МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

ТЕОРІЯ СИГНАЛІВ

ЧАСТИНА І. МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ДЕТЕРМІНОВАНИХ СИГНАЛІВ ПРАКТИКУМ

Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського як навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра за освітньою програмою «Системи технічного захисту інформації»

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2019

Теорія сигналів. Методичні вказівки до практичних занять та самостійної роботи. Частина 1 Математичні моделі детермінованих сигналів. [Електронний ресурс]: навч. посіб. для студентів вищих навчальних закладів спеціальності 125 «Кібербезпека», освітня програма «Системи технічного захисту інформації»/ КПІ ім. Ігоря Сікорського; уклад.: С. М. Кущ, Д. О. Прогонов, Смирнов В.П. – Електронні текстові дані (1 файл: 0,42 Мбайт). – Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2019. – 27 с.

Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
(протокол № 7 від 01.04.2019 р.)
за поданням Вченої ради Фізико-технічного інституту
(протокол № 04/2019 від 26.03.2019 р.)

Електронне мережне навчальне видання

ТЕОРІЯ СИГНАЛІВ

ЧАСТИНА І. МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ДЕТЕРМІНОВАНИХ СИГНАЛІВ. ПРАКТИКУМ

Укладачі: *Кущ Сергій Миколайович, канд. техн. наук, доц.*
Прогонов Дмитро Олександрович, канд. техн. наук.
Смирнов Володимир Павлович, старший викладач.

Відповідальний редактор: *Мачуський Євгеній Андрійович, доктор техн. наук, проф.*

Методичні вказівки до практичних занять та самостійної роботи. Частина 1 з дисципліни «Теорія сигналів» призначені для поглибленого вивчення розділу програми щодо моделювання складних сигналів з використанням сучасного програмного забезпечення (пакету Mathcad). Наданий матеріал дозволить набути навички аналізу складних сигналів сучасними методами досліджень та допоможе кращому засвоєнню теоретичних положень, викладених в лекціях, навчальній та науковій літературі.

ЗМІСТ

УМОВНІ ПОЗНАЧЕННЯ

1(t) - одиничний стрибок, функція Хевісайда Φ(t)

Φ(t) – позначення функції Хевісайда у пакеті Mathcad

δ(t) - дельта-функція, функція Дірака

r(t) – функція люфту, лінійно змінна функція

rect($\frac{t}{\tau}$) – одиничний прямокутний імпульс тривалості τ

sign(t) – сигнум-функція, функція знаку

U_m – амплітуда сигналу

ω – частота сигналу

φ_0 – початкова фаза сигналу

har(1,2,θ) - функція Хаара

rad(1,θ) - функція Радемахера

wal(2,θ) - функція Уолша

1. ОСНОВНІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

Сигнал (від лат. signum – знак) – це фізичний процес, який характеризує зміну у часі фізичного стану об'єкту та служить для відображення, реєстрації, передачі і прийому повідомлень. Для теоретичного дослідження різноманітних сигналів необхідно сформувати їх *математичні моделі*. Математичною (аналітичною) моделлю сигналу називається його представлення через математичні об'єкти (функції, вектори, розподіли тощо), які дозволяють робити висновки про особливості сигналу, використовуючи формальні перетворення (наприклад, математичні перетворення) в рамках структури сигналу.

З математичної точки зору радіоелектронний (телекомунікаційний) сигнал можна представити функцією часу $u(t)$, яка характеризує зміну миттєвих значень напруги (найчастіше), струму або заряду. Будь-яке фізичне явище розвивається у просторі і часі. Але для багатьох випадків ми можемо спростити модель, розглядаючи розвиток процесу лише у часі.

Сигнал як фізичний процес завжди існує на кінцевому інтервалі часу, однак в теорії сигналів їх, як правило, розглядають на нескінченному або напівнескінченному інтервалі часу. Досить точно, реальні сигнали можуть бути описані через елементарні сигнали, які виникають у послідовні моменти часу. Розглянемо найважливіші математичні моделі елементарних сигналів.

1.1. ГАРМОНІЧНІ (ТРИГОНОМЕТРИЧНІ) СИГНАЛИ

Математична модель таких сигналів визначається формулою:

$u(t) = U_m \cdot cos(\omega \cdot t+\varphi_0)$,

де U_m – амплітуда сигналу, ω – частота, а φ_0 – початкова фаза сигналу.

Наведемо графік (осцилограму) (Рис. 1.1) цього сигналу, побудованого у середовищі програми Mathcad.

$Um := 1 \quad \omega := 2\pi\,10^{6} \quad \phi0 := \frac{\pi}{3} \quad u(t) := Um\cdot\cos(\omega\cdot t + \phi0)$

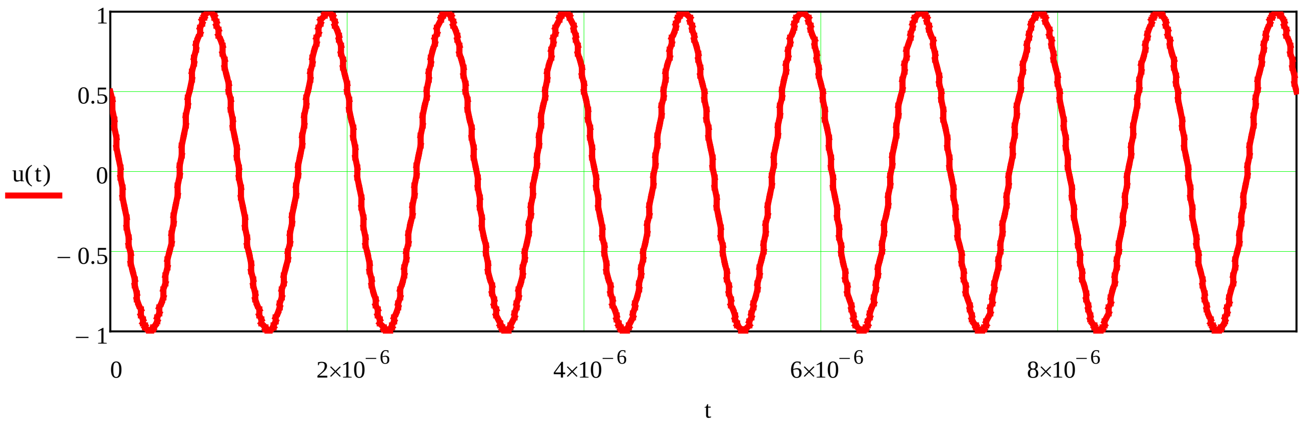


Рис. 1.1 Графік сигналу u(t) $=U_m\cdot\cos(\omega\cdot t+\varphi_0)$

1.2. КОМПЛЕКСНО-ЕКСПОНЕНЦІАЛЬНІ СИГНАЛИ

Математичну модель комплексно-експоненціальних сигналів можна представити у вигляді:

$\dot{Z}(t)=U_m\cdot exp(j\cdot(\omega\cdot t+\varphi_0))$,

де $j=\sqrt{-1}$.

Використовуючи формулу Ейлера для $\dot{Z}(t)$, одержимо:

$\dot{Z}(t) = U_m\cdot(cos(\omega\cdot t+\varphi_0) + j\cdot sin(\omega\cdot t+\varphi_0)) = x(t) + j\cdot y(t)$,

де *x(t)* та *y(t)* дійсні функції (сигнали).

Щоб отримати фізичний сигнал потрібно взяти дійсну частину функції $\dot{Z}$(t). Наприклад, розглянувши дійсну частину сигналу $\dot{Z}$(t), тобто u(t) = Re($\dot{Z}$(t)), при $\omega=2\cdot\pi\cdot10^{6}$ рад/с; U_m = 1 В; φ_0 = $\pi/3$, отримаємо такий само сигнал, як і в попередньому випадку (Рис. 1.1).

Структурна схема фізичного моделювання пари дійсних сигналів x(t) та y(t) (квадратурних) показана на Рис. 1.2.

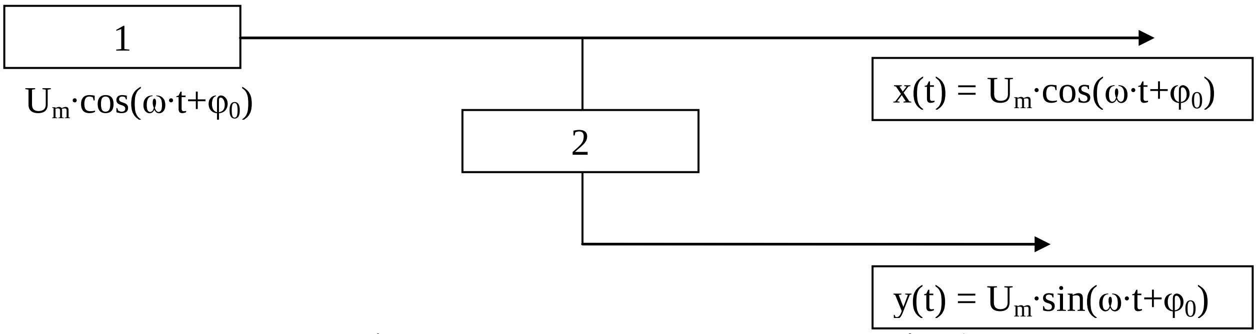


Рис. 1.2 Схема формування квадратурних сигналів: (1 – генератор гармонічних сигналів, 2 – фазообертач на $\pi/2$)

1.3. ФУНКЦІЯ ВКЛЮЧЕННЯ 1(t)

Функція включення (одиничний стрибок, функція Хевісайда Ф(t)) (Рис. 1.3) застосовується для введення часових обмежень у нескінченні сигнали, описані вище. Математична модель такого сигналу визначається таким виразом:

$$1(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0; \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

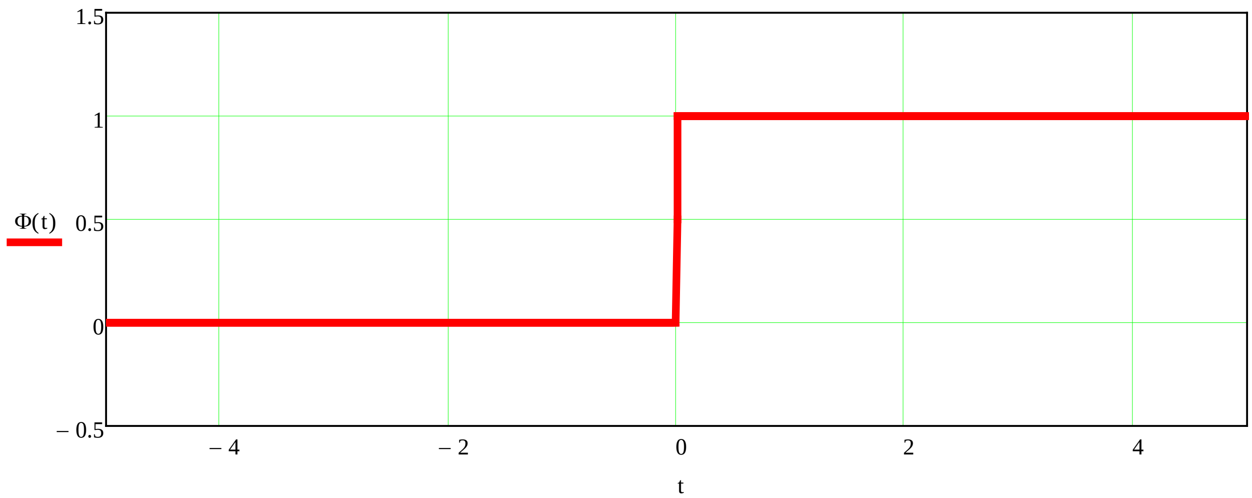


Рис. 1.3 Функція Хевісайда, побудована у програмі Mathcad

загальному випадку функція 1(t) може бути зміщеною відносно початку відліку часу на t_0:

- сигнал, затриманий на t0 $1(t-t_0)$;
- сигнал, який випереджає сигнал 1(t) на t_0 $1(t+t_0)$ (Рис. 1.4 при $t_0 = 1$).

Математичні моделі сигналів, затриманого та того, який випереджає:

$$1(t-t_0)=\begin{cases}1, & t\geq t_0;\\ 0, & t<t_0.\end{cases} \qquad 1(t+t_0)=\begin{cases}1, & t\geq -t_0;\\ 0, & t<-t_0.\end{cases}$$

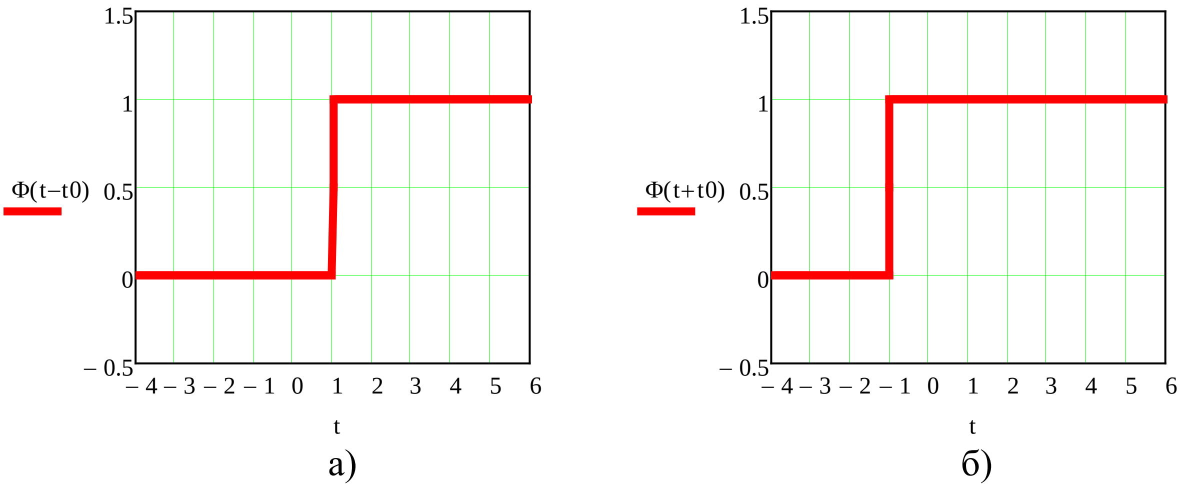


Рис. 1.4 Зсунуті функції включення: а) сигнал, затриманий на t0, б) сигнал, який випереджає сигнал 1(t) на t0

1.4. ДЕЛЬТА-ФУНКЦІЯ (ФУНКЦІЯ ДІРАКА) δ(t)

Дельта-функція дорівнює нулю всюди, окрім точки нуль. В точці нуль амплітуда дельта-функції дорівнює $1/\Delta t$ при $\Delta t \to 0$, тобто амплітуда дельта-функції у точці нуль дорівнює нескінченості. Дельта-функція має одиничний інтеграл:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1.$$

Математична модель такого сигналу визначається формулою:

$$\delta(t) = \begin{cases}+\infty, & t = 0;\\ 0, & t \neq 0.\end{cases}$$

Умовно цю функцію можна зобразити так (Рис. 1.5).

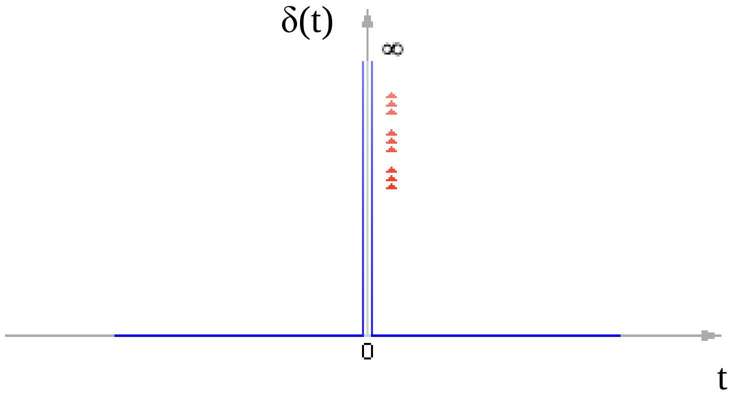


Рис. 1.5 Умовний графік дельта-функції

Аналогічно функції включення, δ(t) може бути зміщена на проміжок часу t_0. Математичні моделі таких сигналів:

$$\delta(t-t_0)=\begin{cases} +\infty, & t=t_0; \\ 0, & t\neq t_0. \end{cases} \qquad \delta(t+t_0)=\begin{cases} +\infty, & t=-t_0; \\ 0, & t\neq -t_0. \end{cases}$$

Фільтрувальна властивість дельта-функції*:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u(t)\cdot\delta(t-t_0)dt=u(t_0).$$

Ця властивість використовується для виміру миттєвих значень сигналу u(t).

Дельта-функція та функція включення зв’язані співвідношеннями:

$$\delta(t) = \frac{d1(t)}{dt}; \tag{1.1}$$

$$1(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)d\tau. \tag{1.2}$$

1.5. ФУНКЦІЯ ЛЮФТУ (ФУНКЦІЯ ЛІНІЙНОГО ЗРОСТАННЯ)

Математична модель такого сигналу визначається формулою:

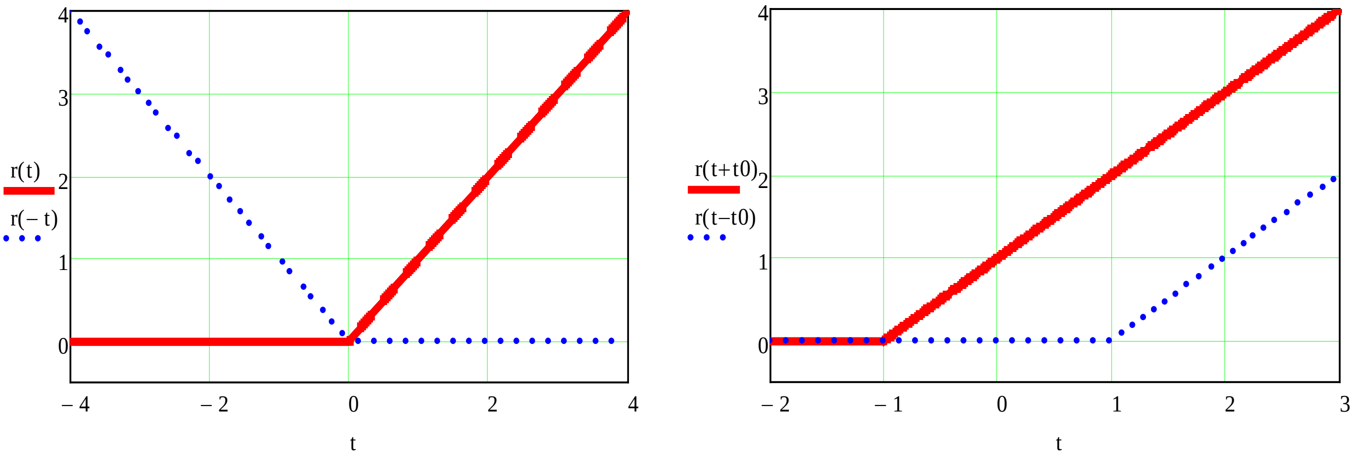
$r(t) = t\cdot 1(t).$

---

*цей вираз представляє собою функціонал, з якого визначається *δ(t)*, так як дельта-функція має строгий математичний зміст лише у разі, коли вона використовується під знаком інтегралу

Графіки функції люфту r(t), затриманої функції люфту на час t_0 $r(t-t_0)$, функції люфту, яка випереджає r(t) на час t_0, $r(t+t_0)$ та оберненої функції люфту r(-t) зображено на Рис. 1.6.

$$r(t) := \begin{vmatrix} t & \text{if} \ \ t > 0 \\ 0 & \text{if} \ \ t \le 0 \end{vmatrix}$$



а) б)

Рис. 1.6 Функції: а) r(t), r(-t), б) r(t+t0), r(t-t0)

Зазначимо, що сингулярні функції 1(t), δ(t) та r(t) можуть бути виражені одна через одну подібно (1.1) та (1.2).

1.6. СІГНУМ-ФУНКЦІЯ sign(t)

Математична модель функції sign(t) задається системою рівнянь:

$$sign(t) = \begin{cases} 1, t > 0; \\ 0, t = 0; \\ -1, t < 0, \end{cases}$$

графік зображено на Рис. 1.7.

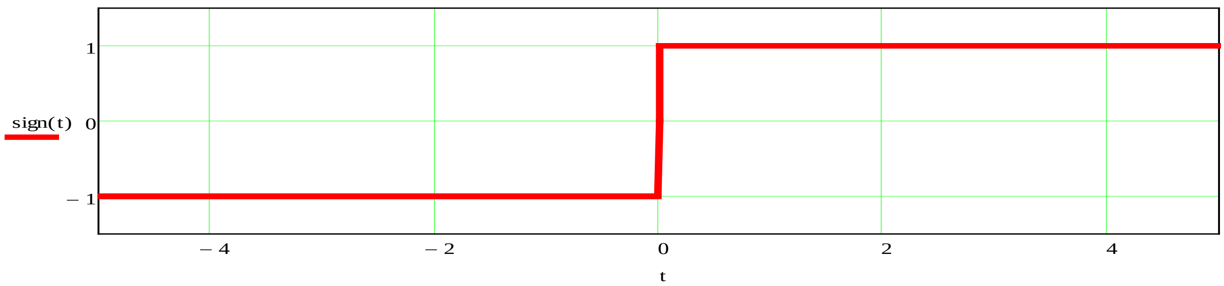


Рис. 1.7 Функція сігнум, побудована у середовищі програми Mathcad

2. ПРИКЛАДИ РОЗВ’ЯЗАННЯ ЗАДАЧ

1. Побудувати графік сигналу, математична модель якого задана виразом $u(t) = 1(-t+t_0)$, де $t_0 = 2$.

Розв’язок

Спочатку побудуємо функцію 1(-t). Покажемо це на графіку (Рис. 1.8).

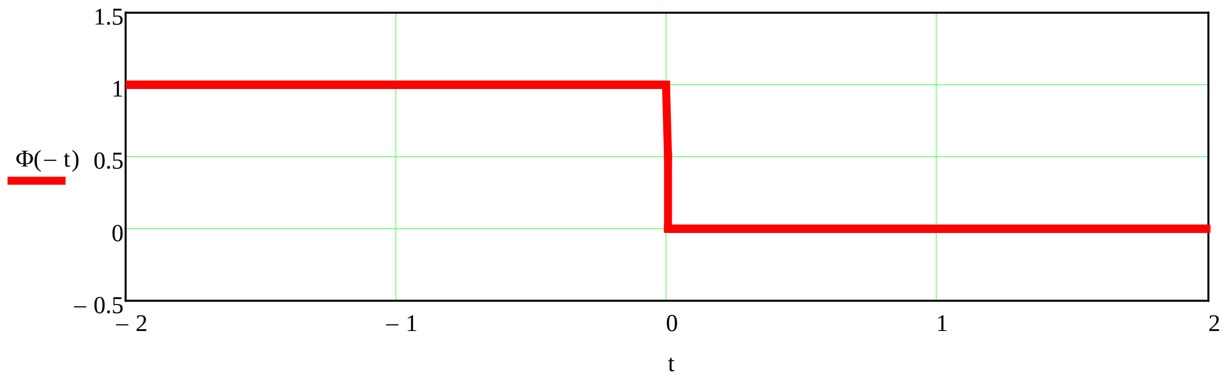


Рис. 1.8 Сигнал 1(-t)

Побудуємо функцію 1(-t) зі зміщенням на t_0 (Рис. 1.9).

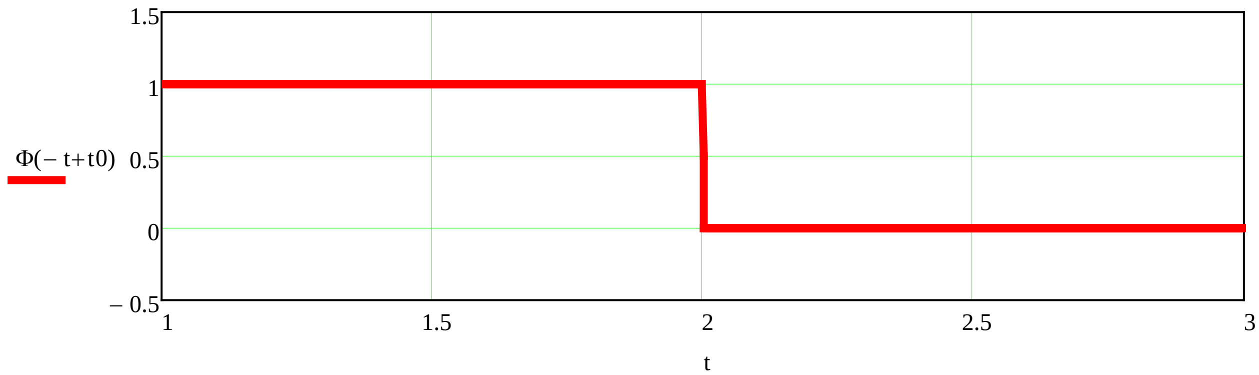


Рис. 1.9 Сигнал $u(t) = 1(-t+t_0)$

2. Записати математичну модель та побудувати графік для центрованого сигналу у вигляді прямокутного імпульсу, тривалість якого $2\cdot\tau$, амплітуда E_m, за допомогою функцій Хевісайда при $\tau = 2$ мкс, $E_m = 2$ В.

Розв’язок

Для побудови прямокутного імпульсу u(t) = $E_m \cdot \mathrm{rect}(\frac{t}{\tau})$ візьмемо різницю функцій Хевісайда: u(t) = $E_m[1(t+\tau) - 1(t-\tau)]$ (Рис. 1.10).

$\tau := 2 \cdot 10^{-6}$ $\quad u(t) := 2\Phi(t+\tau) - 2\Phi(t-\tau)$

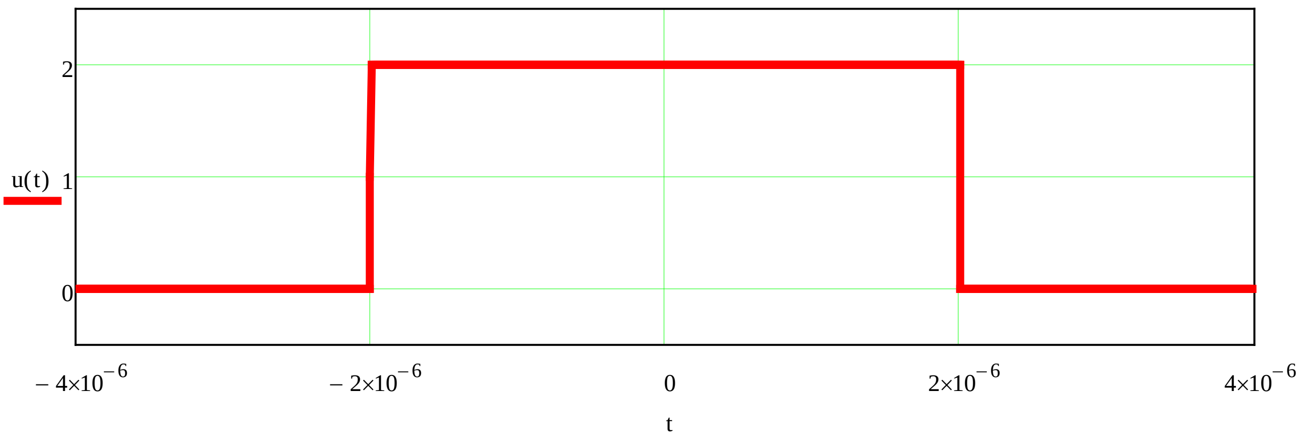


Рис. 1.10 Сигнал u(t) = $E_m \cdot \mathrm{rect}(\frac{t}{\tau})$

3. Записати математичну модель сигналу $u(t) = \frac{\mathrm{sign}(t) - 1}{2}$ за допомогою функції 1(-t) та побудувати її графік.

Розв’язок

Сігнум-функцію представимо наступним чином: sign(t) = -1+2·1(t). Отже, підставимо цей вираз у функцію u(t). Тоді, $u(t) = \frac{-1+2\cdot 1(t)-1}{2} = \frac{-2+2\cdot 1(t)}{2}$ = 1(t) – 1 = -1(-t).

Графік (Рис. 1.11) цієї функції має наступний вигляд.

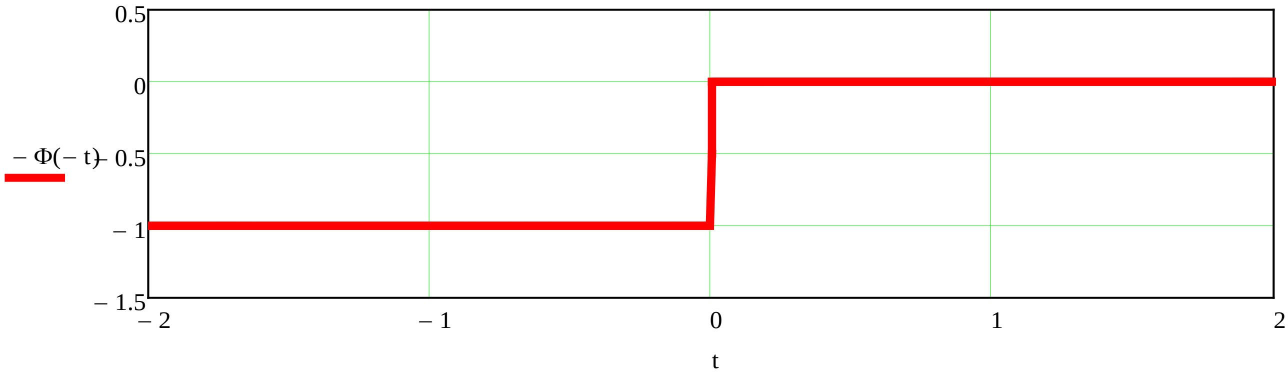


Рис. 1.11 Сигнал u(t) = -1(-t)

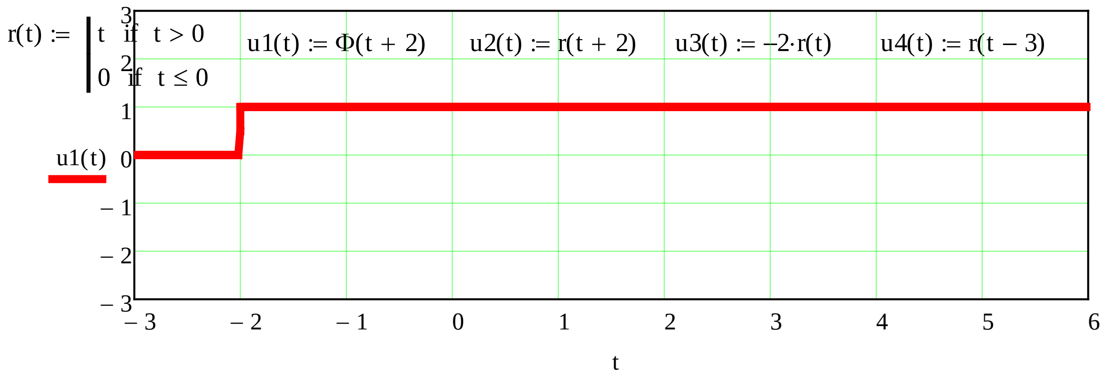
4. Побудувати графік сигналу, якщо його математична модель задана виразом: $u(t) = 1(t+2) + r(t+2) - 2 \cdot r(t) + r(t-3)$.

Розв'язок

Графік сигналу u(t) може бути побудований в програмі Mathcad відразу, але для наочності використаємо функції $1(t+t_0)$, $r(t+t_0)$, $r(t)$, $r(t-t_0)$:

$u_1(t) = 1(t+2)$, $u_2(t) = r(t+2)$, $u_3(t) = -2 \cdot r(t)$, $u_4(t) = r(t-3)$. Покажемо побудову графіка u(t) шляхом послідовного додавання складових сигналу u(t), щоб наочно представити формування математичних моделей сигналів.

На наступних рисунках (Рис. 1.12- 1.15) зображені графіки функцій $u_1(t)$,



$u_2(t)$, $u_3(t)$, $u_4(t)$.

Рис. 1.12 Сигнал $u_1(t) = 1(t+2)$

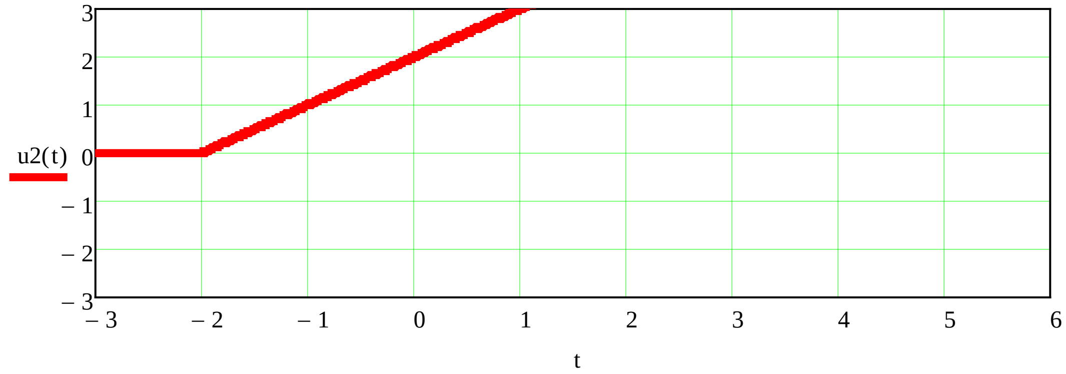


Рис. 1.13 Сигнал $u_2(t) = r(t+2)$

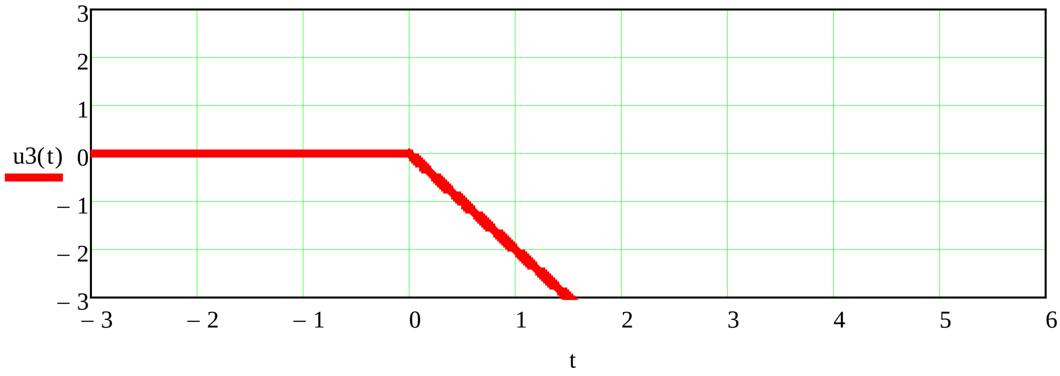


Рис. 1.14 Сигнал $u_3(t) = -2\cdot r(t)$

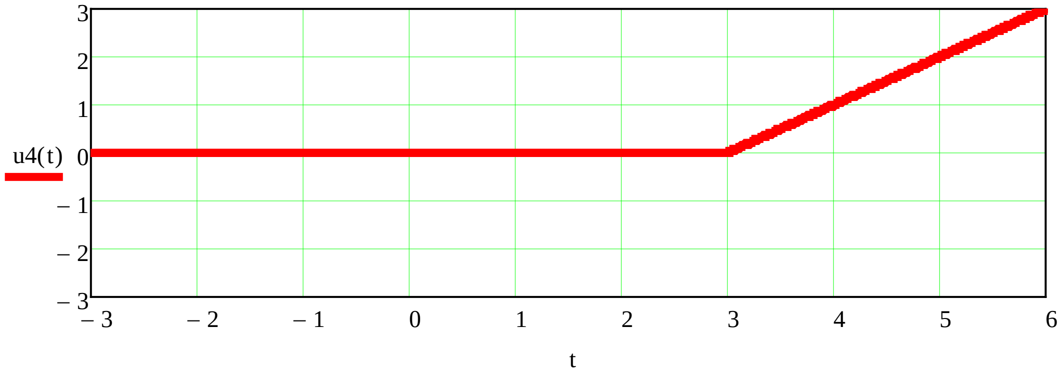


Рис. 1.15 Сигнал $u_4(t) = r(t-3)$

Побудуємо на Рис. 1.16 сигнали $u_1(t)$ та $u_2(t)$.

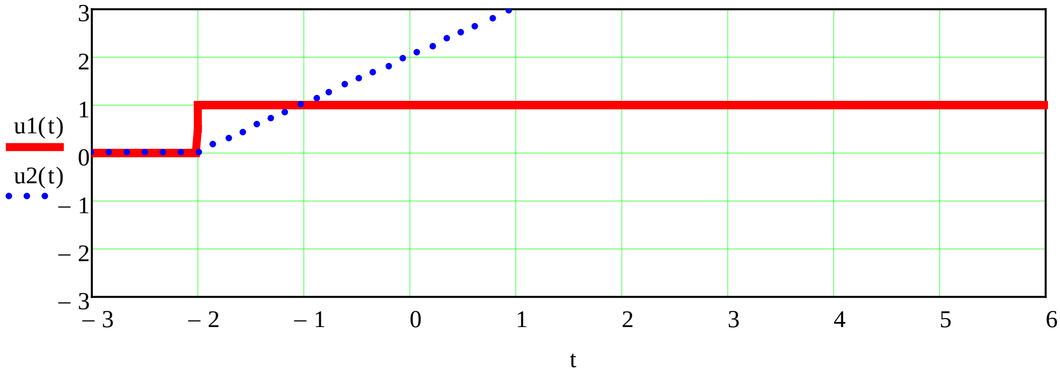


Рис. 1.16 Сигнали $u_1(t)$ та $u_2(t)$

На Рис. 1.17 побудуємо суму сигналів $u_1(t)+u_2(t)$ та сигнал $u_3(t)$.

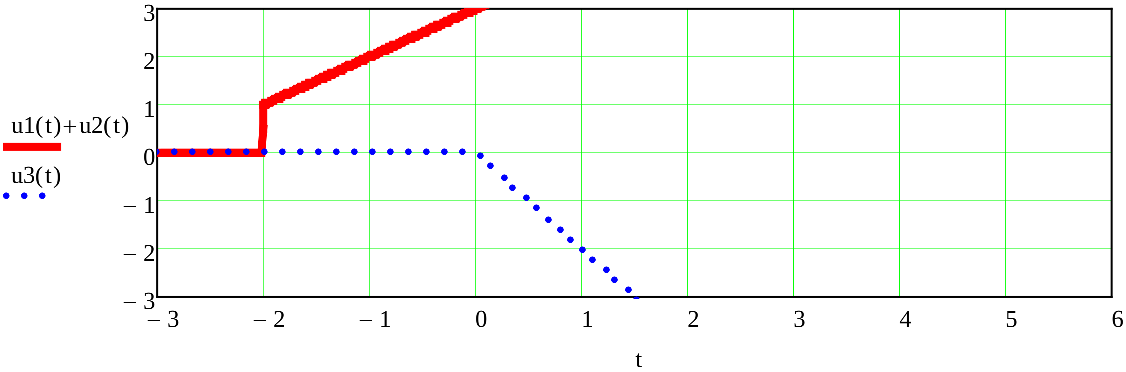


Рис. 1.17 Сигнал $u_1(t)+u_2(t)$ та сигнал $u_3(t)$

Додамо сигнал $u_3(t)$ та покажемо на графіку сигнали $u_1(t)+u_2(t)+u_3(t)$ та $u_4(t)$ (Рис. 1.18).

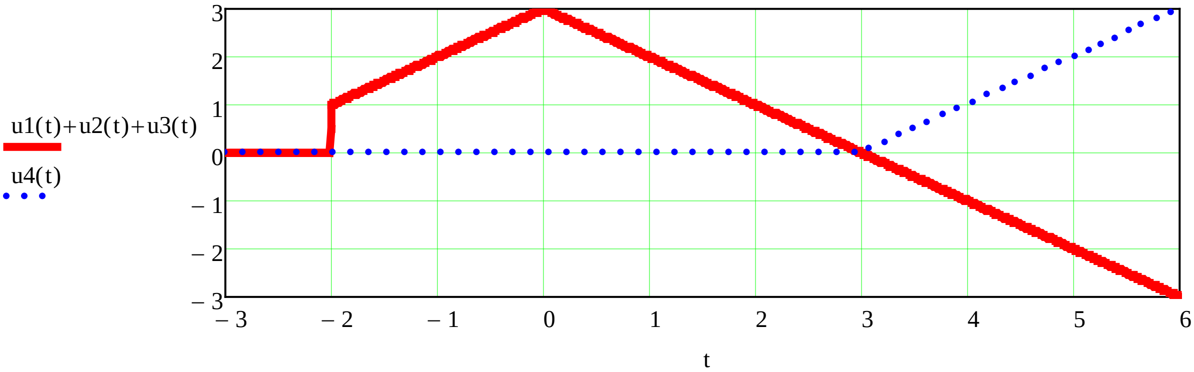


Рис. 1.18 Сигнал $u_1(t)+u_2(t)+u_3(t)$

Додамо сигнал $u_4(t)$ та покажемо це на Рис. 1.19.

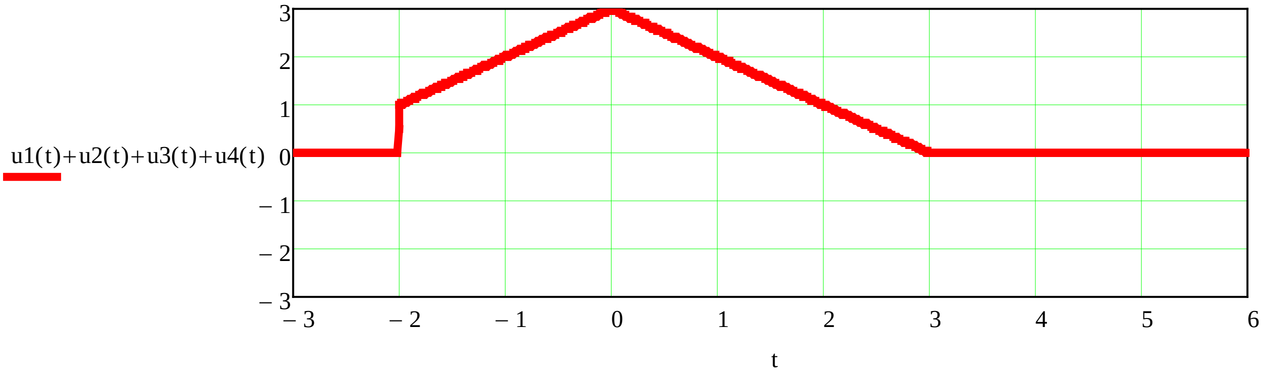


Рис. 1.19 Сигнал $u(t)=u_1(t)+u_2(t)+u_3(t)+u_4(t)$

Отже, ми побудували графік сигналу u(t). Такий підхід до побудови сигналу u(t) використано для того, щоб спростити розв'язок. Обернена задача – знаходження найпростішої математичної моделі сигналу по його графіку.

5. Записати в явному вигляді математичну модель сигналу u(t), який зображено на Рис. 1.20.

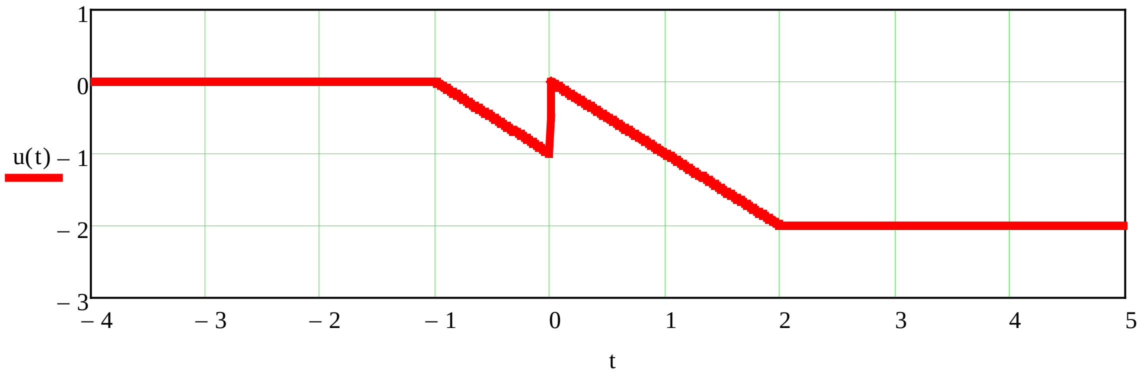


Рис. 1.20 Сигнал u(t)

Розв'язок

При t ≤ -1 функція дорівнює 0, а у точці t = -1 починає змінюватись лінійно, що відповідає функції люфту, з кутовим коефіцієнтом -1 та зміщенням t_0 = -1. Побудуємо графік функції –r(t+1) (Рис. 1.21):

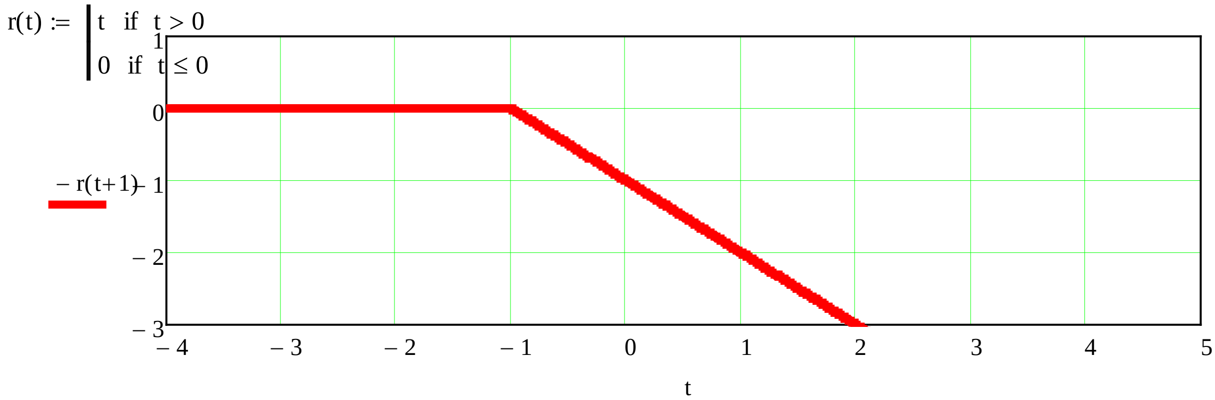


Рис. 1.21 Графік функції –r(t+1)

У точці t=0 значення функція u(t) стрибком збільшується на 1, що відповідає додаванню функції 1(t). Побудуємо графік функції –r(t+1) + 1(t) (див. Рис.1.22)

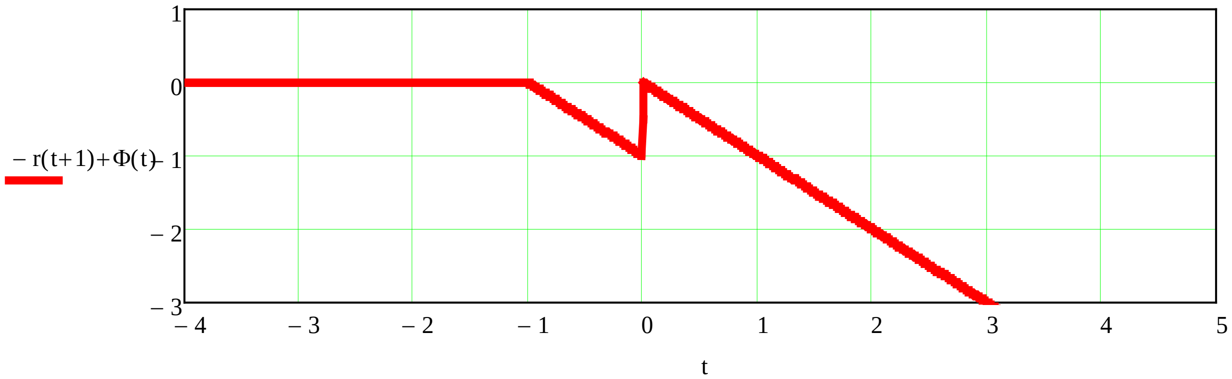


Рис. 1.22 Графік функції –r(t+1)+1(t)

При t>2 – значення сигналу u(t) не змінюється, тому для компенсації дії лінійно падаючої ділянки необхідно у момент часу t = 2 додати функцію r(t-2). В результаті ми отримаємо графік сигналу u(t) (Рис. 1.23):

$u(t) := \Phi(t) - r(t+1) + r(t-2)$

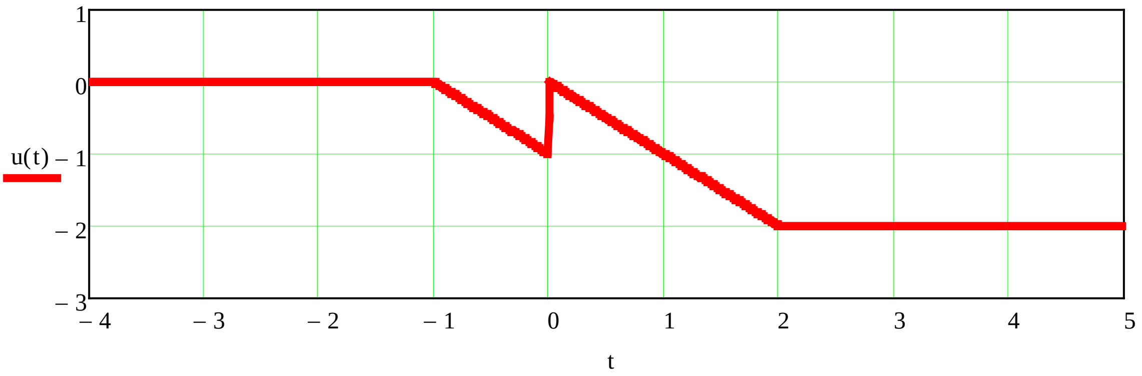


Рис. 1.23 Графік сигналу u(t)

3. ЗАДАЧІ

У всіх завданнях, де потрібно знайти математичні моделі сигналів, які подані на графіках, потрібно перевірити їх правильність, побудувавши графіки сигналів у середовищі Mathcad.

1. Спростити математичну модель сигналу

$u(t) = (1{,}5 \cdot r(t+10) - 5 \cdot sign(t+7) + 2 + 4{,}3 \cdot 1(t+3) + r(t) - 1(t-5) + \cos(\pi/4)) \cdot \delta(t-1)$.

2. Побудувати графік сигналу, якщо його математична модель задана виразом: $u(t) = -5 \cdot sign(t-3)$.

3. Задано математичну модель сигналу: $u(t) = 3 \cdot sign(t+1) - 2 \cdot r(t) + 1(t-2)$.

Знайти:

а) $\int_{1}^{100} u(t) \cdot \delta(t-3) dt$;

б) $\int_{-100}^{1} u(t) \cdot \delta(t-3) dt$;

в) $\int_{-\infty}^{+\infty} u(t) \cdot \delta(t-3) dt$.

4. Побудувати графік сигналу, якщо його математична модель задана

виразом: $u(t) = 1(t-1)+2\cdot 1(t-3)-5\cdot 1(t-3)$. Знайти $u(t)$ при $t = 3$.

5. Яка буде тривалість сигналу у вигляді прямокутного імпульсу, який задано математичною моделлю: $u(t) = 1(t-1)-1(t-4,5)$?

6. Побудувати графік сигналу, якщо його математична модель задана виразом: $u(t) = \cos(\omega\cdot t+\pi/2)+\sin(\omega\cdot t)$, при $\omega = 10^6$ рад/с; $t \in [0;12]$.

7. Побудувати графік сигналу, якщо його математична модель задана виразом: $u(t) = 2\cdot r(t+2) - 3\cdot 1(t+2) + 5\cdot 1(t-3) - \mathrm{sign}(t-3) – 2\cdot r(t-4)$.

8. Для сигналу $u(t)$, осцилограму якого зображено на Рис. 1.24, записати математичну модель у явному вигляді.

9. Записати вираз для математичної моделі сигналу $u_1(t)$, зображеного на (Рис. 1.25), виразивши її за допомогою функції $u(t)$, яка була визначена у задачі 8, а також у явному вигляді.

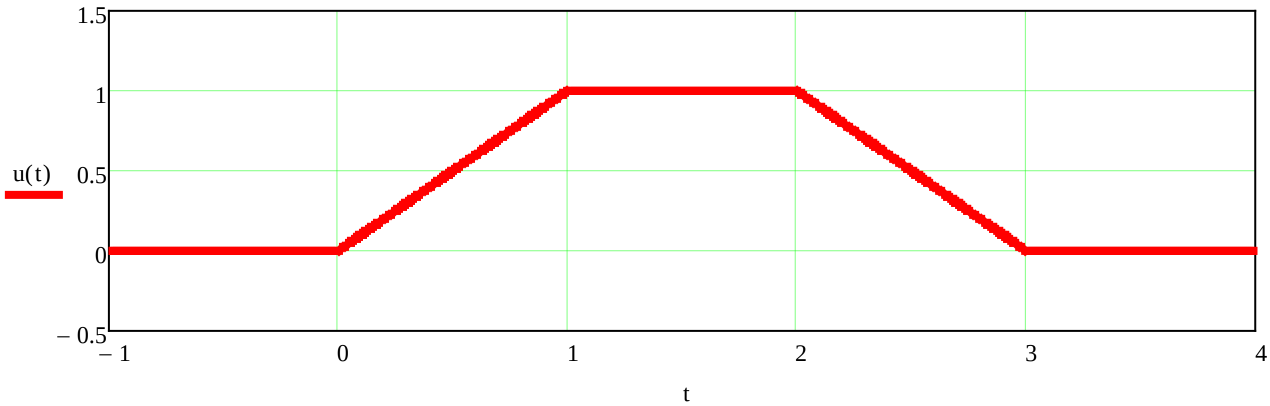


Рис. 1.24 Сигнал u(t)

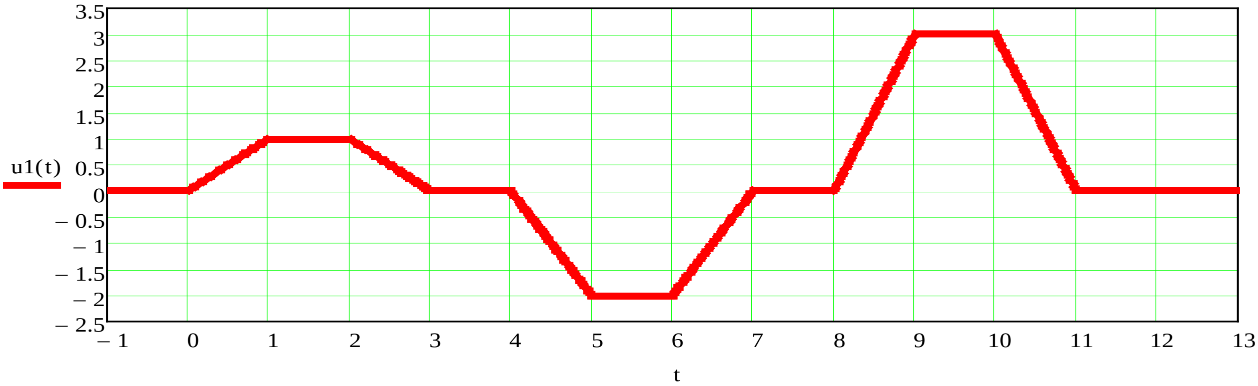


Рис. 1.25 Сигнал $u_1(t)$

10. Побудувати графік за заданою математичною моделлю сигналу $u(t) = 3\cdot\cos(\omega\cdot t+\pi/6)$, при $\omega = 10^6$ рад/с; $t \in [-10;10]$. Записати математичну модель сигналу $u_1(t)$, у якого амплітуда більша в два рази, період менший в чотири рази та фаза збільшена на 15 градусів порівняно з сигналом $u(t)$, та зобразити $u_1(t)$ на одному графіку з $u(t)$.

11. Представити математичну модель сигналу $u(t) = \mathrm{sign}(t)+1(t)+1(-t)$ графічно та спростити вираз для математичної моделі заданого сигналу.

12. Побудувати математичну модель та графік сигналу $u(t)$ у вигляді трикутника, координати вершин якого (2;0), (4;5), (7;0).

13. Як буде виглядати графік сигналу, який є різницею сигналу у вигляді прямокутного імпульсу з амплітудою 5, який розпочинається у точці $t = 2$, а закінчується у точці $t = 7$, та сигналу у вигляді трикутника з попередньої задачі? Побудувати графік сигналу у середовищі Mathcad.

14. Як виразити функцію люфту через функцію Хевісайда?

15. Побудувати графік сигналу, якщо його математична модель задана виразом: $u(t) = 1(t-1) + r(t-2)-3\cdot 1(t-3)+2\cdot 1(t-4)-r(t-5)$.

Записати в явному вигляді математичні моделі сигналів $u_1(t)$ – $u_{10}(t)$, які зображено на Рис. 1.28 – 1.37:

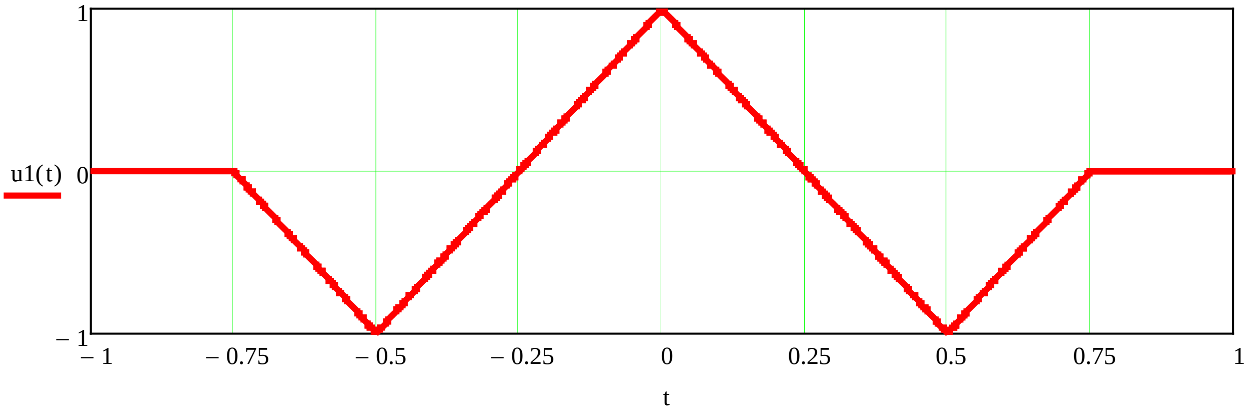


Рис. 1.28 Сигнал $u_1(t)$

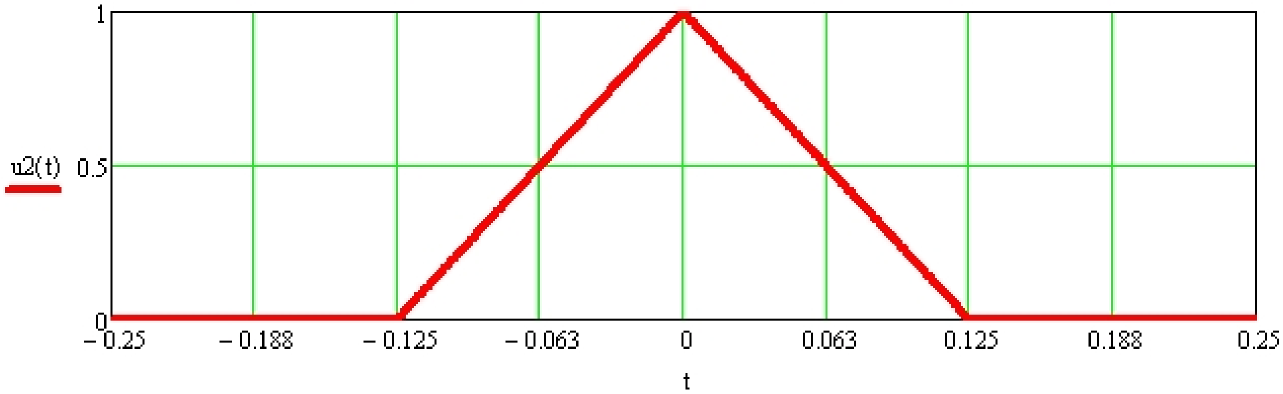


Рис. 1.29 Сигнал $u_2(t)$

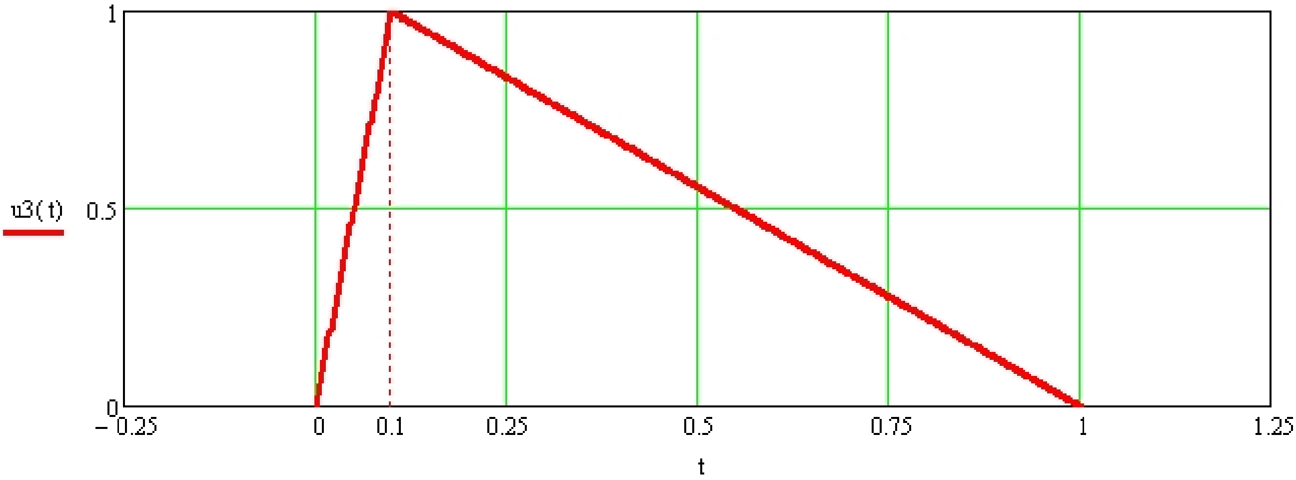


Рис. 1.30 Сигнал $u_3(t)$

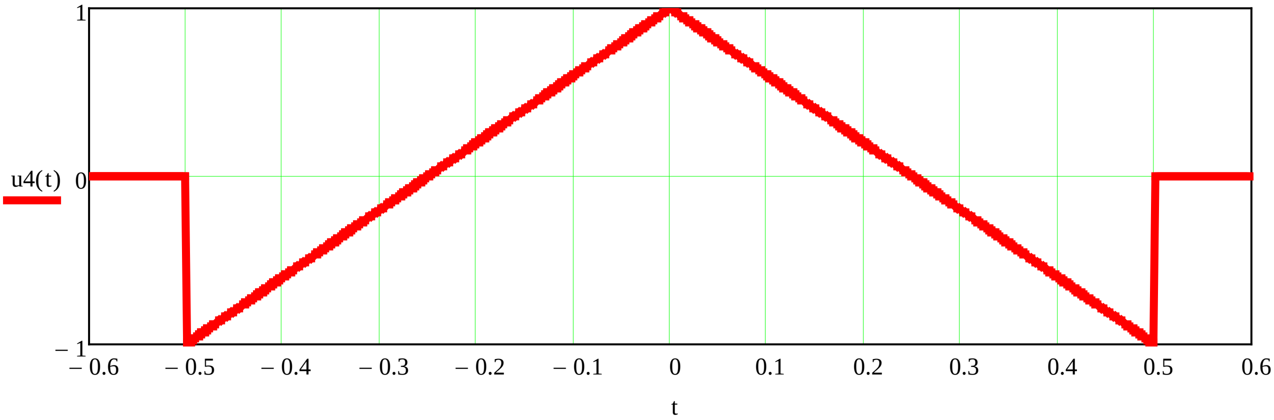


Рис. 1.31 Сигнал $u_4(t)$

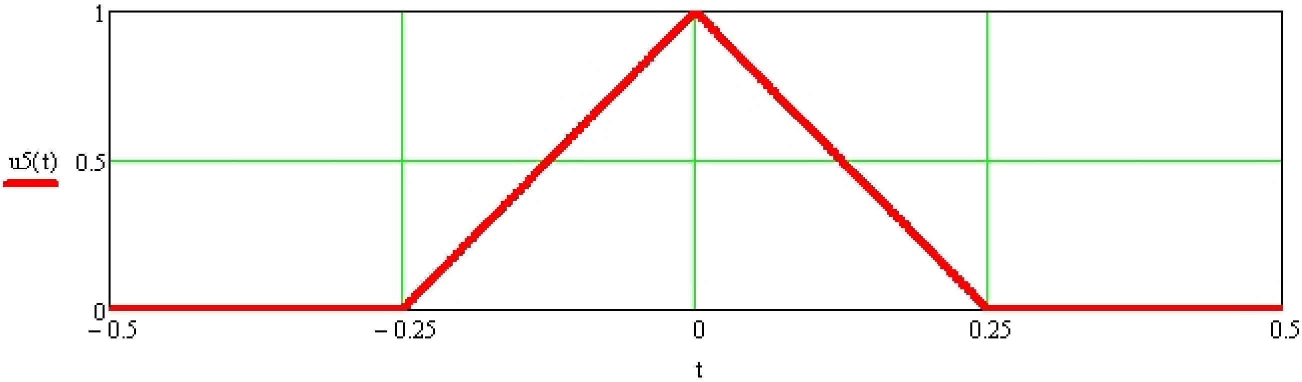


Рис. 1.32 Сигнал $u_5(t)$

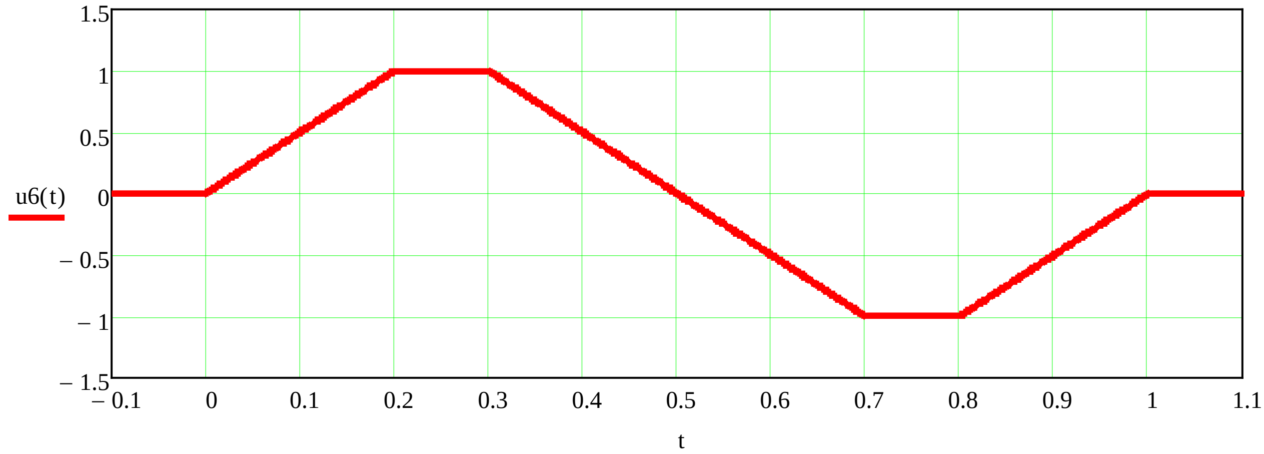


Рис. 1.33 Сигнал $u_6(t)$

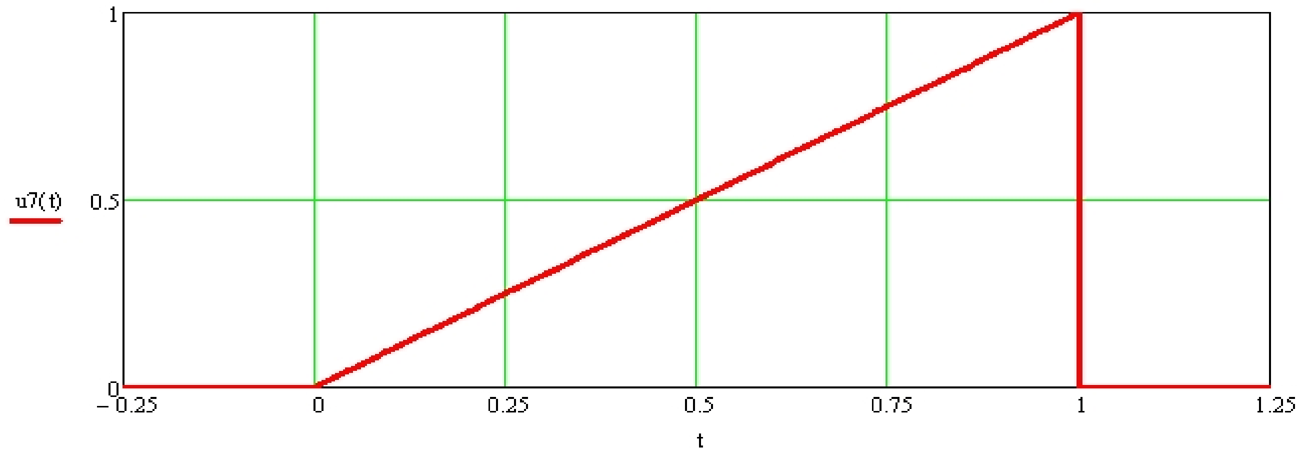


Рис. 1.34 Сигнал $u_7(t)$

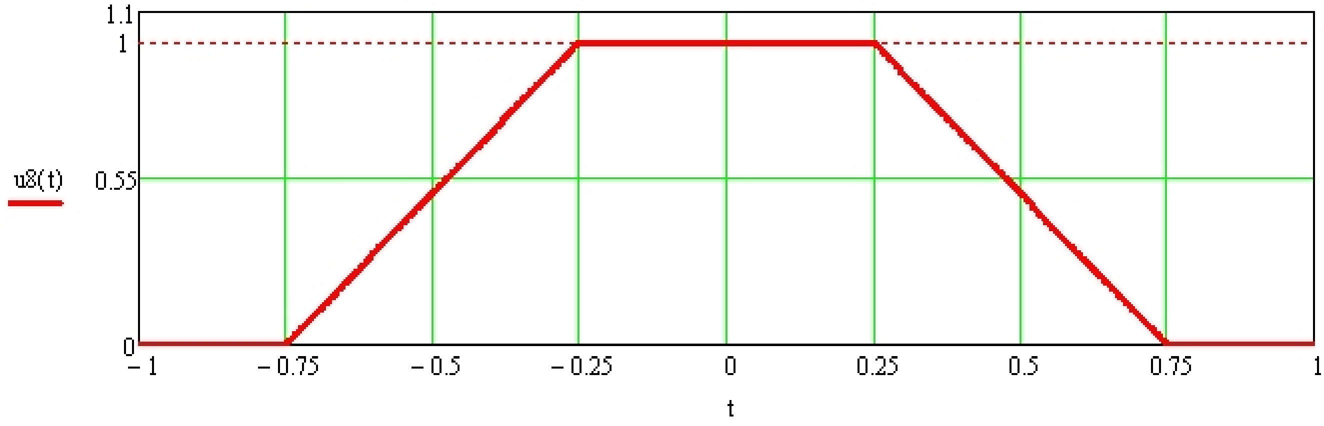


Рис. 1.35 Сигнал $u_8(t)$

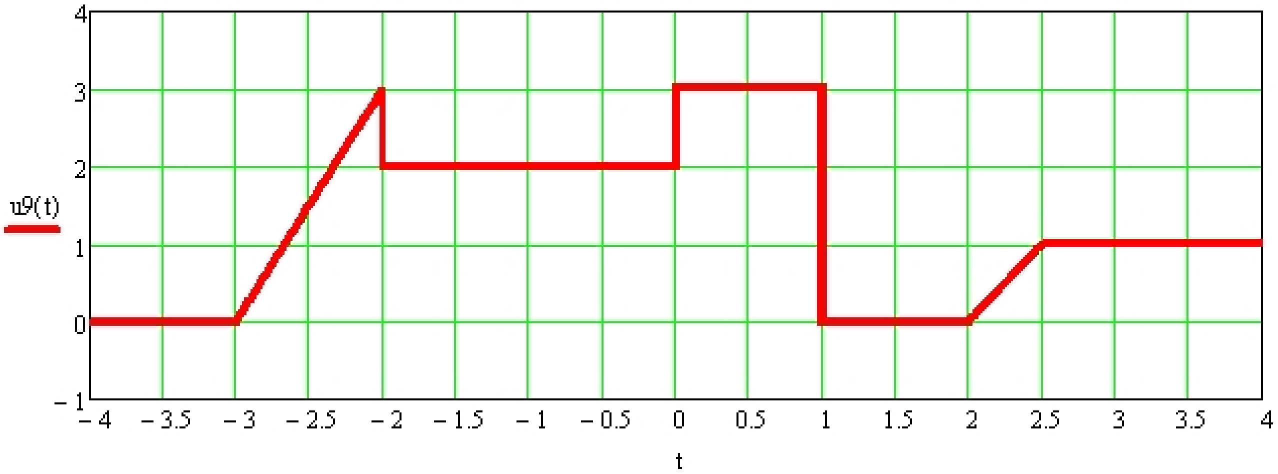


Рис. 1.36 Сигнал $u_9(t)$

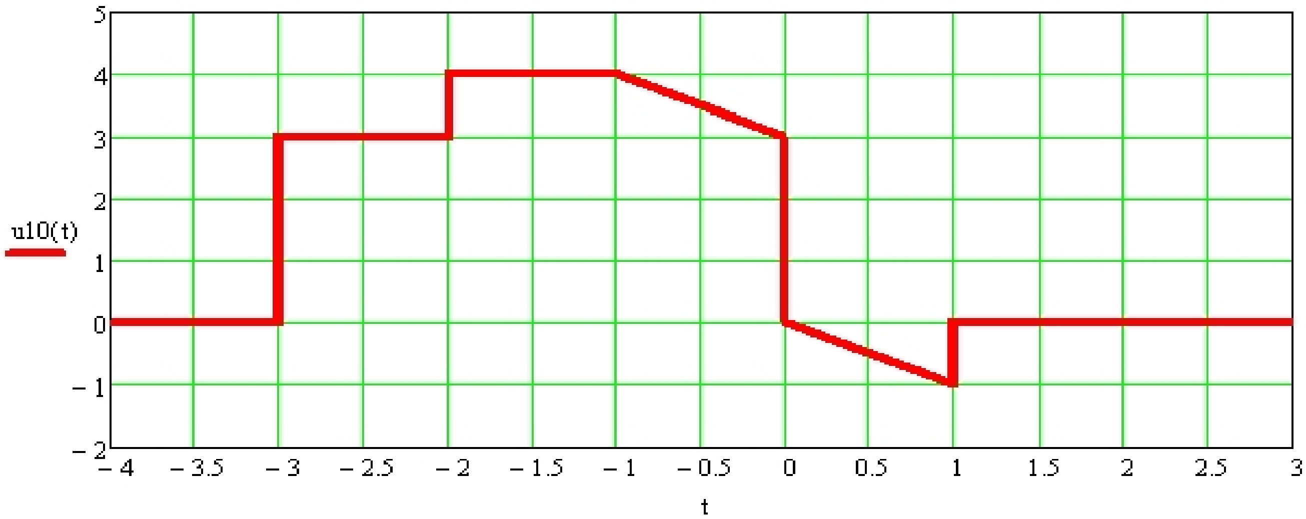


Рис. 1.37 Сигнал $u_{10}(t)$

16. Записати в явному вигляді математичну модель функції Уолша wal(2,θ) (Рис. 1.38).

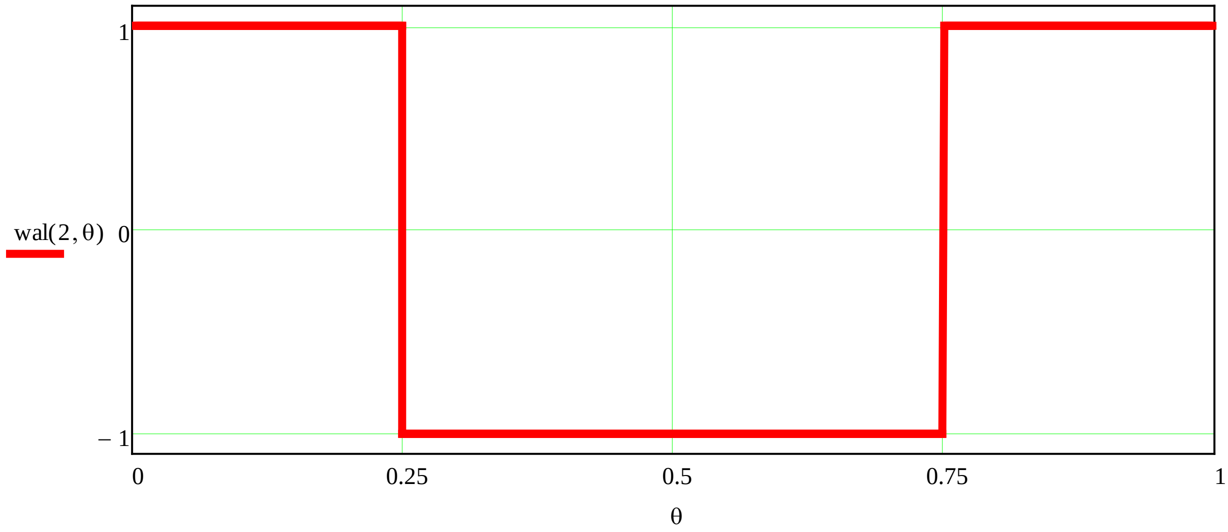


Рис. 1.38 Функція Уолша wal(2,θ)

17. Записати в явному вигляді математичну модель функції Хаара har(1,2,θ) (Рис. 1.39).

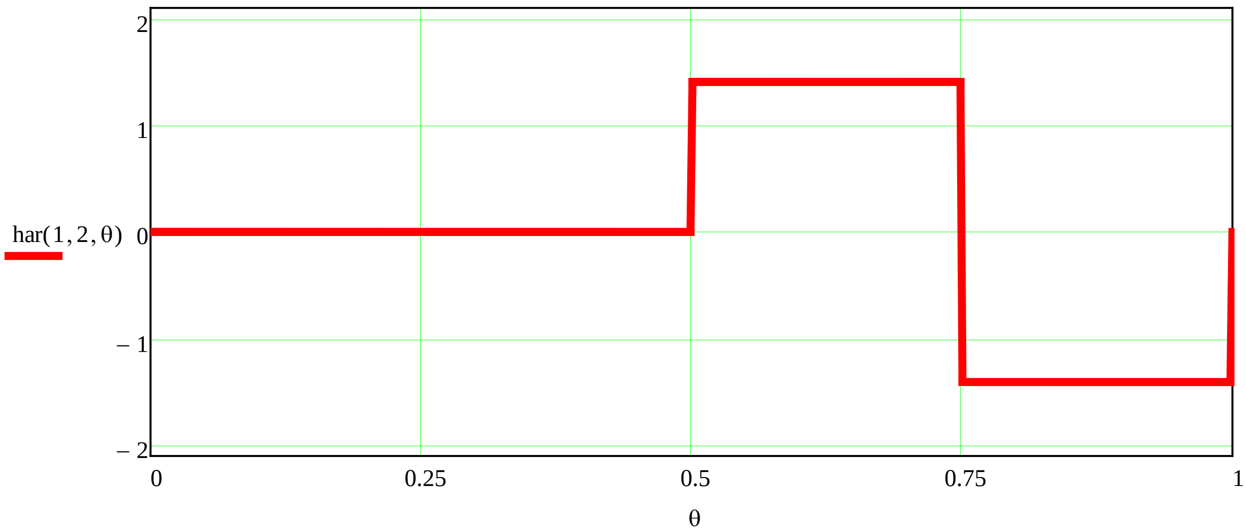


Рис. 1.39 Функція Хаара har(1,2,θ)

18. Записати в явному вигляді математичну модель функції Радемахера rad(1,θ) (Рис. 1.40).

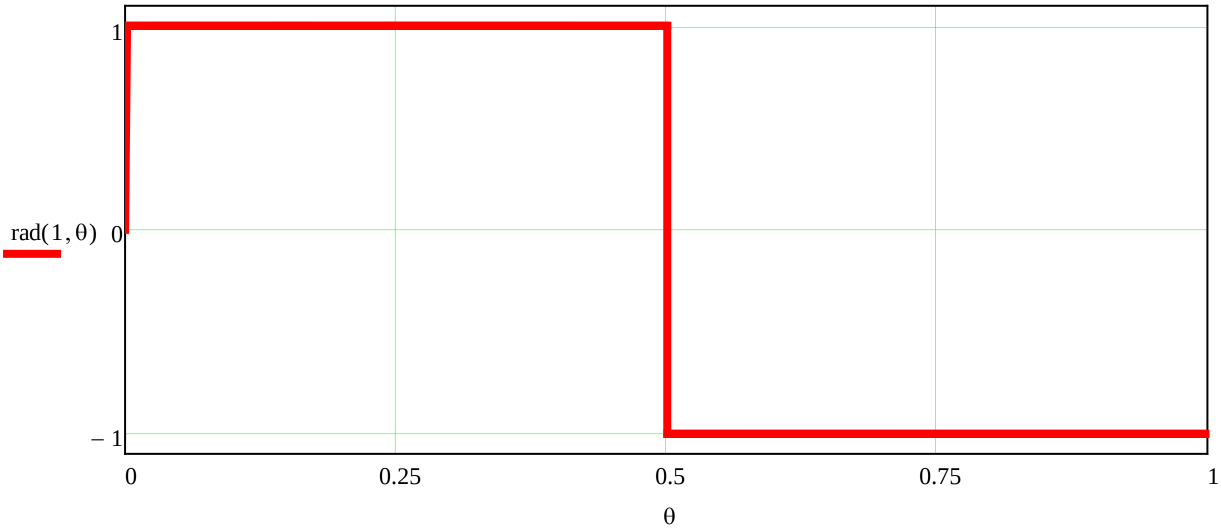


Рис. 1.40 Функція Радемахера rad(1,θ)

19. Записати в явному вигляді математичну модель функції rad(3,θ) (Уолша) (Рис. 1.41).

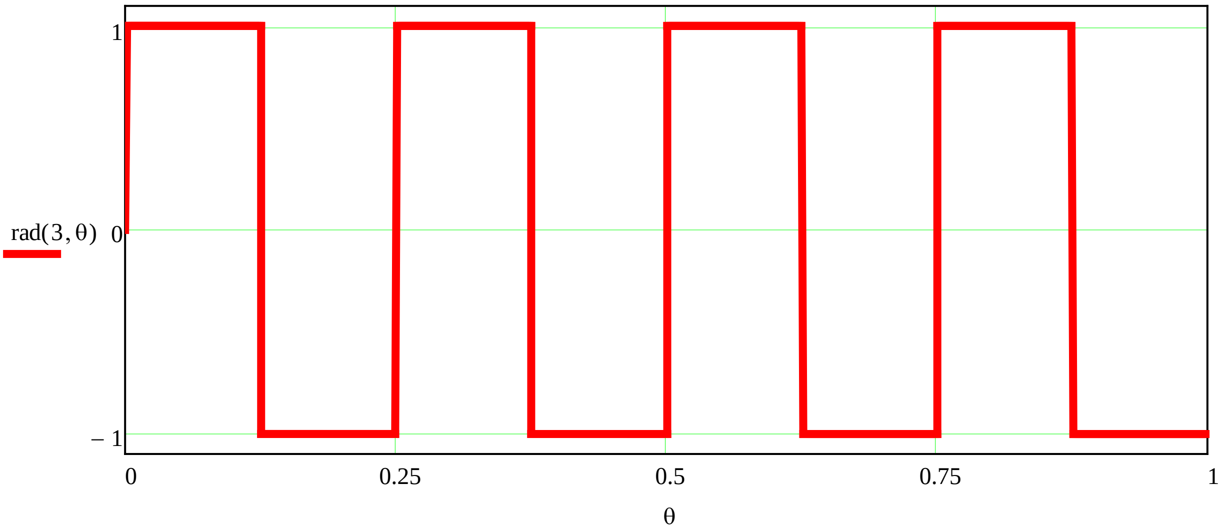


Рис. 1.41 Функція Радемахера rad(3,θ)

ЛІТЕРАТУРНІ ДЖЕРЕЛА

1. Баскаков, С. И. Радиотехнические цепи и сигналы [Текст] / С. И. Баскаков. – М. : Высшая школа, 1983. – 448 с.
2. Баскаков, С. И. Радиотехнические цепи и сигналы. Руководство к решению задач [Текст] / С. И. Баскаков .– М. : Высшая школа, 1987. – 448 с. – 213 с.
3. Гоноровский, И. С. Радиотехнические цепи и сигналы [Текст] / И. С. Гоноровский. – М. : Радио и связь, 1986. – 721 с.
4. Гоноровский, И. С. Радиотехнические цепи и сигналы. Примеры и задачи [Текст] / И. С. Гоноровский. – М. : Радио и связь, 1986. – 248 с.
5. Каганов, В. И. Радиотехника + Компьютеры + Mathcad. [Текст] / В. И. Каганов. – М. : Горячая линия телеком, 2001. – 416 с.
6. Кущ, С.Н. Сигнали та спектри. Методичні вказівки до лабораторного практикуму. Для студентів напрямку «Інформаційна безпека» \ С.Н. Кущ, Ю.Л. Новоборський, Ф.М. Репа, В.П. Смирнов. – К. : ІВЦ «Політехніка», 2006. – 76 с.