**УДК 336.761.6**

**Фартушний Іван Дмитрович**
Старший викладач кафедри математичного моделювання економічних систем
Національний технічний університет України «КПІ»

**Сухих П. О.**
студент групи УК–31
Факультет менеджменту та маркетингу
Національний технічний університет України „КПІ”

# КОНЦЕПЦІЯ АРБІТРАЖУ В МАТЕМАТИЧНІЙ ТЕОРІЇ ЕФЕКТИВНОГО ФІНАНСОВОГО РИНКУ

**Анотація**

*У даній статті розглядаються можливості існування арбітражу на ринку строкових операцій.*

*Основна мета дослідження полягала в аналізі існуючих моделей виявлення арбітражних можливостей на фінансових ринках, розробці моделі фінансового ринку, створенні програмного продукту та окресленні потенційних напрямків подальшої роботи за цією темою.*

*Розроблено модель фінансового ринку з урахуванням фактору невизначеності та сформована концепція існування арбітражних можливостей, що базується на теоремі Мінковського–Фаркаша.*

*Зокрема, була розроблена інформаційна система, яка підтримує рішення щодо арбітражних стратегій на фінансових ринках.*

*Модель є адаптивною, і тому може широко використовуватися на багатьох типах ринку.*

**Summary**

*In this article, possibilities of existence of arbitration are examined on the market of urgent operations. The primary purpose of research consisted in the analysis of existent models of exposure of arbitration possibilities on financial markets, development of model of financial market, creation of software product and outlining of potential directions of subsequent work after this theme.*

*The model of financial market is developed taking into account the factor of vagueness and conception is formed of existence of arbitration possibilities of, which is based on the theorem of Minikovski-Farkasch.*

*In particular, the informative system which supports a decision in relation to arbitration strategies on financial markets was developed.*

*A model is adaptive, and that is why can be widely utillized on many types of market.*

**Ключові слова**

Арбітраж, фінансові ринки, ефективний ринок, інструменти арбітражера, повні ринки, ризик–нейтральна міра, вектор положення цін.

**Вступ**

Дане дослідження зумовлене стрімким та стійким розвитком валютних і фондових ринків на Україні. У зв'язку із цим зростає кількість учасників, що бажають отримати прибуток за рахунок складання термінових фінансових операцій. Але діяльність на таких ринках вимагає від гравців певних навичок та інструментарію для ефективної роботи, можливості швидко приймати рішення.

Кожен гравець в своїй діяльності намагається за можливістю звести ризики до мінімуму. Для цього існують фінансові похідні інструменти, які на основі домовленостей між гравцями знижують потенційні ризики. У даній статті розглянута робота гравця саме з такими інструментами, з метою отримання "безризикового" прибутку, тобто діяльність спрямована на реалізацію фінансового арбітражу.

**Постановка задачі**

Сьогодні ринки мають властивість супердинамічності, тому гравці функціонують на них, використовуючи електронні торгові системи, що дозволяють швидко реагувати на зміни цін. Використання електронних торгівельних систем дозволило оперувати з ринками декількох країн без суттєвого відчуття просторової різниці в розміщенні. Не зважаючи на це, ринок і на сьогоднішній день дає можливості для реалізації так званих арбітражних операцій.

Арбітражна операція (далі просто арбітраж) – це операція, що має на меті отримання доходів шляхом перепродажу цінних паперів або валют за більш вигідними цінами на тому ж ринку, але в майбутньому періоді або на інших ринках. Розмір максимального прибутку в результаті арбітражних операцій змінюється в залежності від їх ризикованості. У випадку використання похідних фінансових інструментів максимальний розмір ризику становитиме розмір сплати за інструмент.

У наш час вихід, реєстрація на біржі та подальша торгівля спрощена настільки, що практично кожний бажаючий індивід має можливість, сидячи за комп'ютером, реалізувати через Інтернет транзакцію на біржі. Активи, що торгуються виключно через електронні засоби, мають більший ступінь волотильності, ніж інструменти, що торгуються на реальних біржах. Такий ефект зумовлений тим, що кількість випадкових гравців, що можуть себе повести неадекватно з точки зору професійного гравця, на електронних ринках більша, ніж на звичайних біржах. Електронні ринки роблять гравці [1]. А там, де існує великий ступінь волотильності, завжди є більше можливостей для виграшу (проте і програшу теж – все залежить від інструментарію та професійності гравця), ніж на стабільних та передбачуваних ринках, особливо це стосується арбітражних можливостей.

Основні задачі дослідження:

– детальний аналіз існуючих моделей виявлення арбітражних можливостей на фінансових ринках
– розробка моделі фінансового ринку, та формули математичного вираження існування арбітражних можливостей на базі цієї моделі
– дослідження гіпотези повноти ринку та її впливу на діяльність арбітражера
– дослідження можливості реалізації арбітражного доходу через похідні
– розробка програмного продукту–робота, робочий алгоритм якого спирається на досліджену модель.

**Методологія**

Аналіз існуючих моделей арбітражу показав, що більшість із них спирається на результати дослідження, отримані Кенетом Ерроу та Дж.Дебре ще у 1970 році [2,4,5], або на статистичні розрахунки.

У даному дослідженні використовується поняття справедливої ціни [2], і будь–яке відхилення від цієї ціни дає необхідні, але не достатні умови для існування арбітражу. Найбільша увага приділяється крос–арбітражу між активами, які торгуються у часі за різними цінами (можливо, на різних ринках). Саме в цьому напрямку є великий потенціал для досліджень та розробки нових крос–комбінацій активів для отримання арбітражного доходу від операцій.

У процесі дослідження використовуються наступні припущення:

– використовується принцип ефективного ринку. Це означає, що будь-яка інформація, що стосується даного ринку, відображається на його показниках миттєво, в результаті дій гравців ринку
– множина майбутніх станів ринку є скінчена. На практиці, в реальних умовах ринку, це є абстракцією, але, враховуючи, що гравець використовує в своїй діяльності похідні фінансові інструменти, таке припущення приймає практичний характер
– гравцем вибирається певна кількість активів, з якими він оперує на ринку.

Для формалізації задачі та дослідження умов арбітражу було застосовано векторний аналіз та аналіз опуклих оболонок, які формуються ціновими векторами в просторі станів ринку [2,6]. На базі цього аналізу сформовано межі без ризиковості, діючи в рамках яких, гравець буде позбавлений ризиків. Він або отримає прибуток від стану цін у майбутньому, або нічого не отримає, але при цьому і не втратить. Таким чином, гравець може грати без ризиків втрати своїх активів.

У процесі програмної реалізації було використано програмне середовище Delphi 7.

**Результати дослідження**

Сформовано модель фінансового ринку. Для цього прийнято вважати:

$s=(s_1, s_2, ..., s_N)$ – це вектор активів, що доступні на ринку;

$p=(p_1, p_2, ..., p_N)$ – вектор цін, який визначає ціну кожного активу;

$D=D_{i,j}$ – матриця грошових потоків від активів, де $1 \le i \le N$, $1 \le j \le N$;

$N$ – кількість активів на ринку;

$M$ – кількість потенційних станів ринку;

$\Theta=(\theta_1, \theta_2, ..., \theta_N)$ – вектор, що зображує портфель гравця на ринку, для якого дійсні наступні умови:

– якщо $\theta<0$, то інвестор вибирає коротку позицію на ринку;

– якщо $\theta>0$, то інвестор вибирає довгу позицію за активом;

– якщо $\theta=0$, то даний актив не задіяно в портфелі інвестора.

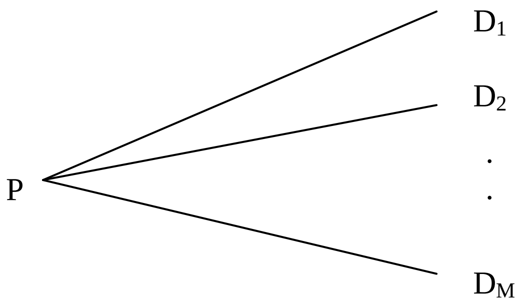


Рис. 1 Геометрична інтерпретація одноперіодичної моделі ринку

Таким чином, поняття ціни портфелю можна виразити формульно:

$$V=\theta \cdot p=\sum_{i=1}^{N} \theta_i \cdot p_i ,$$

а грошові надходження у j–ому стану ринку дорівнюють:

$$D=\theta \cdot D_{.j}=\sum_{i=1}^{N} \theta_i \cdot D_{i,j} .$$

На основі цих формул виведено умови існування арбітражного портфеля.

Арбітражний портфель – це будь–який портфель інвестора, що задовольняє наступним умовам:

$$\theta \cdot p=0 ,$$

де $\theta \cdot D_{.j} \geq 0$, для всіх $1 \leq j \leq M$, та $\theta \cdot D_{.j} > 0$, для деяких $1 \leq j \leq M$,

або $\theta \cdot p < 0$, де $\theta \cdot D_{.j} \geq 0$, для будь–яких $1 \leq j \leq M$.

Тобто арбітражний портфель – це така позиція на ринку, що будь–який портфель має нульову початкову вартість та є беззбитковим, не зважаючи на кінцевий стан ринку. Такий портфель дає можливість отримувати прибуток без ризику у часі [2].

В ході дослідження було застосовано інтерпретацію теореми Мінковського–Фаркаша в термінах арбітражної стратегії, а саме:

якщо існує вектор, що складається з позитивних значень

$$\pi = (\pi_1, \pi_2, ..., \pi_M),$$

для якого виконується така рівність в матричному вигляді:

$$p = \pi \cdot D,$$

або у алгебраїчній формі :

$$p_i = \sum_1^M D_{ij} \cdot \pi_j,$$

для будь–яких $1 \leq i \leq M$,

то це означає, що на даному ринку не існує арбітражного портфеля [2].

Такий вектор домовимося називати вектором стану цін. Було введено поняття „ризик–нейтральної міри”.

Ризик–нейтральна міра розраховується на основі вектора стану цін і має формульне вираження:

$$\hat{\pi}_j = \frac{\pi_j}{\left(\sum_1^M \pi_k\right)}, \text{ де } 1 \leq j \leq M.$$

Ці коефіцієнти є позитивно визначені та мають суму, яка дорівнює 1. На основі цих властивостей в математичних термінах вони можуть трактуватися як імовірнісна міра.

Розглянемо поняття повноти ринку. Ринок будемо називати повним, якщо для будь–якого вектора грошових потоків $(D_1, D_2, ...D_M)$ існує портфель із торгуючих активів $(\theta_1, \theta_2, ..., \theta_N)$, який має грошові надходження $D_j$ в стані $j$ для будь–яких $1 \leq j \leq M$.

Повнота ринку еквівалентна існуванню матриці грошових надходжень $D = D_{i,j}$ за умови, що виконується система лінійних рівнянь

$$\theta \cdot D = E,$$

або

$$\sum_{i=1}^N \theta_i \cdot D_{i,j} = E_j,$$

яка має розв’язки $\theta \in R^N$, для будь–яких $E \in R^M$.

У дослідженні представлено біноміальну та триноміальну модель фінансового ринку.

Біноміальна модель дійсна тоді, коли інвесторам відомо, що ринок зможе прийняти лише два стани, і на ринку інвестор використовує два активи: безризикову облігацію та базовий актив s:

Ризик–нейтральна міра задовольняє системі лінійних рівнянь

$$\begin{cases} \hat{\pi}_1 + \hat{\pi}_2 = 1 \\ \hat{\pi}_1 \cdot U + \hat{\pi}_2 \cdot D = 1 + R \end{cases}$$

Система має позитивно визначені розв'язки, коли:

$$D < 1 + R < U$$

Тоді розв'язком лінійної системи є:

$$\hat{\pi}_1 = \frac{1 + R - D}{U - D}, \qquad \hat{\pi}_2 = \frac{U - 1 - R}{U - D}.$$

Варто згадати, що від'ємні розв'язки нас не цікавлять, так як вони вже не вкладаються у визначення ризик-нейтральної міри.

Таким чином, ризик–нейтральна міра повністю визначена параметрами біноміальної моделі.

В триноміальній моделі ми описуємо ринок, що є неповним.

Припустимо, що існує два активи: безризикова облігація з доходністю $R$, яка приносить 1 у.о. в кінці торгового періоду, та актив $s$. Існує три потенційних стани ринку, які відповідають різноманітним грошовим потокам для активу s, які позначаються через $D$, $M$ та $U$.

Нехай виконується нерівність для грошових надходжень від $s$ у різних станах ринку:

$$D < M < U.$$

Обрахуємо умови існування вектора стану цін, тобто ситуацію рівноваги ринку, коли не існує арбітражних можливостей. Так як ми взяли за припущення, що існує безризиковий борговий актив, то ми можемо записати наступну рівність:

$$\frac{1}{1+R} = \pi_1 + \pi_2 + \pi_3$$

для всіх можливих векторів стану цін. Так як не існує арбітража, то ми маємо отримати наступну рівність:

$$P = P \cdot U \cdot \pi_1 + P \cdot M \cdot \pi_2 + P \cdot D \cdot \pi_3,$$

або ж

$$1 = U \cdot \pi_1 + M \cdot \pi_2 + D \cdot \pi_3.$$

Тоді можемо записати систему рівнянь:

$$\begin{cases} 1 = U \cdot \pi_1 + M \cdot \pi_2 + D \cdot \pi_3 \\ \dfrac{1}{1+R} = \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 \end{cases}$$

Із даної системи можна зробити висновок, що не існує арбітражної стратегії тоді і тільки тоді, коли виконується наступна нерівність:

$$D < 1 + R < U,$$

Тобто безризиковий дохід лежить в межах мінімальної та максимальної межі доходності активу $s$.

Припустимо, що цей стан виконується. Тоді множина стану цін може відображатися як лінійний сегмент, що відповідає перетину площин та позитивним квадрантам у просторі $R^3$ [6].

Дві крайніх точки сегменту є:

$$\pi_1 = \frac{(1+R)-D}{(1+R)\cdot(U-D)}, \qquad \pi_2 = 0, \qquad \pi_3 = \frac{U-(1+R)}{(1+R)\cdot(U-D)}$$

та

$$\pi_1 = 0, \qquad \pi_2 = \frac{M-(1+R)}{(1+R)\cdot(M-D)}, \qquad \pi_3 = \frac{(1+R)-D}{(1+R)\cdot(M-D)}$$

за умови, якщо $M \geq (1+R)$, або

$$\pi_1 = \frac{(1+R)-M}{(1+R)\cdot(U-M)}, \qquad \pi_2 = \frac{U-(1+R)}{(1+R)\cdot(U-M)}, \qquad \pi_3 = 0$$

для випадку, коли $M < (1+R)$.

Так як ціни активів, що торгуються, – лінійні функції від вектора стану цін, то, це обчислення може бути застосоване, щоб отримати межі за вартістю активів з ризиками, що засновані на доступній інформації. Відомо, що лінійна функція, визначена на замкнутій опуклій множині, досягає своїх максимальних та мінімальних значень в точках екстремуму цієї множини (так як множина векторів стану цін - це відкрита опукла множина, то максимуми та мінімуми досягаються на вироджених векторах стану цін, які мають складові, рівні нулю, а звідси - неточно відповідають стану цін).

Для того щоб більш детально дослідити це, розглянуто випадок з Call інструментом за основним активом s, та страйк-ціною, рівною K.

Припустимо, що

$$P\cdot M < K < P\cdot U.$$

Тоді грошові потоки для цього інструмента будуть PU – K у випадку 1, та 0 для випадку 2 та 3. Фактично стан 1 буде означати, що інвестор вибере коротку позицію за основним активом, без застосування інструменту Call, а у випадку випадіння станів 2 та 3 інвестор скористається інструментом Call та залишиться без виграшу, але і без програшу.

Вартість інструменту Call без арбітражу буде дорівнювати:

$$C = \pi_1 \cdot (P\cdot U - K).$$

Відповідно, використовуючи напрацювання відносно триноміальної моделі, ми знаходимо, що:

$$C^{+} = \frac{(1+R)-D}{(1+R)\cdot(U-D)}\cdot(P\cdot U-K)$$

є верхньою межею для ціни інструменту Call у даному випадку. Якщо M≥(1+R), то нижня межа за ціною складає $C^{-}$ = 0, а якщо M<(1+R), то нижня межа дорівнює

$$C^{-} = \frac{(1+R)-M}{(1+R)\cdot(U-M)}\cdot(P\cdot U-K)$$

Звісно, зрозуміло, що нижня та верхні межі співпадають, коли M=D, та ми знову отримуємо результат біноміальної моделі.

Є декілька векторів стану цін, які можуть бути використані для отримання часткової інформації про справедливі ціни. Цей результат можна інтерпретувати у фінансах як коефіцієнт несхильності до ризику різноманітних агентів.

Так як повна інформація відносно стану цін відсутня, то трансакції, які укладені поза межами, припускають прийняття певного ризику на себе як для покупця, так і для продавця. Ця сфера присутності ризиків є досить цікавою для подальшого дослідження проблематики невизначеності.

На фінансовому ринку в рамках даної моделі можуть виникати наступні складнощі:

- ринок може бути перевизначеним, тобто система, яка описує даний ринок, є виродженою і може бути розв'язана лише наближеними методами, які є недопустимими для даної сфери застосування;
- ринок є недовизначеним, тобто кількість рівнянь в системі, яка описує ринок, є меншою за кількість змінних. Виникає певна нестача інформації.

Для розв'язання проблеми наддетермінованої системи в межах моделі розроблено крос-метод, що базується на теоремі Мінковського–Фаркаша [3]. В даному випадку точність результату визначається лише точністю ведення розрахунків.

У випадку недовизначеності система може не мати розв'язки або їх буде безліч. У межах моделі було введено апріорну інформацію щодо вектору стану цін. Це дозволяє довизначити систему і знайти розв'язки, які враховують як базову систему, так і введену апріорну інформацію.

Розв'язуючи систему з апріорною інформацією, ми можемо отримати межі беззбитковості, діючи в яких, гравець може уникнути ризику. Але з об'єктивних причин частіше доводиться діяти, спираючись на ці межі, а це призводить до певної міри ризику, дослідження та вимірювання якого є цікавим питанням як з точки зору математичних методів, так і практичної корисності.

## Висновки

Арбітраж на строкових ринках завжди існуватиме, так як на цих видах ринків функціонує велика кількість непрофесійних гравців, дії яких непередбачувані та іноді неадекватні, тому ціни активів постійно відхиляються від справедливої вартості. Інше питання, чи достатньо довго існує арбітраж, щоб встигнути його прорахувати та реалізувати? Для цього необхідна розробка програмних продуктів, які дозволяють швидко реагувати на арбітражні можливості та приймати необхідні позиції на ринку.

В ході даного дослідження було сформовано модель ринку та на її основі розроблено критерії існування арбітражного портфелю, також розроблено програмний продукт у середовищі Delphi 7, який здатний автоматично розпізнавати арбітражні можливості на ринках та реалізовувати їх.

Подальші дослідження мають бути сконцентровані навколо вимірювання ризиків та дослідження невизначеності в розробленій моделі. З точки зору автора, важливо розглянути існування арбітражу на ринках з великим ступенем волатильності та ринках, що залежні між собою.

Досліджена модель є адаптивного характеру, тому може з легкістю бути адаптована під умови різних ринків. Це є досить корисним, враховуючи те, що гравець може змінювати предмети торгів (базові активи) та ринки, на яких він функціонує.

**Література**:

1. Чуйко А.С., Шершнев В.Г. Математические основы финансового обслуживания [Текст]: Учебное пособие. – М.: Изд. Российской экономической академии; Екатеринбург: Деловая книга, 1998. – 128 с. – 10000 пр. – ISBN 5-73070-130-6.
2. Arrow K. Essays in the Theory of risk Bearing [Text]. Markham Publishing: American Elsevier. London, GB. 1971. – 278 p. – ISBN 8410-2001-9.
3. Ширяев А.Н. Основы стохастической финансовой математики. Факты, модели [Текст]. М.: Изд. ФАЗИС, 2004. – 1076 с. – 25000 пр. – ISBN 5-7036-0092-8.
4. Debreu G. Theory of Value: An Axiomatic Analysis of Economic Equilibrium. Yale University Press, New Haven, 1971. – 128 p. – ISBN 0-300-01559-3.
5. Rockafellar R.T. Convex analysis [Text]: Princeton University Press, Princeton, NJ, 1997. – 469 p. – ISBN 978-0-691-01586-6
6. Hull, J., Options, Futures and Other Derivative Securities [Text]: 6th edition, Upper Saddle River, N.J., Prentice Hall, 2006. – 816 p. – ISBN 013149908-4.
7. Мельников А.В. Финансовые рынки: стохастический анализ и расчет производных ценных бумаг [Текст]: Учебное пособие. – М.: ТВП, 1997. – 130 с. – 25000пр. – ISBN 5-85484-023-5.