

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

І. К. Рисцов

Імітаційне моделювання економічних систем

Навчальний посібник

Затверджено Вченою радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра
за спеціальністю 051 “Економіка”,
освітня програма “Економічна кібернетика”

Електронне мережне навчальне видання

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2022

Рецензенти: *Войтко С.В.*, доктор економ. наук, професор, КПІ ім. Ігоря Сікорського

Відповідальний редактор *Бояринова К.О.*, доктор економ. наук, професор, КПІ ім. Ігоря Сікорського

*Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
(протокол № 5 від 26.05.2022 р.)*

Даний навчальний посібник містить конспект лекцій з дисципліни «Імітаційне моделювання економічних систем». Призначений для здобувачів ступеня бакалавра за спеціальністю 051 «Економіка», освітня програма «Економічна кібернетика».

Реєстр. № 21/22- 597. Обсяг 1.3 авт. арк.

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
проспект Перемоги, 37, м. Київ, 03056
<https://kpi.ua>

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру видавців, виготовлювачів
і розповсюджувачів видавничої продукції ДК № 5354 від 25.05.2017 р

© І.К. Рисцов
© КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2022

ЗМІСТ

Лекція 1. Статистичне моделювання	4
Лекція 2. Скінченні ланцюги Маркова	7
Лекція 3. Поглинаючі ланцюги Маркова.....	10
Лекція 4. Ергодичні та регулярні ланцюги Маркова.....	13
Лекція 5. Моделювання неперервних систем	17
Лекція 6. Неперервні економічні моделі	21
Лекція 7. Дискретні динамічні моделі	24
Лекція 8. Дискретні економічні моделі	27
Лекція 9. Програми імітаційного моделювання	29
Список літератури.....	32

Лекція 1. Статистичне моделювання

Моделювання, у якому відтворюються випадкові явища, називається *статистичним моделюванням*. На комп'ютері випадкові фактори імітуються за допомогою спеціальної програми, яка називається *генератором псевдовипадкових чисел*. Статистичне моделювання виходить з чисельного методу рішення математичних задач, званого методом Монте-Карло чи методом статистичних випробувань.

1.1. Генератори псевдовипадкових чисел

Більшість алгоритмічних генераторів (датчиків) псевдовипадкових чисел засновані на рекурентному співвідношенні першого порядку наступного виду:

$$x_n = F(x_{n-1}), \quad (1.1)$$

де $F(x)$ – функція, x_0 – початкове значення, яке зазвичай вибирається довільно. Детермінована послідовність $(x_n, n \geq 1)$, називаються *послідовністю псевдовипадкових чисел*. Тут використовується явище детермінованого хаосу, коли для деяких функцій $F(x)$ послідовність (1.1) виглядає хаотичною, отже її можна приблизно вважати випадковою.

Як базовий імовірнісний розподіл вибирається рівномірний розподіл на одиничному інтервалі $(0,1)$. Для цього одиничний інтервал ділиться на 2^m рівних частин і випадкова величина вважається квазірівномірно розподіленою, якщо її значення з рівною ймовірністю 2^{-m} потрапляють в інтервал $((i-1) \cdot 2^{-m}, i \cdot 2^{-m}]$, $1 \leq i \leq 2^m$. Квазірівномірний розподіл наближено вважається неперервним рівномірним розподілом. Потім за допомогою математичних перетворень з рівномірного розподілу виходять інші ймовірні розподіли, які будуть розглянуті в подальшому.

Щоб послідовність (1.1) можна було використовувати у статистичному моделюванні до неї пред'являються такі вимоги:

- вона має бути рівномірно розподілена;
- містити статистично незалежні (некорельовані) числа;
- мати якнайбільший період зациклювання.

Одна з перших процедур отримання псевдовипадкових чисел була запропонована відомим американським математиком Дж. фон Нейманом і отримала назву *методу середини квадрата*. Наприклад, якщо число $x_0 = 0,2152$, то $x_0^2 = 0,04631104$, тоді як наступне число беруться чотири середні цифри числа x_0^2 , тобто $x_1 = 0,6311$ і т. д. Недоліком цього методу є швидке зациклювання і можливість влучення у нуль, тобто. у ряді випадків хаос може взагалі бути відсутнім.

Широке застосування отримали конгруентні процедури генерації псевдовипадкових послідовностей, засновані на діленні натуральних чисел із залишком. Позначимо через $(\alpha \bmod M)$ залишок від ділення натурального числа α на число (модуль) M . Наприклад, $(1984 \bmod 10) = 4$, $(5008 \bmod 10^3) = 8$. Конгруентні процедури мають такий вигляд:

$$x_n = ((\lambda \cdot x_{n-1} + \mu) \bmod M), \quad (1.2)$$

де x_n , λ , μ , M – натуральні числа. В даний час конгруентну процедуру використовують майже всі системи програмування для обчислення послідовностей рівномірно розподілених псевдовипадкових чисел.

1.2. Метод Монте Карло

Метод Монте-Карло був створений у 1949 р. зусиллями американських математиків Дж. фон-Неймана та С. Улама. У цей час розгорнулися роботи зі створення атомної бомби, і Нейман запропонував використати випадкові числа для швидкого, але менш точного обчислення інтегралів. Цей метод був названий на честь однойменного міста в окрузі Монако, де розташована всесвітньо відома рулетка.

Суть методу Монте-Карло полягає у проведенні N незалежних випробувань, результат яких залежить від деякої випадкової величини, розподіленої за відомим законом. Отримані статистичні дані обробляються і представляються як наближені чисельні оцінки шуканих величин.

Теоретичною основою методу Монте-Карло є граничні теореми теорії ймовірностей, що гарантують підвищення якості статистичних оцінок зі збільшенням кількості випробувань. Важливо відзначити, що метод Монте-Карло можна застосовувати як для вирішення завдань, що залежать від випадкових факторів; так для вирішення традиційних математичних завдань.

1.2.1. Обчислення площі

Проілюструємо метод Монте-Карло на прикладі обчислення площ плоских фігур та обчислення числа π , як відношення площі кола до площі квадрата, до якого вписано це коло. Одне випробування полягає у випадковому виборі точки у квадраті і це випробування повторюється N разів. Іншими словами, N точок випадково розкидаються по квадрату. Потім обчислюється відношення числа точок, які потрапили в коло, до N , і це відношення береться як наближеного значення для відношення площ. Збільшенням числа точок можна досягти більш точної оцінки числа π (рис. 1.1).

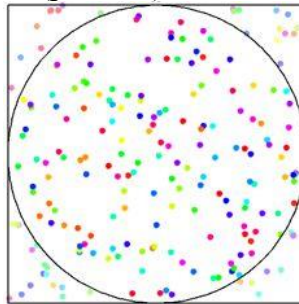


Рис. 1.1. Обчислення числа π .

Оскільки площа кола дорівнює πR^2 , а площа описуючого квадрата дорівнює $4R^2$, то відношення цих площ дорівнюватиме $\pi/4$. Звідси виходить така формула для обчислення наближеного значення числа π :

$$\pi \approx \frac{4 \cdot N_k}{N}, \quad (1.3)$$

де N_k - число точок, що потрапили всередину кола, а N - загальна кількість точок.

1.2.2. Завдання Бюфона

Хорошою ілюстрацією методу статистичного моделювання є задача французького математика Бюфона, що він поставив ще 1777 року. Припустимо, що площина розділена горизонтальними паралельними прямими, відстань між якими дорівнює 1 см. На площину кидають голку завдовжки 1 см. і потрібно визначити ймовірність того, що голка перетне одну з прямих.

Математичний аналіз цього завдання показує, що ця ймовірність, дорівнює $2/\pi$. Таким чином, якщо N разів кинути голку і вона N_k разів перетне деяку пряму, то відношення N_k/N можна вважати наближеним значенням шуканої ймовірності. Звідси виходить така формула для обчислення наближеного значення π :

$$\pi \approx \frac{2 \cdot N}{N_k}. \quad (1.4)$$

Група французьких офіцерів під час наполеонівських воєн заради забави справді провела подібний експеримент, але без особливого успіху, оскільки отримані наближення числа виявилися дуже грубими. Це показує, що метод Монте-Карло має свої недоліки, яку будуть обговорюватися далі.

1.2.3. Обчислення визначених інтегралів

Нехай треба оцінити значення заданого визначеного інтегралу:

$$I = \int_a^b f(x) dx, \quad (1.5)$$

де $f(x)$ неперервна функція, яку, наприклад, не вдається інтегрувати аналітично. Оскільки визначений інтеграл (1.5) згідно з теоремою Ньютона-Лейбніца дорівнює площі криволінійної трапеції, яка показана на рис. 1.2, то помістивши цю трапецію в прямокутник, можна скористатися методом, який описаний у пункті 1.2.1. Але в даному випадку існує простіший шлях, оскільки випадкові точки можна вибрати на самому інтервалі інтегрування $[a, b]$, а не в двовимірній області.

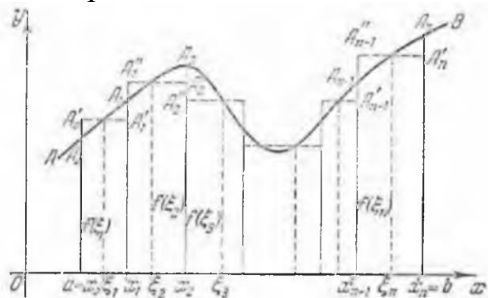


Рис. 1.2. Визначний інтеграл.

Розглянемо неперервну випадкову величину X , рівномірно розподіленою в інтервалі інтегрування $[a, b]$ з щільністю $p(x) = 1/(b - a)$. Таку випадкову величину можна отримати з випадкової величини U рівномірно розподіленої на одиничному інтервалі $[0, 1]$ за допомогою лінійного перетворення:

$$X = (b - a) \cdot U + a. \quad (1.6)$$

Тоді згідно з формулою з теорії ймовірностей, математичне очікування випадкової величини $Y = f(X)$ дорівнюватиме:

$$M[Y] = M[f(X)] = \int_a^b f(x) \cdot p(x) dx = \frac{I}{b - a}. \quad (1.7)$$

Значить $I = M[f(X)] \cdot (b - a)$. Але згідно зі статистичним законом, математичне очікування випадкової величини можна приблизно обчислити за допомогою вибіркового середнього. У цьому полягає ідея методу Монте-Карло обчислення інтеграла (1.5).

Вибираємо n псевдовипадкових чисел x_1, \dots, x_n , на відрізку $[a, b]$. Для цього можна скористатися, наприклад, функцією СЛЧИС із програми Excel та формулою перетворення (1.6). Тоді з формули (1.7) отримуємо наступну формулу обчислення наближеного значення інтеграла:

$$I \approx \frac{b - a}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i). \quad (1.8)$$

На практиці формула (1.8) застосовується рідко, оскільки вона може поступатися за точності навіть формулі прямокутників для наближеного обчислення інтеграла, при тому ж обсязі обчислень. У цьому полягає головний недолік методу Монте-Карло.

Але ситуація змінюється на протилежну, наприклад, під час обчислення кратних інтегралів. Тут метод Монте-Карло починає значно вигравати, оскільки квадратурні формули сильно ускладнюються, а метод Монте-Карло залишається практично без змін.

Лекція 2. Скінченні ланцюги Маркова

Розглянемо скінченні ланцюги Маркова, які є одним із видів дискретних випадкових процесів та мають численні застосування.

2.1. Стохастичні вектори та матриці

Числовий вектор $p = (p_1, p_2, \dots, p_q)$ називається неотрицательним $p \geq 0$, якщо його компоненти є невід'ємними дійсними числами. Стохастичним вектором p називається невід'ємний вектор, який задовольняє умову нормування:

$$p_1 + \dots + p_q = 1 \quad (2.1)$$

Позначимо через e^T одиничний вектор-стовпець довжини q , тобто вектор, всі компоненти якого дорівнюють одиниці. Тоді умову (2.1) можна записати у вигляді матричного множення вектора рядка $p = (p_1, p_2, \dots, p_q)$ на вектор-стовпець e^T :

$$p \cdot e^T = 1 \quad (2.2)$$

Матриця F називається неотрицательной $F \geq 0$, якщо її елементи є невід'ємними дійсними числами. Квадратна матриця F називається стохастичною, якщо кожен її рядок є стохастичним вектором. Для невід'ємної матриці F розміру $q \times q$ умова стохастичності, як випливає з умови (2.2), рівносильно такій умові:

$$F \cdot e^T = e^T \quad (2.3)$$

Пропозиція 2.1. Добуток $p \cdot F$ стохастичного вектора $p = (p_1, p_2, \dots, p_q)$ на стохастичну матрицю F розміру $q \times q$ буде стохастичним вектором.

Доведення. Очевидно, що з умов $p \geq 0$ та $F \geq 0$ випливає, що $p \cdot F \geq 0$. Далі скористаємося асоціативністю матричного множення та умовами (2.2) та (2.3):

$$(p \cdot F) \cdot e^T = p \cdot (F \cdot e^T) = p \cdot e^T = 1.$$

Отже, згідно з умовою (2.2) вектор $p \cdot F$ буде стохастичним. \square

Наслідок 2.2. Добуток стохастичних матриць однакового розміру є стохастичною матрицею того ж розміру.

2.2. Ланцюги Маркова

Множина натуральних чисел \mathbb{N} , доповнена нулем, будемо вважатимемо дискретним часом $T = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Нехай $S = \{1, \dots, q\}$ – скінченна множина. Дискретним випадковим процесом на S або *дискретним ланцюгом* називається послідовність випадкових величин:

$$W = s_0, s_1, \dots, s_n \quad (2.4)$$

кожне з яких розподілене на множині S відповідно до стохастичного вектору π_t , $0 \leq t \leq n$, незалежно від інших величин. Такі послідовності називаються реалізаціями дискретного випадкового процесу. Імовірність появи кожної конкретної реалізації виду (2.4) в силу незалежності величин дорівнює $\pi_0(s_0) \cdot \pi_1(s_1) \cdot \dots \cdot \pi_n(s_n)$. Таким чином, отримуємо розподіл ймовірностей на всіх реалізаціях довжини $n + 1$, число яких дорівнює q^{n+1} . Прикладом дискретного ланцюга є послідовне підкидання монети, коли всі випадкові величини s_n розподілені на множині двох елементів $\{0, 1\}$ однаково чиним $\pi = (1/2, 1/2)$.

Визначення 2.1. Дискретним ланцюгом Маркова називається трійка $C = (S, F, \pi_0)$, де $S = \{1, \dots, q\}$ – множина станів ланцюга, а $F = [p_{ij}]$, $1 \leq i, j \leq q$ – стохастична матриця, що складається з умовних ймовірностей переходів ланцюга $p_{ij} = F(j|i)$, $1 \leq i, j \leq q$, π_0 – початковий розподіл ймовірностей станів.

Ланцюг Маркова (ЛМ) працює (рухається) у дискретному часі, тому умовні ймовірності $F(j|i)$ вважаються як ймовірності переходу ланцюга зі стану i у стан j у будь-який момент часу n :

$$F(j|i) = P(s_n = j | s_{n-1} = i), \quad 1 \leq i, j \leq q \quad (2.5)$$

Зауважимо, що умовні ймовірності переходів $F(j|i)$ не залежать від часу, тому такий ланцюг Маркова називається стаціонарним (або однорідним).

Випадкова послідовність (2.4) для ланцюгів Маркова виходить в такий спосіб. Вибираємо початковий стан s_0 відповідно до початкового розподілу ймовірностей π_0 .

Потім, якщо $s_0 = i$, то вибираємо наступний стан s_1 у відповідності з i -им рядком матриці переходів $F(j|i)$, $1 \leq j \leq q$ і т. д. Звідси випливає, що для ланцюга Маркова ймовірність появи конкретної послідовності виду (2.4) дорівнює такому числу:

$$P_C(W) = \pi_0(s_0) \cdot F(s_1|s_0) \cdot \dots \cdot F(s_n|s_{n-1}) \quad (2.6)$$

Іншими словами, в ланцюгах Маркова випадкові величини в послідовності (2.4) залежать друг від друга, але кожна з них розподілена у відповідності з рядком матриці F , який залежить лише від стану s_{t-1} , $1 \leq t \leq n$, в попередній період часу. Ця властивість стохастичних систем називається *марківською*.

Нехай в період часу $t - 1$ стани ланцюга Маркова розподілені у відповідності зі стохастичним вектором π_{t-1} , тоді в наступний період часу вони будуть розподілені таким чином $\pi_t(j) = \pi_{t-1}(1) \cdot p_{1j} + \dots + \pi_{t-1}(q) \cdot p_{qj}$, $1 \leq j \leq q$. Таким чином імовірнісні розподіли станів у сусідні моменти часу задовольняють такому співвідношенню для всіх t :

$$\pi_t = \pi_{t-1} \cdot F, \quad (2.7)$$

де F – матриця переходів. Звідси за індукцією випливає таке співвідношення для будь-якого $t \geq 1$:

$$\pi_t = \pi_0 \cdot F^t. \quad (2.8)$$

Таким чином, незважаючи на випадковий характер послідовності станів (2.4), послідовність імовірнісних розподілів (2.8) у ланцюгах Маркова являється *детермінованою*.

Нехай тепер $\pi_0 = \delta_i$ буде детермінованим розподілом, тобто всі компоненти вектору π_0 дорівнюють нулю за виключенням i -ої компоненти, яка дорівнює одиниці. Тоді з рівності (2.8) випливає таке твердження.

Пропозиція 2.3. Елемент $p_{ij}(n)$, $1 \leq i, j \leq q$, матриці F^n дорівнює ймовірності переходу ланцюга Маркова зі стану i в стан j за n періодів часу.

Покладемо $F(n) = F^n$, тоді з рівності $F^{m+n} = F^m F^n$ отримуємо рівняння *Колмогорова-Чепмена* для скінченних ланцюгів Маркова при всіх m і n :

$$F(m+n) = F(m) \cdot F(n). \quad (2.9)$$

Якщо розписати співвідношення (2.9) в елементах матриць, то отримаємо *рівняння Маркова*:

$$p_{ij}(m+n) = \sum_{k=1}^q p_{ik}(m) \cdot p_{kj}(n), \quad 1 \leq i, j \leq q. \quad (2.10)$$

Переходи в ланцюзі Маркова визначаються матрицею переходів F , але більш наочним є орієнтований граф (орграф) цієї матриці. Поставимо у відповідність матриці F розміру $q \times q$ помічений орграф G_F з вершинами $S = \{1, \dots, q\}$, у якому з вершини i проводиться дуга у вершину j і позначається елементом матриці p_{ij} , якщо $p_{ij} \neq 0$. Зауважимо, що для стохастичної матриці F сума позначок дуг, що виходять із кожної вершини орграфа G_F , буде дорівнювати одиниці, тому цей орграф також можна назвати стохастичним. В цьому випадку матриця F буде зваженою матрицею суміжності для орграфа G_F , тому ланцюг Маркова однозначно визначається своїм стохастичним графом.

Приклад 2.4. На рис. 2.1 показано ланцюг Маркова, пов'язаний із «випадковим блуканням». Припустимо, що частка рухається по прямій і за один період часу може зміститися на одиницю вліво або вправо з ймовірністю 0,5, поки не досягне однієї з крайніх вершин, де вона поглинається назавжди. Тоді стохастичний орграф для випадкового блукання з поглинаючими кінцями матиме такий вигляд.

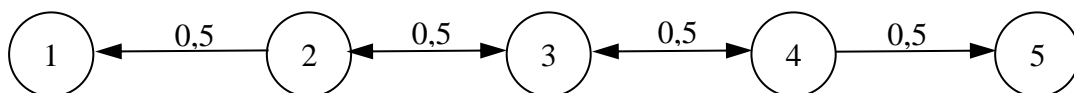


Рис. 2.1. Орграф для випадкового блукання з поглинаючими кінцями.

Приклад 2.5. Припустимо тепер, що частка, досягнувши однієї з крайніх вершин, «відбивається» і з ймовірністю 1 повертається до сусідньої вершини. Тоді оргграф переходів матиме такий вигляд.

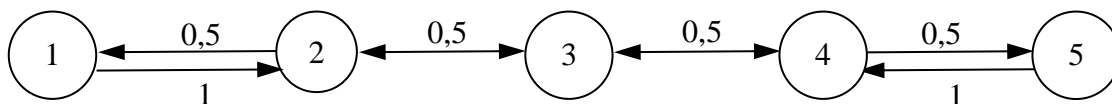


Рис. 2.2. Оргграф випадкового блукання з відбиваючими кінцями.

2.3. Класифікація ланцюгів Маркова

Стани ланцюга Маркова S класифікуються за допомогою відношення досяжності на його стохастичному оргграфі G_F . Стан j називається досяжним зі стану i , якщо в оргграфі G_F існує шлях зі стану i в стан j . У цьому випадку з пропозиції 2.3 випливає, що існує число n таке, що $p_{ij}(n) > 0$. Оскільки між досяжними вершинами існує простий шлях, у якому стани не повторюються, то досяжних вершин існує число n таке, що $p_{ij}(n) > 0$ і $n < q$.

Два стани i і j називаються взаємно досяжними або сполучними, якщо існує шлях зі стану i до стану j і навпаки з j до i . Відношення взаємної досяжності є відношенням еквівалентності (воно рефлексивно, симетрично і транзитивно) та його класи називаються *компонентами сильної зв'язності* чи *класами* ланцюга Маркова. Клас ланцюга називається замкнутим (або інваріантним), якщо з нього не можна вийти, тобто будь-яка дуга орграфа G_F , яка виходить зі стану цього класу, знову веде до стану цього класу.

Визначення 2.2. Замкнуті класи (компоненти сильної зв'язності) називаються *ергодичними* класами ланцюга Маркова, а стани, що належать цим класам, називаються *ергодичними* станами.

Якщо випадкова послідовність станів (2.4) ланцюга Маркова потрапляє в ергодичний клас, вона там залишається назавжди. Будь-який скінченний ланцюг Маркова має принаймні один ергодичний клас, оскільки з будь-якого незамкнутого класу можна вийти, але такий шлях повинен бути скінченним і повинен закінчитися в ергодичному класі.

Якщо ергодичний клас складається з одного стану i , то стан i називається *поглинаючим*. Очевидно, що стан i буде поглинаючим для ланцюга Маркова S тоді і тільки тоді, коли $p_{ii} = 1$, де p_{ii} – діагональний елемент матриці переходів F .

Визначення 2.3. Ланцюг Маркова S називається *поглинаючим*, якщо всі його ергодичні класи складаються з одного (поглинаючого) стану.

Ергодичними класами ланцюга Маркова, показаного на рис. 2.1, будуть крайні поглинаючі стани 1 і 5, отже, цей ланцюг Маркова буде поглинаючим.

Визначення 2.4. Незамкнуті класи (сильно зв'язні компоненти) називаються *неповоротними* класами ланцюга Маркова, а стани з цих класів називаються *неповоротними* (або несуттєвими, перехідними) станами.

Якщо випадкова послідовність станів (2.4) ланцюга Маркова залишає неповоротний клас, то вона туди вже ніколи не повернеться. У ланцюзі Маркова, показаному на рис. 2.1 стану 2, 3 і 4 будуть неповоротними і разом вони утворюють неповоротний клас $\{2,3,4\}$. На рис. 2.3 показаний ланцюг Маркова з одним незамкненим класом та трьома замкнутими класами, що складаються з кількох станів.

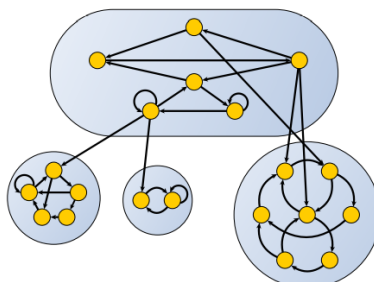


Рис. 2.3. Ланцюг з 4 класам.

Лекція 3. Поглинаючі ланцюги Маркова

Розглянемо основні властивості поглинаючих ланцюгів Маркова. Нагадаємо, що поглинаючий ланцюг складається з підмножини неперворотних станів S_N і підмножини поглинаючих станів S_E , тобто $S = S_N \cup S_E$. Без обмеження спільності будемо вважати підмножину S_N не пустою, що складається з r станів $S_N = \{1, 2, \dots, r\}$, де $r = q - 1$, а підмножина S_E складається з одного останнього стану $S_E = \{q\}$, оскільки поглинаючі стани однакові, тому для зручності їх можна склеїти між собою. Оскільки початковий розподіл станів π_0 тут не є істотним, то поглинаючим ланцюгом Маркова назвемо трійку $C = (S, F, \{q\})$.

Нагадаємо, що згідно з пропозицією 2.3 з попередньої лекції елемент $p_{ij}(n)$ матриці F^n дорівнює ймовірності переходу ланцюга зі стану i в стан j за n періодів (тактів). Вкажемо також зручний критерій для поглинаючого ланцюга Маркова.

Пропозиція 3.1. Ланцюг Маркова буде поглинаючим тоді і тільки тоді, коли з будь-якого стану досягається деякий поглинаючий стан.

3.1. Матриця неперворотних станів

Розглянемо поглинаючий ланцюг $C = (S, F, \{q\})$ з одним поглинаючим станом $\{q\}$ і підматрицю G матриці F , яка визначає переходи між неперворотними станами $G = [p_{ij}]$, $1 \leq i, j \leq r$. Зауважимо, що матриця F має блочно-діагональний вигляд, показаний умовно на рис. 3.1, причому підматриця G буде розташована в центральному діагональному блоці розміру $r \times r$, який виділений синім кольором, а вектор-стовпець H складається з ймовірностей переходів в поглинаючий стан p_{iq} , $1 \leq i \leq r$, і виділений зеленим кольором. Поглинаючий стан переходить у себе з ймовірністю 1.

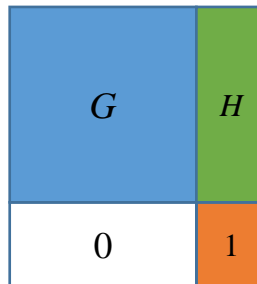


Рис. 3.1. Структура матриці переходів поглинаючого ланцюга Маркова.

З правила множення матриць випливає, що при зведенні матриці F в ступінь n вона зберігає свій блочно-діагональний вигляд і при цьому у центральному блоці буде розташована підматриця G^n . Звідси отримуємо наступну рівність:

$$G^n = [p_{ij}(n)], \quad 1 \leq i, j \leq r. \quad (3.1)$$

Позначимо через $u_i(n)$, $1 \leq i \leq r$, рядкові суми в матриці G^n :

$$u_i(n) = \sum_{j=1}^r p_{ij}(n) = 1 - p_{iq}(n), \quad 1 \leq i \leq r. \quad (3.2)$$

Число $u_i(n)$ є ймовірністю того, що ланцюг залишиться протягом n тактів у множині S_N за умови, що він розпочав рух у стані $i \in S_N$. Виберемо тепер максимальну рядкову суму:

$$v(n) = \max\{u_i(n) : 1 \leq i \leq r\}. \quad (3.3)$$

Лема 3.2. Має місце нерівність $v(m+n) \leq v(m) \cdot v(n)$ для будь-яких m та n .

Доведення. З рівняння Маркова (рівняння (2.10) з лекції 2) та формули (3.2) маємо такі умови:

$$u_i(m+n) = \sum_{j=1}^r p_{ij}(m+n) = \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^r p_{ik}(m) \cdot p_{kj}(n) = \sum_{k=1}^r p_{ik}(m) \sum_{j=1}^r p_{kj}(n) =$$

$$= \sum_{k=1}^r p_{ik}(m) \cdot u_k(n) \leq \sum_{k=1}^r p_{ik}(m) \cdot v(n) = u_i(m) \cdot v(n) \leq v(m) \cdot v(n) .$$

Оскільки нерівність $u_i(m+n) \leq v(m) \cdot v(n)$ виконується для будь-якого i , $1 \leq i \leq r$, то $v(m+n) \leq v(m) \cdot v(n)$ та лема доведена. \square

Нагадаємо, що збіжність у просторі матриць визначається за компонентами, тобто. послідовність матриць G_n збігається до матриці L , якщо кожен елемент $p_{ij}(n)$ матриці G_n сходиться до відповідного елементу l_{ij} матриці L . Надалі нам знадобиться наступне допоміжне твердження з математичного аналізу.

Пропозиція 3.3. Якщо послідовність невід'ємних чисел не зростає і має підпослідовність, що сходиться до нуля, то й сама послідовність сходиться до нуля.

Наступна теорема має фундаментальне значення для поглинаючих ланцюгів Маркова.

Теорема 3.4. Для будь-якого поглинаючого ланцюга Маркова $C = (S, F, \{q\})$ виконується умова $G^n \rightarrow 0$, при $n \rightarrow \infty$.

Доведення. Зауважимо, що послідовність чисел $v(n)$, $n \geq 1$ не зростає:

$$v(1) \geq v(2) \geq \dots \geq v(n) \geq \dots , \quad (3.4)$$

оскільки $v(1) \leq 1$ та з леми 3.2 маємо $v(n+1) \leq v(1) \cdot v(n) \leq v(n)$ для всіх n .

Далі, з пропозиції 3.1 слідує, що в оргграфі G_F для будь-якого стану $i \in S_N$ є простий шлях W_i , що веде в поглинаючий стан $\{q\}$, довжина якого не більша за $r = q - 1$. Доповнивши шлях W_i за необхідності циклами в поглинаючому стані, будемо вважати його довжину рівною r . Це означає, що $p_{iq}(r) > 0$, для всіх $1 \leq i \leq r$. Звідси та з формул (3.2) і (3.3) отримуємо таку нерівність:

$$v(r) < 1 . \quad (3.5)$$

Далі, з леми 3.2 випливає нерівність $v(m \cdot r) \leq v(r)^m$ для всіх m . Звідси і з умови (3.5) слідує, що $v(m \cdot r) \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$. Тоді з умови (3.4) та пропозиції 3.3 заключаємо, що $v(n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Звідси випливає, що всі елементи $p_{ij}(n)$ матриці G^n збігаються до нуля і теорему доведено. \square

3.2. Фундаментальна матриця поглинаючого ланцюга

Позначимо через I одиничну матрицю розміру $r \times r$ та розглянемо матрицю $I - G$.

Теорема 3.5. Для будь-якого поглинаючого ланцюга Маркова $C = (S, F, \{q\})$ матриця $I - G$ має обернену матрицю і виконується така рівність:

$$(I - G)^{-1} = I + G + \dots + G^n + \dots . \quad (3.6)$$

Доведення. Розглянемо таку матричну тотожність, яка справедлива для всіх натуральних чисел $n \geq 1$:

$$(I - G) \cdot (I + G + \dots + G^{n-1}) = I - G^n . \quad (3.7)$$

З теореми 3.4 випливає, що $(I - G^n) \rightarrow I$ при $n \rightarrow \infty$. Оскільки $\det(I) = 1$ і визначник є неперервною функцією елементів матриці, то $\det(I - G^n) \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$. Значить для достатньо великого n буде виконуватись умова $\det(I - G^n) \neq 0$. Звідси і з рівності (3.7) випливає, що $\det(I - G) \neq 0$, так як при множенні матриць визначники перемножуються. Значить матриця $I - G$ має обернену і з рівності (3.7) отримуємо наступну рівність $I + G + \dots + G^{n-1} = (I - G)^{-1} \cdot (I - G^n)$. Переходячи тут до границі при $n \rightarrow \infty$, отримуємо рівність (3.6) та теорему доведено. \square

Визначення 3.1. Матриця $B = (I - G)^{-1}$ називається фундаментальною матрицею поглинаючого ланцюга Маркова $C = (S, F, \{q\})$.

З теореми 3.5 та умови (3.1) випливає, що елементи фундаментальної матриці B мають такий вигляд:

$$b_{ij} = p_{ij}(0) + p_{ij}(1) + \dots + p_{ij}(n) + \dots , \quad 1 \leq i, j \leq r , \quad (3.8)$$

де $p_{ij}(0)$ – елементи одиничної матриці (символи Кронекера $p_{ij}(0) = \delta_{ij}$, $1 \leq i, j \leq r$).

3.3. Середній час поглинання

Нехай, як і раніше, $C = (S, F, \{q\})$ – поглинаючий ланцюг, $i, j \in S_N$ - неповоротні стани, тоді розглянемо випадкову послідовність станів цього ланцюга, яка починається в стані i :

$$W_i = s_0, s_1, \dots, s_n, \quad s_0 = i. \quad (3.9)$$

Далі, розглянемо випадкову величину $x_{ij}(n)$, яка дорівнює 1, якщо послідовність (3.9) в момент часу n потрапляє в стан j та інакше дорівнює нулю. Тоді математичне очікування цієї величини, взяте за всіма послідовностями (3.9) довжини n , можна виразити так:

$$M[x_{ij}(n)] = 0 \cdot (1 - p_{ij}(n)) + 1 \cdot p_{ij}(n) = p_{ij}(n). \quad (3.10)$$

Розглянемо тепер випадкову величину, яка дорівнює сумі величин $x_{ij}(n)$:

$$y_{ij}(n) = x_{ij}(0) + x_{ij}(1) + \dots + x_{ij}(n).$$

Тоді $y_{ij}(n)$ дорівнюватиме загальному числу тактів (моментів часу), що ланцюг проводить у стані j за умови, що він починає рух у стані i . Іншими словами, число $y_{ij}(n)$ дорівнює числу входжень стану j в послідовність (3.9). З рівності (3.10) та за теоремою про математичне очікування суми випадкових величин отримуємо:

$$M[y_{ij}(n)] = p_{ij}(0) + p_{ij}(1) + \dots + p_{ij}(n).$$

Перейдемо в цієї рівності до границі при $n \rightarrow \infty$, тоді із рівності (3.8) отримуємо:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M[y_{ij}(n)] = p_{ij}(0) + p_{ij}(1) + \dots + p_{ij}(n) + \dots = b_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq r.$$

Ця границя відображає середній час, який поглинаючий ланцюг проводить у неповоротному стані при необмеженому русі. Отже, отримуємо таке твердження.

Наслідок 3.6. Для поглинаючого ланцюга Маркова елемент фундаментальної матриці b_{ij} , $1 \leq i, j \leq r$, дорівнює середньому часу, який ланцюг проводить у неповоротному стані j за умови, що він починає необмежений рух у стані i .

Розглянемо тепер функцію $f_{iq}(n)$, яка дорівнює ймовірності першого поглинання неповоротного стану i за n -тактів. Під першим поглинанням розуміється послідовність станів (3.9), у якій $s_n = q$ і всі проміжні стани s_1, \dots, s_{n-1} відмінні від q . З цією функцією пов'язаний наступний нескінченний ряд, сума якого відображає середній час переходу стану i в поглинаючий стан:

$$f_{iq} = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot f_{iq}(n), \quad 1 \leq i \leq r. \quad (3.11)$$

Позначимо через c_i , $1 \leq i \leq r$, суму елементів у i -му рядку фундаментальної матриці $c_i = b_{i1} + \dots + b_{ir}$.

Теорема 3.7. Для будь-якого поглинаючого ланцюга Маркова $C = (S, F, \{q\})$ та будь-якого неповоротного стану $i \in S_N$ ряд (3.11) збігається і виконується така нерівність:

$$f_{iq} = c_i, \quad 1 \leq i \leq r. \quad (3.12)$$

Доведення. Поглинання зі стану $i \in S_N$ може статися за один шаг з ймовірністю p_{iq} або через якийсь проміжний стан $j \in S_N$ і тоді для поглинання треба в середньому $f_{jq} + 1$ шаг. Таким чином невідомі математичні очікування f_{iq} задовольняють наступну систему лінійних рівнянь:

$$f_{iq} = p_{iq} \cdot 1 + \sum_{j=1}^r p_{ij} \cdot (f_{jq} + 1) = \sum_{j=1}^r p_{ij} \cdot f_{jq} + 1, \quad 1 \leq i \leq r.$$

Цю систему рівнянь можна записати у матричному вигляді так $(I - G) \cdot f_q = e^T$, де $f_q = (f_{1q}, \dots, f_{rq})$ – вектор невідомих, а $e^T = (1, \dots, 1)$ – одиничний вектор-стовпець. Згідно з теоремою 3.5 матриця $I - G$ має обернену матрицю $N = (I - G)^{-1}$, тому ця система буде мати одне рішення $f_q = N \cdot e^T$, тобто $f_{iq} = b_{i1} + \dots + b_{ir} = c_i$, $1 \leq i \leq r$. Таким чином, теорему доведено. \square

Лекція 4. Ергодичні та регулярні ланцюги Маркова

Визначення 4.1. Ланцюг Маркова $C = (S, F)$ називається ергодичним (або нерозкладним), якщо його стохастичний оргграф G_F є сильно-зв'язним.

У лінійній алгебрі невід'ємна матриця називається нерозкладною, якщо її оргграф є сильно-зв'язним, з чим пов'язана ця термінологія. Ергодичний ланцюг Маркова складається з одного ергодичного класу, і всі його стани є поворотними. Наприклад, ланцюг, показаний на рис. 2.2 (з лекції 2) для випадкового блукання з відбиваючими кінцями, є ергодичним.

Стохастичний вектор π називається позитивним $\pi > 0$, якщо всі його компоненти позитивні. Стохастичний вектор π називається (лівим) нерухомим вектором для матриці F , якщо $\pi \cdot F = \pi$. Зауважимо, що ергодичний ланцюг Маркова $C = (S, F)$ має тільки один лівий нерухомий вектор, який обов'язково буде позитивним. Ця важлива теорема буде доведена на практичному занятті.

4.1. Час першого досягнення та повернення

Нехай заданий ергодичний ланцюг Маркова $C = (S, F)$, тоді розглянемо функцію $f_{ij}(n)$, яка дорівнює ймовірності першого досягнення стану j із стану i за n тактів. Під першим досягненням розуміється послідовність станів $W = s_0, s_1, \dots, s_n$, у якій $s_0 = i$, $s_n = j$ і всі проміжні стани s_1, \dots, s_{n-1} відмінні від j . При $i = j$ функція $f_{ii}(n)$, $1 \leq i \leq q$, називається ймовірністю першого повернення в стан i за n тактів. З функцією $f_{ij}(n)$ пов'язаний наступний нескінченний ряд, сума якого характеризує середнє число кроків (математичне очікування), необхідних для першого досягнення стану j зі стану i :

$$m_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot f_{ij}(n), \quad 1 \leq i, j \leq q. \quad (4.1)$$

Теорема 4.1. Для ергодичного ланцюга Маркова $C = (S, F)$ ряд (4.1) збігається за будь-яких $1 \leq i, j \leq q$.

Доведення. Припустимо спочатку, що $i \neq j$, тоді побудуємо новий поглинаючий ланцюг Маркова $C_j = (S, F_j, \{j\})$, зробивши стан j поглинаючим. Для цього в оргграфі G_F видалімо усі дуги, що виходять зі стану j і замінимо їх однією петлею. Тоді із сильної зв'язності оргграфу G_F і пропозиції 3.1 (лекція 3) випливає, що ланцюг C_j буде поглинаючим з єдиним поглинаючим станом j . Тоді величина m_{ij} буде співпадати з середнім часом першого поглинання f_{ij} стану i у ланцюзі C_j . Відповідно до теореми 3.7 (лекція 3) час f_{ij} буде скінченним і його можна оцінити нерівністю $f_{ij} \leq c_i + 1$, де c_i – сума елементів i -го рядка фундаментальної матриці ланцюга C_j .

Нехай тепер $i = j$, тоді середній час першого повернення m_{ii} можна виразити через інші математичне очікування m_{ki} наступним чином:

$$m_{ii} = p_{ii} \cdot 1 + \sum_{k \neq i} p_{ik} \cdot (m_{ki} + 1) = \sum_{k \neq i} p_{ik} \cdot m_{ki} + 1. \quad (4.2)$$

Дійсно, ми або відразу повертаємося у стан i за один крок, або повертаємося через інший стан $k \neq i$, що в середньому потребує $m_{ki} + 1$ кроків. Як було доведено у першій частині цієї теореми, всі величини m_{ki} для $k \in S \setminus \{i\}$ будуть скінченним, звідки випливає скінченність величини m_{ii} . Отже, теорему доведено. \square

Оскільки всі величини m_{ij} є скінченними, то співвідношення (4.2) можна узагальнити та записати його для будь-яких величин m_{ij} , $1 \leq i, j \leq q$:

$$m_{ij} = p_{ij} \cdot 1 + \sum_{k \neq j} p_{ik} \cdot (m_{kj} + 1) = \sum_{k \neq j} p_{ik} \cdot m_{kj} + 1 = \sum_{k=1}^q p_{ik} \cdot m_{kj} - p_{ij} \cdot m_{jj} + 1.$$

Це співвідношення можна записати у матричній формі, якщо із величин m_{ij} скласти матрицю $M = [m_{ij}]$, $1 \leq i, j \leq q$:

$$M = F \cdot (M - M_d) + E, \quad (4.3)$$

де M_d - діагональна матриця, складена з елементів m_{ii} , $1 \leq i \leq q$, (інші нулі), а E - матриця повністю складена з одиниць.

Нехай тепер $\pi_0 = (\pi_1, \dots, \pi_q)$ – лівий нерухомий вектор ергодичного ланцюга $C = (S, F)$, тоді помноживши рівняння (4.3) зліва на вектор π_0 , отримуємо:

$$\pi_0 \cdot M = \pi_0 \cdot F \cdot (M - M_d) + \pi_0 \cdot E = \pi_0 \cdot (M - M_d) + e,$$

де e - вектор-рядок, складений з одиниць. Звідси випливає рівність $\pi_0 \cdot M_d = e$. Це означає, що середній час першого повернення у стан i буде оберненим до його нерухомої ймовірності:

$$m_{ii} = \frac{1}{\pi_i}, \quad 1 \leq i \leq q. \quad (4.4)$$

Ці співвідношення є одним із основних результатів теорії ергодичних ланцюгів Маркова.

4.2. Регулярні ланцюги Маркова

Стохастична матриця F називається позитивною $F > 0$, якщо всі її елементи позитивні. Якщо стохастична матриця F позитивна, то для будь-якого стохастичного вектора π виконуються такі нерівності:

$$\pi \cdot F > 0, \quad F \cdot \pi^T > 0, \quad (4.5)$$

оскільки будь-який стохастичний вектор має позитивні компоненти.

Стохастична матриця F називається примітивною (або регулярною), якщо $F^k > 0$ для деякого числа $k \geq 1$. Якщо $F^k > 0$, то з властивості (4.5) випливає, що $F^{k+m} > 0$ для всіх $m \geq 1$. Найменше число k , для якого $F^k > 0$ назвемо порогом примітивної матриці F . Очевидно, що будь-яка позитивна матриця буде примітивною.

Визначення 4.2. Ланцюг Маркова $C = (S, F)$ називається регулярним, якщо його матриця переходів F є примітивною.

Пропозиція 4.2. Будь-який регулярний ланцюг Маркова є ергодичним.

Доведення. Оскільки $F^k > 0$ для деякого числа k , то $p_{ij}(k) > 0$ для всіх $1 \leq i, j \leq q$, де q – число станів ланцюга. Отже, в орграфі G_F є шляхи довжини k між будь-якими двома станами ланцюга, звідки випливає його сильна зв'язність. \square

Проте зворотне твердження невірне, тому коротко пояснимо у чому причина цього. Позначимо через d_i найбільший спільний дільник множини чисел:

$$d_i = \gcd\{n : p_{ii}(n) > 0\}.$$

Стан $i \in S$ називається періодичним, якщо $d_i > 1$, та аперіодичним, якщо $d_i = 1$. Значимо, що повернення у періодичний стан $i \in S$ можливе лише у моменти часу, які кратні числу d_i . З теореми солідарності [1] випливає, що в ергодичного ланцюзі C періоди всіх станів однакові, тому позначимо цей загальний період як d_C . Ланцюг Маркова C називається періодичним, якщо $d_C > 1$, і аперіодичним, якщо $d_C = 1$. Наступна теорема виділяє регулярні ланцюги з ергодичних [1].

Теорема 4.3. Ергодичний ланцюг Маркова буде регулярним тоді і тільки тоді, коли він аперіодичний.

Наприклад, ергодичний ланцюг Маркова, показаний на рис. 2.2 з лекції 2 не буде регулярним, оскільки він періодичний з періодом $d_C = 2$. На жаль, є підручники, в яких регулярні ланцюги називаються ергодичними, і це не випадково.

Визначення 4.3. Кажуть, що ланцюг Маркова $C = (S, F)$ задовольняє ергодичну умову, якщо у нього існує аттрактор π_0 , тобто виконується умова $\pi \cdot F^n \rightarrow \pi_0$ при $n \rightarrow \infty$, для будь-якого початкового розподілу π .

Надалі буде показано, що регулярні ланцюги задовольняють ергодичну умову, коли збіжність векторів розуміється у звичайному сенсі, як збіжність за компонентами.

Ергодичні ланцюги задовольняють цю умову лише для збіжності «у середньому» (збіжність за Ейлером). Тому у подальшому будемо розглядати регулярні ланцюги.

Отже, нехай $F = [p_{ij}]$, $1 \leq i, j \leq q$, – стохастична матриця, де $q \geq 2$, тоді покладемо $\varepsilon_F = \min(p_{ij} : 1 \leq i, j \leq q)$, та зауважимо, що $0 \leq \varepsilon_F \leq 1/2$. Якщо ж матриця F позитивна, то виконуються такі умови:

$$0 < \varepsilon_F \leq 1/2. \quad (4.6)$$

Далі, нехай $v = (v_1, \dots, v_q)$ – довільний вектор, тоді позначимо через $m(v)$ величину його найменшої компоненти, а через $M(v)$ величину його найбільшої компоненти і покладемо $\delta(v) = M(v) - m(v)$. Зазначимо, що $\delta(v) \geq 0$ та умова $\delta(v) = 0$ виконується тоді і лише тоді, коли всі компоненти вектора v однакові. Нагадаємо, що умова $v \leq w$ означає, що кожна компонента вектора v не більше відповідної компоненти вектора w .

Лема 4.4. Нехай F – стохастична матриця та v^T – вектор-стовпець, тоді виконуються умови:

$$m(v^T) \leq m(F \cdot v^T) \leq M(F \cdot v^T) \leq M(v^T), \quad \delta(F \cdot v^T) \leq (1 - 2\varepsilon_F) \cdot \delta(v^T).$$

Доведення. Нехай мінімальна компонента $m(v^T)$ вектора v^T розташована на i -му місці і w^T – вектор, отриманий з v^T заміною всіх його компонентів на максимальну $M(v^T)$, крім однієї мінімальної i -ої компоненти, тоді $v^T \leq w^T$ і $F \cdot v^T \leq F \cdot w^T$, оскільки $F \geq 0$. Далі, компонента x_j вектора $x = F \cdot w^T$, $1 \leq j \leq q$, задовольняє таким умовам:

$$x_j = p_{ij} \cdot m(v^T) + (1 - p_{ij}) \cdot M(v^T) = M(v^T) - p_{ij} \cdot \delta(v^T) \leq M(v^T) - \varepsilon_F \cdot \delta(v^T).$$

Звідси та із умови $F \cdot v^T \leq F \cdot w^T$ отримуємо таку нерівність:

$$M(F \cdot v^T) \leq M(F \cdot w^T) \leq M(v^T) - \varepsilon_F \cdot \delta(v^T). \quad (4.7)$$

Розглянемо тепер вектор $-v^T$, який має мінімальну компоненту $-M(v^T)$ і максимальну $-m(v^T)$. Проведемо аналогічне міркування для вектора $-v^T$, тоді отримаємо:

$$-m(F \cdot v^T) \leq -m(v^T) - \varepsilon_F \cdot \delta(v^T). \quad (4.8)$$

Із нерівностей (4.7) і (4.8) слідує, що $m(v^T) \leq m(F \cdot v^T)$ і $M(F \cdot v^T) \leq M(v^T)$. Крім того, складає ці нерівності отримуємо:

$$\delta(F \cdot v^T) \leq \delta(v^T) - 2 \cdot \varepsilon_F \cdot \delta(v^T) = (1 - 2 \cdot \varepsilon_F) \cdot \delta(v^T).$$

Таким чином, лему доведено. \square

Нехай e^T – одиничний вектор-стовпець довжини q , тобто. вектор усі компоненти якого дорівнюють 1. Якщо у стохастичній матриці L розміру $q \times q$ всі рядки однакові та рівні стохастичному вектору π , то її можна представити у вигляді добутку $L = e^T \cdot \pi$, де e^T – вектор-стовпець розміру $q \times 1$, а π – вектор рядок розміру $1 \times q$.

Теорема 4.5. Нехай F – примітивна матриця, тоді $F^n \rightarrow e^T \cdot \pi_L$ при $n \rightarrow \infty$, де π_L – позитивний стохастичний вектор.

Доведення. Нехай $x_j(0) = e_j^T$ – базисний вектор-стовпець, всі компоненти якого дорівнюють 0, крім j -ої, яка дорівнює 1. Розглянемо послідовність векторів $x_j(n) = F^n x_j(0)$, $n \geq 1$, і покажемо, що виконується наступна умова для всіх $1 \leq j \leq q$:

$$\delta(x_j(n)) \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty. \quad (4.9)$$

Із леми 4.4 випливає, що послідовність чисел $\delta(x_j(n))$ не зростає:

$$\delta(x_j(n-1)) \geq \delta(x_j(n)) \text{ для всіх } n \geq 1. \quad (4.10)$$

Далі, покладемо $G = F^k$, де k – поріг примітивної матриці F , тоді $G > 0$ і з нерівності (4.6) отримуємо такі умови $0 \leq (1 - 2\varepsilon_G) < 1$.

Розглянемо підпослідовність $y_j(n) = G^n x_j(0)$, послідовності $x_j(n)$, де $y_j(n) = x_j(kn)$ для всіх $n \geq 1$. Тоді з леми 4.4 індукцією за n отримуємо для всіх $n \geq 1$:

$$\delta(y_j(n)) \leq (1 - 2\varepsilon_G)^n \cdot \delta(e_j^T) = (1 - 2\varepsilon_G)^n.$$

Звідси та із умови $(1 - 2\varepsilon_G) < 1$ заключаємо, що $\delta(y_j(n)) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Тоді з умови (4.10) та пропозиції 3.3 (лекція 3) випливає властивість (4.9).

Далі, умова (4.5) означає, що послідовність векторів $x_j(n)$ збігається до вектора, всі компоненти якого дорівнюють одному й тому ж числу π_j , тобто $F^n e_j^T \rightarrow \pi_j \cdot e^T$ при $n \rightarrow \infty$.

З властивості (4.5) і леми 4.4 випливає, що $0 < m(x_j(k)) \leq \pi_j$, де k – поріг матриці F . Отже, $0 < \pi_j$ для всіх $1 \leq j \leq q$. Залишається помітити, що вектор $F^n e_j^T$ дорівнює j -му стовпцю матриці F^n , звідки заключаємо, що $F^n \rightarrow e^T \cdot \pi_L$, де $\pi_L = (\pi_1, \dots, \pi_q)$. Оскільки всі матриці F^n є стохастичними, то вектор π_L також буде стохастичним. Отже, теорема доведена. \square

Вектор π_L та матриця $L = e^T \cdot \pi_L$, існування яких доведено в теоремі 4.5, називаються відповідно фінальним (або граничним) вектором та фінальною (граничною) матрицею примітивної стохастичної матриці F . Перейдемо тепер до доведення основної теореми, яка є по суті наслідком попередньої теореми.

Теорема 4.6. Нехай $C = (S, F)$ – регулярний ланцюг Маркова, тоді виконуються такі умови:

- 1) Фінальний вектор π_L є аттрактором, тобто для будь-якого стохастичного вектора π послідовність векторів $\pi \cdot F^n$ збігається до вектора π_L при $n \rightarrow \infty$;
- 2) Фінальний вектор π_L є єдиним нерухомим вектором матриць F та L ;
- 3) $F \cdot L = L \cdot F = L$.

Доведення. 1) Нехай π – стохастичний вектор, тоді з теореми 4.5 випливає, що послідовність векторів $\pi \cdot F^n$ збігається до вектора $\pi \cdot L$. Зазначимо, що $\pi \cdot e^T = 1$, тоді з теореми 4.5 та асоціативності матричного множення отримуємо такі умови:

$$\pi \cdot L = \pi \cdot (e^T \cdot \pi_L) = (\pi \cdot e^T) \cdot \pi_L = 1 \cdot \pi_L = \pi_L. \quad (4.11)$$

2) Якщо перейти до границі у рівності $\pi \cdot F^n \cdot F = \pi \cdot F^{n+1}$ при $n \rightarrow \infty$, то з властивості 1) отримаємо $\pi_L \cdot F = \pi_L$. З рівності (4.11) при $\pi = \pi_L$ випливає, що вектор π_L буде нерухомим і для матриці L . Єдність нерухомого вектора π_L для матриці F випливає з властивості 1), а для матриці L з рівності (4.11).

3) Якщо перейти до границі у рівності $F \cdot F^n = F^{n+1}$ при $n \rightarrow \infty$, то з теореми 4.5 отримаємо $F \cdot L = L$. Аналогічно з рівності $F^n \cdot F = F^{n+1}$ випливає, що $L \cdot F = L$. Отже, теорема повністю доведена. \square

Існування граничного розподілу ймовірностей $\pi_L = (\pi_1, \dots, \pi_q)$ дозволяє сформулювати «закон великих чисел» для регулярних ланцюгів Маркова. Його суть полягає в тому, що незалежно від початкового розподілу ймовірностей станів за досить великого числа тактів фінальна ймовірність π_j показує очікувану (середню) частку часу, яку ланцюг проводитиме в стані j , $1 \leq j \leq q$. Точніше формулювання цього закону можна переглянути в [1].

За аналогією з поглинаючими ланцюгами для регулярного ланцюга $C = (S, F)$ також можна визначити фундаментальну матрицю Z , яка має такий вигляд:

$$Z = (I - (F - L))^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (F - L)^n, \quad (4.12)$$

де I – одинична матриця розміру $q \times q$, а L – гранична для F матриця. За допомогою цієї матриці можна визначити деякі характеристики, що описують поведінку регулярного ланцюга Маркова [1].

Література

1. Кемени Дж., Снелл Дж. Конечные цепи Маркова. – М.: Наука, 1970. – 272 с.

Лекція 5. Моделювання неперервних систем

До цього часу ми розглядали системи зі скінченним числом станів, але при моделюванні економічних систем часто зустрічаються системи з неперервним простором станів. Якщо станом системи є число, то, як правило, воно є точкою в деякому просторі. Якщо до того ж неперервна детермінована система працює у безперервному часі, то для опису її динаміки використовуються *диференціальні рівняння*. Якщо ж неперервна система працює у дискретному часі, то для опису її руху використовуються *різницеві рівняння*. Чисельне рішення диференціального чи різницевого рівняння можна розглядати як різновид імітаційного моделювання системи.

5.1. Модель природного зростання

Процеси, у яких деяка величина збільшується за рівні проміжки часу в одне й те саме число разів, називають *процесами природного зростання*. Прикладами цих процесів може бути ланцюгова реакція при розпаді атомів, зростання біологічних популяцій у сприятливих умовах, зростання вкладу банку і т. д. Якщо припустити, що значення величини $y(t)$ змінюється «миттєво» на одне і теж число $k > 0$, то приходимо до наступного диференціального рівняння:

$$y'(t) = k \cdot y(t), \quad k > 0. \quad (5.1)$$

Розв'язком цього рівняння, як відомо, буде експонента:

$$y(t) = y_0 \cdot e^{kt}, \quad \text{де } y_0 = y(0). \quad (5.2)$$

Ця проста модель має ряд цікавих економічних застосувань.

Задача Бернуллі. Вперше рівняння (5.1) отримав Якоб Бернуллі в 1690 році у зв'язку з завданням про кредит. Припустимо, що у борг береться y_0 грошових одиниць під p відсотків річних. Скільки повинен сплатити той, хто займає за рік на кожен одиницю зайнятої суми, якщо відсотки нарастають безперервно.

У цьому разі коефіцієнт зростання $k = p/100$, тоді з формули (5.2) слідує, що з кожної одиниці зайнятої суми займаючий повинен сплатити $\exp(pt/100)$ грошових одиниць. За рік ця сума становитиме $\exp(p/100)$ грошових одиниць. У зв'язку з цим Бернуллі опублікував дослідження складного відсотка, в якому обґрунтував існування граничної вигоди, яку він оцінив, як більшу 2,5 та меншу 3. Насправді при нарахуванні безперервного складного відсотка гранична вигода дорівнює числу $e \approx 2,72$ (основа натуральних логарифмів).

Модель Мальтуса. Англійський вчений Т. Мальтус в 1798 році запропонував використовувати рівняння (5.1) для прогнозування зростання населення Землі. У зв'язку з цим рівняння (5.1) іноді називають рівнянням Бернуллі-Мальтуса. В даний час для забезпечення їжею однієї людини потрібна площа приблизно 0,1 га. На земній кулі 4 мільярди гектарів орної землі. Якщо не враховувати нових майбутніх джерел та технологій приготування їжі, то населення Землі має бути не більше ніж 40 мільярдів людей. Коли буде досягнуто цієї межі насичення, якщо населення Землі безперервно зростає зі швидкістю 1,8% на рік?

Якщо за початкову точку відліку взяти 1999 рік, коли населення Землі становило приблизно 6 мільярдів чоловік, то розрахунки за формулою (5.2) показують, що зазначена межа буде досягнута через 105 років, тобто. на початку 22 століття. Тому, говорячи про зростання населення Землі, вчені вживають термін «демографічний вибух». Цей термін цілком доречний, оскільки зростання населення описується тим самим диференціальним рівнянням, як і ядерний вибух. Таким чином, згідно з Мальтусом, людство знаходиться в пастці — якщо воно не налагодить регулювання народжуваності і не знайде нових джерел їжі, воно приречене на голод і зубожіння широких мас.

5.2. Насичення природного зростання

Таким чином, демографічний вибух є серйозною небезпекою для людства, але давно було помічено, що необмеженість рішення (5.2) не узгоджується з реальністю. Наприклад, чисельність біологічних популяцій спочатку зростає за експонентою, але надалі темпи зростання уповільнюються і настає період насичення. Будь-які спроби екстраполяції експоненти за цю межу призводять до абсурдних висновків, наприклад, можна зустріти прогнози, що чисельність науковців в індустріально розвинених країнах перевершить все населення планети або нащадки пари мух здатні покрити протягом року всю земну кулю і т. д.

Модель Кьютелета-Ферхюльста. На підставі цього бельгійський математик Кьютелет припустив, що коефіцієнт зростання k в рівнянні (5.1) повинен бути *монотонно спадною* функцією від $y(t)$. Пізніше його ученик Ферхюльст в 1836 році запропонував таку модель зростання населення:

$$y'(t) = a \cdot \left(1 - \frac{y(t)}{b}\right) \cdot y(t) , \quad (5.3)$$

де a, b – деякі константи. Це нелінійне рівняння зі змінними, що розділяються, яке порівняно легко інтегрується, і в результаті отримуємо наступне рішення:

$$y(t) = \frac{b \cdot y_0 \cdot e^{at}}{b - y_0 + y_0 \cdot e^{at}} , \quad (5.4)$$

де y_0 - початковий стан.

Графік функції (5.4), показаний на рис. 5.1, називається *логістичною кривою*. З цього рисунку видно, що при малих t логістичний ріст схожий на природний, проте при великих t темпи зростання уповільнюються. При $t \rightarrow \infty$ крива асимптотично наближається до прямої $y = b$. Зауважимо також, що стан $y = b$ є нерухомою точкою системи, оскільки функція $y(t) \equiv b$ є стаціонарним рішенням рівняння (5.3). Отже, пряма $y = b$ буде інтегральною прямою рівняння (5.3).

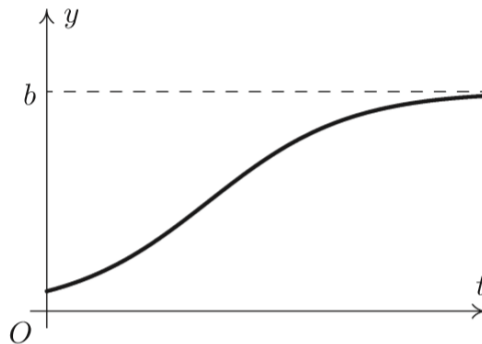


Рис. 5.1. Логістична крива.

5.3. Модель «хижак – жертва»

У динаміці біологічних популяцій існує багато прикладів, коли зміна чисельності популяцій у часі має коливальний характер. Пояснення цього явища майже одночасно і незалежно один від одного знайшли американський математик польського походження Лотка та італійський математик Вольтерра.

У 1926 році Вольтерра вирішив проблему коливання уловів риби в Адріатичному морі, пов'язавши ці коливання з коливаннями чисельності хижих та нехижих риб, які зміщені за фазою. Нехай $x(t)$ і $y(t)$ – популяції жертв (нехижих риб) та хижаків відповідно в момент часу t . За відсутності хижаків відбувається природне зростання кількості жертв $\dot{x}(t)/x(t) = a$, де $a > 0$ – швидкість розмноження, але присутність хижаків вводить сюди негативний член $\dot{x}(t)/x(t) = a - b \cdot y(t)$, де $b > 0$ - коефіцієнт агресивності хижаків. Аналогічно, за відсутності жертв, які служать їжею хижакам, відбувається природний процес їх вимирання $\dot{y}(t)/y(t) = -c$, де $c > 0$ – швидкість вимирання, але жертви

гальмують цей процес $\dot{y}(t)/y(t) = -c + d \cdot x(t)$, де $d > 0$ – коефіцієнт успішності полювання. Таким чином, приходимо до наступної нелінійної системи звичайних диференціальних рівнянь, яка і називається моделлю «хижак-жертва» і носить ім'я Лотки та Вольтерра:

$$\dot{x}(t) = (a - b \cdot y(t)) \cdot x(t), \quad \dot{y}(t) = (-c + d \cdot x(t)) \cdot y(t) . \quad (5.5)$$

де $a, b, c, d > 0$ - позитивні константи.

Значимо, що у моделях Мальтуса і Ферхюльста простір станів системи був одномірним, а в моделі «хижак-жертва» воно двомірне. Рішення системи (5.5) не вдається отримати в аналітичній формі, тому для пошуку частинних розв'язків необхідно виконати чисельне інтегрування цієї системи наближеними способами, що можна розглядати як проведення імітаційного моделювання системи. Система (5.5) знайшла застосування в економіці при аналізі коливань цін на товари, тому зупинимось коротко на її теоретичному аналізі. Розглянемо систему із двох диференціальних рівнянь загального виду, окремим випадком якої є система (5.5):

$$\dot{x}(t) = f(x, y), \quad \dot{y}(t) = g(x, y) . \quad (5.6)$$

Нехай цю систему треба розв'язати в деякої області D площини (x, y) . Будемо вважати, що через кожную точку $(x_0, y_0) \in D$ проходить єдиний розв'язок $(x(t), y(t))$, $\alpha \leq t \leq \beta$, системи (5.6).

Для вирішення нелінійних систем виду (5.6) французький математик А. Пуанкаре розробив якісну теорію диференціальних рівнянь, яка дозволяє визначити характер поведінки розв'язків системи (5.6) за властивостями її прямих частин $f(x, y)$ та $g(x, y)$ без явного інтегрування. Ця теорія заснована на аналізі нерухомих точок та перших інтегралів системи (5.6).

Точка (або стан) (x_0, y_0) називається нерухомою для системи (5.6), якщо $f(x_0, y_0) = 0$ і $g(x_0, y_0) = 0$. У цьому випадку функції $x(t) \equiv x_0$ та $y(t) \equiv y_0$ будуть стаціонарними розв'язками системи (5.6). Зауважимо, що у системи (5.5) є дві нерухомих точки $(0,0)$ і $(c/d, a/b)$. Перша точка тривіальна, а друга грає роль «центру» неперервної системи.

Лінією рівня функції $F(x, y)$, що відповідає константі C , називається множина точок (крива), що задовольняють умові $L_C = \{(x, y): F(x, y) = C\}$. Першим інтегралом системи (5.6) називається функція $F(x, y)$, на лініях рівня якої розташовані всі траєкторії (розв'язки) системи (5.6). Для того, щоб функція $F(x, y)$ була першим інтегралом системи (5.6), необхідно і достатньо виконання наступної умови для всіх $(x, y) \in D$:

$$F_x(x, y) \cdot f(x, y) + F_y(x, y) \cdot g(x, y) \equiv 0 , \quad (5.7)$$

де $F_x(x, y)$ і $F_y(x, y)$ – частинні похідні функції $F(x, y)$ по x та y відповідно.

Зі співвідношення (5.7) видно, що система (5.5) має наступний перший інтеграл:

$$F(x, y) = x^c \cdot e^{-d \cdot x} \cdot y^a \cdot e^{-b \cdot y} = g(x) \cdot h(y) . \quad (5.8)$$

Тут функції $g(x) = x^c \cdot e^{-d \cdot x}$ та $h(y) = y^a \cdot e^{-b \cdot y}$ обидві позитивні на півосі $(0, \infty)$ і мають на них один максимум у точках $x_0 = c/d$ та $y_0 = a/b$ відповідно. Типові графіки цих функцій зображено на рис. 5.2.

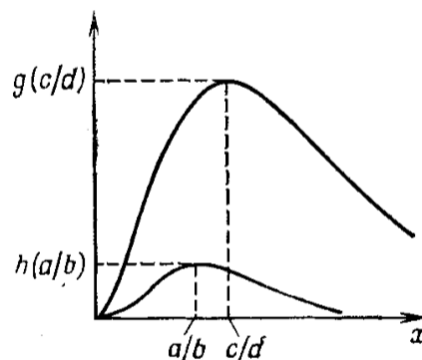


Рис. 5.2. Графіки функцій $g(x)$ і $h(y)$.

Таким чином, функція $F(x, y) = g(x) \cdot h(y)$ матиме максимум у нерухомій точці $(x_0, y_0) = (c/d, a/b)$. Значить лінії рівня функції $F(x, y)$ є замкнутими кривими, що оточують точку $(c/d, a/b)$. З визначення першого інтеграла слідує, що траєкторії руху системи (5.5) збігаються з цими лініями рівня, в центрі яких знаходиться нерухома точка, як це показано на рис. 5.3.

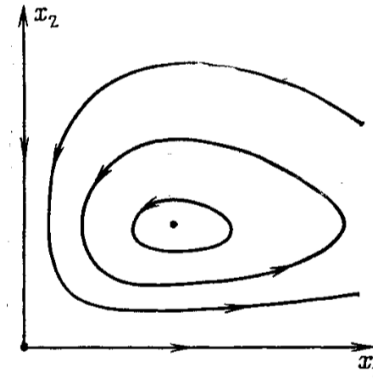


Рис. 5.3. Портрет коливань у системі хижак-жертва.

Зазначимо, що замкнуті траєкторії рухів у цій системі не є еліпсами, оскільки функції $g(x)$ та $h(y)$ мають крутий підйом та пологий спуск (рис. 5.2). Нееліптична форма траєкторій цієї нелінійної системи відбиває негармонічний характер коливань чисельності популяцій і робить систему (5.5) чисельно нестабільною.

Лекція 6. Неперервні економічні моделі

Розглянемо математичну модель, яка описує зростання кількості продукції на деякому підприємстві. Спочатку припустимо, що виробничі фонди не збільшуються, а вибувають за рахунок природного зносу. Наприклад, підприємство не вкладає виручені гроші у виробництво, і при цьому з часом на підприємстві відбувається зношування обладнання та знарядь праці, тобто відбувається вибуття фондів. Тоді кількість продукції $y(t)$, виробленої на момент часу t описується наступним рівнянням:

$$y'(t) = -k(t) \cdot y(t), \quad (6.1)$$

де $k(t) > 0$ – коефіцієнт зносу. Цю модель можна вважати моделлю природного спадання, оскільки знак мінус тут означає, що фонди вибувають. Рівняння (6.1) є лінійним однорідним рівнянням першого порядку з відокремленими змінними і його розв'язком буде функція:

$$y(t) = y_0 \cdot e^{-K(t)}, \quad K(t) = \int_0^t k(u) du, \quad (6.2)$$

де $K(t)$ – об'єм зношених фондів до моменту часу t і $y_0 = y(0)$. Оскільки $K(t)$ зростає, то виробництво спадає дуже швидко (за експонентою), що можна бачити на рис. 6.1, де $k(t) \equiv 1$.

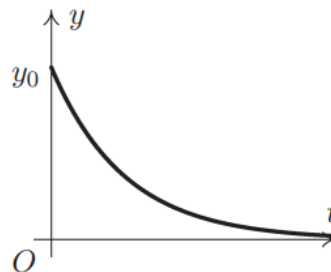


Рис. 6.1. Графік функції $y(t) = y_0 e^{-t}$.

6.1. Мікроекономічна модель

Об'єднаємо тепер дві моделі – модель вибуття фондів та модель зростання виробництва за рахунок інвестицій. Нехай підприємство виробляє потрібну державі продукцію. Як і раніше припустимо, що на підприємстві відбувається зношування обладнання та знарядь праці і саме підприємство не вкладає виручені гроші у виробництво. Грошові вкладення у виробництво здійснює держава через банк, причому, у час t потік капіталовкладень дозволяє збільшити виробництво на $q(t)$ умовних одиниць. Тоді обсяг продукції $y(t)$, виробленої на момент часу t , описується наступним рівнянням

$$y' + k(t) \cdot y = q(t). \quad (6.3)$$

Рівняння (6.3) є лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням першого порядку і його розв'язком, як відомо з курсу диференціальних рівнянь буде така функція:

$$y(t) = y_0 \cdot e^{-K(t)} + e^{-K(t)} \int_0^t q(u) \cdot e^{K(u)} du,$$

де функція $K(t)$ визначається за формулою (6.2).

Оскільки інвестиції часто залежать як від часу t , так і від обсягу випуску продукції $y(t)$, то функція q буде функцією від двох змінних t і y . Таким чином, загальне рівняння зростання виробництва може бути виражене, взагалі кажучи, вже нелінійним диференціальним рівнянням:

$$y' + k(t) \cdot y = q(t, y). \quad (6.4)$$

Рівняння (6.3) і (6.4) часто зустрічаються в мікроекономіці. У окремих випадках рівняння (6.4) може бути і рівнянням з змінними, що розділяються, і лінійним рівнянням, і рівнянням Бернуллі. Знання його економічного змісту дозволяє передбачати властивості його розв'язків.

6.2. Макроекономічна модель

Якщо мікроекономіці найчастіше використовується рівняння (6.3) і (6.4), то в макроекономіці використовується таке рівняння:

$$y(t) = k \cdot y'(t) + c(t). \quad (6.5)$$

Тут $y(t)$ — національний дохід, $c(t)$ — споживання (точніше, це невиробниче споживання разом із приростом матеріальних оборотних засобів підприємств та державних матеріальних резервів), $k \cdot y'(t)$ — накопичення основних виробничих фондів.

Рівняння (6.5) виражає той факт, що національний дохід розділений на дві частини: накопичення $k \cdot y'(t)$ (перший доданок у правій частині рівняння) та споживання $c(t)$ (другий доданок у правій частині рівняння), причому накопичення здійснюється державою пропорційно приросту національного доходу на той же час. Коефіцієнт k відображає капіталомісткість національного доходу (відношення виробничого накопичення до приросту національного доходу).

Модель, яка заснована на рівнянні (6.5), є найпростішою моделлю економічної динаміки. З її допомогою знаходять динаміку національного доходу $y(t)$ залежно від заданого споживання $c(t)$. Наприклад, якщо вважати споживання лінійною функцією від національного доходу $c(t) = d(t) \cdot y(t)$, де коефіцієнт $d(t)$, $0 < d(t) \leq 1$, виражає «схильність до споживання», а $d(t)$ — покласти рівним $d(t) = y(t)/b$, де b — деякий «ідеальний» стан економіки, то отримує рівняння Ферхюльста:

$$y'(t) = \frac{1}{k} \left(1 - \frac{y(t)}{b} \right) \cdot y(t) .$$

Таким чином, у цьому випадку економіка плавно наблизитиметься до свого ідеального стану. Такий тип економічної динаміки описується макроекономічною моделлю Кейнса.

6.3. Динамічна модель Леонтьєва

Нагадаємо, що у статичній моделі міжгалузевого балансу Леонтьєва (витрати-випуск) розглядаються n галузей, пов'язаних між собою взаємними закупівлями, необхідними для виробництва продукції. У матричній формі статична модель Леонтьєва записується так:

$$Y = A \cdot Y + C, \quad (6.6)$$

де $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ — вектор валового випуску (ВВП) у грошовому вираженні, A — технологічна матриця розміру $n \times n$, що відображає технологічні залежності між галузями (матриця прямих витрат), $C = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ — вектор споживання у грошах. Вектори Y, C та матриця A вважаються невід'ємними. Елемент a_{ij} матриці A дорівнює кількості продукції (у грошах) i -ої галузі, яку j -а галузь повинна придбати для того, щоб зробити продукцію на одну грошову одиницю (зазвичай один долар).

Статичну модель можна використовувати для пошуку вектора Y при заданому векторі C та матриці A . У цьому випадку співвідношення (6.6) можна переписати у такому вигляді:

$$(I - A) \cdot Y = C, \quad (6.7)$$

де I — одинична матриця розміру $n \times n$. Система (6.6) є системою лінійних рівнянь з n невідомими. Щоб система (6.7) мала рішення при будь-якому векторі C необхідно і достатньо, щоб матриця $I - A$ мала оборотну і тоді система (6.7) має єдине рішення $Y = (I - A)^{-1} \cdot C$.

Запропонована Леонтьєвим динамічна міжгалузева модель є прикладом використання системи диференціальних рівнянь для дослідження (імітації) проблеми економічного зростання і має такий вигляд:

$$Y(t) = K \cdot Y'(t) + C(t), \quad (6.8)$$

де $Y(t) = (y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t))$ — вектор-функція національного доходу, $C(t) = (c_1(t), c_2(t), \dots, c_n(t))$ — вектор-функція споживання, $Y'(t) = (y'_1(t), y'_2(t), \dots, y'_n(t))$ — вектор похідних, K — квадратна матриця повної капіталомісткості, тобто повних витрат

виробничого накопичення на одиничний приріст елементів національного доходу. Незавжди бачити, що система рівнянь (6.8) є матричним аналогом макроекономічного диференціального рівняння (6.5). Матриця K та матриця прямих витрат A пов'язані співвідношенням:

$$K = B \cdot (I - A)^{-1}, \quad (6.7)$$

де B - матриця коефіцієнтів капіталомісткості, $(I - A)^{-1}$ - матриця повних виробничих витрат для отримання одиниці кінцевої продукції.

Динамічна модель Леонтьєва визначає траєкторії збалансованого економічного розвитку. Якісні властивості цих траєкторій залежать від матриці K . За деяких умов, обернена величина до найбільшого власного значення цієї матриці, визначає максимально можливий темп приросту економіки, а відповідний цьому значенню власний вектор характеризує необхідні пропорції між обсягами виробництва продукції на «магістральній» ділянці економічного розвитку.

Перша модель Леонтьєва містила 44 галузі, а баланс США за 1947 охоплював вже близько 400 галузей. Створення таких балансів дозволяє прогнозувати тенденції економічного зростання та створювати сценарії економічного розвитку. Так, у 1941–1942 роках Леонтьєв спростував передбачення про те, що післявоєнна конверсія промисловості неминуче призведе до масового безробіття. Попри переконання падіння попиту на продукцію сталеливарної промисловості США, він довів (і це підтвердилося), що попит на сталь зросте завдяки розширенню будівництва та масової реконструкції. Цей прогноз був зроблений завдяки врахуванню міжгалузевих взаємодій, які, як правило, не виловлюються прихильниками правдоподібних, але спрощених пояснень процесів, що відбуваються в економіці.

Зауважимо, що планування, засноване на моделі міжгалузевого балансу, не суперечить ринковій економіці. Леонтьєв часто використовував порівняння економіки з кораблем: приватна ініціатива як вітер у вітрилах тягне економіку, а планування, як кермо, спрямовує економіку в потрібний бік.

Лекція 7. Дискретні динамічні моделі

При розгляді диференціальних рівнянь ми виходили з припущення про миттєвий вплив факторів на зростання економіки. Насправді, цей вплив не миттєвий, він відбувається з деяким запізненням (лагом). У тих випадках, коли запізнення істотно впливає на економічні процеси, його необхідно включати в модель. У економічних науках моделі, пов'язані із запізненням, записують у вигляді різницевих рівнянь, тобто як рівняння з дискретним часом.

Визначення 7.1. Дискретною (автономною) динамічною системою називається пара $D = (S, f)$, де $S \subseteq \mathbb{R}^k$ — множина станів, $f: S \rightarrow S$, неперервна функція переходів.

Тут \mathbb{R}^k означає лінійний простір над полем дійсних чисел \mathbb{R} , а число k називається розмірністю системи. Система починає функціонувати в початковому стані x_0 та її рух у кожній момент дискретного часу n визначається наступним чином для всіх $n \geq 1$:

$$x_n = f(x_{n-1}) \quad (7.1)$$

Стан s називається *нерухомою точкою* (точкою спокою), якщо виконується така умова:

$$f(s) = s \quad (7.2)$$

Рух динамічної системи (7.1) називається збіжним, якщо послідовність станів x_n збігається до границі s при $n \rightarrow \infty$.

Визначення 7.2. *Нерухома точка* називається *асимптотичне сталою* (локальним аттрактором), якщо всі рухи, які починаються в її деякому околу, збігаються до неї.

Несталі нерухомі точки називаються іноді репелерами. Поняття сталої нерухомої точки можна продемонструвати на прикладі одновимірної дискретної системи (\mathbb{R}, f) . В цьому випадку *нерухомі точки будуть точками перетину* графіка функції $y = f(x)$ з графіком тотожної функції $y = x$. Для дискретних систем, у яких функція переходів має неперервну похідну, існує простий критерій сталості нерухомої точки.

Теорема 7.1. Якщо в одновимірній дискретній системі (\mathbb{R}, f) функція переходів має неперервну похідну, то нерухома точка s буде *сталюю*, коли $|f'(s)| < 1$.

Наприклад, розглянемо динамічну систему (\mathbb{R}, f) з квадратичною функцією переходів $f(x) = x^2$. Ця функція має дві нерухомі точки 0 і 1. Перша з них буде сталою, оскільки всі рухи, які починаються з точок околу $|x| < 1$ збігаються до неї, а друга буде несталюю, оскільки всі рухи, які починаються з початкових точок $|x| > 1$ уходять у нескінченність.

7.1. Дискретна модель Ферхюльста

Особливо популярною в біології стала модель Ферхюльста з дискретним часом, оскільки вона добре відображає зростання біологічних популяцій. Розглянемо коротко цю модель, оскільки дискретні динамічні системи часто зустрічаються в економічному моделюванні.

Трохи спрощуючи модель Ферхюльста, її можна записати як динамічну систему $D_c = ([0,1], f_c)$, де функція переходів має такий вид:

$$f_c(x) = c \cdot x \cdot (1 - x) \quad (7.3)$$

а параметр c змінюється у діапазоні $0 < c \leq 4$. В цьому випадку всі функції переходів $f_c(x)$ будуть параболою повернутими вниз, що проходять через точки 0 і 1, і досягають максимуму, що дорівнює $c/4$, в середній точці $x = 1/2$, як показано на рис. 7.1. Зазначимо, що функцію переходів $f_c(x)$ буде коректно визначено на одиничному інтервалі $f_c: [0,1] \rightarrow [0,1]$ при всіх $0 < c \leq 4$. Рухи в моделі Ферхюльста описуються наступним різницеvim рівнянням, яке називається *логістичним*:

$$x_n = c \cdot (1 - x_{n-1}) \cdot x_{n-1}, \quad n \geq 1 \quad (7.4)$$

Дослідимо на стійкість нерухомі точки цієї системи. З формули (7.3) випливає, що функція $f_c(x)$ матиме дві нерухомі точки $s_1 = 0$ і $s_2 = 1 - c^{-1}$. Обчислимо похідну для функції переходів $f_c(x)$, тоді отримаємо таку рівність:

$$|f'_c(x)| = c \cdot |1 - 2x| \quad (7.5)$$

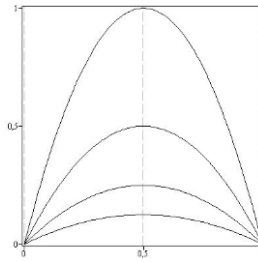


Рис. 7.1. Сімейство парабол.

Будемо поступово збільшуватимемо параметр c від 0 до 4, і слідкуватимемо за змінами в динаміці системи D_c . Якщо $0 < c \leq 1$, то функція переходів $f_c(x)$ має на відрізку $[0,1]$ єдину нерухому точку $s_1 = 0$, яка буде атрактором автономної динамічної системи D_c . Це добре видно на павутинній діаграмі (діаграмі Ламерея), що показана на малюнку 7.2, яка відображає ітераційний процес (7.4) руху динамічної системи.

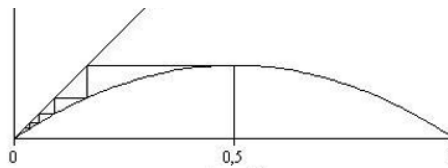


Рис. 7.2. Атрактор в нулі.

При $1 < c \leq 3$ нерухома точка $s_1 = 0$ втрачає стійкість, але на відрізку $[0,1]$ з'являється нова нерухома точка $s_2 = 1 - c^{-1}$, до якої сходять усі рухи динамічної системи D_c . За подальшого збільшення параметра c відбувається, так звана, біфуркація подвоєння періоду, тобто. з'являється стійкий цикл довжини 2, 4 і т. д. При наближенні параметра до верхньої межі 4 в динамічній системі D_c з'являються безладні рухи, які носять хаотичний характер, тому кажуть, що система переходить в режим «детермінованого хаосу». Термін «детермінований» означає, що хаос виникає тут не через якісь випадкові причини, а цілком закономірно всередині детермінованої системи, яка описується рівнянням (7.4). Явище детермінованого хаосу буде розглянуто на практичумі.

7.2. Лінійні різницеві рівняння

Ще однією популярною дискретною математичною моделлю є лінійні різницеві рівняння або рекурентні співвідношення. Нагадаємо, що лінійне рекурентне співвідношення (рівняння) з постійними коефіцієнтами k -го порядку має такий вигляд:

$$x_n = a_1 x_{n-1} + a_2 x_{n-2} + \dots + a_k x_{n-k} + b, \quad (7.6)$$

де a_1, a_2, \dots, a_k – коефіцієнти, а b – вільний член. Якщо $b = 0$, то рівняння називається однорідним, інакше – неоднорідним. Розв'язання неоднорідних рівнянь зводиться до однорідним, для цього треба знайти одне окреме рішення рівняння. Для вирішення однорідного рівняння треба розв'язати характеристичне алгебраїчне рівняння:

$$x^k - a_1 x^{k-1} - \dots - a_k = 0. \quad (7.7)$$

Його коріння r_1, \dots, r_k , якщо вони різні, дають загальне рішення рівняння (7.6):

$$x_n = C_1 r_1^n + \dots + C_k r_k^n, \quad (7.8)$$

де C_1, C_2, \dots, C_k – довільні константи.

Якщо коріння кратні, то замість констант з'являються поліноми $P_i(n)$ відповідних ступенів m_i , $1 \leq i \leq d$, де m_i – кратність i -го кореня, а d – кількість різних коренів. Тоді загальний розв'язок рівняння (7.6) матиме вигляд $x_n = P_1(n) \cdot r_1^n + \dots + P_d(n) \cdot r_d^n$.

При появі комплексних коренів з них треба скласти дійсні розв'язки. Якщо $r = \rho \cdot (\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi))$ – комплексний корінь рівняння (7.7), то він породжує такі дійсні розв'язки $x_n = C_1 \rho^n \cos(n\varphi) + C_2 \rho^n \sin(n\varphi)$, де C_1, C_2 – довільні константи.

7.3. Павутино-подібна модель рівноваги

Як приклад застосування різницевого рівняння розглянемо модель коливання цін та обсягів товарів на ринку. Припустимо, що виробники зерна хочуть оцінити обсяг товару s , який буде виставлений на ринок у поточному періоді, на основі ціни p , що встановилася у попередньому періоді, та попиту d на товар у даному періоді. Якщо пропозиція та попит лінійно залежать від p , то динаміка ціни описується такими рівняннями:

$$s(n) = a \cdot p(n - 1) + s_0, \quad d(n) = -b \cdot p(n) + d_0. \quad (7.9)$$

Тут передбачається, що $a > 0$, $b > 0$ і $0 \leq s_0 < d_0$, оскільки за нульової ціни попит перевищує пропозицію. Якщо на ринку встановилося рівновага, і пропозиція співпадає з попитом, то $s(n) = d(n)$, то отримуємо наступне лінійне неоднорідне різницеве рівняння першого порядку з постійними коефіцієнтами:

$$a \cdot p(n - 1) + b \cdot p(n) = d_0 - s_0. \quad (7.10)$$

Знайдемо спочатку нерухому точку p_0 із рівняння $a \cdot p_0 + b \cdot p_0 = d_0 - s_0$, яка дає частинний константний розв'язок неоднорідного рівняння:

$$p_0 = \frac{d_0 - s_0}{a + b}. \quad (7.11)$$

Потім розв'яжемо характеристичне рівняння $bx + a = 0$. Звідси одержуємо $x = -a/b$. Отже, загальний розв'язок різницевого рівняння (7.9) має вигляд:

$$p_n = C \cdot \left(-\frac{a}{b}\right)^n + p_0. \quad (7.12)$$

де C - константа.

З рівності (7.12) видно, що динаміка ціни на товар носить коливальний характер. Якщо $a < b$, то $p_n \rightarrow p_0$, при $n \rightarrow \infty$, тобто в цьому випадку ціна прагне свого рівноважного значення. При $a = b$ значення p_n коливаються навколо рівноважного значення. Нарешті, при $a > b$ процес розходиться і рівновага нестійка.

В реальній економіці нескінченно зростаючих коливань не буває, оскільки за високих відхиленнях від рівноваги лінійні залежності попиту й пропозиції від ціни стають нереалістичними. У більш реалістичній нелінійній моделі встановлюються коливання великої, але скінченної амплітуди.

Лекція 8. Дискретні економічні моделі

Розглянемо тут основні дискретні макроекономічні моделі.

8.1. Модель Кейнса

В якості прикладу моделювання економічної динаміки розглянемо модель Кейнса. У цій моделі змінна $Y(n)$ описує національний дохід (або валовий внутрішній продукт) в період часу n . Як вже відмічалось, $Y(n)$ складається із двох частин: фонду споживання $C(n)$ і фонду накопичень $I(n)$ (інвестиційного фонду):

$$Y(n) = C(n) + I(n), \quad n \geq 1. \quad (8.1)$$

Далі, припустимо, що об'єм інвестицій постійний $I(n) = I_0$, а споживання в поточний період часу є лінійною функцією від доходу у минулий період:

$$C(n) = m \cdot Y(n-1) + C_0,$$

де коефіцієнт m , $0 < m < 1$, називається «граничною схильністю до споживання», а C_0 – мінімальний об'єм споживання. Якщо це співвідношення підставити замість $C(n)$ у рівняння (8.1), то виникає наступне лінійне рекурентне співвідношення, яке власне й називається моделлю Кейнса:

$$Y(n) = m \cdot Y(n-1) + D_0, \quad (8.2)$$

де $D_0 = C_0 + I_0$ – константа.

Рівняння (8.2) є лінійним неоднорідним (є вільний член) рекурентним співвідношенням першого порядку. Спочатку, як і в задачі про рівноважну ціну, знайдемо нерухому точку (положення рівноваги) Y_E цього співвідношення. Для цього підставимо значення Y_E у співвідношення (8.2) замість $Y(n)$ і $Y(n-1)$, тоді одержимо наступне рівняння $Y_E = m \cdot Y_E + D_0$: Звідси знаходимо нерухому точку:

$$Y_E = \frac{D_0}{1-m}. \quad (8.3)$$

Відповідне лінійне однорідне рівняння для співвідношення (8.2) має вигляд $y_n = m \cdot y_{n-1}$. Його загальний розв'язок можна записати безпосередньо відразу:

$$y_n = C_1 \cdot m^n, \quad (8.4)$$

де C_1 – довільна константа. Склавши розв'язки (8.3) і (8.4) одержуємо загальний розв'язок $Y(n) = C_1 \cdot m^n + Y_E$ рівняння (8.2).

Значення константи C_1 знаходимо із початкової умови $Y_0 = C_1 + Y_E$, де Y_0 – початкове значення національного доходу. Звідси отримуємо $C_1 = Y_0 - Y_E$. Остаточно одержуємо наступний розв'язок в моделі Кейнса:

$$Y(n) = (Y_0 - Y_E) \cdot m^n + Y_E. \quad (8.5)$$

Оскільки $m < 1$, то незалежно від співвідношення між Y_0 і Y_E розв'язок (8.5) наближається до стаціонарного значення (8.3) або знизу (якщо $Y_0 < Y_E$) або зверху (якщо $Y_0 > Y_E$). Таким чином, у моделі Кейнса нерухома точка Y_E буде глобальним аттрактором.

8.2. Модель Самуельсона-Хикса

Модель Кейнса відображає ідеальну картину, коли дохід поступово наближається до свого стабільного значення. Таке іноді трапляється в реальній економіці, але на короткому проміжку часу. Послідовники Кейнса неодноразово намагалися удосконалити його модель. Зокрема, Самуельсон і Хикс ввели в модель змінні інвестиції. Вони припустили, що компанії будуть вкладати кошти у виробництво тоді, коли побачать приріст національного доходу в попередньому періоді. Таким чином, вони вважали, що об'єм інвестицій у поточному періоді пропорційний зміні національного доходу в попередньому періоді:

$$I(n) = a \cdot (Y(n-1) - Y(n-2)) + I_0, \quad (8.6)$$

де a — коефіцієнт акселерації (акселерат), а I_0 – мінімальні інвестиції. Якщо вирази (8.2) і (8.6) для $C(n)$ та $I(n)$ відповідно, підставити у рівняння (8.1), то отримуємо *рівняння Хикса*:

$$Y(n) = (a + m) \cdot Y(n-1) - a \cdot Y(n-2) + D_0, \quad (8.7)$$

де $D_0 = C_0 + I_0$ – та ж константа, що і в моделі Кейнса.

Співвідношення (8.7) є лінійним неоднорідним рекурентним співвідношенням другого порядку. Знайдемо спочатку його стаціонарний розв'язок Y_E (нерухому точку), що виходить із рівняння $Y_E = (a + m) \cdot Y_E - a \cdot Y_E + D_0$. Воно виявляється таким же, як у моделі Кейнса, тобто задається формулою $Y_E = D_0 / (1 - c)$.

Характеристичне рівняння відповідного лінійного однорідного співвідношення має вигляд $x^2 - (a + m)x + a = 0$. У цього рівняння корені будуть дійсними, якщо його дискримінант $D = (a + m)^2 - 4a$ буде позитивним. Умова $D > 0$ рівносильна нерівності $m > 2\sqrt{a} - a$. Тоді будемо мати два дійсних кореня:

$$r_1 = (a + m)/2 - \sqrt{D}/2, \quad r_2 = (a + m)/2 + \sqrt{D}/2. \quad (8.8)$$

Відмітимо, що має місце така нерівність:

$\sqrt{D} = \sqrt{(a + m)^2 - 4a} = \sqrt{a^2 + 2am + m^2 - 4a} < \sqrt{a^2 - 2am + m^2} = |a - m|$,
оскільки $4a - 2am > 2am > 0$. Звідси та із (8.8) отримуємо умову:

$$r_2 < (a + m)/2 + |a - m|/2 = \max(a, m).$$

Отже, якщо $a < 1$, то $\max(a, m) < 1$, оскільки $m < 1$, і обидва дійсних кореня (8.8) будуть задовольняти умовам:

$$0 < r_1 < r_2 < 1. \quad (8.9)$$

Таким чином, загальний розв'язок рівняння (8.7) в цьому випадку має такий вигляд:

$$Y(n) = C_1 \cdot r_1^n + C_2 \cdot r_2^n + Y_E,$$

де C_1, C_2 – довільні константи. Тоді із умови (8.9) випливає, що $Y(n) \rightarrow Y_E$ при $n \rightarrow \infty$. Виходить, що і в цьому випадку положення рівноваги також буде глобальним аттрактором, але рух до нього буде складнішим у порівнянні з моделлю Кейнса.

Але в реальній економіці може виконуватися умова $a \geq 1$. При такому значенні акселератора розв'язок рівняння Хикса може бути нестійким, зокрема, корені (8.8) можуть бути комплексними. Наприклад, якщо $a = 1$, то $D < 0$, оскільки $m < 1$. Тому рух економічної системи має коливальний характер, зростання змінюється спаданням, спадання - зростанням. Це означає, що навіть при постійному темпі капіталовкладень економіка має нестійкий характер (порушена рівновага більше не відновлюється), а періоди підйому економіки чергуються з періодами її спаду (кризами).

8.3. Дискретна модель Солоу

Наприкінці розглянемо спрощену макроекономічну модель Солоу, яка визначає динаміку відносної капіталомісткості $k(n)$ (величина фондів на одного працюючого) з урахуванням зносу фондів та їх поповнення за допомогою інвестицій. Ця модель описується одним нелінійним рекурентним співвідношенням:

$$k(n) = (1 - \mu) \cdot k(n - 1) + a \cdot \sqrt{k(n - 1)}, \quad (8.10)$$

де μ – коефіцієнт вибуття (зносу) фондів, а коефіцієнт a відображає темп інвестицій (акселерацію).

Рівняння (8.10) має одну нерухому точку, яку студентам пропонується знайти самостійно, та дослідити її на стійкість. Знайдіть також декілька траєкторій руху цієї динамічної системи і порівняйте їх з рухами в неперервній моделі Солоу.

Лекція 9. Програми імітаційного моделювання

9.1. Управління та моделювання

Наукою управління прийнято називати побудову моделей, після аналізу яких приймаються управлінські рішення. Управління також часто трактується як мистецтво, що дозволяє контролювати та спрямовувати процес у бажаному напрямку. Таким чином, процес управління поєднує в собі елементи науки та мистецтва, але мистецтво економічного управління вже давно спирається на міцну наукову основу. Моделювання різних варіантів вирішення проблеми на комп'ютерній моделі дозволяє економістам глибше зрозуміти проблему та уникати серйозних помилок в управлінні.

Якщо система досить проста, то цікаве рішення вдається отримати математичними методами. Таке рішення називається аналітичним. Проте більшість сучасних систем є дуже складними, і для них неможливо отримати аналітичне рішення. У цих системах управлінське рішення доводиться шукати з допомогою комп'ютерної моделі.

Народна мудрість стверджує, що досвід – найкращий вчитель, але інша народна мудрість каже, що на своєму досвіді навчаються лише дурні, оскільки дуже дорого (за грошима та за часом) отримувати реальний досвід. Тому при появі комп'ютерів виникла ідея їхнього використання для імітації поведінки реальних систем, як швидкий та економічний спосіб отримання знань про ці системи.

Основна мета імітації полягає у створенні імітатора, тобто програми або пристрою, яке в основних рисах повторюватиме поведінку реальної системи.

Ціль імітаційного моделювання полягає в отриманні інформації про систему за допомогою імітатора, не звертаючись безпосередньо до самої реальної системи. Імітація використовується в багатьох прикладних та інженерних науках. Наприклад, при перевірці медичних препаратів на тваринах, які імітують реакцію людського організму, при тестуванні літаків в аеродинамічній трубі, коли імітуються умови реального польоту і т. д. В економіці імітаційне моделювання є чи не єдиним способом експериментального дослідження системи, оскільки тут експерименти з реальні системи просто неможливі.

Імітаційне моделювання (ІМ) - це метод дослідження, заснований на імітації поведінки реальної системи за допомогою комп'ютерної програми з метою з'ясування її часових характеристик.

Ще однією особливістю імітаційних моделей є те, що їх можна використовувати під час аналізу управлінських рішень в умовах ризику, тобто. у ситуаціях, коли значення деяких факторів наперед не відомі. Такі фактори називаються випадковими величинами. Поведінка випадкових величин, як відомо, описується розподілом ймовірностей. Розглянемо кілька прикладів імітаційних моделей із випадковими величинами.

Припустимо, що керівництво супермаркету хоче визначити, скільки касирів має бути на виході магазину для того, щоб, з одного боку, скоротити витрати на персонал, а з іншого боку – скоротити час обслуговування покупців. Для вирішення цієї проблеми вирішили використати імітаційну модель. Для створення такої моделі необхідно насамперед задати вхідні параметри. Такими параметрами зазвичай є інтенсивність приходу покупців та час обслуговування окремого покупця, обидва з яких є випадковими величинами. Цільовим параметром тут є кількість касирів. Вихідними параметрами цієї моделі є вартість персоналу, середній час очікування окремого покупця тощо.

У загальному випадку імітаційна модель дозволяє виміряти значення вихідних змінних, які можуть набувати різні значення у процесі імітації, внаслідок імовірнісної природи вхідних параметрів моделі. Тому імітаційне моделювання передбачає проведення численних випробувань моделі, але не ставиться мета знайти оптимальне рішення. Таке моделювання дозволяє порівняно швидко знайти прийнятне рішення, що становить практичний інтерес.

Імітаційне моделювання застосовують також у разі розширення виробництва, коли керівництво компанії не впевнене, що витрати на додаткові приміщення будуть компенсуватися потенційним зростанням продуктивності праці. Неможливо побудувати приміщення, а потім усунути їх у разі нерентабельності, у той час як моделювання роботи заводу в нових умовах може допомогти у вирішенні цієї проблеми.

Перевагами імітаційного моделювання перед аналітичними рішеннями є:

- моделювання стохастичних систем із випадковими змінними;
- моделювання систем будь-якої складності;
- моделювання систем, із якими не можна проводити реальні експерименти.

Ще раз підкреслимо, що імітаційне моделювання набуло широкого поширення при моделюванні економічних систем, оскільки це єдиний доступний метод моделювання такої системи.

Однак імітаційне моделювання має і ряд недоліків. Основним з них є те, що імітація є експериментальним методом вирішення проблем і не може бути доказом деякого затвердження без спеціального теоретичного обґрунтування. Крім того, отримане рішення, зазвичай, не є оптимальним з погляду математики. Тут також буває важко оцінити адекватність моделі та знайти джерело помилок; а збирання, аналіз та інтерпретація результатів носять статистичний характер.

Хоча імітаційне моделювання можна використовувати для будь-яких систем, але практично існує поріг складності моделі, після якого вже важко написати комп'ютерну програму. Крім того, моделювання складних систем потребує багато комп'ютерного часу. Однак останнім часом ці проблеми вдалося вирішити за рахунок збільшення швидкодії комп'ютерів та появи потужних програмних пакетів моделювання. Ці пакети класифікуються за типами моделей, що моделюються, тому зупинимося коротко на цих типах.

Найбільший інтерес у імітаційному моделюванні представляє динаміка системи, тобто дослідження поведінки системи в часі. Динамічні моделі можна розділити на два типи: з безперервними та дискретними станами. У безперервних моделях стан системи змінюється безперервно в часі, наприклад, типовим прикладом безперервної моделі може бути літак. У системах з неперервними станами час також розглядається як безперервний і тому при моделюванні він змінюється через рівні проміжки часу.

Дискретне моделювання використовується для систем, у яких множина станів дискретна та стани змінюються миттєво в деякі моменти часу. Наприклад, банк можна вважати дискретною системою, оскільки складові стану, такі як кількість відвідувачів у банку, є дискретними величинами. Час у дискретній системі, зазвичай, розглядається як безперервний, але при моделюванні він змінюється через нерівні проміжки, оскільки вважається, що стан дискретної системи змінюється лише за настання певної події. Механізми просування модельного часу буде розглянутий на практикумі докладніше.

9.2. Програмні пакети імітаційного моделювання

Найбільш відомі пакети імітаційного моделювання, що використовуються для моделювання економічних систем, представлені у наступній таблиці.

Програма	Фірма	Тип системи
ARENA	Rockwell Automation	Дискретні
Any Logic	XJ Technologies	Дискретні, неперервні
POWERSIM	Power-sim Co.	Неперервні
GPSS World	Minuteman Software	Дискретні

MATLAB Simulink	Math Works	Дискретні, неперервні
Extend-Sim LT	ExtendSim	Дискретні, неперервні

Система Arena є одним із лідерів на ринку програм імітаційного моделювання. У цій системі використовується мова імітаційного моделювання SIMAN. Однією з переваг цієї системи є можливість імпорту імітаційної моделі у форматі IDEF0.

Any-Logic – це пакет для імітаційного моделювання складних систем і процесів, розроблений російською компанією XJ Technologies. Продукт отримав назву Any-Logic, тому що він підтримує всі три відомі методи моделювання: неперервну динаміку; дискретне моделювання та агентное моделювання. Пакет реалізований мовою Java і базується на платформі Eclipse – сучасному стандарті для бізнес-додатків.

Пакет Powersim є засобом створення неперервних моделей, заснований на концепції системної динаміки, запропонованої Форрестером. Пакети GPSS World і MATLAB Simulink були розроблені раніше за інших пакетів і зараз поступово втрачають свою популярність, оскільки нові пакети забезпечують зручніше середовище для розробки та прогону моделі. Пакет Extend-Sim LT буде розглянуто докладніше на практикумі.

Список літератури

1. Соколовський Я. І., Шабатура Ю.В., Виклюк Я.І. та ін. Моделювання систем в середовищі GPSS World : навч. посіб. Львів : Новий Світ, 2020. 288 с.
2. Ситник В. Ф., Орленко Н.С. Імітаційне моделювання: навч. посіб. Київ : КНЕУ, 1998. – 232 с.
3. Кельтон В., Лоу А. Имитационное моделирование. Киев: Издательская группа ВНУ, 2004. 847 с.
4. Мур Дж., Уэдерфорд Л. Экономическое моделирование в Microsoft Excel. Москва: Вильямс, 2004. 1024 с.
5. Кемени Дж., Снелл Дж. Конечные цепи Маркова. Москва: Наука, 1970. 271 с.
6. Соболев И.М. Метод Монте-Карло. Москва: Наука, 1968. 64 с.