УДК 539.377:539.381

МЕТОД ГРАНИЧНИХ ЕЛЕМЕНТІВ В АКСІАЛЬНО-СИМЕТРИЧНИХ ЗАДАЧАХ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ

А. О. Караєв[1, a], О. О. Стрельнікова[1,2]

[1]*Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна*

[2]*Інститут проблем машинобудування ім. А. М. Підгорного НАН України*

Анотація

У роботі ілюструється використання методу граничних елементів для розв'язання задач рівноваги в теорії пружності, зокрема для нерівномірно нагрітих систем. Отримано рівняння, що у випадку малих градієнтів температури розв'язані за допомогою метода граничних елементів для подальшої практичної реалізації, враховуючи наявні сингулярності, що виникають при моделюванні. Особливістю роботи є те, що за допомогою замін у тензорі деформацій вдається уникнути інтегрування за об'ємом та обмежитися подвійним інтегралом.

Ключові слова: метод граничних елементів, теорія пружності, еліптичні інтеграли

Вступ

Метод граничних елементів є одним із найпопулярніших методів чисельного моделювання різних задач механіки та фізики. Величезним досягненням, що приваблює вчених з усього світу, є можливість розглядати не сам регіон, у якому необхідно розв'язати задачу, а його границю. Цей факт і використовується авторами у даній публікації у контексті використання даного методу для теорії пружності.

Існує широкий клас задач, коли деформації супроводжуються змінами температури. Зміна температури може виникати як в результаті самої деформації, так і через сторонні причини. Інтегральні рівняння при наявності температурного члена у законі Гука будуть описуватися рівняннями з наявністю члена, що інтегрується за об'ємом [1, стор. 28]. Для того, щоб позбавитися його, можна зробити заміну у тензорі деформації та включити температурний член. Ця заміна можлива у випадку, коли коефіцієнти Ламе не залежать від температури та вважаються постійними величинами.

Комп'ютерне моделювання отриманих рівнянь дає змогу дізнатися величину деформації у стаціонарному наближенні у будь-якій точці розглянутого об'єму.

1. Тензор деформації та закон Гука нерівномірно нагрітого тіла

Закон Гука виражає зв'язок між тензором напружень та тензором деформації. У випадку, коли тіло нагріто нерівномірно, закон Гука має наступний вигляд:

$$\sigma_{ik} = -K\alpha(T-T_0)\delta_{ik} + 2\mu u_{ik} + \lambda u_{ll}\delta_{ik} \qquad (1)$$

де σ_{ik} – тензор напружень, u_{ik} – тензор деформацій, λ, μ – коефіцієнти Ламе, K – ізотермічний модуль всестороннього стиснення, α – коефіцієнт теплового розширення, T_0 – температура ненагрітого тіла.

Закон Гука з урахуванням зміни температури можна представити як сума тензора напружень без урахування зміни тиску з відповідним членом, що відповідає за зміну тиску.

$$\sigma_{ik} = \sigma_{ik}^{(0)} - K\alpha(T-T_0)\delta_{ik}$$

Зробимо заміну у тензорі деформації:

$$u_{ik} = u_{ik}^{(0)} + \frac{\alpha}{3}(T-T_0)\delta_{ik} \qquad (2)$$

Тоді закон Гука буде виглядати, як відповідний без наявності температурного члена:

$$\sigma_{ik} = 2\mu u_{ik}^{(0)} + \lambda u_{ll}^{(0)}\delta_{ik} \qquad (3)$$

Будемо вважати деформації малими, тоді тензор деформації визначається виразом [1, стор. 11].:

$$u_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)$$

де u_i – вектор деформації.

Нагадаємо, що компоненти тензора деформації не є цілком незалежними величинами, оскільки шість компонент u_{ik} виражаються через три незалежні компоненти вектора деформації. Щоб деформації були сумісними, необхідно виконання умов сумісності Сен-Венана:

$$\varepsilon_{ikl}\varepsilon_{jmn}\frac{\partial^2 u_{lm}}{\partial x_k \partial x_n} = 0$$

де ε_{ikl} – абсолютно антисиметричний одиничний тензор (тензор Леві-Чівіти).

Для того, щоб вважати $u_{ik}^{(0)}$ тензором деформації, необхідно, щоб виконувалася умова:

$$\frac{\partial^2 (T-T_0)}{\partial x_i \partial x_j} = \delta_{ij}\frac{\partial^2 (T-T_0)}{\partial x_k^2} \qquad (4)$$

[a]temakaral@mail.ru

1.1. Рівняння рівноваги ізотропних тіл

Як відомо, рівняння рівноваги має вигляд:

$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} = 0$$

Скористаємося законом Гука (1), (3) і використаємо заміну (2):

$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} = 2\frac{\partial \mu u_{ik}^{(0)}}{\partial x_k} + \frac{\partial \lambda u_{ll}^{(0)}}{\partial x_i} = 0 \tag{5}$$

1.2. Умова для температури

В загальному випадку коефіцієнти μ та λ є функціями температури, тобто $\mu = \mu(T - T_0)$ та $\lambda = \lambda(T - T_0)$. Експериментальні дослідження показують, що ці коефіцієнти зменшуються при збільшенні температури. Однак, ми можемо знехтувати цією залежністю, якщо будемо вважати, що градієнти температури є невеликими, тобто:

$$\left|\frac{\partial(T - T_0)}{\partial x_i}\right| << 1 \tag{6}$$

Використовуючи рівняння (6), отримуємо:

$$\frac{\partial^2(T - T_0)}{\partial x_i \partial x_j} \longrightarrow 0$$

Повертаючись до рівняння (3), знаходимо необхідну умову для температури, щоб тензор $u_{ik}^{(0)}$, який є результатом заміни (2) мав сенс тензора напружень:

$$\Delta(T - T_0) = 0 \tag{7}$$

Це рівняння є рівнянням Лапласа. У випадку його виконання тензор $u_{ik}^{(0)}$ можемо знайти через вектор деформації:

$$u_{ik}^{(0)} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i^{(0)}}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k^{(0)}}{\partial x_i}\right)$$

В свою чергу, рівняння теплопровідності для твердих тіл визначається рівнянням:

$$C_v \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{C_p - C_v}{\alpha}\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{div}\vec{u} = \kappa\Delta(T - T_0)$$

де C_v – теплоємність при постійному тиску, C_p – теплоємність при постійному об'ємі.

У стаціонарному випадку рівняння для температури задовольняє рівняння Лапласа (7), що підтверджує справедливість заміни (2).

Скориставшись представленням тензора деформації через вектор деформації, отримаємо відоме для нас рівняння:

$$\mu\Delta\vec{u}^{(0)} + (\lambda + \mu)\nabla \mathrm{div}\vec{u}^{(0)} = 0 \tag{8}$$

Замкнена система рівнянь для знаходження деформації буде мати наступний вигляд:

$$\begin{cases} \mu\Delta\vec{u}^{(0)} + (\lambda + \mu)\nabla \mathrm{div}\vec{u}^{(0)} = 0 \\ \Delta(T - T_0) = 0 \\ u_{ik}^{(0)} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i^{(0)}}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k^{(0)}}{\partial x_i}\right) \\ u_{ik} = u_{ik}^{(0)} + \frac{\alpha}{3}(T - T_0)\delta_{ik} \end{cases} \tag{9}$$

2. Інтегральне рівняння

Для використання методу граничних елементів, необхідно отримати інтегральний вигляд рівняння рівноваги твердого тіла (8). Для цього запишемо рівняння з сингулярною правою частиною [2, стор. 186]:

$$\mu\Delta\vec{u}^* + (\lambda + \mu)\nabla \mathrm{div}\vec{u}^* = -\delta(\vec{r} - \vec{\xi})\vec{e} \tag{10}$$

де $\vec{u}^*$ – фундаментальне рішення рівняння, $\vec{e}$ – одиничний вектор напряму.

Проінтегруємо рівняння (8) за всім об'ємом з фундаментальним рішенням:

$$\int_\Omega \mu\vec{u}^*\Delta\vec{u}d\Omega + \int_\Omega (\lambda + \mu)\vec{u}^*\nabla \mathrm{div}\vec{u}d\Omega = 0 \tag{11}$$

Використовуючи формулу Гаусса-Остроградського, фундаментальний розв'язок рівняння (10) та закон Гука, можна звести інтегрування за об'ємом до інтегрування за поверхнею:

$$\vec{e}(\vec{\xi})\vec{u}(\vec{\xi}) + \oint_\Gamma \vec{p}^*\vec{u}d\Gamma = \oint_\Gamma \vec{p}\vec{u}^*d\Gamma \tag{12}$$

де $\vec{p}$ – поверхнева сила, $\vec{p}^*$ – поверхнева сила при сингулярній задачі.

Зручно перейти від вектора фундаментального розв'язку до тензору:

$$\begin{cases} u_i^* = u_{ji}^*(\xi_i, x_i)e_j \\ p_i^* = p_{ji}^*(\xi_i, x_i)e_j \end{cases} \tag{13}$$

Використовуючи ці вирази, рівняння рівноваги в інтегральній формі матиме вигляд:

$$C_{ij}(\xi_i)u_j(\xi_i) + \oint_\Gamma u_j(x_i)p_{ji}^*(\xi_i, x_i)d\Gamma(x_i) = \\ = \oint_\Gamma p_j u_{ji}^*(\xi_i, x_i)d\Gamma(x_i) \tag{14}$$

де $C_{ij} = \delta_{ij} + \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\oint_{\Gamma_\varepsilon} p_j u_{ji}^* d\Gamma(x_i)$ – тензор, що дозволяє обходити сингулярності під час інтегрування точки, що знаходиться на поверхні [2, стор. 192].

3. Фундаментальний розв'язок

3.1. Фундаментальний розв'язок у загальному тривимірному випадку

У загальному тривимірному випадку тензор фундаментального рішення має наступний вигляд [2, стор. 187]:

$$u_{ij}^*(\vec{\xi}, \vec{r}) = \frac{2(\lambda + \mu)r}{16\pi(\lambda + 2\mu)}\left((3 - \frac{\lambda}{\lambda + \mu}\delta_{ij} + \frac{r_i r_j}{r^2})\right) \tag{15}$$

де $r_i = x_i(\vec{r}) - x_i(\vec{\xi})$ – відстань від точки спостереження до точки, у якій дельта-функція набуває значення нескінченності.

3.2. Фундаментальний розв'язок у циліндричній системі відліку із аксіальною симетрією

Для побудови фундаментального розв'язку у циліндричній системі відліку скористаємося матрицею переходу із декартової системи у циліндричну:

$$T = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Записуючи елемент поверхні у циліндричній системі координат можна помітити, що, скориставшись аксіальною симетрією, можна одразу проінтегрувати фундаментальний тензор рішень за кутом. Тензор фундаментального рішення у циліндричній системі координат матиме вигляд [3, стор. 46]:

$$\begin{pmatrix} u^*_{\rho\rho} & u^*_{\rho\varphi} & u^*_{\rho z} \\ u^*_{\varphi\rho} & u^*_{\varphi\varphi} & u^*_{\varphi z} \\ u^*_{z\rho} & u^*_{z\varphi} & u^*_{zz} \end{pmatrix} = \int\limits_0^{2\pi} \begin{pmatrix} u^*_{xx} & u^*_{xy} & u^*_{xz} \\ u^*_{yx} & u^*_{yy} & u^*_{yz} \\ u^*_{zx} & u^*_{zy} & u^*_{zz} \end{pmatrix} T d\varphi \tag{16}$$

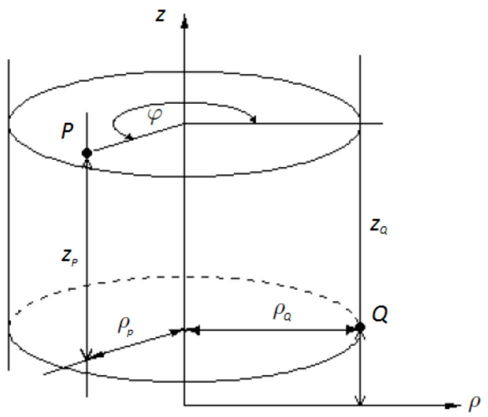

Рис. 1. Дискретизація у циліндричній системі

Відповідні компоненти тензору фундаментальних рішень в загальному вигляді:

$$u^*_{ij} = A(\rho(\vec{r}-\vec{\xi}), z(\vec{r}-\vec{\xi}))K(k) + \\ + B(\rho(\vec{r}-\vec{\xi}), z(\vec{r}-\vec{\xi}))E(k) \tag{17}$$

де $k = 2\sqrt{\frac{\rho(\xi)\rho(r)}{\sqrt{(\rho(\xi)-\rho r)^2+(z(\xi)-z(r))^2}}}$, $K(k), E(k)$ – повні еліптичні інтеграли першого та другого роду.

4. Еліптичні інтеграли

Повний еліптичний інтеграл першого роду:

$$K(k) = \int\limits_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

Цей інтеграл має особливість у точці 1. У дослідженні використовується цікавий спосіб обчислення цього інтегралу за допомогою використання властивостей середнього арифметико-геометричного:

$$a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2} b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$$

де $0 < b_0 <= a_0$.

Цю послідовність можна виразити через повний еліптичний інтеграл першого роду:

$$\text{agm(a,b)} = \frac{\pi}{4}\frac{a+b}{K((\frac{a-b}{a+b})^2)}$$

Тоді повний еліптичний інтеграл першого роду виражатиметься через середнє арифметико-геометричне наступним чином:

$$K(k) = \frac{\pi}{4}\frac{2\sqrt{k}}{k-1}\frac{1}{\text{agm}(\frac{2\sqrt{k}-k-1}{k+1}, 1)} \tag{18}$$

Повний еліптичний інтеграл другого роду:

$$E(k) = \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi} d\varphi$$

Інтеграл не містить особливостей, тому його можна рахувати, використовуючи вузловий метод Гауса.

5. Система рівнянь

Першим кроком для чисельного розв'язання рівняння (14) є дискретизація. Необхідно розбити поверхню на граничні елементи та провести чисельне інтегрування. Нехай P – фіксована точка простору, Q – точка, за якою проводиться сума [3, стор. 47].

$$C_{ij}(P)u_j(P) + \sum_{l=1}^{NE}\int\limits_\Gamma p^*_{ij}(Q)u_jQ\rho(Q)d\Gamma = \\ = \sum_{l=1}^{NE}\int\limits_\Gamma u^*_{ij}(Q)p_jQ\rho(Q)d\Gamma \tag{19}$$

де NE – кількість елементів розбиття.

Висновки

У сучасному світі питання дослідження пружних властивостей твердих тіл постають особливо актуально через бурхливий розвиток нанотехнологій. Особливо широким спектром виступають задачі, у яких деформації нерозривно пов'язані із нерівномірним розподілом температури.

Комп'ютерна реалізація розв'язання задачі (19) надає змогу дізнаватися деформації тіла з аксіальною симетрією. Виконуючи заміну (2) та розв'язання оберненої задачі деформації – знаходження вектора деформації тіла за відомим тензором деформації дає змогу дізнаватися ті чи інші властивості при різних граничних умовах.

Перелік використаних джерел

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория упругости. — М.: Физматлит. — 2007. — 264 с.
2. Brebbia C. A. Boundary Element Techniques. — Springer. — 1984. — 466 с.
3. Stikan P. R. Tensores fundamentais da formulação dos problemas elásticos axissimétricos pelo método dos elementos de contorno.– Vitória.– 2006.– 113 p.
4. Камке Э. Справочник по дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка — М.: Наука. — 1966. — 260 с.