УДК 517.4+519.6+621.372

А.О. Попов

ВЕЙВЛЕТ-АНАЛІЗ ДИСКРЕТНИХ СИГНАЛІВ ДЛЯ ДОВІЛЬНИХ МАСШТАБІВ

Вступ

Вейвлет-аналіз став фактично стандартним інструментом для дослідження частотно-часової поведінки сигналів. На відміну від класичних методів аналізу Фур'є, які являють собою сигнали у вигляді комплексного гармонічного спектра, вейвлет-аналіз дає опосередковану інформацію про частотний склад сигналу та його зміну в часі. Це досягається через розклад сигналу на сукупність складових з компактним носієм, кожна з яких є розтягнутою або стиснутою копією єдиної материнської вейвлет-функції [1].

При проведенні аналізу сигналів за допомогою неперервного вейвлет-перетворення (НВП) основним етапом є розрахунок вейвлет-коефіцієнтів. Для розрахунку вейвлет-перетворень сигналів переважно використовується апроксимація неперервного вейвлет-перетворення за допомогою ортогонального діадного вейвлет-перетворення (ОДВП) або застосовується кратномас-штабний аналіз (КМА). При цьому необхідно мати формульний вираз для розрахунку значень материнського вейвлету, до того ж, материнська функція має утворювати при масштабуванні ортогональний базис.

Але часто для аналізу використовується материнська функція, яка не має точного математичного опису. Це, зокрема, відбувається у випадку, коли материнські функції отримують за адаптивними алгоритмами в дискретному вигляді. З іншою проблемою доводиться стикатися, коли треба розрахувати значення вейвлет-коефіцієнтів розкладу дискретного сигналу для довільних масштабів розтягу або стиснення материнського вейвлету. І кратномасштабний аналіз, і ортогональне діадне перетворення допускають зміну масштабів тільки вдвічі, що не завжди задовольняє потреби дослідження. Наприклад, для використання апарату вейвлет-аналізу при ідентифікації ділянок сигналів за наявності адаптованої материнської функції може бути потрібно використовувати масштабні множники, які призводять до невеликого розтягу/стиснення вейвлетів і при цьому не набагато відрізняються від одиниці. Підходи ОДВП і КМА для розв'язання таких задач непридатні.

Автору відома єдина публікація, де запропоновано метод розрахунку значень НВП дискретних сигналів для довільних масштабів, який ґрунтується на апроксимації аналізованого сигналу і вейвлет-функцій базисними сплайнами [2]. В літературі актуальному питанню неперервного вейвлет-аналізу дискретних сигналів з використанням адаптованих дискретних материнських функцій, заданих лише своїми значеннями, для випадку довільних масштабних коефіцієнтів не приділено достатньо уваги.

Постановка задачі

Метою даної статті є розробка нового методу для розрахунку коефіцієнтів НВП дискретного сигналу для випадку, коли адаптований материнський вейвлет задано чисельно та для довільних значень масштабних множників.

Стаття побудована таким чином: у першій її частині подано необхідні короткі відомості щодо неперервного вейвлет-перетворення, особливу увагу приділено випадку дискретних сигналів для загального вигляду материнських функцій. У другій частині висвітлюються проблеми, які виникають при розрахунках з використанням адаптованих вейвлетів; у третій частині описано запропонований автором метод отримання НВП дискретних сигналів, а в четвертій — наведено результати чисельних експериментів з перевірки запропонованого алгоритму.

Основні відомості про неперервне вейвлет-перетворення

Вейвлет-перетворення необхідне для аналізу структури і поведінки сигналів, які містять у собі ділянки різної тривалості з коливаннями різної швидкості або різної частотної наповненості. Часто в літературі такі сигнали називають "нестаціонарними", маючи на увазі, що їх спектральні характеристики досить істотно змінюються з часом, причому ці зміни можуть відбуватися протягом різного періоду. Для такого випадку, коли в сигналі є локалізовані в часі ділянки різних частотних властивостей, використовується розклад у набір вейвлет-функцій, які самі є також локалізованими в часі і мають різний спектральний склад. Такий розклад гарантує проведення локального аналізу сигналу: якщо певний коефіцієнт розкладу сигналу є великим, то можна визначити ту ділянку часу, якій він відповідає, а отже, проаналізувати її більш детально і визначити, яким є частотний склад тієї ділянки сигналу та її тривалість. Скрізь, де треба дослідити нерегулярності в сигналах, альтернативи вейвлет-перетворенням майже немає.

Внаслідок названих унікальних можливостей, поряд із плідним розвитком математичної теорії вейвлетів, різноманітні модифікації вейвлет-аналізу набули бурхливого розвитку і стали значно поширеними в практиці обробки та аналізу сигналів. Вони використовуються для аналізу біомедичних сигналів та зображень, в геології та радіолокації, для стиснення даних, адаптивної фільтрації, кодування і внесення в сигнали цифрових водяних знаків, застосовуються в цифровому зв'язку і телебаченні високої чіткості та розпізнаванні образів.

Докладну теорію вейвлет-перетворень викладено в багатьох джерелах; класичними підручниками є [1, 3–5]. У даній статті зупинимось далі лише на основних положеннях.

Розглянемо неперервний сигнал нескінченної тривалості, що описується функцією $s(t)$ – вектором гільбертового простору вимірних за Лебегом інтегровних з квадратом неперервних функцій однієї змінної: $s(t) \in L^2(\mathbb{R})$, де $\mathbb{R}$ – множина дійсних чисел. Такими функціями можна описати сигнали, які походять від усіх технічних та біологічних систем. У просторі існування сигналів задамо скалярний добуток двох векторів:

$$\langle f(t), s(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{s(t)}\,dt .$$

Тут і далі горизонтальною рискою над функцією позначатиметься комплексна спряженість.

Для сигналів задамо норму:

$$\|s(t)\| = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt} .$$

Перетворення Фур'є від функції будемо позначати як

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt .$$

Дійсна функція $\psi(t) \in L^2(\mathbb{R})$, що задовольняє "умову допустимості"

$$C_{\psi} = \int_{0}^{+\infty} \frac{|\widehat{\psi}(\omega)|^2}{\omega} d\omega < +\infty \tag{1}$$

та має одиничну норму

$$\|\psi(t)\| = 1 , \tag{2}$$

називається *материнським вейвлетом*. Для заданого масштабу a та зміщення b цей вейвлет породжує набір розтягнутих або стиснутих вейвлет-функцій, кожну з яких можна отримати за правилом

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right). \tag{3}$$

Якщо було вибрано певний материнський вейвлет і утворено набір функцій (3), то функція

$$W_{\psi}(a,b) = \langle s(t), \psi_{a,b}(t) \rangle = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)} dt, \quad a \neq 0, \tag{4}$$

є прямим неперервним вейвлет-перетворенням неперервної функції $s(t)$ відносно материнської функції $\psi(t)$. Вейвлет-перетворення $W_{\psi}(a,b)$ є неперервною функцією двох дійсних змінних: значень масштабу $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, і зміщення $b \in \mathbb{R}$. Дуже часто на практиці обмежуються значеннями $a \geq 0$ (умова (1) задана саме для такого випадку).

Виконання умови (1) еквівалентне вимозі, щоб середнє значення материнського вейвлету дорівнювало нулю [1]:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t)\, dt = 0 .$$

Згідно з теоремою Кальдерона, Гросмана і Морле [3], якщо умова допустимості виконується, то будь-яка функція $s(t) \in L^2(\mathbb{R})$ задовольняє рівності

$$s(t) = \frac{1}{C_{\psi}} \int_{0}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} W_{\psi}(a,b) \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) db \frac{da}{a^2} ,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{C_{\psi}} \int_{0}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |W_{\psi}(a,b)|^2 db \frac{da}{a^2} ,$$

а отже, пряме НВП має також обернене і є перетворенням із збереженням енергії.

Оскільки більшість сигналів, які підлягають аналізу, обробляються за допомогою комп'ютерної техніки, то обов'язковою операцією є дискретизація і квантування сигналів, які мають у результаті цих операцій вигляд послідовності чисел. Отже, особливий інтерес на практиці становлять методи обробки цифрових сигналів. У даній статті обмежимось розглядом лише дискретних сигналів, оскільки цього достатньо для отримання потрібних результатів.

Модифікація виразу НВП для дискретних сигналів

Розглянемо модифікацію виразів для НВП (4) для випадку дискретних сигналів при рівномірній дискретизації. Нехай проведена попередня фільтрація, а отже, відсутнє накладання спектрів, і дискретизація неперервного сигналу $s(t)$ проводиться з частотою $F_s = \dfrac{1}{T_s}$ Гц.

Для того щоб скористатися виразами для неперервного вейвлет-перетворення, побудуємо на основі дискретного сигналу $s[n] = s(t)\,|_{t=nT_s},\ n \in \mathbb{Z}$, неперервний сигнал $s_\delta(t)$ у вигляді суми зміщених дельта-функцій $\delta(t)$:

$$s_\delta(t) = s(nT_s) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(t)\,\delta(t - nT_s)\,. \qquad (5)$$

Після підстановки (5) у вираз (4) отримаємо

$$W_\psi(a,b) = \langle s_\delta(t), \psi_{a,b}(t) \rangle = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} s_\delta(t)\, \overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)} dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(t)\,\delta(t - nT_s) \right) \overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)} dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)\,\delta(t - nT)\, \overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)} dt.$$

Із врахуванням фільтруючої властивості дельта-функції можемо остаточно записати

$$W_\psi(a,b)_\delta = \frac{1}{\sqrt{a}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(nT_s)\, \overline{\psi\left(\frac{nT_s - b}{a}\right)}. \qquad (6)$$

Проаналізуємо отриманий вираз для НВП дискретних сигналів (6). У виразі для $W_\psi(a,b)_\delta$ використовуються лише значення відліків сигналу і значення вейвлету в моменти відліків. Розрахунки за запропонованою методикою не вимагають проведення апроксимації та чисельного інтегрування, що позбавляє від необхідності додаткових обчислень на відміну від інших методів розрахунків НВП [6].

У практиці вейвлет-перетворень аналізовані сигнали мають скінченну тривалість. Для сигналу тривалості M відліків вираз (6) матиме вигляд

$$W_\psi(a,b)_\delta = \frac{1}{\sqrt{a}} \sum_{n=0}^{M-1} s(nT_s)\, \overline{\psi\left(\frac{nT_s - b}{a}\right)}. \qquad (7)$$

Неперервне вейвлет-перетворення дискретних сигналів

Як видно з виразу (7), для розрахунків НВП потрібно мати значення вейвлет-функції $\psi_{a,b}(t) = \psi\left(\dfrac{t-b}{a}\right)$ для моментів часу $t = nT_s$, тобто у вузлах, де задано дискретний сигнал. Без втрати загальності викладу можна покласти, що частота дискретизації F_s дорівнює 1 Гц. Отже, маємо справу з випадком, коли відліки сигналу взяті з кроком 1. Формально можна розрахувати значення $\psi_{a,b}(t)$ для довільних значень зміщень *b*, але на практиці при аналізі дискретних сигналів природно обмежитися лише зміщеннями вейвлету на цілу кількість кроків дискретизації, оскільки в інші моменти часу дискретний сигнал не існує. Тому для практичного застосування можемо переписати вираз (7) у вигляді

$$W_\psi(a,m)_\delta = \frac{1}{\sqrt{a}} \sum_{n=0}^{M-1} s(n)\, \overline{\psi\left(\frac{n-m}{a}\right)}, \qquad (8)$$

де $n = \overline{0, M-1}$ — номер відліку сигналу і вейвлет-функції; $m = \overline{0, M-1}$ — крок зміщення вейвлету відносно початку відліку.

Складність полягає в тому, що $\psi_{a,b}(t)$ є масштабованою копією материнського вейвлету і для розрахунків треба мати значення, яких набуде материнська функція у вузлі після того, як вона буде розтягнута або стиснута.

У більшості випадків для розрахунку НВП дискретних сигналів використовується апроксимація НВП неперервного вейвлет-перетворення за допомогою ортогонального діадного вейвлет-перетворення (ОДВП), кратномасштабного аналізу в класичному вигляді [7] або за ліфтинговою схемою [8] чи з використанням “алгоритму з дірками” [9]. При цьому параметр масштабу змінюється за двійковою послідовністю $a = 2^j$ і вейвлет-функції зміщуються по часовій вісі пропорційно до масштабу:

$b = na = n2^j$. Вираз (4) для НВП набуває вигляду

$$W_\psi(a,b) = \langle s(t), \psi_{2^j, n2^j}(t) \rangle =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2^j}} \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \overline{\psi\left(\frac{t - n2^j}{2^j}\right)} dt.$$

Для того щоб існувало обернене перетворення, необхідно, щоб вейвлети $\psi_{2^j, n2^j}(t)$ утворювали ортогональний базис. У цьому випадку існуватиме кратномасштабний аналіз простору сигналу, до розгляду вводиться допоміжна масштабуюча функція і з її допомогою виконується відновлення сигналу по його вейвлет-коефіцієнтах.

Часто для практичних задач аналізу сигналів відновлення сигналу по його вейвлет-коефіцієнтах не потрібне. Це не вимагається в разі, коли проводиться дослідження величин коефіцієнтів для пошуку сингулярностей у сигналі або при часовому аналізі. В цьому випадку можуть використовуватися материнські функції, які не утворюють кратномасштабного аналізу простору при масштабуванні. Це відбуватиметься зокрема тоді, коли материнські функції знаходяться за адаптивним алгоритмом і не мають точного математичного виразу, а задані своїми значеннями для певних значень аргументу. Отже, нема виразу, за яким можна розрахувати значення розтягнутої або стиснутої функції для довільних значень аргументу. Прикладом можуть бути адаптовані до класу сигналів материнські функції, отримані на основі головного вектора матриці усереднених кореляцій [10]. Тут материнська функція отримана у вигляді вектора, координатами якого є відліки функції, взяті з тією ж частотою дискретизації, що й сигнали, до яких вона адаптована.

Також не завжди задовільною є зміна масштабного коефіцієнта лише вдвічі, оскільки це призведе до різниці між тривалостями вейвлетів сусідніх масштабів також вдвічі. Така значна відмінність може призвести до того, що при аналізі сигналу не будуть розраховані коефіцієнти НВП, які відповідатимуть меншим розтягам материнської функції, а отже, будуть пропущені ділянки сигналу з потрібними характеристиками відповідної тривалості.

Тому для практичних застосувань НВП дискретних сигналів необхідною є методика визначення коефіцієнтів вейвлет-перетворень для довільних значень масштабу розтягу і стиснення a та пристосована для материнських функцій, які задані лише своїми дискретними значеннями. В літературі розв'язанню задачі побудови методики НВП за таких умов присвячено досить мало публікацій. Основною працею в цій галузі є [2], де запропоновано метод розрахунку коефіцієнтів НВП для довільних масштабів на основі *B*-сплайнів. У ньому обчислення коефіцієнтів НВП ведеться не безпосередньо з сигналом і материнською функцією, а з використанням коефіцієнтів їх *B*-сплайн-інтерполяції. Перевагою цього алгоритму є те, що обчислювальна складність залежить тільки від форми материнського вейвлету та степеня базисного сплайна і не залежить від величини масштабу.

Метод розрахунку значень коефіцієнтів НВП дискретного сигналу для материнських функцій, заданих по точках

У даній статті пропонується проводити обчислення коефіцієнтів НВП без застосування інтегрування аналізованого сигналу. Пропонується спочатку отримати набір дискретних масштабованих вейвлет-функцій для потрібних масштабів, а потім використовувати їх у розрахунку НВП за формулою (8) для потрібних зміщень.

Розглянемо нескінченний сигнал $s(n)$, заданий у точках $n = \overline{0, \infty}$.

Масштабування материнського вейвлету, заданого по точках

Спочатку розглянемо задачу побудови вейвлет-функцій $\psi\left(\frac{n}{a}\right)$ на основі заданої материнської функції і даного набору масштабів $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_L\}$, $a_j > 0$, $j = \overline{1, L}$. Нехай материнська функція задана лише своїми значеннями в N точках: $\psi(n)$, $n = \overline{0, N-1}$.

Для всіх $a_j \in (0,1)$ відповідний масштабований вейвлет буде стиснутим відносно материнського і кількість відліків у стиснутому вейвлеті буде меншою. Аналогічно, якщо масштабний коефіцієнт $a_j \in (1, +\infty)$, то масштабований вейвлет буде розтягнутим відносно материнського і задаватиметься в більшій кількості точок. Всі масштабовані функції мають бути задані з тим самим кроком, з яким задано сигнал і материнський вейвлет. Оскільки масштабний коефіцієнт a_j може бути довільним, то потрібна методика отримання значень $\psi_j(n) = = \psi\left(\frac{n}{a_j}\right)$ для довільних коефіцієнтів, причому сітка вузлів, в яких задана функція, має бути фіксованою.

Для отримання значень масштабованих вейвлетів у вузлах пропонується виконати такі етапи.

1. Для кожного масштабу $a_j \in A$ розрахувати кількість значень масштабованого вейвлету $K = [a_j N]$, де квадратними дужками позначається ціла частина числа.

2. Сформувати допоміжну сітку вузлів k_i, що рівномірно розподілені в межах між значеннями 0 і N з кроком $\frac{N}{K}$.

3. При відліках материнської функції $\psi(n) = = \{\psi(0), \psi(1), \ldots, \psi(N-1)\}$ розрахувати апроксимовані значення материнської функції $\tilde{\psi}(n)$ для вузлів k_i. В результаті буде отримано K значень масштабованої функції, заданих на сітці k_i, $i = \overline{1, K}$, між значеннями 0 і N.

4. Побудувати масштабовану функцію з початковим кроком дискретизації:

$$\tilde{\psi}_j(n) = \tilde{\psi}(k_i), \quad n = \overline{0, K-1}, \quad i = \overline{1, K}. \qquad (9)$$

Існує кілька шляхів отримання наближених значень дискретної функції між вузлами, які базуються на теорії апроксимації. Для випадку, який розглядається в статті, а саме, коли задані лише значення материнського вейвлету в точках відліку, природним є використання інтерполяції, в результаті якої отримана апроксимуюча функція $f(t)$ буде проходити через усі вузли інтерполяції $[n, \psi(n)]$:

$$f(n) = \psi(n), \; n = \overline{0, N-1}.$$

Кількість вузлів, в яких задана материнська функція, може бути довільною і залежатиме від методу, за яким отримана материнська функція. Поряд із практичним використанням інтерполяції для розрахунку відліків масштабованих вейвлетів і подальшого обчислення НВП дискретних сигналів може постати задача порівняння різних материнських функцій за критерієм гладкості, що вимагатиме знаходження похідних. Тому пропонується використати для проведення інтерполяції сплайн-інтерполяцію кубічними сплайнами [11].

Кубічний сплайн — це функція, що на кожному окремому відрізку є поліномом третього степеня, а на всьому заданому відрізку — неперервна разом із кількома своїми похідними. Інтерполяційна формула для розрахунку значень масштабованого вейвлету для довільного $k = k_i$, $i = \overline{1, K}$, може бути записана у вигляді

$$\tilde{\psi}(k) = \\ = \begin{cases} S_1(k) = c_{01} + c_{11}(k-k_0) + c_{21}(k-k_0)^2 + \\ + c_{31}(k-k_0)^3, \; k \in [k_0; k_1], \\ S_2(k) = c_{02} + c_{12}(k-k_1) + c_{22}(k-k_1)^2 + \\ + c_{32}(k-k_1)^3, \; k \in [k_1; k_2], \\ \ldots \\ S_K(k) = c_{0K} + c_{1K}(k-k_{K-1}) + c_{2K}(k-k_{K-1})^2 + \\ + c_{3K}(k-k_{K-1})^3, \; k \in [k_{K-1}; k_K]. \end{cases}$$

Для побудови кубічної сплайн-інтерполяції визначаються невідомі коефіцієнти c_{01}, $c_{02}, \ldots, c_{3K}$. Якщо функція інтерполюється на K інтервалах за допомогою поліномів порядку 3, то кількість таких невідомих дорівнюватиме $(3+1)K$. Для їх визначення потрібно $(3+1)K$ рівнянь. Для отримання необхідної кількості рівнянь користуються значеннями функції у вузлах інтерполяції, умовами неперервності похідної функції першого і другого порядку та умовою гладкості функції на кінцях.

Отже, в результаті виконання етапів 1–4 та інтерполяції кубічними сплайнами можна отримати значення розтягнутих і стиснутих вейвлет-функцій для довільних масштабних множників, маючи лише значення материнського вейвлету, задані на сітці вузлів.

Нормування дискретних вейвлетів

Питання, яке потребує особливої уваги при формуванні масштабованих функцій, — дотримання умов, що накладаються на вейвлет, а саме рівність норми функції одиниці і умова допустимості (умови (1) та (2)). У неперервному випадку, коли існує точний вираз для $\psi(t)$, всі функції $\psi_{a,b}(t) = \psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$, отримані за формулою (3), задовольняють ці умови за визначенням. При отриманні материнського вейвлету у вигляді набору точок умови допустимості та рівності норми одиниці можна переписати у такому вигляді:

$$
\begin{gathered}
\| \psi(n) \| = \sqrt{\sum_{n=0}^{N-1} |\psi(n)|^2} = 1, \\
\sum_{n=0}^{N-1} \psi(n) = 0.
\end{gathered} \qquad (10)
$$

Вони також мають виконуватися для материнської функції $\psi(n) = \{\psi(0), \psi(1), \ldots, \psi(N-1)\}$, оскільки в протилежному випадку порушуються вимоги до вейвлет-аналізу. Для проведення НВП дискретних сигналів необхідно, щоб масштабовані вейвлети $\psi_j(n) = \frac{1}{\sqrt{a_j}} \psi\left(\frac{n}{a_j}\right)$ також задовольняли вимоги (10). Отримана за методом [10] материнська функція задовольняє умову рівності середнього значення нулю. Для виконання умови нормування пропонується виконувати нормування кожної масштабованої функції після сплайн-інтерполяції і замість $\tilde{\psi}_j(n)$ використовувати її нормовану версію, отриману за виразом

$$
\tilde{\psi}_j(n) \Rightarrow \frac{\tilde{\psi}_j(n)}{\| \tilde{\psi}_j(n) \|} = \frac{\tilde{\psi}_j(n)}{\sqrt{\sum_{n=0}^{N-1} |\tilde{\psi}_j(n)|^2}}. \qquad (11)
$$

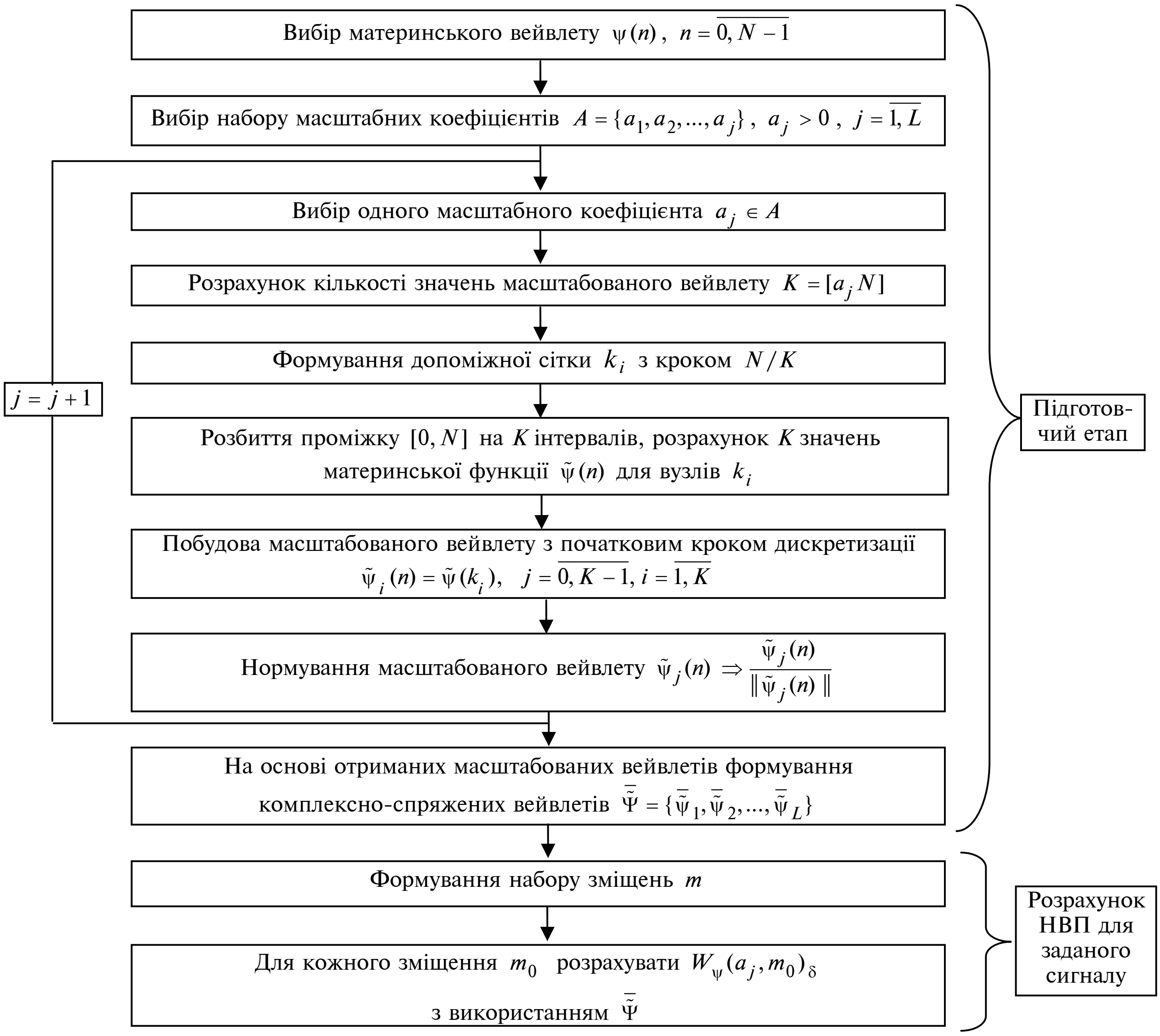

Рис. 1. Етапи проведення неперервного вейвлет-аналізу дискретних сигналів

Методика розрахунку НВП дискретних сигналів для довільних масштабів

У результаті виконання розрахунків, описаних вище, для потрібного набору масштабних коефіцієнтів A було отримано набір масштабованих вейвлет-функцій $\tilde{\Psi} = \{\tilde{\psi}_1, \tilde{\psi}_2, \ldots, \tilde{\psi}_L\}$, які задані на тій самій сітці вузлів, що й аналізований сигнал і можуть бути використані для розрахунку НВП. Вираз (8) із врахуванням (9) можна записати так:

$$W_\psi(a_j, m)_\delta = \frac{1}{\sqrt{a}} \sum_{n=0}^{M-1} s(n) \overline{\tilde{\psi}_j(n-m)}, \quad j = \overline{1, L}. \quad (12)$$

Тут враховано, що операції масштабування і зміщення вейвлет-функції при розрахунку НВП не пов'язані між собою і можуть бути виконані в довільному порядку, а саме спочатку розраховуються значення розтягнутого або стиснутого вейвлету у вузлах, а потім проводиться його зміщення з довільним кроком на m. Питанням чисельної реалізації обчислень НВП за виразом типу (12) та порівнянню двох методик розрахунку присвячені статті [12, 13].

Обчислення коефіцієнтів НВП проводиться за відповідними основними етапами (рис. 1).

1. Задається материнська функція $\psi(n)$, набір потрібних масштабів $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_L\}$ та зміщення m.

2. Будується набір масштабованих вейвлет-функцій $\tilde{\Psi} = \{\tilde{\psi}_1, \tilde{\psi}_2, \ldots, \tilde{\psi}_L\}$, виконуючи етапи 1–4.

3. Обчислюється значення комплексно-спряжених вейвлет-функцій у відповідних вузлах.

4. Для кожного зміщення m_0 розраховуємо набір значень $W_\psi(a_j, m_0)_\delta$ за формулою (12) для всіх значень масштабів $a_j \in A$.

Експериментальні результати

Задачею експериментальної частини даної статті є перевірка запропонованої методики із створення набору вейвлетів на основі материнської вейвлет-функції для довільних масштабів.

Для формування набору масштабованих дискретних вейвлетів спочатку треба мати значення дискретної материнської функції. Для їх отримання використано метод адаптивної побудови материнських вейвлет-функцій для класу коливань схожої форми на основі використання головного вектора матриці усереднених кореляцій для цього класу, запропонований нами в [10]. Графік материнської функції наведено на рис. 2. Вона була задана по точках і мала 108 відліків. Точного математичного виразу для її отримання не існує, тому скористатися стандартними методами для отримання набору вейвлетів неможливо.

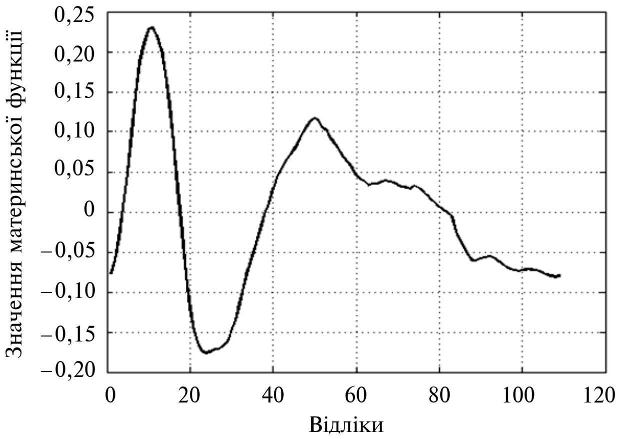

Рис. 2. Материнська вейвлет-функція

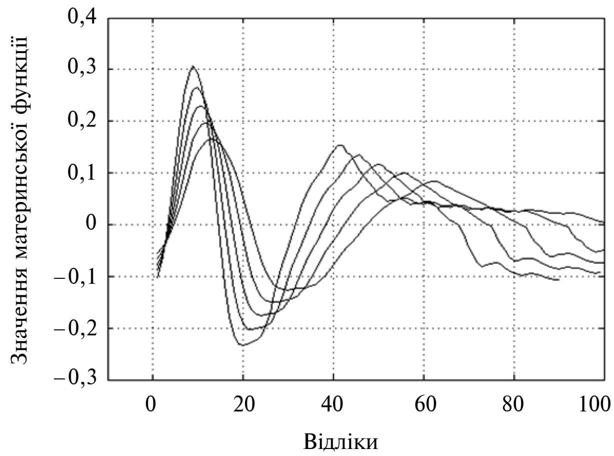

Рис. 3. Масштабовані вейвлет-функції, отримані за запропонованою методикою

Для подальших розрахунків масштабованих вейвлет-функцій було задано довільні в околі значення 1, щоб продемонструвати можливості для стиснення і розтягу вейвлету (значення вибрано довільно в межах від 0,8 до 1,2 із кроком 0,07). Після цього було реалізовано послідовність кроків, наведену на рис. 1, і отримано набір розтягнутих і стиснутих вейвлетів. Графіки кількох вейвлетів, які отримані в результаті масштабування та розрахунків за розробленим алгоритмом, наведено на рис. 3. Всі розрахунки виконані в середовищі MATLAB 6.5. Як видно з графіків, було отримано всі потрібні масштабовані материнські вейвлет-функції, що підтверджує дієвість та застосовність запропонованого методу.

Висновки

Запропонований метод розрахунку коефіцієнтів неперервного вейвлет-перетворення дискретних сигналів дає можливість проводити вейвлет-аналіз сигналів у випадку, коли материнська вейвлет-функція не має точного математичного опису, а задана чисельно у вигляді набору значень у моменти відліків. При цьому можливо використовувати при вейвлет-аналізі довільні масштабні множники і зміщення, що дає змогу не обмежуватися лише діадними розтягами та стисненнями.

Результати статті можна використовувати в подальшому для дослідження дискретних сигналів, зокрема, для аналізу сигналів електричної активності мозку. Напрямком подальших досліджень є підвищення чисельної ефективності запропонованої методики.

А.А. Попов

ВЕЙВЛЕТ-АНАЛИЗ ДИСКРЕТНЫХ СИГНАЛОВ ДЛЯ ПРОИЗВОЛЬНЫХ МАСШТАБОВ

Рассмотрены особенности непрерывного вейвлет-анализа дискретных сигналов. Предложен новый метод расчета коэффициентов непрерывного вейвлет-преобразования дискретных сигналов для случая, когда материнская вейвлет-функция не имеет точного математического выражения, а задана только своими значениями в моменты отсчетов. Применение разработанного алгоритма проиллюстрировано на примере расчета значений масштабированной адаптированной материнской вейвлет-функции для произвольных масштабных коэффициентов сжатия и растяжения.

A.O. Popov

WAVELET-TRANSFORM OF DISCRETE SIGNALS FOR ARBITRARY SCALES

We consider the specificity of continuous wavelet-transform of discrete signals. We propose a novel calculation method of coefficients of continuous wavelet-transform. This method can be applied if the mother wavelet function has no exact mathematical expression and is given solely by its samples at the reference time. We also illustrate possible applications of the method on the example of calculation of values of scale adapted mother wavelet function for coefficients of arbitrary dilation and squeeze.

1. *Добеши И.* Десять лекций по вейвлетам. – Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2001. – 464 с.
2. *Munoz A., Ertlé R., Unser M.* Continuous wavelet transform with arbitrary scales and O(N) complexity // Signal Processing. – 2002. – **82**. – P. 749–757.
3. *Малла С.* Вейвлеты в обработке сигналов. – М.: Мир, 2005. – 672 с.
4. *Чуи К.* Введение в вейвлеты. – М.: Мир, 2001. – 412 с.
5. *Блаттер К.* Вейвлет-анализ. Основы теории. – М.: Техносфера, 2004. – 280 с.
6. *Переберин А.В.* О систематизации вейвлет-преобразований // Вычисл. математика и программирование. – 2001. – **2**. – С. 15–40.
7. *Mallat S.G.* A theory for multiresolution signal decomposition: the wavelet representation // IEEE Transactions on pattern analysis and machine intelligence. – 1989. – **11**, N 7. – P. 674–693.
8. *Daubechies I.*, *Sweldens W.* Factoring wavelet transforms into lifting steps // J. of Fourier Analysis and Applications. – 1998. – **4**, N 3. – P. 247–269.
9. *Holschneider M., Kronland-Martinet R., Morlet J., Tchamitchan P.* Wavelets, time-frequency methods and phase-space. – Berlin: Springer-Werlag, 1989. – P. 289–297.
10. *Попов А.О.* Побудова материнських вейвлет-функцій методом власних векторів // Электроника и связь. Тем. вып. "Проблемы электроники". – 2006. – Ч. 2. – С. 54–58.
11. *Прокопенко Ю.В., Татарчук Д.Д., Казміренко В.А.* Обчислювальна математика: Навч. посібник. – К.: ІВЦ «Видавництво "Політехніка"», 2003. – 120 с.
12. *Попов А.О.*, *Жуков М.А.* Неперервне вейвлет-перетворення дискретних сигналів, що не потребує інтегрування // Электроника и связь. Тем. вип. "Електроніка та нанотехнології". – 2009. – № 4-5. – С. 151–155.
13. *Popov A., Zhukov M.* Computation of continuous wavelet transform of discrete signals with adapted mother functions // Proc. of SPIE. – 2009. – **7502**. – P. 75021E-1–75021E-6.

Рекомендована Радою
факультету електроніки НТУУ "КПІ"

Надійшла до редакції
25 січня 2010 року