутворення, отримані за допомогою методу рухомої поверхні, були зроблені без вирішення зворотної задачі².

4.1.4. Вплив параметрів установки на профіль початкової інструментальної поверхні

Проведемо дослідження впливу параметрів, що визначають взаємне положення заготовки та інструмента, на характер розподілу слідів q та форму огинаючої до них. Такими параметрами є:

- кут ε між віссю гвинтової поверхні заготовки та віссю обертання інструмента;
- відстань d між віссю гвинтової поверхні заготовки та віссю обертання інструмента;
- орієнтація торцевого профілю гвинтової поверхні щодо інструмента.

Під орієнтацією торцевого профілю гвинтової поверхні щодо інструмента будемо розуміти його орієнтацію щодо осі Y^Δ , яка збігається із загальним перпендикуляром між осями Z^Δ та Z^Ψ і тому може слугувати реперним елементом.

Як початкові значення параметрів ε і d приймемо їх значення рівні тим, що були прийняті в попередньому розділі, тобто $d_0 = 30$ мм, $\varepsilon_0 = 1$ рад (нижній індекс “0” означає нульове початкове наближення). Торцевий переріз гвинтової поверхні орієнтуємо таким чином, щоб він ділився віссю Y^Δ приблизно на дві рівні половини.

²При застосуванні відомих методів пошуку спряженої інструментальної поверхні для визначення порушення умов формоутворення обов’язковим є вирішення “зворотної” задачі профілювання, яка більшості випадків є достатньо складною з математичної точки зору..

4.1.4.1. Вплив кута між осями інструмента та деталі

З метою вивчення впливу величини кута ε між осями інструмента і деталі на форму профілю початкової інструментальної поверхні, будемо змінювати величину кута ε в обидві сторони від базового положення в межах $\pm 0,3$ рад через $0,10$ рад. На рис. 4.5 представлені результати побудови сімейства слідів q_{Δ} .

З наведених рисунків видно, що зміна кута ε викликає значну зміну характеру слідів q_{Δ} , а відповідно і форми дотичної до них огинаючої. У той же час, зміна величини кута ε у досить широкому діапазоні ($\pm 0,3$ рад, тобто 17°) не призвела до усунення зони взаємного перекриття слідів q_{Δ} .

Ця зона лише змінює свою форму, але не зникає. При зменшенні величини кута ε ця зона зміщується до центру профілю, надаючи йому деяку симетричність. У той же час, при збільшенні кута ε вона розширюється, поширюючись на інші ділянки профілю і як би розпливється по профілю.

Узагальнюючи отримані результати можна стверджувати, що зміна величини кута ε між осями інструмента і деталі значно впливає на характер розташування слідів q і форму огинаючої до них (профіль початкової інструментальної поверхні).

Однак, найбільш прийнятний профіль початкової інструментальної поверхні виходить у тих випадках, коли вісь дискового інструменту орієнтована перпендикулярно гвинтовій траєкторії точки, яка розташована на найбільшому віддаленні від осі деталі.

У той же час, слід зазначити, що даний висновок щодо прийнятного значення кута $\varepsilon = 1$ рад справедливий тільки для даного випадку взаємного розташування інструмента та деталі, і може приймати інші значення, які залежать від форми гвинтової поверхні оброблюваної деталі.

4.1.4.2. Вплив відстані між осями деталі та інструмента

Для дослідження впливу відстані d між осями інструмента та деталі на форму огинаючої визначатимемо її характер за наступних значень відстані d : 15; 30; 50; 100; 250; 500 та 1500 мм.

Ще у 1948 році Можасєв С.С. виконав теоретичні дослідження формоутворення гвинтових канавок спірального свердла³ і рекомендує використовувати для визначення діаметра $D_{\text{фр}}$ дискової фрези для обробки

³Можасєв С. С. Аналітична теорія спіральних свердел. Львів : Львівська політехніка, 1948. 192 с.

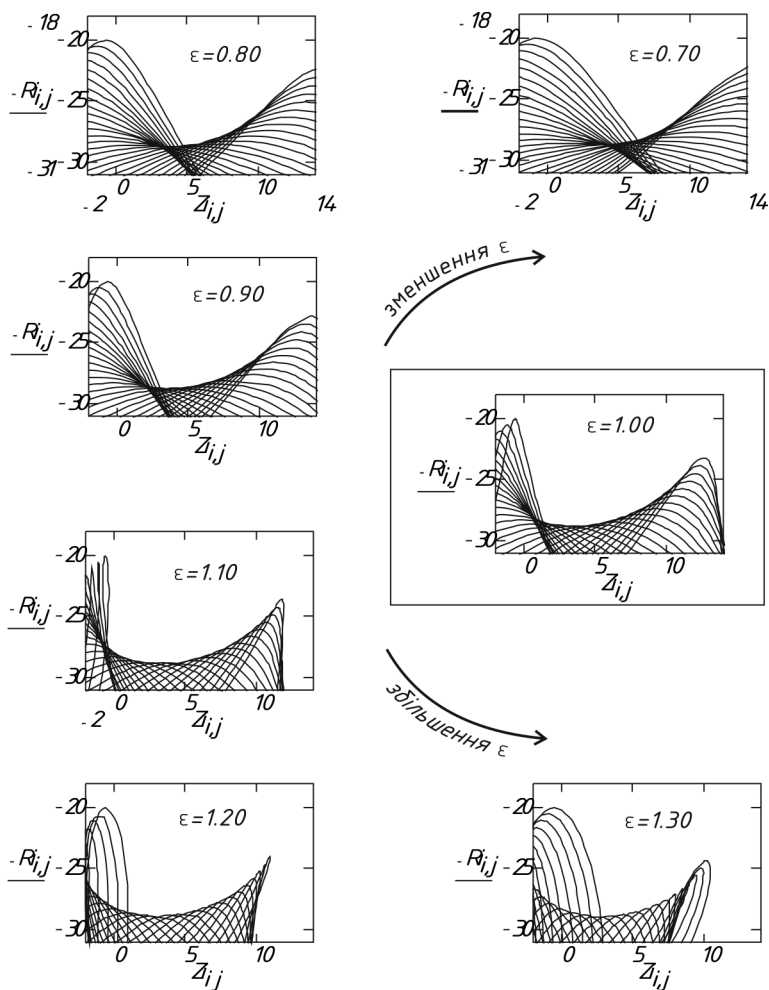


Рис. 4.5. Вплив кута між осями інструмента та заготовки на характер слідів

канавки свердла наступну залежність

$$D_{\text{фр}} = 13\sqrt{D_{\text{св}}}, \quad (4.16)$$

де $D_{\text{фр}}$ – зовнішній габаритний діаметр дисокої фрези для утворення гвинтових стружкових канавок свердла;

$D_{\text{св}}$ – зовнішній діаметр свердла.

Враховуючи цю залежність, приймемо величину відстані d між осями інструмента і деталі рівної $d = 30$ мм. Вона прийнята за базову. Величина $d = 15$ мм прийнята як мінімально можлива в даних умовах.

На рис. 4.6 представлені сімейства слідів q і результати визначення огинаючої при різних зазначених параметра d .

Аналіз отриманих результатів дозволяє стверджувати, що зміна величини відстані d між осями гвинтової поверхні та дискового інструменту, практично не впливає на характер слідів q і форму огинаючої до них.

Отже, величина міжосьової відстані деталь/інструмент при прийнятій схемі формоутворення є лише конструктивним параметром при проектуванні інструменту.

4.1.4.3. Вплив орієнтації профілю гвинтової поверхні

Вплив орієнтації торцевого профілю гвинтової поверхні на форму огинаючої можна досліджувати повертаючи початкове положення торцевого профілю навколо осі W гвинтової поверхні.

Дискретно повертатимемо торцевий профіль гвинтової поверхні щодо його початкового положення в обидві сторони на кут β через $0,2$ рад. На рис. 4.7 представлені результати визначення огинаючої для різних початкових положень торцевого профілю гвинтової поверхні, аналіз яких дозволяє зробити наступні висновки.

Початкова орієнтація торцевого перерізу гвинтової поверхні має толерантний вплив на характер слідів q і загальну форму огинаючої. Значно більше воно впливає на розташування профілю огинаючої щодо перпендикуляра загального до осей інструмента та деталі (осі X^W та Y^W) зміщуючи огинаючу вздовж осі інструмента.

Однак, необхідно відзначити, що зміщення профілю інструмента (огинаючої) вздовж осі його обертання не істотно впливає на його конструкцію або працездатність [17].

У той же час слід зазначити один досить важливий для формоутворення момент. А саме, величина найбільшої похибки формоутворення істотно залежить від початкової орієнтації торцевого профілю, що добре видно на рис. 4.7.

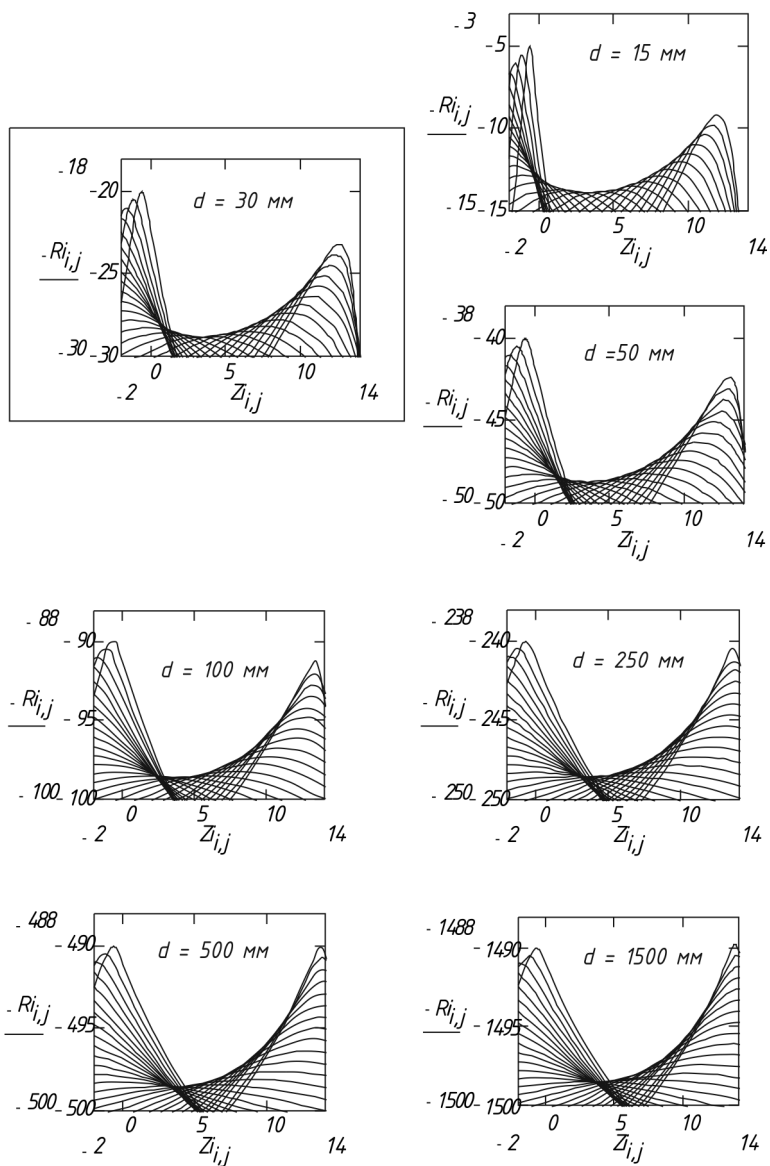


Рис. 4.6. Міжосьова відстань та характер слідів

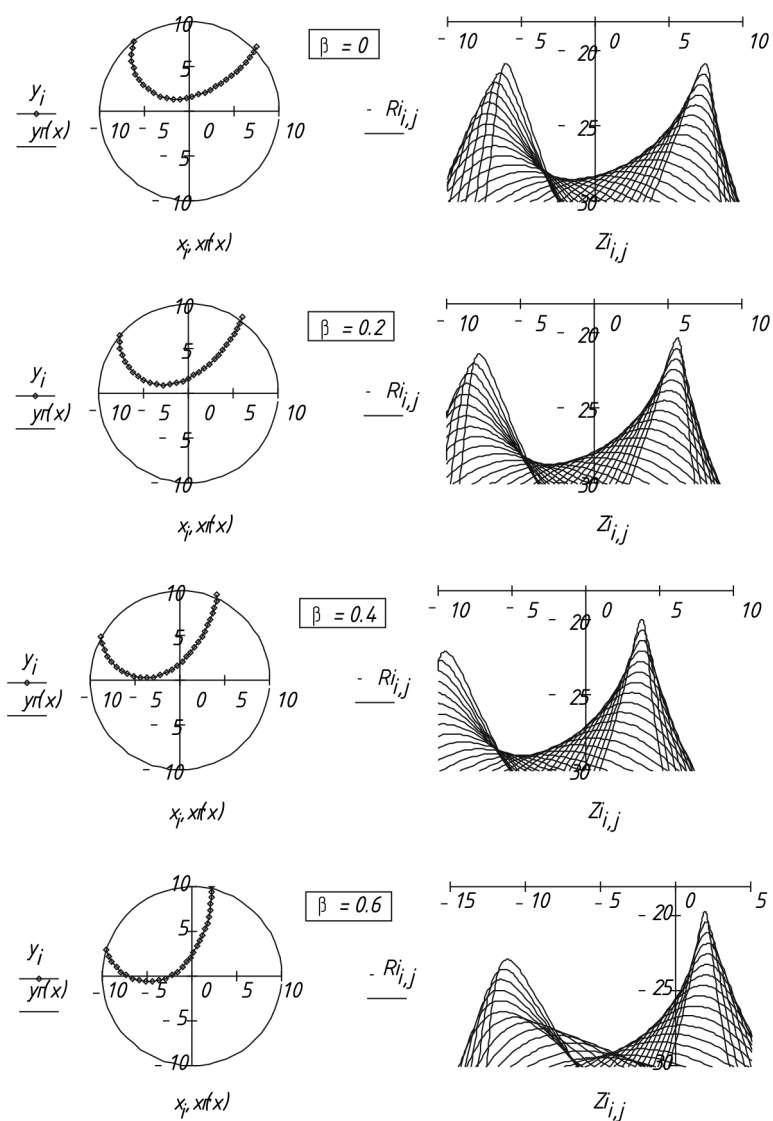


Рис. 4.7. Орієнтація торцевого перерізу свердла

4.1.5. Висновки

На підставі результатів дослідження впливу установчих параметрів⁴ на форму огинаючої та умови формування гвинтової поверхні дисковим інструментом, можна зробити наступні висновки.

Усі установчі параметри, що враховуються при проведенні досліджень, впливають на характер слідів і форму огинаючої. Однак цей вплив носить різний характер та ступінь впливу на форму початкової інструментальної поверхні для різних установчих параметрів.

Зміна відстані d між осями інструмента і деталі практично не впливає на профіль початкової інструментальної поверхні і може призначатися виходячи з конструктивних або технологічних міркувань⁵.

Найбільший вплив на характер слідів q і форму огинаючої має зміна величини кута ε між осями інструмента і деталі. Профіль початкової інструментальної поверхні виходить найбільш раціональним у тому випадку, коли вісь інструмента орієнтована приблизно перпендикулярно до гвинтової траєкторії точки деталі найбільш віддаленої від її осі.

Одночасно слід підкреслити, що це твердження підлягає коригуванню в кожному конкретному випадку обробки конкретної фасонної гвинтової поверхні.

Зміна початкової орієнтації торцевого профілю гвинтової поверхні щодо загального перпендикуляра до осей інструмента і деталі, досить толерантно відбивається на формі огинаючої. Однак істотно впливає на величину похибки обробки.

Можна стверджувати, що початкова орієнтація торцевого профілю повинна визначатися дослідним шляхом для конкретної гвинтової поверхні⁶.

⁴Нагадаємо, що під установчими параметрами маються на увазі відстань між осями інструмента (дискової фрези) і деталі (гвинтової поверхні) та кут їх схрещування.

⁵Зазвичай це габаритні розміри інструменту та оправок на яких він закріплений.

⁶Слід враховувати, що задача визначення профілю дискового інструменту для обробки конкретної гвинтової поверхні є багатоваріантною – одна і та ж гвинтова поверхня може бути утворена різним за формою інструментом за рахунок зміни установчих параметрів. Навіть не значна зміна кута схрещування між осями інструмента і деталі призводить до суттєвих змін обробленого профілю деталі.

4.2. Гвинтова поверхня утворена відомим інструментом

Визначимо профіль гвинтової поверхні деталі при кінематичній схемі формоутворення відповідної обробки дисковим інструментом [18, 19, 16]. Будемо вважати відомим профіль початкової інструментальної поверхні та взаємне розташування осі обертання інструмента O_i та осі W гвинтової поверхні заготовки.

4.2.1. Взаємне розташування об'єктів формоутворення

З відомою початковою інструментальною поверхнею зв'яжемо систему координат $\{\Psi\} : (X^\Psi Y^\Psi Z^\Psi)$, яка орієнтована за рис. 4.8. Вісь Z^Ψ збігається з віссю обертання дискового інструменту і становить з віссю W гвинтової поверхні заготовки кут ε . Вісь X^Ψ збігається із загальною нормаллю до осей заготовки та інструмента і спрямована у бік від заготовки. Вісь Y^Ψ утворює з осями X^Ψ та Z^Ψ трійку правої системи координат.

Профіль дискової початкової інструментальної поверхні будемо представляти в її осьовому перерізі, який збігається з координатною площиною $(X^\Psi Z^\Psi)$. При цьому криву профілю початкової інструментальної поверхні розташовуватимемо в області від'ємних значень координат X^Ψ . Профіль початкової інструментальної поверхні визначатимемо параметрами $x^{\Psi(M_o)}$ та $z^{\Psi(M_o)}$ точок M_o її осьового перерізу.

Параметр $x^{\Psi(M_o)}$ це відстань від розрахункової точки M_o осьового профілю початкової інструментальної поверхні до осі обертання інструмента, тобто радіус r_{in} дискового інструменту в розрахунковій точці.

Параметр $z^{\Psi(M_o)}$ це відстань z_{in} від точки O^Ψ початку системи координат $\{\Psi\}$ до проекції розрахункової точки профілю M_o на вісь Z^Ψ .

Таке представлення профілю початкової інструментальної поверхні можна обґрунтувати тим, що в практиці при експлуатації інструменту зазвичай говорять про його радіус в будь-якій точці профілю або різальної кромки.

Таким чином, осьовий профіль початкової інструментальної поверхні будемо представляти сімейством точок M_o , визначених координатами $x^{\Psi(M_o)}$ та $z^{\Psi(M_o)}$.

Для наочності подальших висновків приймемо угоди $r_{in} \equiv -x^{\Psi(M_o)}$ і $z_{in} \equiv -z^{\Psi(M_o)}$, маючи на увазі під параметром r_{in} радіус інструмента в розрахунковій точці.

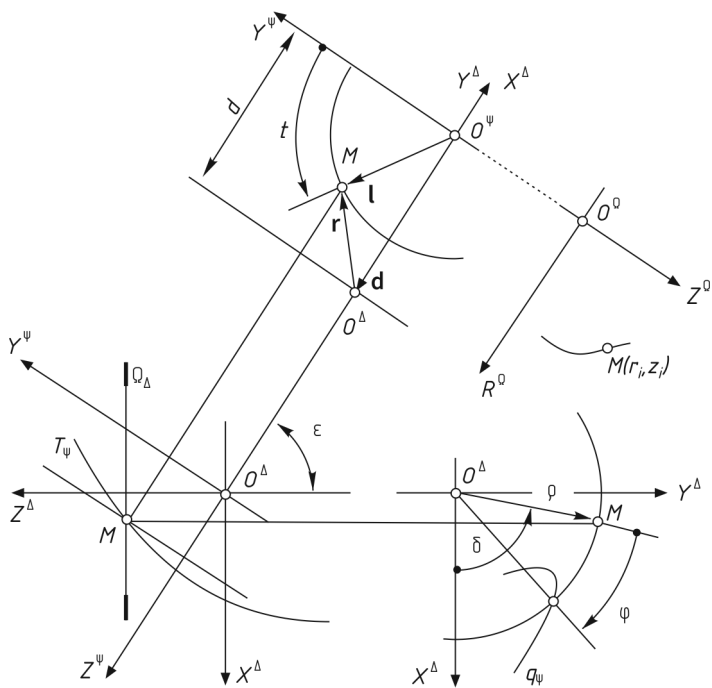


Рис. 4.8. Взаємна орієнтація систем координат

З деталлю зв'яжемо праву систему координат $\{\Delta\}$, яка орієнтована в такий спосіб. Вісь Z^Δ збігається з віссю W гвинтової поверхні заготовки і спрямована у бік правого гвинтового руху. Вісь Y^Δ збігається із загальною нормаллю до осей інструмента та заготовки, а також із віссю X^Ψ . Вісь X^Δ доповнює праву трійку осей системи $\{\Delta\}$.

Початкову інструментальну поверхню представлятимемо сукупністю траєкторій T_Ψ точок M_o осьового профілю початкової інструментальної поверхні. Траєкторії T_Ψ відповідають круговому руху точки M_o навколо осі O_{in} обертання інструмента. Таким чином надалі говоритимемо про кругові траєкторії T_Ψ точок, що представляють початкову інструментальну поверхню.

В якості рухомої поверхні Ω приймемо площину Ω_Δ , яка пов'язана з деталлю і орієнтована перпендикулярно до осі W гвинтової поверхні заготовки. Рухомі площина Ω_Δ здійснює гвинтовий рух уздовж осі Z^Δ (вісь W заготовки) з гвинтовим параметром p рівним гвинтовому параметру гвинтової поверхні заготовки. При цьому площина Ω_Δ завжди проходить через точку M , що належить початковій інструментальній поверхні і рухається по траєкторії T_Ψ .

З рухомою площиною Ω_Δ зв'яжемо двовимірну систему координат $\{\Omega\} : (X^\Delta Y^\Delta)$, яку орієнтуємо в такий спосіб. У початковому положенні площини Ω_Δ , точка O^Δ початку системи координат $\{\Omega\}$ збігається з точкою O^Δ початку систем координат $\{\Delta\}$, а осі X^Ω та Y^Ω збігаються з відповідними осями X^Δ та Y^Δ . Тоді при русі рухомої площини Ω_Δ точка O_Ω здійснюватиме обертання навколо осі Z^Δ (осі W гвинтової поверхні) та поступальне переміщення вздовж неї, які відповідають параметру p гвинтової поверхні.

Взаємне розташування заготовки та інструмента будемо визначати кутом ε між їх осями і найкоротшою відстанню d між ними.

4.2.2. Побудова сліду

Знаючи параметри z_{in} та r_{in} розрахункових точок M_o осьового профілю початкової інструментальної поверхні визначеної в системі координат $\{\Psi\}$, положення розрахункової точки M_o на круговій траєкторії T_Ψ можна визначити вектором l , як

$$l^{\Psi(M_o)} = \begin{bmatrix} -r_{in}^{(M_o)} \sin t \\ r_{in}^{(M_o)} \cos t \\ z_{in}^{(M_o)} \end{bmatrix}, \quad (4.17)$$

де t – параметр чисельно рівний величині кута, який відраховується у напрямку проти ходу годинникової стрілки від осі Y^Ψ до проекції вектора $\mathbf{l}$ на координатну площину ($X^\Psi Y^\Psi$), тобто на II чверть цієї координатної площини.

Для того, щоб представити вектор $\mathbf{l}$ в системі координат $\{\Delta\}$ пов'язаної із заготованкою, скористаємося оператором прямого перетворення $\mathbf{Res}(\Delta \rightarrow \Psi)$, який був отриманий у попередньому розділі. Оператор прямого перетворення переходу від системи координат $\{\Delta\}$ до системи координат $\{\Psi\}$ має вигляд

$$\mathbf{Res}(\Delta \rightarrow \Psi) \equiv [\]^\Psi = \mathbf{Rot}(\Delta, Y^\Delta, \varepsilon) \cdot [\]^\Delta + \mathbf{Trans}(\Delta, Y^\Delta, d), \quad (4.18)$$

де $[]^\Delta$ – стовпцевий вектор, компоненти якого визначені в системі координат $\{\Delta\}$;

$[]^\Psi$ – стовпцевий вектор, компоненти якого визначені в системі координат $\{\Psi\}$;

Тоді оператор зворотного перетворення переходу від системи $\{\Psi\}$ до системи $\{\Delta\}$ набуде вигляду

$$\begin{aligned} \mathbf{Res}(\Delta \leftarrow \Psi) \equiv [\]^\Delta &= \mathbf{Rot}^{-1}(\Delta, Y^\Delta, \varepsilon) \cdot [\]^\Psi - \mathbf{Trans}(\Delta, Y^\Delta, d) = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\cos \varepsilon & 0 & \sin \varepsilon \\ \sin \varepsilon & 0 & \cos \varepsilon \end{bmatrix} \cdot [\]^\Psi - \begin{bmatrix} 0 \\ -d \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Виконавши транспонування отримаємо

$$\mathbf{Res}(\Delta \leftarrow \Psi) = \begin{bmatrix} 0 & -\cos \varepsilon & \sin \varepsilon \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin \varepsilon & \cos \varepsilon \end{bmatrix} \cdot [\]^\Psi - \begin{bmatrix} 0 \\ -d \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4.20)$$

Таким чином, в результаті перетворень отримаємо наступний вираз вектора $\mathbf{l}$, компоненти якого визначені в системі координат $\{\Delta\}$

$$\begin{aligned} \mathbf{l}^\Delta &= \begin{bmatrix} 0 & -\cos \varepsilon & \sin \varepsilon \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin \varepsilon & \cos \varepsilon \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -r_{\text{ih}} \sin t \\ r_{\text{ih}} \cos t \\ z_{\text{ih}} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ -d \\ 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} -r_{\text{ih}} \cos t \cos \varepsilon + z_{\text{ih}} \sin \varepsilon \\ d - r_{\text{ih}} \sin t \\ z_{\text{ih}} \cos \varepsilon + r_{\text{ih}} \cos t \sin \varepsilon \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Отриманий вираз вектора $\mathbf{l}^\Delta$ визначає положення точки M , що належить початковій інструментальній поверхні при русі точки кругової траєкторії T_Ψ в системі координат $\{\Delta\}$. Відповідно до методики прийнятої в роботі, поєднаємо рухому площину Ω_Δ з точкою M , положення якої в системі $\{\Delta\}$ визначено радіус-вектором $\mathbf{l}^\Delta$.

У початковому положенні рухома площина Ω_Δ збігається з координатною площиною $X^\Delta Y^\Delta$ системи координат $\{\Delta\}$. Для того щоб рухома площина проходила через поточне положення точки M кругової траєкторії T_Ψ , вона повинна здійснити гвинтовий рух з параметром p вздовж осі Z_Δ . Цей рух можна розкласти на поступальний вздовж осі Z_Δ на величину $z^{\Delta(M)}$ і обертальний навколо осі Z^Δ на деякий кут $\varphi^{(M)}$.

Поступальне переміщення площини Ω_Δ вздовж осі Z^Δ на величину $z^{\Delta(M)}$ можна реалізувати оператором $\mathbf{Trans}(\Omega, Z^\Delta, z^{\Delta(M)})$. Якщо врахувати, що величина переміщення $z^{\Delta(M)}$ чисельно дорівнює компоненту $r_z^{\Delta(M)}$ вектора $\mathbf{r}^{\Delta(M)}$ точки M по осі Z^Δ , то оператор перенесення $\mathbf{Trans}(\Omega, Y^\Delta, r_z^\Delta)$ набуде вигляду

$$\mathbf{Trans}(\Omega, Y^\Delta, r_z^\Delta) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_z^{\Delta(M)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ z_{ih} \cos \varepsilon + r_{ih} \cos t \sin \varepsilon \end{bmatrix}. \quad (4.22)$$

Знаючи величину гвинтового параметра p та компоненти вектора $\mathbf{l}^\Delta$ можна визначити величину кута $\varphi^{(M)}$ із співвідношення

$$\varphi^{(M)} = \frac{l_z^{\Delta(M)}}{p} = \frac{z_{ih} \cos \varepsilon + r_{ih} \cos t \sin \varepsilon}{p}. \quad (4.23)$$

Тоді оператор $\mathbf{Rot}(\Omega, Z^\Delta, \varphi)$ повороту системи координат $\{\Omega\}$ навколо осі Z^Δ на кут φ набуде вигляду

$$\mathbf{Rot}(\Omega, Z^\Delta, \varphi) = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.24)$$

Таким чином, оператор $\mathbf{Res}(\Delta, \Omega)$ переходу від нерухомої системи координат $\{\Delta\}$, пов'язаної із заготовкою, до рухомої системи координат $\{\Omega\}$ пов'язаної з рухомою площиною Ω набуде вигляду

$$\begin{aligned} \mathbf{Res}(\Delta \rightarrow \Omega) &\equiv [\]^\Omega = \mathbf{Rot}(\Omega, Z^\Delta, \varphi) \cdot [\]^\Delta - \mathbf{Trans}(\Omega, Z^\Delta, r_z^\Delta) = \\ &= \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot [\]^\Delta + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ z_{ih} \cos \varepsilon + r_{ih} \cos t \sin \varepsilon \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (4.25)$$

- де $[]^\Delta$ – стовпцевий вектор, компоненти якого визначені в системі координат $\{\Delta\}$;
 $[]^\Omega$ – стовпцевий вектор, компоненти якого визначені в системі координат $\{\Omega\}$.

Підставляючи в оператор $\text{Res}(\Delta, \Omega)$ значення компонент вектора $\mathbf{l}^\Delta$ остаточно отримаємо

$$\begin{aligned} \mathbf{l}^{\Omega(M)} &= \text{Res}(\Delta \rightarrow \Omega) = \\ &= \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -r_{\text{ih}} \cos t \cos \varepsilon + z_{\text{ih}} \sin \varepsilon \\ d - r_{\text{ih}} \sin t \\ z_{\text{ih}} \cos \varepsilon + r_{\text{ih}} \cos t \sin \varepsilon \end{bmatrix} + \\ &\quad + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ z_{\text{ih}} \cos \varepsilon + r_{\text{ih}} \cos t \sin \varepsilon \end{bmatrix}. \quad (4.26) \end{aligned}$$

Виконавши відповідні перетворення отримаємо

$$\mathbf{l}^\Omega = \begin{bmatrix} \cos \varphi (-r_{\text{ih}} \cos t \cos \varepsilon + z_{\text{ih}} \sin \varepsilon) + (d - r_{\text{ih}} \sin t) \sin \varphi \\ \cos \varphi (d - r_{\text{ih}} \sin t) - (r_{\text{ih}} \cos t \cos \varepsilon + z_{\text{ih}} \sin \varepsilon) \sin \varphi \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4.27)$$

Таким чином, координати розрахункових точок Q сліду q_Ψ перетину рухомої площини Ω_Δ з круговими траєкторіями T_Ψ можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} x^\Omega &= \cos \varphi (-r_{\text{ih}} \cos t \cos \varepsilon + z_{\text{ih}} \sin \varepsilon) + (d - r_{\text{ih}} \sin t) \sin \varphi, \\ y^\Omega &= \cos \varphi (d - r_{\text{ih}} \sin t) - (r_{\text{ih}} \cos t \cos \varepsilon + z_{\text{ih}} \sin \varepsilon) \sin \varphi. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Зважаючи на припущення, зроблені раніше щодо параметрів r_{ih} та z_{ih} , тобто враховуючи що $r_{\text{ih}} \equiv -x^{\Psi(M)}$ та $z_{\text{ih}} \equiv z^{\Psi(M)}$ можна записати координати точки Q сліду q_Ψ на рухомій площині Ω в остаточному вигляді

$$\begin{aligned} x^{\Omega(Q)} &= \cos \varphi \left(x^{\Psi(M)} \cos t \cos \varepsilon + z^{\Psi(M)} \sin \varepsilon \right) + \\ &\quad + \left(d + x^{\Psi(M)} \sin t \right) \sin \varphi, \quad (4.29) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y^{\Omega(Q)} &= \cos \varphi \left(d + x^{\Psi(M)} \sin t \right) - \\ &\quad - \left(x^{\Psi(M)} \cos t \cos \varepsilon + z^{\Psi(M)} \sin \varepsilon \right) \sin \varphi. \quad (4.30) \end{aligned}$$

4.2.3. Аналіз умов формоутворення

Для проведення аналізу умов формоутворення прийнемо ті ж установчі параметри⁷, які були при пошуку початкової інструментальної поверхні в попередньому розділі.

Вважатимемо відомими координати профілю осевого перерізу початкової інструментальної поверхні отримані з вирішення попередньої задачі (рис. 4.9). Зображення слідів $q\psi$ на площині Ω_Δ представлено на рис. 4.10. Пунктирна лінія D відтворює номінальний профіль деталі.

З наведених рисунків видно, що загальна огинаюча Θ до сімейства слідів q та крива D номінального профілю деталі не збігаються між собою. Отже можна стверджувати, що за умов даного дослідження утворити повністю гвинтову поверхню неможливо.

Найбільша величина h_Δ відхилення утвореного профілю від номінального становить $h = 0,544$ мм. Слід зазначити, що цей результат був отриманий раніше при визначенні профілю початкової інструментальної поверхні, тобто без вирішення зворотної задачі формоутворення.

Далі. Найбільша величина h_Δ похибки формоутворення відповідає відстані від сліду q_K залишеного точкою K профілю інструментальної поверхні до точки M_4 торцевого профілю деталі, що також збігається з висновками щодо результатів формоутворення, зроблених при вирішенні прямої задачі.

Профіль деталі, отриманий в результаті формоутворення, можна розділити на дві ділянки. Ділянка NK утворена тільки одним слідом q_K

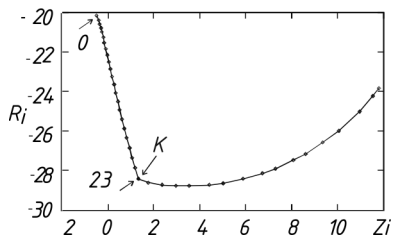


Рис. 4.9. Профіль початкової інструментальної поверхні

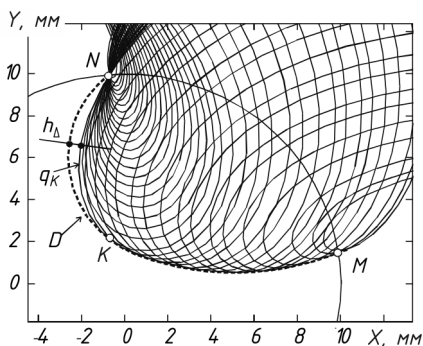


Рис. 4.10. Сімейство слідів

⁷Тобто відстань d між осями інструмента та деталі, а також кут ϵ їх схрещування.

точки K профілю інструментальної поверхні, і ділянка KM утворена як огинаюча до слідів q_{Ψ} точок початкової інструментальної поверхні.

Таким чином, формотворними є тільки точки інструментальної поверхні від 23 і далі до 39 (рис. 4.11), точка 23 відповідає точці K . Точки профілю інструмента з 0 по 22 включно (рис. 4.12), участі у формоутворенні поверхні не приймають.

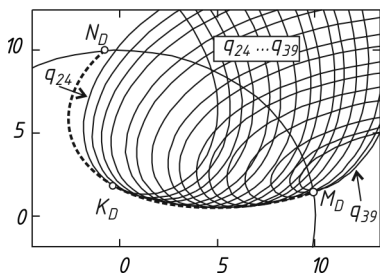


Рис. 4.11. Поверхню деталі утворюють декілька слідів

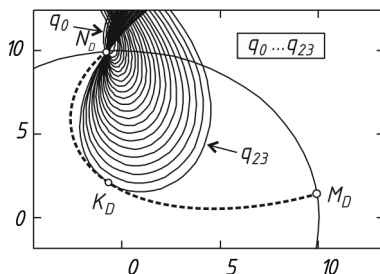


Рис. 4.12. Поверхню деталі утворює тільки один слід

Необхідно відзначити, що відстань між сусідніми слідами q не відповідає товщині шару зрізаного різальною кромкою в розрахунковій точці. Кожен слід q є слідом перетину траєкторії T точки інструмента з рухомою площиною, яка при прийнятій схемі формоутворення розташована перпендикулярно до осі гвинтової поверхні деталі.

Таким чином, відстань між сусідніми слідами q це тільки відстань між двома слідами траєкторій T розрахункових точок профілю інструмента в поточний момент часу або при поточному положенні різальної кромки, визначене в рухомій площині Ω_{Ψ} .

Слід підкреслити, що всі результати були отримані раніше, при визначенні профілю початкової інструментальної поверхні і тим самим підтверджують наведені раніше теоретичні положення.

Розглянемо вплив відхилення взаємного розташування інструмента і деталі від розрахункового становища. З цією метою змінюватимемо величину кута між осями інструмента і деталі. На рис. 4.13 представлено сімейство слідів q для випадку, коли кут ϵ між осями інструмента та деталі менший за “оптимальний” на величину 0,05 рад. На рис. 4.14 представлено сімейство слідів q для випадку, коли кут ϵ між осями інструмента та деталі більший за “оптимальний” на величину 0,05 рад.

З наведених результатів видно, що в обох випадках (при $\epsilon := \epsilon - 0,05$ рад і $\epsilon := \epsilon + 0,05$ рад) відбувається суттєва зміна характеру взаємного

розташування слідів q . В обох випадках форма огинаючої до сімействі слідів істотно відрізняється від номінального профілю деталі позначеного пунктирною лінією.

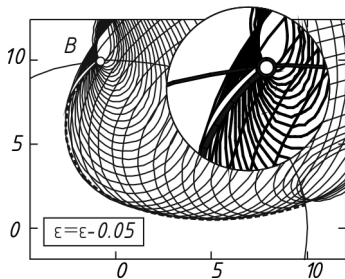


Рис. 4.13. Кут між осями інструмента та деталі менший за “оптимальний”

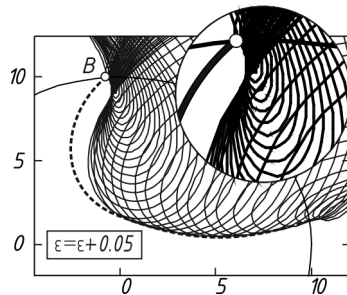


Рис. 4.14. Кут між осями інструмента та деталі більший за “оптимальний”

У той же час характер цієї зміни взаємно протилежний. При збільшенні кута ϵ профіль огинаючої до сімейства слідів набуває подвійного викривлення, проте огинаюча торкається номінального профілю в розрахунковій точці B . При зменшенні величини кута ϵ відбувається розширення області розташування сімейства слідів q і вони зрізують частину номінальної поверхні деталі.

4.2.4. Висновки

Отримані результати дозволяють стверджувати, що навіть у тому випадку, коли умови формоутворення не дотримуються і утворити профіль деталі ідентичний номінальному неможливо, можна за рахунок цілеспрямованого відхилення настановних параметрів від розрахункових значень, отримати задовільні результати⁸.

Отримані результати визначення величини похибки формоутворення при вирішенні зворотної задачі, повністю збігаються з результатами отриманими при визначенні профілю початкової інструментальної поверхні, що підтверджує правильність сформульованих теоретичних положень.

Показано, що змінюючи величину кута ϵ між осями інструмента та деталі можна коригувати профіль оброблюваної деталі, навіть при порушенні умов формоутворення⁹.

⁸Це твердження можна зробити з розгляду рис. 4.14.

⁹Порушення умов формоутворення може бути цілеспрямованим у випадку, коли головним отримання працездатної деталі, у навіть при її відхилення від кресленника.

4.3. Профіль різальної кромки

Визначимо профіль різальної кромки фасонної дискової фрези, яка має зубці з додатнім переднім кутом $\gamma > 0$. Як інструмент дослідження будемо використовувати метод рухомої поверхні, що запропоновано в даній роботі.

Необхідно відзначити, що задача визначення профілю різальної кромки дискового фасонного інструменту може бути вирішена за іншими методиками. Однак, використовуючи їх для визначення профілю різальної кромки зуба фрези, необхідно спочатку визначити форму початкової інструментальної поверхні і тільки потім знайти профіль кромки, як слід перетину початкової інструментальної поверхні з передньою поверхнею різального зубця¹⁰.

На відміну від них, теоретичні положення, покладені в основу методу рухомої площини щілини, дозволяють визначити профіль різальної кромки зубця фасонного інструменту минаючи стадію визначення початкової інструментальної поверхні.

4.3.1. Взаємне розташування об'єктів формоутворення

З гвинтовою поверхнею зв'яжемо систему координат $\{\Delta\}$. Вісь Z^Δ збігається з віссю гвинтової поверхні, координатна площина $(X^\Delta Y^\Delta)$ збігається з її торцевим перерізом рис. 4.15.

Торцевий профіль гвинтової поверхні визначений сімейством точок M з відомими полярним кутом δ та радіус-вектором ρ .

З інструментом зв'яжемо систему координат $\{\Psi\}$: $(X^\Psi Y^\Psi Z^\Psi)$, вісь Z^Ψ якої збігається з віссю $O_{\text{ін}}$ інструмента, а вісь X^Ψ збігається з координатною віссю Y^Δ .

Як рухому поверхню Ω приймемо площину Ω_Ψ орієнтовану наступним чином. Площина Ω_Ψ розташована паралельно осі Z^Ψ (осі обертання інструмента) і віддалена від неї на відстані d , яку можна визначити знаючи величину переднього кута γ зубця фрези і радіус r_v у його вершинній точці¹¹.

Тоді можна записати наступний вираз

$$d = r_v \sin \gamma. \quad (4.31)$$

¹⁰Зазвичай в якості передньої поверхні зубця приймають площину. Це спрощує математичний сторону задачі.

¹¹Передній кут γ визначають у площині перпендикулярній до осі обертання фрези, а радіус r_v дорівнює відстані від осі фрези до найбільш віддаленої точки різальної кромки, тобто це "габаритний" розмір інструменту.

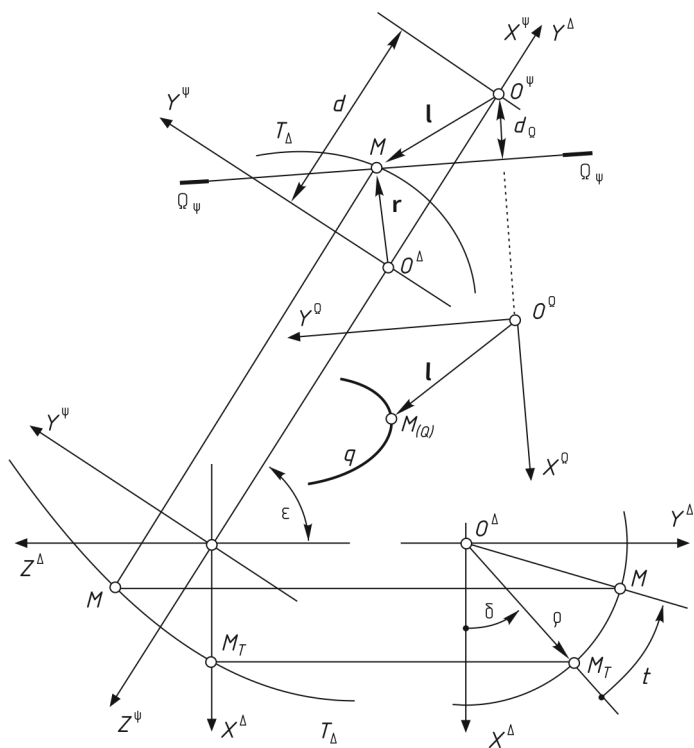


Рис. 4.15. Рухомя площина, як передня поверхня зубця фрези

У процесі проведення дослідження обертатимемо площину Ω_Ψ навколо осі Z^Ψ , яка збігається з віссю обертання інструмента.

4.3.2. Побудова сліду в передній поверхні зубця

Положення розрахункової точки M гвинтової траєкторії T_Δ можна визначити радіус-вектором $\mathbf{r}$, який у системі координат $\{\Delta\}$ має такі компоненти

$$\mathbf{r}^{\Delta(M)} = \begin{bmatrix} \rho \cos(\delta + t) \\ \rho \sin(\delta + t) \\ pt \end{bmatrix}, \quad (4.32)$$

де t – параметр, чисельно рівний величині кута повороту проєкції точки M на координатну площину $(X^\Delta Y^\Delta)$ під час її гвинтового руху.

Для визначення положення точки M у системі координат $\{\Psi\}$ пов'язаної з інструментом скористаємося оператором перетворення $\mathbf{Res}(\Delta, \Psi)$ переходу від системи координат $\{\Delta\}$ до системи координат $\{\Psi\}$, який був отриманий раніше (формула (4.5) на с. 115 у попередньому розділі) та має вигляд

$$\begin{aligned} \mathbf{Res}(\Delta, \Psi) &= \mathbf{Rot}(\Delta, Y^\Delta, \varepsilon) \cdot \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix}^\Delta + \mathbf{Trans}(\Delta^1, Y^\Delta, d) = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\cos \varepsilon & 0 & \sin \varepsilon \\ \sin \varepsilon & 0 & \cos \varepsilon \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix}^\Delta + \begin{bmatrix} 0 \\ -d \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (4.33) \end{aligned}$$

де $[\]^\Delta$ – стовпцевий вектор, компоненти якого представлені у системі координат $\{\Delta\}$.

Виконаємо перехід від ортогональної системи координат $\{\Psi\}$ до двовимірної $\{\Omega\}$ зв'язаної з рухомою поверхнею Ω_Ψ . Положення точки M гвинтової траєкторії T_Δ відносно початку O^Ψ системи координат $\{\Psi\}$ можна визначити радіус-вектором $\mathbf{r}^{\Omega(M)}$. Тоді компоненту $l_x^{\Omega(M)}$ радіус-вектора точки M гвинтової траєкторії T_Δ в системі координат $\{\Omega\}$ можна подати як

$$l_x^{\Omega(M)} = r_x^{\Psi(M)}. \quad (4.34)$$

Компоненту $l_y^{\Omega(M)}$ можна визначити, як катет прямокутного трикутника $MDO_{\text{ін}}$. Проекція $l_{xy}^{\Omega(M)}$ вектора $\mathbf{r}^{\Psi(M)}$ на координатну площину $(X^{\Psi Y^{\Psi}})$ дорівнює

$$r_{xy}^{\Omega(M)} = \sqrt{(r_x^{\Psi(M)})^2 + (r_y^{\Psi(M)})^2}. \quad (4.35)$$

Тоді компонента $l_y^{\Omega(M)}$ дорівнюватиме

$$l_y^{\Omega(M)} = \sqrt{(r_{xy}^{\Omega(M)})^2 - d^2}.$$

Таким чином, координати точок M сліду q у двовимірній системі координат Ω будуть визначатися як

$$l_x^{\Omega(M)} = p t \cos \varepsilon + \rho \cos (\delta + t) \sin \varepsilon, \quad (4.36)$$

$$l_y^{\Omega(M)} = \sqrt{(d - \rho \sin (\delta + t))^2 - d^2} + \sqrt{(\rho \cos (\delta + t) \cos \varepsilon - p t \sin \varepsilon)^2}. \quad (4.37)$$

4.3.3. Вплив переднього кута на форму різальної кромки

Як вихідні дані приймемо ті ж значення параметрів, що і при визначенні профілю початкової інструментальної поверхні прийняті в попередніх розділах. Будемо проводити дослідження форми різальної кромки дискової фасонної фрези при значеннях переднього кута від 0° до 30° .

На рис. 4.16 представлені сімейства слів q_Δ у рухомій площині ідентифікованій як передня площина зубця фрези.

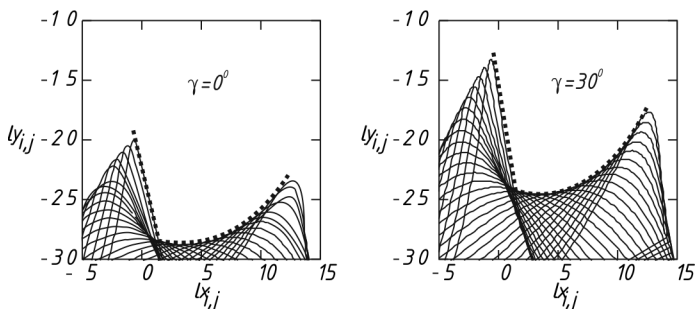


Рис. 4.16. Профіль різальної кромки

З наведеного рисунку видно, що форма різальної кромки успадковує загальні обриси осьового профілю початкової інструментальної поверхні, проте через наявність переднього кута γ відмінного від нуля набуває дещо витягнуту форму.

Таким чином, застосовуючи метод рухомої площини можна, минаючи стадію визначення початкової інструментальної поверхні, відразу визначити форму різальної кромки інструмента в передній площині його зубця.

4.3.4. Висновки

За результатами проведеного дослідження пошуку профілю різальної кромки дискової фасонної фрези для утворення гвинтової поверхні постійного кроку, можна зробити наступні висновки.

Запропонований метод рухомої поверхні дозволяє визначити профіль різальної кромки інструмента ще на стадії його профілювання без вирішення зворотної задачі формоутворення.

Показано, що зміна переднього кута різального зубця фрези впливає на форму та розміри різальної кромки визначеної у передній площині зубця.



5. ОБКАТНИЙ ІНСТРУМЕНТ

Обкатний інструмент відносяться до інструменту, який працює за кінематичною схемою еквівалентною коченню кола по колу¹ і найбільш часто використовуються при формоутворенні зубчастих евольвентних коліс, а також деталей типу зубчастих секторів довільного профілю.

5.1. Довбачі

Зазвичай, кінематична схема формоутворення, яка застосовується під час роботи інструменту типу довбач трансформується від просторової задачі до її плоского аналогу. Профіль деталі представляють її торцевим перерізом, а початкова інструментальна поверхня визначається як деякий плоский профіль, при цьому обидва перерізи, деталі та початкової інструментальної поверхні розглядаються в одній площині [20, 18].

Теоретично це допустимо, так як і гвинтова поверхня деталі і гвинтова початкова поверхня є простими поверхнями, які допускають ковзання "самих по собі". У цьому випадку для будь-якого довільного перетину деталі або початкової інструментальної поверхні змінюється тільки його орієнтація, але не сам профіль.

У той же час, в основу методу рухомої поверхні покладено два принципи, що кардинально змінюють хід вирішення задачі формоутворення:

- по-перше, гвинтова поверхня деталі розглядається, як сукупність гвинтових траєкторій точок, що належать цій поверхні;
- по-друге, сама рухома поверхня в загальному випадку є не площиною, а саме просторовою поверхнею. В результаті цього задача формоутворення повинна розглядатися як просторова.

У цьому випадку рухома поверхня повинна здійснювати два рухи:

- перший рух – разом із розрахунковою точкою при русі цієї точки за своєю гвинтовою траєкторією;
- другий рух – той, який здійснює інструмент у процесі обробки деталі.

¹ Або коло по прямій, чи навпаки, якщо прийняти один з радіусів рівним нескінченності.

В силу цього можна стверджувати, що процес формоутворення гвинтових поверхонь інструментом типу довбач є двома параметричним. Де першим параметром є параметр, що визначає положення інструмента в процесі формоутворення, а саме кут ω_ψ його повороту. А другий, це параметр t визначає положення розрахункової точки на її гвинтовій траєкторії. Тоді при кожному дискретному і фіксованому значенні параметра ω_ψ , параметр t “пробігає” всі свої допустимі значення.

Особливості просторової задачі

Розглянемо деякі особливості просторового представлення задачі формоутворення. Розглянемо процес формоутворення при деякому фіксованому значенні провідного² параметра ω_ψ .

Нехай тепер параметр t , що визначає положення розрахункової точки M на гвинтовій траєкторії T_Δ , пробігає ряд своїх допустимих значень. Якщо розглядати положення точки M як слід її проекції на торцеву площину деталі Θ_Δ , то він набуде вигляду кола, тому що проекція гвинтової лінії на площину перпендикулярну до осі гвинтового руху є коло.

Тепер розглядатимемо рухи рухомої поверхні Ω_ψ і слідів q_Δ , які залишаються на ній від перетину з гвинтовою траєкторією T_Δ .

Нехай для простоти початкових міркувань поверхня Ω_ψ буде плоскою. Рухома площина Ω_ψ пов’язана з інструментом і здійснює рухи разом з ним. Отже, при русі точки M гвинтовою траєкторією T_Δ – площина Ω_ψ буде переміщатися вздовж осі інструмента (разом точкою M) і одночасно обертатися навколо осі інструмента разом з ним. Тоді проекція цих переміщень на площину ортогональних осі деталі (або інструмента), можна звести до взаємного відносного кочення деталі та інструмента. Внаслідок цього форма сліду q_Δ набуде вигляду циклоїди³.

Таким чином, можна стверджувати, що при фіксованому значенні параметра ω_Δ – слід q_Δ переміщення розрахункової точки M по траєкторії T відносно площини Ω_ψ буде циклоїдою. Якщо тепер, параметр ω_Δ набуде свого чергового фіксованого значення, то й інструмент, а

²Провідний параметр, це параметр від якого залежать всі інші параметри формоутворення. Ця залежність не є обов’язково математично визначеною, але у будь-якому разі провідний параметр є головним.

³Циклоїда (від грец. *κυκλοειδής*, “кругоподібний”) – плоска трансцендентна крива. Циклоїда визначається кінематично як траєкторія фіксованої точки кола, що котиться без ковзання по прямій.

Додатково розрізняють скорочену та подовжену циклоїду. Траєкторія скороченої (подовженої) циклоїди – траєкторія точки, що знаходиться на деякій відстані від центру колеса (кола), яке котиться на площині (прямій).

разом з ним і площина Ω_Ψ , повернуться на відповідний кут ω_Ψ . У цьому випадку розрахункова точка M теж повернеться навколо осі деталі на кут ω_Δ .

Але це переміщення вже було, коли точка M здійснювала рух гвинтовою траєкторією. Отже, новий слід q_Δ перетину траєкторії T_Δ з площиною Ω_Ψ збігатиметься з попереднім слідом q_Δ . Саме з цієї причини просторову задачу формоутворення інструментом типу довбач можна розглядати, як плоску, звівши її до взаємного кочення кола по колу.

Трансформування просторової задачі до плоскої, можна застосовувати щодо плоского профілю початкової інструментальної поверхні. Однак при визначенні просторового профілю різальної кромки інструмента, неможливо оперувати з просторовим уявленням об'єктів формоутворення.

5.1.1. Взаємне розташування об'єктів дослідження

З гвинтовою поверхнею деталі зв'яжемо ортогональну систему координат $\{\Delta\} : (X^\Delta Y^\Delta Z^\Delta)$ орієнтовану у спосіб поданий на рис. 5.1. Вісь Z^Δ збігається з віссю гвинтової поверхні деталі. Вісь Y^Δ ортогональна до осі інструмента та перетинає її.

Профіль гвинтової поверхні деталі визначений профілем її торцевого перетину Θ_Δ , який збігається з координатною площиною $(X^\Delta Y^\Delta)$, а сама гвинтова поверхні представлена сукупністю гвинтових траєкторій T_Δ точок M торцевого перерізу.

З інструментом зв'яжемо систему координат $\{\Psi\} : (X^\Psi Y^\Psi Z^\Psi)$ вісь Z^Ψ якої збігається з віссю обертання інструмента і направлена у бік шпинделя верстата. У початковий момент вісь Y^Ψ перетинає вісь Z^Δ обертання деталі.

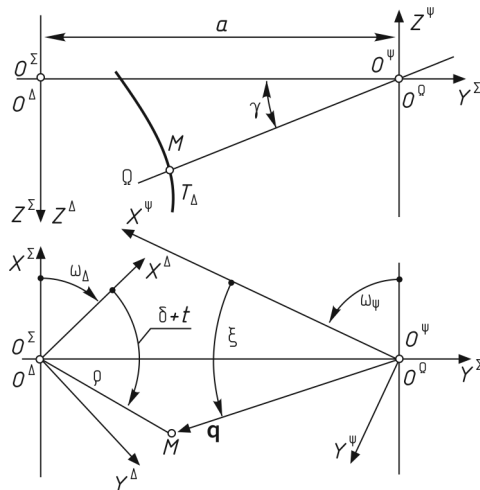


Рис. 5.1. Орієнтація систем координат

Взаємне розташування систем координат $\{\Delta\}$ і $\{\Psi\}$ визначатимемо в нерухомій системі координат $\Sigma : (X^\Sigma Y^\Sigma Z^\Sigma)$ вісь Z^Σ якої збігається з віссю Z^Δ обертання деталі.

Відстань між початками O^Ψ та O^Δ систем координат $\{\Psi\}$ і $\{\Delta\}$ визначимо як a , і приймемо її такою, що дорівнює сумі радіусів початкових кіл r_Δ і r_Ψ пов'язаних відповідно з деталлю (система координат $\{\Delta\}$) та інструментом (система координат $\{\Psi\}$).

Як рухомої поверхні приймемо конічну поверхню з якою зв'яжемо двовимірну конічну систему координат $\{\Omega\} : (U^\Omega V^\Omega)$. Вісь U^Ω спрямована вздовж прямої лінії твірної конічної поверхні. За додатній напрямок осі U^Ω приймемо напрямок від вершини конуса до його основи. Вісь V^Ω є частиною дуги кола. Кут конуса визначатимемо кутом γ при його основі.

Таким чином, положення довільної точки M на конічній поверхні Ω_Ψ визначається координатою u^Ω , чисельно рівною відстані від точки M до вершини конуса O^Ω . А також координатою v^Ω , чисельно рівною довжині дуги кола, що лежить на конічній поверхні. За додатній напрямок осі V^Ω приймемо напрямок проти руху годинної стрілки, якщо дивитися з вершини конуса, тобто з початку O^Ω системи координат $\{\Omega\}$.

Слід зазначити, що при обраній формі рухомої поверхні Ω_Ψ а саме конічної – вона збігається з формою передньої поверхні стандартного довбача, що використовується для формоутворення евольвентних зубчастих коліс.

У процесі дослідження конічна поверхня здійснює тільки обертальний рух обкатки разом з інструментом. При цьому осі U^Ω та V^Ψ завжди розташовані в одній площині, тобто системи координат $\{\Omega\}$ та $\{\Psi\}$ жорстко зв'язані між собою.

5.1.2. Побудова слідів перетину гвинтової траєкторії з рухомою поверхнею

Положення розрахункової точки M на гвинтовій траєкторії T_Δ у системі координат $\{\Delta\}$ можна визначити радіус-вектором

$$\mathbf{m}^\Delta = \begin{bmatrix} \rho \cos(\delta + t) \\ \rho \sin(\delta + t) \\ p t \end{bmatrix}. \quad (5.1)$$

У процесі формоутворення деталей здійснює обертальний рух навколо осі Z^Δ . Для того щоб визначити положення точки M гвинтової траєкторії

T_{Δ} у нерухомій системі координат $\{\Sigma\}$ застосуємо оператор перетворення $\mathbf{Res}(\Delta, \Sigma)$, який можна реалізувати оператором повороту $\mathbf{Rot}(\Delta, Z^{\Delta}, \omega_{\Delta})$ системи $\{\Delta\}$ навколо її осі Z^{Δ} на кут ω_{Δ} . Тоді

$$\mathbf{Res}(\Delta, \Sigma) \equiv \mathbf{Rot}(\Delta, Z^{\Delta}, \omega_{\Delta}) = \begin{bmatrix} \cos \omega_{\Delta} & -\sin \omega_{\Delta} & 0 \\ \sin \omega_{\Delta} & \cos \omega_{\Delta} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.2)$$

Отже, положення точки M на гвинтовій траєкторії T_{Δ} відносно нерухомої системи координат $\{\Sigma\}$ визначатиметься радіус-вектором

$$\begin{aligned} \mathbf{m}^{\Sigma} &= \mathbf{Res}(\Delta, \Sigma) \equiv \mathbf{Rot}(\Delta, Z^{\Delta}, \omega_{\Delta}) \cdot \mathbf{m}^{\Delta} = \\ &= \begin{bmatrix} \cos \omega_{\Delta} & -\sin \omega_{\Delta} & 0 \\ \sin \omega_{\Delta} & \cos \omega_{\Delta} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \rho \cos(\delta + t) \\ \rho \sin(\delta + t) \\ p t \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \rho \cos(\delta + t) \cos \omega_{\Delta} - \rho \sin(\delta + t) \sin \omega_{\Delta} \\ \rho \cos \omega_{\Delta} \sin(\delta + t) + \rho \cos(\delta + t) \sin \omega_{\Delta} \\ p t \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \rho \cos(\delta + t + \omega_{\Delta}) \\ \rho \sin(\delta + t + \omega_{\Delta}) \\ p t \end{bmatrix}. \quad (5.3) \end{aligned}$$

Необхідно відзначити, що компоненти вектора $\mathbf{m}^{\Sigma}$ містять два взаємно інваріантні параметри, а саме t і ω_{Δ} . Змінний параметр t визначає положення розрахункової точки M при її русі гвинтовою траєкторією T_{Δ} . Другий змінний параметр є кутом ω_{Δ} , який визначає величину повороту формоутворюваної деталі відносно нерухомого простору, тобто відерсно осей системи координат $\{\Sigma\}$.

Рухомі поверхні Ω_{Ψ} при своєму русі відносно деталі, здійснює тільки обертання навколо своєї осі. При обертальному русі кінцевої поверхні Ω_{Ψ} вона ковзає сама по собі, і тому при формулюванні умови перетину гвинтової траєкторії T_{Δ} з поверхнею Ω_{Ψ} , обертальний рух поверхні Ω_{Ψ} можна не враховувати.

Положення точки M щодо початку O^{Ψ} системи координат, пов'язаної з інструментом, можна визначити вектором $\mathbf{q}$, початок якого розташований у точці O^{Ψ} , а кінець суміщений з поточним положенням точки M . Тоді

$$\begin{aligned} \mathbf{q}^{\Sigma} &= \mathbf{m}^{\Sigma} - \mathbf{a}^{\Sigma}, \\ \mathbf{a}^{\Sigma} &= \begin{bmatrix} 0 & a & 0 \end{bmatrix}^T. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Слід зазначити, що у наведеному виразі всі компоненти векторів визначено у нерухомій системі координат $\{\Sigma\}$. Тоді

$$\begin{aligned} \mathbf{q}^\Sigma = \mathbf{m}^\Sigma - \mathbf{a}^\Sigma &= \begin{bmatrix} \rho \cos(\delta + t + \omega_\Delta) \\ \rho \sin(\delta + t + \omega_\Delta) \\ p t \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ a \\ 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \rho \cos(\delta + t + \omega_\Delta) \\ \rho \sin(\delta + t + \omega_\Delta) - a \\ p t \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Якщо точка M під час руху гвинтовою траєкторією T_Δ збігається з кінцею поверхнею Ω_Ψ , то вектор $\mathbf{q}^\Sigma$ збігатиметься з поверхнею Ω_Ψ . Отже, у цьому положенні напрямок вектора $\mathbf{q}^\Sigma$ становитиме відносно координатної площини ($X^\Sigma Y^\Sigma$) кут – рівний куту γ , тобто передньому куту довбача. Тоді умову збігу точки M гвинтової траєкторії T_Δ з кінцею рухомою поверхнею Ω_Ψ можна математично сформулювати у наступному вигляді

$$\sin \gamma = \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{q}| \cdot |\mathbf{n}|}. \quad (5.6)$$

В даному виразі вектор $\mathbf{n}$ є вектором нормальним до координатної площини ($X^\Sigma Y^\Sigma$). У системі координат (Σ) вектор $\mathbf{n}$ одиничної довжини можна визначити у вигляді $\mathbf{n} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$. Тоді

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = \begin{bmatrix} \rho \cos(\delta + t + \omega_\Delta) \\ \rho \sin(\delta + t + \omega_\Delta) - a \\ p t \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = p t, \quad (5.7)$$

$$|\mathbf{q}| \cdot |\mathbf{n}| = \sqrt{a^2 + p^2 t^2 + \rho^2 - 2 a \rho \sin(\delta + t + \omega_\Delta)}. \quad (5.8)$$

Отже, умова збігу точки M гвинтової траєкторії з рухомою кінцею поверхнею Ω_Ψ набуде вигляду

$$\sin \gamma - \frac{p t}{\sqrt{a^2 + p^2 t^2 + \rho^2 - 2 a \rho \sin(\delta + t + \omega_\Delta)}} = 0. \quad (5.9)$$

В отримане рівняння (5.9) умови перетину гвинтової траєкторії T_Δ з кінцею рухомою поверхнею Ω_Ψ входять два параметри, а саме t і ω_Δ . Параметр ω_Δ характеризує дискретне положення деталі при її обертанні навколо своєї осі. Параметр t визначає поточне положення точки M на гвинтовій траєкторії T_Δ .

Тому при пошуку моменту перетину траєкторії T_Δ з поверхнею Ω_Ψ необхідно задатися деяким дискретним значенням параметра ω_Δ (кута, що характеризує величину повороту деталі відносно нерухомого простору) і при його фіксованому значенні визначити значення параметра t , яке задовольняє вимозі

$$\sin \gamma = \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{q}| \cdot |\mathbf{n}|}. \quad (5.10)$$

Підставивши, знайдене значення параметра t до виразу компонент вектора $\mathbf{m}$, отримаємо положення точки Q сліду q в системі координат $\{\Sigma\}$.

Положення точки Q в системі координат $\{\Psi\}$ пов'язаної з інструментом, можна отримати застосувавши оператор перетворення $\mathbf{Res}(\Sigma, \Psi)$, який включає послідовне виконання оператора повороту $\mathbf{Rot}(\Sigma, \Psi)$ і оператора паралельного переносу $\mathbf{Trans}(\Sigma, \Psi)$.

Оператор повороту $\mathbf{Rot}(\Sigma, \Psi) \equiv \mathbf{Rot}(\Sigma, Z^\Sigma, \omega_\Psi)$ здійснюється поворотом системи координат $\{\Sigma\}$ навколо її осі Z^Σ на кут ω_Ψ і може бути виражений матрицею

$$\mathbf{Rot}(\Sigma, Z^\Sigma, \omega_\Psi) = \begin{bmatrix} \cos \omega_\Psi & -\sin \omega_\Psi & 0 \\ -\sin \omega_\Psi & -\cos \omega_\Psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.11)$$

Параметр ω_Ψ – це кут повороту інструмента у процесі формоутворення, чисельну величину якого можна визначити із співвідношення

$$\omega_\Psi \cdot r_\Psi = \omega_\Delta \cdot r_\Delta \quad (5.12)$$

де ω_Δ – фіксований кут дискретного повороту деталі у системі координат $\{\Delta\}$;

ω_Ψ – фіксований кут дискретного повороту інструмента у системі координат $\{\Psi\}$;

r_Δ – радіус початкового кола пов'язаного з деталлю;

r_Ψ – радіус початкового кола пов'язаного з інструментом.

Оператор паралельного перенесення $\mathbf{Trans}(\Sigma, \Psi) \equiv \mathbf{Trans}(\Sigma', Y^\Sigma, a)$ можливо реалізувати перенесенням поверненої проміжної системи координат $\{\Sigma'\}$, тобто $\mathbf{Rot}(\Sigma, \Psi) \Rightarrow \{\Sigma'\}$ на величину a вздовж осі Y^Σ і записати як

$$\mathbf{Trans}(\Sigma, \Psi) \equiv \mathbf{Trans}(\Sigma', Y^\Sigma, a) = \begin{bmatrix} a \sin \omega_\Psi \\ a \cos \omega_\Psi \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (5.13)$$

Тоді положення точки Q сліду q в системі координат $\{\Psi\}$ пов'язаної з інструментом можна визначити вектором $\mathbf{m}$

$$\mathbf{m}^{\Psi(Q)} = \begin{bmatrix} m_x^{\Psi(Q)} \\ m_y^{\Psi(Q)} \\ m_z^{\Psi(Q)} \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

компоненти якого можна визначити наступним чином:

$$\begin{aligned} m_x^{\Psi(Q)} = & \cos \omega_{\Psi} (\rho \cos (\delta + t) \cos \omega_{\Delta} - \rho \sin (\delta + t) \sin \omega_{\Delta}) - \\ & - \sin \omega_{\Psi} (\rho \sin (\delta + t) \cos \omega_{\Delta} - \rho \cos (\delta + t) \sin \omega_{\Delta}) + \\ & + a \sin \omega_{\Psi}, \end{aligned} \quad (5.15)$$

$$\begin{aligned} m_y^{\Psi(Q)} = & \cos \omega_{\Psi} (\rho \sin (\delta + t) \cos \omega_{\Delta} - \rho \cos (\delta + t) \sin \omega_{\Delta}) - \\ & - \sin \omega_{\Psi} (\rho \cos (\delta + t) \cos \omega_{\Delta} - \rho \sin (\delta + t) \sin \omega_{\Delta}) + \\ & + a \cos \omega_{\Psi}, \end{aligned} \quad (5.16)$$

$$m_z^{\Psi(Q)} = -p t \quad (5.17)$$

- де ρ – полярний радіус-вектор розрахункової точки деталі;
 δ – полярний кут розрахункової точки деталі;
 ω_{Ψ} – кут повороту інструмента у процесі обкочування початкових кіл;
 ω_{Δ} – кут повороту деталі у процесі обкочування початкових кіл;
 p – гвинтовий параметр;
 t – змінний параметр величину якого дискретно змінюють у процесі формоутворення.

Приймаючи ряд значень кута ω_{Δ} і визначивши з умови

$$t = \frac{\omega_{\Delta} \cdot r_{\Delta}}{r_{\Psi}} \quad (5.18)$$

значення параметра t , необхідно підставити його значення у вираз компонент радіус-вектора $\mathbf{m}$. Це дозволить побудувати сукупність слідов q , огинаюча до яких буде визначати форму початкової інструментальної поверхні.

5.1.3. Початкова інструментальна поверхня

Профіль початкової інструментальної поверхні можна визначити у площині, яка є ортогональною до Z^Ψ інструмента. Слід зазначити, що цю задачу можна вирішити трьома способами.

Спосіб 1

Здійснити перехід від просторової сукупності слідів q , які розташовані на конічній поверхні Ω_Ψ до координатної площини ($X^\Psi Y^\Psi$).

Для цього необхідно всі розрахункові точки сукупності слідів q перенести гвинтовими траєкторіями T які відповідають параметрам гвинтової поверхні інструмента.

Спосіб 2

Безпосередньо під час визначення координат точок Q сукупності слідів q за отриманими вище залежностями, прийняти значення кута γ рівне нулю, тобто $\gamma = 0$.

У цьому випадку кінчна рухома поверхня Ω_Ψ трансформується в площину орієнтовану ортогонально до осі інструмента, тобто буде збігатись з профілем початкової інструментальної поверхні.

Спосіб 3

Отримати (вивести) нові математичні залежності перетворивши просторову задачу формоутворення в плоску.

Розглянемо послідовно викладені варіанти визначення профілю вихідної інструментальної поверхні.

5.1.3.1. Перехід від конічної поверхні до площини

Перехід від конічної поверхні до координатної площини ($X^\Psi Y^\Psi$) можна здійснити у такий спосіб. Якщо розглядати компоненти вектора $\mathbf{m}$ знайденого раніш 5.14 як

$$\mathbf{m}^{\Psi(Q)} = \begin{bmatrix} m_x^{\Psi(Q)} & m_y^{\Psi(Q)} & m_z^{\Psi(Q)} \end{bmatrix}^T \quad (5.19)$$

то можна стверджувати, що при гвинтовому переміщенні точки Q (її гвинтовому русі), розташованої на конічній поверхні, в координатну площину ($X^\Psi Y^\Psi$), точка Q повинна прямолінійно переміститися на рівну величину $m_z^{\Psi(Q)}$ і одночасно повернутись навколо осі Z на деякий кут φ_Ψ , який можна визначити із співвідношення

$$m_z^{\Psi(Q)} = r_\Psi \varphi_\Psi, \quad (5.20)$$

$$r_\Psi = \frac{H_\Psi}{2\pi}, \quad (5.21)$$

де p – гвинтовий параметр, що відповідає гвинтовій поверхні інструмента;

H – крок гвинтової поверхні інструмента.

Необхідно відзначити, що зазначений спосіб практично не зручний, оскільки пов'язаний зі значним обсягом додаткових розрахунків.

5.1.3.2. Інструментальна поверхня за умови нульового переднього кута

Визначимо профіль для конічної початкової інструментальної поверхні в її граничному випадку коли кут γ біля основи конуса дорівнює нулю $\gamma = 0$.

У цьому випадку конічна поверхня трансформується в площину. Тому площина торцевого перерізу початкової інструментальної поверхні і рухома поверхня збігатимуться. При цьому необхідно враховувати, що в даному випадку координатна площина ($X^{\Psi}Y^{\Psi}$) і площина торцевого перерізу початкової інструментальної поверхні збігаються. Отже, параметр t дорівнюватиме нулю $t = 0$ для всіх розрахункових точок. Тоді вираз радіус-вектора $\mathbf{m}$ перетворюється до такого вигляду

$$\mathbf{m}^{\Psi} = \begin{bmatrix} \rho \cos (\delta + t + \omega_{\Delta} + \omega_{\Psi}) + a \sin \omega_{\Psi} \\ a \cos \omega_{\Psi} - \rho \sin (\delta + t + \omega_{\Delta} + \omega_{\Psi}) \\ -p_{\Psi} t \end{bmatrix}. \quad (5.22)$$

А з урахуванням $t = 0$ набуде вигляду

$$\mathbf{m}^{\Psi} = \begin{bmatrix} \rho \cos (\delta + \omega_{\Delta} + \omega_{\Psi}) + a \sin \omega_{\Psi} \\ a \cos \omega_{\Psi} - \rho \sin (\delta + \omega_{\Delta} + \omega_{\Psi}) \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (5.23)$$

5.1.3.3. Перетворення просторової задачі у плоску

Визначення профілю початкової інструментальної поверхні під час трансформування просторової задачі до плоскої. У цьому випадку при прийнятих раніше системах координат та їх початкової орієнтації, вираз компонент вектора $\mathbf{m}$ виявляються ідентичними наведеним вище для випадку $\gamma = 0$. Тобто вираз (5.23) є справедливим.

5.1.4. Різальна кромка

Методи визначення сполучених поверхонь, котрі існують на теперішній час, не дозволяють безпосередньо визначати профіль (форму)

різальної кромки. Спочатку, для її визначення необхідно визначити початкову інструментальну поверхню, і тільки потім можливий пошук різальної кромки, як сліду перетину початкової інструментальної поверхні з передньою поверхнею інструмента.

Метод рухомої поверхні дозволяє, минаючи етап пошуку початкової інструментальної поверхні, безпосередньо визначати форму різальної кромки інструмента. Для цього необхідно вибрати форму рухомої поверхні ідентичну до форми передньої поверхні інструмента. Саме з цієї причини, як рухома поверхня Ω_Ψ , була прийнята конічна поверхня з кутом при основі конуса рівним передньому куту γ довбача.

Таким чином огинаюча Θ_Ψ до сукупності просторових слідів q розташованих на конічній поверхні відповідає формі просторової різальної кромки довбача. При цьому положення точок Q сукупності слідів q описується вектором $\mathbf{m}^\Psi$ в системі координат $\{\Psi\}$ пов'язаної з інструментом.

У той же час необхідно відзначити два моменти. Перший. Визначення просторової огинаючої до сукупності просторових слідів q досить складно. Другий, при виготовленні довбачів здійснювати контроль його геометричних параметрів (профілю різальної кромки) зручно не у тривимірному просторі, а у двовимірному. А саме – в передній поверхні зубця інструмента.

Отже, виконаємо перехід від системи координат $\{\Psi\} : (X^\Psi Y^\Psi Z^\Psi)$ до двовимірної $\{\Omega\} : (U^\Omega V^\Omega)$, вісь U^Ω якої лежить у передній конічній поверхні довбача рис. 5.2.

Оскільки вісь U^Ω і радіус-вектор $\mathbf{q}^\Psi$ належать одній і тій самій поверхні Ω_Ψ конуса⁴, можна стверджувати, що координатна компонента u^Ω дорівнюватиме $|\mathbf{q}^\Psi|$.

Тоді можливо записати:

$$u^\Omega = \sqrt{(m_x^\Psi)^2 + (m_y^\Psi)^2 + (m_z^\Psi)^2}, \quad (5.24)$$

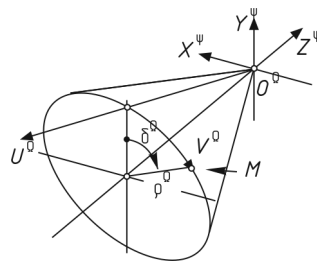


Рис. 5.2. Конічна система координат

⁴Тобто вони лежать на одній конічній поверхні. Реально, це може бути задня поверхня інструмента типу довбач.

$$m_x^\Psi = \cos \omega_\Psi (\rho \cos (\delta + t) \cos \omega_\Delta - \rho \sin (\delta + t) \sin \omega_\Delta) - \\ - \sin \omega_\Psi (\rho \sin (\delta + t) \cos \omega_\Delta - \rho \cos (\delta + t) \sin \omega_\Delta) + \\ + a \sin \omega_\Psi, \quad (5.25)$$

$$m_y^\Psi = \cos \omega_\Psi (\rho \sin (\delta + t) \cos \omega_\Delta - \rho \cos (\delta + t) \sin \omega_\Delta) - \\ - \sin \omega_\Psi (\rho \cos (\delta + t) \cos \omega_\Delta - \rho \sin (\delta + t) \sin \omega_\Delta) + \\ + a \cos \omega_\Psi, \quad (5.26)$$

$$m_z^\Psi = -pt. \quad (5.27)$$

Виконавши відповідні математичні перетворення отримаємо у більш компактному вигляді

$$u^\Psi = \sqrt{a^2 + (pt)^2 + \rho^2 - 2a\rho \sin (\delta + t + \omega_\Delta)}. \quad (5.28)$$

Геометрично координата u^Ω відповідає відстані від вершини конічної поверхні Ω_Ψ до точки Q сліду q розташованого на конусі.

Координату v^Ω будемо визначати як довжину дуги кола, яке проходить через розрахункову точку Q , що було прийнято раніше при формулюванні умови взаємної орієнтації об'єктів дослідження.

Якщо позначити через v^Ω довжину проекції відрізка u^Ω на площину перпендикулярну до осі конуса, а через δ^Ω кут між цією проекцією і проекцією орта осі U^Ω на ту ж площину, то координату v^Ω можливо визначити як:

$$v^\Omega = u^\Omega \delta^\Omega. \quad (5.29)$$

Величину кута δ^Ω можна визначити з виразу

$$\operatorname{tg} \delta^\Omega = \frac{m_x^\Psi}{m_y^\Psi} = \frac{\rho \cos (\delta + t + \omega_\Delta + \omega_\Psi) + a \sin \omega_\Psi}{a \cos \omega_\Psi - \rho (\delta + t + \omega_\Delta + \omega_\Psi)}. \quad (5.30)$$

Довжину проекції ρ^Ω відрізка v^Ω на площину перпендикулярну до осі конуса можна визначити як:

$$\rho^\Omega = m_{xy}^\Psi = \sqrt{\left(m_x^\Psi\right)^2 + \left(m_y^\Psi\right)^2}, \quad (5.31)$$

$$m_x^\Psi = \rho \cos (\delta + t + \omega_\Delta + \omega_\Psi) + a \sin \omega_\Psi, \quad (5.32)$$

$$m_y^\Psi = a \cos \omega_\Psi - \rho \sin (\delta + t + \omega_\Delta + \omega_\Psi). \quad (5.33)$$

В даному випадку параметри δ та ρ можна розглядати, як полярні координати точки в кінчній системі координат $\{\Omega\}$. Тоді параметр δ еквівалентний полярному куту, а параметр ρ полярному радіусу.

Далі можна вчинити таким чином:

- або трансформувати кінчну систему координат $\{\Omega\} : (U^\Omega V^\Omega)$ у плоску ортогональну, прийнявши вісь абсцис за вісь V^Ω , а вісь ординат за вісь U^Ω , маючи на увазі що геометрично вздовж осі V^Ω відкладається довжина дуги v^Ω ;
- або використовувати полярну систему координат, у якій кут δ буде полярним кутом, а відрізок m_{xy} буде полярним радіус-вектором.

5.1.5. Аналіз теоретичних результатів

Виконаємо аналіз теоретичних результатів отриманих у попередніх розділах. Як об'єкт дослідження приймемо деталі з торцевим профілем окресленим двома прямими лініями. Це дозволить наочно простежити характер зміни форми початкової інструментальної поверхні і різальної кромки інструмента.

Основним завданням дослідження вважатимемо виявлення порушень умов формоутворення та їх вплив на кінцевий результат формоутворення, а також дослідження характеру зміни форми різальної кромки в залежності від параметрів інструмента.

5.1.5.1. Результати визначення початкової інструментальної поверхні

Розглянемо як приклад визначення профілю початкової інструментальної поверхні при формоутворенні деталі поверхня якої має кутовий профіль рис. 5.3 при наступних параметрах формоутворення:

- радіус початкового кола деталі $r = 50$ мм;
- радіус початкового кола довбача $r = 75$ мм;
- передній кут довбача $\gamma = 0^\circ$.

На початку дослідження приймемо, що фасонна поверхня деталі не є гвинтовою, а звичайною фасонною циліндричною поверхнею. Це дозволить використовувати отримані результати, як деяку базу для виконання наступних порівнянь та аналізів.

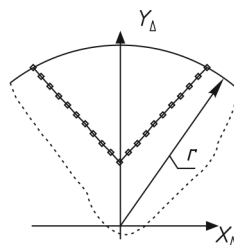


Рис. 5.3. Профіль деталі

Як рухому поверхню Ω_Ψ приймаємо конічну поверхню з кутом при основі конуса рівним передньому куту довбача, тобто $\gamma = 6^\circ$.

На рис. 5.4 наведена сукупність слідів q утворених перетином гвинтових траєкторій T_Δ точок, що належать торцевому профілю деталі, з рухомою конічною поверхню Ω_Ψ , представлених у системі координат $\{\Psi\}$ пов'язаної з інструментом.

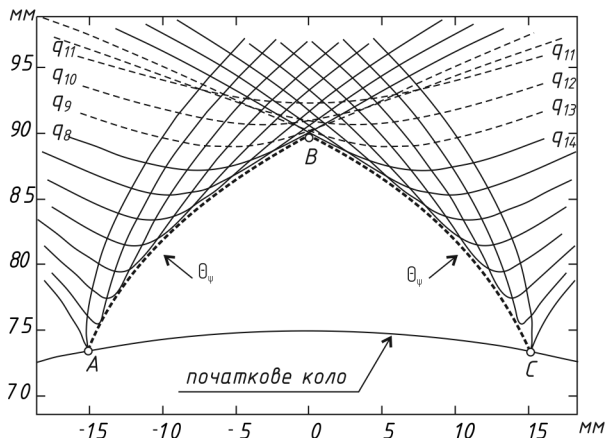


Рис. 5.4. Сукупність слідів та огинаюча дол низ

Аналіз характеру взаємного розташування слідів q , а також характеру їх торкання загальної огинаючої дозволяє зробити такі висновки:

- огинаюча Ω_Ψ не може бути побудована як дотична до всієї сукупності слідів q ;

- Сліди $q_{9...13}$ (на рис. 5.4 вони позначені пунктирними лініями) не є дотичними до загальної огинаючої Ω_Ψ . Отже, можна стверджувати, що відповідні їм точки $M_{9...13}$ поверхні деталі (торцевого профілю) не будуть утворені;
- незважаючи на те, що торцевий профіль деталі складається з двох прямих ліній і поверхня деталі не є гвинтовою поверхню відповідний до неї профіль початкової інструментальної поверхні є криволінійним;
- загальна форма профілю початкової інструментальної поверхні є симетричною, так само як і профіль деталі і складається з двох ділянок AB та BC .

В даному випадку при прийнятій схемі формоутворення та прийнятих параметрах цієї схеми (значення радіусів початкових кіл і розташування профілю деталі щодо її центру), профіль огинаючої можна розглядати, як такий що складається з двох ділянок AB та BC .

Точки A і B утворені, як точки повернення слідів q_0 і q_{21} , а точка B як результат перетину слідів q_8 і q_{14} . При цьому, як уже зазначалося, сліди з q_9 по q_{13} не є дотичними до загальної огинаючої Θ_Ψ .

Таким чином, узагальнюючи результати аналізу характеру розташування слідів q відносно огинаючої Θ_Ψ , можна стверджувати, що при прийнятій схемі формоутворення (обкатка кола по колу) і прийнятих величинах радіусів початкових кіл можливе лише часткове формоутворення поверхні деталі. Профіль деталі в околиці її кутової точки (точка B) буде формоутворений деякою перехідною кривою.

Слід зазначити, що метод рухомої поверхні дозволяє визначити форму перехідної кривої, безпосередньо за результатами аналізу розташування відповідних слідів q щодо загальної огинаючої – тобто, без вирішення зворотної задачі формоутворення. У той самий час, жоден із існуючих у теперішній час, методів визначення спряжених поверхонь, не дозволяє визначити форму перехідної кривої без вирішення зворотної задачі формоутворення.

Чисельна величина відхилення утвореного профілю деталі від її номінального профілю може бути визначена, як найменша відстань h від відповідного сліду q до огинаючої Θ . На рис. 5.5 представлена околиця точки B профілю огинаючої і показана схема визначення довжини відрізків h , як найкоротших відстаней h від огинаючої до відповідних слідів q .

Послідовність побудови формоутворення профілю деталі з урахуванням похибок формоутворення, може бути такою:

- будуюмо вихідний профіль торцевого перерізу деталі та позначаємо на ньому розрахункові точки M , які беруть участь у побудові слідів q_Δ перетину траєкторій T_Δ з рухомою кінечною поверхнею Ω_Ψ ;
- у кожній розрахунковій точці M проводимо перпендикуляр до профілю деталі, довжина якого дорівнює відповідній відстані h . Отримані точки позначимо як $M_{\Delta F}$. При цьому, якщо слід q_Δ торкається огинаючої Θ_Ψ , то природно що величина h дорівнюватиме нулю;
- через отримані точки $M_{\Delta F}$ проводимо плавну криву, яка є профілем утвореної деталі.

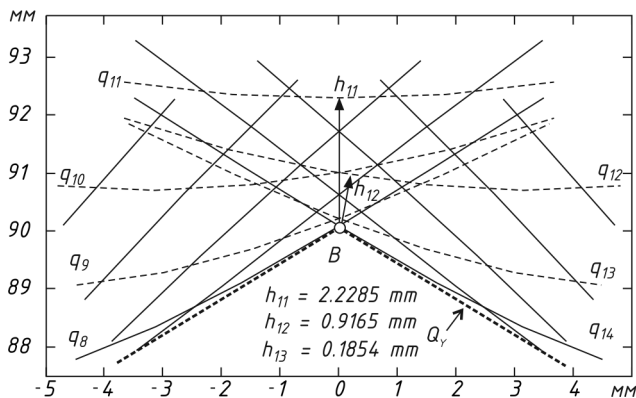


Рис. 5.5. Околиці зони порушення умов формоутворення

Геометрично відрізок h відповідає довжині нормалі, від номінальної поверхні деталі, до утвореного профілю, тобто відповідає похибці формоутворення в даній точці поверхні деталі.

Отже, нами були отримані та проаналізовані результати визначення профілю початкової інструментальної поверхні для випадку формоутворення циліндричної поверхні довбачем з переднім кутом $\gamma = 6^\circ$.

Необхідно відзначити, що в даному випадку кінчна рухома поверхня була трансформована у площину.

Слід особливо підкреслити, що в даному випадку, на відміну від усіх існуючих методів визначення спряжених поверхонь, рішення зворотної задачі формоутворення не здійснювалося. Утворений профіль був визначений, як синтез номінального профілю та сукупності похибок формоутворення в кожній розрахунковій точці.

Таким чином, можна стверджувати що метод рухомої поверхні дозволяє вже на стадії визначення початкової інструментальної поверхні визначити величину похибки формоутворення.

Тепер перейдемо до дослідження характеру зміни профілю початкової інструментальної поверхні при формоутворенні гвинтової поверхні при наступних комбінаціях параметрів деталі та інструмента:

$$\begin{array}{ll} \beta = 0^\circ & \gamma = 30^\circ, & \beta = 30^\circ & \gamma = 0^\circ, \\ \beta = 15^\circ & \gamma = 15^\circ, & \beta = 30^\circ & \gamma = 30^\circ, \end{array} \quad (5.34)$$

де β – кут нахилу гвинтової лінії гвинтової поверхні деталі на циліндрі початкового радіусу $r = 50$ мм;

γ – передній кут довбача.

Результати аналізу рис. 5.6 характеру взаємного розташування слідів q приведених до торцевої площини ($X^{\Psi}Y^{\Psi}$) дозволяють стверджувати, що профіль початкової інструментальної поверхні не змінюється, залишаючись постійним у всіх випадках.

Можна стверджувати, що отримані результати повністю узгоджуються з базовими положеннями теорії формоутворення поверхонь, і підтверджують те положення, що форма початкової поверхні не залежить від конкретного виконання інструмента. У даному випадку від величину переднього кута.

Висновки

Узагальнюючи результати дослідження пошуку профілю початкової інструментальної поверхні при формоутворенні довбачем, дозволяють стверджувати наступне.

1. Профіль початкової інструментальної поверхні не залежить від форми передньої поверхні інструмента і залишається постійним при її трансформуванні від конічної до площини.
2. Незалежно від величини гвинтового параметра p (кута нахилу гвинтової лінії на початковому циліндрі) та величини переднього кута довбача, форма профілю початкової інструментальної поверхні залишається постійною.
3. Результати визначення профілю початкової інструментальної поверхні та закономірності його взаємозв'язку з параметрами гвинтової поверхні деталі, повністю узгоджуються з основними положеннями теорії формоутворення поверхонь.
4. На відміну від методів визначення спряжених поверхонь що існують, метод рухомої поверхні дозволяє ще на стадії визначення початкової поверхні, не вирішуючи зворотну задачу формоутворення, визначити величини відхилень утвореної поверхні деталі від номінальної, які були викликані порушенням умов формоутворення.

5.1.5.2. Результати визначення різальної кромки

Наявкі методики профілювання інструменту⁵ визначають форму просторової різальної кромки послідовно у два етапи:

⁵У тому числі і такого, що працює за методом взаємного обкочування початкових геометричних елементів.

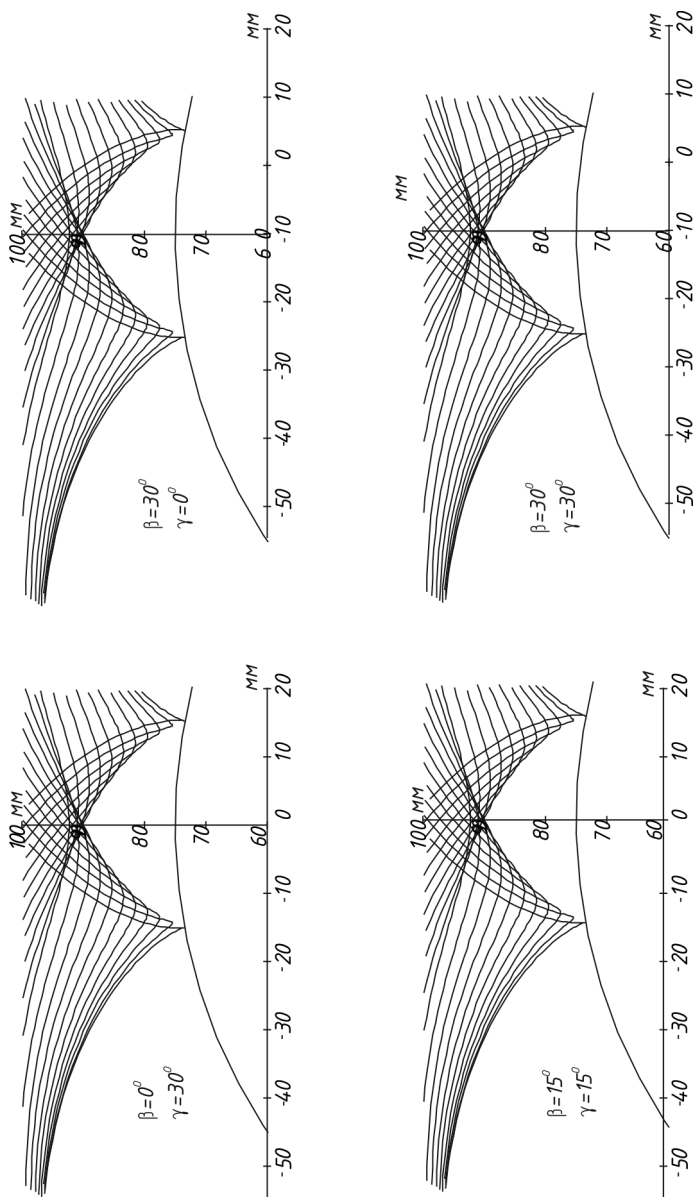


Рис. 5.6. Профілі інструментальної поверхні у площині перпендикулярній до осі інструмента

Етап 1

Спочатку, об'ємна задача тривимірного простору трансформується до плоского двовимірного простору, в якому розглядається, як взаємне кочення двох кіл розташованих в одній площині.

Результатом вирішення такої схеми формоутворення є плоский профіль початкової інструментальної поверхні (тобто представлений у площині), розташування якого просторово збігається з площиною геометричних побудов.

При аналітичних методах визначення різальної кромки їх алгоритми засновані на плоскій інтерпретації просторової задачі.

Етап 2

Далі, визначають форму різальної кромки інструмента, як результат взаємного перетину визначеної раніше початкової інструментальної поверхні, з передньою поверхнею інструмента. Для довбачів, як правило, це кінчна поверхня.

На відміну від існуючих методик визначення різальної кромки, метод рухомої поверхні дозволяє визначити форму просторової різальної кромки, мінаючи етап визначення початкової інструментальної поверхні та вирішення задачі пошуку сліду перетину двох поверхонь (початкової інструментальної та передньої інструмента), які в переважній більшості випадків, пов'язані з розв'язуванням трансцендентних рівнянь.

Визначатимемо форму просторової різальної кромки, для довбача найбільш поширеної конструкції, яка має передню поверхню у вигляді конуса з додатним переднім кутом γ . Тому, відповідно до теоретичних положень методу рухомої поверхні, приймемо рухому поверхню Ω_{Ψ} у вигляді конуса з кутом γ при його основі.

Циліндричні поверхні

Як поверхню, що утворюється спочатку будемо розглядати циліндричну (не гвинтову) фасонну поверхню $\beta = 0^\circ$ з кутовим прямобічним профілем, прийнятим раніше.

Передній кут довбача змінюватимемо приймаючи його значення рівними 0° ; 10° ; 20° та 30° . Результати визначення просторової різальної кромки довбача представлені на рис. 5.7.

При аналізі результатів профілювання необхідно мати на увазі, що в якості системи координат, в якій аналізується профіль різальної кромки, прийнята кінчна система координат $\{\Omega\}$, що збігається з кінчною передньою поверхнею довбача.

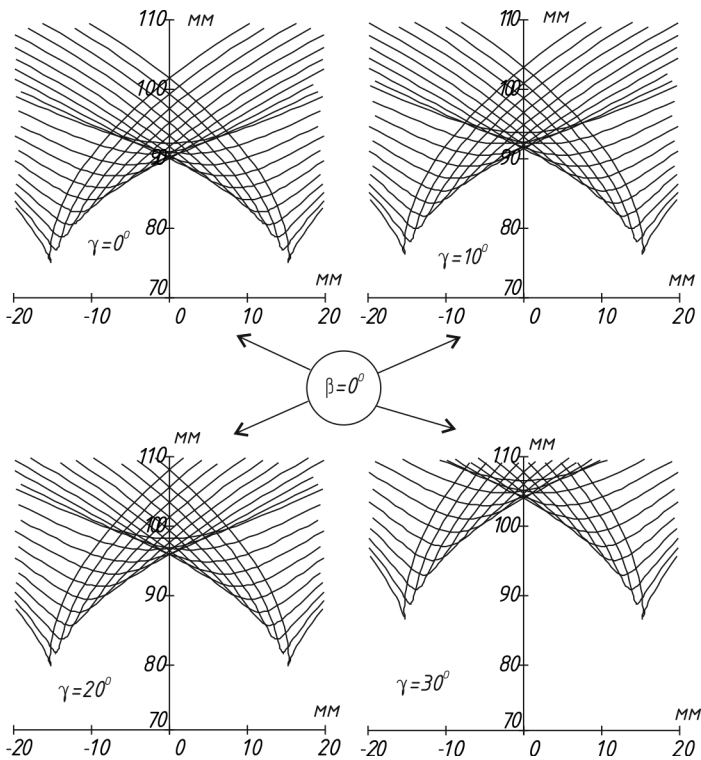


Рис. 5.7. Проекція просторової різальної кромки на площину ортогональну до осі інструмента

На наведеному графіку по осі ординат відкладено відстань від вершини конічної передньої поверхні до точки різальної кромки координата $u^{\Omega(M)}$.

По осі абсцис відкладена довжина дуги (координата $v^{\Omega(M)}$) приналежна передній поверхні інструмента.

Таким чином, площа кресленника є розгорнутою конічною поверхнею, або, що теж саме, розгорнутою передньою конічною поверхнею інструмента.

Аналіз залежності форми різальної кромки від величини переднього кута γ показав, що із збільшенням значень кута γ профіль різальної кромки подовжується, зберігаючи загальний характер своєї форми і залишаючись симетричним.

Таким же чином змінюється і характер взаємного розташування сукупності слідів q перетину траєкторій T_{Δ} з кінечною рухомою поверхнею набуваючи подовження вздовж осі U^{Ω} .

Слід особливо підкреслити, що у всіх випадках, форма проєкції просторової різальної кромки на координатну площину $(X^{\Psi}Y^{\Psi})$, яка ортогональна до осі довбача, залишається без змін. Це можна пояснити тим, що в якості формоутворюваної поверхні прийнята циліндрична, а не гвинтова поверхня.

Гвинтові поверхні

Проведемо дослідження впливу параметрів гвинтової поверхні деталі (її кроку або, що те саме, величини її гвинтового параметра p_{Δ}) на форму просторової різальної кромки. Як гвинтову поверхню буде розглядати фасонну поверхню кутового профілю прийнятого раніше.

Власне гвинтову поверхню характеризуватимемо величиною кута між її віссю і напрямом дотичної до гвинтової траєкторії T_{Δ} , що лежить на циліндрі, який проходить через початкове коло. За аналогією з зубчастими передачами будемо позначати його як β .

Отримані результати представлятимемо у двох системах координат:

- у координатній площині $(X^{\Psi}Y^{\Omega})$ тривимірної системи $\{\Psi\}$;
 - і у розгорнутій двовимірній системі координат $\{\Omega\}$: $(U^{\Omega}V^{\Omega})$ трансформуючи довжину дуги v^{Ω} у прямолінійний відрізок осі абсцис.
- При цьому кінчна поверхня системи координат $\{\Omega\}$ збігається з кінчною передньою поверхнею інструмента.

Аналіз залежності форми (рис. 5.8) проєкції просторової різальної кромки, як її проєкції на площину $(X^{\Psi}Y^{\Psi})$, від характеру гвинтової поверхні (велич кута нахилу β) дозволяє зробити два висновки.

Обертання кромки

Зі збільшенням кута β нахилу гвинтової лінії на початковому циліндрі, різальна кромка повертається навколо осі довбача, на тим більшу величину, чим більше кут β .

Це можна пояснити тим, що в міру збільшення кута β , що рівносильно зменшенню осьового кроку гвинтової поверхні за інших постійних умов, збільшується кут повороту точки M гвинтової траєкторії T при проходженні однієї і тієї ж відстані вздовж осі гвинтової поверхні.

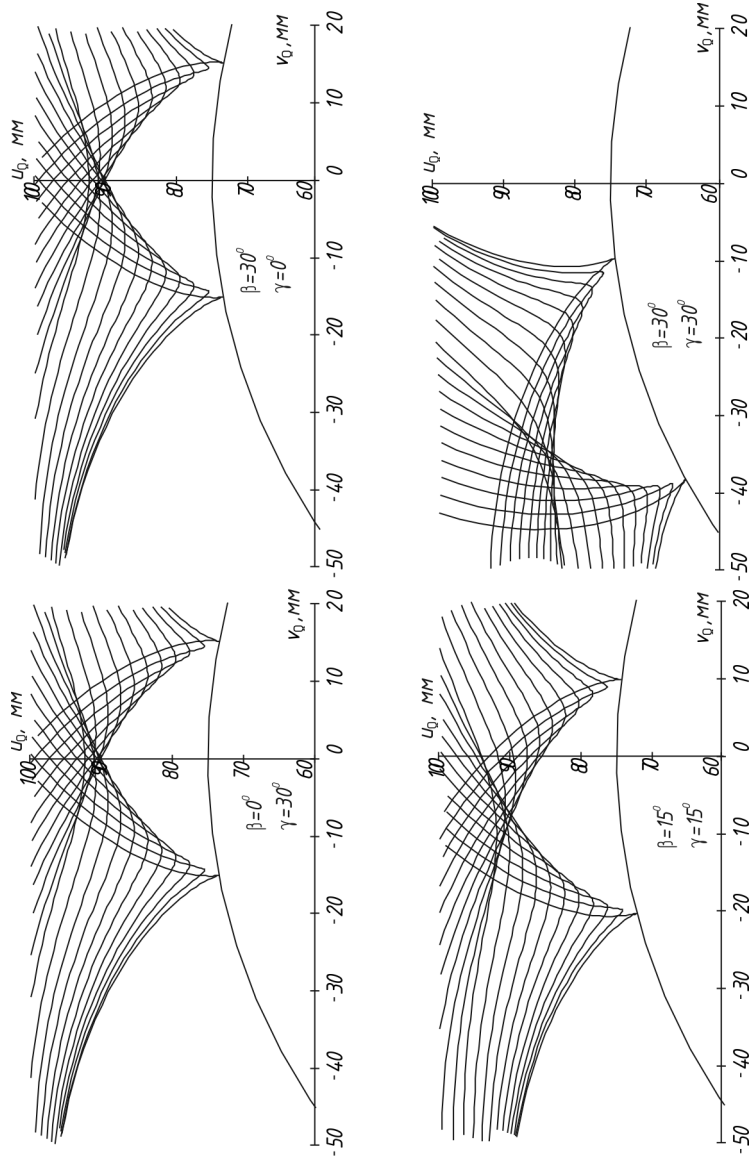


Рис. 5.8. Проекція просторової різальної кромки на площину ортогональну до осі інструмента при обробці гвинтової поверхні

Викривлення кромки

Вісь симетрії профілю різальної кромки викривляється, а разом з нею весь профіль різальної кромки (рис. 5.9). В даному випадку вісь симетрії різальної кромки (вісь симетрії зуба довбача), можна розглядати як гвинтову проекцію осі U^Ω , на площину ортогональну до осі інструмента.

Оскільки довбач має додатній передній кут γ , гвинтова проекція похилої прямолинійної осі U^Ω на торцеву площину утворює спіраль. Тому профіль різальної кромки виходить симетричним щодо архімедової спіралі, що добре видно на наведеному рисунку.

5.1.5.3. Висновки

Узагальнюючи результати аналізу зміни профілю різальної кромки залежно від кроку гвинтової поверхні можна стверджувати, що вісь симетрії профілю кромки трансформується в спіраль Архімеда, в той час, як профіль різальної кромки змінюючи свою форму залишається симетричним щодо архімедової спіралі.

Аналогічна зміна профілю різальної кромки спостерігається в площині розгорнутої передньої конічної поверхні (рис. 5.10). Проте в цьому випадку вісь симетрії профілю трансформується не у спіраль Архімеда, а в криву складнішого виду, що обумовлено розгортанням конічної поверхні у площину.

Таким чином, узагальнюючи отримані результати можна стверджувати, що:

- метод рухомої поверхні дозволяє визначати не тільки профіль початкової інструментальної поверхні, а й форму просторової різальної кромки для інструмента, що працює методом обкатки;
- зі збільшенням переднього кута довбача, профіль різальної кромки трансформується витягуючись уздовж осі симетрії;
- при значеннях переднього кута γ не рівних нулю проекція осі симетрії зубця довбача на його торцеву площину трансформується

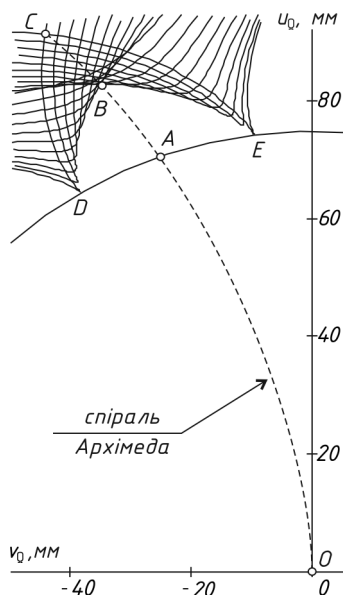


Рис. 5.9. Викривлення зубця

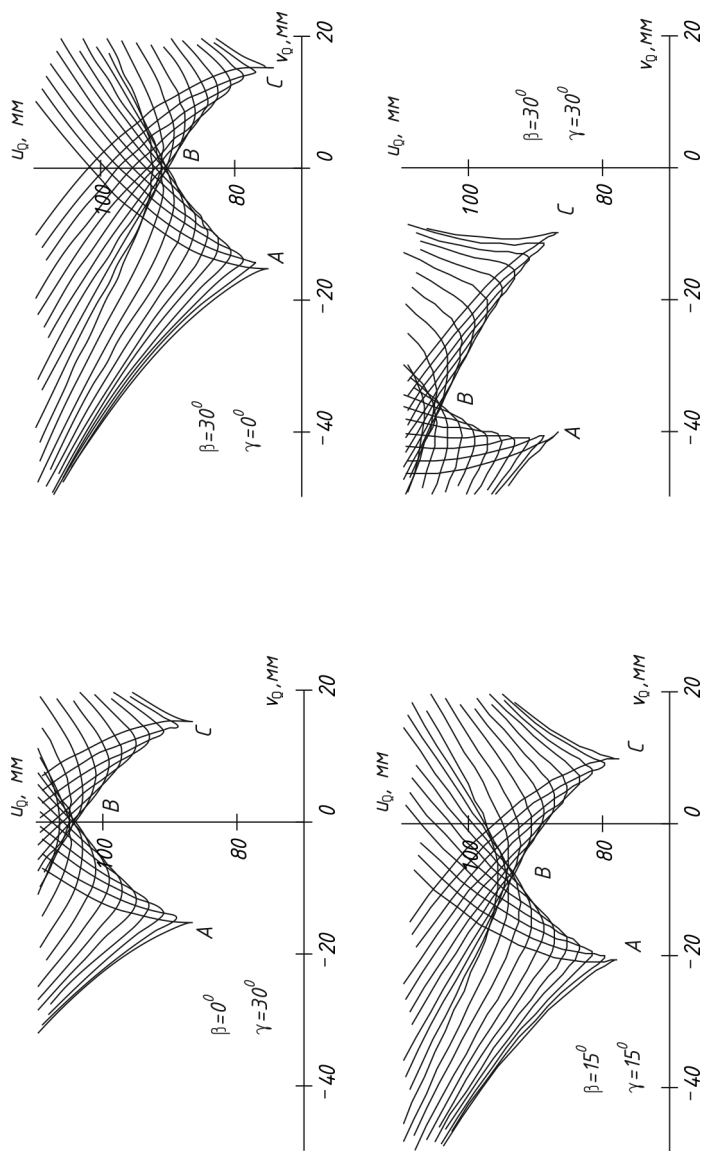


Рис. 5.10. Різальна кромка у кінцевій системі координат

в архімедову спіраль, при цьому профіль зубця довбача зберігає симетричність щодо криволінійної осі (архімедової спіралі).

5.1.6. Зворотна задача формоутворення

При кінематичній схемі формоутворення, яка відповідає коченню кола по колу, можливі два способи вирішення зворотної задачі:

- трансформація просторової задачі в плоску, з наступним поданням всіх об'єктів формоутворення в єдиній площині;
- просторове уявлення об'єктів формоутворення в тривимірному просторі.

Кожен з цих способів має свої переваги і недоліки, проте результати визначення профілю деталі при її обробці відомим інструментом, ідентичні.

5.1.6.1. Зворотна задача у площині

Теоретичною основою способу вирішення зворотної задачі формоутворення в єдиній площині є те, що як форму деталі так і форму початкової інструментальної поверхні можна однозначно представити профілем їх торцевих перерізів.

Відповідно до теоретичних положень методу рухомої поверхні, рухома поверхня Ω_{Δ} повинна проходити через розрахункову точку M при її (точки) русі по гвинтовій траєкторії T_{Ψ} .

Однак, коли осі гвинтової поверхні деталі та інструмента паралельні між собою, перетин траєкторій T_{Ψ} з площиною Ω_{Δ} зводиться до накладання (утворення проєкції) торцевого профілю гвинтової поверхні на площину Ω_{Δ} .

Справді, якщо осі деталі та інструмента взаємно паралельні, то незалежно від того, як розташовані торцевий переріз і площина Ω , всі точки M гвинтової поверхні при русі за своїми траєкторіями T перетнуть площину Ω одночасно. У цьому випадку сукупність слідів q на рухомій площині Ω визначатиме профіль торцевого перерізу гвинтової поверхні.

В силу викладеного, рішення зворотної просторової задачі формоутворення, трансформованої до плоскої схеми простору, зводиться до визначення слідів точок M торцевого профілю гвинтової поверхні на площині, при русі кочення одного кола по іншому.

Приймемо наступну схему розташування об'єктів формоутворення. Відома гвинтова початкова інструментальна поверхня представлена своїм торцевим профілем у системі координат $\{\Psi\} : (X^{\Psi}Y^{\Psi}Z^{\Psi})$ (рис. 5.11).

Площина торцевого профілю гвинтової поверхні збігається з координатною площиною ($X^\Psi Y^\Psi$).

З деталлю зв'яземо прямокутну систему координат $\{\Delta\} : (X^\Delta Y^\Delta Z^\Delta)$. Вісь Z^Δ паралельна осі Z^Ψ , але спрямована в протилежний бік.

Нерухома система координат $\{\Sigma\} : (X^\Sigma Y^\Sigma Z^\Sigma)$ орієнтована таким чином, що її вісь Y^Σ перетинає одночасно осі Z^Δ та Z^Ψ .

Взаємне переміщення деталі та інструмента будемо розглядати, як рух взаємної обкатки початкових кіл r_Δ і r_Ψ .

Положення точки M , що належить торцевому перерізу гвинтової поверхні інструмента, в системі координат $\{\Psi\}$ можна визначити радіус-вектором $\mathbf{m}^{\Psi(M)}$

$$\mathbf{m}^{\Psi(M)} = \begin{bmatrix} m_x^{\Psi(M)} \\ m_y^{\Psi(M)} \\ m_z^{\Psi(M)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_x^{\Psi(M)} \\ m_y^{\Psi(M)} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (5.35)$$

Так як рухома поверхня Ω_Δ і торцевий переріз початкової інструментальної поверхні збігаються (тільки при плоскому розв'язанні задачі), то рух точки M по гвинтовій траєкторії T_Ψ відсутній.

В цьому випадку, як перемінний параметр залишається тільки кут ω_Ψ повороту системи координат $\{\Psi\}$ разом з інструментом під час процесу обкатки.

Положення точки M відносно нерухомої системи координат $\{\Sigma\}$ можна визначити застосувавши оператор перетворення простору $\mathbf{Res}(\Psi, \Sigma)$, який складається з послідовного виконання оператора повороту $\mathbf{Rot}(\Psi, \Sigma)$ і оператора паралельного переносу $\mathbf{Trans}(\Psi, \Sigma)$.

Оператор повороту $\mathbf{Rot}(\Psi, \Sigma)$

$$\mathbf{Rot}(\Psi, \Sigma) = \begin{bmatrix} \cos \omega_\Psi & -\sin \omega_\Psi & 0 \\ -\sin \omega_\Psi & -\cos \omega_\Psi & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (5.36)$$

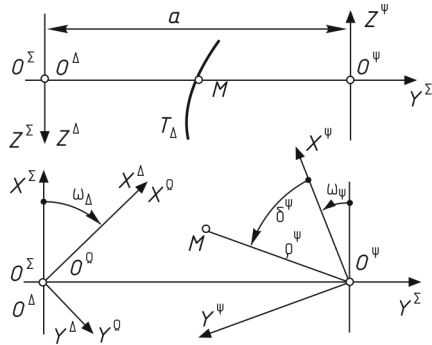


Рис. 5.11. Орієнтація систем координат

Оператор паралельного перенесення **Trans**(Ψ, Σ)

$$\mathbf{Trans}(\Psi, \Sigma) = \begin{bmatrix} 0 & a & 0 \end{bmatrix}^T. \quad (5.37)$$

Тоді положення точки M , що належить торцевому перерізу початкової інструментальної поверхні, відносно нерухомої системи координат $\{\Sigma\}$ визначиться радіус-вектором $\mathbf{m}^\Sigma$ компоненти якого будуть

$$\mathbf{m}^\Sigma = \begin{bmatrix} m_x^{\Psi(M)} \cos \omega_\Psi - m_y^{\Psi(M)} \sin \omega_\Psi \\ a - m_y^{\Psi(M)} \cos \omega_\Psi - m_x^{\Psi(M)} \sin \omega_\Psi \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (5.38)$$

В отриманому виразі радіус-вектор $\mathbf{m}^\Sigma$ містить змінний параметр ω_Ψ , який відповідає куту повороту системи координат $\{\Psi\}$ пов'язаної з відомою початковою інструментальною поверхнею.

Перехід від нерухомої системи координат $\{\Sigma\}$ до системи координат $\{\Delta\}$ пов'язаної з деталлю можна здійснити за допомогою оператора перетворення $\mathbf{Res}(\Sigma, \Delta) \equiv \mathbf{Rot}(\Sigma, \Delta)$

$$\mathbf{Res}(\Sigma, \Delta) \equiv \mathbf{Rot}(\Sigma, \Delta) = \begin{bmatrix} \cos \omega_\Delta & \sin \omega_\Delta & 0 \\ -\sin \omega_\Delta & \cos \omega_\Delta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.39)$$

Тоді остаточно положення точки M торцевого перерізу початкової інструментальної поверхні відносно системи координат пов'язаної з деталлю, можна визначити радіус-вектором $\mathbf{m}^\Delta$ компоненти якого мають вигляд:

$$\mathbf{m}^{\Delta(M)} = \begin{bmatrix} m_x^{\Delta(M)} \\ m_y^{\Delta(M)} \\ m_z^{\Delta(M)} \end{bmatrix}, \quad (5.40)$$

$$\begin{aligned} m_x^{\Delta(M)} &= \sin \omega_\Delta \left(a - m_y^{\Psi(M)} \cos \omega_\Psi - m_x^{\Psi(M)} \sin \omega_\Psi \right) + \\ &+ \cos \omega_\Delta \left(m_x^{\Psi(M)} \cos \omega_\Psi - m_y^{\Psi(M)} \sin \omega_\Psi \right), \end{aligned} \quad (5.41)$$

$$\begin{aligned} m_y^{\Delta(M)} &= \cos \omega_\Delta \left(a - m_y^{\Psi(M)} \cos \omega_\Psi - m_x^{\Psi(M)} \sin \omega_\Psi \right) - \\ &- \sin \omega_\Delta \left(m_x^{\Psi(M)} \cos \omega_\Psi - m_y^{\Psi(M)} \sin \omega_\Psi \right), \end{aligned} \quad (5.42)$$

$$m_z^{\Delta(M)} = 0. \quad (5.43)$$

Виконавши відповідні математичні перетворення отримаємо компоненти вектора $\mathbf{m}^\Delta$ у більш простому вигляді

$$\begin{aligned} \mathbf{m}^{\Delta(M)} &= \\ &= \begin{bmatrix} a \sin \omega_\Delta + m_x^{\Psi(M)} \cos (\omega_\Delta + \omega_\Psi) - m_y^{\Psi(M)} \sin (\omega_\Delta + \omega_\Psi) \\ a \cos \omega_\Delta + m_y^{\Psi(M)} \cos (\omega_\Delta + \omega_\Psi) - m_x^{\Psi(M)} \sin (\omega_\Delta + \omega_\Psi) \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (5.44)$$

У даному випадку, доцільно не виділяти систему координат $\{\Omega\}$, пов'язану з рухомою поверхнею, в самостійну систему. Простіше буде прийняти її ідентичною вже існуючій системі координат $\{\Delta\}$ пов'язаною з деталлю. Це можна обґрунтувати тим, що при трансформуванні просторової задачі формування до плоскої (двовимірної), обидві системи координат $\{\Delta\}$ і $\{\Omega\}$ виявляються розташованими в одній площині. Тому приймемо

$$X^\Delta \equiv X^\Omega, \quad Y^\Delta \equiv Y^\Omega, \quad Z^\Delta \equiv Z^\Omega. \quad (5.45)$$

У наведених вище залежностях (5.44) змінним параметром є кут ω_Ψ , що характеризує кут повороту інструмента відносно нерухомого простору. Параметр ω_Δ , що характеризує величину повороту деталі (а разом з нею і рухомої поверхні Ω) у процесі обкатки, можна визначити зі співвідношення

$$\omega_\Delta = \frac{r_\Psi}{r_\Delta} \omega + \Psi. \quad (5.46)$$

Послідовність визначення огинаючої Θ_Δ до профілю деталі може бути такою:

- на торцевому профілі відомої гвинтової початкової інструментальної поверхні вибрати ряд розрахункових точок M ;
- приймаючи ряд послідовних значень параметра ω_Ψ розрахувати за наведеними вище залежностями компоненти радіус-вектора $\mathbf{m}$;
- огинаюча до сукупності слідів q_Ψ і буде профілем деталі утвореної при прийнятій кінематичній схемі, що відповідає коченню кола по колу.

Запропонований спосіб вирішення зворотної задачі формування, трансформуванням тривимірного представлення об'єктів формування в плоске двовимірне, є універсальним і застосовується до гвинтових

поверхонь довільної форми. Проте він вимагає попередніх розрахунків по трансформуванню просторової різальної кромки до плоского перерізу⁶ ортогонального осі інструмента (довбача).

Виконаємо дослідження рішення зворотної задачі формоутворення зведеної до плоскої схеми, тобто замінимо тривимірну систему координат на двовірну.

Як профіль вихідної інструментальної поверхні приймемо профіль отриманий при вирішенні прямої задачі і зображений на рис. 5.12.

Умови кінематичної схеми формоутворення кочення кола по колу без взаємного ковзання приймемо такі:

- радіус початкового кола, пов'язаного з інструментом $r_{\psi} = 75$ мм;
- радіус початкового кола, пов'язаного з оброблюваною деталлю $r_{\Delta} = 50$ мм.

На рис. 5.13 представлена сукупність слідів q_{ψ} траєкторій точок, що належать торцевому профілю початкової інструментальної поверхні відносно площини Ω .

Аналізуючи характер взаємного розташування слідів q_{ψ} та огинаючої Θ_{Δ} до них, можна зробити такі висновки.

Профіль деталі та інструмента

Формоутворений профіль деталі, отриманий в результаті вирішення зворотної задачі формоутворення, не збігається за формою з номінальним профілем деталі.

Загальна огинаюча

Загальний профіль огинаючої до слідів q можна розглядати, як сукупність трьох ділянок. Двох дзеркально симетричних ділянок AB і CD , кожна з яких утворений однією прямою лінією. І однієї криволінійної ділянки BC .

Слід зазначити, що прямолінійні ділянки AB і CD утворені як огинаючи до відповідних сукупностей слідів q_{ψ} . На відміну від них, ділянку

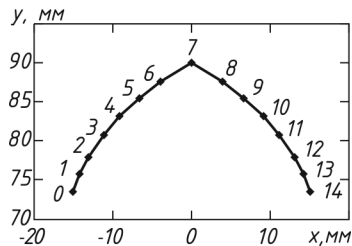


Рис. 5.12. Профіль початкової інструментальної поверхні

⁶Різальна кромка довбача належить до просторової конічної передньої поверхні. Під трансформуванням мається на увазі проєкція конічної різальної кромки на площину перпендикулярну до осі довбача.

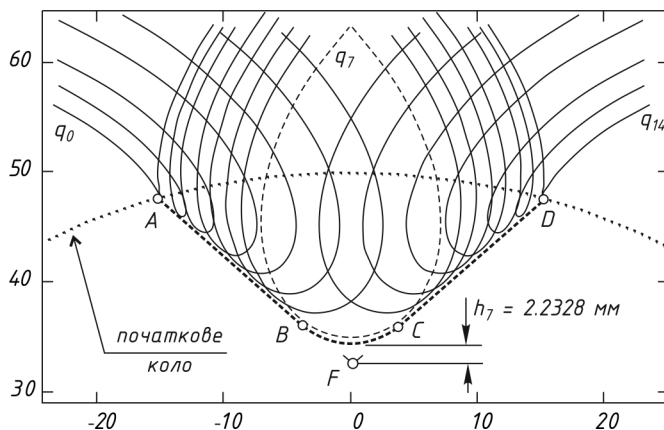


Рис. 5.13. Сукупність слідів, що визначають профіль деталі

BC загальної огинаючої утворено лише одним слідом q_7 , який на рисунку виділено пунктирною лінією.

Похибка формоутворення

Точка F на кресленку відповідає кутовий точці номінального профілю. Найкоротша відстань h_F від неї до кривої BC дорівнює величині похибки формоутворення у цій точці профілю деталі (у даному разі – в кутовий точці). чисельна величина похибки $h_F = 2,2328$ мм.

Слід особливо підкреслити, що величина похибки формоутворення h_F була визначена нами раніше, при вирішенні прямої задачі формоутворення, коли здійснювався пошук профілю початкової інструментальної поверхні і дорівнювала 2,2285 мм (величина h_{11} на рис. 5.5).

Похибка похибки

Щодо різниці чисельної величини похибки формоутворення, тобто похибка визначення похибки ($2,2328 - 2,2285 = 0,0043$ мм) визначеної при вирішенні прямої та зворотної задач формоутворення, можна стверджувати наступне.

По-перше, відносна похибка визначення похибки формоутворення при вирішенні прямої та зворотної задач становить всього 0,0043 мм, що саме по собі є малою величиною.

По-друге, чисельні значення h_F і h_{11} були визначені не розрахунковим шляхом, а виміряні безпосередньо з екрана монітора EOM (у середовищі графічного пакета CorelDRAW).

Зауваження. Остання обставина може бути підтвердженням високої надійності та мобільності методу рухомої поверхні при визначенні спряжених поверхонь.

Висновки

Узагальнюючи результати проведеного дослідження можна стверджувати, що метод рухомої поверхні дозволяє не тільки визначити форму перехідних кривих (у разі порушення однієї з умов формоутворення), але і встановити яка саме точка інструмента буде утворювати цю перехідну криву.

Результати визначення чисельної величини похибки формоутворення отримані в роботі, дозволяють говорити про високу точність визначення похибки формоутворення визначеної за результатами рішення прямої задачі.

5.1.6.2. Зворотна задача у просторі

У разі просторового вирішення зворотної задачі формоутворення вихідними параметрами є координати точок просторової різальної кромки, яка належить передній поверхні.

Введемо такі системи координат. Двовимірну кінчну систему координат $\{Y\} : (U^T V^T)$ пов'язана з передньою поверхнею інструмента і характеризується кутом рівним $(\pi - 2\gamma)$ при вершині конуса. Де кут γ це передній кут довбача (рис. 5.14).

В даний час найбільш поширеною формою передньої поверхню довбача є конічна, величина конусності якої характеризується величиною додатного переднього кута, тобто кутом γ при основі конуса.

Слід зазначити, що в ряді спеціальних випадків застосовуються довбачі з передньою поверхнею форма якої відрізняється від конічної. Наприклад, сферична, плоска для кожного зуба окремо та інше.

Враховуючи, що метою даної роботи є розробка загальних теоретичних положень методу рухомої поверхні при визначенні спряжених поверхонь, а не дослідження інструменту якоїсь конструкції, обмежимося розглядом тільки довбачів з конічною передньою поверхнею.

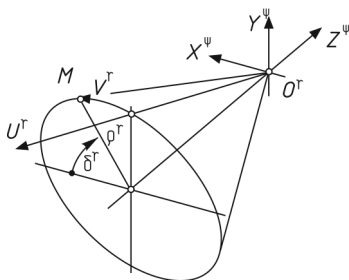


Рис. 5.14. Конічна система координат

Система координат $\{\Psi\} : (X^\Psi Y^\Psi Z^\Psi)$ пов'язана з інструментом і її вісь Y^Ψ завжди розташована в одній площині з віссю U^T .

Безпосередньо з оброблюваною деталлю зв'яжемо систему координат $\{\Delta\} : (X^\Delta Y^\Delta Z^\Delta)$ вісь Z^Δ якої збігається з віссю обертання деталі (рис. 5.15).

Нерухома система тримірних координат $\{\Sigma\} : (X^\Sigma Y^\Sigma Z^\Sigma)$ орієнтована таким чином, що її вісь Z^Σ збігається з віссю Z^Δ деталі, а вісь Y^Σ одночасно перетинає осі Z^Δ та Z^Ψ .

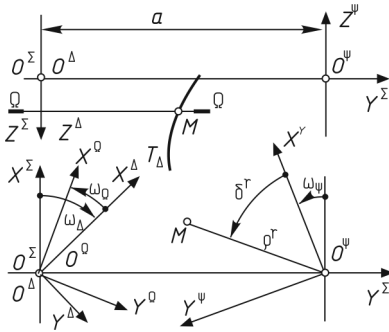


Рис. 5.15. Системи координат

Як рухому поверхню приймемо площину Ω_Δ яка завжди орієнтована ортогонально щодо осі оброблюваної деталі.

Будемо вважати, що в загальному випадку поверхня деталі є гвинтовою з гвинтовим параметром p_Δ і тому рухома площина Ω_Δ також буде здійснювати гвинтовий рух з гвинтовим параметром p_Δ .

З рухомою площиною Ω_Δ зв'яжемо плоску двовимірну систему координат $\{\Omega\} : (X^\Omega Y^\Omega)$.

У процесі дослідження умов формоутворення вважатимемо дійсними такі рухи:

- точка M , що належить різальній кромці, здійснює рух уздовж гвинтової траєкторії T . Цей рух характеризується змінним параметром t , який відповідає куту повороту точки M навколо осі гвинтової поверхні відомого інструмента, який працює за кінематичною схемою кочення кола по колу;
- інструмент, спільно з системою координат $\{\Psi\}$ здійснює обертальний рух навколо своєї осі (вісь Z^Ψ). Цей рух характеризуватимемо кутом повороту ω_Ψ , вважаючи його додатним при повороті проти ходу годинникової стрілки;
- деталь здійснює обертальний рух (рух обкатки) який характеризується кутом повороту ω_Δ ;
- плоска рухома поверхня Ω_Δ здійснює гвинтовий рух з гвинтовим параметром p_Δ .

Встановимо наступний характер взаємного зв'язку між параметрами руху об'єктів формоутворення:

- обертання деталі та інструмента

$$r_{\Delta} \omega_{\Delta} = r_{\Psi} \omega_{\Psi}; \quad (5.47)$$

- гвинтові рухи точок, що належать гвинтовим поверхням деталі та інструмента

$$\frac{r_{\Psi}}{p_{\Psi}} = \frac{r_{\Delta}}{p_{\Delta}}. \quad (5.48)$$

Необхідно відзначити, що в даному випадку схема формоутворення характеризується двома змінними параметрами:

- змінний параметр t характеризує рух розрахункової точки M по її гвинтовій траєкторії T_{Δ} ;
- змінний параметр ω_{Ψ} характеризує рух обкатки⁷.

З двох параметрів t і ω_{Ψ} провідним є параметр ω_{Ψ} . Це означає, що при кожному дискретному та фіксованому значенні параметра ω_{Ψ} , другий параметр t пробігає всі свої допустимі значення⁸.

Перейдемо до визначення положення розрахункової точки M у просторі. Вважатимемо відомими:

- кут γ при основі кіничної системи координат $\{Y\}$ пов'язаної з передньою кіничною поверхнею довбача;
- координати u^Y та v^Y точки різальної кромки інструмента.

Тоді положення довільної точки M , що належить різальній кромці, можна визначити в системі $\{\Psi\}$ радіус-вектором $\mathbf{m}^{\Psi}$ з такими компонентами

$$\mathbf{m}^{\Psi(M)} = \begin{bmatrix} \rho^{\Psi(M)} \cos \left(t + \delta^{\Psi(M)} \right) \\ \rho^{\Psi(M)} \sin \left(t + \delta^{\Psi(M)} \right) \\ p_{\Psi} + z^{\Psi(M)} \end{bmatrix}, \quad (5.49)$$

де $\rho^{\Psi(M)}$ – полярний радіус-вектор розрахункової точки M у системи координат $\{\Psi\}$;

⁷У даному випадку рух взаємного кочення кола, пов'язаного з інструментом, та другого кола, пов'язаного з деталлю. Тобто кінематична схема формоутворення відповідає коченню кола по колу.

⁸Отже, одному значенню параметра ω_{Ψ} відповідає рід значень параметра t .

$\delta^{\Psi(M)}$ – полярний кут розрахункової точки M , величина якого відраховується від осі абсцис системи координат $\{\Psi\}$.

$z^{\Psi(M)}$ – координата розрахункової точки M відносно осі Z^{Ψ} системи координат $\{\Psi\}$, її положення на різальній кромці;

ρ_{Ψ} – гвинтовий параметр гвинтової поверхні довбача, який визначається величиною кута нахилу гвинтової лінії (зубця долб'яка) на його початковому циліндрі.

У свою чергу чисельні значення величин радіус-вектора $\mathbf{m}^{\Psi}$, що входять до компонентів, можна визначити з наступних залежностей:

$$\begin{aligned} z^{\Psi(M)} &= u^T \sin \gamma, & \rho^{\Psi(M)} &= u^T \cos \gamma, \\ \delta^{\Psi(M)} &= \frac{\pi}{2} - \xi, & \xi &= \frac{v^T}{\rho^{\Psi(M)}}. \end{aligned} \quad (5.50)$$

Радіус-вектор $\mathbf{m}^{\Psi}$ визначає положення точки M різальної кромки відносно системи координат $\{\Psi\}$ пов'язаної з інструментом і здійснює разом з ним рух обертання.

Положення точки M відносно нерухомого простору можна визначити радіус-вектором $\mathbf{m}^{\Sigma}$ виконавши перетворення простору за допомогою оператора $\mathbf{Res}(\Psi, \Sigma)$, який складається з послідовного виконання оператора повороту $\mathbf{Rot}(\Psi, \Sigma)$ і оператора паралельного переносу $\mathbf{Trans}(\Psi, \Sigma)$.

Оператор повороту $\mathbf{Rot}(\Psi, \Sigma)$ системи координат $\{\Psi\}$ можна реалізувати такою матрицею

$$\mathbf{Rot}(\Psi, \Sigma) = \begin{bmatrix} \cos \omega_{\Psi} & -\sin \omega_{\Psi} & 0 \\ -\sin \omega_{\Psi} & -\cos \omega_{\Psi} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.51)$$

Оператор паралельного перенесення $\mathbf{Trans}(\Psi, \Sigma)$ системи координат $\{\Psi\}$ реалізується стовпцевою матрицею

$$\mathbf{Trans}(\Psi, \Sigma) = \begin{bmatrix} 0 \\ a \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (5.52)$$

Тоді, радіус-вектор $\mathbf{m}^\Sigma$ матиме такі компоненти

$$\mathbf{m}^\Sigma = \begin{bmatrix} \rho^\Psi \cos(t + \delta^\Psi) \cos \omega_\Psi - \rho^\Psi \sin(t + \delta^\Psi) \sin \omega_\Psi \\ a - \rho^\Psi \sin(t + \delta^\Psi) \cos \omega_\Psi - \rho^\Psi \cos(t + \delta^\Psi) \sin \omega_\Psi \\ -p_\Psi - z^\Psi \end{bmatrix}. \quad (5.53)$$

Виконавши математичні перетворення отримаємо простіший вираз для радіус-вектора $\mathbf{m}^\Sigma$, який визначає положення точки M різальної кромки відносно нерухомої системи координат $\{\Sigma\}$

$$\mathbf{m}^\Sigma = \begin{bmatrix} \rho^\Psi \cos(t + \delta^\Psi + \omega_\Psi) \\ a - \rho^\Psi \sin(t + \delta^\Psi + \omega_\Psi) \\ -p_\Psi - z^\Psi \end{bmatrix}. \quad (5.54)$$

Виконаємо перехід від нерухомої системи координат $\{\Sigma\}$ до системи координат $\{\Delta\}$ пов'язаної з деталлю. Цей перехід можна виконати за допомогою оператора повороту $\mathbf{Rot}(\Sigma, \Delta)$

$$\mathbf{Rot}(\Sigma, \Delta) = \begin{bmatrix} \cos \omega_\Delta & \sin \omega_\Delta & 0 \\ -\sin \omega_\Delta & \cos \omega_\Delta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.55)$$

Тоді положення точки M різальної кромки відносно системи координат $\{\Delta\}$ пов'язаної з деталлю визначатиметься радіус-вектором $\mathbf{m}^\Delta$ з такими компонентами:

$$\mathbf{m}^\Delta = \begin{bmatrix} m_x^\Delta \\ m_y^\Delta \\ m_z^\Delta \end{bmatrix}, \quad (5.56)$$

$$m_x^\Delta = \sin \omega_\Delta (a - \rho^\Psi \cos \omega_\Psi \sin(t + \delta^\Psi) - \rho^\Psi \cos(t + \delta^\Psi) \sin \omega_\Psi) + \\ + \cos \omega_\Delta (\rho^\Psi \cos(t + \delta^\Psi) \cos \omega_\Psi - \rho^\Psi \sin(t + \delta^\Psi) \sin \omega_\Psi), \quad (5.57)$$

$$m_y^\Delta = \cos \omega_\Delta (a - \rho^\Psi \cos \omega_\Psi \sin(t + \delta^\Psi) - \rho^\Psi \cos(t + \delta^\Psi) \sin \omega_\Psi) + \\ + \sin \omega_\Delta (\rho^\Psi \cos(t + \delta^\Psi) \cos \omega_\Psi - \rho^\Psi \sin(t + \delta^\Psi) \sin \omega_\Psi), \quad (5.58)$$

$$m_z^\Delta = -p_\Psi t - z^\Psi. \quad (5.59)$$

Перехід від системи координат $\{\Delta\}$ пов'язаної з деталлю до системи координат $\{\Omega\}$ пов'язаної з рухомою поверхнею можна виконати послідовно здійснивши операцію повороту $\mathbf{Rot}(\Delta, \Omega)$ та операцію паралельного перенесення $\mathbf{Trans}(\Delta, \Omega)$.

Оператор повороту $\mathbf{Rot}(\Delta, \Omega)$ системи координат $\{\Delta\}$ пов'язаної з деталлю навколо її осі Z^Δ на кут ω_Δ можна реалізувати матрицею

$$\mathbf{Rot}(\Delta, \Omega) = \begin{bmatrix} \cos \omega_\Omega & \sin \omega_\Omega & 0 \\ -\sin \omega_\Omega & \cos \omega_\Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.60)$$

Оператор паралельного перенесення $\mathbf{Trans}(\Delta, \Omega)$ можна реалізувати матрицею

$$\mathbf{Trans}(\Delta, \Omega) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ p_\Psi t + z^\Psi \end{bmatrix}. \quad (5.61)$$

Тоді остаточно положення точки M в системі координат $\{\Omega\}$ пов'язаної з рухомою поверхнею⁹ буде визначено радіус-вектором $\mathbf{m}^\Omega$ компоненти якого можна записати такими:

$$\begin{aligned} \mathbf{m}^\Omega = & \begin{bmatrix} m_x^\Omega & m_y^\Omega & m_z^\Omega \end{bmatrix}^T, \\ m_x^\Omega = & \rho^T \cos(t + \delta^T) \cos \omega_\Delta \cos \omega_\Omega \cos \omega_\Psi + a \cos \omega_\Omega \sin \omega_\Delta - \\ & - \rho^T \cos \omega_\Omega \cos \omega_\Psi \sin(t + \delta^T) \sin \omega_\Delta + a \cos \omega_\Delta \sin \omega_\Omega - \\ & - \rho^T \cos \omega_\Omega \cos \omega_\Psi \sin(t + \delta^T) \sin \omega_\Omega - \\ & - \rho^T \cos(t + \delta^T) \cos \omega_\Psi \cos \omega_\Delta \sin \omega_\Omega - \\ & - \rho^T \sin(t + \delta^T) \cos \omega_\Delta \sin \omega_\Omega \sin \omega_\Psi - \\ & - \rho^T \cos(t + \delta^T) \cos \omega_\Omega \cos \omega_\Delta \sin \omega_\Psi - \\ & - \rho^T \cos(t + \delta^T) \cos \omega_\Delta \sin \omega_\Omega \sin \omega_\Psi - \\ & - \rho^T \sin(t + \delta^T) \sin \omega_\Omega \sin \omega_\Delta \sin \omega_\Psi, \end{aligned} \quad (5.62) \end{aligned}$$

⁹ Або площиною, як окремий випадок просторової поверхні.

$$\begin{aligned}
m_x^\Omega = & a \cos \omega_\Omega \sin \omega_\Delta - \rho^T \sin(t + \delta^T) \cos \omega_\Delta \cos \omega_\Omega \cos \omega_\Psi - , \\
& - \rho^T \cos(t + \delta^T) \cos \omega_\Omega \cos \omega_\Psi \sin \omega_\Delta - \\
& - \rho^T \cos(t + \delta^T) \cos \omega_\Delta \cos \omega_\Psi \sin \omega_\Omega + \\
& + \rho^T \cos \omega_\Psi \sin(t + \delta^T) \sin \omega_\Delta \sin \omega_\Omega - \\
& - \rho^T \cos(t + \delta^T) \cos \omega_\Delta \cos \omega_\Omega \sin \omega_\Psi + \\
& + \rho^T \cos \omega_\Omega \cos(t + \delta^T) \sin \omega_\Delta \sin \omega_\Psi + \\
& + \rho^T \cos \omega_\Delta \sin(t + \delta^T) \sin \omega_\Omega \sin \omega_\Psi + \\
& + \rho^T \cos(t + \delta^T) \sin \omega_\Delta \sin \omega_\Omega \sin \omega_\Psi - \\
& - a \sin \omega_\Delta \sin \omega_\Omega, \quad (5.63)
\end{aligned}$$

$$m_z^\Omega = 0. \quad (5.64)$$

У наведених виразах кут ω_Ω можна визначити із співвідношень

$$\omega_\Omega = \frac{m_z^\Psi}{p_\Delta}, \quad p_\Delta = \frac{r_\Delta}{r_\Psi} p_\Psi. \quad (5.65)$$

Аналіз результатів розв'язання просторової зворотної задачі формоутворення показав, що при досліджуваній схемі формоутворення, яка зводиться до взаємного кочення двох кіл, вони ідентичні результатам застосування плоского варіанту.

5.1.6.3. Висновки

Отримані результати можна пояснити наступним чином. При вирішенні зворотної задачі за рухоми поверхню Ω в обох випадках приймається площа розташована ортогонально відносно осі оброблюваної деталі.

Сліди q траєкторій T гвинтової поверхні інструмента (точніше гвинтової початкової інструментальної поверхні), які вони залишають на рухомій площині Ω , ідентичні торцевому профілю початкової інструментальної поверхні.

Тому отримані результати розв'язання плоскої та просторової задачі формоутворення повинні бути ідентичні, що і підтверджують отримані результати.



6. РЕЙКОВИЙ ІНСТРУМЕНТ

Теоретично, формоутворення гвинтових поверхонь рейковим інструментом можна розглядати як окремий випадок застосування довбача, коли радіус його початкового кола дорівнює нескінченності¹.

У той же час, враховуючи характер виконуваної роботи, виведемо математичні залежності для даного виду обробки, виходячи зі схеми формоутворення еквівалентної коченню кола, пов'язаної з деталлю, по прямій пов'язаній з інструментом [20, 21, 22, 23].

Метою дослідження поставимо визначення профілю просторової різальної кромки при формоутворенні гвинтової поверхні рейковим інструментом. Розглянемо рейковий інструмент із плоскою передньою поверхнею, орієнтація якої створює на інструменті додатний передній кут γ . Прикладом такого інструменту може бути гребінка.

6.1. Пряма задача формоутворення

В інструментальному виробництві під прямою задачею мають на увазі пошук профілю початкової інструментальної поверхні для заданого профілю деталі.

6.1.1. Взаємна орієнтація об'єктів дослідження

В даний час, передня поверхня гребінки найбільш часто виконується у вигляді площини, яка складає з напрямком робочого руху деякий кут². Розглядатимемо гребінки з плоскою передньою поверхнею, єдиною для всіх зубців інструмента.

З деталлю зв'яжемо систему координат $\{\Delta\} : (X^\Delta Y^\Delta Z^\Delta)$, яка орієнтована в спосіб поданий на рис. 6.1. Вісь Z^Δ збігається з віссю гвинтової поверхні деталі і спрямована у бік додатного (правого) гвинтового руху.

¹Більше того, при використанні чисельних методів із застосуванням ЕОМ, радіус початкового кола довбача достатньо приймати на 3...4 порядки більше, ніж радіус початкового кола деталі. У цьому випадку, похибка обчислень виявлятиметься лише в 5...7-му знаку, що достатньо для практичних розрахунків.

²Поряд з цим, з метою підвищення працездатності інструменту, часто передній поверхні гребінки надають форму циліндра або конуса. Відомі також конструкції, які мають радіусну підточку вздовж різальних кромки, по периферії зубця.

Координатна площина ($X^\Delta Y^\Delta$) збігається з торцевим перерізом гвинтової поверхні, в якому визначено її профіль заданий полярним радіус-вектором ρ та полярним кутом δ .

У початковому положенні вісь Y^Δ спрямована у бік інструмента. У процесі дослідження система координат $\{\Delta\}$ здійснює, разом із деталлю, обертальний рух обкочування.

З інструментом зв'яжемо прямокутну систему координат $\{\Psi\} : (X^\Psi Y^\Psi Z^\Psi)$. Вісь X^Ψ якої орієнтована вздовж інструмента, а вісь Y^Ψ у початковий момент збігається з вісь Y^Δ , але спрямована в протилежний бік. Відповідно, вісь Z^Ψ доповнює праву трійку осей системи $\{\Psi\}$. У процесі дослідження система координат здійснює рух обкатки, спрямований уздовж осі X^Ψ .

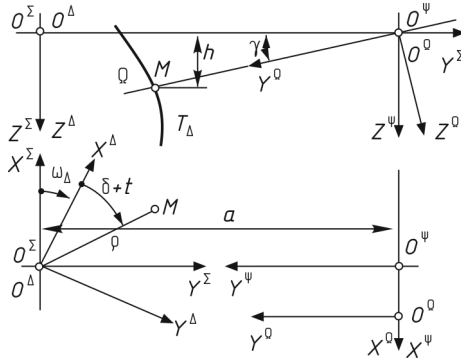


Рис. 6.1. Системи координат рейкового інструменту

Взаємне розташування систем координат $\{\Delta\}$ і $\{\Psi\}$ визначатимемо в нерухомій системі координат $\{\Sigma\} : (X^\Sigma Y^\Sigma Z^\Sigma)$. У початковий момент дослідження система координат $\{\Sigma\}$ повністю збігається із системою $\{\Delta\}$. При цьому відзначимо, що система $\{\Delta\}$ обертається разом із деталлю, тоді як система $\{\Sigma\}$ завжди залишається нерухомою. Початки O^Σ , O^Δ та O^Ψ відповідних систем координат завжди розташовані на осі Y^Δ .

Як рухому поверхню приймемо площину Ω_Ψ , яка збігається з передньою поверхнею інструмента. Орієнтація площини Ω_Ψ визначається величиною переднього кута γ рейкового інструменту (гребінки), що вимірюється в координатній площині ($Y^\Sigma Z^\Sigma$). Приймемо, що площина Ω_Ψ завжди проходить через вісь X^Ψ системи координат, пов'язаної з інструментом.

6.1.2. Побудова сліду перетину гвинтової траєкторії з рухомою площиною

Положення довільної точки M , при її русі по гвинтовій траєкторії T можна визначити радіус-вектором $\mathbf{m}$, компоненти якого в системі

координат $\{\Delta\}$ можна записати наступним чином

$$\mathbf{m}^{\Delta(M)} = \begin{bmatrix} \rho^{\Delta(M)} \cos \left(t + \delta^{\Delta(M)} \right) \\ \rho^{\Delta(M)} \sin \left(t + \delta^{\Delta(M)} \right) \\ p_{\Delta} t \end{bmatrix} \quad (6.1)$$

де $\rho^{\Delta(M)}$ – полярний радіус-вектор точки M , визначений у системі координат $\{\Delta\}$;

$\delta^{\Delta(M)}$ – полярний кут точки M , визначений у системі координат $\{\Delta\}$;

t – змінний параметр, геометричний образ якого відповідає куту повороту точки M навколо осі гвинтової поверхні при її русі по своїй гвинтовій траєкторії T_{Δ} , яка належить до гвинтової поверхні.

Для того, щоб визначити положення розрахункової точки M при її русі по гвинтовій траєкторії T_{Δ} , щодо нерухомої системи координат $\{\Sigma\}$, необхідно застосувати оператор перетворення простору $\mathbf{Res}(\Delta, \Sigma)$, який можна реалізувати оператором повороту $\mathbf{Rot}(\Delta, \Sigma)$ початкової системи координат $\{\Delta\}$. Оператор повороту $\mathbf{Rot}(\Delta, \Sigma)$ можна записати, як матрицю

$$\mathbf{Rot}(\Delta, \Sigma) = \begin{bmatrix} \cos \omega_{\Delta} & -\sin \omega_{\Delta} & 0 \\ \sin \omega_{\Delta} & \cos \omega_{\Delta} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (6.2)$$

Тоді, радіус-вектор $\mathbf{m}^{\Sigma}$ компоненти, якого визначені відносно системи координат $\{\Sigma\}$ можна визначити як

$$\mathbf{m}^{\Sigma} = \mathbf{Rot}(\Delta, \Sigma) \cdot \mathbf{m}^{\Delta}. \quad (6.3)$$

Підставляючи значення матриці $\mathbf{Rot}(\Delta, \Sigma)$ та компоненти радіус-вектора $\mathbf{m}^{\Delta}$ отримаємо вираз, що визначає положення розрахункової точки M відносно системи координат $\{\Sigma\}$, яка є нерухомою³.

³Система координат $\{\Sigma\}$ є нерухомою системою, яка визначає положення (орієнтацію) простору в якому здійснюють дослідження. Вона є основною базою для орієнтації всіх інших систем. Таким чином, орієнтацію або положення будь-яких систем координат відносно одна-одної можна визначити у системі координат $\{\Sigma\}$

Виконавши відповідні математичні перетворення остаточно отримаємо компоненти вектора $\mathbf{m}^\Sigma$ у вигляді

$$\begin{aligned}\mathbf{m}^\Sigma &= \mathbf{Rot}(\Delta, \Sigma) \cdot \mathbf{m}^\Delta = \\ &= \begin{bmatrix} \cos \omega_\Delta & -\sin \omega_\Delta & 0 \\ \sin \omega_\Delta & \cos \omega_\Delta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \rho^{\Delta(M)} \cos(t + \delta^{\Delta(M)}) \\ \rho^{\Delta(M)} \sin(t + \delta^{\Delta(M)}) \\ p_\Delta t \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \rho^{\Delta(M)} \cos(t + \delta^{\Delta(M)} + \omega_\Delta) \\ \rho^{\Delta(M)} \sin(t + \delta^{\Delta(M)} + \omega_\Delta) \\ p_\Delta t \end{bmatrix}. \quad (6.4)\end{aligned}$$

Отже, на даному етапі дослідження, ми отримали радіус-вектор $\mathbf{m}^\Sigma$, який визначає положення точки M при її русі по гвинтовій траєкторії відносно нерухомої системи координат $\{\Sigma\}$.

Наступним етапом дослідження є визначення моменту (умови), коли розрахункова точка M перетне при своєму русі за траєкторією T_Δ площину Ω_Ψ . Виведемо цю умову з розгляду рис. 6.1.

Відрізок h можна визначити, як величину компоненти радіус-вектора $\mathbf{m}^\Sigma$, що дорівнює

$$h = m_z^\Sigma = p_\Delta t. \quad (6.5)$$

З іншого боку, відрізок h можна визначити з виразу

$$h = (a - m_y^\Sigma) \operatorname{tg} \gamma = (a - \rho^{\Delta(M)} \sin(t + \delta^{\Delta(M)} + \omega_\Delta)) \operatorname{tg} \gamma. \quad (6.6)$$

Отримане вираз є умовою, коли розрахункова точка M , рухаючись по гвинтовій траєкторії T_Δ перетнеться з площиною Ω_Ψ . Слід зазначити, що отриманий вираз містить два змінних параметри, а саме ω_Δ та t , з яких нас цікавить лише параметр t . Його визначення необхідно виконувати в наступній послідовності:

- спочатку, задаємося значенням параметра ω_Δ , геометричне відображення якого відповідає куту повороту деталі при русі обкатки;
- далі, за фіксованого значення параметра ω_Δ , послідовно визначаємо значення параметра t для всіх розрахункових точок гвинтової поверхні;
- знайдені значення параметра t визначають момент, коли відповідна точка M перетинає площину Ω_Ψ (точніше, збігається з нею)'

- після цього необхідно прийняти нове фіксоване значення параметра ω_{Δ} та знайти нову серію значень параметра t .

Викладені дії можна розглядати, як зміну двох параметрів, з яких параметр ω_{Δ} є провідним, а параметр t веденим, коли при фіксованому значенні провідного параметра ω_{Δ} , ведений параметр t пробігає доступні йому значення.

Узагальнюючи результати, отримані на цьому етапі дослідження, можна стверджувати, що радіус-вектор $\mathbf{m}^{\Sigma}$ (при заданих значеннях ω_{Δ} і знайдених значеннях t) визначатиме положення точок Q слідів q на площині Ω_{Ψ} .

Для того щоб визначити положення розрахункових точок Q слідів q на площині Ω_{Ψ} у системі координат $\{\Omega\}$ пов'язаної з площиною Ω_{Ψ} , а відповідно і з передньою площиною інструмента, необхідно застосувати оператор перетворення простору $\mathbf{Res}(\Sigma, \Omega)$, який складається з послідовного виконання операторів повороту $\mathbf{Rot}(\Sigma, \Omega)$ та перенесення $\mathbf{Trans}(\Sigma, \Omega)$.

Оператор повороту $\mathbf{Rot}(\Sigma, \Omega)$ системи координат $\{\Sigma\}$ з перетворенням її на проміжну систему координат $\{\Sigma^1\}$ можна реалізувати матрицею

$$\begin{aligned} \mathbf{Rot}(\Sigma, \Omega) &= \mathbf{Rot}(\Sigma \{Z^{\Sigma}, \pi\}, \{X^{\Sigma}, \gamma\} \Omega) = \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\cos \gamma & \sin \gamma \\ 0 & \sin \gamma & \cos \gamma \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (6.7)$$

В даному випадку виконується поворот системи $\{\Sigma\}$ навколо її осі Z^{Σ} на кут π і послідовно навколо осі X^{Σ} на кут γ . Результатом перетворень буде проміжна система координат $\{\Sigma^1\}$

$$\mathbf{Rot}(\Sigma \{Z^{\Sigma}, \pi\}, \{X^{\Sigma}, \gamma\} \Omega) \Rightarrow \{\Sigma^1\}. \quad (6.8)$$

Оператор паралельного перенесення $\mathbf{Trans}(\Sigma, \Omega)$ можна реалізувати стовпцевою матрицею

$$\mathbf{Trans}(\Sigma, \Omega) = \mathbf{Trans}(\Sigma^1, Y^{\Sigma^1}, a) = \begin{bmatrix} -r_{\Delta} \omega_{\Delta} \\ a \cos \gamma \\ -a \sin \gamma \end{bmatrix}. \quad (6.9)$$

Оператор (6.9) здійснює перенесення проміжної системи координат $\{\Sigma^1\}$ вздовж її осі на величину a .

Результатом послідовного виконання операторів повороту $\mathbf{Rot}(\Sigma, \Omega)$ та перенесення $\mathbf{Trans}(\Sigma, \Omega)$ буде перехід до системи координат $\{\Omega\}$ пов'язаної з передньою поверхнею інструмента. Тоді

$$\mathbf{m}^\Omega = \mathbf{Rot}(\Sigma \{Z^\Sigma, \pi\}, \{X^\Sigma, \gamma\} \Omega) \cdot \mathbf{m}^\Sigma + \mathbf{Trans}(\Sigma, \Omega). \quad (6.10)$$

Підставивши до виразу (6.10) відповідні значення елементів матриць отримаємо у розгорнутому вигляді

$$\begin{aligned} \mathbf{m}^\Omega = \begin{bmatrix} -1 & 0 & \\ 0 & -\cos \gamma & \sin \gamma \\ 0 & \sin \gamma & \cos \gamma \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \rho \cos(t + \delta + \omega_\Delta) \\ \rho \sin(t + \delta + \omega_\Delta) \\ p_\Delta t \end{bmatrix} + \\ + \begin{bmatrix} -r_\Delta \omega_\Delta \\ a \cos \gamma \\ -a \sin \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_x^\Omega \\ m_y^\Omega \\ m_z^\Omega \end{bmatrix} \quad (6.11) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_x^\Omega &= r_\Delta \omega_\Delta - \rho \cos(\delta + t) \cos \omega_\Delta + \rho \sin(\delta + t) \sin \omega_\Delta \\ m_y^\Omega &= a \cos \gamma + p t \sin \gamma - \\ &\quad - \cos \gamma (\rho \sin(\delta + t) \cos \omega_\Delta + \rho \cos(\delta + t) \sin \gamma) \\ m_z^\Omega &= p t \sin \gamma - a \sin \gamma + \\ &\quad + \sin \gamma (\rho \sin(\delta + t) \cos \omega_\Delta + \rho \cos(\delta + t) \sin \gamma) \end{aligned}$$

Отримані компоненти $(m_x^\Omega, m_y^\Omega, m_z^\Omega)$ радіус-вектора $\mathbf{m}^\Omega$ визначають положення точки Q , що належить гвинтовій траєкторії T_Δ , на площині Ω_Ψ , тобто описують координати точок Q сліду q у системі координат $\{\Omega\}$. Огинаючи до отриманих слідів q , визначатиме профіль різальної кромки в передній плоскій поверхні зубця гребінки.

Слід зазначити, що в наведених виразах компонента m_z^Ω повинна дорівнювати нулю, так як площина є двовимірним плоским геометричним об'єктом. Тому при чисельних розрахунках компонента m_z^Ω вироджується в нульові значення⁴.

У тому випадку, коли метою дослідження є визначення профілю початкової інструментальної поверхні, необхідно в наведені залежності (6.10) підставити значення переднього кута рівними нулю $\gamma = 0^\circ$. У цьому випадку передня поверхня інструмента, а разом з нею і площина Ω_Ψ ,

⁴У середовищі математичного пакета MathCAD, величина m_z^Ω чисельно знаходиться в межах $10^{-13} \dots 10^{-15}$, що практично рівнозначно нульовому значенню.

займуть положення, що відповідає ортогональному перерізу початкової інструментальної поверхні.

Одночасно з цим слід враховувати, що параметр t дорівнює нулю $t = 0$ для всіх дискретних фіксованих положень деталі в процесі обкатки. Це можна пояснити тим, що площини торцевого перерізу гвинтової поверхні та ортогонального перерізу початкової інструментальної поверхні – збігаються. Тому є доцільним використовувати математичні залежності (6.10), отримані вище з урахуванням рівностей $\gamma = 0^\circ$ та $t = 0$, а саме

$$\mathbf{m}^\Omega = \begin{bmatrix} r_\Delta \omega_\Delta + \cos(\delta + \omega_\Delta) \\ a - \rho \sin(\delta + \omega_\Delta) \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (6.12)$$

У цьому випадку вираз компонентів радіус-вектора $\mathbf{m}^\Omega$ перетворюється на одно-параметричну залежність, що суттєво спрощує математичну сторону пошуку профілю початкової інструментальної поверхні.

6.1.3. Обкочування по гвинтовій траєкторії

Викладені вище результати досліджень дозволяють визначати, як профіль початкової інструментальної поверхні, так і профіль просторової різальної кромки, однак, мають один недолік, а саме необхідність розв'язання трансцендентного рівняння при визначенні значення параметра t .

У той же час, у розділі даної роботи присвяченому формоутворенню за схемою кочення кола по колу, зазначалося, що при використанні методу рухомої поверхні, обертальну складову руху точки M по гвинтовій траєкторії T , можна інтерпретувати як рух обкатки. Тобто замість параметра ω_Δ руху обкатки розглядати параметр t переміщення точки по гвинтовій траєкторії.

Розглянемо це твердження більш докладно стосовно схеми формоутворення, яка відповідає коченню кола з відомим профілем по прямій. Як початкову орієнтації об'єктів дослідження приймемо їхнє розташування, наведене на рис. 6.2.

Будемо міркувати так. Рух обкатки деталі відповідає її обертанню навколо її ж осі, тобто навколо осі гвинтової поверхні. При цьому відповідно до принципів обкатки, інструмент (гребінка) здійснює узгоджене поступальне переміщення, що залежить від кута ω_Δ повороту деталі та радіуса r_Δ початкового кола.

Важливим є те, що розрахункова точка M під час руху обкатки здійснює лише колоподібний рух⁵ відносно центру O^Σ .

Тепер виключимо з розгляду рух обкатки, і розглядатимемо лише рух розрахункової точки M по гвинтовій траєкторії T_Δ . У цьому випадку проекція точки M на координатну площину $(X^\Sigma Y^\Sigma)$ буде у вигляді кола. При цьому її радіус збігатиметься з радіусом кола переміщення точки M при русі обкатки, так як в обох випадках залишилися постійними положення центру O^Σ і величина радіуса $\rho^{(M)}$.

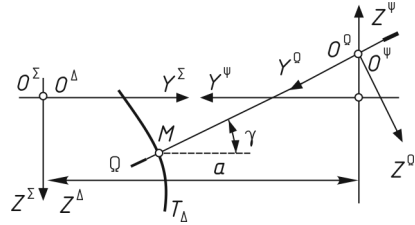


Рис. 6.2. Орієнтація похилої рухомої поверхні

Якщо тепер інструменту (у системі координат $\{\Psi\}$ пов'язаної з початковою прямою) надати поступальне переміщення, параметрами якого будуть кут t повороту проекції точки M і радіус $\rho^{(M)}$, то отримана форма траєкторії руху точки M щодо системи $\{\Psi\}$ буде ідентичною до кривої, отриманої у попередньому випадку під час розгляду руху обкатки.

Таким чином, можна стверджувати, що при схемі формоутворення, що відповідає коченню кола по прямій, рух обкатки можна виключити, замінивши його переміщенням проекції розрахункової точки M по координатній площині $(X^\Sigma Y^\Sigma)$ при її русі по гвинтовій траєкторії T_Δ .

Відповідно до викладеного, визначатимемо положення розрахункової точки на гвинтовій траєкторії, у системі координат $\{\Sigma\}$, радіус-вектором

$$\mathbf{m}^\Sigma = \begin{bmatrix} \rho \cos(\delta + t) \\ \rho \sin(\delta + t) \\ pt \end{bmatrix}. \quad (6.13)$$

Визначимо положення розрахункової точки у системі координат $\{\Psi\}$, пов'язаної з початковою прямою (з інструментом). При цьому враховуватимемо її поступальне переміщення з параметрами r_Δ і t . Оператор повороту $\mathbf{Rot}(\Sigma, \Psi)$ системи можна подати матрицею

$$\mathbf{Rot}(\Sigma, \Psi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (6.14)$$

⁵Тобто здійснює рух по колу навколо осі гвинтової поверхні.

Оператор паралельного перенесення $\mathbf{Trans}(\Sigma, \Psi)$ можна реалізувати стовпцевою матрицею

$$\mathbf{Trans}(\Sigma, \Psi) = \begin{bmatrix} r_{\Delta} t \\ a \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (6.15)$$

В якості рухомої поверхні прийемо площину Ω_{Ψ} , яка розташована паралельно осі X^{Ψ} і здійснює два рухи:

- прямолінійний рух обкатки разом з інструментом⁶;
- і похилий у координатній площині $(X^{\Psi}Z)$ під кутом β , який дорівнює куту нахилу гвинтової лінії на початковому циліндрі.

У цьому випадку матриця оператора повороту $\mathbf{Rot}(\Psi, \Omega)$ матиме такі елементи

$$\mathbf{Rot}(\Psi, \Omega) = \begin{bmatrix} 0 & \cos \gamma & -\sin \gamma \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin \gamma & -\cos \gamma \end{bmatrix}. \quad (6.16)$$

Оператор паралельного перенесення $\mathbf{Trans}(\Psi, \Omega)$ включає два переміщення:

- перше переміщення, це переміщення, обумовлене нахилом площини Ω_{Ψ} на кут γ ;
- друге переміщення обумовлено загальним нахилом профілю гребінки, який дорівнює куту нахилу гвинтової лінії на початковому циліндрі.

Приймаючи, що кути γ і β не дорівнюють нулю ($\gamma \neq 0$ та $\beta \neq 0$), елементи стовпцевої матриці $\mathbf{Trans}(\Psi, \Omega)$ паралельного переміщення будуть такими

$$\mathbf{Trans}(\Psi, \Omega) = \begin{bmatrix} \left((a - m_y^{\Sigma}) \operatorname{tg} \gamma - m_z^{\Sigma} \right) \sin \gamma \\ \left((a - m_y^{\Sigma}) \operatorname{tg} \gamma - m_z^{\Sigma} + p t \right) \sin \beta \\ \left((a - m_y^{\Sigma}) \operatorname{tg} \gamma - m_z^{\Sigma} \right) \cos \gamma \end{bmatrix}. \quad (6.17)$$

Таким чином, радіус-вектора $\mathbf{m}^{\Omega}$, який визначає положення точок $\mathcal{Q}$ сліду q у рухомій площині Ω_{Ψ} , можна визначити як

$$\begin{aligned} \mathbf{m}^{\Omega} &= \mathbf{Rot}(\Psi, \Omega) \cdot \left(\mathbf{Rot}(\Sigma, \Psi) \cdot \mathbf{m}^{\Sigma} + \mathbf{Trans}(\Sigma, \Psi) \right) + \\ &+ \mathbf{Trans}(\Psi, \Omega) = \begin{bmatrix} m_x^{\Omega} & m_y^{\Omega} & m_z^{\Omega} \end{bmatrix}^T. \end{aligned} \quad (6.18)$$

⁶Тобто, прямолінійний рух кола, що котиться по початковій прямій.

Розкривши наведений вираз, отримаємо наступні компоненти радіус-вектора m^Ω

$$m_x^\Omega = p t \sin \gamma + (a - \rho \sin (\delta + t)) \cos \gamma + (-p t + (a - \rho \sin (\delta + t)) \operatorname{tg} \gamma) \sin \gamma, \quad (6.19)$$

$$m_y^\Omega = r_\Delta t + \rho \cos (\delta + t) + (a - \rho \sin (\delta + t)) \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma, \quad (6.20)$$

$$m_z^\Gamma = p t \cos \gamma - (a - \rho \sin (\delta + t)) \sin \gamma + (-p t + (a - \rho \sin (\delta + t)) \operatorname{tg} \gamma) \cos \gamma. \quad (6.21)$$

Виконавши перетворення отриманих виразів до більш простого вигляду, отримаємо

$$m_x = \frac{a - \rho \sin (\delta + t)}{\cos \gamma}, \quad (6.22)$$

$$m_y = r_\Delta t + \rho \cos (\delta + t) + (a - \rho \sin (\delta + t)) \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma, \quad (6.23)$$

$$m_z = 0. \quad (6.24)$$

Вираз $m_z = 0$ побічно підтверджує правильність математичних викладень, так як в якості рухомої поверхні прийнята площина, то компонента m_z повинна дорівнювати нулю.

Висновки

Роблячи висновки, щодо результатів теоретичних досліджень процесу формоутворення гвинтових поверхонь рейковим інструментом, можна стверджувати наступне.

Проведені теоретичні дослідження дозволили вивести математичні залежності єдині, як для визначення профілю початкової інструментальної поверхні, так і для визначення профілю просторової різальної кромки.

Показано, що при формоутворенні гвинтових поверхонь, як параметр, що визначає рух обкатки, можна розглядати параметр, що визначає положення розрахункової точки на гвинтовій траєкторії, що значно спрощує розрахунковий бік питання.

6.1.4. Аналіз результатів дослідження формоутворення гвинтових поверхонь рейковим інструментом

Розглянемо процес формоутворення гвинтових поверхонь рейковим інструментом на прикладі обробки деталі, що має кутовий профіль представлений на рис. 6.3.

Характер гвинтової поверхні визначатимемо кутом β нахилу гвинтової лінії на початковому циліндрі.

Для того щоб мати певного роду базу для проведення досліджень, спочатку вивчимо формоутворення деталі циліндричної (на гвинтовій) форми інструментом з нульовим переднім кутом γ .

На рис. 6.4 представлена сукупність слідів q утворених перетином траєкторій T_{Δ} з рухомою площиною Ω_{Ψ} .

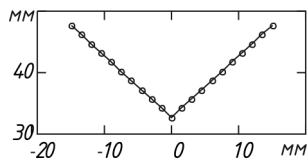


Рис. 6.3. Торцевий профіль деталі

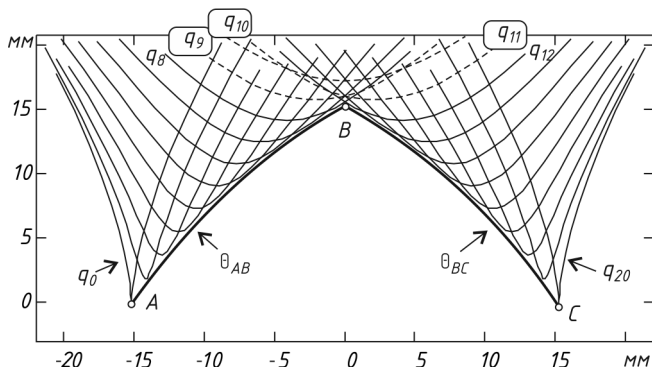


Рис. 6.4. Сукупність слідів та огинаюча до них

Аналіз характеру розташування слідів q щодо один одного і щодо огинаючої Θ , дозволяє зробити наступні висновки щодо результатів формоутворення циліндричної фасонної поверхні рейковим інструментом.

Огинаюча Θ до сукупності слідів q складається з двох ділянок Θ_{AB} та Θ_{BC} . Точки A і B огинаючої відповідають крайнім следам q_0 і q_{20} .

Далі. Огинаюча є дотичною лише частини слідів, саме двох груп слідів $q_{0...8}$ та $q_{12...20}$. Саме вони визначають форму двох ділянок огинаючої. У той же час група слідів $q_{9...11}$ не є дотичними до огинаючої, вони виділені на малюнку пунктирними лініями.

Розглянемо околицю точки B у збільшеному вигляді рис. 6.5. На наведеному фрагменті видно, що точка B утворена перетином слідів q_8 і q_{12} (на рисунку виділені товстими лініями). Сліди $q_{9...11}$ проходять на деякій відстані від огинаючої. Тому можна стверджувати, що профіль деталі в розрахункових точках $9...11$ не буде утворений. При цьому вели-

чина похибки формоутворення чисельно дорівнює найменшій відстані від цих слідів до точки B .

Тепер виконаємо формоутворення гвинтової поверхні, яка характеризується величиною кута $\beta = 30^\circ$, рейковим інструментом з додатнім переднім кутом $\gamma = 30^\circ$. Сукупність слідів q перетину гвинтових траєкторій T_Δ із похилою рухомою плоскою поверхнею Ω_Ψ представлено на рис. 6.6.

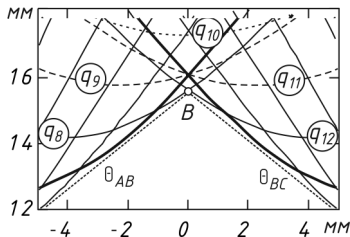


Рис. 6.5. Околиці точки B

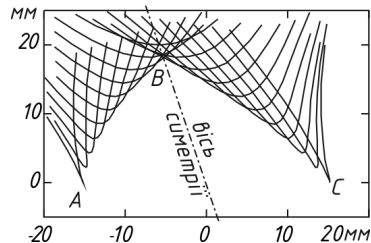


Рис. 6.6. Сукупність слідів утворення гвинтової поверхні

Аналіз характеру взаємного розташування слідів дозволяє стверджувати, що в порівнянні з попереднім варіантом формоутворення він істотно не змінився, проте загальна картина зображення змістилась в горизонтальній площині, що обумовлене впливом додатного переднього кута γ . Одночасно вісь симетрії профілю різальної кромки нахилилася, залишаючись прямою лінією.

6.1.5. Висновки

Узагальнюючи результати дослідження формоутворення гвинтових поверхонь рейковим інструментом можна стверджувати, що їх загальний характер є аналогічний результатам формоутворення гвинтових поверхонь довбачами.

Це можна пояснити тим, що з точки зору теорії формоутворення, схема обробки при коченні кола по прямій, є окремим випадком взаємного кочення двох кіл, коли радіус одного кола дорівнює нескінченності.

При використанні рейкового інструменту не відбувається викривлення осі симетрії профілю зубця інструмента, яке спостерігається при формоутворенні довбачами (де вісь має вигляд архімедової спіралі). Це можна пояснити тим, що рейковий інструмент можна розглядати як коло нескінченно великого радіусу, внаслідок чого архімедова спіраль вироджується у пряму лінію.

кромки, її положення визначається кутом γ , у загальному випадку не рівним передньому куту зуба рейкового інструменту.

Безпосередньо з інструментом зв'яжемо просторову систему координат $\{\Psi\} : (X^\Psi Y^\Psi Z^\Psi)$. Вісь X^Ψ орієнтована паралельно до прямолінійного руху обкатки, який здійснює в процесі формоутворення рейковий інструмент.

З утвореною деталлю зв'яжемо систему координат $\{\Delta\} : (X^\Delta Y^\Delta Z^\Delta)$. Вісь Z^Δ збігається з віссю гвинтової поверхні деталі.

У початковий момент дослідження вісь Y^Δ орієнтована ортогонально щодо напрямку руху обточування, що здійснюється інструментом. У процесі дослідження система координат $\{\Delta\}$ здійснює обертальний рух обкатки разом з оброблюваною деталлю. Величина повороту обертального руху визначається величиною кута ω_Δ .

Взаємне розташування систем координат, пов'язаних з інструментом та оброблюваною деталлю, визначатимемо в нерухомій системі координат $\{\Sigma\} : (X^\Sigma Y^\Sigma Z^\Sigma)$. Прийнемо взаємну орієнтацію осей Z^Δ та Z^Ψ паралельної, але спрямованої у протилежний бік.

Найкоротшу відстань між цими осями позначимо як a . У загальному випадку, величина a може бути довільною, однак, більш раціональним буде приймати її рівною радіусу r_Δ початкового кола, пов'язаного з утвореною деталлю.

Як рухому поверхню прийнемо площину Ω_Δ , яка збігається з координатною площиною $(X^\Delta Y^\Delta)$ і здійснює обертальний рух разом з деталлю.

6.2.2. Побудова слідів перетин траєкторій розрахункових точок з рухомою площиною

Визначимо координати просторової різальної кромки довільної форми у системі координат $\{\Upsilon\}$ компонентами радіус-вектора $\mathbf{m}^\Upsilon$ у загальній формі

$$\mathbf{m}^\Upsilon = \begin{bmatrix} m_x^\Upsilon & m_y^\Upsilon & m_z^\Upsilon \end{bmatrix}^T. \quad (6.25)$$

Така форма подання різальної кромки дозволяє досліджувати процес формоутворення рейковим інструментом, який має будь-яку форму як різальної кромки, так і всієї передньої поверхні зуба, не прив'язуючися до якоїсь конкретної конструкції. При цьому вважатимемо, що координатна площина $(X^\Upsilon Y^\Upsilon)$ розташована деяким усередненим чином щодо просторової (загалом криволінійної) передньої поверхні зубця інструмента.

Природно припустити, що у разі плоскої форми передньої поверхні зубця інструмента, координатна площина ($X^T Y^T$) збігатиметься з передній поверхню зубця. Однак, ця умова не є обов'язковою для проведення дослідження.

Для того, щоб перейти від системи координат $\{Y\}$, пов'язаної з передньою поверхню інструмента, до системи координат $\{\Psi\}$ пов'язаної з інструментом в цілому, необхідно застосувати оператор $\mathbf{Rot}(Y, \Psi)$ перетворення простору. Компоненти оператора $\mathbf{Rot}(Y, \Psi)$ можна подати квадратною матрицею

$$\mathbf{Rot}(Y, \Psi) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma & -\sin \gamma \\ 0 & -\sin \gamma & -\cos \gamma \end{bmatrix}. \quad (6.26)$$

Тоді компоненти радіус-вектора $\mathbf{m}^\Psi$, який визначає положення розрахункової точки просторової різальної кромки інструмента у системі координат $\{\Psi\}$, можна визначити як

$$\mathbf{m}^\Psi = \mathbf{Rot}(Y, \Psi) \cdot \mathbf{m}^T = \begin{bmatrix} -m_x^T \\ m_y^T \cos \gamma - m_z^T \sin \gamma \\ m_z^T \cos \gamma - m_y^T \sin \gamma \end{bmatrix}. \quad (6.27)$$

Розглянемо характер руху розрахункової точки різальної кромки за її траєкторією T_Ψ у процесі проведення дослідження. Рейковий інструмент (початкову інструментальну поверхню рейкового інструменту) можна розглядати, як фасонну циліндричну поверхню, яка утворена деякою кривою, що рухається по напрямній похилій лінії.

Отже, для рейкового інструменту форма траєкторії T_Ψ розрахункових точок різальної кромки трансформується з гвинтової лінії в пряму. Саме тому на рис. 6.7 траєкторія T_Ψ представлена прямою лінією.

При вирішенні зворотної задачі формоутворення вихідним параметром є профіль початкової інструментальної поверхні. Тому доцільно привести всі траєкторії T_Ψ до деякої площини, яка з найбільшою достовірністю характеризує форму (профіль) початкової інструментальної поверхні.

У даному випадку формоутворення такою площиною може бути координатна площина ($X^\Psi Y^\Psi$). Додатковим аргументом на користь вибору саме цієї площини може бути те, що координатна площина ($X^\Psi Y^\Psi$) збігається з площиною Ω_Δ , це спрощує суть математичних викладень.

Отже, необхідно визначити таке положення розрахункової точки на траєкторії T_Ψ , у якому вона збігається з координатною площиною

$(X^\Psi Y^\Psi)$. Вище було встановлено, що для рейкового інструменту траєкторія T_Ψ є прямою лінією.

При формоутворенні гвинтових поверхонь траєкторія T_Ψ лежить у площині робочого руху інструмента (у координатній площині $(X^\Psi Z^\Psi)$) та нахилена щодо осі Z^Ψ на кут β . У свою чергу, кут β дорівнює куту нахилу гвинтової лінії на циліндрі радіусу початкового кола r_Δ .

Тоді компоненти радіус-вектора $\mathbf{m}_{XY}^\Psi$, який визначає положення точок траєкторії T_Ψ що належать координатній площині $(X^\Psi Y^\Psi)$ набудуть вигляду

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_{XY}^\Psi &= \begin{bmatrix} m_x^\Psi - m_z^\Psi \operatorname{tg} \beta \\ m_y^\Psi \\ 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} -m_x^\Psi - (m_z^\Psi \cos \gamma - m_y^\Psi \sin \gamma) \operatorname{tg} \beta \\ m_y^\Psi \cos \gamma - m_z^\Psi \sin \gamma \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (6.28)$$

Визначимо положення розрахункових точок, що належать одночасно до траєкторії T_Ψ та координатної площини $(X^\Psi Y^\Psi)$ щодо нерухомої системи координат $\{\Sigma\}$.

Це можна зробити за допомогою оператора $\mathbf{Res}(\Psi, \Sigma)$ перетворення простору, що складається з оператора повороту $\mathbf{Rot}(\Psi, \Sigma)$ та оператора паралельного переміщення $\mathbf{Trans}(\Psi, \Sigma)$.

Оператор $\mathbf{Rot}(\Psi, \Sigma)$ можна реалізувати матрицею, яка має такі елементи

$$\mathbf{Rot}(\Psi, \Sigma) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (6.29)$$

Оператор паралельного переміщення $\mathbf{Trans}(\Psi, \Sigma)$ можна подати у вигляді стовпцевої матриці з такими елементами

$$\mathbf{Trans}(\Psi, \Sigma) = \begin{bmatrix} -\omega_\Delta r_\Delta \\ a \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (6.30)$$

Застосувавши послідовно, оператори $\mathbf{Rot}(\Psi, \Sigma)$ і $\mathbf{Trans}(\Psi, \Sigma)$ до радіус-вектора $\mathbf{m}_{XY}^\Psi$ отримаємо вираз, який визначає положення розрахункових точок, що належать до координатної площини $(X^\Psi Y^\Psi)$ відносно нерухомої системи координат $\{\Sigma\}$

$$\mathbf{m}^\Sigma = \mathbf{Rot}(\Psi, \Sigma) \cdot \mathbf{m}_{XY}^\Psi + \mathbf{Trans}(\Psi, \Sigma).$$

Розкривши наведений вираз, отримаємо у розгорнутому вигляді

$$\mathbf{m}^\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -m_x^\Psi - (m_z^\Upsilon \cos \gamma - m_y^\Upsilon \sin \gamma) \operatorname{tg} \beta \\ m_y^\Upsilon \cos \gamma - m_z^\Upsilon \sin \gamma \\ 0 \end{bmatrix} + \\ + \begin{bmatrix} -\omega_\Delta r_\Delta \\ a \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -m_x^\Psi - (m_z^\Upsilon \cos \gamma - m_y^\Upsilon \sin \gamma) \operatorname{tg} \beta - \omega_\Delta r_\Delta \\ a - m_y^\Upsilon \cos \gamma - m_z^\Upsilon \sin \gamma \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (6.31)$$

Положення розрахункової точки щодо деталі та рухомої площини Ω_Δ пов'язаної з нею, можна визначити перейшовши від системи координат $\{\Sigma\}$ до системи координат $\{\Delta\}$. Для цього необхідно застосувати оператор, який реалізується матрицею з такими елементами.

$$\mathbf{Rot}(\Sigma, \Delta) = \begin{bmatrix} \cos \omega_\Delta & \sin \omega_\Delta & 0 \\ -\sin \omega_\Delta & \cos \omega_\Delta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (6.32)$$

Результатом виконання оператора повороту $\mathbf{Rot}(\Sigma, \Delta)$ буде радіус-вектор $\mathbf{m}^\Delta$ з такими компонентами:

$$\mathbf{m}^\Delta = \begin{bmatrix} m_x^\Delta & m_y^\Delta & m_z^\Delta \end{bmatrix}^T, \quad (6.33)$$

$$m_x^\Delta = (a - m_y^\Upsilon \cos \gamma + m_z^\Upsilon \sin \gamma) \sin \omega_\Delta + \\ + \cos \omega_\Delta (-m_x^\Upsilon - r_\Delta \omega_\Delta - (-m_y^\Upsilon \cos \gamma - m_z^\Upsilon \sin \gamma) \operatorname{tg} \gamma), \quad (6.34)$$

$$m_y^\Delta = (a - m_y^\Upsilon \cos \gamma + m_z^\Upsilon \sin \gamma) \cos \gamma - \\ - \sin \omega_\Delta (-m_x^\Upsilon - r_\Delta \omega_\Delta - (-m_y^\Upsilon \cos \gamma - m_z^\Upsilon \sin \gamma) \operatorname{tg} \beta), \quad (6.35)$$

$$m_z^\Delta = 0. \quad (6.36)$$

У наведених виразах змінним параметром є кут ω_Δ повороту деталі. Задаючись рядом фіксованих значень параметра ω_Δ можна визначити координати точок сліду q перетину траєкторії T_{Ψ} рухомою поверхнею Ω_Δ в системі координат $\{\Delta\}$, яка пов'язана з оброблюваною деталлю.

Для того щоб визначити положення точок сліду q щодо площини Ω_Δ необхідно перейти до системи координат $\{\Omega\}$, при цьому раціональним буде вибір такого напрямку ортів системи $\{\Omega\}$ коли вони ідентичні ортам системи координат $\{\Delta\}$. У цьому випадку можна записати

$$X^\Delta = X^\Omega, \quad Y^\Delta = Y^\Omega, \quad Z^\Delta = Z^\Omega. \quad (6.37)$$

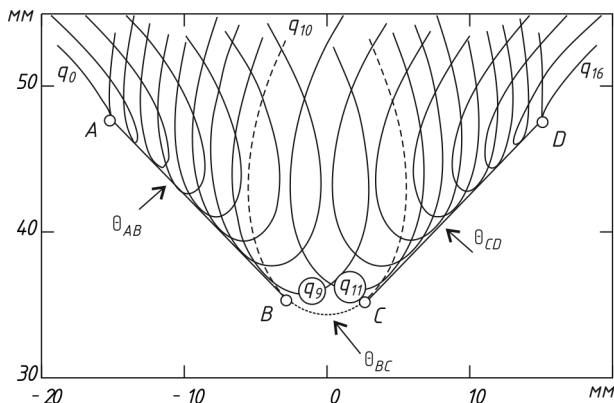


Рис. 6.9. Огинаюча при формоутворенні рейковим інструментом

Отже, для визначення огинаючої до сімейства слідів q достатньо їх побудувати в системі координат $\{\Delta\}$ не переходячи до системи $\{\Omega\}$.

6.2.3. Аналіз результатів формоутворення гвинтової поверхні відомим інструментом рейкового типу

Як вихідні дані приймемо профіль різальної кромки гребінки, визначений у попередньому розділі при вирішенні прямої задачі формоутворення. На рис. 6.8 зображено профіль різальної кромки зуба гребінки, якщо дивитися на нього з боку передньої поверхні.

Як і раніше приймемо наступні параметри, що характеризують процес формоутворення. Кут нахилу гвинтової лінії на циліндрі початкового кола $\beta = 30^\circ$. Радіус r_Δ початкового кола, пов'язаного з деталлю, приймемо рівним 50 мм.

Як передню поверхню інструмента будемо розглядати площину, орієнтовану під кутом $\gamma = 30^\circ$ відносно координатної площини ($X^\Psi Y^\Psi$). Таким чином, ми розглядаємо гребінку найбільш поширеної конструкції, з плоскою передньою поверхнею та додатним переднім кутом.

Сукупність слідів q утворених перетином траєкторій T_Ψ з рухомою площиною Ω_Δ подана на рис. 6.9.

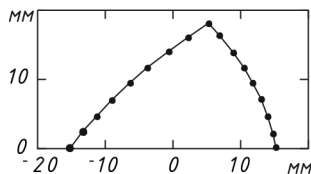


Рис. 6.8. Різальна кромка рейкового інструменту

Аналізую огинаючу до отриманої сукупності слідів q можна стверджувати, що вона складається з трьох ділянок:

- ділянки AB та CD є відрізками прямої лінії та розташовані симетрично відносно осі отриманого торцевого профілю гвинтової поверхні. Ці ділянки огинаючої утворені як лінії, що є дотичними до двох груп траєкторій $q_{0...9}$ та $q_{11...20}$;
- ділянка BC огинаючої утворена однією траєкторією q_{10} .

Отже, можна стверджувати, що крива обмежена точками BC є перехідною кривою, утвореною в результаті порушення умов формоутворення, що втім було встановлено раніше, ще під час пошуку початкової інструментальної поверхні.

6.2.4. Висновки

Узагальнюючи результати дослідження процесу формоутворення, можна стверджувати наступне.

З погляду основ теорії формоутворення, кінематична схема формоутворення рейковим інструментом є окремим випадком кінематичної схеми взаємного кочення кола по колу.

Результати отримані для рейкового інструменту повністю узгоджуються з аналогічними результатами при формоутворенні за кінематичною схемою взаємної обкатки кола по колу.

Показано, що метод рухомої поверхні дозволяє, минаючи стадію визначення початкової інструментальної поверхні, безпосередньо визначати форму просторової різальної кромки рейкового інструменту.

Використання методу рухомої поверхні дозволяє не вирішуючи зворотну задачу формоутворення, визначити форму та величину відхилення утвореної поверхні деталі від її номінальної поверхні⁹.



⁹Номінальна поверхня, це поверхня за креслеником без урахування допусків на виготовлення та відхилень.

7. КІНЦЕВИЙ ІНСТРУМЕНТ

Кінцевий фасонний інструмент використовується при формоутворенні гвинтових поверхонь змінного кроку чи напрямку.

Застосування кінцевого (пальцевого) інструменту накладає на оброблюваний профіль деталі ту вимогу, що її профіль має бути симетричним відносно осі обертання інструмента, зазвичай фрези.

7.1. Пряма задача формоутворення

7.1.1. Взаємне розташування об'єктів дослідження

Розглянемо праву гвинтову поверхню визначену прямою віссю W , гвинтовим параметром p і профілем в її торцевому перерізі. Гвинтову поверхню представимо сукупністю гвинтових траєкторій T гвинтового руху точки M , що належить торцевому перерізу гвинтової поверхні.

З гвинтовою поверхнею деталі зв'яжемо праву систему координат $\{\Delta\} : (X^\Delta Y^\Delta Z^\Delta)$, яка орієнтована за рис 7.1. Вісь Z^Δ збігається з віссю W гвинтової поверхні і спрямована у бік правого гвинтового руху. Координатна площина $(X^\Delta Y^\Delta)$ збігається з торцевим перерізом гвинтової поверхні.

Торцевий профіль гвинтової поверхні визначений у координатній площині $(X^\Delta Y^\Delta)$ полярним кутом δ та полярним радіус-вектором ρ .

Полярний кут δ відраховується від осі X^Δ у напрямку проти ходу годинникової стрілки до радіус-вектора $\rho^{(M)}$ розрахункової точки M_T .

Полярний кут δ може набувати значень від 0 до 2π .

З інструментом зв'яжемо праву систему координат $\{\Psi\} : (X^\Psi Y^\Psi Z^\Psi)$, яка орієнтована в такий

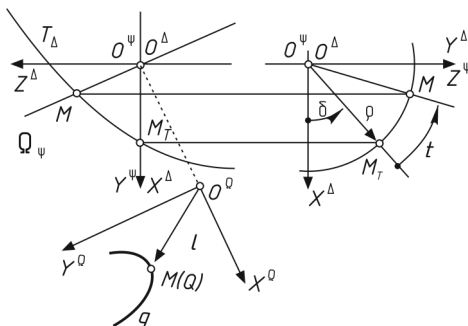


Рис. 7.1. Орієнтація систем координат

спосіб. Точка O^Ψ початку системи координат $\{\Psi\}$ збігається з точкою O^Δ початку системи координат $\{\Delta\}$.

Вісь Z^Ψ збігається з віссю Y^Δ за положенням та орієнтацією. Обидві вісі Z^Ψ та Y^Δ спрямовані від деталі до шпинделю верстата. Вісь X^Ψ збігається і віссю Z^Δ , а вісь Y^Ψ з віссю X^Δ , утворюючи праву систему координат $\{\Psi\}$.

В якості рухомої поверхні Ω приймемо площину Ω_Ψ , яка проходить через вісь обертання інструмента та вісь Z^Ψ . Рухомі площина Ω_Ψ може здійснювати обертальний рух навколо осі Z^Ψ і в початковий момент збігається з координатною площиною $(Y^\Psi Z^\Psi)$.

З рухомою площиною (яка проходить через вісь обертання інструмента) зв'яжемо двовимірну систему координат $\{\Omega\}$: $(X^\Omega Y^\Omega)$ орієнтовану в такий спосіб. Вісь X^Ω збігається з віссю обертання інструмента та віссю Z^Ψ . Вісь Y^Ω завжди розташована в площині Ω_Ψ яка рухається¹ і в початковий момент збігається з віссю Y^Ψ .

7.1.2. Побудова сліду

Відповідно до прийнятої в роботі методики визначимо слід q_Δ перетину гвинтової траєкторії T_Δ точки, що належить торцевому перерізу гвинтової поверхні, та рухомої площини Ω_Ψ пов'язаної з інструментом.

Положення розрахункової точки M на гвинтовій траєкторії можна визначити радіус-вектором $\mathbf{r}$, який у системі координат $\{\Delta\}$ має такі компоненти

$$\mathbf{r}^{\Delta(M)} = \begin{bmatrix} \rho^{(M)} \cos(\delta^{(M)} + t) \\ \rho^{(M)} \sin(\delta^{(M)} + t) \\ p t \end{bmatrix}. \quad (7.1)$$

У досліджуваній кінематичній схемі рухوما площина Ω_Ψ обертається навколо осі Y^Δ . Тому можна записати

$$x^\Omega = y^\Delta = l_x^\Omega = r_y^\Delta. \quad (7.2)$$

Компонента l_y^Ω вектора $\mathbf{l}$ може бути визначена, як проекція вектора $\mathbf{r}$ на координатну площину $(X^\Delta Z^\Delta)$ з виразу

$$l_y^\Omega = \sqrt{(r_x^\Delta)^2 + (r_z^\Delta)^2}. \quad (7.3)$$

¹Тобто вісь Y^Ω завжди належить рухомій площині Ω_Ψ . Вона рухається одночасно з нею. Відповідно до цього рухається і вся система координат $\{\Omega\}$ за будь-якого положення площини Ω_Ψ .

Таким чином, для точки M компоненти вектора $\mathbf{l}^{(M)}$ у системі $\{\Omega\}$ будуть:

$$\begin{aligned} l_x^\Omega &= \rho^{(M)} \sin(\delta^{(M)} + t), \\ l_y^\Omega &= \sqrt{(r_x^\Delta)^2 + (r_z^\Delta)^2} = \sqrt{(\rho^{(M)} \cos(\delta^{(M)} + t)^2 + (pt)^2)}. \end{aligned} \quad (7.4)$$

Підставивши до отриманих залежностей полярні координати $\rho^{(M)}$ і $\delta^{(M)}$ розрахункової точки M , і приймаючи ряд послідовних значень параметра t можна побудувати сліди q_Δ в площині Ω_Ψ , яка проходить через вісь обертання кінцевого інструменту.

7.1.3. Профіль інструменту

При кінематичній схемі формоутворення гвинтової поверхні кінцевим інструментом, можлива обробка тільки деталей які мають симетричний профіль торцевого перерізу.

Приймемо, як об'єкт дослідження, гвинтову поверхню прямокутного торцевого профілю (рис. 7.2) з гвинтовим параметром $p = 20$ мм/рад.

Аналіз характеру розташування слідів q_Δ , утворених гвинтовими траєкторіями T_Δ точок торцевого перерізу гвинтової поверхні на рухомій площині Ω_Ψ , дозволяє стверджувати, що при прийнятій схемі формоутворення отримання деталі із заданим прямокутним профілем неможливе (рис. 7.3,а).

Все сімейство слідів q_Δ розділимо на три групи утворені точками які належать ділянкам AB , BC і CD торцевого профілю деталі.

Відповідні огинаючі до них позначимо як Θ_{AB} , Θ_{BC} і Θ_{CD} . Аналіз характеру розташування огинаючих і слідів q_Δ залишених круговими траєкторіями на рухомій площині, показує, що в околицях точок B і C (на рис. 7.3 приведена тільки точка C) вони взаємно перетинаються.

Тому можна стверджувати про неможливість повністю утворити заданий профіль деталі. В околицях точок B і C профіль деталі матиме перехідні криві (це видно на рис. 7.3,б).

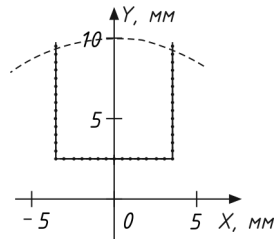


Рис. 7.2. Профіль деталі

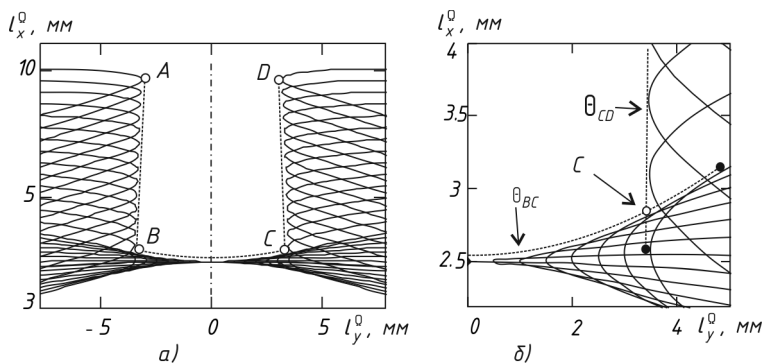


Рис. 7.3. Сімейство слідів початкової інструментальної поверхні

7.1.4. Висновки

Таким чином, ґрунтуючись на результатах проведеного аналізу взаємного розташування слідів q та огинаючої до них, можна зробити такі висновки.

Так як окремі ділянки огинаючих взаємно перетинаються, створити початкову інструментальну поверхню повною мірою неможливо через те, що ділянки огинаючої перетинають одна одну². На рис. 7.3,б видно що дві ділянки різних огинаючих (позначених пунктирними лініями) перетинають одна-одну. Отже, повноцінне відтворення такого інструмента (різальних кромок) є неможливим.

Початкова інструментальна поверхня, яка обмежена профілем $ABCD$ утворюватиме лише частину заданого профілю деталі. Найбільша похибка формоутворення буде в околицях точок B і C профілю деталі.

Метод рухомої поверхні дозволяє не вирішуючи зворотну задачу формоутворення, встановити наявність похибки формоутворення та її чисельну величину³.

²У такому випадку можна фізично відтворити у металі тільки одну частину огинаючої.

³Це є значною перевагою запропонованого методу, адже вирішення зворотної задачі профілювання потребує значних витрат часу, що в умовах сучасного виробництва не завжди припустиме.

7.2. Профіль гвинтової поверхні за відомого інструмента

Визначимо профіль гвинтової поверхні деталі при її формоутворенні кінцевим інструментом вісь обертання якого ортогональна осі гвинтової поверхні. Вважатимемо відомим профіль початкової інструментальної поверхні в перерізі, який проходить через вісь обертання інструмента.

Слід зазначити, що в даній кінематичній схемі осі інструмента і деталі взаємно перетинаються та є ортогональними відносно одна-одної.

7.2.1. Взаємне розташування об'єктів формоутворення

З відомою початковою інструментальною поверхнею зв'яжемо систему координат $\{\Psi\} : (X^\Psi Y^\Psi Z^\Psi)$, яка орієнтована таким чином (рис. 7.4). Вісь Z^Ψ збігається з віссю обертання інструмента і спрямована від деталі у бік шпинделя верстата. Точка O^Ψ початку системи координат $\{\Psi\}$ збігається з точкою взаємного перетину осі обертання інструмента та гвинтової поверхні. Ось X^Ψ доповнює праву трійку ортів системи $\{\Psi\}$.

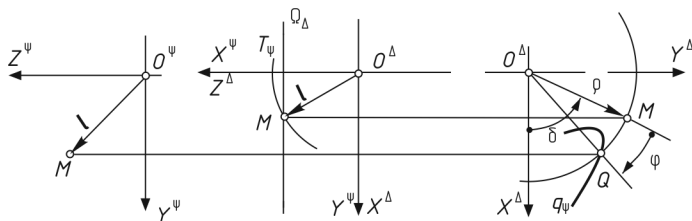


Рис. 7.4. Орієнтація систем координат

Профіль вихідної інструментальної поверхні визначено в координатній площині $(Y^\Psi Z^\Psi)$ масивом точок $M_0(y^\Psi(M), z^\Psi(M))$. Початкову інструментальну поверхню представлятимемо сукупністю кругових траєкторій T утворених обертальним рухом точки M профілю інструмента навколо його осі.

З гвинтовою поверхнею деталі зв'яжемо просторову систему координат $\{\Delta\} : (X^\Delta Y^\Delta Z^\Delta)$, орієнтовану в такий спосіб. Вісь Z^Δ збігається з віссю гвинтової поверхні і спрямована у бік правого гвинтового руху. Вісь Y^Δ збігається з віссю обертання інструмента, а вісь X^Δ доповнює праву трійку ортів системи координат $\{\Delta\}$.

Як рухому поверхню Ω приймемо площину Ω_Δ орієнтовану перпендикулярно до осі гвинтової поверхні. Рухома площина Ω_Δ може

здійснювати гвинтовий рух уздовж осі Z^Δ з гвинтовим параметром p . У початковий момент площина Ω_Δ збігається з координатною площиною ($X^\Delta Y^\Delta$) і проходить через вісь обертання інструмента. У процесі формування площина Ω_Δ завжди проходить через точку M , що розглядається, кругової траєкторії T_Ψ точки інструментальної поверхні.

7.2.2. Побудова сліду траєкторії у рухомій площині

Знаючи координати точки $M_0(y^{\Psi(M)}, z^{\Psi(M)})$ розрахункової точки осевого профілю початкової інструментальної поверхні, можна визначити її положення на круговій траєкторії вектором l у системі координат $\{\Psi\}$

$$l^{\Psi(M)} = \begin{bmatrix} y^{\Psi(M)} \cos t \\ y^{\Psi(M)} \sin t \\ z^{\Psi(M)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_x^\Psi \\ l_y^\Psi \\ l_z^\Psi \end{bmatrix}, \quad (7.5)$$

де t – змінний параметр, що дорівнює куту між додатним напрямком осі X^Ψ і проекцією l_{xy}^Ψ вектора l на координатну площину ($X^\Psi Y^\Psi$).

У системі координат $\{\Delta\}$ положення точки M кругової траєкторії можна визначити вектором $l^{\Delta(M)}$ компоненти якого будуть

$$l^{\Delta(M)} = \begin{bmatrix} l_y^\Psi \\ l_z^\Psi \\ l_x^\Psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y^{\Psi(M)} \sin t \\ z^{\Psi(M)} \\ y^{\Psi(M)} \cos t \end{bmatrix}. \quad (7.6)$$

Отриманий вираз вектора $l^{\Delta(M)}$ визначає положення точки M , що належить круговій траєкторії T_Ψ у системі координат $\{\Delta\}$. Відповідно до прийнятої в роботі методики, сумістимо рухому площину Ω_Δ з точкою M , положення якої в системі $\{\Delta\}$ визначено вектором $l^{\Delta(M)}$.

У початковому положенні рухома площина Ω_Δ збігається з координатною площиною ($X^\Delta Y^\Delta$) системи координат $\{\Delta\}$. Для того щоб рухома площина проходила через поточне положення точки M кругової траєкторії T_Ψ , вона повинна здійснити гвинтовий рух з параметром p вздовж осі Z^Δ . Цей рух можна розкласти на поступальний вздовж осі Z^Δ на величину $z^{\Delta(M)}$ і обертальний навколо осі Z^Δ на деякий кут $\varphi^{(M)}$.

Поступальне переміщення площини Ω_Δ вздовж осі Z^Δ на величину $z^{\Delta(M)}$ можна реалізувати оператором $\text{Trans}(\Omega, Z^\Delta, z^{\Delta(M)})$. Якщо врахувати, що величина переміщення $z^{\Delta(M)}$ чисельно дорівнює компоненту

$l_z^{\Delta(M)}$ вектора $l^{\Delta(M)}$ точки M вздовж осі Z^Δ , то оператор перенесення $\mathbf{Trans}(\Omega, Y^\Delta, l_z^\Delta)$ набуде вигляду

$$\mathbf{Trans}(\Omega, Y^\Delta, l_z^\Delta) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_z^{\Delta(M)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ y^{\Psi(M)} \cos t \end{bmatrix}. \quad (7.7)$$

Знаючи величину гвинтового параметра p і компоненту $l_z^{\Delta(M)}$ вектора l^Δ можна визначити величину кута $\varphi^{(M)}$ із співвідношення

$$\varphi^{(M)} = \frac{l_z^{\Delta(M)}}{p} = \frac{y^{\Psi(M)} \cos t}{p}. \quad (7.8)$$

Тоді оператор $\mathbf{Rot}(\Omega, Z^\Delta, \varphi)$ повороту системи координат $\{\Omega\}$ навколо осі Z^Δ на кут φ набуде вигляду

$$\mathbf{Rot}(\Omega, Z^\Delta, \varphi) = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Таким чином, оператор $\mathbf{Res}(\Delta, \Omega)$ переходу від нерухомої системи координат $\{\Delta\}$, пов'язаної із заготованкою, до рухомої системи координат $\{\Omega\}$ пов'язаної з рухомою площиною Ω набуде вигляду

$$\begin{aligned} \mathbf{Res}(\Delta, \Omega) &= \mathbb{I}^\Omega = \mathbf{Rot}(\Omega, Z^\Delta, \varphi) \cdot \mathbb{I}^\Delta + \mathbf{Trans}(\Omega, Z^\Delta, z^{\Delta(M)}) = \\ &= \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \mathbb{I}^\Delta + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ y^{\Psi(M)} \cos t \end{bmatrix}, \quad (7.9) \end{aligned}$$

де $\mathbb{I}^\Omega$ – стовпцевий вектор, компоненти якого визначені в системі координат $\{\Omega\}$;

$\mathbb{I}^\Delta$ – стовпцевий вектор, компоненти якого визначені в системі координат $\{\Delta\}$.

Підставивши до оператора $\mathbf{Res}(\Delta, \Omega)$ значення компонент вектора l^Δ остаточно отримаємо залежність, котра описує послідовність математичних перетворень, яку необхідно здійснити, щоб отримати вираз компонент вектора l^Δ , а саме:

$$\begin{aligned}
\mathbf{I}^{\Omega(M)} &= \mathbf{Res}(\Delta, \Omega) = \\
&= \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y^{\Psi(M)} \sin t \\ z^{\Psi(M)} \\ y^{\Psi(M)} \cos t \end{bmatrix} + \\
&\quad + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ y^{\Psi(M)} \cos t \end{bmatrix}. \quad (7.10)
\end{aligned}$$

Виконавши відповідні математичні перетворення отримаємо

$$\mathbf{I}^{\Omega(M)} = \begin{bmatrix} y^{\Psi(M)} \cos t \sin t + z^{\Psi(M)} \sin \varphi \\ z^{\Psi(M)} \cos \varphi - y^{\Psi(M)} \sin t \sin t \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (7.11)$$

Таким чином, координати розрахункових точок Q сліду q_{Ψ} перетину рухомої площини Ω_{Δ} з круговими траєкторіями T можна записати у вигляді:

$$\begin{aligned}
x^{\Omega(M)} &= y^{\Psi(M)} \cos \left(\frac{y^{\Psi(M)} \cos t}{p} \right) \sin t + z^{\Psi(M)} \sin \left(\frac{y^{\Psi(M)} \cos t}{p} \right), \\
y^{\Omega(M)} &= z^{\Psi(M)} \cos \left(\frac{y^{\Psi(M)} \cos t}{p} \right) - y^{\Psi(M)} \sin \left(\frac{y^{\Psi(M)} \cos t}{p} \right) \sin t.
\end{aligned} \quad (7.12)$$

Отримані координати $x^{\Omega(M)}$ та $y^{\Omega(M)}$ визначають положення точки M при її русі по круговій траєкторії відносно системи координат $\{\Omega\}$ пов'язаної з рухомою площиною Ω_{Δ} , тобто координати сліду q_{Ψ} .

7.2.3. Аналіз результатів формоутворення

Розглянемо результати формоутворення гвинтової поверхні кінцевим інструментом. Як осьовий профіль інструмента приймемо профіль рис. 7.5,а визначений раніше при пошуку початкової інструментальної поверхні в попередньому розділі. Представлене відображення слідів q_{Ψ} кругових траєкторій T_{Ψ} на рухомій площині Ω_{Δ} визначає профіль гвинтової поверхні деталі утвореної кінцевим інструментом.

Сімейство слідів q_{Ψ} відображення яких на рухомій площині Ω_{Ψ} представлено на рис. 7.5,б розташоване симетрично щодо осі обертання інструмента, яка проходить через нульову позначку горизонтальної

шкали. Це підтверджує зроблені висновки відносно симетрії процесів формоутворення властивих кінцевому інструменту.

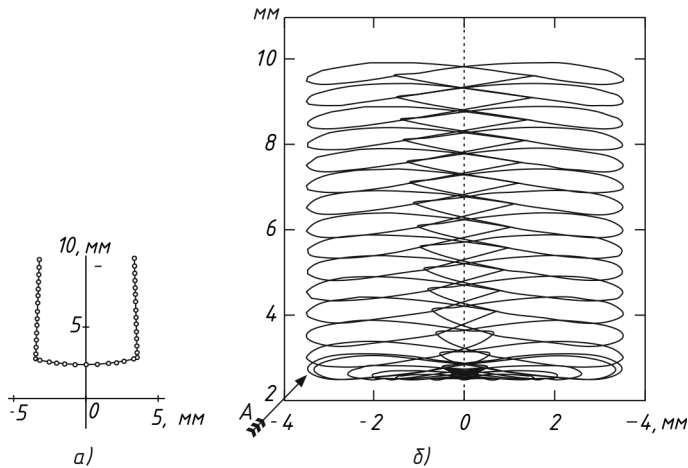


Рис. 7.5. Сімейство слідів, що визначають профіль деталі

У той же час слід зазначити, що профіль деталі не буде повністю формований відповідно до креслення. Його ділянка відзначена стрілкою А окреслена по перехідній кривій, яка утворена кутовою точкою профілю інструмента.

7.2.4. Висновки

Аналіз результатів формоутворення показав, що при прийнятій схемі формоутворення кінцевим інструментом, неможливо обробити деталь у відповідності з кресленням. У той же час, слід зазначити, що цей висновок був зроблений на стадії пошуку початкової інструментальної поверхні до розв'язання зворотної задачі формоутворення.



8. ТОРЦЕВИЙ ІНСТРУМЕНТ

Формоутворення гвинтових поверхонь торцевим інструментом є високопродуктивним процесом. Найчастіше це зовнішні різьби великого діаметра або чорнова обробка черв'яків великого модулю.

8.1. Взаємне розташування об'єктів формоутворення

Як гвинтову поверхню будемо розглядати праву гвинтову поверхню з відомим параметром p і профілем її осьового перерізу.

З гвинтовою поверхнею деталі зв'яжемо просторову систему координат $\{\Delta\} : (X^\Delta Y^\Delta Z^\Delta)$ орієнтовану в такий спосіб рис. 8.1.

Вісь Z^Δ збігається з віссю гвинтової поверхні за розташуванням та напрямком. Осі X^Δ та Y^Δ доповнюють праву систему координат $\{\Delta\}$. Профіль гвинтової поверхні заданий у координатній площині $(Y^\Delta Z^\Delta)$, тобто в її осьовому перерізі, масивом точок $M : (y_o^{\Delta(M)}, z_o^{\Delta(M)})$, а сама гвинтова поверхня представлена сукупністю гвинтових траєкторій T точок осьового перерізу.

З торцевим інструментом зв'яжемо просторову систему координат $\{\Psi\} : (X^\Psi Y^\Psi Z^\Psi)$ вісь Z^Ψ якої збігається з віссю обертання інструмента та направлена у бік шпинделя верстата.

Відстань між точками O^Δ та O^Ψ початку систем координат $\{\Delta\}$ та $\{\Psi\}$ дорівнює розрахунковому радіусу торцевого інструменту. Позначатимемо його як d .

Координатні осі системи $\{\Psi\}$ мають подвійний нахил щодо осей системи $\{\Delta\}$. На кут ε величина якого приймається порівнянню з величиною кута підйому гвинтової лінії гвинтової поверхні на її зовнішньому діаметрі. Другий кут ξ відповідає нахилу осі обертання інструмента та визначається виходячи з конструктивних та технологічних умов.

Як рухому поверхню будемо розглядати площину Ω_Ψ , яка проходить через вісь обертання інструмента та збігається з віссю Z^Ψ . Рухома площина Ω_Ψ може здійснювати обертання навколо осі Z^Ψ , а її положення визначається кутом β , який відраховується від додатного напрямку осі Y^Ψ до площини Ω_Ψ .

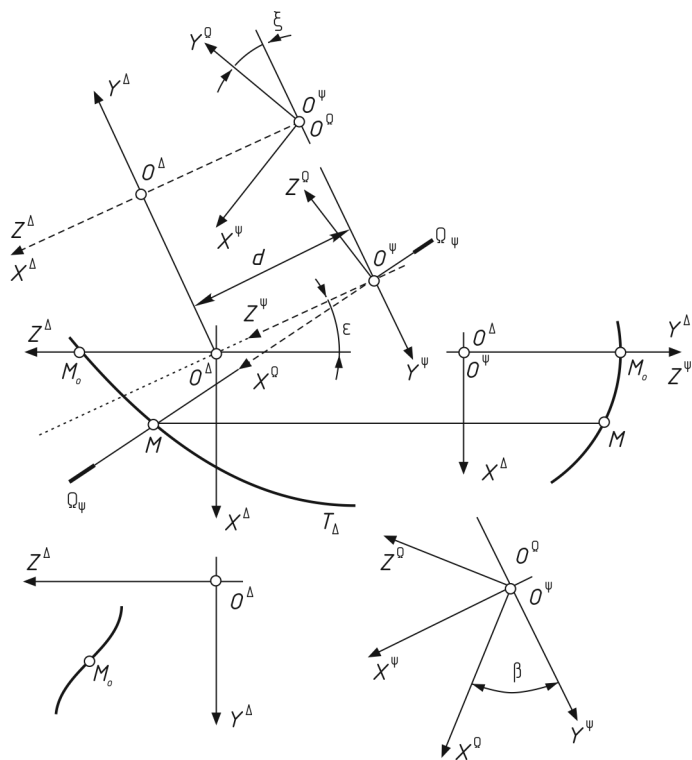


Рис. 8.1. Орієнтація систем координат

$\{\Delta\} : (X^\Delta Y^\Delta Z^\Delta)$ – система координат пов'язана з деталлю;
 $\{\Psi\} : (X^\Psi Y^\Psi Z^\Psi)$ – система координат пов'язана з інструментом.

З рухомою площиною Ω_Ψ зв'яжемо просторову систему координат $\{\Omega\} : (X^\Omega Y^\Omega Z^\Omega)$. Початок O^Ω системи $\{\Omega\}$ збігається з початком O^Ψ системи координат $\{\Psi\}$. Вісь Y^Ω збігається з віссю Z^Ω , а вісь X^Ω завжди належить площині Ω_Ψ . Вісь Z^Ω доповнює праву трійку ортів.

8.1.1. Побудова сліду перетину гвинтової траєкторії та рухомої площини

Положення точки M на гвинтовій траєкторії T_Δ можна визначити радіус-вектором $\mathbf{m}$ компоненти якого в системі координат $\{\Delta\}$ будуть

$$\mathbf{m}^{\Delta(M)} = \begin{bmatrix} -y_o^{\Delta(M)} \sin t \\ y_o^{\Delta(M)} \cos t \\ z_o^{\Delta(M)} + p t \end{bmatrix}, \quad (8.1)$$

де $y_o^{\Delta(M)}$ – проекції точки M , що належить осьовому перерізу гвинтової поверхні, на координатні вісь Y^Δ ;

$z_o^{\Delta(M)}$ – проекції точки M , що належить осьовому перерізу гвинтової поверхні, на координатні вісь Z^Δ ;

p – гвинтовий параметр гвинтової поверхні;

t – змінний параметр, чисельно рівний величині кута між віссю Y^Δ та проекцією радіус-вектора $\mathbf{m}$ на координатну площину $(X^\Delta Y^\Delta)$. Кут t відраховується від осі Y^Δ у напрямку проекції радіус-вектора $\mathbf{m}$.

Положення точки Q сліду q_Δ утвореного перетином гвинтової траєкторії T_Δ з рухомою площиною Ω_Ψ можна визначити як положення точки M , що належить до гвинтової поверхні, щодо системи координат $\{\Omega\}$ за допомогою операторів перетворення $\mathbf{Res}(\Delta, \Psi)$ та $\mathbf{Res}(\Psi, \Omega)$

$$\mathbf{Res}(\Delta, \Omega) = \mathbf{Res}(\Delta, \Psi) \mathbf{Res}(\Psi, \Omega). \quad (8.2)$$

Оператор перетворення простору $\mathbf{Res}(\Delta, \Psi)$ можна розглядати як результат виконання оператора повороту $\mathbf{Rot}(\Delta, O^\Delta, (\varepsilon, \xi))$ системи координат $\{\Delta\}$ щодо її початку O^Δ на сукупність кутів ε і ξ , з подальшим виконанням оператора перенесення $\mathbf{Trans}(\Delta, \Psi, d)$ на відстань d

$$\mathbf{Res}(\Delta, \Psi) = \mathbf{Rot}(\Delta, O^\Delta, (\varepsilon, \xi)) \mathbf{Trans}(\Delta, \Psi, d). \quad (8.3)$$

Оператор повороту простору $\mathbf{Rot}(\Delta, O^\Delta, (\epsilon, \xi))$ можна реалізувати наступною квадратною матрицею

$$\mathbf{Rot}(\Delta, O^\Delta, (\epsilon, \xi)) = \begin{bmatrix} \cos \xi \sin \epsilon & \sin \xi & \cos \xi \cos \epsilon \\ \sin \epsilon & 0 & -\cos \epsilon \\ \sin \xi \sin \epsilon & \cos \xi & \sin \xi \cos \epsilon \end{bmatrix}. \quad (8.4)$$

Оператор перенесення $\mathbf{Trans}(\Delta, \Psi, d)$ можна реалізувати стовпцевою матрицею

$$\mathbf{Trans}(\Delta, \Psi, d) = \begin{bmatrix} d \cos \xi \\ 0 \\ d \sin \xi \end{bmatrix}. \quad (8.5)$$

Тоді оператор $\mathbf{Res}(\Delta, \Psi)$ переходу від системи координат $\{\Delta\}$ до системи координат $\{\Psi\}$ набуде вигляду

$$[\]^\Psi = \mathbf{Res}(\Delta, \Psi) = \mathbf{Rot}(\Delta, O^\Delta, (\epsilon, \xi)) \cdot [\]^\Psi + \mathbf{Trans}(\Delta, \Psi, d). \quad (8.6)$$

Таким чином, компоненти точки M (яка належить гвинтовій траєкторії T_Δ) щодо системи координат $\{\Psi\}$, визначатимуться радіус-вектором $\mathbf{m}$ компоненти якого можна визначити як

$$\begin{aligned} \mathbf{m}^{\Psi(M)} &= \mathbf{Rot}(\Delta, O^\Delta, (\epsilon, \xi)) \cdot \mathbf{m}^{\Psi(M)} + \mathbf{Trans}(\Delta, \Psi, d) = \\ &= \begin{bmatrix} \cos \xi \sin \epsilon & \sin \xi & \cos \xi \cos \epsilon \\ \sin \epsilon & 0 & -\cos \epsilon \\ \sin \xi \sin \epsilon & \cos \xi & \sin \xi \cos \epsilon \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -y_o^{\Delta(M)} \sin t \\ y_o^{\Delta(M)} \cos t \\ z_o^{\Delta(M)} + p t \end{bmatrix} + \\ &\quad + \begin{bmatrix} d \cos \xi \\ 0 \\ d \sin \xi \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (8.7)$$

Положення точки M , що належить гвинтовій траєкторії T_Δ щодо системи координат $\{\Omega\}$, пов'язаної з рухомою поверхнею, визначається радіус-вектором $\mathbf{m}^\Omega$, а його компоненти можна визначити за допомогою оператора перетворення $\mathbf{Res}(\Psi, \Delta)$ який виражається квадратною матрицею

$$\mathbf{Res}(\Psi, \Delta) = \mathbf{Rot}(\Psi, Y^\Delta, \beta) = \begin{bmatrix} \sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \cos \beta & -\sin \beta & 0 \end{bmatrix}. \quad (8.8)$$

Кут β це кут між рухомою площиною Ω_Ψ та додатним напрямком осі Y^Ψ . Чисельно його величина визначається з виразу

$$\cos \beta^{(M)} = \frac{m_y^{\Psi(M)}}{\sqrt{\left(m_x^{\Psi(M)}\right)^2 + \left(m_y^{\Psi(M)}\right)^2}}. \quad (8.9)$$

Параметри $m_x^{\Psi(M)}$ та $m_y^{\Psi(M)}$ – це компоненти радіус-вектора $\mathbf{m}^{\Psi(M)}$ точки M щодо системи координат $\{\Psi\}$ рівні:

$$m_x^{\Psi(M)} = d \cos \xi + \left(p t + z_o^{\Delta(M)}\right) \cos \varepsilon \cos \xi - y_o^{\Delta(M)} \cos \xi \sin t \sin \varepsilon + y_o^{\Delta(M)} \cos t \sin \varepsilon; \quad (8.10)$$

$$m_y^{\Psi(M)} = -\left(p t + z_o^{\Delta(M)}\right) \cos \varepsilon - y_o^{\Delta(M)} \sin t \sin \varepsilon. \quad (8.11)$$

Тоді можна записати

$$[\]^\Omega = \mathbf{Res}(\Psi, \Omega) \cdot [\]^\Psi, \quad (8.12)$$

де $[\]^\Omega$ – стовпцева форма представлення вектора компоненти якого визначені у системі координат $\{\Omega\}$.

$[\]^\Psi$ – стовпцева форма представлення вектора компоненти якого визначені у системі координат $\{\Psi\}$.

Виконавши всі перетворення отримаємо вираз для радіус-вектора $\mathbf{m}^\Omega$ який визначає положення точки M щодо рухомої площини Ω_Ψ , тобто координати точок сліду q_Δ перетину гвинтової траєкторії T_Δ точки M осьового перерізу гвинтової поверхні, з рухомою площиною Ω_Ψ , що проходить через вісь інструмента

$$\mathbf{m}^\Omega = \mathbf{Res}(\Psi, \Omega) = \mathbf{Rot}(\Psi, Y^\Psi, \beta) \cdot \mathbf{m}^\Psi. \quad (8.13)$$

Компоненти вектора $\mathbf{m}^\Omega$ по осях системи координат $\{\Omega\}$ набудуть вигляду:

$$\begin{aligned} m_x^\Omega = & \left(-\left(p t + z_o^\Psi\right) \cos \varepsilon - y_o^\Psi \sin t \sin \varepsilon \right) \cos \beta + \\ & + \left(d \cos \xi + \left(p t + z_o^\Psi\right) \cos \varepsilon \cos \xi - y_o^\Psi \sin t \sin \varepsilon \cos \xi \right) \sin \beta + \\ & + y_o^\Psi \cos t \sin \varepsilon \sin \beta; \end{aligned} \quad (8.14)$$

$$m_y^\Omega = y_o^\Psi \cos t \cos \xi + d \sin \xi + (pt + z_o^\Psi) \cos \varepsilon \sin \xi - y_o^\Psi \sin \xi \sin \varepsilon. \quad (8.15)$$

Компонента $m_z^\Omega = 0$ оскільки рухома площина Ω_Ψ є двовимірним об'єктом.

8.1.2. Профіль початкової інструментальної поверхні

Як утворювану поверхню будемо розглядати поверхню метричної різьби М30 × 4. Визначимо форму профілю початкової інструментальної поверхні для торцевого інструменту, що має розрахунковий радіус, рівний 100 мм.

Для різьбової поверхні зовнішнього діаметра 30 мм і кроку $P = 4$ мм кут підйому профілю різьби дорівнює $2^\circ 26'$. Прийемо розрахункову величину кута β рівну $\beta = 2^\circ 30'$. Кут ξ нахилу осі обертання інструмента щодо вертикального положення прийемо рівним $\xi = 15^\circ$. На рис. 8.2,а представлена сукупність слідів q_Δ перетину гвинтових траєкторій T_Δ з рухомою площиною Ω_Ψ .

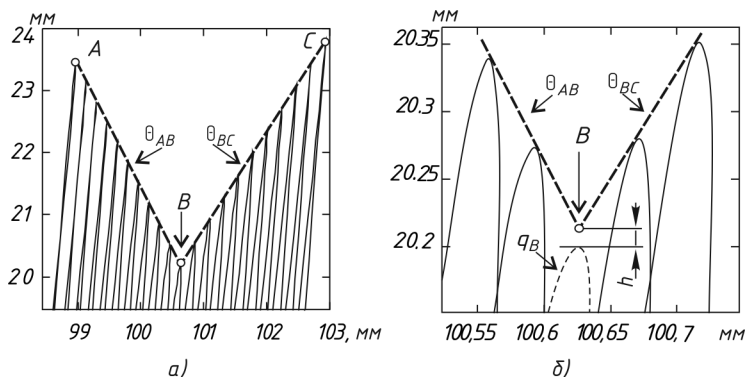


Рис. 8.2. Сімейство слідів при утворенні гвинтової поверхні торцевим інструментом

Отримана огинаюча складається з двох частин θ_{AB} і θ_{BC} розташування яких не симетрично щодо осі профілю різьби. Це пояснюється тим, що вісь обертання інструмента розташована не ортогонально щодо осі гвинтової поверхні (осі різьби). З цієї причини сукупність слідів q_Δ також має деякий загальний нахил.

На рис. 8.2,б представлена у збільшеному вигляді область слідів (огиначаючих Θ_{AB} і Θ_{BC}) в околиці точки B . Точка B утворена взаємним перетином ділянок Θ_{AB} і Θ_{BC} огиначаючої.

При цьому слід позначений як q_B і виділений пунктирною лінією не торкається до огиначаючої. Слід q_B не є дотичним до нижньої точки огиначаючої (точка B на рис. 8.2,б).

Відстань h між ними дорівнює величині похибки формоутворення профілю різби у точці, яка відповідає сліду q_B .

8.2. Висновки

На підставі виконаного аналізу характеру взаємного розташування слідів точок гвинтових траєкторій, залишених ними на рухомій площині, можна стверджувати, що в цілому профіль початкової інструментальної поверхні для обробки заданої гвинтової поверхні існує.

Однак повністю утворити профіль деталі відповідно до креслення неможливо, так як нижня частина профілю деталі (околиця точки B) матиме перехідну криву.

Слід також зазначити, що жоден з існуючих методів визначення спряжених поверхонь не дозволяє отримати такі результати, без вирішення зворотної задачі формоутворення.



9. ЧЕРВ'ЯЧНИЙ ІНСТРУМЕНТ

Черв'ячний інструмент є різновидом рейкового, коли декілька рейок закріплені в корпусі, що має обертальний рух. Така конструкція перетворює обертальний рух в імітацію кочення прямої по колу.

9.1. Взаємне розташування об'єктів формоутворення

Взаємне розташування об'єктів формоутворення та пов'язаних з ними систем координат представлено на рис. 9.1. Вісь Z^Ψ збігається з віссю обертання інструмента і становить з віссю Z^Σ гвинтової поверхні гострий кут ε . Система координат $\{\Pi\} : (X^\Pi Y^\Pi Z^\Pi)$ є проміжною для простоти виконання просторових перетворень. Найкоротша відстань між точками O^Δ і O^Π початку відповідних систем координат, дорівнює d .

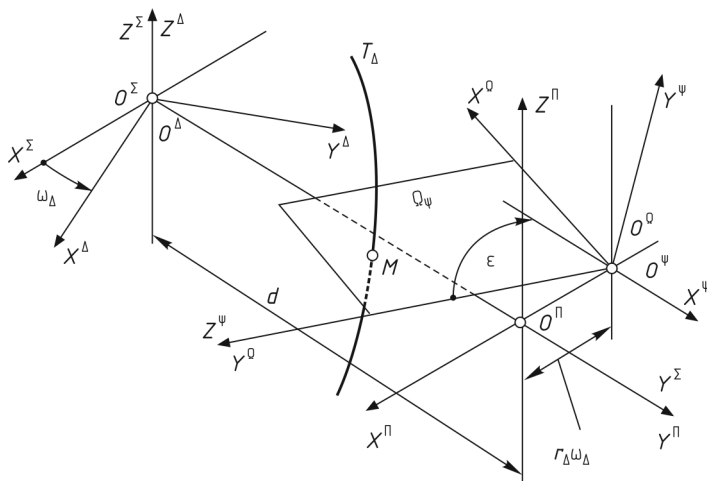


Рис. 9.1. Орієнтація об'єктів формоутворення черв'ячним інструментом

Рухомою площина Ω_Ψ може здійснювати обертальний рух навколо осі Z^Ψ і в початковий момент проходить через вісь X^Ψ координатної системи $\{\Psi\}$.

9.2. Слід перетину гвинтової траєкторії з рухомою площиною

Координати точки Q сліду q_Δ , утвореного взаємним перетином рухомої площини Ω_Ψ і гвинтовою траєкторією T_Δ , можна визначити вектором $\mathbf{m}^\Omega$ компоненти якого представлені у двовимірній системі координат $\{\Omega\}$, що належить рухомій площині Ω_Ψ .

Визначимо вектор $\mathbf{m}^\Omega$ як результат послідовного виконання операторів

$$\mathbf{m}^\Omega = \mathbf{Res}(\Psi, \Omega) \Leftarrow \mathbf{Res}(\Pi, \Psi) \Leftarrow \mathbf{Res}(\Delta, \Sigma) \Leftarrow \mathbf{m}^\Delta. \quad (9.1)$$

Оператор $\mathbf{Res}(\Delta, \Sigma)$ переходу від системи координат $\{\Delta\}$ до системи координат $\{\Sigma\}$ можна реалізувати матрицею повороту $\mathbf{Rot}(\Delta, \Sigma)$, яка має такі елементи

$$\mathbf{Rot}(\Delta, \Sigma) = \begin{bmatrix} \cos \omega_\Delta & -\sin \omega_\Delta & 0 \\ \sin \omega_\Delta & \cos \omega_\Delta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (9.2)$$

Оператор $\mathbf{Res}(\Pi, \Psi)$ переходу від системи координат $\{\Pi\}$ до системи координат $\{\Psi\}$ реалізується послідовним виконання оператора повороту $\mathbf{Rot}(\Sigma, \Pi)$ та оператора паралельного перенесення $\mathbf{Trans}(\Sigma, \Pi, d)$, які мають такі елементи

$$\mathbf{Rot}(\Sigma, \Pi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (9.3)$$

$$\mathbf{Trans}(\Sigma, \Pi, d) = \begin{bmatrix} 0 & -d & 0 \end{bmatrix}^T. \quad (9.4)$$

Оператор $\mathbf{Res}(\Pi, \Psi)$ переходу від системи координат $\{\Pi\}$ до системи координат $\{\Psi\}$ реалізується послідовним виконання оператора повороту $\mathbf{Rot}(\Pi, \Psi)$ та оператора паралельного перенесення $\mathbf{Trans}(\Pi, \Psi, (r_\Delta \omega_\Delta))$ на величину $(r_\Delta \omega_\Delta)$, які мають такі елементи

$$\mathbf{Rot}(\Pi, \Psi) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\cos \varepsilon & 0 & \sin \varepsilon \\ \sin \varepsilon & 0 & \cos \varepsilon \end{bmatrix}, \quad (9.5)$$

$$\mathbf{Trans}(\Pi, \Psi, (r_\Delta \omega_\Delta)) = \begin{bmatrix} 0 & -r_\Delta \omega_\Delta \cos \varepsilon & r_\Delta \omega_\Delta \sin \varepsilon \end{bmatrix}^T. \quad (9.6)$$

Тоді

$$\mathbf{m}^\Psi = \mathbf{Rot}(\Pi, \Psi) \cdot \mathbf{m}^\Pi + \mathbf{Trans}(\Pi, \Psi, d) = \begin{bmatrix} m_x^\Psi & m_y^\Psi & m_z^\Psi \end{bmatrix}^T,$$

де компоненти $(m_x^\Psi, m_y^\Psi, m_z^\Psi)$ мають такі значення:

$$\begin{aligned} m_x^\Psi &= -d + \rho \cos \omega_\Delta \sin(\delta + t) + \rho \cos(\delta + t) \sin \omega_\Delta; \\ m_y^\Psi &= -r_\Delta \omega_\Delta \cos \varepsilon + p t \sin \varepsilon - \\ &\quad - (\rho \cos(\delta + t) \cos \omega_\Delta - \rho \sin(\delta + t) \sin \omega_\Delta) \cos \varepsilon; \\ m_z^\Psi &= p t \cos \varepsilon + r_\Delta \omega_\Delta \sin \varepsilon + \\ &\quad + (\rho \cos(\delta + t) \cos \omega_\Delta - \rho \sin(\delta + t) \sin \omega_\Delta) \sin \varepsilon. \end{aligned} \quad (9.7)$$

Знаючи компоненти вектора $\mathbf{m}^\Psi$ у системі координат $\{\Psi\}$ компоненти вектора $\mathbf{m}^\Omega$ можна представити як

$$m^\Omega = \begin{bmatrix} m_z^\Psi \\ \left((m_x^\Psi)^2 + (m_y^\Psi)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_x^\Omega \\ m_y^\Omega \\ m_z^\Omega \end{bmatrix}_{m_z^\Omega=0}.$$

Виконавши відповідні перетворення, отримаємо вирази компонент вектора $\mathbf{m}^\Omega$ в такій формі:

$$\begin{aligned} m_x^\Omega &= p t \cos \varepsilon + r_\Delta \omega_\Delta \sin \varepsilon + \\ &\quad + (\rho \cos(\delta + t) \cos \omega_\Delta - \rho \cos(\delta + t) \sin \omega_\Delta) \sin \varepsilon, \end{aligned} \quad (9.8)$$

$$\begin{aligned} m_y^\Omega &= \sqrt{(-d + \rho \cos \omega_\Delta \sin(\delta + t) + \rho \cos(\delta + t) \sin \omega_\Delta)^2} + \\ &\quad + \sqrt{(-r_\Delta \omega_\Delta + p t \sin \varepsilon)^2} - \\ &\quad - \sqrt{((\rho \cos(\delta + t) \cos \omega_\Delta - \rho \sin(\delta + t) \sin \omega_\Delta) \cos \varepsilon)^2}. \end{aligned} \quad (9.9)$$

Отримані залежності містять два змінні параметри t та ω_Δ . Параметр ω_Δ визначає взаємне розташування об'єктів формоутворення в процесі обкатки і є провідним¹ параметром, а параметр t визначає положення розрахункової точки на гвинтовій траєкторії і є веденим.

Це означає, що при кожному фіксованому значенні провідного параметра ω_Δ , ведений параметр t приймає (пробігає) все допустимі значення.

¹Тобто таким, що є основним (головним) параметром від якого залежать всі інші параметри. Практично при кожному конкретному значенні параметра ω_Δ , параметр t може приймати декілька значень.

Такий спосіб дозволяє дослідити окремо процес формоутворення для однієї конкретної точки деталі або інструменту. Це дозволяє досліджувати процеси формоутворення на окремих ділянках інструментальної поверхні та різальних кромок залежно від поставленої задачі.

9.3. Профіль початкової інструментальної поверхні

Визначимо профіль початкової інструментальної поверхні інструменту типу черв'яка² на прикладі формоутворення зубчастого колеса. Модуль $m = 5$, кількість зубів $Z = 45$, кут нахилу зуба на дільному циліндрі $\beta = 23^\circ$, торцевий профіль гвинтової поверхні та розрахункові точки подані на рис. 9.2.

На рис. 9.3 представлена сукупність слідів q утворених гвинтовими траєкторіями T_Δ на рухомій площині Ω_Ψ для п'яти фіксованих положень інструмента та деталі в процесі обкатки. Огинаюча до сукупності слідів представлена товстою пунктирною лінією $ABCDEF$.

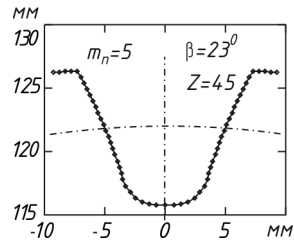


Рис. 9.2. Торцевий профіль гвинтової поверхні

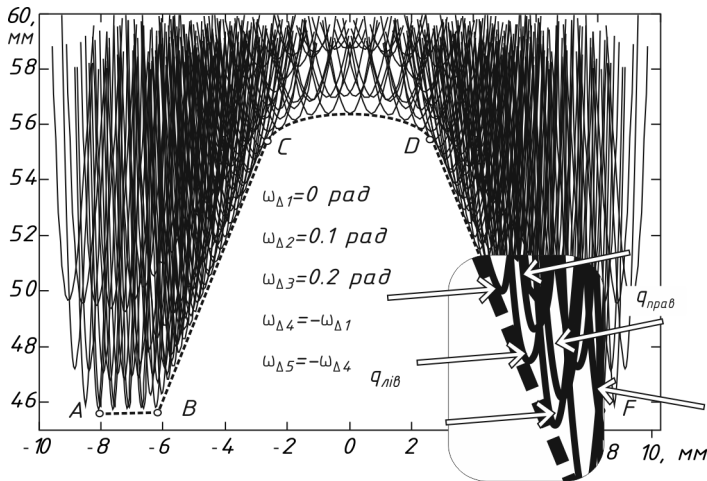


Рис. 9.3. Сукупність слідів q при формоутворенні черв'ячним інструментом

На збільшеному фрагменті рисунка видно, що сліди, умовно позначені як $q_{\text{лів}}$ є дотичними до загальної огинаючої. Отже, точки профілю

²Таким інструментом можуть бути черв'ячні фрези, які є найпоширенішим інструментом для виготовлення зубчастих коліс.

деталі яким вони відповідають, будуть утворені в процесі виготовлення деталі.

У той же час, сліди умовно позначені як $q_{\text{прав}}$ не торкаються загальної огинаючої і тому точки деталі яким вони відповідають утворені не будуть.

9.4. Висновки

Таким чином можна стверджувати, що результати аналізу процесу формоутворення гвинтових поверхонь черв'ячним інструментів, виконані за допомогою методу рухомої поверхні, дозволяють вже на стадії визначення профілю початкової інструментальної поверхні, не проводячи рішення зворотної задачі, встановити можливі відхилення утвореного профілю деталі від номінального.

Отже, при використанні запропонованого методу рухомої площини не має потреби виконувати зворотну задачу формоутворення для встановлення можливості обробки деталі заданого профілю.

Запропонована методика дозволяє вирішити це питання ще на стадії профілювання інструменту, що значно прискорює процес проектування сучасного складного інструменту для обробки гвинтових поверхонь.



10. УЗАГАЛЬНЕННЯ

Виконаємо узагальнення проведених математичних досліджень пошуку початкової інструментальної поверхні методом рухомої площини.

10.1. Узагальнена схема дослідження умов формоутворення методом рухомої поверхні

У попередніх розділах роботи були розглянуті різні схеми формоутворення гвинтової поверхні, а саме формоутворення:

- дисковим інструментом;
- кінцевим інструментом;
- циліндричним інструментом;
- торцевим інструментом;
- довбачами;
- рейковим інструментом;
- черв'ячними фрезами.

У кожній з перерахованих схемою формоутворення є елементи як особливого характеру, властиві тільки даної схеми формоутворення, так і загальні для всіх випадків утворення гвинтової поверхні. Проведемо узагальнення результатів попередніх досліджень та спробуємо виділити фактори, які є загальними для згаданих схем формоутворення.

У кожній із розглянутих схем базовим елементом, який визначає профіль гвинтової поверхні, є її торцевий профіль, який у всіх випадках визначався полярним радіус-вектором $\rho^{(M)}$ та полярним кутом $\delta^{(M)}$ розрахункової точки M торцевого профілю гвинтової поверхні.

Далі. У всіх випадках, що розглядаються, гвинтова поверхня була представлена сукупністю гвинтових траєкторій T руху розрахункової точки M торцевого профілю.

І нарешті, у всіх випадках профіль початкової інструментальної поверхні визначався як огинаюча до слідів q залишеним гвинтовими траєкторіями T_A на рухомій поверхні Ω_ψ . При цьому слід відзначити наступний важливий момент.

Якщо метою дослідження було визначення профілю різальної кромки інструмента – то рухома поверхня Ω_{Ψ} набуває форми передньої поверхні зубця досліджуваного інструменту, тобто певною мірою залежить від конкретної конструкції інструменту.

Однак у тому випадку, коли метою дослідження було визначення профілю початкової інструментальної поверхні – просторова рухома поверхня Ω_{Ψ} трансформувалася в площину незалежно від схеми формоутворення і конструкції конкретного інструменту.

Крім цього, у всіх випадках визначення профілю початкової інструментальної поверхні, рухома поверхня (точніше рухома площина) завжди проходить через вісь обертання інструмента.

Таким чином, можна виділити такі загальні елементи при визначенні профілю початкової інструментальної поверхні

- форма гвинтової поверхні визначається профілем її торцевого перерізу;
- гвинтова поверхня представлена в просторі сукупністю гвинтових траєкторій T розрахункових точок її торцевого профілю;
- при визначенні профілю початкової інструментальної поверхні, рухома поверхня трансформується у площину і завжди проходить через вісь обертання інструмента.

Розглянемо рис. 10.1 на якому представлені розглянуті у роботі схеми формоутворення. У тому випадку, коли рух рухомої площини є поступальним, будемо позначати його як v_{Ω} . У тому випадку коли він обертальний – будемо позначати його як ω_{Ω} .

Схема 1. Черв'ячний інструмент. Ця схема характеризується наявністю обертального руху ω_{Ω} рухомої площини, і двох рухів обкатки – обертального ω_{Δ} та поступального v_{Δ} .

Схема 2. Дисковий інструмент. Ця схема виходить із схеми 1 у тому випадку коли відсутні рухи ω_{Δ} і v_{Δ} обкатки, і присутній тільки обертальний рух ω_{Ω} рухомої площини.

Схема 3. Циліндричний інструмент. Ця схема є окремим випадком схеми 2, коли радіус дискового інструменту дорівнює нескінченності і обертальний рух рухомої площини трансформується в поступальний v_{Δ} .

Схема 4. Рейковий інструмент. Ця схема є окремим випадком схеми 1, коли вісь обертального руху ω_{Ω} рухомої площини збігається з

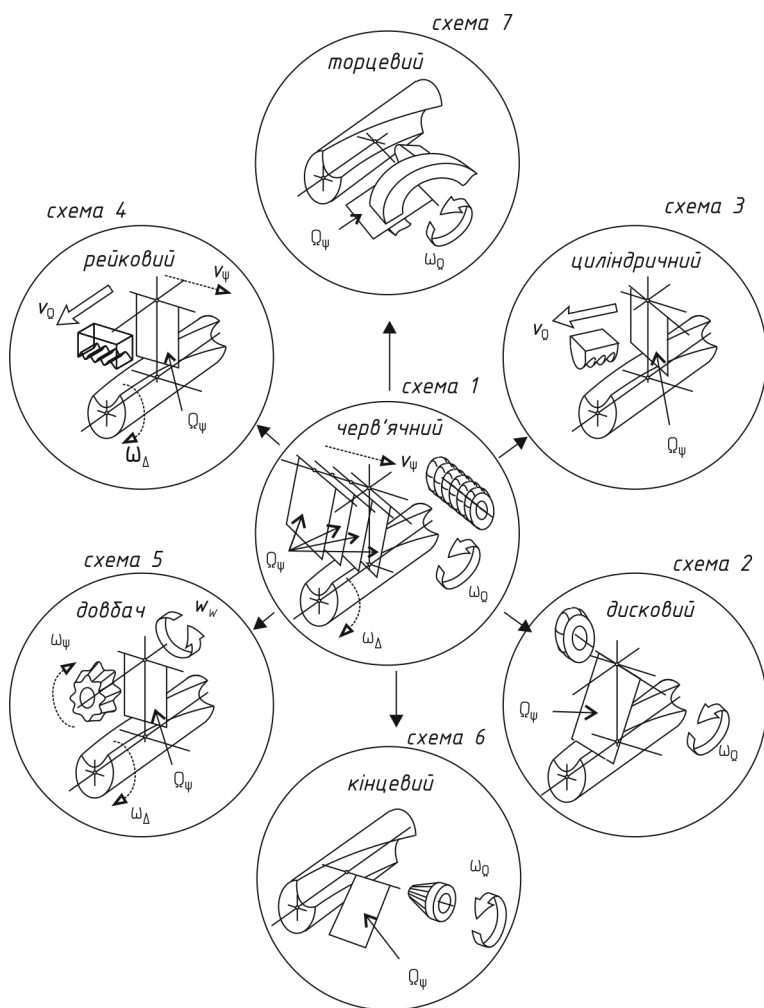


Рис. 10.1. Узагальнена схема формоутворення гвинтових поверхонь

напрямок поступального руху обкатки v_{ψ} , а відстань між осями інструмента і деталі прагне до нескінченності.

Схема 5. Довбання. Ця схема виходить із схеми 1, коли вісь гвинтової поверхні колінеарна до осі обертання інструмента. У цьому випадку поступальний рух обкатки v_{ψ} інструмента трансформується у обертальний ω_{ψ} .

Схема 6. Кінцевий інструмент. Ця схема виходить із схеми 2 формоутворення дисковим інструментом, коли вісь обертання інструмента перетинається з віссю гвинтової поверхні і ортогональна до неї.

Схема 7. Торцевий інструмент. Ця схема є окремим випадком схеми 6, коли осі гвинтової поверхні і обертання інструмента не перетинаються між собою і не взаємно ортогональні.

Таким чином, можна стверджувати, що найбільш загальною кінематичною схемою формоутворення гвинтової поверхні є схема властива черв'ячному інструменту, а всі інші схеми можуть бути отримані з неї, як окремі випадки взаємного розташування об'єктів формоутворення.

10.2. Узагальнена орієнтація об'єктів формоутворення

На рис. 10.2 представлена узагальнена схема орієнтації об'єктів формоутворення, яка дозволяє приймаючи ті чи інші значення параметрів трансформувати її стосовно до різних схем формоутворення гвинтової поверхні.

Як базову систему координат приймемо нерухому систему координат $\{\Sigma\} : (X^{\Sigma}Y^{\Sigma}Z^{\Sigma})$. Будемо розглядати її як деяку основну систему, яка є зв'язковою при переході між іншими об'єктами формоутворення.

З гвинтовою поверхнею зв'яжемо систему координат $\{\Delta\} : (X^{\Delta}Y^{\Delta}Z^{\Delta})$, положення якої щодо системи $\{\Sigma\}$ визначається кутом повороту ω_{Δ} . Вісь Z^{Δ} збігається з віссю гвинтової поверхні, а координатна площина $(X^{\Delta}Y^{\Delta})$ збігається з її торцевим перерізом. При такому способі орієнтації системи $\{\Delta\}$ щодо системи $\{\Sigma\}$ кут ω_{Δ} можна розглядати як змінний параметр процесу обкатки.

Система координат $\{A\} : (X^AY^AZ^A)$ визначає найкоротшу відстань між осями інструмента та утворюваною гвинтовою поверхнею. Будемо позначати його як d . Система $\{A\}$ може бути використана при формоутворенні гвинтової поверхні дисковим, рейковим, довбальним і циліндричним інструментами.

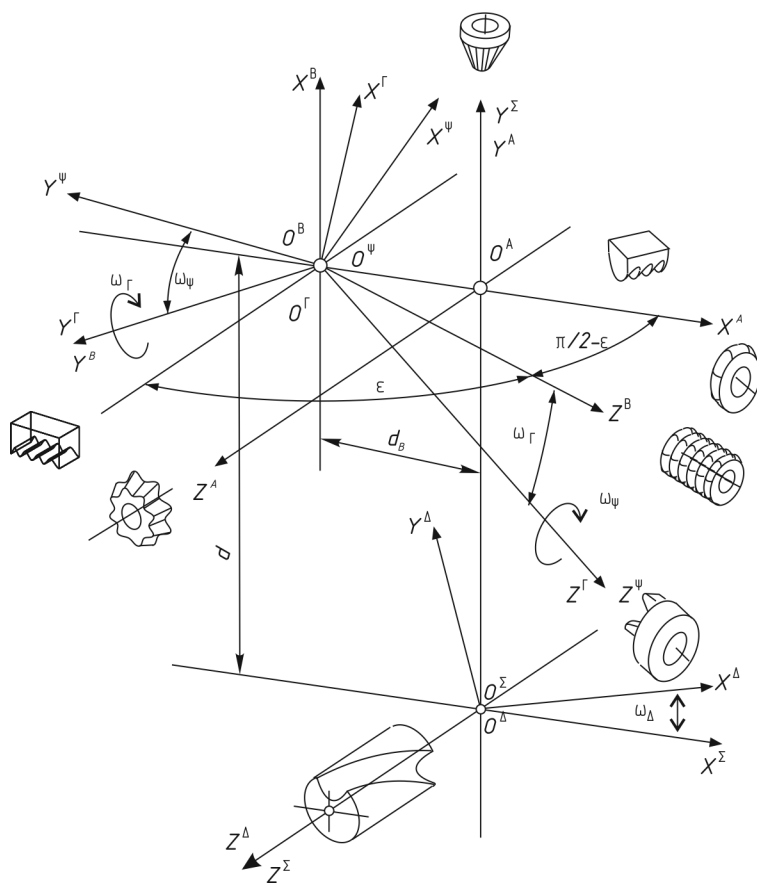


Рис. 10.2. Узагальнена схема орієнтації об'єктів формоутворення

Система координат $\{B\} : (X^B Y^B Z^B)$ може бути використана при формоутворенні черв'ячними фрезами. Її положення щодо системи $\{A\}$ визначається відстанню d_B , величина якого відповідає величині поступального переміщення інструмента при обкатці і може бути визначено як $d_B = r_\Delta \omega_\Delta$. Де r_Δ – радіус основного кола пов'язаного з утворюваною гвинтовою поверхнею; ω_ω – дискретне значення кута повороту утворювальної поверхні, тобто величина кута повороту деталі при обкатуванні.

Система координат $\{Y\} : (X^Y Y^Y Z^Y)$ є проміжною системою координат введеною для більш простого переходу в системі координат пов'язаної з інструментом. Її положення щодо системи координат $\{B\}$ визначається кутом ω_Y .

Система координат $\{\Psi\} : (X^\Psi Y^\Psi Z^\Psi)$ зв'язкова безпосередньо з інструментом і повернена щодо системи $\{B\}$ на кут ω_Ψ .

Якщо параметр d_B дорівнює нулю, представлена сукупність систем координат збігається зі схемою формоутворення, яка використовується при роботі торцевого або кінцевого інструменту. Якщо параметр $d = 0$, то йдеться про кінцевий інструмент. Якщо $d \neq 0$ то виходить схема формоутворення торцевим інструментом.

10.3. Узагальнені залежності визначення сліду перетину гвинтової траєкторії з рухомою площиною

Визначимо математичні залежності необхідні для побудови слідів q перетину гвинтової траєкторії T_Δ з рухомою поверхнею трансформованої в площину при визначенні профілю початкової інструментальної поверхні для узагальненої схеми формоутворення гвинтової поверхні [13, 15, 12, 24, 18, 16].

Положення розрахункової точки M на її гвинтовій траєкторії T_Δ визначатимемо радіус-вектором $\mathbf{m}^\Delta$, який у системі координат $\{\Delta\}$ має такі компоненти

$$\mathbf{m}^{\Delta(M)} = \begin{bmatrix} \rho^{(M)} \cos(\delta^{(M)} + t) \\ \rho^{(M)} \sin(\delta^{(M)} + t) \\ p t \end{bmatrix} \quad (10.1)$$

де $\rho^{(M)}$ – полярний радіус-вектор розрахункової точки M торцевого перерізу гвинтової поверхні, визначені в її торцевому перерізі;

$\delta^{(M)}$ – полярний кут розрахункової точки M торцевого перерізу гвинтової поверхні, визначені в її торцевому перерізі;

p – гвинтовий параметр гвинтової поверхні, що розглядається;

t – змінний параметр, який визначає положення розрахункової точки при її русі вздовж гвинтовій траєкторії T_Δ .

Перехід від системи координат $\{\Delta\}$ до нерухомої системи координат $\{\Sigma\}$ реалізується оператором повороту $\mathbf{Rot}(\Delta, \Sigma)$

$$\mathbf{Rot}(\Delta, \Sigma) = \begin{bmatrix} \cos \omega_\Delta & -\sin \omega_\Delta & 0 \\ \sin \omega_\Delta & \cos \omega_\Delta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (10.2)$$

Тоді, компоненти радіус-вектора $\mathbf{m}^\Sigma$ точки M представлені в системі координат $\{\Sigma\}$ будуть

$$\begin{aligned} \mathbf{m}^\Sigma &= \mathbf{Rot}(\Delta, \Sigma) \mathbf{m}^\Delta = \\ &= \begin{bmatrix} \cos \omega_\Delta & -\sin \omega_\Delta & 0 \\ \sin \omega_\Delta & \cos \omega_\Delta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \rho^{(M)} \cos(\delta^{(M)} + t) \\ \rho^{(M)} \sin(\delta^{(M)} + t) \\ p t \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} m_x^\Sigma \\ m_y^\Sigma \\ m_z^\Sigma \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (10.3)$$

де компоненти $(m_x^\Sigma, m_y^\Sigma, m_z^\Sigma)$ вектора $\mathbf{m}^\Sigma$ будуть

$$m_x^\Sigma = \rho \cos(\delta + t) \cos \omega_\Delta - \rho \sin(\delta + t) \sin \omega_\Delta, \quad (10.4)$$

$$m_y^\Sigma = \rho \sin(\delta + t) \cos \omega_\Delta - \rho \cos(\delta + t) \sin \omega_\Delta, \quad (10.5)$$

$$m_z^\Sigma = p t. \quad (10.6)$$

Перехід від нерухомої системи координат $\{\Sigma\}$ до системи координат $\{A\}$ можна реалізувати послідовним виконанням оператора повороту $\mathbf{Rot}(\Sigma, A)$ та оператора паралельного перенесення $\mathbf{Trans}(\Sigma, A)$

$$\mathbf{Rot}(\Sigma, A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Trans}(\Sigma, A) = \begin{bmatrix} 0 \\ -d \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (10.7)$$

Отже, компоненти радіус-вектора $\mathbf{m}^A$ точки M , виражені в системі координат $\{A\}$, будуть

$$\mathbf{m}^A = \mathbf{Rot}(\Sigma, A) \cdot \mathbf{m}^\Sigma + \mathbf{Trans}(\Sigma, A) = \begin{bmatrix} m_x^A & m_y^A & m_z^A \end{bmatrix}^T, \quad (10.8)$$

$$m_x^A = \rho \cos(\delta + t) \cos \omega_\Delta - \rho \sin(\delta + t) \sin \omega_\Delta, \quad (10.9)$$

$$m_y^A = \rho \sin(\delta + t) \cos \omega_\Delta + \rho \cos(\delta + t) \sin \omega_\Delta - d, \quad (10.10)$$

$$m_z^A = p t. \quad (10.11)$$

Перехід від системи координат $\{A\}$ до системи координат $\{B\}$ у якій можна розглядати формоутворення гвинтової поверхні черв'ячним інструментом, можна реалізувати послідовним виконанням оператора повороту $\mathbf{Rot}(A, B)$ та оператора паралельного перенесення $\mathbf{Trans}(A, B)$

$$\mathbf{Rot}(A, B) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\cos \epsilon & 0 & \sin \epsilon \\ \sin \epsilon & 0 & \cos \epsilon \end{bmatrix}, \quad (10.12)$$

$$\mathbf{Trans}(A, B) = \begin{bmatrix} 0 \\ -d_B \cos \epsilon \\ d_B \sin \epsilon \end{bmatrix}. \quad (10.13)$$

У наведених виразах кут ϵ це кут між осями інструмента та гвинтової поверхні аналогічно схемі формоутворення дисковим або черв'ячним інструментом.

Компоненти радіус-вектора $\mathbf{m}^B$ точки M , виражені в системі координат $\{B\}$, будуть:

$$\mathbf{m}^B = \mathbf{Rot}(A, B) \cdot \mathbf{m}^A + \mathbf{Trans}(A, B) = \begin{bmatrix} m_x^B & m_y^B & m_z^B \end{bmatrix}^T, \quad (10.14)$$

$$m_x^B = \rho \sin(\delta + t) \cos \omega_\Delta + \rho \cos(\delta + t) \sin \omega_\Delta - d, \quad (10.15)$$

$$m_y^B = p t \sin \epsilon - d_B \cos \epsilon - (\rho \cos(\delta + t) \cos \omega_\Delta - \rho \sin(\delta + t) \sin \omega_\Delta) \cos \epsilon, \quad (10.16)$$

$$m_z^B = p t \sin \epsilon - d_B \cos \epsilon + (\rho \cos(\delta + t) \cos \omega_\Delta - \rho \sin(\delta + t) \sin \omega_\Delta) \sin \epsilon. \quad (10.17)$$

Перехід від системи координат $\{B\}$ до системи координат $\{\Gamma\}$ здійснюється застосуванням оператора повороту $\mathbf{Rot}(B, \Gamma)$

$$\mathbf{Rot}(B, \Gamma) = \begin{bmatrix} \cos \omega_\Gamma & 0 & \sin \omega_\Gamma \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \omega_\Gamma & 0 & \cos \omega_\Gamma \end{bmatrix}. \quad (10.18)$$

Компоненти радіус-вектора $\mathbf{m}^\Gamma$ точки M , виражені в системі координат $\{\Gamma\}$ будуть:

$$\mathbf{m}^\Gamma = \mathbf{Rot}(B, \Gamma) \cdot \mathbf{m}^B = \begin{bmatrix} m_x^\Gamma & m_y^\Gamma & m_z^\Gamma \end{bmatrix}^T, \quad (10.19)$$

$$\begin{aligned} m_x^\Gamma = & (-d + \cos \omega_\Delta \sin(\delta + t) + \rho \sin \omega_\Delta \cos(\delta + t)) \cos \omega_\Gamma + \\ & + (p t \cos \varepsilon + d_B \sin \varepsilon) \sin \omega_\Gamma + \\ & + (\rho \cos(\delta + t) \cos \omega_\Delta \sin \varepsilon - \rho \sin(\delta + t) \sin \omega_\Delta) \sin \omega_\Gamma, \end{aligned} \quad (10.20)$$

$$\begin{aligned} m_y^\Gamma = & t \sin \varepsilon - d_B \cos \varepsilon - \\ & - (\rho \cos(\delta + t) \cos \omega_\Delta - \rho \sin(\delta + t) \sin \omega_\Delta) \cos \varepsilon, \end{aligned} \quad (10.21)$$

$$\begin{aligned} m_z^\Gamma = & (d - \rho \cos \omega_\Delta \sin(\delta + t) - \rho \sin \omega_\Delta \cos(\delta + t)) \sin \omega_\Gamma + \\ & + (p t \cos \varepsilon + d_B \sin \varepsilon) \cos \omega_\Gamma + \\ & + (\rho \cos(\delta + t) \cos \omega_\Delta \sin \varepsilon - \rho \sin(\delta + t) \sin \omega_\Delta) \cos \omega_\Gamma. \end{aligned} \quad (10.22)$$

І нарешті остаточний перехід до системи координат $\{\Psi\}$ пов'язаної з інструментом виконується за допомогою оператора повороту $\mathbf{Rot}(\Gamma, \Psi)$

$$\mathbf{Rot}(\Gamma, \Psi) = \begin{bmatrix} \cos \Psi & -\sin \omega_\Psi & 0 \\ \sin \omega_\Psi & \cos \omega_\Psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (10.23)$$

Тоді остаточно отримаємо:

$$\mathbf{m}^\Psi = \mathbf{Rot}(\Gamma, \Psi) \cdot \mathbf{m}^\Gamma = \begin{bmatrix} m_x^\Psi & m_y^\Psi & m_z^\Psi \end{bmatrix}^T, \quad (10.24)$$

$$\begin{aligned} m_x^\Psi = & \cos \omega_\Psi \times \\ & \times \left(\cos \omega (-d + \rho \cos \omega_\Delta \sin(\delta + t) + \rho \sin \omega_\Delta \cos(\delta + t)) + \right. \\ & \left. + \sin \omega_\Gamma \left(p t \cos \varepsilon + d_B \sin \varepsilon + \sin \varepsilon \begin{pmatrix} \rho \cos(\delta + t) \cos \omega_\Delta - \\ -\rho \sin(\delta + t) \sin \omega_\Delta \end{pmatrix} \right) \right) - \\ & - \left(d_B \cos \varepsilon + p t \sin \varepsilon - \cos \varepsilon \begin{pmatrix} \rho \cos(\delta + t) \cos \omega_\Delta - \\ -\sin(\delta + t) \sin \omega_\Delta \end{pmatrix} \right) \sin \omega_\Psi, \end{aligned} \quad (10.25)$$

$$m_y^\Psi = \cos \omega_\Psi \left(\begin{array}{c} -d_B \cos \varepsilon + p t \sin \varepsilon - \\ -\rho \cos (\delta + t) \cos \varepsilon \cos \omega_\Delta - \rho \sin (\delta + t) \sin \omega_\Delta \end{array} \right) +$$

$$+ \left(\begin{array}{c} \cos \omega_\Gamma \left(\begin{array}{c} -d + \rho \cos \omega_\Delta \sin (\delta + t) + \\ + \rho \cos (\delta + t) \sin \omega_\Delta \end{array} \right) + \\ + \sin \omega_\Gamma \left(\begin{array}{c} p t \cos \varepsilon + d_B \sin \varepsilon + \sin \varepsilon \times \\ \times \left(\begin{array}{c} \rho \cos (\delta + t) \cos \omega_\Delta - \\ -\rho \sin (\delta + t) \sin \omega_\Delta \end{array} \right) \end{array} \right) \end{array} \right) \sin \omega_\Psi, \quad (10.26)$$

$$m_z^\Psi = -\sin \omega_\Gamma (-d + \rho \sin (\delta + t) \cos \omega_\Delta + \rho \cos (\delta + t) \sin \omega_\Delta) +$$

$$+ \cos \omega_\Gamma \left(\begin{array}{c} p t \cos \varepsilon + d_B \sin \varepsilon + \\ \sin \varepsilon \left(\begin{array}{c} \rho \cos (\delta + t) \cos \omega_\Delta - \\ -\rho \sin (\delta + t) \sin \omega_\Delta \end{array} \right) \end{array} \right). \quad (10.27)$$

Отримані математичні залежності дозволяють визначити координати точок сліду q у рухомій площині для всіх розглянутих випадків формоутворення.

Наприклад, для схеми формоутворення гвинтової поверхні дисковим інструментом параметри

$$\omega_\Gamma = 0, \quad d_B = 0, \quad (10.28)$$

$$\omega_\Psi = 0, \quad \omega_\Delta = 0.$$

У цьому випадку наведені вище математичні залежності, після виконання відповідних перетворень, набудуть вигляду:

$$m_x^\Psi = -d + \rho \sin (\delta + t), \quad (10.29)$$

$$m_y^\Psi = -\rho \cos (\delta + t) \cos \varepsilon + p t \sin \varepsilon, \quad (10.30)$$

$$m_z^\Psi = p t \cos \varepsilon + \rho \cos (\delta + t) \sin \varepsilon. \quad (10.31)$$

Отримані залежності повністю ідентичні залежностям, отриманим у розділі присвяченому формоутворенню дисковим інструментом.

Прийнявши параметри $\omega = 0_\Gamma$ та $\omega_\Psi = 0$ отримаємо залежності ідентичні схемі формоутворення черв'ячними фрезами:

$$m_x^\Psi = -d + \rho \cos \omega_\Delta \sin (\delta + t) + \rho \cos (\delta + t) \sin \omega_\Delta, \quad (10.32)$$

$$m_y^\Phi = -d_B \cos \varepsilon + p t \sin \varepsilon - \\ - (\rho \cos (\delta + t) \cos \omega_\Delta - \rho \sin (\delta + t) \sin \omega_\Delta) \cos \varepsilon, \quad (10.33)$$

$$m_z^\Psi = p t \cos \varepsilon - d_B \sin \varepsilon + \\ + (\rho \cos (\delta + t) \cos \omega_\Delta - \rho \sin (\delta + t) \sin \omega_\Delta) \sin \varepsilon. \quad (10.34)$$

У даному випадку слід враховувати, що параметр d_B ідентичний величині $r_\Delta \omega_\Delta$. Тобто, справедливим є рівняння

$$d_B = r_\Delta \omega_\Delta. \quad (10.35)$$

10.4. Висновки

Проведений аналіз узагальненої схеми формоутворення показав, що запропонований метод рухомої площини при дослідженні процесів утворенні гвинтових поверхонь постійного кроку може бути застосований у широкому діапазоні профілювання різального інструменту.

Аналіз проведених досліджень дозволяє стверджувати, що метод рухомої площини дозволяє визначити не тільки форму початкової інструментальної поверхні, але і форму різальної кромки. Для цього є достатнім замінити плоску площину просторовою поверхнею, яка є ідентичною до передньої (або задньої) поверхні досліджуваного інструменту.

Значною перевагою запропонованого методу є можливість визначити у числовій формі величину похибки профілювання (обробки) не вирішуючи зворотну задачу профілювання.

Змінюючи початкові параметри, залежно від типу обробки, можна за одними тим-самими математичними залежностями знаходити форму початкової інструментальної поверхні для всіх інструментів, що застосовують при обробці гвинтових поверхонь.



Посилання

1. Радзевич С. П. Формоутворення поверхонь деталей. Основи теорії. Київ : Растан, 2001. 592 с.
2. Performance of coated cutting tools in machining. *The International Conference on Emerging Trends in Engineering and Technology Faculty of Engineering*. The UWI, St. Augustine, 1 June 2020. 2020. P. 792–802. URL: <https://doi.org/10.47412/JSID9445> (date of access: 05.01.2025).
3. Родін П. Р., Лінкін Г. О., Титаренко В. Н. Обробка фасонних поверхонь на верстатах з числовим програмним керуванням. Київ : Техніка, 1976. 198 с.
4. Охріменко О. А., Равська Н. С., Плівак О. А. Особливості утворення гвинтової канавки спіральних свердел дисковим інструментом прямолінійної форми. *Вісник національного технічного університету України "Київський політехнічний інститут"*. 2012. № 64. С. 136–145.
5. Automatic broaching tool design by technological and geometrical optimization / P. Vogtel et al. *Procedia CIRP*. 2015. № 33. P. 486–501.
6. Radzevich S. P. Generation of Surfaces. Kinematic Geometry of Surface Machining. Boca Raton London New York : Taylor & Francis Group, 2014. 738 p.
7. Солодкий В. І., Глоба О. В. Ряди Маклорена при утворенні гвинтових поверхонь. *Вісник національного технічного університету України "Київський політехнічний інститут"*. 2015. № 49(1). С. 121–127.
8. Швець С. В. Вихідна інструментальна поверхня та проектування різального інструменту // *Journal of engineering sciences*. – 2014. – Т. 1, № 1. – С. 12–19.
9. Okhrimenko, O.; Vovk, V.; Maidaniuk, S.; Lashyna, Y. Determining the width of a layer cut with saws with multidirectional teeth. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, [S. l.], v. 3, n. 1 (111), p. 14–20, 2021. DOI: 10.15587/1729-4061.2021.231779. .
10. Равська Н.С., Охріменко О.А., Плівак О.А. особливості формоутворення гвинтової канавки спіральних свердел дисковим інструментом прямолінійної форми. // *Вісн. Нац. техн. ун-ту України "КПІ". Сер. Машинобудування*. - 2012. - Вип. 64. - С. 136-145. <https://ela.kpi.ua/server/api/core/bitstreams/5e067850-2e05-49c4-9547-0e62170056a1/content/> (дата звернення 05.04.2025).

11. Солодкий В. І. Метод рухомого січення при визначенні спряжених поверхонь. *Вісник національного технічного університету КПІ. Машинобудування*. 2002. № 43. С. 115–118.
12. Солодкий В. І. Метод рухомої поверхні в теорії формоутворення гвинтових поверхонь // *Наукові вісті НТУУ "КПІ"*. - 2005. - № 4. С. 92-98.
13. Солодкий В. І., Родін П. Р. Спрощена методика профілювання інструменту для утворення гвинтових поверхонь // *Вісник національного технічного університету України КПІ, Машинобудування*. 2000. – № 39. С. – 3-9.
14. Солодкий В. І., Родін П. Р., Равська Н. С. Кінематичне дослідження умов контакту спряжених поверхонь. *Вісник національного технічного університету КПІ. Машинобудування*. 2005. № 41. С. 92–98.
15. Солодкий В.І. Застосування методу рухомого перерізу при проектуванні інструменту для обробки гвинтових поверхонь // *Вісник національного технічного університету КПІ. Машинобудування*. - 2003. - № 44. - С. 177-180.
16. Солодкий В. І., Довжик Є. В. Формування гвинтової поверхні конічною первинною інструментальною поверхнею. *Наукові вісті Національного технічного університету України "Київський політехнічний інститут"*. 2009. № 2(64). С. 78–83.
17. Солодкий В. І., Абдибаєв М. Порівняння методів формоутворення задніх поверхонь спіральних свердел. *Матеріали загально унів. науково-техн. конф. молодих вчен. та студентів, присвяч. дню Науки*, м. Київ Національний технічний університет України "Київський політехнічний інститут 16 жовт. 2014 р. Київ, 2014. С. 3–4.
18. Солодкий В. І., Фандич П. Я. Зрізання припуску при формоутворенні конічної гвинтової поверхні дисковим інструментом. *Наукові вісті Національного технічного університету України "Київський політехнічний інститут"*. 2009. № 55. С. 174–181.
19. Солодкий В. І., Фандич П. Я. Утворення конічних гвинтових поверхонь. *Тези доповідей : Матеріали загально унів. науково-техн. конф. молодих вчен. та студентів, присвяч. дню Науки*, м. Київ Національний технічний університет України "Київський політехнічний інститут 8 квіт. 2008 р. Київ, 2008. С. 57–58.
20. Солодкий В. І. Розмір початкового кола при обробці деталей методом кочення. *Процеси механічної обробки в машинобудуванні*. 2012. № 12. С. 159–168.

21. Солодкий В. І., Поперечний О. В. Дослідження зони контакту черв'ячної фрези та заготованки. *Тези доповідей* : Матеріали загальноунів. науково-техн. конф. молодих вчен. та студентів, присвяч. дню Науки, 8 квіт. 2013 р. Київ, 2013.
22. Проблеми механічної обробки. Частина І : монографія / В.І.Солодкий, В. В. Вовк, О. А. Плівак, С. О. Яцук ; КПІ ім. Ігоря Сікорського. – Електронні текстові дані (1 файл: 4,62 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2019. – 202 с. <https://ela.kpi.ua/handle/123456789/29402> (дата звернення 05.04.2025).
23. Проблеми механічної обробки. Частина 2 : монографія / В.І.Солодкий, Д. О. Красновид, О. А. Охріменко, В. А. Пасічник, Д. В. Яковенко ; КПІ ім. Ігоря Сікорського. – Електронні текстові дані (1 файл 9,26 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2019. – 220 с. <https://ela.kpi.ua/handle/123456789/43834> (дата звернення 05.04.2025).
24. Солодкий В. І. Профілювання шліфувальних кругів для фасонних фрез з нахиленим зубцем. *Вісник механіко-машинобудівного інституту НТУУ "Київський політехнічний інститут"*. 2012. Т. 182, № 65. С. 33–37.

Наукове видання

Солодкий Валерій Іванович

ФОРМОУТВОРЕННЯ ГВИНТОВИХ ПОВЕРХОНЬ

МЕТОД РУХОМОЇ ПЛОЩИНИ

Монографія

В авторській редакції

Надруковано з оригінал-макета замовника

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
Свідцтво про державну реєстрацію: серія ДК № 5354 від 25.05.2017 р.
просп. Берестейський, 37,
м. Київ, 03056

Підп. до друку 09.06.2025. Формат 60 × 84¹/₁₆. Папір офс. Гарнітура Times.
Спосіб друку – електрографічний. Ум. друк. арк. 13,48. Обл.-вид. арк. 9,93.
Наклад 8 пр. Поз. 25-3-1-003. Зам. № 25-41.

Видавництво «Політехніка» КПІ ім. Ігоря Сікорського
вул. Політехнічна, 14, корп. 15
м. Київ, 03056
тел. (044) 204-81-78