

УДК 571.986

М.М. Кухарчук, М.І. Яременко

# РОЗВ'ЯЗНІСТЬ ОДНОГО КЛАСИЧНОГО ЛІНІЙНОГО ЕЛІПТИЧНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

## Вступ

Лінійне еліптичне диференціальне рівняння другого порядку розглядалося в працях багатьох учених. Для нього А.Д. Александров [1] знайшов оцінку за нормою  $C$  розв'язків задачі Діріхле через норму  $f$  в  $L_p$ .

У даній статті ми одержали результати щодо існування і єдиності розв'язку в  $W_1^2(R^l, d^l x)$  та  $W_1^p(R^l, d^l x)$  цього рівняння за досить загальних умов на коефіцієнти.

Підхід, запропонований у даній статті, також може бути використаний для розгляду, коли дане еліптичне рівняння буде містити нелінійні члени [2, 3].

## Постановка задачі

Мета статті — довести існування і єдиність розв'язку еліптичного диференціального рівняння за умови виконання певних обмежень.

В основі доведення розв'язності цього рівняння лежить метод форм з подальшим використанням теореми Мінті—Браудера.

## Дослідження еліптичного диференціального рівняння (1) за умов (2)

Розглянемо диференціальне рівняння

$$\lambda u - d \circ a \circ du + da \circ du + b \circ du = f, \quad \lambda > 0, \quad (1)$$

за таких умов:

$$\xi^2 \leq \xi \circ a \circ \xi, \quad \lambda > \lambda_0, \quad N\sqrt{\beta} < 1, \quad (2)$$

$$\text{де } N = \langle c \circ a^{-1} \circ c \rangle^{\frac{1}{2}}; \quad c = da + b; \quad \lambda_0 = \frac{NC(\beta)}{2\sqrt{\beta}}.$$

Введемо простір

$$W_1^2(R^l, d^l x) = \{v | v \in L^2(R^l, d^l x), D_i x \in L^2(R^l, d^l x), \\ i = 1, \dots, l\},$$

$$\|v\|_{W_1^2(R^l, d^l x)} = \|v\|_{L^2(R^l, d^l x)} + \sum_i \|D_i v\|_{L^2(R^l, d^l x)},$$

де  $W_{1,0}^2(R^l, d^l x) = \{v | v \in W_1^2(R^l, d^l x) \text{ і має компактний носій } \}$ ;  $W_{-1}^2(R^l, d^l x)$  — спряжений до  $W_{1,0}^2(R^l, d^l x)$  простір.

Визначимо форму  $h_\lambda^2(u, v)$ , покладаючи

$$h_\lambda^2(u, v) = \lambda \langle u, v \rangle + \langle dv \circ a \circ du \rangle + \langle (da \circ du + b \circ du), v \rangle,$$

$$D(h_\lambda^2) = \{u \in W_1^2 : |h_\lambda^2(u, v)| < \infty\}.$$

Покажемо, що існує оператор  $A_\lambda^2(\cdot) : W_1^2(R^l, d^l x) \rightarrow W_{-1}^2(R^l, d^l x)$ , такий, що  $h_\lambda^2(u, v) = \langle A_\lambda^2(u), v \rangle$ .

**Лема 1.** Якщо структура рівняння (1) задовольняє умови (2), то форма, породжена цим рівнянням, обмежена.

**Доведення.** Дійсно, мають місце оцінки

$$\begin{aligned} h_\lambda^2(u, v) &= \lambda \langle u, v \rangle + \langle dv \circ a \circ du \rangle + \\ &+ \langle (da \circ du + b \circ du), v \rangle \leq \lambda \|u\|_2 \|v\|_2 + \langle dv \circ a \circ du \rangle + \\ &+ |\langle (da + b) \circ du, v \rangle|, \quad da + b = c, \quad |\langle c \circ du, u \rangle| \leq \\ &\leq \langle c \circ a^{-1} \circ c \rangle^{\frac{1}{2}} \langle du \circ a \circ du \rangle^{\frac{1}{2}} \|u\|_2 \leq \\ &\leq \langle c \circ a^{-1} \circ c \rangle^{\frac{1}{2}} \langle du \circ a \circ du \rangle^{\frac{1}{2}} \times \\ &\times (\beta \langle du \circ a \circ du \rangle + C(\beta) \|u\|_2^2)^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq \frac{\langle c \circ a^{-1} \circ c \rangle^{\frac{1}{2}}}{2} \left( \left( \varepsilon + \frac{\beta}{\varepsilon} \right) \langle du \circ a \circ du \rangle + \frac{C(\beta)}{\varepsilon} \|u\|_2^2 \right). \end{aligned}$$

Тоді одержимо

$$\begin{aligned} |h_\lambda^2(u, v)| &\leq |h_\lambda^2(u, u)| \leq \left( \lambda + \frac{\langle c \circ a^{-1} \circ c \rangle^{\frac{1}{2}} C(\beta)}{2\varepsilon} \right) \|u\|_2^2 + \\ &+ \left( 1 + \frac{\langle c \circ a^{-1} \circ c \rangle^{\frac{1}{2}}}{2} \left( \varepsilon + \frac{\beta}{\varepsilon} \right) \right) \langle du \circ a \circ du \rangle. \end{aligned}$$

Нехай  $\varepsilon = \sqrt{\beta}$ ,  $\langle c \circ a^{-1} \circ c \rangle^{\frac{1}{2}} = N$ . Тоді матимемо

$$|h_{\lambda}^2(u, v)| \leq |h_{\lambda}^2(u, u)| \leq \left( \lambda + \frac{NC(\beta)}{2\sqrt{\beta}} \right) \|u\|_2^2 + (1 + N\sqrt{\beta}) \langle du \circ a \circ du \rangle.$$

Отже, форма  $h_{\lambda}^2(u, v)$  обмежена, лема доведена.

**Лема 2.** Форма  $h_{\lambda}^2(u, v)$  породжує обмежений коерцитивний оператор і є правильною формула  $A_{\lambda}^2(\cdot) : W_1^2(R^l, d^l x) \rightarrow W_{-1}^2(R^l, d^l x)$  і

$$\|A_{\lambda}^2(u)\|_{W_{-1}^2} = \sup_{v \in W_1^2} \frac{h_{\lambda}^2(u, v)}{\|v\|_{W_1^2}}.$$

**Доведення.** За означенням, оператор  $A_{\lambda}^2(\cdot) : W_1^2(R^l, d^l x) \rightarrow W_{-1}^2(R^l, d^l x)$  коерцитивний, якщо виконується нерівність

$$\begin{aligned} & \lim_{\|u\|_{W_1^2} \rightarrow \infty} \frac{h_{\lambda}^2(u)}{\|u\|_{W_1^2}} \geq \\ & \geq \lim_{\|u\|_{W_1^2} \rightarrow \infty} \frac{(\lambda - \lambda_0) \|u\|_2^2 + (1 - N\sqrt{\beta}) \langle du \circ a \circ du \rangle}{\|u\|_{W_1^2}} \geq \\ & \leq \lim_{\|u\|_{W_1^2} \rightarrow \infty} \frac{(\lambda - \lambda_0) \|u\|_2^2 + (1 - N\sqrt{\beta}) \|\nabla u\|_2^2}{(\|u\|_2^2 + \|\nabla u\|_2^2)^{\frac{1}{2}}} = \infty, \end{aligned}$$

де  $A_{\lambda}^2$  — коерцитивне відображення.

**Лема 3.** Оператор  $A_{\lambda}^2(\cdot) : W_1^2(R^l, d^l x) \rightarrow W_{-1}^2(R^l, d^l x)$  — строго монотонне відображення.

**Доведення.** Означення монотонності має вигляд

$$\langle A_{\lambda}^2(u) - A_{\lambda}^2(v), (u - v) \rangle \geq 0 \quad \forall u, v \in W_1^2,$$

$$\begin{aligned} \langle A_{\lambda}^2(u) - A_{\lambda}^2(v), (u - v) \rangle & \geq \lambda \|u - v\|_2^2 - \lambda_0 \|u - v\|_2^2 + \\ & + (1 - N\sqrt{\beta}) \|\nabla(u - v)\|_2^2 \quad \text{при } 0 < \beta < 1, \lambda > \lambda_0, \end{aligned}$$

тобто  $\langle A_{\lambda}^2(u) - A_{\lambda}^2(v), (u - v) \rangle = 0 \Leftrightarrow u = v \quad \forall u, v \in W_1^2$ .

Отже, оператор  $A_{\lambda}^2(\cdot) : W_1^2(R^l, d^l x) \rightarrow W_{-1}^2(R^l, d^l x)$  строго монотонний.

**Лема 4.** Оператор  $A_{\lambda}^2(\cdot) : W_1^2(R^l, d^l x) \rightarrow W_{-1}^2(R^l, d^l x)$  є хемінеперервним відображенням, тобто

$$\langle A_{\lambda}^2(u + tw) - A_{\lambda}^2(u), v \rangle \rightarrow 0, \quad t \rightarrow 0.$$

$$\forall u, w \in W_1^2(R^l, d^l x), \quad v \in W_{1,0}^2(R^l, d^l x).$$

**Доведення.** Безпосередньо одержуємо

$$\begin{aligned} |\langle A_{\lambda}^2(u + tw) - A_{\lambda}^2(u), v \rangle| & \geq t |\langle w, v \rangle| + t |\langle dv \circ a \circ dw \rangle + \\ & + t |\langle (da \circ dw + b \circ dw), v \rangle| \rightarrow 0, \quad t \rightarrow 0, \end{aligned}$$

$$\forall u, w \in W_1^2(R^l, d^l x), \quad \forall v \in W_{1,0}^2(R^l, d^l x).$$

Лема доведена.

**Теорема 1.** Рівняння (1) за умов (2) має єдиний розв'язок, який належить  $W_1^2(R^l, d^l x)$ .

**Доведення.** Доведення полягає в перевірці виконання умов теореми Мінті—Браудера (див. теорему 2.1 із [5, с. 182]).

Внаслідок лем 1–4 оператор  $A_{\lambda}^2$ , породжений формою  $h_{\lambda}^2(u, v)$ , умови цієї теореми задовольняє.

Розглянемо звуження оператора  $A_{\lambda}^2$  на множину  $u \in W_1^2(R^l, d^l x)$ , таких, що  $A_{\lambda}^2(u) L_2(R^l)$  і визначимо оператор  $\tilde{A}_{\lambda}^2(u) \equiv A_{\lambda}^2(u)$  для

$$u \in D(\tilde{A}_{\lambda}^2) = \{u \in W_1^2(R^l, d^l x) | A_{\lambda}^2(u) \in L_2(R^l)\}.$$

**Теорема 2.** Оператор  $\tilde{A}_{\lambda}^2 : D(\tilde{A}_{\lambda}^2) \rightarrow L_2(R^l)$  — сюр'єктивне відображення.

**Доведення.** Оскільки область значень оператора  $A_{\lambda}^2$  збігається з простором  $W_{-1}^2(R^l, d^l x)$  і вкладення  $W_1^2(R^l, d^l x) \subset L_2(R^l) \subset W_{-1}^2(R^l, d^l x)$  є неперервним і щільним, то одержуємо, що  $\tilde{A}_{\lambda}^2 : D(\tilde{A}_{\lambda}^2) \rightarrow L_2(R^l)$  — сюр'єктивне відображення. Це означає, що рівняння  $\tilde{A}_{\lambda}^2(u) = f \quad \forall f \in L_2(R^l)$  має розв'язок, який належить до множини області визначення оператора  $A_{\lambda}^2$ , або, що те саме, рівняння  $(\lambda - d \circ a \circ d + da \circ d + b \circ d)u = f \quad \forall f \in L_2(R^l)$  має узагальнений роз-

в'язок у множині області визначення оператора  $\tilde{A}_\lambda^2$ , яка є підмножиною множини  $W_1^2(R^l, d^l x)$ .

Внаслідок того, що оператор  $A_\lambda^2 : W_1^2(R^l, d^l x) \rightarrow W_{-1}^2(R^l, d^l x)$  є монотонним, то оператор  $\tilde{A}_\lambda^2 : D(\tilde{A}_\lambda^2) \rightarrow L_2(R^l)$  є максимальним монотонним відображенням, що в свою чергу гарантує єдиність розв'язку, а отже, оператор  $\tilde{A}_\lambda^2 : D(\tilde{A}_\lambda^2) \rightarrow L_2(R^l)$  є генератором напівгрупи стиску типу  $C_0$ . Таким чином, маємо, що операторною реалізацією диференціального виразу  $(\lambda - d \circ a \circ d + da \circ d + b \circ d)u$ ,  $u \in D(\tilde{A}_\lambda^2)$ , при наших умовах є оператор  $\tilde{A}_\lambda^2 : D(\tilde{A}_\lambda^2) \rightarrow L_2(R^l)$ . Теорема доведена.

Перейдемо до розгляду рівняння (1) у шкалі просторів  $W_1^p(R^l, d^l x)$ .

Простір  $W_1^p(R^l, d^l x)$  введемо як  $W_1^p(R^l, d^l x) =: \{v | v \in L^p(R^l, d^l x), D_i v \in L^p(R^l, d^l x), i = 1, \dots, l\}$ ,

$$\|v\|_{W_1^p(R^l, d^l x)} = \|v\|_{L^p(R^l, d^l x)} + \sum_i \|D_i v\|_{L^p(R^l, d^l x)},$$

де  $W_{1,0}^p(R^l, d^l x) =: \{v | v \in W_1^p(R^l, d^l x) \text{ і має компактний носій}\}$ ;  $W_{-1}^p(R^l, d^l x)$  — спряжений простір до простору  $W_{1,0}^p(R^l, d^l x)$ .

Визначимо форму  $h_\lambda^p(u, v)$ , покладаючи

$$h_\lambda^p(u, v) = \lambda \langle u, v \rangle + \langle dv \circ a \circ du \rangle + \langle (da \circ du + b \circ du), v \rangle.$$

**Лема 5.** Якщо структура рівняння (1) задовольняє наведені раніше умови (2), то форма, породжена цим рівнянням, обмежена.

**Доведення.** Дійсно, можемо оцінити

$$\begin{aligned} h_\lambda^p(u, v) &= (\lambda \langle u, v \rangle + \langle dv \circ a \circ du \rangle + \\ &+ \langle (da \circ du + b \circ du), v \rangle \leq \lambda \|u\|_p \|v\|_q + \langle dv \circ a \circ du \rangle + \\ &+ |\langle (da + b) \circ du, v \rangle|, \quad da + b = c. \end{aligned}$$

Введемо позначення  $W \equiv u |u|^{\frac{p-2}{2}}$ . Тоді матимемо

$$\begin{aligned} |\langle c \circ du, u |u|^{p-2} \rangle| &\leq \\ &\leq \frac{2}{p} \langle c \circ a^{-1} \circ c \rangle^{\frac{1}{2}} \langle dW \circ a \circ dW \rangle^{\frac{1}{2}} \|W\|_2 \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{2}{p} \langle c \circ a^{-1} \circ c \rangle^{\frac{1}{2}} \langle dW \circ a \circ dW \rangle^{\frac{1}{2}} (\beta \langle dW \circ a \circ dW \rangle + \\ &+ C(\beta) \|W\|_2^2)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{\langle c \circ a^{-1} \circ c \rangle^{\frac{1}{2}}}{p} \times \\ &\times \left( \left( \varepsilon + \frac{\beta}{\varepsilon} \right) \langle dW \circ a \circ dW \rangle + \frac{C(\beta)}{\varepsilon} \|W\|_2^2 \right), \\ |h_\lambda^p(u, v)| &\leq |h_\lambda^p(u, u |u|^{p-2})| \leq \left( \lambda + \frac{\langle c \circ a^{-1} \circ c \rangle^{\frac{1}{2}}}{p} \frac{C(\beta)}{\varepsilon} \right) \times \\ &\times \|W\|_2^2 + \left( \frac{4(p-1)}{p^2} + \frac{\langle c \circ a^{-1} \circ c \rangle^{\frac{1}{2}}}{p} \left( \varepsilon + \frac{\beta}{\varepsilon} \right) \right) \|\nabla W\|_2^2. \end{aligned}$$

Нехай  $\varepsilon = \sqrt{\beta}$ ,  $\frac{1}{p} \langle c \circ a^{-1} \circ c \rangle^{\frac{1}{2}} = N$ . Тоді маємо

$$\begin{aligned} |h_\lambda^p(u, v)| &\leq |h_\lambda^p(u, u |u|^{p-2})| \leq \\ &\leq \left( \lambda + \frac{NC(\beta)}{p\sqrt{\beta}} \right) \|W\|_2^2 + \left( u \frac{p-1}{p^2} + N\sqrt{\beta} \right) \|\nabla W\|_2^2, \end{aligned}$$

а отже, форма  $h_\lambda^p(u, v)$  обмежена. Лема доведена.

**Лема 6.** Форма  $h_\lambda^p(u, v)$  породжує обмежений коерцитивний оператор

$$A_\lambda^p(\cdot) : W_1^p(R^l, d^l x) \rightarrow W_{-1}^p(R^l, d^l x),$$

$$\|A_\lambda^p(u)\|_{W_{-1}^p} = \sup_{v \in W_1^q} \frac{h_\lambda^p(u, v)}{\|v\|_{W_1^q}}.$$

**Доведення.** Згідно з означенням коерцитивності, маємо

$$\begin{aligned} \lim_{\|u\|_p^{p-2} \|u\|_{W_1^q} \rightarrow \infty} \frac{h_\lambda^p(u, u |u|^{p-2})}{\|u\|_p^{p-2} \|u\|_{W_1^q}} &\geq \\ &= \lim_{\|u\|_p^{p-2} \|u\|_{W_1^q} \rightarrow \infty} \frac{(\lambda - \lambda_0) \|W\|_2^2 + \left( u \frac{p-2}{p^2} N\sqrt{\beta} \right) \|\nabla W\|_2^2}{\|W\|_2^q + \frac{2}{q} \|W\|_2^{q-1} \|\nabla W\|_2} = \infty, \end{aligned}$$

тобто оператор  $A_\lambda^p$  — коерцитивне відображення.

**Лема 7.** Оператор  $A_\lambda^p(\cdot) : W_1^p(R^l, d^l x) \rightarrow W_{-1}^p(R^l, d^l x)$  є хемінеперервним відображенням, тобто

$$\langle A_\lambda^p(u + tw) - A_\lambda^p(u), v \rangle \rightarrow 0 \text{ при}$$

$$t \rightarrow 0 \quad \forall u, w \in W_1^p(R^l, d^l x), \quad \forall v \in W_{1,0}^q(R^l, d^l x).$$

**Доведення.** За визначенням, оператор  $A_\lambda^p : W_1^p(R^l, d^l x) \rightarrow W_{-1}^p(R^l, d^l x)$  — хемінеперервне відображення, якщо  $\forall u, w \in W_1^p(R^l, d^l x)$   $w - \lim_{t \rightarrow 0} A_\lambda^p(u + tw) = A_\lambda^p(u)$  в нормі  $W_{-1}^p(R^l, d^l x)$ . Отже, матимемо

$$|\langle A_\lambda^p(u + tw) - A_\lambda^p(u), v \rangle| \geq t |\langle w, v \rangle| + t |\langle dv \circ a \circ dw \rangle| + t |\langle (da \circ d\omega + b \circ dw), v \rangle| \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow 0$$

$$\forall u, w \in W_1^p(R^l, d^l x), \quad \forall v \in W_{1,0}^q(R^l, d^l x).$$

Лема доведена.

**Лема 8.** Оператор  $A_\lambda^p(\cdot) : W_1^p(R^l, d^l x) \rightarrow W_{-1}^p(R^l, d^l x)$  — акритивне відображення в просторі  $L_p(R^l)$ .

**Доведення.** За означенням, оператор  $A_\lambda^p(\cdot) : W_1^p(R^l, d^l x) \rightarrow W_{-1}^p(R^l, d^l x)$  акритивний у  $L_p(R^l)$ , якщо  $\langle \tilde{A}_\lambda^p(u) - \tilde{A}_\lambda^p(v), (u - v)|u - v|^{p-2} \rangle \geq 0 \quad \forall u, v \in W_1^p$ . Отже, маємо

$$\langle \tilde{A}_\lambda^p(u) - \tilde{A}_\lambda^p(v), (u - v)|u - v|^{p-2} \rangle \geq ((\lambda - \lambda_0) \|W\|_2^2 + \left( \frac{4(p-1)}{p^2} - N\sqrt{\beta} \right) \|\nabla W\|_2^2, \text{ при } 0 < \beta < \frac{16}{N} \left( \frac{p-1}{p^2} \right)^2$$

$$\text{і } \lambda > \lambda_0,$$

де  $W \equiv (u - v)|u - v|^{\frac{p-2}{2}}$ , тобто

$$\langle \tilde{A}_\lambda^p(u) - \tilde{A}_\lambda^p(v), (u - v)|u - v|^{p-2} \rangle = 0$$

$$\Leftrightarrow u = v \quad \forall u, v \in W_1^p.$$

Оператор  $A_\lambda^p(\cdot)$  строго акритивний в  $L_p$ .

Лема доведена.

Доведемо аналог теореми 2. Для цього розглянемо звуження оператора  $A_\lambda^p$  на множину  $u \in W_1^p(R^l, d^l x)$ , таких, що  $A_\lambda^p(u) L_p(R^l)$ , і визначимо оператор  $\tilde{A}_\lambda^p(u) \equiv A_\lambda^p(u)$  для

$$u \in D(\tilde{A}_\lambda^p) = \{u \in W_1^p(R^l, d^l x) | A_\lambda^p(u) \in L_p(R^l)\}.$$

**Теорема 3.** Оператор  $\tilde{A}_\lambda^p : D(\tilde{A}_\lambda^p) \rightarrow L_p(R^l)$  — сюр'єктивне відображення.

**Доведення.** Оскільки область значень оператора  $A_\lambda^p$  збігається з простором  $W_{-1}^p(R^l, d^l x)$  і вкладення  $W_1^p(R^l, d^l x) \subset L_p(R^l) \subset W_{-1}^p(R^l, d^l x)$  є неперервним і щільним, то одержуємо, що  $\tilde{A}_\lambda^p : D(\tilde{A}_\lambda^p) \rightarrow L_p(R^l)$  — сюр'єктивне відображення. Це означає, що рівняння  $\tilde{A}_\lambda^p(u) = f \quad \forall f \in L_p(R^l)$  має розв'язок, який належить до множини області визначення оператора  $A_\lambda^p$ , або, що те саме, рівняння  $(\lambda - d \circ a \circ d + da \circ d + b \circ d)u = f \quad \forall f \in L_p(R^l)$  має узагальнений розв'язок в множині області визначення оператора  $\tilde{A}_\lambda^p$ , яка є підмножиною множини  $W_1^p(R^l, d^l x)$ .

Внаслідок того, що відображення  $A_\lambda^p : W_1^p(R^l, d^l x) \rightarrow W_{-1}^p(R^l, d^l x)$  є акритивним, то відображення  $\tilde{A}_\lambda^p : D(\tilde{A}_\lambda^p) \rightarrow L_p(R^l)$  є максимальним акритивним відображенням, що гарантує єдиність розв'язку, а отже, оператор  $\tilde{A}_\lambda^p : D(\tilde{A}_\lambda^p) \rightarrow L_p(R^l)$  є генератором напівгрупи стиску типу  $C_0$ . Отже, маємо, що операторною реалізацією диференціального виразу  $(\lambda - d \circ a \circ d + da \circ d + b \circ d)u, u \in D(\tilde{A}_\lambda^p)$  при наших умовах є оператор  $\tilde{A}_\lambda^p : D(\tilde{A}_\lambda^p) \rightarrow L_p(R^l)$ . Теорема 3 доведена.

Взагалі кажучи, доведених лем 5–8 недостатньо для доведення існування єдиності розв'язку рівняння (1) — необхідні ще деякі додаткові умови.

## Висновки

У статті вперше використано метод форм для доведення розв'язності рівняння (1) за умов (2), тобто виконуються умови теореми

Мінті–Браудера для оператора, породженого формою, складеною за лівою частиною нашого рівняння. Крім того, показано, що цей оператор є генератором напівгрупи стиску.

Н.М. Кухарчук, Н.И. Яременко

РАЗРЕШИМОСТЬ ОДНОГО КЛАССИЧЕСКОГО ЛИНЕЙНОГО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Исследовано линейное эллиптическое уравнение во всем евклидовом пространстве  $R^l$ ,  $l \geq 3$ . Получены результаты о существовании и единственности решений таких уравнений.

M.M. Kukharchuk, M.I. Yaremenko

ON SOLVABILITY OF ONE CLASSICAL LINEAR ELLIPTICAL DIFFERENTIAL SECOND-ORDER EQUATION

The paper outlines the investigation of the linear elliptic equations on the whole Euclidean space  $R^l$ ,  $l \geq 3$ . We obtain some results on the existence and uniqueness of the solutions of these equations.

1. *Условия единственности и оценки решения задачи Дирихле* // Вести ЛГУ. Сер. Математика, механика, астрономия. — 1963. — № 13, вып. 3. — С. 5–29.
2. *Кухарчук М.М.* Про розв'язність квазілінійних еліптичних рівнянь другого порядку в  $R^l$  // Наукові вісті НТУУ “КПІ”. — 2004. — № 2. — С. 145–158.
3. *Кухарчук Н.М.* Разрешимость квазилинейных эллиптических уравнений второго порядка с умеренными медленно растущими коэффициентами в пространствах  $W_1^p(R^l, d^l x)$ ,  $p \geq 2$ ,  $l \geq 3$ . — К., 1988. — (Препринт. АН УССР, Ин-т математики). — 52 с.

Рекомендована Радою  
фізико-математичного факультету  
НТУУ “КПІ”

Надійшла до редакції  
1 жовтня 2007 року