УДК 518.90

БАГАТОМОДОВІ РОЗВ'ЯЗКИ КВАЗИЛІНІЙНОЇ МОДИФІКАЦІЇ ГІПЕРБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ БЮРГЕРСА

А. С. Попов[1, а], О. С. Макаренко[2, б]

[1] *Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут»*
[2] *Інститут прикладного системного аналізу НТУУ«КПІ»*

Анотація

В доповіді представлені результати роботи реалізації різницевої схеми для квазілінійної модифікації гіперболічного рівняння Бюргерса.

Ключові слова: рівняння Бюргерса, різницева «хема-хрест»

Вступ

Рівняння Бюргерса є модельним: застосовується в акустиці, гідродинаміці для моделювання поведінки ударних хвиль, що поширюється в суцільному середовищі. Також за допомогою рівняння Бюргерса моделюють деякі економічні процеси, що можна описати поширенням збурень у суцільному середовищі з дисипацією. Рівняння Бюргерса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1}$$

отримується з рівняння Нав'є–Стокса шляхом викидання з правої частини доданку, що містить тиск. Але сучасні дослідження (див. [1] та огляд літератури там) показують що для швидкоплинних процесів, що протікають в сильно нерівноважних умовах, треба застосовувати більш точні рівняння, що узагальнюють класичні рівняння, в тому числі Нав'є-Стокса та Бюргерса. Зокрема, тут наводяться попередні результати дослідження квазілінійної модифікації гіперболічного рівняння Бюргерса другого порядку за часом з багатомодовими (з багатьма горбами) початковими умовами. В цій роботі запропоновано інструмент для чисельного розв'язку квазілінійної модифікації гіперболічного рівняння Бюргерса:

$$\tau\frac{\partial^2 u}{\partial^2 t} + \frac{\partial u}{\partial t} + \varphi(u)\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(k(u)\frac{\partial u}{\partial x}) + f(u) \tag{2}$$

1. Опис різницевої схеми

Це рівняння розв'язується за допомогою схеми на шаблоні «хрест» [2, 3]. Найпростіша явна різницева схема для рівняння (2) має наступний вигляд:

$$\begin{aligned}\tau\frac{u(x_i,t_{j+1}) - 2u(x_i,t_j) + u(x_i,t_{j-1})}{(\delta t)^2} + \\ \frac{u(x_i,t_{j+1}) - u(x_i,t_j)}{\delta t} + \\ \varphi(u(x_i,t_j))\frac{u(x_{i+1},t_j) - u(x_i,t_j)}{\delta x} = \\ k\prime(u(x_i,t_j))(\frac{u(x_{i+1},t_j) - u(x_i,t_j)}{\delta x})^2 + \\ k(u(x_i,t_j))\frac{u(x_{i+1},t_j) - 2u(x_i,t_j) + u(x_{i-1},t_j)}{(\delta x)^2} + \\ f(u(x_i,t_j))\end{aligned} \tag{3}$$

Це – явна схема. Виразимо звідси $u_{i,j+1}$, зробимо заміну $u_{i,j+1} \to u_{i,j}, u_{i,j} \to u_{i,j-1}, u_{i,j-1} \to u_{i,j-2}$ Отримаємо вираз для заповнення шарів таблиці, починаючи з третього:

$$\begin{aligned}u(x_i,t_j) = \\ u(x_i,t_{j-1})(\frac{2\tau(\delta x)^2 + \delta t(\delta x)^2 + \varphi(u(x_i,t_{j-1}))\delta x(\delta t)^2}{(\tau+\delta t)(\delta x)^2}) + \\ u(x_i,t_{j-2})(\frac{-\tau}{\tau+\delta t}) + \\ u(x_{i+1},t_{j-1})\frac{(k(u(x_{i+1},t_{j-1})) - \varphi(u(x_{i+1},t_{j-1}))(\delta t)^2)}{\delta x(\tau+\delta t)} + \\ u(x_{i-1},t_{j-1}\frac{(\delta t)^2 k(u(x_{i-1},t_{j-1}))}{(\tau+\delta t)(\delta x)^2}) + \\ (u(x_{i+1},t_{j-1}))^2\frac{k\prime(u(x_i,t_{j-1}))(\delta t)^2}{(\delta x)^2(\tau+\delta t)} - \\ u(x_{i+1},t_{j-1})u(x_i,t_{j-1})\frac{2k\prime(u(x_i,t_{j-1}))(\delta t)^2}{(\delta x)^2(\tau+\delta t)} + \\ (u(x_i,t_{j-1}))^2\frac{k\prime(u(x_i,t_{j-1}))(\delta t)^2}{(\delta x)^2(\tau+\delta t)} + \\ f(u(x_i,t_{j-1}))\frac{(\delta t)^2}{\tau+\delta t}\end{aligned} \tag{4}$$

[а] popovanton567@gmail.com
[б] makalex51@gmail.com

Задача розв'язується за початкових умов:

$$\begin{aligned} u(x_{min}, t) &= \varphi_1(t) \\ u(x_{max}, t) &= \varphi_2(t) \\ u(x, 0) &= \psi_1(x) \\ \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} &= \psi_2(t) \end{aligned} \tag{5}$$

Нульовий та перший шари заповнюються, враховуючи початкові умови:

$$\begin{aligned} u_{i,0} &= \psi_1(t) \\ u_{i,1} &= u_{i,0} + \delta t \psi_2(x_i) \end{aligned} \tag{6}$$

Точність схеми: $o(\delta t, \delta x)$ – схема першого порядку точності.

2. Опис інтерфейсу програми

Вхідні дані для роботи програми користувач вводить в терміналі. Ось типовий вигляд вводу початкових даних:

$Please, inputconstants : Tmin = 0.0; Tmax = 100.0; Xmin = -50.0; Xmax = 50.0; deltaT = 0.1; deltaX = 0.1; Tau = 0.0; Gamma = 1.0; u(x,0) = 0.5 * math.exp(-x * x/30); u_t(x,0) = 0.0; u(Xmin,t) = 0.0; u(Xmax,t) = 0.0; Phi(u) = u; k(u) = 0.1; k'(u) = 0.0; f(u) = 0.0..Progress : 223 linesof 1000 calculated.$

Розберемо докладніше кожен з елементів, що вводяться користувачем. Відрізок $[Tmin, Tmax]$ задає діапазон, в якому змінюється часова координата t рівняння Бюргерса з кроком $deltaT = \delta t$. Аналогічно, $[Xmin, Xmax]$ задає діапазон, в якому змінюється просторова координата рівняння з кроком $deltaX = \delta x$. $Tau = \tau, Gamma = \gamma$ - коефіцієнти в рівнянні (2) Після цього вводяться функції, що визначають нелінійне рівняння (3): $Phi(u) = \varphi(u), k(u) = k(u), k'(u)-$ похідна від функції $k(u)$, що обчислюється користувачем та використовується в різницевій схемі, f(u) = $f(u)$. Після вводу даних починається обробка даних – обчислення таблиці. Індикатором прогресу виступає кількість обрахованих рядків.

3. Деякі результати роботи програми

Зауважимо, що при спеціальних значеннях коефіцієнтів та функцій: $\tau = 1.0, \gamma = 0.0, \varphi(u) \equiv 0, k(u) \equiv 1.0, k'(u) \equiv 0.0, f(u) \equiv 0.0$ досліджуване рівняння обертається в добре вивчене хвильове:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{7}$$

В загальному випадку рівняння (2) має дуже багатий спектр розв'язків. Для ілюстрації тут наведемо випадок дослідження поведінки часткового випадку рівняння (2) при спеціальних «багатогорбових» початкових умовах:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{u}{t} + u^2 \frac{u}{x} = \frac{\partial}{\partial x}(u^2 \frac{\partial u}{\partial x}) + u^2 \tag{8}$$

3.1. Розв'язок при початкових умовах у вигляді двох однакових горбів

Початкові умови:

$$\begin{aligned} \psi_1(x) &= e^{-(x-5)^2/20} + e^{-(x+5)^2/20}, \\ \varphi_1(t) \equiv \varphi_2(t) &\equiv \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} \equiv 0 \end{aligned} \tag{9}$$

Значення кроків схеми такі: $\delta x = 0.1, \delta t = 0.005$ Поведінку рівняння за таких початкових умов у відповідні моменти часу описують рисунки 1, 2, 3.

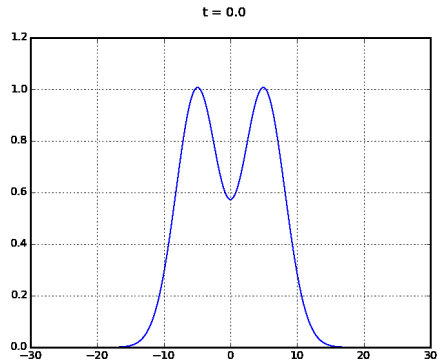

Рис. 1. t = 0

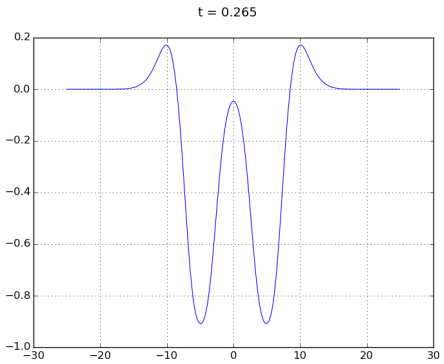

Рис. 2. t = 0.265

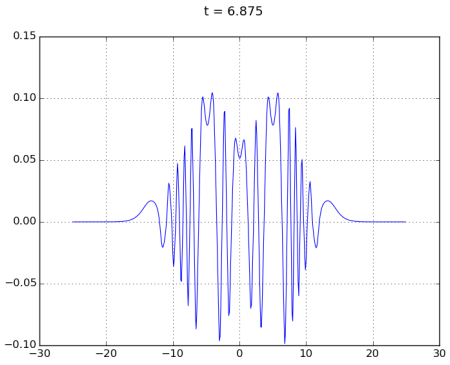

Рис. 3. t = 6.875

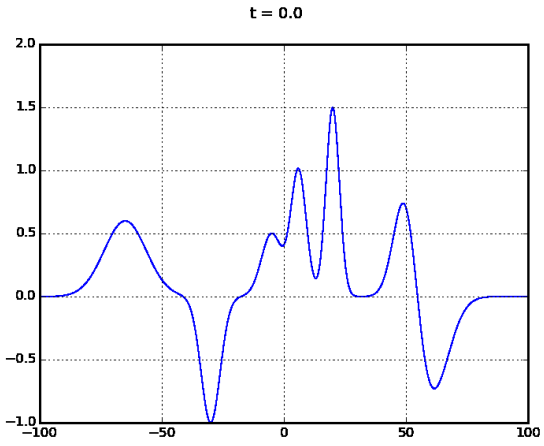

Рис. 4. t = 0

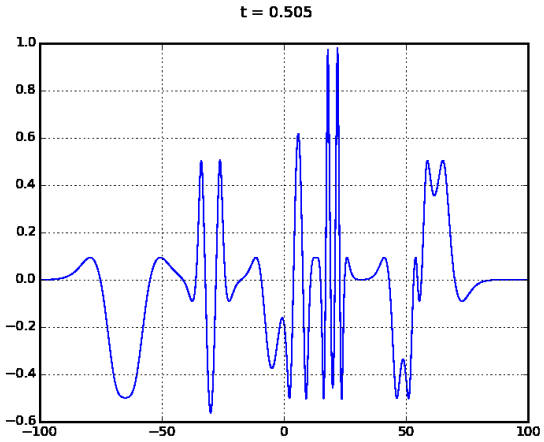

Рис. 5. t = 0.505

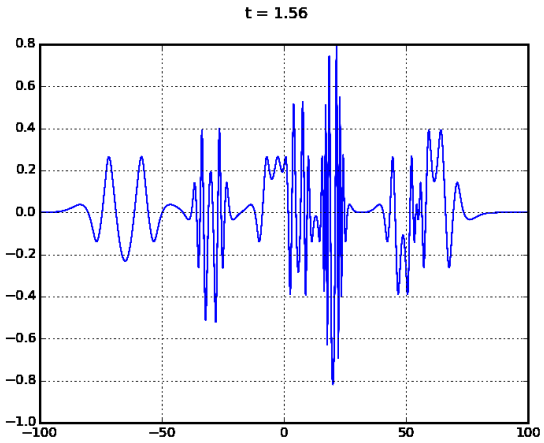

Рис. 6. t = 1.56

3.2. Розв'язок при початкових умовах у вигляді суми 7 гаусових розподілів

Початкові умови:

$$\psi_1(x) = e^{-(x-6)^2/20} + 0.5e^{-(x+5)^2/35} + 1.5e^{-(x-20)^2/15} + e^{-(x-50)^2/45} - e^{-(x+30)/30} - 0.8e^{-(x-60)^2/100} + 0.6e^{-(x+65)^2/150}, \quad (10)$$

$$\varphi_1(t) \equiv \varphi_2(t) \equiv \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} \equiv 0$$

Значення кроків схеми такі: $\delta x = 0.1, \delta t = 0.005$ Поведінку рівняння за таких початкових умов у відповідні моменти часу описують рисунки 4, 5, 6.

3.3. Аналіз результатів

Хоча на рисунках 1-6 наведено для ілюстрації лише попередні обрахунки, навіть вони мають цікаві особливості. Так, графіки вище показують формування багато-пікового пакету коливань з суми гаусовських розподілів. Наведені розв'язки вже можуть бути цікавими для дослідження умов виникнення так званих "multi-bump solutions" в розподілений середовищах (див., наприклад, [4]).

Висновки

Таким чином, в роботі наведено різницеву схему для квазилінійної модифікації гіперболічного рівняння Бюргерса та деякі результати з обрахунків його розв'язків, що показують перспективність подальших досліджень.

Перелік використаних джерел

1. Danilenko V., Danevich T., Makarenko A., Skurativskyi S., Vladimirov V. Self-organization in non-local non-equilibrium media. — Kyiv: S.I. Subbotin Institute of Geophysics, NAS of Ukraine. — 2011. — 333 p.
2. Калиткин Н. Н. Численные методы. — М.: Наука. — 1980.
3. Steven C. Chapra, Raymond P. Canale Numerical methods for Engineers – 6th edition.
4. C. R. Laing, W. C. Troy, B. Gutkin, and G. B. Ermentrout Multiple bumps in a neuronal model of working memory. — SIAM J. Appl. Math.. — 2002. — Vol. 63. — pp. 62—97.