

ПРОБЛЕМА ТЕМНОЇ РЕЧОВИНИ І ПОПРАВКИ ЗА КРИВИНОЮ У ТЕОРІЇ ГРАВІТАЦІЇ

П. О. Наказной^a, Т. Л. Завертаний^б

Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут»

Анотація

Розглядаються основні спроби узагальнень рівнянь гравітаційного поля для задовільного опису спостереження темної речовини без залучення гіпотези про темну речовину. Сформульовані лагранжеві та нелагранжеві способи узагальнень, що враховують поправки за кривиною. В рамках нелагранжевих узагальнень отримані рівняння для гравітаційного потенціалу та ефективного прискорення частинки у гравітаційному полі із врахуванням взаємодії з вакуумом.

Ключові слова: темна енергія, темна матерія, рівняння Айнштейна, модифіковані теорії гравітації, криві обертають галактик

1. Проблема темної речовини

Загальна теорія відносності (ЗТВ), як теоретична основа сучасних досліджень Всесвіту, має численні підтвердження у астрофізичних спостереженнях та узгоджується у ньютонівській границі із класичною механікою. Однак, для задовільного опису астрофізичних даних, слід припустити існування, так званих, темної матерії та темної енергії, причому темна речовина повинна складати сумарно приблизно 96% речовини у Всесвіті [1]. Зокрема, для опису кривих обертають галактик, гравітаційного лінзування, спостереження анізотропії реліктового випромінювання (Нобелівська премія 2006 року) слід ввести темну матерію, яка не взаємодіє зі звичайною речовиною жодним чином окрім гравітаційної взаємодії. Вона локалізується у вигляді гало навколо видимих частин галактики та призводить до того що швидкість обертають навколо центру галактики не спадає з відстанню до її центра а залишається постійною або повільно зростає до відстаней порядку 10 – 20 видимих радіусів галактики. Для опису спостережень над надновими, з яких випливає сучасне прискорене розширення Всесвіту (Нобелівська премія 2011 року), до рівнянь Фрідмана, які впливають у ЗТВ для масштабного фактору однорідного та ізотропного Всесвіту, слід ввести, так звану, космологічну сталу (Λ -член), яка за своїм сенсом повинна бути сталою або слабо залежною у просторі та часі густиною деякої речовини, так званої темної енергії [2]. Оскільки темна енергія повинна рівномірно заповнювати Всесвіт та мати сталу у часі густину енергії, її зв'язують із густиною енергії фізичного вакууму — основного стану квантових полів, оскільки, з умови лоренц-інваріантності, дана величина повинна бути сталою

у вакуумі

$$\varepsilon^{\text{vac}} \equiv \lambda = \text{const} \quad (1)$$

та відповідати рівнянню стану $p^{\text{vac}} = -\varepsilon^{\text{vac}} = -\lambda$.

Однак, незважаючи на задовільне пояснення спостережуваних даних за допомогою феноменологічного введення темної речовини, залишається невідомою її мікроскопічна природа. Більш того, стандартна модель фізики елементарних частинок не містить в собі кандидата на роль носія темної матерії, а сучасна квантова теорія поля, яка є теоретичним підґрунтям для фізики високих енергій, не може пояснити значення густини енергії вакууму, необхідне для того, щоб з нею можна було зв'язати темну енергію [2]. Тому пояснення природи темної речовини повинно відбуватись за межами відомих теорій та неминуче призведе до відкриття нової фізики.

Спроби мікроскопічної інтерпретації темної речовини сьогодні просуваються, в основному, в двох напрямках. З одного боку, якщо припустити існування темної речовини, слід модифікувати стандартну модель фізики елементарних частинок та квантову теорію поля. Це відбувається за рахунок додавання нових частинок, існування яких, в свою чергу, можна обґрунтувати в рамках нових квантово-польових моделей, які засновані на високорозмірних калібрувальних групах симетрії. Найбільш поширеними є суперсиметричні теорії із механізмами порушення симетрії, що необхідні для пояснення неспостереження суперсиметрії на макроскопічних масштабах, що відсують за результатами спостережень відповідний енергетичний масштаб все вище й вище.

2. Модифіковані теорії гравітації

В іншому підході припускається, що ефекти з якими зв'язують темну речовину, можна пояснити шляхом модифікації теорії гравітації, яка використовується як теоретична парадигма для опису астрофізи-

^aPavel.Nakaznoy@gmail.com

^бTarasZavertanyy@gmail.com

чних та космологічних спостережень. Зокрема, модифікація польових рівнянь може принципово призводити до модифікації рівнянь руху (від яких залежить обробка спостережень темної матерії) та рівнянь для масштабного фактору (які використовуються при вивченні ефекту темної енергії). Серед таких теорій MOND, $F(R)$ -гравітація, нелагранжева гравітація тощо.

Останнім часом особливу увагу приділяється теоріям у яких враховуються поправки за кривиною простору-часу, які інтерпретуються як відгук вакууму на своє викривлення [3]. Дійсно, якщо речовина викривлює простір у якому знаходиться, то логічно припустити що й характеристики вакууму, який також міститься у цьому просторі, також змінюються, тобто вакуум «відгукується» на своє викривлення і протидіє своєму викривленню впливаючи на речовину. Ця ідея Сахарова, висловлена ним ще у 1967 році [4], довгі роки вважалась цікавою гіпотезою, яка не має відношення до спостережень і лише зараз на неї починають дивитись як на джерело нових ідей у теорії гравітації. Перші кроки до її розвитку були зроблені Гінзбургом із співавторами, які у 1971 році показали що у напівкласичному підході до теорії гравітації, коли оператори у рівняннях Айнштейна замінюються на свої середні за вакуумним станом, у рівняннях Айнштейна виникають поправки за кривиною простору-часу [5]. Згодом Машкевіч, вивчаючи ці поправки, показав що вони призводять до утворення ефективного тензора енергії-імпульсу, властивості якого можуть суттєво відрізнитись від «справжнього» вакуумного тензора і ввів поняття про так званий механізм самокомпенсації [6].

Розрізняють, так звані, лагранжеві та нелагранжеві узагальнення, що розрізняються за способом модифікації рівнянь Айнштейна. Перший спосіб модифікації за рахунок врахування поправок за кривиною є так звана $F(R)$ -гравітація та споріднені з нею теорії ([3], [7], [8]). У стандартній схемі цієї теорії стандартний лагранжіан гравітаційного поля Гільберта-Айнштейна замінюється на деяку функцію $F(R)$ від скаляра Річчі, яка, або розраховується у високорозмірних теоріях гравітації типу теорії струн, або обирається феноменологічно:

$$S_{\text{gf}} \sim \int (R + 2\Lambda) \sqrt{-g} d^4x \Rightarrow \int F(R) \sqrt{-g} d^4x.$$

Ця теорія є лагранжевою, оскільки рівняння гравітаційного поля отримуються шляхом варіювання повної дії для гравітаційного поля та матерії.

Інший спосіб модифікації рівнянь гравітаційного поля полягає у безпосередньому врахуванні поправок за кривиною до тензору енергії-імпульсу вакууму. Він започаткований Фомінін: у 1973 році в рамках сформульованої ним концепції квантового народження Всесвіту було показано що у рівняннях Айнштейна слід врахувати тензор енергії-імпульсу вакууму, що залежить від скаляру Річчі кривини простору-часу [9].

Для задовільного опису спостережуваних даних у 2005 році Вільчинським, Наказним та Фомінін

була розглянута лінійна модельна залежність тензору енергії-імпульсу вакууму від скаляру Річчі R та розглянуті її космологічні властивості [10]:

$$T_{ik}^{\text{vac}}(R) = \frac{1}{\varkappa} (\Lambda_0 - kR) g_{ik}, \quad \varkappa = \frac{8\pi G}{c^4}, \quad (2)$$

де Λ_0 та k — параметри теорії що мають сенс, відповідно, власної кривини та «пружності» простору-часу. Дана залежність також якісно описує зменшення густини енергії вакууму в процесі еволюції Всесвіту, що впливає з вивчення фазових переходів у ранньому Всесвіті [2]. Тому, для узгодження із спостережуваними даними, оскільки $R < 0$, зрозуміло що $k > 0$ причому $k \ll 1$, а Λ_0 порівняне із спостережуваним значенням космологічної сталої $\Lambda \sim 10^{28}$ см.

Необхідність врахування, так званих, локальних тестів для теорії призвела до формулювання Наказним у 2008 році концепції тензора енергії-імпульсу вакууму як деякої функції від скаляру Річчі [11]:

$$T_{ik}^{\text{vac}} = \frac{1}{\varkappa} \Lambda(R) g_{ik} \quad (3)$$

де $\Lambda(R)$ — деяка функція. В цьому підході лінійна модель (2) розглядається як лінійне наближення, що застосовне до задач, в яких фігурує мале значення густини матерії та можна знехтувати наступними степенями у розкладі за R , наприклад, до вивчення еволюції Всесвіту та динаміки галактик.

Таким чином, рівняння Айнштейна безпосередньо не змінюються, але окрім звичайної матерії в них слід враховувати наявність поправок за кривиною до тензора енергії-імпульсу вакууму, на відміну від (1). Очевидно, що дана теорія є нелагранжевою, оскільки тензор енергії-імпульсу у канонічному формулюванні є варіаційною похідною від відповідної лагранжевої густини:

$$T^{ik} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathfrak{L})}{\delta g_{ik}},$$

а довільну функцію не можна представити як похідну від іншої функції. Ця обставина узгоджується із результатами Машкевіча [6] та вказує на неповноту теорії вакууму або неможливість її застосування, внаслідок чого ми не можемо провести повний самоузгоджений розрахунок тензора енергії-імпульсу виходячи із квантово-польових теорій фундаментальних взаємодій. Подібна ситуація виникає у класичній механіці при врахуванні неголономних зв'язків, наприклад сили тертя, в результаті чого для опису таких систем відмовляються від поняття потенціалу та застосовують метод множників Лагранжа.

Таким чином, основним предметом дослідження модифікованих теорій гравітації із поправками за кривиною є теоретичний аналіз моделі, в якій тензор енергії-імпульсу матерії вважається залежним від кривини простору-часу, що розглядається як наслідок на її викривлення. В рамках даних теорій потрібно не лише спробувати описати спостережувані дані без залучення гіпотези про темну речовину, але й переконатись що локальні тести зберігають існуючі експериментальні обмеження на відхилення

від стандартної ЗТВ, зокрема узгоджуються у ньютонівській границі із класичною механікою. Необхідно підкреслити, що вивчення узагальнених теорій гравітації має також й самостійну непересічну користь, оскільки часто дозволяє краще зрозуміти ЗТВ, ще раз усвідомити її визначне місце серед широкого загалу навіть метричних гравітаційних теорій і зрозуміти де слід шукати нові напрямки узагальнень і методи спостережень для її тестування.

В даній роботі розглядаються окремі питання не-лагранжевої теорії гравітації з поправками за кривиною (3).

3. Рівняння для гравітаційного потенціалу

Рівняння Айнштайна

$$R_{ik} - \frac{1}{2} R g_{ik} = \kappa T_{ik} + \Lambda g_{ik},$$

де $\Lambda \equiv \kappa T_{ik}^{\text{vac}}$ для моделі (3) набувають вигляд:

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R = \kappa T_{ik} + \Lambda(R) g_{ik}. \quad (4)$$

Згортка даного рівняння дає:

$$-R = \kappa T + 4\Lambda(R). \quad (5)$$

Оскільки у ньютонівському наближенні

$$T_0^0 = T = \rho c^2, \quad R_0^0 = \frac{1}{c^2} \Delta\varphi,$$

де ρ — густина матерії, φ — гравітаційний потенціал, враховуючи (5), з (4) отримаємо:

$$\Delta\varphi = 4\pi G\rho - c^2 \Lambda(R(\rho)). \quad (6)$$

Дане рівняння містить у порівнянні із рівнянням Пуассона додатковий член $c^2 \Lambda$, явний вигляд якого можна знайти з розв'язку алгебраїчного рівняння (5) з урахуванням що $T = \rho c^2$. Його наявність в рівнянні для гравітаційного потенціалу призводить, у загальному випадку, до розбіжності із ньютонівською механікою. Покажемо, що ця розбіжність буде неістотна для лінійної моделі (2). Рівняння (5) в даному випадку перетворюється на лінійне відносно R , тому

$$\begin{aligned} R &= -(\theta T + 4\theta \Lambda_0), \\ \Lambda &= \Lambda_0 + \kappa \theta T + 4\theta \Lambda_0, \end{aligned} \quad (7)$$

де

$$\theta = \frac{k}{1-4k}.$$

У підсумку рівняння для гравітаційного потенціалу (6) набуває вигляду:

$$\Delta\varphi = 4\pi G \frac{1-6k}{1-4k} \rho - \frac{c^2}{1-4k} \Lambda_0. \quad (8)$$

Отримане рівняння еквівалентне рівнянню Пуассона за рахунок перенормування гравітаційної сталої G , а також того, що сталий доданок буде неістотним, якщо Λ_0 порівняне із спостережуваним значенням космологічної сталої $\Lambda \sim 10^{28}$ см.

Розглянемо також квадратичну модель залежності $\Lambda(R)$:

$$\Lambda(R) = \Lambda_0 - \alpha R - \beta R^2, \quad (9)$$

де $\alpha > 0$ та $\beta > 0$, якщо $R < 0$. Рівняння (5) набуває вигляд квадратичного за R :

$$4\beta R^2 - (1 - 4\alpha)R - (\kappa T + 4\Lambda_0) = 0.$$

Обираючи знак перед квадратним коренем у його розв'язку так так щоб отримати $R < 0$ отримаємо:

$$R = \frac{1}{8\beta} (1 - 4\alpha - f) \quad (10)$$

$$\Lambda(R) = -\frac{1}{32\beta} (1 - 4\alpha - f + 8\beta\kappa T),$$

де

$$f = \sqrt{(1 - 4\alpha)^2 + 16\beta(4\Lambda_0 + \kappa T)}.$$

Таким чином, рівняння для гравітаційного потенціалу (6) буде наступним:

$$\Delta\varphi = 4\pi G\rho + \frac{c^2}{32\beta} (1 - 4\alpha - f + 8\beta\kappa T).$$

Після лінеаризації f за β дане рівняння зводиться до (8) і, таким чином, буде еквівалентне рівнянню Пуассона.

4. Рівняння руху

З рівняння Айнштайна (4) для моделі (3), з урахуванням тотожності Б'янки, отримаємо:

$$\kappa \nabla^k T_{ik} = -\nabla_i \Lambda(R) = -\Lambda'(R) \nabla_i R. \quad (11)$$

Використовуючи для речовини наближення ідеальної рідини, та, відповідно, обираючи тензор енергії-імпульсу у вигляді

$$T_{ik} = (\varepsilon + p)u_i u_k - p g_{ik},$$

де ε — густина енергії матерії, p — тиск, u_i — чотиривимірний швидкість), отримаємо:

$$\nabla^k [(\varepsilon + p)u_i u_k - p g_{ik}] = -\nabla_i \Lambda(R).$$

В результаті проектування отриманого рівняння на ортогональні 4-вектори u_i та $g^{il} - u^i u^l$ отримаємо:

$$\begin{aligned} \nabla_i (\varepsilon u^i) + p \nabla_i u^i &= -\frac{1}{\kappa} \frac{d\Lambda(R)}{ds} \\ (\varepsilon + p) u^k \nabla_k u^i &= (g^{ik} - u^i u^k) \nabla_k \left[p - \frac{1}{\kappa} \Lambda(R) \right]. \end{aligned} \quad (12)$$

З першого рівняння у ньютонівській границі впливає модифікація рівняння неперервності:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = -\frac{1}{c^2 \kappa} \frac{d\Lambda}{dt},$$

яке описує «перекачку» енергії між речовиною та вакуумом, а з другого модифікація рівнянь руху у гравітаційному полі:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\vec{\nabla} \varphi + \frac{c^2}{\kappa \rho} \vec{\nabla} \Lambda(R).$$

Для лінійної теорії (2) дані рівняння набувають вигляду:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) &= -\theta \frac{d\rho}{dt} \\ \frac{d\vec{v}}{dt} &= -\vec{\nabla} \varphi + \frac{\theta c^2}{\rho} \vec{\nabla} \rho. \end{aligned} \quad (13)$$

Таким чином, рівняння руху містить додатковий член, що можна інтерпретувати як взаємодію з ваку-

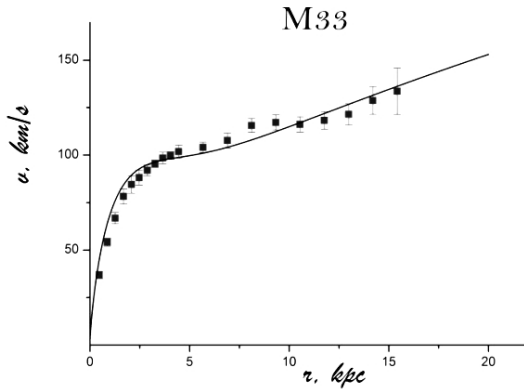


Рис. 1. Криві обертань для галактики М33: теоретична в рамках досліджуваної моделі (суцільна лінія) та спостережувана (точки)

умом та який можна використовувати для пояснення ефектів темної матерії.

Для квадратичної залежності (9), використовуючи (10) та знову обмежуючись лінійним наближенням f за β отримуємо рівняння лінійної теорії (13).

З рівнянь (12) видно, що теорія (3) буде зводитись до рівнянь класичної механіки при довільних значеннях ρ за умови $\Lambda(R) \rightarrow \text{Const}$ при $R \rightarrow \infty$.

5. Моделювання кривих обертання галактик

З рівняння (13), розглядаючи галактику як тонкий диск із експоненціальним розподілом речовини вздовж радіусу [12]

$$\rho(r) = \rho_0 e^{-r/r_0}$$

та нехтуючи крайовими ефектами та наявністю балджа та сферичного гало, для кривої обертання отримуємо [13]:

$$v(r) = c\sqrt{\alpha x^2(I_0(x)K_0(x) - I_1(x)K_1(x) + 2kx)},$$

де

$$x = \frac{r}{r_0}, \quad \alpha(M, r_0) = \frac{2GM}{c^2 r_0},$$

M та r_0 - параметри галактики, $x = \frac{r}{r_0}$, I_ν та K_ν — модифіковані функції Бесселя і Макдональда. За стосовуючи цю залежність до різних галактик було показано що при значенні параметру $k \sim 10^{-8}$ можна задовільним чином описати в рамках даної моделі спостережувані дані (рис. 1).

В граничних випадках $x \ll 1$ та $x \gg 1$ знайдений вираз для $v(r)$ спрощується:

$$x \ll 1: v^2 = -\frac{2GM}{r_0} x^2 \ln x + 2\theta c^2 x$$

$$x \gg 1: \frac{v^2}{r} = \frac{GM}{r^2} + \frac{\theta c^2}{r_0}.$$

Таким чином, при малих радіусах швидкість обертання слабко залежить від параметрів галактики, що узгоджується із спостереженнями кору, а при великих радіусах швидкість зростає як $v \sim \sqrt{r}$, що дійсно спостерігається для певних галактик [14], при-

чому характерне значення v за якого починається зростання $v_0 \sim M^{1/4}$, що узгоджується із емпіричним співвідношенням Таллі-Фішера [15].

6. Висновки

Перспективним напрямком пошуків розв'язання проблеми темної речовини є побудова модифікацій гравітаційної теорії, що використовується в якості теоретичної парадигми для обробки усіх спостережуваних даних з яких випливає існування темної речовини. В рамках нелагранжевих узагальнень теорії гравітації, що враховують поправки за кривиною простору-часу, які інтерпретуються як відгук вакууму на своє викривлення, існує якісна можливість пояснення темної енергії та темної матерії без залучення гіпотези про існування темної речовини. Зокрема, показано, що в рамках лінійної та квадратичної залежності від скаляру Річчі можна досягти якісного узгодження із локальними тестами та задовільно описати криві обертань спіральних галактик, а також зменшення густини енергії вакууму в процесі еволюції Всесвіту. Однак, при цьому вигляд функціональної залежності $\Lambda(R)$ однозначно не визначається, що залишає широкі можливості для вивчення даних теорій: попереду великий обсяг роботи по більш детальному вивченню їх властивостей, співставленням їх зі спостереженнями та аналізом, які риси вказаних теорій можуть виявитись корисними для побудови більш складних концепцій, а які є вадами і повинні бути виключеними при вдосконаленні теорії.

Перелік використаних джерел

1. Чернин А. Д. УФН. — 2008. — Т. 178, № 3. — с. 267–300.
2. Вайнберг С. УФН. — 1988. — Т. 158, № 8. — с. 639–678.
3. Nojiri S., Odintsov S. arXiv:1011.0544v3.
4. Сахаров А. Д. ДАН СССР. — 1967. — Т. 177. — с. 70–71.
5. Гинзбург В. Л. ЖЭТФ. — 1971. — Т. 60, № 2. — с. 451–459.
6. Mashkevich V. S. — arXiv:gr-qc/9811006. —
7. Bamba K., Nojiri S., Odintsov S.D. arXiv:gr-qc/1302.4831.
8. Odintsov S.D., Sáez-Gómez D. arXiv:gr-qc/1304.5411.
9. Фомин П. И. — Препринт ИТФ АН СССР. — итф-73-137p (1973).
10. Fomin P. I., Nakaznoy P. A., Vilchinskyi S. I. arXiv:gr-qc/0509042.
11. Наказной П. А. ЖЭТФ. — 2008. — Т. 134, № 3. — с. 481–489.
12. Freeman K. C. ApJ. — 1970. — vol 160. — pp. 811.
13. Наказной П. А. АЖ. — 2010. — Т. 87, № 2. — с. 141 — 145.
14. Roy D. P. arXiv: physics/0007025
15. Tully R. B., Fisher J. R. A & A. — 1977. — vol 54. — pp. 661 — 673.