

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ  
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ  
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

# СТАТИСТИЧНА РАДІОТЕХНІКА КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

**Навчальний посібник**

Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського  
як навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра  
за освітньою програмою «Інформаційна та комунікаційна радіоінженерія»  
спеціальності 172 Електронні комунікації та радіотехніка

Укладачі: О. С. Макаренко, С. М. Літвінцев

Електронне мережне навчальне видання

Київ  
КПІ ім. Ігоря Сікорського  
2023

Рецензент *ЖУК, С.Я., д.т.н., проф., кафедра РТС РТФ*

Відповідальний редактор *КАЛЮЖНИЙ, О.Я., д.ф.-м.н., проф.*

*Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського  
(протокол № 4 від 19.01.2023 р.)  
за поданням Вченої ради радіотехнічного факультету  
(протокол № 15/2022 від 19.12.2022 р.)*

В даному навчальному посібнику викладено матеріали лекцій, що викладаються студентам по дисципліні «Статистична радіотехніка». Він містить розділи, необхідні для оволодіння питаннями, які винесені як необхідні по даному предмету.

Посібник призначений для здобувачів ступеня бакалавр за спеціальністю 172 Електронні комунікації та радіотехніка.

Реєстр. № НП 22/23-386. Обсяг 2,8 авт. арк.

Національний технічний університет України  
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»  
проспект Перемоги, 37, м. Київ, 03056  
<https://kpi.ua>

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру видавців, виготовлювачів і розповсюджувачів видавничої продукції ДК № 5354 від 25.05.2017 р.

© О. С. Макаренко, С. М. Літвінцев  
© КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2023

# 1 Лекція 1. Сигнали, завади, і випадкова подія

1. РСО
2. Сигнали і завади. Класифікація
3. Випадкова подія (случайное событие)
4. Термінологія
5. Теореми імовірності
6. Випадкова величина
7. Інтегральна функція розподілу (безперервна, дискретна)
8. Густина імовірності
9. Моменти, математичне сподівання та дисперсія

## 1.1 РСО

Зміст РСО див. в окремому файлі.

## 1.2 Сигнали і завади. Їх класифікація

Електричне *коливання* скалярної величини (напруги, струму, заряду та ін.) — одне з первинних понять радіотехніки. Коливанням називають будь-який процес  $x(t)$ , який не задовольняє умові  $x(t) = \text{const}$  при  $-\infty < t < \infty$ . Залежно від задачі, коливання можна класифікувати по-різному. Найбільш загальним є поділ коливань на регулярні та випадкові (нерегулярні) [1–6].

*Регулярними* (або *детермінованими*) є коливання, задані аналітично або іншим способом еквівалентним (графічно, таблично).

*Випадкові* (нерегулярні) коливання, на відміну регулярних, приймають значення, які заздалегідь невідомі, оскільки вони підпорядковуються лише статистичним закономірностям, які можна передбачити лише з деякою ймовірністю.

Коливання також поділяються на сигнали та завади: сигнали несуть інформацію та створюються спеціально, завади — це коливання, які заважають спостереженню сигналів.

### 1.2.1 Сигнал

*Сигнал* — фізичний процес, який несе певну інформацію (повідомлення) і пов'язаний з нею прийнятими способами модуляції та кодування. У найпростіших випадках, наприклад, у провідному зв'язку, сигнал як безпосередній аналог повідомлення може бути і немодульованим, і некодованим. Сигнали класифікують по безлічі ознак, заснованих на фізичних властивостях джерела їх отримання або найважливіших параметрах, що визначають можливості їх використання [1].

Так, сигнали розрізняють: за фізичною природою (електричний, електромагнітний, акустичний, оптичний тощо); за приналежністю до того чи іншого виду зв'язку (телефонний, телевізійний, телеграфний, фототелеграфний тощо).

У часовій області сигнали розрізняють:

- за тривалістю: фінітний, тобто сигнал, обмежений у часі, та нефінітний сигнал;

- за регулярністю повторення: періодичний — сигнал для якого виконується співвідношення  $f(t) = f(t + kT)$ ,  $k$  — будь-яке ціле число,  $T$  — період, і неперіодичний — сигнал для якого  $f(t + kT) \neq f(t)$ ;
- за характером змінних (безперервно-дискретні): аналоговий (континуальний) — сигнал, довільний за значеннями та безперервний у часі (рис. 1.1а), який є аналогом певного інформаційного процесу; дискретизований — сигнал, довільний за значеннями та дискретний у часі (рис. 1.1б); квантований за значеннями (приймає лише дискретні значення) та безперервний у часі (рис. 1.1в); дискретний у часі та квантований за рівнями, придатний для цифрового кодування відліків, що йдуть з тактовою частотою, і тому часто званий цифровим сигналом (рис. 1.1г).

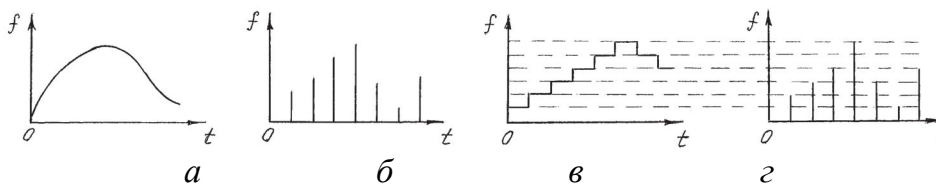


Рис. 1.1. Типи сигналів в часовій області

У спектральній області сигнали розрізняють по відносній ширині спектра — *широкозмуговий* сигнал, для якого ширина фізичного спектру  $\Delta\omega_c = \omega_{\max} - \omega_{\min}$  порівнянна із середньою частотою  $\omega_{\text{сеп}}$ , і *вузькозмуговий* сигнал, для якого  $\Delta\omega_c/\omega_{\text{сеп}} \ll 1$ ; по області частот, у якій розташований спектр сигналу — низько-, високо-, радіочастотні сигнали, сигнали НВЧ тощо.

За функцією в процесі модуляції розрізняють: сигнал, який модулюють (несуче коливання) і *модулюючий* (керуючий) сигнал — первинний сигнал, який модулює несучу. Керуючим сигналом може бути безпосередньо як повідомлення, так і будь-який допоміжний сигнал, промодульований повідомленням (наприклад послідовність відеоімпульсів з АІМ, ШІМ тощо). Вузькозмуговий (у відносному сенсі) сигнал, отриманий модуляцією гармонійної несучої, називається *радіосигналом*.

Радіосигнал (РС) класифікують за видами модуляції та особливостями модулюючих сигналів, а саме: РС з аналоговою модуляцією (АМ, ОМ, ЧС, ФМ), з імпульсною модуляцією — імпульсно-модульовані сигнали (АІМ, ВІМ, ШІМ, КІМ); імпульсно-дискретні сигнали (поодинокі імпульси, їх послідовності, маніпульовані РС з АМн, ЧМн, ФМн, ОМФн тощо).

### 1.2.2 База сигналу

*База сигналу* — кількісна характеристика складності сигналу. База сигналу  $M$  дорівнює добутку тривалості сигналу  $T_c$  на ширину його спектру  $\Delta f_c$ :  $M = T_c \Delta f_c$ . Для радіосигналу під  $\Delta f_c$  розуміють ширину спектра відповідного аналітичного сигналу (або математичного спектру його комплексної огинаючої). За цією умовою база РС набуває сенсу відношення ширини спектру РС  $\Delta f_{\text{РС}}$  до ширини спектру  $\Delta f_{\text{МС}}$  модулюючого сигналу:  $M = \Delta f_{\text{РС}}/\Delta f_{\text{МС}}$ .

Сигнали з базою, порівнянною з 1, називають *простими*, а за  $M \gg 1$  — *складними*.

### 1.2.3 Завада

*Завада* — сторонній вплив, який заважає прийому та обробці сигналів. У радіотехнічних системах передачі завада викликає відхилення прийнятого повідомлення від переданого. При радіомовному прийомі завади виявляються як тріски та шуми, які погіршують якість звучання. При телевізійному прийомі завади спотворюють зображення, при локації викликають пропуск реально існуючої чи виявлення неіснуючої мети (хибна тривога). Класифікаційна схема завад за їх походженням наведено на рис. 1.2.

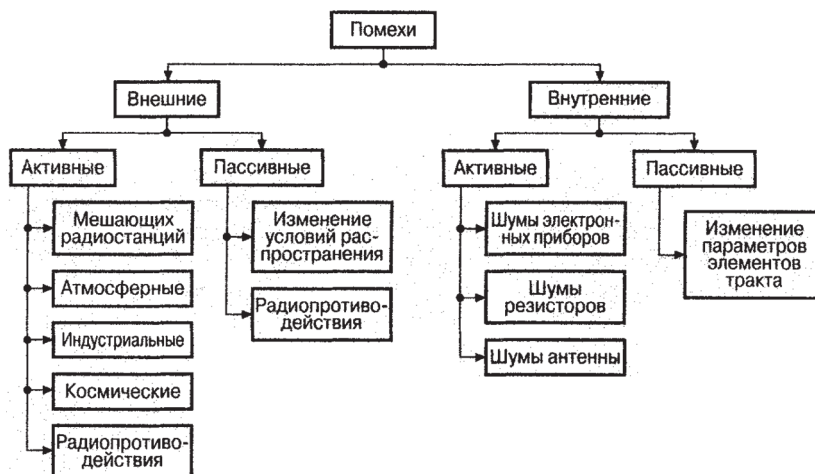


Рис. 1.2. Класифікація завад

За належністю до радіотехнічних систем (РТС) завади (шуми) поділяють на позасистемні та внутрішньосистемні (внутрішні шуми, шуми квантування, міжканальні завади, випромінювання гетеродинів та ін.).

За своєю природою завади поділяються на детерміновані (наприклад завади радіостанцій, що заважають) і випадкові (космічні, атмосферні, внутрішні та ін.). Миттєві значення перших можна визначити заздалегідь, тому боротьба із ними значно спрощується. Миттєві значення випадкових завад невідомі, і можуть бути передбачені з певною ймовірністю. Ці завади, на відміну детермінованих, повністю усунути неможливо, оскільки вони визначаються дискретною будовою матерії і статистичним характером багатьох фізичних процесів. Внаслідок цього їх придушення зустрічає значні труднощі як розробки теорії, і при технічній реалізації.

Значна частина завад має гаусівський або похідні від нього закони розподілу (усічений гаусівський, логарифмічний гаусівський, полігаусівський). Серед негаусівських розподілів найчастіше використовуються закони Релея, Лапласа, Вейбулла.

Завада може впливати на сигнал через електромагнітне, електростатичне, магнітостатичне, акустичне поля, а також кондуктивним шляхом через проводи, шасі, монтаж та ін. У загальному випадку, на вхід радіосистеми надходить суміш сигналу і перешкоди  $U_{\text{см}} = V(U_c, U_3)$ . Якщо оператором  $V$  визначається сума  $V(U_c, U_3) = U_c + U_3$ , то заваду називають адитивною, а якщо добуток

$V(U_c, U_3) = U_c U_3$  — мультиплікативною. Зазвичай перша належить до класу активних завад, друга — пасивних.

Більшість розглянутих завад можуть бути представлені п'ятьма моделями: флуктуаційною, імпульсною (зосередженою у часі), квазіімпульсною, зосередженою за спектром та пасивною.

### 1.3 Випадкова подія

*Теорія ймовірностей* — це наука про те, що є вірогідного у імовірному. Так само, як в алгебрі основним поняттям є число, а у геометрії — точка, лінія, площина, так в теорії ймовірностей основним поняттям є випадкова подія.

*Випадкова подія* це подія, яка під час проведення досліду (випробування, експерименту) може статися або не статися.

### 1.4 Термінологія

Центральним в теорії ймовірностей є визначення *частоти події*, або статистичної імовірності події  $A$ :

$$P(A) = m_A / m, \quad (1.1)$$

де  $m_A$  — кількість випадків, в яких з'явилася подія  $A$ ,  $m$  — загальна кількість випадків.

При достатньо великій кількості випробувань поняття частоти ототожнюють з поняттям імовірності та позначають тим же символом  $P(A)$ . З цього визначення витікає, що  $0 \leq P(A) \leq 1$ . Події, для яких  $P(A) = 0$  або  $P(A) = 1$ , називають відповідно *неможливими* і *достовірними*.

Подія, поява якої не пов'язана з появою іншої події, називається *незалежною*. *Несумісна* подія — випадкова подія, поява якої виключає можливість появи іншої події. Групу (сукупність) подій називають *повною*, якщо під час досліду неодмінно має з'явитися хоча б одна з них.

### 1.5 Теорема імовірності

Для подій, які охоплюються одним дослідом або «однократним випробуванням», відомо дві теореми додавання та дві теореми множення.

#### 1.5.1 Перша теорема додавання

Перша теорема додавання ймовірностей для групи *незалежних* і *несумісних* подій дозволяє визначити імовірність настання будь-якої події  $A_i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) з групи несумісних подій  $A_1, A_2, \dots, A_m$ :

$$P(A_1, \text{або } A_2, \text{або}, \dots, \text{або } A_m) = \sum_{i=1}^m P(A_i). \quad (1.2)$$

Для повної групи подій  $\sum_{i=1}^m P(A_i) = 1$ . Якщо повна група складається з двох подій, то їх називають *протилежними* одна відносно іншої. Тобто

$$P(\bar{A}) + P(A) = 1, \quad p + q = 1, \quad q = P(\bar{A}).$$

### 1.5.2 Перша теорема множення

Перша теорема множення ймовірностей для групи *сумісних* і *незалежних* подій визначає ймовірність настання усіх випадкових подій групи:

$$P(A_1, i A_2, i, \dots, i A_m) = \prod_{i=1}^m P(A_i). \quad (1.3)$$

### 1.5.3 Друга теорема додавання

Друга теорема додавання ймовірностей для групи *незалежних* і *сумісних* подій визначає ймовірність настання щонайменше однієї події  $A_i$  з групи:

$$P(A_1, \text{або } A_2, \text{або}, \dots, \text{або } A_m) = 1 - \prod_{i=1}^m [1 - P(A_i)] = 1 - \prod_{i=1}^m q_i. \quad (1.4)$$

### 1.5.4 Друга теорема множення

Друга теорема множення ймовірностей для групи *сумісних* і *залежних* подій визначається формулою:

$$P(A_1, i A_2, i, \dots, i A_m) = P(A_1)P(A_2 / A_1)P(A_3 / A_1 A_2) \dots P(A_m / A_1 A_2 \dots A_{m-1}), \quad (1.5)$$

де *безумовні* ймовірності  $P(A_1)$  називають *ап'юріорними*, а умовні ймовірності  $P(A_2/A_1), P(A_3/A_2A_1), \dots$  — *апостеріорними*.

### 1.5.5 Формула повної ймовірності

У багатьох реальних випадках та чи інша подія  $A$  може з'явитися лише як випадковий наслідок однієї з несумісних подій  $H_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), які входять в деяку повну групу подій і називаються *гіпотезами*.

Безумовна ймовірність  $P(A)$  при відомих ймовірностях гіпотез  $P(H_i)$  і умовних ймовірностях  $P(A/H_i)$  визначається за формулою повної або середньої ймовірності

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(H_i)P(A / H_i). \quad (1.6)$$

Формула повної ймовірності дозволяє знайти ймовірність події  $A$  разом з будь-якою гіпотезою  $H_i$ .

### 1.5.6 Теорема гіпотез (формула Байєса)

При цих же даних, тобто відомих ймовірностях  $P(H_i)$  і  $P(A/H_i)$  можливо знайти змінення ймовірностей гіпотез  $H_i$ , якщо припустити, що подія  $A$  вже відбулася. Задачі такого типу вирішуються за допомогою теореми гіпотез (або формула Байєса):

$$P(H_i / A) = \frac{P(H_i)P(A / H_i)}{P(A)}. \quad (1.7)$$

### 1.5.7 Теорема про повторення дослідів (формула Бернуллі)

У задачах, де число дослідів (випробувань) відносно велике, використання формул (1.2)–(1.7) зустрічає чисто обчислювальні ускладнення. Простіше всього вони вирішуються тоді, коли досліди є незалежними. Спосіб вирішення подібних задач дає теорема про повторення дослідів (формула Бернуллі):

Ймовірність того, що при  $n$  незалежних дослідах подія  $A$  з'явиться рівно  $k$  разів, якщо при кожному досліді імовірність події  $A$  однакова і дорівнює  $p$ , визначається як:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad (1.8)$$

де  $C_n^k = n!/[k!(n-k)!]$ ,  $q = 1 - p$ .

Ймовірність того, що подія  $A$  не відбудеться жодного разу, дорівнює  $P_n(0) = q^n$ , а ймовірність того, що подія  $A$  матиме місце усі  $n$  разів:  $P_n(n) = p^n$ . Ймовірність появи події хоча б один раз:  $P_n(k \geq 1) = 1 - q^n$ .

### 1.5.8 Формула Пуассона

Якщо  $n$  велике,  $p$  мале, а  $np = \lambda$  має скінченне значення, тоді замість формули Бернуллі (1.8) користуються наближеною формулою Пуассона

$$P_n(k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}. \quad (1.9)$$

### 1.5.9 Формула Лапласа

При великих  $n$  замість (1.8) зручніше скористатися формулою Лапласа

$$P_n(k) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\delta_k^2}{2\sigma^2}\right), \quad (1.10)$$

де  $\sigma = \sqrt{npq}$ ,  $\delta_k = k - k_{\max} = k - np$ .

### 1.5.10 Формула Бернуллі в межах

Ймовірність того, що подія  $A$  буде мати місце кількість разів, які укладено між  $k_1$  і  $k_2$ , визначається за формулою (1.8) відповідно за першою теоремою додавання:

$$P_n(k_1 \leq k \leq k_2) = \sum_{k=k_1}^{k_2} C_n^k p^k q^{n-k}. \quad (1.11)$$

При великих  $n$  рівняння (1.11) з урахуванням (1.10) можна надати у вигляді наближеного інтегрального співвідношення

$$P_n(k_1 \leq k \leq k_2) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-z^2/2} dz = \Phi(b) - \Phi(a), \quad (1.12)$$

де функція  $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-z^2/2} dz$  протабульована (інтеграл ймовірності),  
 $a = (k_1 - k_{\max}) / \sigma$ ,  $b = (k_2 - k_{\max}) / \sigma$ ,  $z = \delta_k / \sigma$ .

Часто записують так:

$$P_n(|\delta_k| / \sigma \leq \alpha) = 2\Phi(\alpha) - 1,$$

де  $\alpha = -a = b$ .

Якщо  $\alpha = 3$ , то  $P_n(|\delta_k| / \sigma \leq 3) = 0,997$ . Подію, ймовірність якої не менше 0,997, вважають достовірною (правило «трьох сигма»).

## 1.6 Випадкова величина

Природним узагальненням поняття випадкової події є поняття *випадкова величина*. В окремому випадку поняття випадкової величини може збігатися з «числом (сукупністю) подій», у загальному випадку зміст випадкової величини визначається умовами процесу, що досліджується.

Під *випадковою величиною* розуміється величина, яка в результаті досліду з випадковим виходом може набувати те або інше, заздалегідь невідоме, значення.

## 1.7 Інтегральна функція розподілу

*Законом розподілу* випадкової величини називають будь яке правило, що дозволяє знайти ймовірності всіляких подій, зв'язаних з випадковою величиною, наприклад, ймовірність того, що вона прийме якесь значення або потрапить у якийсь проміжок.

Найбільш загальною формою закону розподілу є *інтегральна функція розподілу*, яка представляє собою ймовірність того, що випадкова величина  $X$  прийме значення, менше ніж задане  $x$ :

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x W(x) dx. \quad (1.13)$$

Функція розподілу для будь-якої випадкової величини має властивості:

- $F(-\infty) = 0$ ,
- $F(\infty) = 1$ ;
- при зростанні  $x$  функція  $F(x)$  не спадає.

Закони розподілу можуть бути дискретними (для дискретних випадкових величин) і безперервними (для безперервних величин).

## 1.8 Густина ймовірності

Закон розподілу безперервної випадкової величини  $\xi$  задається *густиною ймовірності* (диференціальний закон):

$$W(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P\{x \leq \xi \leq x + \Delta x\}}{\Delta x} = \frac{dF}{dx}. \quad (1.14)$$

Для дискретної випадкової величини інтегральний і диференціальний закони мають вигляд:

$$F(x) = \sum_i P_i \cdot 1(x - x_i),$$

$$W(x) = \sum_i P_i \cdot \delta(x - x_i).$$

Ймовірність попадання випадкової величини на ділянку осі абсцис від  $\alpha$  до  $\beta$  для будь-якої випадкової величини (дискретної, безперервної або змішаної) визначається за формулою:

$$P\{\alpha \leq x \leq \beta\} = F(\beta) - F(\alpha). \quad (1.15)$$

## 1.9 Моменти, математичне сподівання та дисперсія

Загальними числовими характеристиками є *моменти розподілу*. Розрізняють початкові і центральні моменти. *Початковими* ( $m_k$ ) і *центральними* ( $\mu_k$ ) моментами розподілу  $k$ -го порядку називають числа, що визначаються відповідно

$$m_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k W(x) dx,$$

$$\mu_k = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_1)^k W(x) dx.$$

Математичне сподівання (перший початковий момент) або середнє значення безперервної випадкової величини, визначається як

$$m_1 = \int_{-\infty}^{\infty} x W(x) dx.$$

Дисперсія (другий центральний момент):

$$\sigma^2 = \mu_2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_1)^2 W(x) dx.$$

Корінь квадратний з дисперсії називають *середнє квадратичне відхилення* (СКВ, MSE, mean square error).

Для дискретної випадкової величини  $m_k$  і  $\mu_k$  визначаються за формулами:

$$m_k = \sum_{n=1}^m x_n^k p_n, \quad \mu_k = \sum_{n=1}^m (x_n - m_1)^k p_n.$$

## 2 Лекція 2. Випадковий процес і його характеристики

1. Випадковий процес
2. Функція розподілу випадкового процесу
3. Густина імовірності випадкового процесу
4. Умовні закони розподілу
5. Головні числові характеристики випадкового процесу
6. Інші числові характеристики випадкового процесу
7. Характеристична функція та її властивості
8. Імовірнісні характеристики випадкових процесів

### 2.1 Випадковий процес

*Випадковий процес* — це процес  $x(t)$ , кожне миттєве значення якого при  $t = t_i$  є випадковою величиною  $x(t_i)$ . Іншими словами, випадковий процес — випадкова функція часу. Випадкове значення  $x(t_i)$ , яке набуває випадковий процес при  $t = t_i$ , називають *перетином* випадкового процесу, що відповідає даному значенню аргументу [2].

*Реалізацією* випадкового процесу  $x_i(t)$  називають не випадкову функцію  $x_i(t)$ , на яку перетворюється випадковий процес  $x(t)$  після проведення досвіду. Якщо зроблено не один дослід, а кілька, після кожного з яких на інтервалі часу  $[0, T]$  виявлено якусь реалізацію випадкового процесу  $x_i(t)$  ( $i$  — номер досвіду), то отримуємо кілька різних реалізацій випадкового процесу:  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_i(t), \dots$  чи *ансамбль* (родина) реалізацій (рис. 2.1).

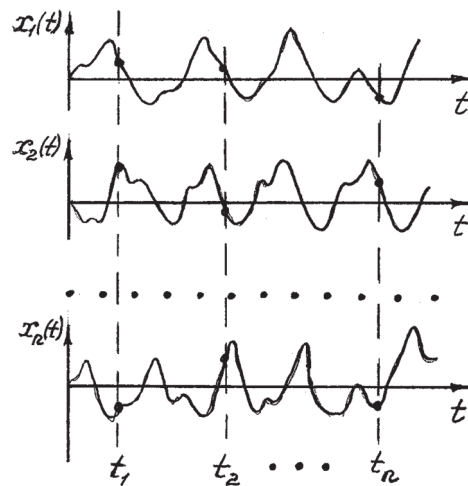


Рис. 2.1. Реалізації випадкового процесу

Визначити заздалегідь, яку реалізацію ми отримуємо в досліді на інтервалі часу  $[0, T]$  неможливо. Найбільше, чого можна побажати — це отримати статистичні характеристики ансамблю реалізацій, а на їх основі — результат, який шукають у ймовірнісних термінах.

Залежно від того, безперервну або дискретну множину значень набуває випадкова величина  $x(t_i)$  та її параметр  $t$ , розрізняють п'ять основних видів випадкових процесів:

1. дискретна випадкова послідовність (квантований за рівнем процес із дискретним часом);
2. випадкова послідовність (безперервний процес із дискретним часом);
3. дискретний випадковий процес (дискретний процес із безперервним часом);
4. безперервно-значний випадковий процес;
5. випадковий точковий процес (потік).

Крім того, можливі різноманітні, складніші змішані види випадкових процесів.

Універсальною характеристикою випадкового процесу для перерізу  $t = t_1$  є функція розподілу.

## 2.2 Функція розподілу випадкового процесу

Функція розподілу (ФР) *одновимірна* визначає можливість, що в момент часу  $t = t_1$  випадкова величина  $x(t_1)$  має значення, що знаходиться нижче рівня  $x_1$ , тобто  $F(x_1, t_1) = p[x(t_1) \leq x_1]$ . Час  $t$  тут грає роль параметра. В загальному випадку аргумент  $x_1$  може лежати в межах від  $-\infty$  до  $\infty$  (рис. 2.1).

*Багатовимірна* функція розподілу визначає ймовірність того, що значення випадкової функції  $x(t)$  у моменти часу  $t_1, t_2, \dots, t_n$  знаходиться нижче відповідних рівнів  $x_1, x_2, \dots, x_n$ :

$$F_n(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_n, t_n) = p[x(t_1) \leq x_1; x(t_2) \leq x_2; \dots; x(t_n) \leq x_n]. \quad (2.1)$$

ФР має наступні властивості:

1. ймовірність того, що випадкова величина  $x(t_1)$  знаходиться нижче за рівень  $x_1 = -\infty$  дорівнює  $F(-\infty, t_1) = p[x(t_1) < -\infty] = 0$ . Це впливає з того, що випадкова величина за умовою не може бути менше  $-\infty$ ;
2. ймовірність того, що випадкова величина  $x(t_1)$  знаходиться не вище за рівень  $x_1 = \infty$  дорівнює 1, як ймовірність повністю (абсолютно) достовірної події  $F(\infty, t_1) = p[x(t_1) < \infty] = 1$ ;
3.  $n$ -вимірна ФР  $F_n(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_n, t_n)$  — функція, що не зменшується для кожного з її аргументів;
4. із функції розподілу вищого порядку завжди можна виділити функцію розподілу нижчого порядку, якщо решта аргументів дорівнює  $\infty$ :

$$F_k(x_1, t_1; \dots; x_k, t_k) = F_n(x_1, t_1; \dots; x_k, t_k; \infty, t_{k+1}; \dots; \infty, t_n). \quad (2.2)$$

Функцію розподілу  $F(x)$  називають також інтегральною функцією розподілу або інтегральним законом розподілу. В англійській літературі вона відома як CDF (cumulative distribution function).

Між одновимірною функцією розподілу  $F(x)$  та густиною ймовірностей  $f(x)$  існує зв'язок:

$$F(x, t_1) = \int_{-\infty}^x f(x, t_1) dx. \quad (2.3)$$

Зв'язок між  $n$ -вимірною функцією розподілу та густиною ймовірностей:

$$\begin{aligned} F_n(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_n, t_n) &= \\ &= \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_n} f_n(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_n, t_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n. \end{aligned} \quad (2.4)$$

### 2.3 Густина імовірності випадкового процесу

Густина імовірності  $f(x)$  випадкового процесу — похідна від відповідної функції розподілу  $F(x)$ . *Одномірною* густиною розподілу ймовірностей випадкового процесу називають функцію  $f(x, t_1) = \partial F(x, t_1) / \partial x$ .

Похідна від  $n$ -вимірної функції розподілу є  $n$ -вимірною густиною розподілу ймовірностей

$$f_n(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_n, t_n) = \frac{\partial^n F_n(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_n, t_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n}. \quad (2.5)$$

Густина ймовірностей має властивості:

- Позитивності

$$f_n(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_n, t_n) \geq 0. \quad (2.6)$$

- Нормування

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_n, t_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n = 1. \quad (2.7)$$

- Симетрії

$$f_n(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_n, t_n) = f_n(x_n, t_n; x_{n-1}, t_{n-1}; \dots; x_1, t_1). \quad (2.8)$$

- Узгодженості

$$\begin{aligned} f_m(x_1, t_1; \dots; x_m, t_m) &= \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x_1, t_1; \dots; x_n, t_n) dx_{m+1} \dots dx_n = 1. \end{aligned} \quad (2.9)$$

### 2.4 Умовні закони розподілу

Закон розподілу системи двох випадкових величин  $x(t_i)$ ,  $y(t_i)$  визначається розподілом кожної із величин, що входять до системи, та залежністю між ними. Ступінь залежності випадкових величин  $x(t_i)$ ,  $y(t_i)$  характеризується умовним законом розподілу, під яким розуміється закон розподілу однієї з випадкових величин, знайдений за умови, що інша випадкова величина набула певного значення [7].

За теоремою множення законів розподілу маємо:

$$f_2(x, y) = f(x)f(y/x) = f(y)f(x/y), \quad (2.10)$$

де  $f(y/x) = \partial F(y/x) / \partial y$ ,  $f(x/y) = \partial F(x/y) / \partial x$  — умовні густини імовірностей.

Для незалежних випадкових величин  $x(t_i)$  і  $y(t_i)$

$$f_2(x, y) = f(x)f(y). \quad (2.11)$$

Ця умова — необхідна та достатня умова незалежності випадкових величин.

Співвідношення, що пов'язують між собою умовні та безумовні густини ймовірностей, а також формула повної ймовірності та формула Байеса для безперервних випадкових величин, мають вигляд:

$$f(y/x) = \frac{f_2(x, y)}{f(x)} = \frac{f_2(x, y)}{\int_{-\infty}^{\infty} f_2(x, y) dy}. \quad (2.12)$$

$$f(x/y) = \frac{f_2(x, y)}{f(y)} = \frac{f_2(x, y)}{\int_{-\infty}^{\infty} f_2(x, y) dx}. \quad (2.13)$$

$$f(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_2(x, y) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)f(y/x) dx. \quad (2.14)$$

$$f(x/y) = \frac{f(x)f(y/x)}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)f(y/x) dx}. \quad (2.15)$$

## 2.5 Головні числові характеристики випадкового процесу

Числові характеристики випадкового процесу — не випадкові характеристики, що виражають найістотніші особливості розподілу. Як числові характеристики, розглядають початкові та центральні моментні функції, енергетичний спектр, інтервал кореляції та ін.

Початкова моментна функція  $k$ -го порядку визначається за формулою:

$$m_k[x(t_1)] = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x, t_1) dx. \quad (2.16)$$

Одновимірну початкову моментну функцію першого порядку

$$m_1[x(t_1)] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x, t_1) dx$$

називають *математичним сподіванням* випадкового процесу. В англійській літературі воно відоме як EV (expected value), інші назви expectation, expec-

tancy, mathematical expectation, mean, average, first moment. Загалом математичне сподівання випадкового процесу є різним для різних моментів часу, тому воно є функцією параметра  $t$ .

Центральні моментні функції обчислюють за формулою:

$$\begin{aligned}\mu_k[x(t_1)] &= m_k[x(t_1) - m_1(t_1)] = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} [x - m_1(t_1)]^k f(x, t_1) dx\end{aligned}\quad (2.17)$$

Центральна моментна функція першого порядку завжди дорівнює нулю. Центральну моментну функцію другого порядку називають *дисперсією* випадкового процесу:

$$\mu_2[x(t_1)] = \sigma^2(t_1) = \int_{-\infty}^{\infty} [x - m_1(t_1)]^2 f(x, t_1) dx. \quad (2.18)$$

В англomовній літературі відома як variance.

Величина  $\sigma(t_1)$  є середнє квадратичне відхилення (СКВ) або стандартне відхилення. В англomовній літературі відоме як SD (standard deviation).

Існують також  $n$ -вимірні початкові та центральні моментні функції  $k$ -го порядку, що виражають особливості  $n$ -вимірного розподілу [8].

Для стаціонарних процесів початкові і центральні моментні функції будь-якого порядку є постійними величинами, які не залежать від часу спостереження випадкового процесу, тобто це числові характеристики:

$$m_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x) dx = \text{const}, \quad (2.19)$$

$$\mu_k = \int_{-\infty}^{\infty} [x - m_1]^k f(x) dx = \text{const}. \quad (2.20)$$

## 2.6 Інші числові характеристики випадкового процесу

Модю  $M$  (найімовірнішим значенням) називається таке значення випадкової величини  $x(t_i)$ , для якого у разі дискретного розподілу ймовірність  $p(x = M)$ , а у разі безперервного розподілу густина ймовірностей має найбільше значення  $f(M)$ . Якщо максимум один, то розподіл називається одномодальним (унімодальним), а якщо кілька багатомодальним [8].

Медіаною  $Me$  (інакше серединним чи ймовірним значенням) називається таке значення випадкової величини  $x(t_i)$ , у якому  $p(x < Me) = p(x > Me) = 1/2$ .

Для безперервної випадкової величини медіана знаходиться з умови:

$$\int_{-\infty}^{Me} f(x) dx = \int_{Me}^{\infty} f(x) dx = 1/2. \quad (2.21)$$

З центральним моментом третього порядку  $\mu_3$  пов'язаний коефіцієнт асиметрії  $\gamma_1$ , що характеризує «скошеність» розподілу, а з центральним моментом четвертого порядку  $\mu_4$  — коефіцієнт ексцесу  $\gamma_2$ , що показує «крутість» розподілу ймовірностей.

Для симетричних щодо математичного очікування розподілів усі моменти непарного порядку (якщо вони існують) дорівнюють нулю та асиметрія відсутня. Ексцес нормального розподілу дорівнює нулю. Якщо крива густини ймовірностей  $W(x)$  має гострішу і вищу вершину проти нормального розподілу, то ексцес позитивний, якщо нижчу і пологіу — негативний. Коефіцієнти асиметрії та ексцесу визначаються відповідно формулами:

$$\gamma_1 = \mu_3 / \sqrt{\mu_2^3}, \quad (2.22)$$

$$\gamma_2 = \mu_4 / \mu_2^2 - 3. \quad (2.23)$$

## 2.7 Характеристична функція та її властивості

Характеристична функція одновимірна. Вона є математичне очікування випадкового процесу  $\exp[jv_1x(t)]$ :

$$\theta_1(jv_1, t_1) = m_1 \{ \exp[jv_1x(t)] \} = \int_{-\infty}^{\infty} \exp[jv_1x] f(x, t_1) dx. \quad (2.24)$$

Характеристична функція і густина ймовірностей пов'язані між собою парою комплексно-сполучених перетворень Фур'є:

$$\theta_1(jv_1t) = F^* \{ f(x, t_1) \}, \quad (2.25)$$

$$f(x, t_1) = (F^*)^{-1} \{ \theta_1(jv_1, t_1) \} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \theta(jv_1, t_1) e^{-jv_1x} dv_1. \quad (2.26)$$

Для стаціонарного випадкового процесу

$$\theta_1(jv_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{+jv_1x} dx.$$

Довільна кінцево-вимірна характеристична функція визначається як:

$$\begin{aligned} \theta_n(jv_1, t_1; jv_2, t_2; \dots; jv_n, t_n) &= m_1 \left\{ \exp \left[ j \sum_{k=1}^n v_k x(t_k) \right] \right\} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_n, t_n) \times \\ &\times \exp(jv_1x_1 + jv_2x_2 + \dots + jv_nx_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n \end{aligned} \quad (2.27)$$

Характеристична функція має властивості:

- нормування

$$\theta(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1 \quad (2.28)$$

- узгодженості

$$\theta_m(jv_1, t_1; \dots; jv_m, t_m) = \theta_n(jv_1, t_1; \dots; jv_m, t_m; 0, t_{m+1}; \dots; 0, t_n) \quad (2.29)$$

- симетрії

$$\theta_n(jv_1, t_1; \dots; jv_n, t_n) = \theta_n(jv_n, t_n; \dots; jv_1, t_1). \quad (2.30)$$

Характеристичні функції стосовно законів розподілу грають в теорії ймовірностей таку ж роль, яку грають зображення по Фур'є стосовно до часових функцій теорії сигналів.

### 2.7.1 Знаходження моментів за допомогою характеристичної функції

За допомогою характеристичної функції можна легко визначати початкові моменти. Диференціюючи  $\theta(jv)$  по  $v$  отримуємо

$$\frac{d^k \theta(jv)}{dv^k} = j^k \int_{-\infty}^{\infty} x^k e^{jvx} f(x) dx. \quad (2.31)$$

Поклавши  $v = 0$ , знайдемо простий зв'язок між значеннями похідних характеристичної функції при  $v = 0$  та початковими моментами:

$$\frac{d^k \theta(0)}{dv^k} = j^k m_k \quad (2.32)$$

Звідки  $m_k = \frac{1}{j^k} \theta^{(k)}(0)$ .

Очевидно, що  $\theta'(0) = jm_1$ ,  $\theta''(0) = -m_2$ ,  $\sigma^2 = m_2 - m_1^2 = [\theta'(0)]^2 - \theta''(0)$ .

Для знаходження центральних моментів зручно користуватись логарифмом характеристичної функції. Цю функцію називають логарифмічною характеристикою або кумулянтною функцією:

$$\psi(jv) = \ln \theta(jv). \quad (2.33)$$

Очевидно,

$$\psi'(jv) = \frac{\theta'(jv)}{\theta(jv)} \quad (2.34)$$

$$\psi''(jv) = \frac{\theta(jv)\theta''(jv) - [\theta'(jv)]^2}{\theta^2(jv)}. \quad (2.35)$$

З визначення характеристичної функції маємо, що  $\theta(0) = 1$ , значить,

$$\begin{aligned}\psi'(0) &= \theta'(0), \\ \psi''(0) &= \theta''(0) - [\theta'(0)]^2 = -\mu_2 = -D(x).\end{aligned}$$

Таким чином, дисперсія визначається через другу похідну кумулянтної функції дуже просто:

$$\mu_2 = D(x) = -\psi''(0) = -[\ln \theta(0)]'' \quad (2.36)$$

## 2.7.2 Характеристичні функції деяких законів розподілу

*Приклад 1.* Знайти характеристичну функцію рівномірного закону

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b, \\ 0, & x < a, x > b. \end{cases}$$

Запишемо заданий закон у вигляді

$$f(x) = \frac{1}{b-a} [1(x-a) - 1(x-b)],$$

де  $1(x)$  — одинична функція.

Знайдемо спектр функції  $f(x)$

$$S(j\omega) = \frac{1}{b-a} \left[ \frac{e^{-j\omega a}}{j\omega} - \frac{e^{-j\omega b}}{j\omega} \right].$$

Змінивши знак перед  $\omega$  і зробивши заміну  $\omega$  на  $\nu$ , отримаємо вираз характеристичної функції:

$$\theta(j\nu) = \frac{1}{b-a} \frac{e^{j\nu b} - e^{j\nu a}}{j\nu}.$$

*Приклад 2.* Знайти характеристичну функцію нормального закону

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-m_1)^2}{2\sigma^2}\right].$$

Відомо, що

$$\exp[-\beta^2 t^2] \leftrightarrow \frac{\sqrt{\pi}}{\beta} \exp\left[-\frac{\omega^2}{4\beta^2}\right].$$

Тимчасово позначимо  $x - m_1 = x$ ,  $\beta^2 = \frac{1}{2\sigma^2}$ , тоді

$$\theta(j\nu) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \frac{\sqrt{\pi}}{\beta} \exp\left[-\frac{\nu^2}{4\beta^2}\right].$$

Повертаючись до колишніх позначень, отримуємо

$$\theta(jv) = \exp\left[-\frac{v^2\sigma^2}{2}\right].$$

Цей вираз є характеристичною функцією по відношенню до «центрованої» випадкової змінної  $x$ . Для випадкової змінної  $x$  матимемо:

$$\theta(jv) = \exp[jvm_1] \exp\left[-\frac{v^2\sigma^2}{2}\right] = \exp\left[jvm_1 - \frac{v^2\sigma^2}{2}\right].$$

## 2.8 Імовірнісні характеристики випадкових процесів

Випадковий процес описується випадковою функцією часу  $x(t)$ , миттєві значення якої у будь-які моменти часу є випадковими величинами. В кожний фіксований момент часу  $t_1$  випадкова функція являє собою величину, що змінюється випадковим чином при зміні номера реалізації.

Імовірність того, що дана випадкова величина  $\xi$  в момент часу  $t_1$  буде менше деякого рівня  $x_1$  (при досить великій кількості реалізацій) визначається одновимірною інтегральною функцією розподілу ймовірностей:

$$F(x, t) = p[\xi(t_1) \leq x_1] = \int_{-\infty}^x f(x, t) dx. \quad (2.37)$$

Похідна від функції розподілу ймовірностей, якщо вона існує, є одновимірною густиною ймовірності:

$$f(x, t) = \frac{\partial F(x, t_1)}{\partial x}.$$

Більш повними характеристиками випадкового процесу є двовимірною функцією розподілу ймовірностей і двовимірною густиною ймовірності, які характеризують імовірнісний зв'язок між значеннями процесу в два довільних моменти часу  $t_1$  і  $t_2$ :

$$\begin{aligned} F_2(x_1, x_2; t_1, t_2) &= p[\xi(t_1) \leq x_1; \xi(t_2) \leq x_2] = \\ &= \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} f_2(x_1, t_1; x_2, t_2) dx_1 dx_2, \end{aligned} \quad (2.38)$$

$$f_2(x_1, t_1; x_2, t_2) = \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} F_2(x_1, t_1; x_2, t_2). \quad (2.39)$$

Моментні функції являють собою часові характеристики випадкових процесів і відіграють в теорії випадкових процесів таку ж роль, яку відіграють моменти в теорії випадкових величин.

Початкові і центральні моментні функції одновимірного закону:

$$m_k(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x,t) dt, \quad (2.40)$$

$$\mu_k(t) = \int_{-\infty}^{\infty} [x(t) - m_1(t)]^k f(x,t) dt. \quad (2.41)$$

Найбільш часто вживається початкова моментна функція першого порядку  $m_1(t)$  — *математичне сподівання* і центральна моментна функція другого порядку — *дисперсія*  $\sigma^2(t) = m_2(t) - m_1^2(t)$ .

Найпростішою, хоча і не завжди вичерпною мірою зв'язку між значеннями випадкових процесів, є *мішані моментні функції* другого порядку: *коваріаційна функція*

$$K(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 f_2(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2, \quad (2.42)$$

та *кореляційна функція* (центральний момент)

$$R(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [x_1 - m_1(t_1)][x_2 - m_1(t_2)] f_2(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2. \quad (2.43)$$

Між ними існує зв'язок:

$$K(t_1, t_2) = R(t_1, t_2) + m_1(t_1)m_1(t_2).$$

У ряді випадків розрахунок числових характеристик випадкових процесів можна спростити, користуючись математичним апаратом характеристичних функцій.

*Характеристична функція* визначається як математичне сподівання функції  $\exp[jvx]$ , тобто

$$\theta(jv) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{jvx} f(x) dx, \quad (2.44)$$

або як комплексно-спряжене пряме перетворення Фур'є від функції густини імовірності  $\theta(jv) = F^* \{f(x)\}$ .

Функція  $f(x)$ , що є оригіналом по відношенню до зображення, яке представлено характеристичною функцією  $\theta(jv)$ , визначається за допомогою перетворення, аналогічного комплексно-спряженому зворотному перетворенню Фур'є:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \theta(jv) e^{-jvx} dv. \quad (2.45)$$

Характеристична функція суми незалежних випадкових величин дорівнює добутку характеристичних функцій кожної з них.

### 3 Лекція 3. Стаціонарність, ергодичність, кореляція

1. Стаціонарний випадковий процес
2. Ергодичний випадковий процес
3. Оцінка характеристик випадкового процесу
4. Фізичний зміст моментів ергодичного випадкового процесу
5. Кореляція (детермінований сигнал)
6. Автокореляційна функція
7. Взаємно-кореляційна функція
8. Взаємний енергетичний спектр сигналів

#### 3.1 Стаціонарний випадковий процес

Існує два великі класи випадкових процесів: стаціонарні та нестаціонарні. Більшу частину з них складають стаціонарні процеси. Випадковий процес стаціонарний та нестаціонарний — процес, який задовольняє чи не задовольняє умовам стаціонарності.

Нестаціонарні — це процеси, що не задовольняють умовам стаціонарності (наприклад, атмосферні перешкоди, шуми ламп зі змінною напругою напруження, сигнали програм радіомовлення). Слід наголосити, що, хоча загалом радіотехнічні процеси є нестаціонарними, у більшості практичних застосувань їх розглядають як стаціонарні або призводять до останніх [9].

##### 3.1.1 Стаціонарність у вузькому значенні

Випадковий процес називають стаціонарним у вузькому (строгому) сенсі, якщо густина розподілу ймовірностей довільного  $n$ -го порядку не залежить від зсуву всіх точок спостереження  $t_1, t_2, \dots, t_n$  вздовж осі часу на однакове значення  $t_0$ :

$$f_n(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_n, t_n) = f_n(x_1, t_1 + t_0; x_2, t_2 + t_0; \dots; x_n, t_n + t_0).$$

Іншими словами, це такий процес, статистичні характеристики якого не змінюються у часі. Він є аналогом процесу, що встановився. Жодний перехідний процес не може бути стаціонарним. Основні властивості стаціонарного у вузькому значенні випадкового процесу розглянемо на ансамблі реалізацій (рис. 3.1).

##### 3.1.2 Властивості стаціонарного у вузькому розумінні випадкового процесу

1. Одномірна густина розподілу ймовірностей не залежить від часу:

$$f(x, t_1) = f(x, t_1 + t_0) = f(x),$$

де  $f(x, t_1)$  — густина розподілу, визначена в перерізі  $t_1$ . При цьому оцінка густини цього розподілу визначається як (рис. 3.1):

$$f^*(x', t_1) = \frac{m[x' \leq x(t_1) \leq x' + \Delta x]}{M \Delta x}, \quad (3.1)$$

де  $m[x' \leq x(t_1) \leq x' + \Delta x]$  — кількість реалізацій, які потрапили в інтервал  $\Delta x \ll x'$ ,  $M$  — загальна кількість реалізацій.

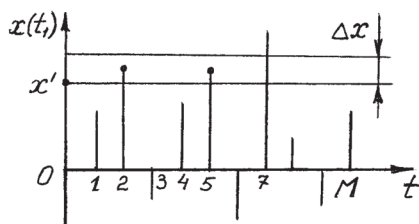


Рис. 3.1. Ансамбль реалізацій стаціонарного у вузькому значенні випадкового процесу

2. Двовимірна густина розподілу ймовірностей залежить лише від одного параметра  $\tau = t_2 - t_1$  і за  $\tau = \text{const}$  не змінюється для будь-яких значень часу  $t_1$  і  $t_2$ :

$$f_2(x_1, t_1; x_2, t_2) = f_2(x_1, t_1 + t_0; x_2, t_2 + t_0) = f_2(x_1, x_2, \tau). \quad (3.2)$$

Наступні три властивості є наслідком перших двох:

3. Математичне сподівання не залежить від часу і є постійною величиною  $m_1[x(t)] = a$ .

4. Дисперсія випадкового процесу також величина постійна

$$D[x(t)] = \sigma^2.$$

5. Кореляційна функція (КФ) залежить тільки від  $\tau$ :

$$R(t_1, t_2) = R(\tau).$$

### 3.1.3 Стаціонарність у широкому сенсі

При вирішенні багатьох практичних завдань, багатовимірні густини розподілу ймовірностей не розглядають, а використовують постійне математичне сподівання та функцію кореляції, яка залежить тільки від часового зсуву.

У зв'язку з цим запроваджено менш суворе поняття стаціонарності випадкового процесу у широкому сенсі, у якому математичне очікування процесу не залежить від часу (постійно), а КФ залежить лише від різниці аргументів. Випадкові процеси, стаціонарні у вузькому значенні, завжди стаціонарні у широкому сенсі, але не навпаки.

## 3.2 Ергодичний випадковий процес

*Ергодичний* випадковий процес — стаціонарний процес, характеристики якого, отримані усередненням по одній реалізації за великий проміжок часу, еквівалентні характеристикам, усередненим по ансамблю (множині реалізацій).

Характеристики такого процесу визначаються виразами:

$$m_1 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt, \quad (3.3)$$

$$\sigma^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T [x(t) - m_1]^2 dt, \quad (3.4)$$

$$R(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T [x(t) - m_1][x(t + \tau) - m_1] dt. \quad (3.5)$$

Частіше використовують усереднення за часом, оскільки його простіше реалізувати, ніж усереднення по ансамблю, так-як дослідник не завжди має у своєму розпорядженні ансамбль реалізацій. Дійсно, якусь нескінченну реалізацію випадкового ергодичного процесу можна розбити на кілька досить довгих відрізків, причому тривалість кожного з них повинна бути більшою за інтервал кореляції процесу.

Через те, що процес стаціонарний, імовірнісні властивості цих відрізків однакові. Отже, їх можна розглядати як окремі реалізації випадкового ергодичного процесу, що належать одному ансамблю. Таким чином, одна досить довга реалізація випадкового ергодичного процесу еквівалентна ансамблю (множині) реалізацій.

### 3.2.1 Імпульсний випадковий процес

*Імпульсний* випадковий процес — послідовність імпульсів, параметри яких є випадковими величинами. Якщо форма імпульсів відома, то випадковими можуть бути окремі параметри імпульсів: амплітуда  $A_i$ , тривалість  $\tau_i$ , час появи  $t_i$ , інтервал проходження  $T_i$ . Випадкові імпульси можуть бути такими, що не перекриваються або перекриваються (рис. 3.2). Аналітичний запис реалізації імпульсного сигналу має вигляд

$$x(t) = \sum_{i=1}^N A_i f(t - t_i, \tau_i). \quad (3.6)$$

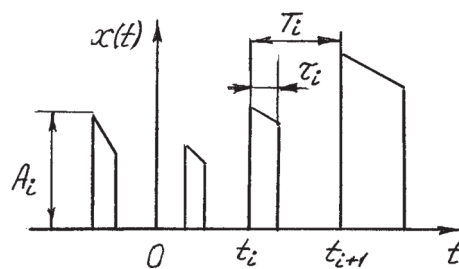


Рис. 3.2. Імпульсний випадковий процес

Імпульсні випадкові процеси з детермінованим тактовим інтервалом називають періодичними (наприклад, при АІМ), а імпульсні випадкові процеси, які його не мають, — аперіодичними (наприклад, випадковий телеграфний сигнал). Послідовність квазіперіодичних випадкових імпульсів зустрічається при різних видах імпульсно-часової модуляції, а також за атмосферних, індустриальних, транспортних імпульсних завад.

### 3.2.2 Марковський випадковий процес

Марковський випадковий процес — процес, повний ймовірнісний опис якого задається двомірним розподілом. Марковські процеси називають процесами без післядії. Залежно від того, дискретну або безперервну множину значень набуває випадкова величина  $X(t)$  і її параметр  $t$  в області існування процесу  $[0, T]$ , розрізняють чотири основні види випадкових марковських процесів:

1. марковський ланцюг (дискретний процес із дискретним часом);
2. марковська послідовність (безперервний процес із дискретним часом);
3. дискретний марковський процес (дискретний процес із безперервним часом);
4. безперервний марковський процес (безперервний процес з безперервним часом).

Крім того, можливі інші, складніші процеси марковського типу.

Випадковий процес називають марковським, якщо для будь-яких  $n$  моментів часу  $t_1 < t_2 < \dots < t_n$  з інтервалу  $[0, T]$  умовна функція розподілу останнього значення  $x(t_n)$  при фіксованих значеннях  $x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_{n-1})$  залежить тільки від  $x(t_{n-1})$ , тобто при заданих значеннях  $x_1, x_2, \dots, x_n$  справедливе співвідношення:

$$\begin{aligned} p\{x(t_n) \leq x_n / x(t_1) = x_1, \dots, x(t_{n-1}) = x_{n-1}\} = \\ p\{x(t_n) \leq x_n / x(t_{n-1}) = x_{n-1}\}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Для трьох моментів часу  $t_i > t_j > t_k$  цей вираз має вигляд

$$\begin{aligned} p\{x(t_i) \leq x_i / x(t_k) = x_k, x(t_j) = x_j\} = \\ p\{x(t_i) \leq x_i / x(t_j) = x_j\}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Виходячи з цього, можна сформулювати характерну особливість марковських процесів: якщо достеменно відомий стан марковського процесу в даний момент часу  $t_j$ , то наступний його стан (при  $t_i$ ) не залежить від минулого стану (при  $t_k$ ). Для марковських процесів  $n$ -вимірна густина розподілу ймовірностей може бути задана у вигляді

$$f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1) \prod_{i=1}^{n-1} f(x_{i+1} / x_i). \quad (3.9)$$

Умовні ймовірності  $f(x_{i+1} / x_i)$  слід називати ймовірностями переходу зі стану  $x_i$  до  $x_{i+1}$  за проміжок часу  $t_{i+1} - t_i$ . Це означає, що будь-який  $n$ -вимірний розподіл марковського процесу може бути знайдено, якщо відомо одномірний розподіл процесу та умовні густини розподілу ймовірностей переходу. Марковські випадкові процеси широко використовують у радіотехніці при моделюванні каналів зв'язку, аналізі систем ФАПЧ, оптимальній фільтрації, тощо [9].

### 3.2.3 Вузькосмуговий випадковий процес

*Вузькосмуговий* випадковий процес — випадковий процес з нульовим математичним очікуванням, у якого ширина смуги  $\Delta f$  тієї області частот, де фізична спектральна густина  $G(f)$  помітно відрізняється від нуля, мала, порівняно з деякою центральною частотою  $f_0$  цієї області:

$$G(f) \neq 0, f_0 - \frac{\Delta f}{2} \leq f \leq f_0 + \frac{\Delta f}{2}, \Delta f \ll f_0. \quad (3.10)$$

У загальному випадку вузькосмуговий випадковий процес відповідає квазі-гармонійному сигналу з амплітудою і фазою, що повільно змінюються. Тому часто його представляють у вигляді

$$x(t) = A(t) \cos[\omega_0 t - \varphi(t)], \quad A(t) \geq 0, \quad 0 \leq \varphi(t) \leq 2\pi, \quad (3.11)$$

де  $A(t)$  і  $\varphi(t)$  — функції часу, що повільно змінюються в порівнянні з  $\cos(\omega_0 t)$ . Їх називають огибаючою та фазою вузькосмугового випадкового процесу відповідно. Такий процес можна записати інакше:

$$x(t) = A_c(t) \cos(\omega_0 t) + A_s(t) \sin(\omega_0 t), \quad (3.12)$$

де  $A_c(t) = A(t) \cos \varphi(t)$ ,  $A_s(t) = A(t) \sin \varphi(t)$  — квадратурні складові. Очевидно, що

$$A(t) = \sqrt{A_c^2(t) + A_s^2(t)}, \quad (3.13)$$

$$\varphi(t) = \arctg \left[ \frac{A_s(t)}{A_c(t)} \right]. \quad (3.14)$$

Густина ймовірності огибаючої гаусівського вузькосмугового випадкового процесу з симетричною спектральною густиною розподілена за законом Релея  $f(A) = \frac{A}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{A^2}{2\sigma^2}\right)$ , а фаза має рівномірний розподіл  $f(\varphi) = \frac{1}{2\pi}$ . Тут

$\sigma^2 = \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt$  — дисперсія миттєвих значень гаусівського процесу  $x(t)$  з нульовим математичним сподіванням.

Математичне сподівання та дисперсія огибаючої та фази вузькосмугового випадкового процесу визначаються як:

$$m_1(A) = \int_0^\infty A f(A) dA = \sigma \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \quad (3.15)$$

$$\sigma_A^2 = 2\sigma^2 - \sigma^2 \frac{\pi}{2} \approx 0,43\sigma^2, \quad (3.16)$$

$$m_1(\varphi) = \int_0^{2\pi} \varphi f(\varphi) d\varphi = \pi,$$

$$\sigma_{\varphi}^2 = \frac{\pi}{3}. \quad (3.17)$$

### 3.3 Оцінка характеристик випадкового процесу

Оцінка характеристик випадкових процесів є визначення характеристик випадкових процесів виходячи з обмеженого числа дослідів. Будь-яке значення параметра, обчислене на цій основі, завжди має елемент випадковості. Таке наближене випадкове значення називають *оцінкою* параметра.

Нехай  $a^*$  є оцінка параметра  $a$ . Природно вимагати від оцінки  $a^*$ , щоб зі збільшенням кількості дослідів вона наближалася (сходилася ймовірно) до параметра  $a$ . Оцінка, яка має такі властивості, називається *спроможною* (*состоятельной*). Крім того, бажано, щоб користуючись величиною  $a^*$  замість  $a$  ми, принаймні, не робили систематичної помилки у бік завищення або заниження, тобто, щоб виконувалася умова  $M(a^*) = a$ . Оцінку, яка задовольняє таку умову, називають *незміщеною*. Нарешті, бажано, щоб обрана незміщена оцінка мала найменшу дисперсію проти інших оцінок, тобто  $D(a^*) = \min$ . Оцінку, що має таку властивість, називають *ефективною*.

Щоб оцінити випадковий процес, розглядають ряд його перерізів для моментів часу  $t_1, t_2, \dots, t_n$ , та реєструють значення функції  $X(t)$  у ці моменти (рис. 3.1). Кожному з моментів  $t_1, t_2, \dots, t_n$  відповідають  $n$  значень випадкової величини ( $n$  — кількість реалізацій, отриманих після  $n$  незалежних дослідів). При цьому оцінки математичного очікування знаходять за такою формулою:

$$m_1^*(t_k) = \sum_{i=1}^n \frac{x_i(t_k)}{n}, \quad (3.18)$$

де  $x_i(t_k)$  — значення, що відповідає  $i$ -й реалізації в момент часу  $t_k$ . Оцінка дисперсії

$$D^*(t_k) = \sum_{i=1}^n \frac{[x_i(t_k) - m_1^*(t_k)]^2}{n-1}. \quad (3.19)$$

Оцінка кореляційних моментів визначається виразом

$$R^*(t_k, t_e) = \sum_{i=1}^n \frac{[x_i(t_k) - m_1^*(t_k)][x_i(t_e) - m_1^*(t_e)]}{n-1}. \quad (3.20)$$

Для стаціонарних ергодичних процесів оцінки отримують усередненням за часом однієї реалізації. Оцінки математичного сподівання та дисперсії для таких процесів визначаються виразами (2.17), (2.18).

### 3.4 Фізичний зміст моментів ергодичного випадкового процесу

Для стаціонарних ергодичних процесів математичне сподівання має фізичний (радіотехнічний) зміст постійної складової  $U_0$ , а дисперсія — потужності флуктуацій, що виділяється на опорі 1 Ом (рис. 3.3).

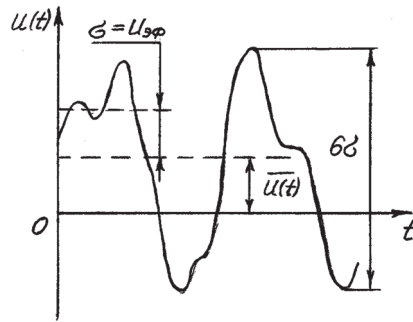


Рис. 3.3. Фізичний зміст деяких моментів

Ці числові характеристики визначаються відповідно до формул:

$$M[u(t)] = \overline{u(t)} = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt, \quad (3.21)$$

$$\sigma^2 = \overline{[u(t) - \overline{u(t)}]^2} = \frac{1}{T} \int_0^T [u(t) - \overline{u(t)}]^2 dt, \quad (3.22)$$

за умови  $T \gg \tau_k$ , де  $T$  — інтервал спостереження випадкового процесу;  $\tau_k$  — інтервал його кореляції;  $u(t)$  — поточна випадкова напруга. Середньоквадратичне відхилення (СКВ) має сенс ефективного значення напруги випадкового процесу:  $\sigma = u_{\text{еф}}$ .

Оцінки характеристик знаходять так. Інтервал спостереження випадкового процесу ділять на  $N$  рівних частин довжиною  $\Delta t = T / N$  та визначають середини отриманих відрізків  $t_1, t_2, \dots, t_n$  (рис. 3.4). Тоді

$$\overline{u(t)}^* = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N u(t_i), \quad (3.23)$$

$$D^* = \sum_{i=1}^N \frac{[u(t_i) - \overline{u(t)}^*]^2}{N-1}. \quad (2.18)$$

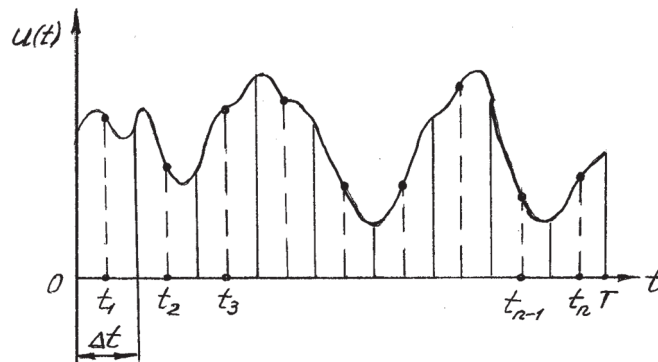


Рис. 3.4. Визначення оцінки характеристик

### 3.5 Кореляція (детермінований сигнал)

Кореляційний аналіз детермінованих сигналів — аналіз сигналів у часовій області з метою виявлення та оцінки їхньої подібності, заснований на вивченні кореляційної функції (КФ). *Кореляція* — відповідність, взаємозалежність, взаємозв'язок явищ чи процесів, кількісна характеристика їхньої подоби. *Кореляційна функція* — залежність кореляції двох (у загальному випадку комплексних) сигналів  $\dot{f}_1(t)$  та  $\dot{f}_2(t)$  від часового зсуву між ними, що визначається виразами:

- для сигналів **кінцевої енергії**:

$$R_{1,2}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{f}_1(t) \dot{f}_2^*(t + \tau) dt, \quad (3.24)$$

- для сигналів **кінцевої середньої потужності** (в том числі випадкових ергодичних):

$$R_{1,2}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T \dot{f}_1(t) \dot{f}_2^*(t + \tau) dt, \quad (3.25)$$

- для **періодичних сигналів** з періодом  $T$ :

$$R_{1,2}(\tau) = \int_{-T/2}^{T/2} \dot{f}_1(t) \dot{f}_2^*(t + \tau) dt. \quad (3.26)$$

Зауважимо, що для дійсних сигналів символи комплексності та комплексної сполученості (точка та зірочка над функціями) не ставлять.

### 3.6 Автокореляційна функція

*Автокореляційна функція* (АКФ) — КФ двох однакових сигналів (сигналу та його копії), що визначається згідно (3.24)–(3.26) при  $\dot{f}_1(t) = \dot{f}_2(t) = \dot{f}(t)$  є одна з найважливіших тимчасових характеристик сигналу.

АКФ дійсного сигналу  $f(t)$  **кінцевої енергії**:

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) f(t + \tau) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t - \tau) f(t) dt \quad (3.27)$$

визначається в одиницях енергії [Дж], є дійсною парною ( $R(-\tau) = R(\tau)$ ) функцією зсуву  $\tau$  з максимумом у точці  $\tau = 0$ , рівним енергії сигналу  $R(0) = \mathcal{E} \geq R(\tau)$ . АКФ однозначно пов'язана з енергетичним спектром сигналу  $W(\omega) = \dot{S}(\omega) S^*(\omega)$  перетвореннями Фур'є:

$$R(\tau) = F^{-1}\{W(\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega, \quad (3.28)$$

$$W(\omega) = F\{R(\tau)\} = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (3.29)$$

АКФ дійсного **періодичного** сигналу  $f(t) = f(t + kT)$ , де  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ :

$$R(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) f(t + \tau) dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t - \tau) f(t) dt \quad (3.30)$$

визначається у одиницях потужності [Вт], є дійсною періодичною парною функцією  $\tau$  ( $R(-\tau) = R(\tau)$ ) з головними максимумами при  $\tau = 0, \pm T, \pm 2T, \dots$ , рівними середній за період потужності сигналу  $R(0) = R(kT) = \bar{P}$  і однозначно пов'язана із спектрами середніх потужностей сигналу рядами Фур'є:

$$R(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\dot{C}_n|^2 e^{jn\Omega\tau} = A_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{A_n^2}{2} \right) \cos(n\Omega\tau), \quad (3.31)$$

де  $|\dot{C}_n|^2$ ,  $A_0^2$ ,  $A_n^2/2$  — компоненти математичного та фізичного спектрів потужностей сигналу відповідно.

Однозначне відновлення сигналу  $f(t)$  за його АКФ неможливе, оскільки  $W(\omega)$ , а отже і  $R(\tau)$ , не містять інформації про фазовий спектр сигналу.

*Коефіцієнт кореляції сигналу* — нормована АКФ, віднесена до енергії (потужності) сигналу  $r(\tau) = R(\tau)/R(0) \leq 1$ .

*Інтервал кореляції сигналу* — зсув  $\tau = \tau_k$ , у межах якого АКФ відрізняється від нуля.

### 3.6.1 АКФ аналітичного сигналу

Автокореляційна функція аналітичного сигналу — АКФ  $\dot{R}_z(\tau)$  комплексного сигналу  $\dot{z}(t) = a(t) + j\hat{a}(t)$ , уявна і дійсна частини якого пов'язані за Гільбертом, тобто  $\hat{a}(t) = H\{a(t)\}$ . Для фінітних сигналів  $a(t)$  маємо:

$$\begin{aligned} \dot{R}_z(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} \dot{z}(t) z^*(t + \tau) dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} [a(t) + j\hat{a}(t)][a(t + \tau) - j\hat{a}(t + \tau)] dt = \\ &= R_a(\tau) + R_{\hat{a}}(\tau) + jR_{\hat{a},a}(\tau) - jR_{a,\hat{a}}(\tau) = \\ &= 2R_a(\tau) + j2R_{a,\hat{a}}(\tau), \end{aligned} \quad (3.32)$$

де  $R_a(\tau) = R_{\hat{a}}(\tau)$  — АКФ сигналів  $a(t)$  і  $\hat{a}(t)$ , а  $R_{\hat{a},a}(\tau) = -R_{a,\hat{a}}(\tau)$  — взаємна кореляційна функція (ВКФ) цих сигналів.

Результат у формі (3.32) справедливий для будь-яких різновидів детермінованих сигналів  $a(t)$ .

Якщо аналітичний сигнал представлений як  $\dot{z}(t) = \dot{A}(t) \exp(j\omega_H t)$ , його АКФ має вигляд:

$$\dot{R}_z(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{z}(t) z^*(t + \tau) dt = R_A(\tau) \exp(-j\omega_H \tau), \quad (3.33)$$

де  $R_A(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{A}(t) A^*(t + \tau) dt$  — АКФ комплексної огинаючої аналітичного сигналу.

### 3.6.2 АКФ вузькосмугового радіосигналу

Автокореляційна функція вузькосмугового радіосигналу — АКФ  $R_a(\tau)$  модульованого коливання  $a(t) = A(t) \cos[\omega_H t + \theta(t)]$  з параметрами  $A(t)$ ,  $\theta(t)$ , що змінюються повільно.

Для сигналу **кінцевої енергії** (наприклад у випадку фінітної огинаючої  $A(t)$ ) АКФ дорівнює:

$$R_a(\tau) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} A(t) A(t + \tau) \cos[\omega_H \tau + \theta(t + \tau) - \theta(t)] dt. \quad (3.34)$$

Функцію  $R_a(\tau)$  можна виразити через АКФ аналітичного сигналу  $\dot{R}_z(\tau)$  та його комплексної огинаючої  $R_A(\tau)$ :

$$R_a(\tau) = \frac{1}{2} \operatorname{Re}\{\dot{R}_z(\tau)\} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}\{R_A(\tau) \exp[-j\omega_H \tau]\}. \quad (3.35)$$

АКФ АМ сигналу (коли  $\theta(t) = \theta(t + \tau) = \theta$ ):

$$R_a(\tau) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} A(t) A(t + \tau) \cos(\omega_H \tau) dt = R_A(\tau) \frac{1}{2} \cos(\omega_H \tau), \quad (3.36)$$

тобто є добутком АКФ  $R_A(\tau)$  огинаючої  $A(t)$  і АКФ  $R_{\cos}(\tau) = \frac{1}{2} \cos(\omega_H \tau)$  несучого коливання  $\cos(\omega_H \tau + \theta_H)$ .

### 3.7 Взаємно-кореляційна функція

*Взаємно-кореляційна функція* (ВКФ) — КФ двох різних (на відміну від АКФ) сигналів, що визначається відповідно до (3.24)–(3.26). В цьому випадку кожній парі сигналів відповідають дві ВКФ:  $B_{1,2}(\tau)$  і  $B_{2,1}(\tau)$ .

ВКФ дійсних сигналів **кінцевої енергії**  $f_1(t)$  і  $f_2(t)$  визначається як:

$$B_{1,2}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) f_2(t + \tau) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t - \tau) f_2(t) dt,$$

$$B_{2,1}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t+\tau)f_2(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)f_2(t-\tau)dt. \quad (3.37)$$

Вони визначаються в одиницях енергії [Дж], є дійсними взаємонаверненими ( $B_{1,2}(-\tau) = B_{2,1}(\tau)$ ), не обов'язково парними, функціями  $\tau$ , максимума яких не обов'язково перебувають у точці  $\tau = 0$ . Ці ВКФ пов'язані із взаємними енергетичними спектрами сигналів  $\dot{W}_{1,2}(\omega)$ ,  $\dot{W}_{2,1}(\omega)$  перетвореннями Фур'є:

$$\begin{aligned} B_{1,2}(\tau) &= F^{-1}\{\dot{W}_{1,2}(\omega)\} = F^{-1}\{S_1^*(\omega)\dot{S}_2(\omega)\}, \\ B_{2,1}(\tau) &= F^{-1}\{\dot{W}_{2,1}(\omega)\} = F^{-1}\{\dot{S}_1(\omega)S_2^*(\omega)\}, \end{aligned} \quad (3.38)$$

ВКФ дійсних **періодичних сигналів**  $f_1(t), f_2(t)$  з періодом  $T$

$$\begin{aligned} B_{1,2}(\tau) &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_1(t)f_2(t+\tau)dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_1(t-\tau)f_2(t)dt, \\ B_{2,1}(\tau) &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_1(t+\tau)f_2(t)dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_1(t)f_2(t-\tau)dt \end{aligned} \quad (3.39)$$

відрізняються від (3.37) тільки тим, що визначаються в одиницях потужності [Вт], є періодичними (з тим же періодом  $T$ ) та пов'язані зі спектрами сигналів співвідношеннями:

$$\begin{aligned} B_{1,2}(\tau) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_{1n}^* \dot{C}_{2n} \exp[jn\Omega\tau] = \\ &= A_{1,0}A_{2,0} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} A_{1n}A_{2n} \cos[n\Omega\tau - \psi_{1n} + \psi_{2n}], \end{aligned} \quad (3.40)$$

де  $\dot{C}_{1n} = C_{1n} \exp[j\psi_{1n}]$ ,  $\dot{C}_{2n} = C_{2n} \exp[j\psi_{2n}]$ ,  $A_{1n}$ ,  $\psi_{1n}$ ,  $A_{2n}$ ,  $\psi_{2n}$  — параметри відповідних дискретних спектрів сигналів  $f_1(t)$  і  $f_2(t)$ .

Хоча ВКФ (на відміну АКФ) частково зберігають інформацію про фазові структури вихідних сигналів (як різниця фазових спектрів), але однозначно відновити із них вихідні сигнали неможливо.

### 3.8 Взаємний енергетичний спектр сигналів

*Взаємний енергетичний спектр* сигналів — спектр взаємної кореляційної функції (ВКФ) цих сигналів.

Для дійсних сигналів кінцевої енергії  $f_1(t)$  і  $f_2(t)$  зі спектрами  $\dot{S}_1(\omega)$  та  $\dot{S}_2(\omega)$ , взаємні енергетичні спектри

$$\begin{aligned} \dot{W}_{1,2}(\omega) &= F\{B_{1,2}(\tau)\} = S_1^*(\omega)\dot{S}_2(\omega) = W_{2,1}^*(\omega), \\ \dot{W}_{2,1}(\omega) &= F\{B_{2,1}(\tau)\} = \dot{S}_1(\omega)S_2^*(\omega) = W_{1,2}^*(\omega) \end{aligned} \quad (3.41)$$

є неперервними комплексними (загалом) і комплексно-спряженими функціями частоти, що визначаються в одиницях спектральної густини енергії [Дж/Гц].

В окремому випадку, коли  $f_1(t) = f_2(t) = f(t)$  і  $\dot{S}_1(\omega) = \dot{S}_2(\omega) = \dot{S}(\omega)$ , ВКФ вироджується в АКФ  $R(\tau)$ , а взаємний енергетичний спектр — у власний енергетичний спектр сигналу  $W(\omega) = \dot{S}(\omega)S^*(\omega) = |\dot{S}(\omega)|^2$ .

Для дійсних періодичних сигналів, що подаються рядами Фур'є

$$f_1(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{C}_{1n} \exp[jn\Omega t],$$

$$f_2(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{C}_{2n} \exp[jn\Omega t],$$

$$\Omega = 2\pi / T$$

з періодичними ВКФ (3.40), взаємні енергетичні спектри визначаються таким чином:

$$\dot{W}_{1,2}(\omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_{1n}^* \dot{C}_{2n} \delta(\omega - n\Omega),$$

$$\dot{W}_{2,1}(\omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{C}_{1n} C_{2n}^* \delta(\omega - n\Omega), \quad (3.42)$$

і відрізняються від (3.41) дискретністю та розмірністю спектральної густини потужності [Вт/Гц].

Оскільки сигнали  $f_1(t)$ ,  $f_2(t)$  можуть описувати будь-які процеси (у тому числі ті, що не мають енергії, або енергетичні незв'язані діючі), взаємні енергетичні спектри не обов'язково характеризують розподіл якоїсь дійсної енергії (потужності), а можуть бути формальними уявленнями ВКФ у частотній області.

## 4 Лекція 4. Кореляційний і спектральний аналіз випадкових сигналів

1. Коварійна та кореляційна функції
2. Коефіцієнт та матриця кореляції
3. Інтервал кореляції
4. ВКФ випадкових процесів
5. Кореляційний приймач
6. Когерентний приймач
7. Енергетичний спектр
8. Ефективна ширина спектра
9. Формулы Винера–Хинчина
10. Білий шум
11. Взаємні енергетичні спектри стаціонарних ергодичних випадкових процесів

### 4.1 Коварійна та кореляційна функції

*Кореляційна функція* — функція, що характеризує ступінь залежності між перерізами випадкового процесу, взятими у різні моменти часу.

*Кореляційна функція випадкового процесу* — двовимірна центральна моментна функція другого порядку

$$\begin{aligned} R(t_1, t_2) &= M[\overset{\circ}{x}(t_1)\overset{\circ}{x}(t_2)] = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [x_1 - m_1(t_1)][x_2 - m_1(t_2)] f_2(x_1, t_1; x_2, t_2) dx_1 dx_2 \end{aligned} \quad (4.1)$$

де  $\overset{\circ}{x}(t_1)$ ,  $\overset{\circ}{x}(t_2)$  — центровані випадкові величини, взяті в перерізах  $t_1$  і  $t_2$ ,  $f_2(x_1, t_1; x_2, t_2) dx_1 dx_2$  — ймовірність того, що в момент часу  $t_1$  функція  $x(t)$  знаходиться в інтервалі від  $x_1$  до  $x_1 + dx_1$ , а в момент  $t_2$  — в інтервалі від  $x_2$  до  $x_2 + dx_2$ .

Двовимірну початкову моментну функцію другого порядку називають *коваріаційною функцією*

$$\begin{aligned} K(t_1, t_2) &= M[x(t_1)x(t_2)] = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 f_2(x_1, t_1; x_2, t_2) dx_1 dx_2 \end{aligned} \quad (4.2)$$

Між кореляційною та коваріаційною функцією існує зв'язок:

$$K(t_1, t_2) = R(t_1, t_2) + m_1(t_1)m_1(t_2). \quad (4.3)$$

Для стаціонарного випадкового процесу ці функції набувають вигляду  $R(\tau)$  і  $K(\tau)$ , де  $\tau = t_2 - t_1$ . Кореляційні функції стаціонарного випадкового процесу мають такі властивості:

1. Функції  $R(\tau)$  є парними, тобто  $R(\tau) = R(-\tau)$ ;
2. абсолютні значення кореляційної функції за будь-якого  $\tau$  не можуть бути більшими, ніж її значення при  $\tau = 0$ , тобто  $|R(\tau)| \leq R(0) = \sigma^2$ ;
3. при необмеженому зростанні  $\tau$  функція  $R(\tau)$  прагне нулю, тобто  $\lim_{\tau \rightarrow \infty} R(\tau) = 0$ .

Якщо йдеться про один випадковий процес, то кореляційну функцію називають автокореляційною функцією (АКФ). Для стаціонарних ергодичних процесів кореляційна та коваріаційна функції мають вигляд:

$$R(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T [x(t) - m_1][x(t + \tau) - m_1] dt,$$

$$K(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)x(t + \tau) dt. \quad (4.4)$$

АКФ стаціонарного ергодичного процесу характеризує середній зв'язок між значеннями цього процесу, розділеними інтервалом  $\tau$  (рис. 4.1а). Прикладами АКФ, що часто зустрічаються на практиці, є АКФ на виході одиночного резонансного контуру (рис. 4.1б) та на виході фільтра з прямокутною АЧХ (рис. 4.1в).

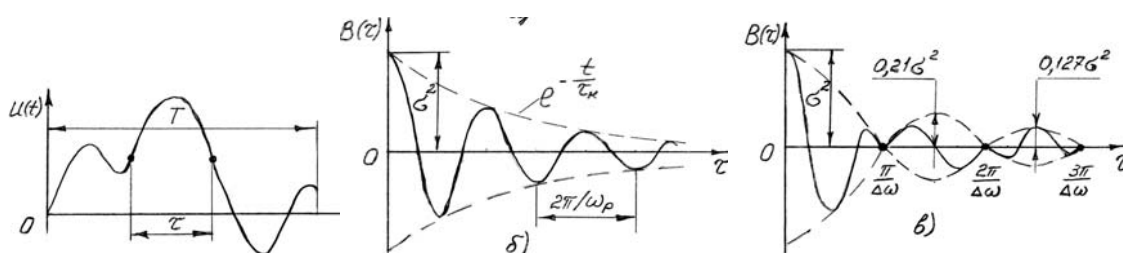


Рис. 4.1. Приклади АКФ стаціонарного ергодичного процесу

## 4.2 Коефіцієнт та матриця кореляції

Для кількісної характеристики ступеня лінійної залежності випадкових процесів часто користуються нормованими КФ та ВКФ — *коефіцієнтами кореляції*, які визначаються як:

$$t(t_1, t_2) = \frac{R(t_1, t_2)}{\sqrt{\sigma^2(t_1)\sigma^2(t_2)}}, \quad (4.8)$$

[або  $\rho(t_1, t_2)$ ]

$$r_{xy}(t_1, t_2) = \frac{B_{xy}(t_1, t_2)}{\sqrt{\sigma^2(t_1)\sigma^2(t_2)}}. \quad (4.9)$$

Для стаціонарних та стаціонарно пов'язаних процесів ці функції мають вигляд:

$$r(\tau) = \frac{R(\tau)}{\sigma^2},$$

$$r_{xy}(\tau) = \frac{B_{xy}(\tau)}{\sigma_x \sigma_y}. \quad (4.10)$$

Для зручності кореляційні функції та коефіцієнти кореляції часто записуються у вигляді кореляційної матриці та нормованої кореляційної матриці:

$$[R] = \begin{matrix} & t_1 & t_2 & \cdots & t_n \\ \begin{matrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_n \end{matrix} & \begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} & \cdots & R_{1n} \\ R_{21} & R_{22} & \cdots & R_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{n1} & R_{n2} & \cdots & R_{nn} \end{vmatrix} \end{matrix},$$

$$[r] = \begin{matrix} & t_1 & t_2 & \cdots & t_n \\ \begin{matrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_n \end{matrix} & \begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{n1} & r_{n2} & \cdots & r_{nn} \end{vmatrix} \end{matrix}, \quad (4.11)$$

де

$$R(t_i, t_j) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_i x_j f_2(x_i, t_i; x_j, t_j) dx_i dx_j, \quad (4.12)$$

$$r(t_i, t_j) = \frac{R(t_i, t_j)}{\sigma(t_i)\sigma(t_j)}. \quad (4.13)$$

Вочевидь, що по діагоналі кореляційної матриці розташовуються дисперсії випадкового процесу, а, по діагоналі нормованої кореляційної матриці розташовуються одиниці.

### 4.3 Інтервал кореляції

Ступінь корельованості випадкового процесу характеризують інтервалом кореляції:

$$\tau_k = \int_0^{\infty} |r(t)| d\tau. \quad (4.14)$$

Значення  $\tau_k$  дає орієнтовне уявлення про те, на якому інтервалі часу в середньому є корельовання між значеннями випадкового процесу (рис. 4.2).

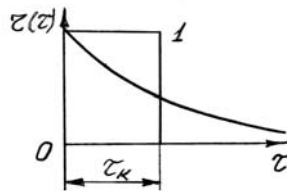


Рис. 4.2. Інтервал кореляції

#### 4.4 ВКФ випадкових процесів

Крім кореляційних, дуже часто використовують взаємно-кореляційні функції (ВКФ), що характеризують статистичну залежність між значеннями двох випадкових процесів у два однакових або різних моменти часу. Так, для двох стаціонарних випадкових процесів  $X(t)$  та  $Y(t)$  з математичними сподіваннями  $m_{1x}$  та  $m_{1y}$  ВКФ має вигляд:

$$B(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [x - m_{1x}][y - m_{1y}] f_2(x, t_1; y, t_2) dx dy. \quad (4.5)$$

Функцію взаємної кореляції широко використовують як критерій подібності двох процесів, що порівнюються. На основі ВКФ побудовано оптимальні кореляційні приймачі, в яких порівнюють прийняту реалізацію суміші сигналу та завади з відомою копією сигналу. Якщо ВКФ залежить лише від різниці  $\tau = t_2 - t_1$ , то процеси  $x(t)$ ,  $y(t)$  називають стаціонарно пов'язаними, і для них справедливе співвідношення:

$$B_{xy}(t_1, t_2) = B_{xy}(\tau) = B_{yx}(-\tau).$$

Для неперервних та дискретних стаціонарних ергодичних процесів ВКФ визначаються виразами:

$$B(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T u(t)u(t + \tau) dt, \quad (4.6)$$

$$B(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^N u(T_0 i)u(T_0 i + \tau), \quad (4.7)$$

де  $u(t)$  — випадкова напруга,  $T_0$  — інтервал дискретизації,  $T$  — час спостереження. У символічній формі запису

$$B(\tau) = \overline{u(t)u(t + \tau)}.$$

#### 4.5 Кореляційний приймач

Нехай на вхід приймача надходить слабкий, «періодичний на відрізку», сигнал

$$s(t) = a \cos(\omega t + \varphi), \quad 0 < t < \delta$$

разом із шумом, АКФ якого має вигляд

$$R_n(\tau) = R_n(0) \exp[-\alpha |\tau|].$$

Сформуємо умови, за яких можливий прийом слабкого сигналу  $s(t)$  і складемо блок-схему приймача. За умовою сигнал і шум між собою некорельовані. Знайдемо кореляційну функцію суміші, що приймається

$$\begin{aligned} R_z(\tau) &= \overline{z(t)z(t+\tau)} = \overline{[s(t) + n(t)][s(t+\tau) + n(t+\tau)]} = \\ &= \overline{s(t)s(t+\tau)} + \overline{s(t)n(t+\tau)} + \overline{n(t)s(t+\tau)} + \overline{n(t)n(t+\tau)} = \\ &= R_s(\tau) + B_{sn}(\tau) + B_{ns}(\tau) + R_n(\tau), \end{aligned}$$

де  $R_s(\tau)$  і  $R_n(\tau)$  — АКФ сигналу  $s(t)$  і шуму  $n(t)$ ,  $B_{sn}(\tau)$  і  $B_{ns}(\tau)$  — ВКФ сигналу і шуму.

Оскільки за умовою сигнал і шум некорельовані, їх ВКФ дорівнюють нулю. В даному випадку маємо:

$$\begin{aligned} R_s(\tau) &= \frac{a^2}{2} \cos(\omega\tau) \quad (0 < \tau < \delta), \\ R_n(\tau) &= R_n(0) \exp[-\alpha |\tau|]. \end{aligned}$$

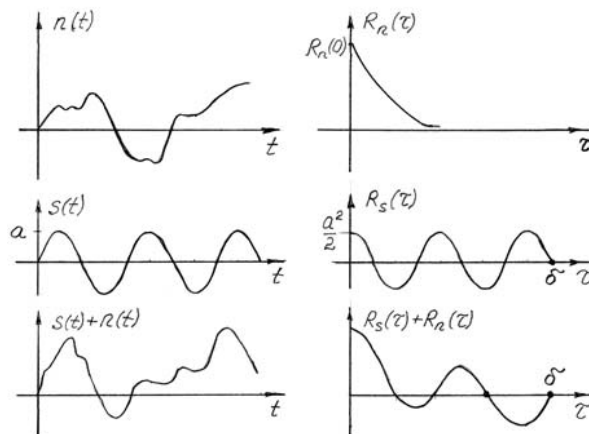


Рис. 4.3. Принцип роботи кореляційного приймача

Через час  $\tau_k = 1/\alpha$  (інтервал кореляції), АКФ шуму матиме відносно малу величину. Для успішного прийому необхідне виконання нерівності  $\delta > 1/\alpha$ , причому прийом буде краще, ніж сильніше нерівність (рис. 4.3). Блок-схема приймача зображено на рис. 4.4.

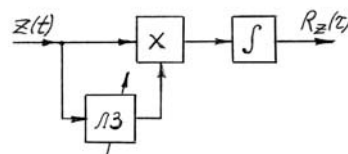


Рис. 4.4. Блок-схема кореляційного приймача

#### 4.6 Когерентний приймач

На вхід приймача надходить слабкий «періодичний на відрізку» сигнал

$$s_s(t) = a_s \cos(\omega t + \varphi), \quad 0 < t < \delta,$$

частота  $\omega$  якого відома. Одночасно в приймач надходить некорельований з сигналом шум  $n(t)$ , кореляційна функція якого характеризується інтервалом кореляції  $\tau_k$ , причому  $\delta \gg \tau_k$ .

Оскільки частота сигналу  $\omega$  відома, в приймачі може бути створена опорна синхронна і синфазна (когерентна) напруга за допомогою місцевого гетеродина:

$$s_r(t) = a_r \cos(\omega t + \varphi).$$

Складемо алгоритм роботи та блок-схему приймача для здійснення прийому слабого сигналу  $s(t)$ .

Обчислимо ВКФ між сумішшю  $z(t) = s_s + n(t)$ , що приймається, і опорним сигналом  $s_r(t)$ :

$$B_{z s_r}(\tau) = \overline{z(t+\tau)s_r(t)} = \overline{[s_s(t+\tau) + n(t+\tau)]s_r(t)}.$$

Оскільки опорний сигнал і шум незалежні, в результаті залишиться тільки добуток  $B_{z s_r}(\tau) \approx \overline{s_s(t)s_r(t-\tau)}$ , який після обчислення дає

$$B_{z s_r}(\tau) = \frac{a_s a_r}{2} \cos(\omega \tau).$$

Блок-схема приймача зображено на рис. 4.5.

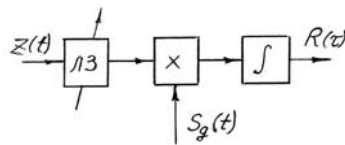


Рис. 4.5. Блок-схема когерентного приймача

## 4.7 Енергетичний спектр

*Енергетичний спектр* (ЕС) – спектральна густина потужності випадкового процесу. Безпосереднє застосування рядів та інтеграла Фур'є до випадкового процесу неможливе, оскільки з одного боку, кожна реалізація  $x_k(t)$  є періодичною функцією, і може бути представлена рядом Фур'є, з іншого боку — інтеграл Фур'є від реалізації нескінченної тривалості не сходиться. Крім того, відомо, що спектральні функції містять інформацію про цілком певні співвідношення між амплітудами та фазами коливань різних частот. Для випадкового процесу визначеності у цих співвідношеннях не може бути.

Проте, якщо застосувати спектральні уявлення щодо реалізацій за потужністю, які містять інформацію про фазах складових випадкового процесу, то апарат Фур'є застосувати можна. Для цього знаходять ЕС  $i$ -ої поточної реалізації

$$G_i(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\dot{S}_{Ti}(\omega) S_{Ti}^*(\omega)}{T}, \quad (4.8)$$

який характеризує частотний розподіл усередненої за часом потужності в  $i$ -й реалізації процесу на інтервалі  $[0, T]$ , де  $S_{Ti}(\omega)$  — поточний спектр. Множення на  $1/T$  пов'язане з необмеженим зростанням енергії при  $T \rightarrow \infty$ .

Спектральну густину потужності стаціонарних випадкових процесів називають математичним сподіванням знайденої спектральної характеристики:

$$G(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\overline{|S_T(\omega)|^2}}{T}, \quad (4.9)$$

де усереднення проводиться за комплексом реалізацій.

Останній вираз дає можливість знайти апаратний ЕС (спектральну густину потужності), де  $S_T(\omega)$  розраховують як швидке перетворення Фур'є (ШПФ).

Середня потужність стаціонарного випадкового процесу дорівнює площі під кривою фізичного ЕС (спектральної густини потужності), яка, як правило, спадає зі зростанням частоти (рис. 4.6):

$$P = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} G(\omega) d\omega. \quad (4.10)$$

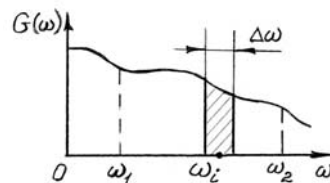


Рис. 4.6. Форма спектральної густини, що зустрічається найчастіше

Потужність, зосереджена у кінцевій смузі ( $\omega_1 - \omega_2$ ):

$$P = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega_1}^{\omega_2} G(\omega) d\omega.$$

Звідси випливає ще одне визначення спектральної густини потужності на частоті  $\omega_i$  як потужності процесу, що припадає на область частотного діапазону  $(\omega_i, \omega_i + \Delta\omega)$ , віднесеної до його ширини:

$$G^*(\omega_i) = 2\pi \frac{P(\omega_i, \omega_i + \Delta\omega)}{\Delta\omega},$$

$$G(\omega_i) = \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} G^*(\omega_i). \quad (4.11)$$

Наведені вирази зручні для апаратної реалізації.

#### 4.8 Ефективна ширина спектра

Іноді як характеристику випадкового процесу, використовують різні параметри спектральної густини. Найпоширенішим з них є ефективна ширина спектра:

$$\Delta\omega_{\text{эф}} = \int_0^{\infty} \frac{G(\omega)}{G(\omega_0)} d\omega. \quad (4.12)$$

Цю величину можна розглядати як ширину рівномірного спектра в смузі  $\Delta\omega_{\text{эф}}$  для процесу, еквівалентного даному по середній потужності.

#### 4.9 Формули Вінера-Хінчина

Енергетичний спектр та кореляційна функція стаціонарного випадкового процесу є парою перетворень Фур'є (ПФ):

$$\begin{aligned} G(\omega) &= F\{R(\tau)\} = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) \exp(-j\omega\tau) d\tau, \\ R(\tau) &= F^{-1}\{G(\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) \exp(j\omega\tau) d\omega. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Аналогічні співвідношення дійсні також функції коваріації. Оскільки  $K(\tau) = R(\tau) + m_1^2$ , можна записати

$$G(\omega) = F\{R(\tau)\} + 2\pi m_1^2 \delta(\omega).$$

Формули Вінера-Хінчина пов'язують між собою взаємний енергетичний спектр та ВКФ:

$$\begin{aligned} \dot{G}_{xy}(\omega) &= F\{B_{xy}(\tau)\}, & B_{xy}(\tau) &= F^{-1}\{\dot{G}_{xy}(\omega)\}, \\ \dot{G}_{yx}(\omega) &= F\{B_{yx}(\tau)\}, & B_{yx}(\tau) &= F^{-1}\{\dot{G}_{yx}(\omega)\}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

З виразів (4.13) випливає властивість, аналогічна властивостям ПФ для детермінованих сигналів: чим ширший енергетичний спектр випадкового процесу, тим менше інтервал кореляції, і, чим більше інтервал кореляції, тим вужче спектр процесу.

#### 4.10 Білий шум

*Білий шум* — процес, який має рівномірний ЕС на всіх частотах, тобто  $G(\omega) = G_0$ ,  $-\infty < \omega < \infty$ . КФ білого шуму  $R(\tau) = G_0\delta(\tau)$ , тобто є  $\delta$ -функцією на початку координат. Таким чином, білий шум характеризується тим, що його значення в якісь два, навіть скільки завгодно близькі моменти часу, некорельовані.

Зазначимо, що поняття білого шуму стосується лише спектральної картини випадкового процесу, та залишає відкритим питання законів розподілу. Білий шум є ідеалізацією (математична модель), яка не реалізується насправді, оскільки по-перше, дуже близькі значення випадкового процесу практично завжди залежні, по-друге, реальні процеси мають кінцеву потужність, а повна потужність білого шуму нескінченна.

Процес, що не має рівномірного ЕС у смузі досліджуваних частот, називають забарвленим (кольоровим) шумом.

#### 4.11 Взаємні енергетичні спектри стаціонарних ергодичних випадкових процесів

Розглянемо суму двох ергодичних процесів  $x(t)$  та  $y(t)$  з нульовими середніми ( $\bar{x} = \bar{y} = 0$ ). Визначимо КФ випадкового процесу  $z(t) = x(t) + y(t)$ :

$$\begin{aligned} R_z(\tau) &= \overline{z(t)z(t+\tau)} = \overline{[x(t) + y(t)][x(t+\tau) + y(t+\tau)]} = \\ &= \overline{x(t)x(t+\tau)} + \overline{x(t)y(t+\tau)} + \overline{y(t)x(t+\tau)} + \overline{y(t)y(t+\tau)} = \\ &= R_x(\tau) + B_{xy}(\tau) + B_{yx}(\tau) + R_y(\tau). \end{aligned} \quad (4.15)$$

При  $\tau = 0$ ,  $R_x(0) = \sigma_x^2$ ,  $R_y(0) = \sigma_y^2$ , а  $B_{xy}(0) = B_{yx}(0)$ . Отже,

$$\sigma_z^2 = R_z(0) = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + 2B_{xy}(0). \quad (4.16)$$

Якщо процеси  $x(t)$  та  $y(t)$  незалежні, то дисперсія (середня потужність) суми буде  $\sigma_z^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2$ . В іншому випадку залежно від знаку  $B_{xy}(0)$ , потужність процесу  $z(t)$  може бути більшою або меншою від суми дисперсій.

Для різниці  $z(t) = x(t) - y(t)$  виходить вираз, аналогічний (4.16). Необхідно лише знак плюс перед членом  $2B_{xy}$  замінити на мінус. При незалежності процесів  $x(t)$  та  $y(t)$  дисперсія процесу  $z(t)$ , як і при підсумовуванні  $\sigma_z^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2$ .

Застосувавши до  $R_z(\tau)$  співвідношення Вінера-Хінчина, отримаємо

$$G_z(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_z(\omega) \exp[-j\omega\tau] d\tau = G_x(\omega) + G_y(\omega) + \dot{G}_{xy}(\omega) + \dot{G}_{yx}(\omega). \quad (4.17)$$

В цьому виразі

$$\begin{aligned} \dot{G}_{xy}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} B_{xy}(\tau) \exp[-j\omega\tau] d\tau, \\ \dot{G}_{yx}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} B_{yx}(\tau) \exp[-j\omega\tau] d\tau \end{aligned} \quad (4.18)$$

мають сенс *взаємних енергетичних спектрів* випадкових процесів  $x(t)$  та  $y(t)$ . На відміну від ЕС  $G_x(\omega)$  або  $G_y(\omega)$ , що є дійсною функцією, і який не може набувати від'ємних значень, взаємні спектральні густини  $\dot{G}_{xy}(\omega)$  і  $\dot{G}_{yx}(\omega)$  можуть бути комплексними функціями. Це має місце при непарних щодо  $\tau$  функціях  $B_{xy}(\tau)$  і  $B_{yx}(\tau)$ . Оскільки

$$\begin{aligned} B_{xy}(\tau) &= B_{yx}(-\tau), \\ B_{yx}(\tau) &= B_{xy}(-\tau), \end{aligned}$$

співвідношення (4.18) призводять до рівності

$$\dot{G}_{xy}(\omega) = G_{yx}^*(\omega),$$

звідки випливає, що

$$\dot{G}_{xy}(\omega) + \dot{G}_{yx}(\omega) = 2 \operatorname{Re}[\dot{G}_{xy}(\omega)] = 2 \operatorname{Re}[\dot{G}_{yx}(\omega)].$$

Таким чином, вираз (4.17) можна записати у формі

$$G_z(\omega) = G_x(\omega) + G_y(\omega) + 2 \operatorname{Re}[\dot{G}_{xy}(\omega)].$$

Цей вираз пояснює фізичний сенс взаємного енергетичного спектра  $\dot{G}_{xy}(\omega)$ . Якщо випадкові процеси  $x(t)$  і  $y(t)$  статистично незалежні, то  $\dot{G}_{xy}(\omega) = 0$  та ЕС суми  $z(t) = x(t) + y(t)$  дорівнює сумі ЕС  $G_x(\omega)$  та  $G_y(\omega)$ , отже, потужність процесу  $z(t)$  дорівнює сумі потужностей процесів  $x(t)$  і  $y(t)$ .

Якщо дійсна частина взаємного ЕС додатна, то  $G_z(\omega) > G_x(\omega) + G_y(\omega)$ , отже кореляція між процесами призводить до зростання середньої потужності суми  $\sigma_z^2 > \sigma_x^2 + \sigma_y^2$ . Вочевидь, що при від'ємній дійсній частині  $\dot{G}_{xy}(\omega)$ , потужність сумарного процесу менше, ніж  $\sigma_z^2 < \sigma_x^2 + \sigma_y^2$ .

Якщо  $\sigma_z^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2$ , то процеси  $x(t)$  і  $y(t)$  є некогерентними, адитивними.

## 5 Лекція 5. Експериментальне визначення статистичних характеристик та деякі випадкові процеси

1. Вимірювання математичного сподівання
2. Вимірювання другого початкового моменту та дисперсії
3. Вимірювання АКФ, функції коваріації та ВКФ
4. Вимірювання енергетичного спектра ЕС
5. Вимірювання функції розподілу  $F$  випадкового процесу
6. Вимірювання функції густини імовірності  $f$
7. Гармонійне коливання з випадковою амплітудою (приклад)
8. Гармоническое колебание со случайной фазой (пример)
9. Нормальний (гаусівський) випадковий процес

На підставі властивості ергодичності, статистичні характеристики випадкового стаціонарного ергодичного процесу можна визначити експериментальним шляхом при дослідженні та часовому усередненні лише однієї реалізації. Для цього потрібно, щоб час спостереження  $T$  значно перевищував інтервал кореляції процесу, тобто  $T \gg \tau_k$ .

### 5.1 Вимірювання математичного сподівання

Математичне сподівання визначається виразом:

$$m_1 = \overline{x(t)} = \lim_{T \gg \tau_k} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt. \quad (5.1)$$

Структурну схему вимірювача представлено на рис. 5.1, яка включає інтегратор і індикатор. Математичне сподівання часто визначають за допомогою приладів із магнітоелектричною системою, які вимірюють постійні величини.

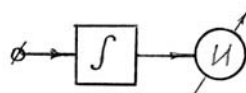


Рис. 5.1. Вимірювання математичного сподівання

### 5.2 Вимірювання другого початкового моменту та дисперсії

Другий початковий момент (повна потужність випадкового процесу) та дисперсія (потужність флуктуацій) визначаються виразами:

$$m_2 = \overline{x^2(t)} = \lim_{T \gg \tau_k} \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt, \quad (5.2)$$

$$\sigma^2 = \overline{[x(t) - m_1]^2} = \lim_{T \gg \tau_k} \frac{1}{T} \int_0^T [x(t) - m_1]^2 dt. \quad (5.3)$$

Структурну схему вимірювача цих величин наведено на рис. 5.2.

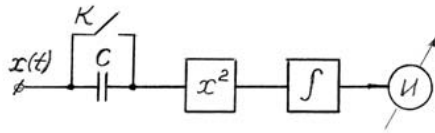


Рис. 5.2. Вимірювання другого початкового моменту та дисперсії

Коли ключ К розімкнено, вимірюється дисперсія випадкового процесу, а коли замкнутий — другий початковий момент.

### 5.3 Вимірювання АКФ, функції коваріації та ВКФ

Перелічені вище функції описуються виразами:

$$R(\tau) = \lim_{T \gg \tau_k} \frac{1}{T} \int_0^T [x(t) - m_1][x(t + \tau) - m_1] dt, \quad (5.4)$$

$$K(\tau) = \lim_{T \gg \tau_k} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)x(t + \tau) dt, \quad (5.5)$$

$$B_{xy}(\tau) = \lim_{T \gg \tau_k} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)y(t + \tau) dt \quad (5.6)$$

Структурну схему вимірювача представлено на рис. 5.3.

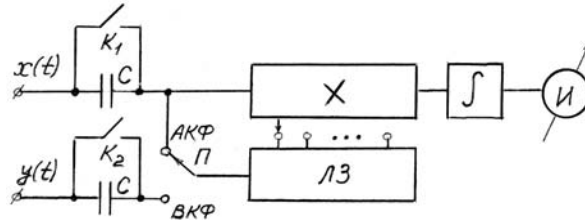


Рис. 5.3. Вимірювання АКФ, функції коваріації та ВКФ

При вимірюванні АКФ випадковий процес через конденсатор С подається одночасно на помножувач і лінію затримки (ЛЗ). Конденсатор дозволяє виключити постійну складову процесу, що виділяється на його обкладках. У ЛЗ сигнал затримується на час  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ , і подається на перемножувач функцій  $x(t)$  і  $x(t + \tau)$ . Добуток функцій з виходу помножувача надходить на інтегратор, на виході якого виходить кореляційна функція (АКФ). Отримані значення наносяться на графік. Знайдена крива апроксимується відповідною функціональною залежністю, яка має всі властивості АКФ.

Якщо вимірюється функція коваріації, то ключ К1 має бути замкнутим. У цьому випадку на вхід вимірювача проходить постійна складова випадкового процесу.

При вимірі ВКФ перемикач П переводиться в нижнє положення і на входи перемножувача надходять сигнали  $x(t)$  і  $y(t + \tau)$ .

При дослідженні високочастотних флуктуацій виникають труднощі у створенні ЛЗ із невеликим інтервалом  $\Delta t$ . У такому разі спочатку вимірюють

енергетичний спектр (ЕС) випадкового процесу, а потім знаходять по ньому кореляційну функцію.

#### 5.4 Вимірювання енергетичного спектру ЕС

Відомо, що ефективне (середньоквадратичне) значення випадкової напруги можна визначити як:

$$\bar{U}_{\text{эф}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt} = \sqrt{2 \int_0^\infty G(2\pi f) df}, \quad (5.7)$$

звідки слідує

$$G(2\pi f) = \frac{(\bar{U}_{\text{эф}})^2}{2\Delta f}, \quad (5.8)$$

якщо виконується умова  $2\Delta f \ll f_0$  (рис. 5.4).

Таким чином, вимірювач ЕС (рис. 5.5) повинен містити вузькосмуговий фільтр, що перебудовується (ВСФ) і вольтметр, що вимірює ефективну напругу. Очевидно, що ЕС в цьому разі знімається по точках залежно від  $f_0$ . На цьому принципі збудовано промислові селективні вольтметри.

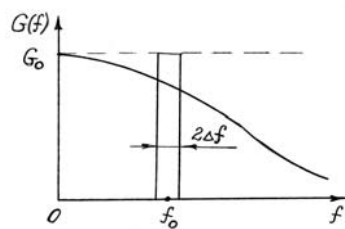


Рис. 5.4.

Експериментальне визначення енергетичного спектру



Рис. 5.5.

Блок-схема вимірювача енергетичного спектру

#### 5.5 Вимірювання функції розподілу F випадкового процесу

Як відомо, одновимірна функція розподілу визначає можливість, що випадкова функція  $x(t)$  перебуває нижче заданого рівня:

$$F(x_1, t_1) = p([x(t_1) \leq x_1]).$$

Тут  $t$  час грає роль параметра.

Одна досить довга реалізація ( $T \gg \tau_k$ ) випадкового процесу (рис. 5.6) надходить на вхід інвертуючого підсилювача–обмежувача (УО). На цей же вхід УО подається постійна напруга  $U_0$  з потенціометра  $R$  і вимірюється за допомогою вольтметра  $V$  (рис. 5.7). Вихід УО з'єднаний із входом інтегратора, вихід якого з'єднаний із входом індикатора.

Таким чином, на виході УО формуються імпульси постійного рівня, тривалість яких  $\tau_i$  є випадковою, і залежить від рівня  $U_0$  (рис. 5.8).

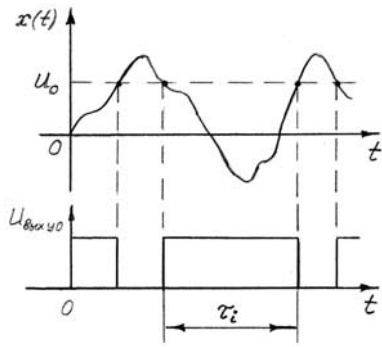


Рис. 5.6.

Формування імпульсів  
необхідної тривалості  
для вимірювання  
функції розподілу

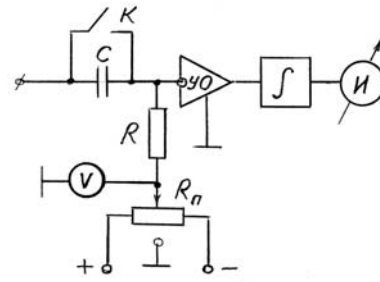


Рис. 5.7.

Структурна схема  
пристрою для вимірювання  
функції розподілу

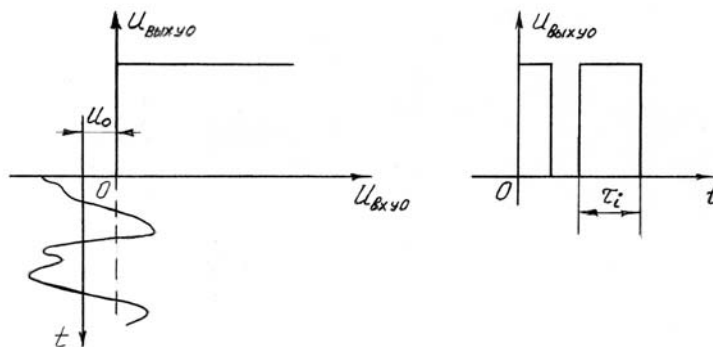


Рис. 5.8. Формування імпульсів, тривалість яких  
пропорційна функції розподілу

У цьому вимірювачі функція розподілу визначається як:

$$F(x) = \lim_{T \gg \tau_k} \frac{\sum \tau_i}{T}. \quad (5.9)$$

Ключ К замикає конденсатор С, що дозволяє вимірювати центровану і нецентровану функції розподілу.

## 5.6 Вимірювання функції густини імовірності $f$

Одновимірною функцією густини імовірності визначається виразом:

$$f(x) \approx p[x_1 \leq x(t_1) \leq x_1 + \Delta x] \frac{1}{\Delta x}. \quad (5.10)$$

Структурна схема вимірювача представлена на рис. 5.9.

Вхідний випадковий процес (рис. 5.9) через конденсатор С, який може замикатися ключем К, надходить на входи двох інвертуючих підсилювачів–обмежувачів УО1 і УО2. На ці ж входи подається постійна напруга з потенціометра R, яке вимірюється вольтметром V. На другий вхід УО2 подається додаткова невелика напруга  $\Delta u$ . Вихідні напруги УО1 і УО2 віднімаються та подаються на інтегратор, вихід якого з'єднаний із входом індикатора.

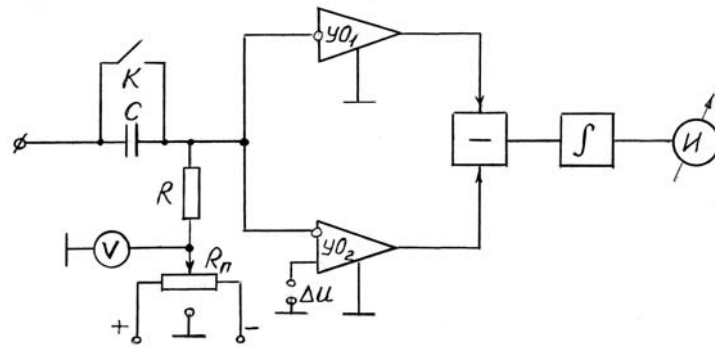


Рис. 5.9. Структурна схема вимірювача густини імовірності

На виході УО1 формується послідовність імпульсів випадкової тривалості, яка залежить від рівня  $U_0$ , а на виході УО2 — послідовність імпульсів випадкової тривалості, яка залежить від рівня  $U_0 + \Delta u$  (рис. 5.10).

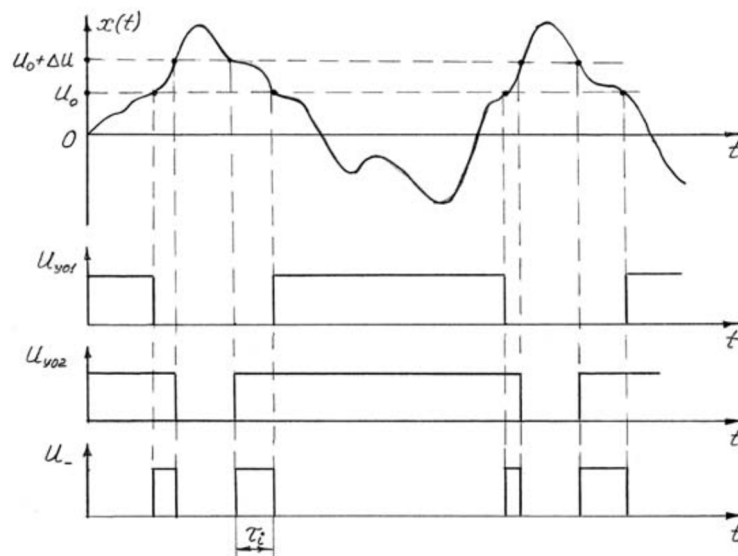


Рис. 5.10. Формування імпульсів, тривалість яких пропорційна густини імовірності

Після віднімання двох послідовностей імпульсів та їх інтегрування отримуємо оцінку функції густини ймовірностей при даному  $U_0$ :

$$f(x) = \lim_{T \gg \tau_k} \frac{\sum \tau_i}{T \Delta u}. \quad (5.11)$$

## 5.7 Гармонійне коливання з випадковою амплітудою (приклад)

Нехай у виразі, що визначає сигнал

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \theta_0) = A \cos \psi(t),$$

частота  $\omega_0$  і початкова фаза  $\theta_0$  є детермінованими та постійними величинами, а амплітуда  $A$  — випадкова, рівноімовірна в інтервалі від 0 до  $A_{\max}$  величина (рис. 5.11).

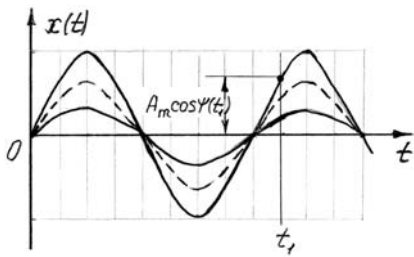


Рис. 5.11.  
Гармонійне коливання  
з випадковою амплітудою

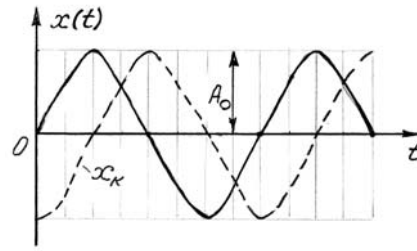


Рис. 5.12.  
Гармонійне коливання  
з випадковою фазою

Знайдемо одномірну густину ймовірності  $f(x, t_1)$  для фіксованого моменту часу  $t_1$ . Миттєве значення  $x(t_1)$  може набувати будь-яких значень в інтервалі від 0 до  $A_{\max} \cos \psi(t_1)$ , причому вважаємо, що  $\cos \psi(t_1) > 0$ . Отже,

$$f(x, t_1) = \frac{1}{A_{\max} \cos \psi(t_1)}, \quad 0 < x < A_{\max} \cos \psi(t_1). \quad (5.12)$$

Знайдемо математичне сподівання

$$m_1[x(t_1)] = \frac{1}{A_{\max} \cos \psi(t_1)} \int_0^{A_{\max} \cos \psi(t_1)} x dx = \frac{1}{2} A_{\max} \cos \psi(t_1). \quad (5.13)$$

Другий початковий момент та дисперсія рівні:

$$m_2[x(t_1)] = \frac{1}{A_{\max} \cos \psi(t_1)} \int_0^{A_{\max} \cos \psi(t_1)} x^2 dx = \frac{1}{2} A_{\max}^2 \cos^2 \psi(t_1), \quad (5.14)$$

$$\sigma^2 = m_2[x^2(t_1)] - m_1^2[x(t_1)] = \frac{1}{12} A_{\max}^2 \cos^2 \psi(t_1). \quad (5.15)$$

Отже, розглядається випадковий нестационарний і неергодичний процес.

## 5.8 Гармонійне коливання з випадковою фазою (приклад)

Нехай амплітуда  $A_0$  і частота  $\omega_0$  гармонійного сигналу наперед достовірно відомі, а початкова фаза  $\theta$  — випадкова величина, яка з однаковою ймовірністю може набувати будь-якого значення в інтервалі від  $-\pi$  до  $\pi$ . Це означає, що густина імовірності початкової фази:

$$f_\theta(\theta) = \frac{1}{2\pi}, \quad -\pi < \theta < \pi. \quad (5.16)$$

Одну з реалізацій випадкового процесу  $x(t)$ , утвореного сукупністю гармонійних коливань із випадковими фазами (рис. 5.12), можна визначити виразом:

$$x_k(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + \theta_k) = A_0 \cos \psi_k(t). \quad (5.17)$$

Повна фаза коливання  $\psi(t) = \omega_0 t + \theta$  є випадковою величиною, рівномірною в інтервалі від  $(\omega_0 t - \pi)$  до  $(\omega_0 t + \pi)$ , отже:

$$f_\psi(\psi) = \frac{1}{2\pi}, \quad \omega_0 t - \pi < \psi < \omega_0 t + \pi. \quad (5.18)$$

Знайдемо одномірну густину ймовірностей  $f_x(x)$  випадкового процесу  $x(t)$ . Виділимо інтервал  $(x, x + dx)$  (рис. 5.13), та визначимо ймовірність того, що при вимірі величини сигналу, проведеному у проміжку часу від  $t_1$  до  $(t_1 + dt)$ , миттєве значення сигналу опиниться в інтервалі  $(x, x + dx)$ . Цю ймовірність можна записати як  $f_x(x)dx$ , де  $f_x(x)$  — шукана густина ймовірності.

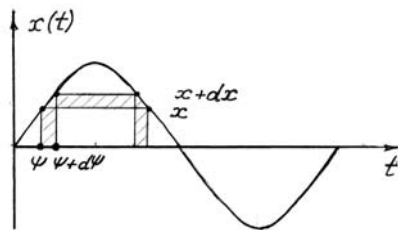


Рис. 5.13. Визначення одномірної густини ймовірностей

Очевидно, що ймовірність  $f_x(x)dx$  збігається з ймовірністю попадання випадкової фази коливань  $\psi$  в один із двох заштрихованих на рис. 5.13 фазових інтервалів. Ця остання ймовірність дорівнює  $2f_\psi(\psi)d\psi$ . Отже,

$$f_x(x)dx = 2f_\psi(\psi)d\psi = (2 / 2\pi)d\psi,$$

звідки потрібна функція

$$f_x(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{\left| \frac{dx}{d\psi} \right|}, \quad -A_0 < x < A_0.$$

Оскільки

$$\left| \frac{dx}{d\psi} \right| = A_0 |\sin \psi| = A_0 \sqrt{1 - \cos^2 \psi} = \sqrt{A_0^2 - x^2},$$

тоді остаточно

$$f_x(x) = \frac{1}{\pi \sqrt{A_0^2 - x^2}}, \quad -A_0 \leq x \leq A_0 \quad (5.19)$$

Графік цієї функції зображено на рис. 5.14.

Істотно, що одномірна густина ймовірності  $f_x(x)$  залежить від вибору моменту часу  $t_1$ , а середнє по множині

$$\overline{x(t)} = \int_{-A_0}^{A_0} x f_x(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-A_0}^{A_0} \frac{x}{\sqrt{A_0^2 - x^2}} dx = 0 \quad (5.20)$$

збігається із середнім за часом

$$m_1[x(t)] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T A_0 \cos(\omega_0 t + \theta) dt = 0. \quad (5.21)$$

Це справедливо для будь-якої реалізації аналізованого випадкового процесу.

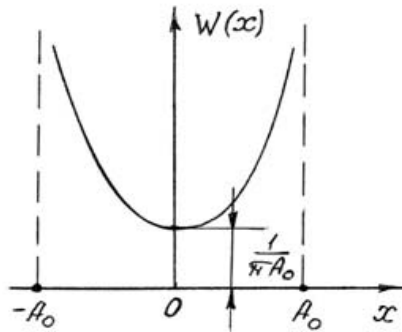


Рис. 5.14. Графік одновірної густини ймовірностей

Другий початковий момент та дисперсія в даному випадку збігаються:

$$m_2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T A_0^2 \cos^2(\omega_0 t + \theta) dt = \frac{A_0^2}{2} = \sigma^2. \quad (5.22)$$

Кореляційна функція дорівнює:

$$R(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T A_0 \cos(\omega_0 t + \theta) A_0 \cos(\omega_0 t + \omega_0 \tau + \theta) dt = \frac{A_0^2}{2} \cos(\omega_0 \tau). \quad (5.23)$$

Незалежність середнього значення від  $t_1$ , та кореляційної функції від положення інтервалу  $\tau = t_2 - t_1$  на осі часу, дозволяє вважати аналізований процес стаціонарним. Збіг результатів усереднення по множині та часу (для будь-якої реалізації) вказує на ергодичність процесу.

## 5.9 Нормальний (гаусівський) випадковий процес

Нормальний закон розподілу випадкових величин найчастіше зустрічається у природі. Нормальний процес особливо точно описує завади каналу зв'язку. Він дуже зручний для аналізу. Тому випадкові процеси, розподіл яких не дуже відрізняється від нормального, часто замінюють нормальним процесом.

Гаусівський випадковий процес має такі властивості:

1. Умови стаціонарності у вузькому та широкому значенні збігаються.
2. Некорельованість для гаусівського процесу одночасно означає і статистичну незалежність.

3. Умовні закони розподілу також є гаусівськими.
4. При лінійних перетвореннях гаусівський процес залишається гаусівським, змінюється лише математичне очікування та дисперсія процесу.

Одномірна густина ймовірностей нормального процесу визначається виразом:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x - m_1)^2}{2\sigma^2}\right]. \quad (5.24)$$

Розглядається стаціонарний та ергодичний нормальний процес. Тому під  $m_1$  і  $\sigma^2$  можна мати на увазі постійну складову та середню потужність флуктуаційної складової однієї досить тривалої реалізації випадкового процесу.

Графіки густини ймовірностей при нормальному законі для деяких значень  $\sigma$  зображені на рис. 5.15.

Функція  $f(x)$  симетрична щодо середнього значення. Чим більше  $\sigma$ , тим менше величина максимуму, і крива стає більш пологою, оскільки площа під кривою  $f(x)$  дорівнює одиниці за будь-яких значень  $\sigma$ .

На основі функції  $f(x)$  можна знайти відносний час перебування величини сигналу  $x(t)$  у певному інтервалі рівнів та низку інших важливих для практики параметрів випадкового процесу.

Пояснимо це на прикладі однієї з реалізацій нормального шуму (рис. 5.16) при  $m_1 = 0$ .

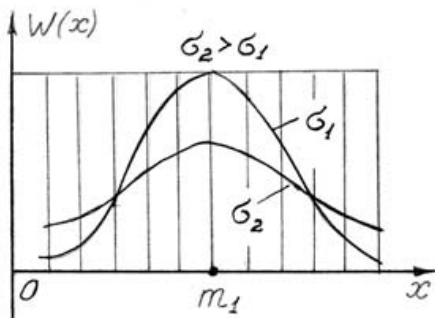


Рис. 5.15.

Графіки густини ймовірностей при нормальному законі

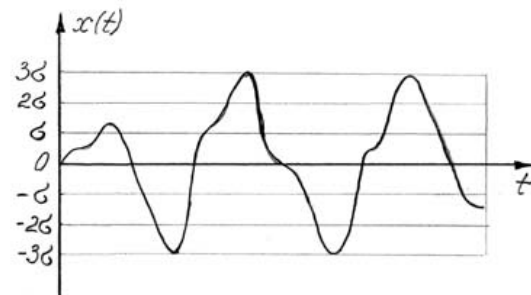


Рис. 5.16.

Приклад однієї з реалізацій нормального шуму

Ця функція часу відповідає шумовій заваді, спектр якої займає смугу від нульової до деякої граничної частоти. Імовірність перебування значення  $x(t)$  в інтервалі від  $a$  до  $b$  визначається виразом

$$\begin{aligned}
P[a \leq x \leq b] &= \int_a^b \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-m_1)^2}{2\sigma^2}\right] dx = \\
&= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^b \exp\left[-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right] dx - \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^a \exp\left[-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right] dx = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{b/\sigma} \exp\left[-\frac{y^2}{2}\right] dy - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{a/\sigma} \exp\left[-\frac{y^2}{2}\right] dy = \\
&= \Phi\left(\frac{b}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a}{\sigma}\right).
\end{aligned} \tag{5.25}$$

Функція

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \exp\left[-\frac{y^2}{2}\right] dy \tag{5.26}$$

називається інтегралом ймовірностей. У будь-якому математичному довіднику наводяться таблиці цієї функції. Підставивши в (5.25) значення  $b/\sigma = 1, 2, 3$  і відповідно  $a/\sigma$ , неважко знайти ймовірності перебування  $x(t)$  у смугах шириною  $2\sigma, 4\sigma, 6\sigma$ , симетричних щодо осі  $t$ . У даному випадку ( $|a| = b$ ), і формулу (5.25) можна спростити на підставі симетрії функції  $f(x)$  щодо осі ординат.

Таким чином,

$$f(-b \leq x \leq b) = 2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{b/\sigma} \exp\left[-\frac{y^2}{2}\right] dy = 2\Phi\left(\frac{b}{\sigma}\right).$$

Результати обчислень зведено до таблиці 5.1.

З табл. 5.1 видно, що ширину шумової доріжки нормального шуму можна прийняти рівною  $(5...6)\sigma$ .

Відношення часу перебування  $x(t)$  у заданому інтервалі до загального часу спостереження (досить великого для ефективного усереднення) можна трактувати як ймовірність потрапляння  $x(t)$  у зазначений інтервал. На такому трактуванні заснований принцип побудови різних приладів, які використовуються для експериментального знаходження одновимірної густини ймовірності випадкового процесу.

Таблиця 5.1

| Інтервал значень |           | Імовірність перебування в інтервалі | Імовірність перебування поза інтервалом |      |
|------------------|-----------|-------------------------------------|---|------|
| від              | до        |                                     | абс.                                    | %    |
| $-\sigma$        | $\sigma$  | 0,6826                              | $\sim 0,317$                            | 31,7 |
| $-2\sigma$       | $2\sigma$ | 0,9544                              | $\sim 0,046$                            | 4,6  |
| $-3\sigma$       | $3\sigma$ | 0,9973                              | $\sim 0,003$                            | 0,3  |

Таблиця 5.1 є прикладом закону  $3\sigma$ .

## 6 Лекція 6. Шуми як випадкові процеси та їх врахування при розробці пристроїв

1. Класифікація та опис шумів
2. Теплові шуми
3. Дробовий шум електронних та напівпровідникових приладів
4. Фліккер-шум або ефект мерехтіння
5. Методи еквівалентного представлення шумів

### 6.1 Класифікація та опис шумів

При аналізі передачі сигналів по радіотехнічних пристроях, поруч із неминучими спотвореннями форми сигналів необхідно враховувати й власні шуми елемента і пристрою. Ці шуми, накладаючись на сигнал, обмежують інформаційну ємність останнього. Проблема шумів особливо актуальна під час посилення слабких сигналів.

Оскільки шуми існують, їх треба класифікувати.

Існують різні методи класифікації шумів, що склалися історично:

- i. природні та технічні;
- ii. адитивні та мультиплікативні.

Природними називають шуми, спричинені фундаментальними фізичними причинами, наприклад,

- iii. дисипація (розсіювання) енергії,
- iv. дискретність заряду електрона,  $q_e = 1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл.

До технічних відносять шуми, спричинені недосконалістю технології виготовлення приладу. Історично технічним називали фліккерний шум — дуже специфічний тип шуму, про який, як і про інші шуми, йтиметься нижче. В даний час термін «технічний шум» практично не використовується.

*Адитивним* називають шум, зазвичай в струмі, або напрузі, статистичні характеристики якого не залежать від напруги, прикладеної до приладу, або струму, що протікає через прилад.

Наприклад, адитивним є тепловий шум, що виділяється на резисторі (рис. 6.1а). Повна напруга  $V$ , що виділяється на резисторі, містить дві компоненти:

$$V(t) = V_0 + e_T(t),$$

де  $V_0 = I_0 R$  — падіння напруги на резисторі,  $e_T(t)$  — едс теплового шуму, який генерується резистором.

Тепловий шум моделюється на рис. 6.1а еквівалентним генератором напруги. Цей шум завжди є на виводах резистора. Його статистичні параметри не залежать від величини струму  $I_0$ , що протікає через резистор.

Під *мультиплікативним* розуміється шум, викликаний флуктуаціями параметрів елемента, що виявляється при подаванні напруги на цей елемент, або пропускання через нього електричного струму.

Наприклад, мультиплікативну природу має шум  $v(t)$ , що виділяється на резисторі (рис. 6.1б), що має флуктуації опору.

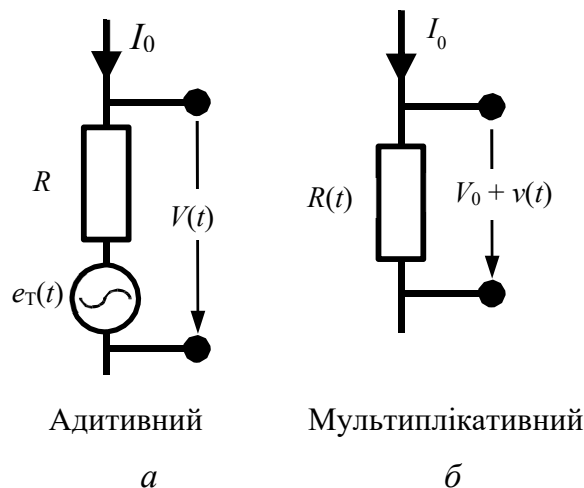


Рис. 6.1. Види шумів по відношенню до сигналу

## 6.2 Теплові шуми

*Теплові шуми* — шуми, створювані тепловими флуктуаціями електронів, що виникають у ланцюгах, що мають омичний опір, при температурі  $T$ , відмінній від абсолютного нуля. Швидкість хаотичного теплового руху електронів значно перевищує швидкість їхнього спрямованого руху у провіднику у разі застосування зовнішньої ЕРС, тому інтенсивність теплового шуму практично не залежить від сили струму, що протікає через провідник. ЕРС шумів можна розглядати як суму імпульсів, які хаотично йдуть один за одним із надзвичайно малою тривалістю — близько  $10^{-15}$  с.

### 6.2.1 Формула Найквіста

Відомо, що спектральна густина напруги теплового шуму резистора  $R$  визначається формулою Найквіста:

$$G_0(f_+) = 4kTR, \quad (6.1)$$

де  $k = 1,38 \times 10^{-23}$  Дж/К — постійна Больцмана,  $T$  — температура резистора в градусах Кельвіна.

З (6.1) видно, що спектральна густина теплового шуму стала і, здавалося б, тепловий шум є ідеальним прикладом білого шуму. Проте слід пам'ятати, що формула (6.1) справедлива лише не на дуже високих частотах. Вона виходить із точної формули

$$G_0(f_+) = 4kTR \frac{hf}{kT} \left( \exp\left(\frac{hf}{kT}\right) - 1 \right)^{-1}, \quad (6.2)$$

де  $h = 6,62 \times 10^{-34}$  Дж·с — постійна Планка при  $hf/kT \ll 1$ .

При кімнатній температурі, навіть на міліметрових хвилях, нерівність  $hf/kT \ll 1$  практично виконується. Тому у радіотехніці виправдано застосування наближеної формули (6.1). Однак при обчисленні дисперсії теплового шуму необхідно користуватися точною формулою (6.2):

$$D = 4kTR \int_0^{\infty} \frac{hf}{kT} \left( \exp\left(\frac{hf}{kT}\right) - 1 \right)^{-1} df = \frac{2\pi^2}{3h} (kT)^2 R. \quad (6.3)$$

При аналізі ланцюгів з шумами, їх зображують генератором шумових ЕРС (рис. 6.2) або струмів (рис. 6.3), включених послідовно (паралельно) з ідеальним опором  $R$ , що не шумить (або провідністю  $G = 1/R$ ).

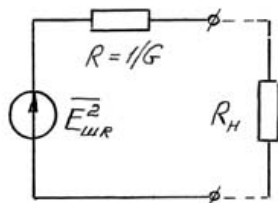


Рис. 6.2.  
Генератор шумових ЕРС

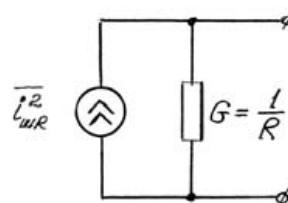


Рис. 6.3.  
Генератор шумових струмів

Середній квадрат ЕРС шумів визначають за формулою Найквіста:

$$\bar{E}_{шR}^2 = 4kTR\Pi_{\text{еф}}, \quad (6.4)$$

відповідно, середній квадрат шумового струму

$$\bar{I}_{шG}^2 = 4kTG\Pi_{\text{еф}}, \quad (6.5)$$

де  $\Pi_{\text{еф}}$  — ефективна (шумова) смуга частот, в якій вимірюється ЕРС шумів,  $R$  — активний опір ланцюга.

### 6.2.2 Узагальнена формула Найквіста

У разі, коли опір двополюсника залежить від частоти, слід користуватися узагальненою формулою Найквіста:

$$G_U(\omega_+) = 4kTR(\omega), \quad (6.6)$$

$$G_I(\omega_+) = 4kTG(\omega), \quad (6.7)$$

де  $R(\omega)$  і  $G(\omega)$  — опір і провідність двополюсника, що залежать від частоти.

Джерело ЕРС доцільно використовувати при аналізі ланцюгів з послідовним включенням елементів, що шумлять, а джерело струму — з паралельним.

Шумливий резистор віддає узгодженому навантаженню  $R = R_H$  максимальну потужність шуму

$$P_{\text{шmax}} = \frac{\bar{E}_{шR}^2}{(R + R_H)^2} R_H = \frac{\bar{E}_{шR}^2}{4R} = kT\Pi_{\text{еф}}. \quad (6.8)$$

### 6.2.3 Шуми коливального контуру

Шуми коливального контуру — шуми, зумовлені опором втрат контуру  $r_k$ , переважно опором індуктивної гілки. Напряга шумів на паралельному контурі в  $Q$  разів більше ЕРС шуму опору втрат контуру  $r_k$ :

$$\bar{U}_{шк}^2 = E_{шк}^2 Q^2 = 4kT\Pi_{эф}R_{ер}, \quad (6.9)$$

де  $R_{ер} = \omega_0^2 L^2 / r_k$  — еквівалентний активний резонансний опір контуру,  $\Pi_{эф}$  — смуга пропускання ланцюгів, включених після контуру, яка в загальному випадку набагато менша за його смугу пропускання.

### 6.3 Дробовий шум електронних та напівпровідникових приладів

Умови існування дробового шуму:

1. дискретність заряду електрона,  $q_e = 1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл;
2. наявність виділеного напрямку руху електронів, тобто швидкість  $v$  має середнє значення, відмінне від нуля,  $\langle v \rangle \neq 0$ ;
3. стохастичність інжекції у виділеному напрямку.

В інжекційних приладах (електровакуумних лампах, напівпровідникових діодах та біполярних транзисторах) дробовий шум є завжди.

*Дробовий шум* обумовлений дискретною структурою струму, внаслідок чого кількість носіїв заряду, що вириваються з поверхні катода в одиницю часу, флюктує. При цьому розкид миттєвих значень струму підпорядковується гаусівському закону розподілу:

$$f(i) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(i - \bar{I}_0)^2}{2\sigma^2}\right), \quad (6.10)$$

де  $\bar{I}_0$  — середнє значення току,  $\sigma^2$  — дисперсія флюктуацій току.

Спектральну густину флюктуацій анодного струму електронних ламп у ряді випадків можна представити формулою:

$$G(\omega) = e\bar{I}_0\Gamma^2 M^2(\omega\tau_0), \quad (6.11)$$

де  $e = 1,6 \times 10^{-19}$  К — заряд електрона,  $\Gamma^2$  — коефіцієнт депресії, що характеризує вплив просторового заряду,  $M^2(\omega\tau_0)$  — коефіцієнт частотної депресії,  $\tau_0$  — час прольоту електрона в лампі. Цей час слід брати до уваги на частотах більше 100 МГц, оскільки  $\tau_0$  має порядок від  $10^{-9}$  до  $10^{-10}$  с. Флюктуацію струму можна розглядати як білий шум тільки на частотах, для яких кут прольоту менше одного радіану.

Для напівпровідникових приладів  $G(\omega) = e\bar{I}_0$ ,  $-\infty < \omega < \infty$ .

Часто спектр дробового шуму визначається відомою формулою Шоткі:

$$\langle i_{др}^2 \rangle_f = 2q_e I_0, \text{ А}^2/\text{Гц}. \quad (6.12)$$

де  $I_0 = \langle I(t) \rangle$  — середнє (по повному ансамблю реалізацій) значення струму через прилад;  $i_{др}(t)$  — дробовий шум.

Кореляційна функція дробового шуму є дельта-функцією:

$$R(\tau) = e\bar{I}_0\delta(\tau). \quad (6.13)$$

## 6.4 Фліккер-шум або ефект мерехтіння

Першу теорію, як і назву шуму, запропонував Шоткі в 1926 році [13]. Було помічено, що причиною цього шуму є «миготлива» зміна емісійної здатності окремих областей катода. Звідси і виникла назва «фліккерний шум» (flicker — мерехтіння, мерцание, англ.).

Цей вид шуму спостерігається в лампах та транзисторах. Причиною фліккерного шуму в електронних лампах є повільні хаотичні процеси, що відбуваються в матеріалі катода, і випадково змінюють його емісійну здатність. Фліккер-ефект можна розглядати як флуктуації ефективної площі катода. Фліккер-шум у напівпровідниках виникає внаслідок повільних флуктуацій концентрації носіїв заряду поблизу  $p$ - $n$  переходу.

Шуми, спричинені ефектом мерехтіння, відрізняються повільністю перебігу процесу, що призводить до помітного зростання густини флуктуацій зі зниженням частоти (рис. 6.4). В результаті експериментальних досліджень встановлено наступну емпіричну формулу для енергетичного спектру фліккер-шуму:

$$G(\omega) = k \frac{I^2}{|\omega|},$$

де  $k$  — постійна, яка залежить від технології виготовлення.

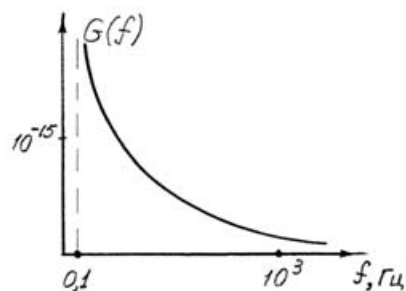


Рис. 6.4. Спектральна густина фліккер-шуму

Умовно вважають, що фліккер-шум займає смугу  $10^{-1} \dots 10^3$  Гц. На нижчих частотах спостерігається так званий дрейф емісії зі смугою частот  $10^{-4} \dots 10^{-1}$  Гц.

### 6.4.1 Основні моделі фліккерного шуму

- Модель Дю Пре – Ван дер Зіла
- Модель Мак Уортера – Ван дер Зіла
- Модель Шенфельда – Малахова
- Модель Халфорда
- Модель дворівневих систем
- Емпірична формула Хоухе – Клайнпенніна – Фандамме

$$\langle \delta R^2 \rangle_f = \frac{\alpha_H}{Nf},$$

де  $\langle \delta R^2 \rangle_f$  — спектр відносних флуктуацій опору в однорідному резистивному зразку з постійною густиною струму,  $N$  — кількість носіїв струму у зразку,  $f$  — частота аналізу. Параметр  $\alpha_H$  прийнято називати феноменологічним параметром Хоухе. Типовим вважається значення  $\alpha_H \sim 10^{-3}$ .

## 6.5 Методи еквівалентного представлення шумів

У більшості задач цілком вичерпною характеристикою шуму є його спектр; наприклад, для шумової напруги  $v_n(t)$  — спектр  $\langle v_n^2 \rangle_f$ , що вимірюється в  $[V^2/Гц]$ , а для шумового струму  $i_n(t)$  — спектр  $\langle i_n^2 \rangle_f [A^2/Гц]$ .

Однак іноді буває зручно виразити спектр вимірюного шуму будь-якого об'єкта в еквівалентних параметрах. При цьому за основу беруться дві відомі формули:

- формула Найквіста для спектра теплового шуму резистора;
- формула Шотки для спектра дробового шуму.

Таким чином, еквівалентний опис шумів можна робити на двох «мовах» — формулі Найквіста, або формулі Шоткі.

Розглянемо спочатку уявлення, засновані на формулі Найквіста, що визначає спектр теплового шуму пасивного двополюсника, що має імпеданс  $Z(\omega)$  при температурі  $T$ .

Спектр напруги  $e_T(t)$  теплового шуму розімкненого двополюсника, згідно зі співвідношенням (6.6):

$$\langle e_T^2 \rangle_f = 4kTR(f) [V^2/Гц], \quad (6.14)$$

де  $R(f) = \text{Re } Z(2\pi f)$  — активна частина імпедансу.

Для спектру струму  $i_T(t)$  теплового шуму короткозамкнутого двополюсника, згідно (6.7), маємо:

$$\langle i_T^2 \rangle_f = 4kTG(f) [A^2/Гц], \quad (6.15)$$

де  $G(f) = 1/R(f)$  — активна частина провідності двополюсника.

Зі співвідношень (6.14) і (6.15) видно такі чотири способи еквівалентного уявлення шумів, засновані на мові формули Найквіста.

- 1) В одиницях спектру теплового шуму.
- 2) Через ефективну (шумову) температуру об'єкта.
- 3) Через ефективний шумовий опір (для шумової напруги).
- 4) Через ефективну шумову провідність (для шумового струму).

Розглянемо послідовно вказані методи.

### 6.5.1 Коефіцієнт шуму двополюсника

Нехай є якийсь двополюсник, на виході якого спостерігається напруга шуму  $v_n(t)$ . Двополюсник має (активний) диференціальний опір  $R = R(f) = \text{Re } Z(2\pi f)$  знаходиться при абсолютній температурі  $T$  (рис. 6.5).



Рис. 6.5. Еквівалентний двополюсник при визначенні коефіцієнту шуму при наявності шумової напруги

Коефіцієнт шуму  $F_n$  двополюсника визначається як:

$$F_n = \frac{\langle v_n^2 \rangle_f}{4kTR}, \quad (6.16)$$

де  $\langle v_n \rangle_f$  — спектр шумової напруги, величина якого відома, наприклад, заздалегідь виміряна.

Тепер припустимо, що виводи двополюсника закорочені. Через них тече шумовий струм  $i_n(t)$  (рис. 6.6). У цьому випадку коефіцієнт шуму визначається через спектр  $\langle i_n^2 \rangle_f$  шумового струму:

$$F_n = \frac{\langle i_n^2 \rangle_f}{4kTG}, \quad (6.17)$$

де  $G = G(f) = 1/R(f)$  — диференційна провідність двополюсника.

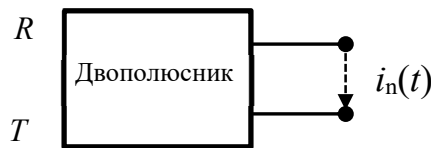


Рис. 6.6. Еквівалентний двополюсник при визначенні коефіцієнту шуму при наявності шумового струму

Аналізуючи співвідношення (6.16) і (6.17), бачимо, що коефіцієнт шуму є безрозмірною величиною. Він визначає спектр шуму двополюсника в одиницях спектра теплового шуму пасивного елемента, що має такий же опір  $R$  (провідність  $G$ ) і при тій же температурі  $T$ .

Таким чином, якщо відомий коефіцієнт шуму двополюсника, то можна знайти спектр шумової напруги на його виводах:

$$\langle v_n^2 \rangle_f = F_n \cdot 4kTR(f) \text{ [В}^2\text{/Гц]}, \quad (6.18)$$

або спектр шумового струму короткозамкнутого двополюсника:

$$\langle i_n^2 \rangle_f = F_n \cdot 4kTG(f) \text{ [А}^2\text{/Гц]}. \quad (6.19)$$

Коефіцієнт шуму пасивного двополюсника дорівнює одиниці ( $F_n = 1$ ). Пасивний двополюсник може складатися з будь-якої комбінації лінійних елеме-

нтів — резисторів, конденсаторів, індуктивностей. Якщо двополюсник містить нелінійні елементи (діоди, транзистори та ін.) до яких не прикладена зовнішня напруга, такий двополюсник теж є пасивним.

Найчастіше у двополюснику діє кілька видів шумів окрім теплового шуму. Тому коефіцієнт шуму має наступні дві властивості.

1) Його величина, зазвичай, залежить від частоти аналізу:  $F_n = F_n(f)$ .

2) Зазвичай коефіцієнт шуму перевищує одиницю:  $F_n > 1$ . Проте бувають винятки, зумовлені відносно слабким проявом теплового шуму, і натомість інших діючих шумів.

Коефіцієнт шуму іноді виражається в децибелах:

$$F_n [\text{дБ}] = 10 \lg(F_n [\text{відн. од.}]). \quad (6.20)$$

Нижче наведено таблицю перерахунку відносних значень в децибелах.

Таблиця 6.1. Відносні одиниці та децибелах

|           |   |     |   |     |   |     |   |    |        |        |
|-----------|---|-----|---|-----|---|-----|---|----|--------|--------|
| Відн. од. | 1 | 1,5 | 2 | 3   | 4 | 6   | 8 | 10 | $10^2$ | $10^3$ |
| дБ        | 0 | 1,8 | 3 | 4,8 | 6 | 7,8 | 9 | 10 | 20     | 30     |

## 6.5.2 Еквівалентна шумова температура

Маємо той самий двополюсник, що має диференційний опір  $R = R(f)$ , або диференційну провідність  $G = G(f)$ . У цьому випадку еквівалентна шумова температура визначається як:

$$T_n = \frac{\langle v_n^2 \rangle_f}{4kR}, \quad \text{або} \quad T_n = \frac{\langle i_n^2 \rangle_f}{4kG}. \quad (6.21)$$

Ця величина має сенс температури, до якої треба нагріти пасивний двополюсник, що має той самий опір (або провідність), щоб отримати ту ж величину спектра шуму на вибраній частоті аналізу  $f$ .

Таким чином, якщо відома шумова температура, можна обчислити спектр шумової напруги на виводах двополюсника (рис. 6.5):

$$\langle v_n^2 \rangle_f = 4kT_n R \text{ [В}^2/\text{Гц]}, \quad (6.22)$$

або спектр шумового струму короткозамкнутого двополюсника (рис. 6.6):

$$\langle i_n^2 \rangle_f = 4kT_n G \text{ [А}^2/\text{Гц]}. \quad (6.23)$$

Шумова температура пасивного двополюсника завжди дорівнює температурі навколишнього середовища ( $T_n = T$ ).

В двополюснику може діяти кілька видів (крім теплового) джерел шуму. Тому шумова температура має наступні дві властивості.

1) Її величина може залежати від частоти аналізу:  $T_n = T_n(f)$ .

2) Зазвичай шумова температура перевищує температуру навколишнього середовища,  $T_n > T$ , проте можливі винятки.

### 6.5.3 Еквівалентний шумовий опір

У цьому разі шуми на розімкненому виході двополюсника (рис. 6.5) моделюються тепловим шумом пасивного двополюсника, тобто вводиться еквівалентний шумовий опір:

$$R_n = \frac{\langle v_n^2 \rangle_f}{4kT} . \quad (6.24)$$

Таким чином, шуми (на заданій частоті аналізу) моделюються резистором, що має опір  $R_n$  при тій же температурі навколишнього середовища  $T$ .

Якщо відомий шумовий опір, то спектр шумової напруги на виводах двополюсника (рис. 6.5) обчислюється як:

$$\langle v_n^2 \rangle_f = 4kTR_n \text{ [В}^2\text{/Гц]} . \quad (6.25)$$

Шумовий опір пасивного двополюсника завжди дорівнює його диференційному опору,  $R_n = R(f)$ .

З приводу еквівалентного шумового опору, можна зробити ті самі зауваження, що й про коефіцієнт шуму і шумову температуру.

Зазвичай  $R_n = R_n(f)$  і  $R_n > R$ .

Залежність шумового опору від частоти аналізу  $f$  може бути обумовлена дією двох факторів:

- i. наявність у двополюсника інерційних елементів (конденсатори, індуктивності),
- ii. наявність інших (крім теплового) джерел шуму.

### 6.5.4 Еквівалентна шумова провідність

Даний параметр багато в чому подібний до розглянутого вище шумового опору. Різниця лише тому, що розглядається струмовий шум короткозамкнутого двополюсника (рис. 6.6). З урахуванням співвідношення (6.15) еквівалентна шумова провідність запроваджується наступним чином:

$$G_n = \frac{\langle i_n^2 \rangle_f}{4kT} . \quad (6.26)$$

Якщо відома шумова провідність, то спектр шумового струму короткозамкнутого двополюсника:

$$\langle i_n^2 \rangle_f = 4kTG_n \text{ [А}^2\text{/Гц]} . \quad (6.27)$$

Шумова провідність пасивного двополюсника завжди дорівнює його диференційній провідності,  $G_n = G(f)$ .

Необхідно зробити ті ж самі зауваження, які зроблено для шумового опору.

Зазвичай  $G_n = G_n(f)$  і  $G_n > G$ .

Залежність шумової провідності від частоти аналізу  $f$  може бути обумовлена як наявністю у двополюсника реактивних елементів, так і присутністю додаткових (до теплового шуму) джерел шуму.

### 6.5.5 Взаємозв'язок шумових параметрів формули Найквіста

Вище були розглянуті методи представлення шумів, що базуються на формулі Найквіста, представленій співвідношеннями (6.14) та (6.15). Ця унікальна формула дає можливість опису шумів за допомогою наступних чотирьох еквівалентних параметрів:

- i. Коефіцієнт шуму  $F_n$  (безрозмірний),
- ii. Температура шуму  $T_n$  (у градусах Кельвіна),
- iii. Шумовий опір  $R_n$  (в омах),
- iv. Шумова провідність  $G_n$  (у сименсах).

Всі ці параметри є рівноцінними. Їх вибір може диктуватися лише міркуваннями зручності розв'язуваної задачі.

Наприклад, нехай є підсилювач, що має шумовий опір  $R_n = 100$  Ом. За допомогою такого підсилювача можна досліджувати шуми об'єктів, що мають приблизно такий же диференційний опір  $R$ . В іншому випадку (якщо  $R \gg R_n$ ), найімовірніше, досліджувані шуми будуть замасковані тепловим шумом об'єкта, що досліджується.

З іншого боку, припустимо, що приймач радіотелескопа має шумову температуру  $T_n = 1000$  К. Це означає, що для здійснення спостережень з роздільною здатністю 10 К необхідно застосувати спеціальні методи обробки сигналів, що приймаються.

Розглянемо взаємозв'язок між розглянутими еквівалентними параметрами.

Порівнюючи співвідношення (6.18) і (6.22), або (6.19) і (6.23), можна знайти наступний зв'язок між коефіцієнтом шуму, еквівалентною шумовою температурою та абсолютною температурою двополюсника:

$$T_n = F_n T. \quad (6.28a)$$

Порівняння співвідношень (6.18) і (6.25) дозволяє визначити зв'язок між коефіцієнтом шуму, еквівалентним шумовим опором та диференційним опором двополюсника:

$$R_n = F_n R. \quad (6.28б)$$

Аналогічно, співвідношення (6.19) і (6.27) дають зв'язок між коефіцієнтом шуму, еквівалентною шумовою провідністю та диференційною провідністю двополюсника:

$$G_n = F_n G. \quad (6.28в)$$

Окремий інтерес представляє визначення взаємозв'язку між шумовим опором та шумовою провідністю двополюсника.

При цьому слід розуміти, що ці параметри характеризують потужність шуму двополюсника. Отже, вони пов'язані між собою прямою пропорцією,  $R_n \sim G_n$ .

З іншого боку, необхідно враховувати, що шумовий опір характеризує спектр напруги шумів розімкнутого двополюсника, тоді як шумова провідність визначає спектр шумового струму короткозамкнутого двополюсника.

Зв'язок між струмом та напругою при замиканні двополюсника визначається законом Ома, який (у символічному поданні комплексних сигналів) має вигляд:

$$v_n = Z(\omega) \cdot i_n.$$

Отже, спектри шумової напруги (розімкнутого двополюсника) та шумового струму (короткозамкнутого двополюсника) пов'язані співвідношенням:

$$\langle v_n^2 \rangle_f = |Z(\omega)|^2 \cdot \langle i_n^2 \rangle_f.$$

Таким чином, закон Ома, з урахуванням співвідношень (6.25) і (6.27), дає наступний зв'язок між еквівалентним шумовим опором та еквівалентною шумовою провідністю двополюсника:

$$R_n = |Z(\omega)|^2 \cdot G_n. \quad (6.28г)$$

де  $Z(\omega)$  є комплексний імпеданс двополюсника, що розглядається.

Розглянемо тепер можливості формули Шоткі для опису шумів короткозамкнутого двополюсника (рис. 6.6).

### 6.5.6 Еквівалентний шумовий струм (насиченого діода)

Відповідно до формули Шоткі (6.12), спектр недепресованого дробового шуму є

$$\langle i_{др}^2 \rangle_f = 2q_e I_0. \quad (6.29)$$

де  $q_e = 1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл — заряд електрона,  $I_0$  — постійний струм через електровакуумний діод.

Звертаючись до двополюсника з короткозамкненим виходом (рис. 6.6) і спираючись на формулу Шоткі, можна запровадити поняття еквівалентного шумового струму:

$$I_n = \frac{\langle i_n^2 \rangle_f}{2q_e}. \quad (6.30)$$

По суті, це спектр струмового шуму, виражений в амперах. Іншими словами, еквівалентний шумовий струм  $I_n$  є струм, який треба пропустити через електровакуумний діод (працюючий в режимі насичення), щоб отримати ту ж величину недепресованого дробового шуму (на тій же частоті аналізу), що і у короткозамкнутого двополюсника.

Таким чином, знаючи еквівалентний шумовий струм  $I_n$  двополюсника можна знайти спектр його струмового шуму:

$$\langle i_n^2 \rangle_f = 2q_e I_n [A^2/\Gamma\text{ц}] . \quad (6.31)$$

Величина еквівалентного шумового струму може залежати від частоти аналізу,  $I_n = I_n(f)$ , з двох причин:

- i. внаслідок відносно великого часу прольоту  $\tau_{\text{пр}}$  носіїв струму через інжекційний прилад, що входить до складу двополюсника (в порівнянні зі зворотною частотою аналізу  $f^{-1}$ ),
- ii. через наявність інших (крім дробового) джерел шуму.

### 6.5.7 Взаємозв'язок описів по Найквісту та Шоткі

З наведеного вище аналізу можна помітити, що спектр струмового шуму короткозамкнутого двополюсника може бути описаний як мовою формули Найквіста (6.27), так і мовою формули Шоткі (6.31).

Звідси знайдемо зв'язок між еквівалентним шумовим струмом та еквівалентною шумовою провідністю двополюсника:

$$I_n = 2V_T G_n. \quad (6.32)$$

де  $V_T = kT/q_e$  — тепловий потенціал (приблизно 25 мВ при  $T = 298$  К).

Знайдемо, як приклад, еквівалентний шумовий струм ідеального резистора, що має опір  $R = 100$  Ом.

Використовуючи співвідношення (6.32), отримаємо:

$$I_n = 2V_T/R = 0,05 [В]/100 [\text{Ом}] = 5 \cdot 10^{-4} \text{ А} = 0,5 \text{ мА}.$$

Таким чином, короткозамкнутий резистор з опором 100 Ом генерує такий самий струмовий шум, як електровакуумний діод, працюючий в режимі без депресії дробового шуму, через який пропускається струм 0,5 мА.

## 7 Лекція 7. Перетворення випадкових сигналів у лінійних та нелінійних колах

1. Перетворення у лінійних колах. Вступ
2. Розподіл ймовірностей випадкового сигналу на виході лінійного кола
3. Центральна гранична теорема Ляпунова (ЦГТ)
4. Спектрально-кореляційні характеристики випадкового сигналу на виході лінійного кола
5. Диференціювання випадкового сигналу
6. Інтегрування випадкового сигналу
7. Перетворення у нелінійних колах. Вступ
8. Розподіл ймовірностей випадкового сигналу на виході НБП
9. Спектрально-кореляційні характеристики випадкового сигналу на виході НБП

### 7.1 Перетворення у лінійних колах. Вступ

Перетворення випадкових сигналів у лінійних колах — перетворення статистичних характеристик випадкових сигналів при проходженні через частотно-залежні (інерційні) лінійні кола (ЛК). Завдання аналізу полягає у визначенні законів розподілу, їх моментів, енергетичного спектру, кореляційної функції та інших характеристик сигналу  $y(t)$  на виході ЛК за аналогічними характеристиками вхідного сигналу  $x(t)$  та кола.

### 7.2 Розподіл ймовірностей випадкового сигналу на виході лінійного кола

Загального точного методу знаходження закону розподілу на виході частотно-залежного ЛК немає. Відомі наближені рішення цієї задачі [1, 2, 4, 6] ґрунтуються на спеціальних припущеннях про властивості вхідного процесу та кола, до яких насамперед належать:

- i. властивість стійкості гаусівського (нормального) закону розподілу — відгук ЛК на гаусівський вхідний процес також є гаусівським процесом, хоча в загальному випадку з іншими параметрами (моментами);
- ii. властивість нормалізації випадкових сигналів лінійними вузькосмуговими (інерційними) колами — закон розподілу  $f_y(y)$  вихідного процесу  $y(t)$  ЛК, незалежно від закону розподілу  $f_x(x)$  вхідного процесу, тим ближче до гаусівського, чим більш вузькосмуговим (інерційним) є коло, тобто чим сильніша нерівність  $\Delta\omega_x/\Delta\omega = \tau/\tau_k = a \gg 1$ , де  $\Delta\omega_x$  і  $\tau_k$  — ширина енергетичного спектру (ЕС) та інтервал кореляції вхідного сигналу, а  $\Delta\omega = 2\pi\Pi$  та  $\tau$  — смуга пропускання та постійна часу ЛК відповідно.

Значення  $a$ , необхідне для практичної реалізації гаусівського закону розподілу  $f_y(y)$ , залежить від виду закону розподілу  $f_x(x)$ : для розподілу Релею  $a = 2\dots 3$ , для інших законів може бути  $a = 5\dots 6$ .

### 7.3 Центральна гранична теорема Ляпунова (ЦГТ)

Пояснення властивості нормалізації можливе на основі центральної граничної теореми Ляпунова, згідно з якою сума великої кількості незалежних або слабо залежних рівномірно малих доданків має розподіл, що прагне до гаусівського зі зростанням числа доданків, незалежно від їх власних законів розподілу.

Дійсно, описавши вихідний сигнал інтегралом Дюамеля

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)g(t - \tau)d\tau,$$

та замінивши його інтегральною сумою

$$y(t) = \sum_k x(k\Delta\tau)g(t - k\Delta\tau)\Delta\tau, \quad (7.1)$$

бачимо, що при  $\Delta\tau > \tau_k$  процес на виході кола є сумою слабо залежних доданків одного порядку. Число членів суми, реально відмінних від нуля в кожний момент часу, тим більше, чим повільніше згасає імпульсна характеристика  $g(t)$ , тобто чим більш інерційним (вузькосмуговим) є коло.

Якщо неможливо знайти закон розподілу  $f_y(y)$ , то задовольняються знаходженням спектрально-кореляційних характеристик вихідного сигналу, а по них моментів першого і другого порядків, якими іноді можна обійтися при вирішенні ряду прикладних завдань: математичного сподівання (постійної складової сигналу)  $y(t)$ , середнього квадрата (середньої потужності сигналу)  $y^2(t)$  та дисперсії (середньої потужності) змінної складової сигналу  $\bar{\sigma}_y^2 = y^2(t) - [\overline{y(t)}]^2$ .

### 7.4 Спектрально-кореляційні характеристики випадкового сигналу на виході лінійного кола

Спектрально-кореляційні характеристики випадкового сигналу на виході лінійного кола — енергетичний спектр (ЕС) (залежність спектральної густини потужності від частоти)  $G_y(\omega)$  та автокореляційна функція (АКФ)  $R_y(\tau)$  вихідного сигналу  $y(t)$ . Оскільки ці характеристики однозначно пов'язані формулами Вінера-Хінчина, задачу їх відшукування можна вважати вирішеною, якщо знайдено хоча б одну з них. У зв'язку з цим розрізняють спектральний та часовий методи аналізу.

*Спектральний метод.* Енергетичний спектр  $G_y(\omega)$  на виході лінійного кола дорівнює добутку ЕС  $G_x(\omega)$  вхідного сигналу на квадрат модуля функції кола (наприклад, функції передачі напруги):

$$G_y(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{S_{ty}(j\omega)S_{ty}^*(j\omega)}{T} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{S_{tx}(j\omega)F(j\omega)S_{tx}^*(j\omega)F^*(j\omega)}{T} =$$

$$= F^2(\omega) \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{S_{tx}(j\omega)S_{tx}^*(j\omega)}{T} = G_x(\omega)F^2(\omega). \quad (7.2)$$

Для чотириполюсника

$$G_y(\omega) = G_x(\omega)K^2(\omega). \quad (7.3)$$

*Часовий метод.* АКФ вихідного сигналу лінійного кола  $R_y(\tau)$  дорівнює згортці АКФ вхідного сигналу  $R_x(\tau)$  з АКФ імпульсної характеристики кола  $R_g(\tau)$ .

Дійсно, часовим еквівалентом виразу (7.3) є

$$R_y(\tau) = R_x(\tau) * g(\tau) * g(-\tau) = R_x(\tau) * R_g(\tau), \quad (7.4)$$

де

$$g(\tau) * g(-\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)g[-(\tau-t)]dt = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)g(t-\tau)dt = R_g(\tau)$$

— АКФ імпульсної характеристики кола, «\*» — символ операції згортки.

Моменти, що визначаються за  $B_y(\tau)$ , є:

- i. математичне сподівання  $\bar{y} = \sqrt{B_y(\infty)}$ ;
- ii. середній квадрат  $\overline{y^2} = B_y(0)$ ;
- iii. дисперсія  $\sigma_y^2 = \overline{y^2} - (\bar{y})^2 = B_y(0) - B_y(\infty)$ ,

де  $B_y(\tau)$  — функція коваріації вихідного процесу.

Математичне сподівання на виході ЛК можна також визначити в такий спосіб. Як відомо, процес на виході ЛК визначається інтегралом Дюамеля:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)x(t-x)dx = \int_0^t g(t-\tau)x(\tau)d\tau. \quad (7.5)$$

Таким чином, можна записати

$$m_y(t) = \int_0^t g(t-\tau)m_x(\tau)d\tau, \quad (7.6)$$

оскільки лінійні операції інтегрування та знаходження математичного сподівання можна міняти місцями.

Для стаціонарного вхідного процесу  $x(t)$  формула (7.6) набуває вигляду:

$$m_y(t) = m_x \int_0^t g(t-\tau)d\tau = m_x \int_0^t g(x)dx. \quad (7.7)$$

## 7.5 Диференціювання випадкового сигналу

Вхідний випадковий процес  $x(t)$  можна представити як суму  $x(t) = \overset{\circ}{x}(t) + \overline{x(t)}$ , де  $\overset{\circ}{x}(t)$  — центрована складова процесу,  $\overline{x(t)}$  — постійна складова.

Нехай  $\epsilon$  ідеальний диференціатор (виконується на операційному підсилювачі). Тоді

$$y(t) = \frac{d[x(t)]}{dt} = \frac{d \overset{\circ}{x}(t)}{dt} + \frac{d \overline{x(t)}}{dt}. \quad (7.8)$$

Для стаціонарного вхідного процесу  $\overline{x(t)} = \text{const}$ . При цьому  $y(t) = d \overset{\circ}{x}(t) / dt$  — тобто диференціатор центрує випадковий процес.

Оскільки коефіцієнт передачі ідеального диференціатора дорівнює  $K(j\omega) = j\omega K(j\omega) = j\omega$ , а  $K^2(\omega) = \omega^2$ , то енергетичний спектр на його виході на підставі (7.3) дорівнюватиме:

$$G_y(\omega) = \omega^2 G_x(\omega) = -(-j\omega)^2 G_x(\omega). \quad (7.9)$$

Очевидно, що при цьому КФ дорівнюватиме:

$$R_y(\tau) = -\frac{\partial^2 R_x(\tau)}{\partial \tau^2}. \quad (7.10)$$

Математичне сподівання на виході диференціатора:

$$m_{1y} = m_1 \left[ \frac{dx(t)}{dt} \right] = \frac{d}{dt} m_1[x(t)]. \quad (7.11)$$

## 7.6 Інтегрування випадкового сигналу

Ідеальний інтегратор виконується на операційному підсилювачі. При цьому

$$y(t) = \int_0^t x(t) dt = \int_0^t \overset{\circ}{x}(t) dt + \int_0^t \overline{x(t)} dt. \quad (7.12)$$

Якщо вхідний процес стаціонарний, то  $\overline{x(t)} = \text{const}$  і

$$y(t) = t \cdot \text{const} + \int_0^t \overset{\circ}{x}(t) dt,$$

тобто навіть при стаціонарному вхідному сигналі вихідний сигнал буде нестаціонарним.

Коефіцієнт передачі ідеального інтегратора дорівнює  $K(j\omega) = 1/(j\omega)$ , а квадрат його модуля  $K^2(\omega) = 1/\omega^2$ . Таким чином, енергетичний спектр на виході інтегратора визначатиметься виразом

$$G_y(\omega) = \frac{1}{\omega^2} G_x(\omega). \quad (7.13)$$

При цьому, оскільки вихідний процес нестационарний, кореляційна функція на виході дорівнюватиме:

$$R_y(t_1, t_2) = \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} R_x(\theta_1, \theta_2) d\theta_1 d\theta_2. \quad (7.14)$$

## 7.7 Перетворення у нелінійних колах. Вступ

Перетворення випадкових сигналів у нелінійних колах — перетворення статистичних характеристик випадкових сигналів при проходженні через нелінійні або параметричні кола. Завдання аналізу — відшукання статистичних характеристик (закон розподілу (ЗР), енергетичний спектр (ЕС), автокореляційна функція (АКФ), моменти та ін.) сигналу  $y(t)$  на виході нелінійного кола за аналогічними характеристиками вхідного сигналу  $x(t)$  та кола.

Ця задача набагато складніше, ніж для лінійного кола, оскільки крім інерційності, має місце нелінійність. Для спрощення її вирішення намагаються по можливості змоделювати реальне коло поєднанням взаємно розв'язаних (тобто такі, що не впливають один на одного) нелінійного безінерційного перетворювача (НБП) та лінійного фільтра (ЛФ) так само, як у разі детермінованих сигналів.

## 7.8 Розподіл ймовірностей випадкового сигналу на виході НБП

Якщо характеристика НБП  $y(t) = f(x)$ , що зв'язує вихідний  $y(t)$  та вхідний  $x(t)$  сигнали (рис. 7.1а), така, що зворотна їй функція  $x(y) = \varphi(y)$  однозначна (рис 7.1б), тоді одновимірну густину імовірності (ОГІ) вихідного процесу  $f_y(y)$  можна отримати з очевидного співвідношення

$$f_y(y) dy = f_x(x) dx,$$

де  $f_x(x)$  — ОГІ вхідного сигналу:

$$f_y(y) = f_x[x(y)] \left| \frac{dx(y)}{dy} \right|. \quad (7.15)$$

Якщо в області можливих значень характеристика НБП  $y(x)$  має горизонтальну ділянку, наприклад, на інтервалі  $[a, b]$ , де  $y = \text{const} = y_{ab}$ , то вираз (7.15) слід доповнити  $\delta$ -функцією  $\beta \delta(y - y_{ab})$  з ваговим коефіцієнтом  $\beta$ , що дорівнює ймовірності  $p(a < x < b)$  потрапляння  $x(t)$  у цей інтервал.

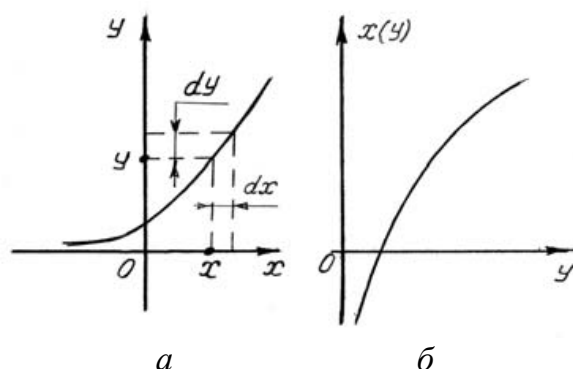


Рис. 7.1. Визначення густини імовірності на виході НБП, якщо його характеристика однозначна

Так, для діода з кусково-лінійною ВАХ  $i = 1(u)SU$  та ОГІ прикладеної напруги  $f_u(u) = \exp(-u^2 / (2\sigma_u^2)) / (\sigma_u^2 \sqrt{2\pi})$  маємо:

$$u(i) = \begin{cases} i / S, & i > 0, \\ -\infty, & i = 0, \\ 0, & i < 0, \end{cases}$$

$$\left| \frac{du(i)}{di} \right| = \begin{cases} 1 / S, & i > 0, \\ \beta \delta(i), & i = 0, \\ 0, & i < 0, \end{cases} \quad (7.16)$$

а ОГІ струму діода

$$f_i(i) = \frac{1(i)}{S\sigma_u \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{i^2}{2S^2\sigma_u^2}\right) + 0,5\delta(i). \quad (7.17)$$

У цьому випадку  $\beta = 0,5$ , оскільки у половині випадків  $u < 0, i = 0$ .

Якщо функція  $\varphi(y)$  двозначна (рис. 7.2), тобто кожному значенню  $y$  відповідає два значення  $x$  (рис. 7.2б), то вираз (7.15) слід застосувати до кожної гілки  $x = x_1(y)$  та  $x = x_2(y)$  кривої:

$$f_y(y) = f_x[x_1(y)] \left| \frac{dx_1(y)}{dy} \right| + f_x[x_2(y)] \left| \frac{dx_2(y)}{dy} \right|. \quad (7.18)$$

У разі багатозначної функції  $x(y) = \varphi(y)$  роблять аналогічно.

Наприклад, для квадратора з характеристикою  $y(x) = ax^2$  та

$$f_x(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}\right),$$

$x(y) = \pm\sqrt{y/a}$  — двозначна функція, будемо мати  $\left| \frac{dx_{1,2}(y)}{dy} \right| = \frac{1}{2\sqrt{ay}}$  для обох гілок, тому відповідно (7.18)

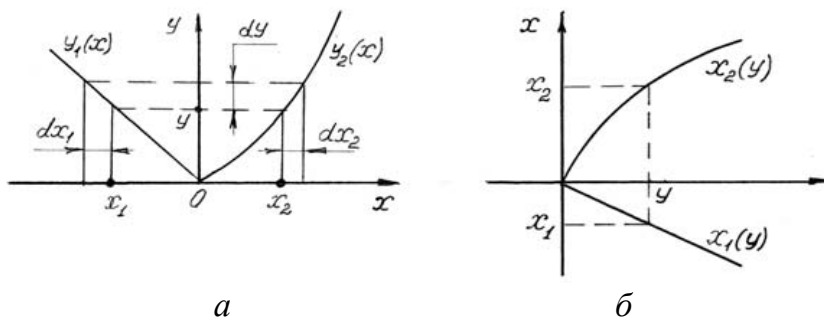


Рис. 7.2. Визначення густини імовірності на виході НБП, якщо його характеристика не однозначна

$$f_y(y) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi a y}} \exp\left(-\frac{y}{2a\sigma_x^2}\right).$$

Якщо цікавитись лише моментами, то  $f_y(y)$  можна не знаходити, оскільки

$$\bar{y} = \int_{-\infty}^{\infty} y f_y(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} y(x) f_x(x) dx, \quad (7.19)$$

$$\overline{y^2} = \int_{-\infty}^{\infty} y^2 f_y(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} y^2(x) f_x(x) dx, \quad (7.20)$$

$$\sigma_y^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (y - \bar{y})^2 f_y(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} [y(x) - \bar{y}]^2 f_x(x) dx = \overline{(y - \bar{y})^2}. \quad (7.21)$$

Характеристична функція вихідного процесу

$$\theta_y(j\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} f_y(y) e^{j\nu y} dy = \int_{-\infty}^{\infty} f_x(x) e^{j\nu y(x)} dx, \quad (7.22)$$

звідки отримуємо інший спосіб визначення ОГІ:

$$f_y(y) = F^{-1}\{\theta_y(j\nu)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \theta_y(j\nu) e^{-j\nu y} d\nu. \quad (7.23)$$

Двовимірною густиною імовірності (ДГІ) сигналу на виході НБП з характеристиками  $y_1 = f_1(x_1, x_2)$ ,  $y_2 = f_2(x_1, x_2)$  і однозначними зворотними ним функціями  $x_1 = \varphi_1(y_1, y_2)$ ,  $x_2 = \varphi_2(y_1, y_2)$  визначається з очевидних співвідношень  $f_2(y_1, y_2) dy_1 dy_2 = f_2(x_1, x_2) dx_1 dx_2$  і має вигляд:

$$f_2(y_1, y_2) = f_2(x_1, x_2) |J| = f_2(x_1, x_2) \begin{vmatrix} \frac{dx_1}{dy_1} & \frac{dx_1}{dy_2} \\ \frac{dx_2}{dy_1} & \frac{dx_2}{dy_2} \end{vmatrix}, \quad (7.24)$$

де  $f_2(x_1, x_2)$  — ДГІ вхідного процесу,  $|J|$  — якобіан перетворення [6, 7].

## 7.9 Спектрально-кореляційні характеристики випадкового сигналу на виході НБП

Спектрально-кореляційні характеристики випадкового сигналу на виході нелінійного безінерційного перетворювача — енергетичний спектр  $G_y(\omega)$  та автокореляційна функція  $R_y(\tau)$  вихідного сигналу НБП.

На відміну від лінійного кола, пряме визначення ЕС на виході нелінійного кола (НК) за відомим ЕС  $G_x(\omega)$  на вході, неможливо, що пояснюється нездатністю до НК принципу суперпозиції, тому єдиний шлях — відшукування АКФ  $R_y(\tau)$  з подальшим переходом до  $G_y(\omega) = F\{R_y(\tau)\}$ . Вибір способу відшукування АКФ на виході НБП залежить від виду нелінійної характеристики, закону розподілу вхідного процесу, і навіть від припущень, можливих у межах безпосередньо поставленої задачі.

### 7.9.1 Прямий метод

Прямий метод — це спосіб відшукування АКФ вихідного сигналу НБП, заснований на класичному визначенні змішаного моменту другого порядку

$$K_y(t_1, t_2) = R_y(t_1, t_2) + (\bar{y})^2$$

двомірного закону розподілу (двовимірної густини імовірності, ДГІ)  $f_2(y_1, y_2, t_1, t_2)$ :

$$K_y(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y_1 y_2 f_2(y_1, y_2, t_1, t_2) dy_1 dy_2. \quad (7.25)$$

Для однозначних нелінійностей  $y_1 = f(x_1)$ ,  $y_2 = f(x_2)$  маємо:

$$K_y(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1) f(x_2) f_2(x_1, x_2, t_1, t_2) dx_1 dx_2, \quad (7.26)$$

де  $f_2(x_1, x_2, t_1, t_2)$  — ДГІ вхідного сигналу.

Для стаціонарних процесів  $K_y(t_1, t_2) = K_y(\tau)$ , де  $\tau = t_2 - t_1$ ,  $f_2(x_1, x_2, t_1, t_2) = f_2(x_1, x_2, \tau) = f_2(x_1, x_2, \tau)$ , отримаємо

$$K_y(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1) f(x_2) f_2(x_1, x_2, \tau) dx_1 dx_2. \quad (7.27)$$

Для ергодичних процесів можливе також усереднення за часом:

$$K_y(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f[x(t)] f[x(t + \tau)] dt. \quad (7.28)$$

Шукана АКФ визначається виразом:

$$R_y(\tau) = K_y(\tau) - (\bar{y})^2,$$

де  $\bar{y} = m_1\{y\} = \langle y \rangle$  — математичне сподівання сигналу  $y(t)$ .

Взяття інтегралів (7.25)–(7.28) часто ускладнене, через що на практиці вдаються до розкладання  $f_2(x_1, x_2, t_1, t_2)$  в ряд за одновимірною функцією розподілу  $f_2(x_1, t_1)$  [1, 2, 4, 6, 7].

### 7.9.2 Метод характеристичних функцій

Метод характеристичних функцій (метод Райса, метод контурних інтегралів) — метод відшукування АКФ на виході НБП (обчислення інтегралів (7.27), (7.28)), заснований на заміні ДГІ двовимірною характеристичною функцією (ХФ), а нелінійних залежностей  $f(x)$  — їх зображеннями по Фур'є та Лапласу.

Так, для стаціонарних вхідних процесів, якщо

$$f_2(x_1, x_2, \tau) \leftrightarrow \theta_2(j\nu_1, j\nu_2, \tau), \text{ а } f(x) \leftrightarrow F(j\nu),$$

то вираз (7.27) зводиться до вигляду [7, 8]:

$$K_y(\tau) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\nu_1)F(j\nu_2)\theta_2(j\nu_1, j\nu_2, \tau)d\nu_1d\nu_2. \quad (7.29)$$

Іноді цей інтеграл обчислюється простіше, ніж прямим методом, хоч і тут є можливість розкласти  $\theta_2(j\nu_1, j\nu_2, \tau)$  в ряд по ортогональним поліномам, що відповідають одновимірній характеристичній функції [1, 2, 4, 6, 7].

### 7.9.3 Метод похідних

Метод похідних (метод Прайса) полягає у пошуку похідної АКФ вихідного процесу за коефіцієнтом кореляції  $r(\tau) = R_x(\tau) / \sigma_x^2$  вхідного процесу з наступним переходом до шуканої АКФ шляхом інтегрування.

Для вхідного стаціонарного гаусівського процесу  $x(t)$  із середнім значенням  $\bar{x}$  та дисперсією  $\sigma^2$  формула Прайса має вигляд:

$$\frac{d^n K_y(\tau)}{dr^n(\tau)} = \frac{\sigma^{2n-2}}{2\pi\sqrt{1-r^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f^{(n)}(x_1)f^{(n)}(x_2) \exp\left[-\frac{x_1^2 + x_2^2 - 2rx_1x_2}{2\sigma^2(1-r^2)}\right] dx_1dx_2, \quad (7.30)$$

де  $x_1 = x(t)$ ,  $x_2 = x(t + \tau)$ ,  $\overset{\circ}{x}_1 = x_1 - \bar{x}$ ,  $\overset{\circ}{x}_2 = x_2 - \bar{x}$ ,  $f^{(n)}(x) = d^n f(x) / dx^n$ , а  $n = 1, 2, 3, \dots$  — порядок похідної  $f^{(n)}(x)$ , при якому вперше з'являються  $\delta$ -функції.

Формула (7.30) найбільш придатна для таких шматково-гладких нелінійних характеристик  $f(x)$ , які  $n$ -кратним диференціюванням зводяться до суми  $\delta$ -функцій, завдяки фільтруючій властивості яких інтеграл (7.30) легко береться.

Подальше відшукування  $K_y(\tau)$  полягає у вирішенні звичайного диференціального рівняння  $n$ -го порядку  $d^n K_y(\tau) / d\tau^n = \Phi[r(\tau)]$ . Постійні інтегрування визначають з початкових умов [7]. У разі коли  $n = 1$ , початкові умови визначаються просто. При  $n = 1$  маємо деяку функцію  $\psi(r)$ :

$$\psi(r) = \frac{dK_y}{dr}.$$

Далі можна записати

$$K_y(\tau) = \int_0^r \psi(r) dr + C,$$

причому  $C = K_y(0)$ . Оскільки при  $\tau \rightarrow \infty$ ,  $r = 0$ , тоді

$$K_y|_{r=0} = K_y(\infty) = m_{1y}^2,$$

а момент  $m_{1y}$  обчислюється за формулою (7.19).

При  $n = 2$  загальне рішення рівняння  $d^2 K_y / dr^2 = \theta(\tau)$  можна записати як

$$K_y(\tau) = \int_0^r N(r) dr + \int_0^r C_1 dr + C_2,$$

де  $C_1$  — постійна, що з'являється після першого інтегрування

$$N(\tau) = \int_0^r \theta(r) dr + C_1.$$

Постійні  $C_1$  та  $C_2$  визначаються з наступних співвідношень:

$$\begin{aligned} K_y|_{r=0} &= K_y(\infty) = m_{1y}^2, \\ K_y|_{r=1} &= K_y(0) = m_{1y}^2 + \sigma_y^2, \end{aligned}$$

причому дисперсія  $\sigma_y^2$  визначається згідно з формулою (7.21).

Наприклад, при дії стаціонарного гаусівського центрованого процесу  $x(t)$  з  $r(\tau) = R(\tau) / \sigma^2$  на вхід ідеального двостороннього обмежувача з характеристикою  $y(x) = y_0 \text{sign } x$  (рис. 7.3а) матимемо  $n = 1$  (оскільки  $df(x) / dx = 2y_0 \delta(x)$ ) і (7.30) набуває вигляду

$$\begin{aligned} \frac{dK_y(\tau)}{dr(\tau)} &= \frac{4y_0^2}{2\pi\sqrt{1-r^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x_1)\delta(x_2) \exp\left[-\frac{x_1^2 + x_2^2 - 2rx_1x_2}{2\sigma^2(1-r^2)}\right] dx_1 dx_2 = \\ &= \frac{2y_0^2}{2\pi\sqrt{1-r^2}}. \end{aligned}$$

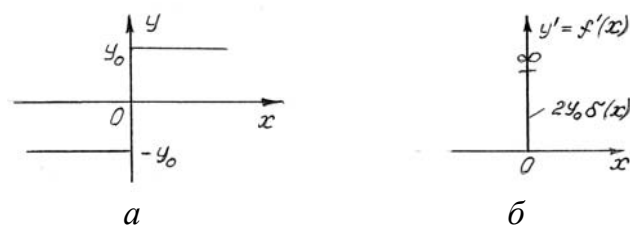


Рис. 7.3. Визначення густини імовірності на виході НБП методом похідних

Інтегруючи знаходимо

$$K_y(\tau) = \frac{2y_0^2}{\pi} \int_0^{\tau} \frac{dr}{\sqrt{1-r^2}} = \frac{2y_0^2}{\pi} \arcsin r(\tau) + C.$$

Оскільки  $C = (\bar{y})^2 = 0$ , то  $R_y(\tau) = \frac{2y_0^2}{\pi} \arcsin r(\tau)$ , а дисперсія  $\sigma_y^2 = y_0^2$ .

## 8 Лекція 8. Оптимальна узгоджена фільтрація сигналу на фоні завад

1. Оптимальний лінійний фільтр по максимуму відношення сигнал/шум
2. Сигнал на виході узгодженого фільтра
3. Кореляційна функція шуму
4. Імпульсна характеристика узгодженого фільтра
5. Оптимальний фільтр для прямокутного відеоімпульсу
6. Оптимальний фільтр для прямокутного радіоімпульсу
7. Оптимальний фільтр для імпульсних сигналів з лінійною частотною модуляцією
8. Оптимальний фільтр для послідовності імпульсних сигналів
9. Узгоджена фільтрація заданого сигналу при небілому шумі
10. Оптимальний лінійний фільтр по мінімуму середньоквадратичної помилки

*Оптимальна фільтрація* — це фільтрація відомих сигналів на фоні заданих завад найкращим чином. Кількісний опис якісного поняття «найкращим чином» називають критерієм оптимальності. Вибір останнього безпосередньо пов'язаний з характером задач, розв'язуваних приймальним пристроєм. Виділяють задачі виявлення, розрізнення, розділення сигналів, оцінки параметрів, відтворення початкової форми та екстраполяції сигналу [1, 9].

Для кількісної характеристики якості фільтрації використовують різні критерії. Найчастіше використовують критерії максимального відношення С/Ш, мінімуму середнього квадрата помилки та критерій максимуму апостеріорної ймовірності.

### 8.1 Оптимальний лінійний фільтр по максимуму відношення сигнал/шум

*Оптимальний лінійний фільтр* по максимуму відношення сигнал/шум — це фільтр, на виході якого отримують максимально можливе відношення пікового значення сигналу до шуму під час прийому повністю відомого сигналу на фоні білого гаусівського шуму.

Завдання оптимальної лінійної фільтрації є характерним для радіолокації. На вхід лінійного фільтра з комплексною частотною характеристикою  $K_{узг}(j\omega)$  надходить адитивна суміш сигналу та завади  $x(t) = s(t) + n(t)$ , де  $n(t)$  — стаціонарний випадковий процес із спектральною густиною  $G(\omega) = G_0$ ,  $-\infty < \omega < \infty$ ;  $s(t)$  — статистично незалежний від  $n(t)$  корисний сигнал, спектр якого  $S(j\omega)$  наперед відомий.

Оптимальний лінійний фільтр повинен максимізувати відношення пікового значення сигналу на виході в певний момент часу  $t = t_0$  до середньоквадратичного значення вихідного шуму:

$$\rho = |S_{вих}(t_0)|/\sigma_{вих} = \max.$$

Для пошуку оптимальної передавальної функції, що максимізує відношення сигнал/шум на виході фільтра, складемо вираз для сигналу і шуму спочатку окремо, а потім у вигляді їх відношення.

Пікове значення сигналу визначимо виразом

$$S_{\text{вих макс}}(t) = S_{\text{вих}}(t_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega)K(j\omega)e^{j\omega t_0} d\omega. \quad (8.1)$$

Середньоквадратичне значення шуму на виході фільтра

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega)K^2(\omega)d\omega} = \sqrt{\frac{G_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K^2(\omega)d\omega}. \quad (8.2)$$

Отже, відношення пікового значення сигналу до середньоквадратичного значення шуму на виході фільтра

$$\rho = \frac{S_{\text{вих}}(t_0)}{\sigma} = \frac{\left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega)K(j\omega)e^{j\omega t_0} d\omega \right|}{\left( \frac{G_0}{2\pi} \right)^{1/2} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} K^2(\omega)d\omega \right]^{1/2}}. \quad (8.3)$$

Скористаємося відомою нерівністю Шварца–Буняковського

$$\left| \int_a^b F_1(jx)F_2(jx)dx \right|^2 \leq \int_a^b |F_1(jx)|^2 dx \int_a^b |F_2(jx)|^2 dx, \quad (8.4)$$

де  $F_1(jx)$  і  $F_2(jx)$  — в загальному випадку комплексні функції.

Ця нерівність обертається в рівність тільки при виконанні умови

$$F_2(jx) = CF_1^*(jx), \quad (8.5)$$

тобто коли  $F_2(jx)$  пропорційна функції комплексно-сполученій  $F_1(jx)$ , де  $C$  — довільний постійний коефіцієнт.

Використовуючи позначення виразу (8.1) і прирівнюючи  $S(j\omega) = F_1(j\omega)$  і  $K(j\omega)e^{j\omega t_0} = F_2(j\omega)$ , можемо переписати вираз (8.4) у формі

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega)K(j\omega)e^{j\omega t_0} d\omega \right|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S^2(\omega)d\omega \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K^2(\omega)d\omega. \quad (8.6)$$

Отже, величина  $\rho$ , що визначається виразом (8.3), відповідає умові

$$\rho = \frac{S_{\text{вих}}(t_0)}{\sigma} \leq \frac{\left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S^2(\omega) d\omega \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K^2(\omega) d\omega \right]^{1/2}}{\left[ \frac{G_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K^2(\omega) d\omega \right]^{1/2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{G_0}} \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S^2(\omega) d\omega \right]^{1/2} = \sqrt{\frac{\mathcal{E}_s}{G_0}},$$

оскільки вираз у квадратних дужках є не що інше, як повна енергія вхідного сигналу  $\mathcal{E}_s$ .

Нарешті, з виразу (8.5) випливає, що ця нерівність стає рівністю при виконанні умови:

$$K(j\omega)e^{j\omega t_0} = CS^*(j\omega).$$

Звідки

$$K(j\omega) = CS^*(j\omega)e^{-j\omega t_0}. \quad (8.8)$$

Оскільки передатна функція фільтра повністю визначається спектром вхідного сигналу, його називають узгодженим.

З (8.8) випливає дві умови фазової та амплітудної характеристик узгодженого фільтра:

$$\begin{aligned} \varphi(\omega) &= -\varphi_s(\omega) - \omega t_0, \\ K(\omega) &= CS(\omega). \end{aligned} \quad (8.9)$$

Ці співвідношення мають наступний фізичний зміст. Перше означає компенсацію початкових фаз у спектрі сигналу. Після проходження сигналу через фільтр з фазовою характеристикою  $\varphi(\omega)$ , додавання всіх компонентів спектра, скоригованих по фазі, створює пік вихідного сигналу в момент часу  $t = t_0$ . Друге співвідношення встановлює, що АЧХ модуля передавальної функції  $K(\omega)$  за своєю формою має збігатися з характеристикою модуля спектральної густини сигналу  $S(\omega)$ . Це максимізує  $\rho$ .

## 8.2 Сигнал на виході узгодженого фільтра

Сигнал на виході узгодженого фільтра має вигляд:

$$S_{\text{вих}}(t) = CB_s(t - t_0), \quad (8.10)$$

тобто з точністю до константи  $C$  відтворює в часі АКФ узгодженого з ним сигналу, причому так, що максимум досягається на момент  $t = t_0$ . Отже, при  $t = t_0$  маємо  $S_{\text{вих}}(t_0) = C\mathcal{E}_s$ , оскільки АКФ при цьому дорівнює енергії  $\mathcal{E}_s$  сигналу.

## 8.3 Кореляційна функція шуму

Кореляційна функція (КФ) шуму на виході узгодженого фільтра:

$$B_{\text{вих}}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_{\text{вих}}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_0 C^2 S^2(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega = C^2 G_0 B_s(\tau). \quad (8.11)$$

Середньоквадратичне значення шуму

$$\sigma = \sqrt{B_{\text{вих}}(0)} = C \sqrt{G_0 \mathcal{E}_s}.$$

Таким чином, відношення С/Ш на виході  $\rho = \sqrt{\mathcal{E}_s / G_0}$  не залежить від форми сигналу, а визначається його енергією та енергетичним спектром шуму  $G_0$ . З цього випливає, що при заданій енергії та ширині спектра, сигналу можна надавати різну форму, і вибирати ту, яка вигідна при вирішенні конкретної задачі.

#### 8.4 Імпульсна характеристика узгодженого фільтра

Імпульсна характеристика (ІХ) узгодженого фільтра має вигляд:

$$g_{\text{узг}}(t) = F^{-1}\{K(j\omega)\} = CS(t_0 - t), \quad (8.12)$$

тобто вона дзеркально симетрична сигналу з віссю симетрії, що проходить через точку  $t_0/2$  осі абсцис. Оскільки ІХ фізичного кола не може починатися при  $t < 0$  (відгук фільтра не може випереджати вплив), очевидно, що затримка  $t_0$  не може бути меншою за тривалість сигналу  $T_c$ . Як правило,  $t_0 = T_c$ .

#### 8.5 Оптимальний фільтр для прямокутного відеоімпульсу

Оптимальний фільтр для прямокутного відеоімпульсу, тобто сигналу  $S_{\text{вих}}(t) = A[1(t) - 1(t - T_c)]$ , де  $A$  і  $T_c$  відповідно амплітуда і тривалість імпульсу, має передатну функцію

$$K(j\omega) = \frac{CA}{j\omega} [1 - \exp(-j\omega T_c)], \quad (8.13)$$

де  $CA$  — коефіцієнт підсилення ідеального підсилювача. Тут затримка дорівнює тривалості імпульсу.

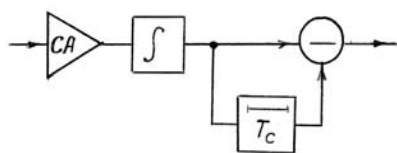


Рис. 8.1.

Структурна схема оптимального фільтру для прямокутного відеоімпульсу

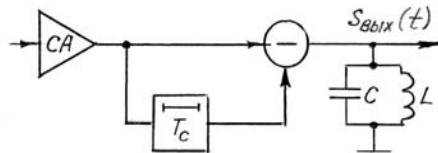


Рис. 8.2.

Структурна схема оптимального фільтру для прямокутного радіоімпульсу

Структурна схема цього фільтру показана на рис. 8.1. Згідно (8.13), до складу схеми входять підсилювач, ідеальний інтегратор, ідеальна недисперсійна ЛЗ, та схема віднімання.

## 8.6 Оптимальний фільтр для прямокутного радіоімпульсу

Оптимальний фільтр для прямокутного радіоімпульсу має передатну функцію

$$K(j\omega) = \frac{CA}{j(\omega - \omega_0)} [1 - \exp(-j(\omega - \omega_0)T_c)]. \quad (8.14)$$

Структурна схема цього фільтра зображено на рис. 8.2. Відмінність від попередньої схеми полягає в заміні ідеального інтегратора високодобротним  $LC$  контуром, який можна розглядати як інтегратор для огинаючої на несучій частоті  $\omega_0$ .

## 8.7 Оптимальний фільтр для імпульсних сигналів з лінійною частотною модуляцією

Оптимальний фільтр для імпульсних сигналів з лінійною частотною модуляцією (рис. 8.3) може бути виконаний у вигляді поєднання двох лінійних чотириполосників: смугового фільтра з АЧХ, близькою до прямокутної, та дисперсійної лінії затримки (ДЛЗ). За умови, що огинаюча спектра сигналу має прямокутну форму, а фазова характеристика — форму квадратичної параболи, АЧХ і ФЧХ фільтра визначаються як:

$$\left. \begin{aligned} K(\omega) &= CAT_c / (2\sqrt{m}) = \text{const}, \\ \varphi(\omega) &= (\pi / 4)m(\omega - \omega_0)^2 / \Delta\omega_m^2 - \omega_0 T_c / 2, \\ \omega_0 - \Delta\omega_m &< \omega < \omega_0 + \Delta\omega_m, \end{aligned} \right\} \quad (8.15)$$

де  $m = 2\Delta f T_c = \Delta\omega_m T_c / \pi$ ;  $A$  і  $T_c$  — амплітуда та тривалість імпульсу,  $\Delta\omega_m$  — девіація частоти.

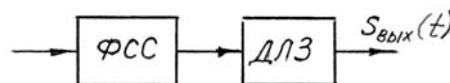


Рис. 8.3. Структурна схема оптимального фільтра для імпульсних сигналів з ЛЧМ

Сигнал на виході оптимального фільтра має вигляд (рис. 8.4):

$$\begin{aligned} u_{\text{вих}}(t) &= U_{\text{вих}}(t) \cos[\omega_0(t - T_c)] = \\ &= \sqrt{m}A \frac{\sin[\Delta\omega_m(t - T_c)]}{\Delta\omega_m(t - T_c)} \cos[\omega_0(t - T_c)]. \end{aligned} \quad (8.6)$$

Найбільша амплітуда вихідного сигналу в момент часу  $t = T_c$  у  $\sqrt{m}$  разів більше, ніж на вході, а тривалість вихідного імпульсу на рівні 0,637 від максимального значення становить  $T_{c \text{ вих}} = 1/(2\Delta f_m)$ . Відношення  $T_c/T_{c \text{ вих}} = 2\Delta f_m T_c = m$ , що збігається за значенням з параметром модуляції  $m$ , називають коефіцієнтом стиснення ЧМ імпульсів в оптимальному фільтрі. Компенсація фаз спе-

ктральних складових сигналу, яка є сутністю узгодженої фільтрації, призводить до скорочення тривалості імпульсу в  $m$  разів при одночасному зростанні амплітуди сигналу в  $\sqrt{m}$  разів. Ця обставина є дуже цінною практики, оскільки дає можливість подовжувати імпульс, що генерується передавачем, для збільшення енергії сигналу без втрати роздільної здатності, що визначається тривалістю імпульсу на виході узгодженого фільтра.

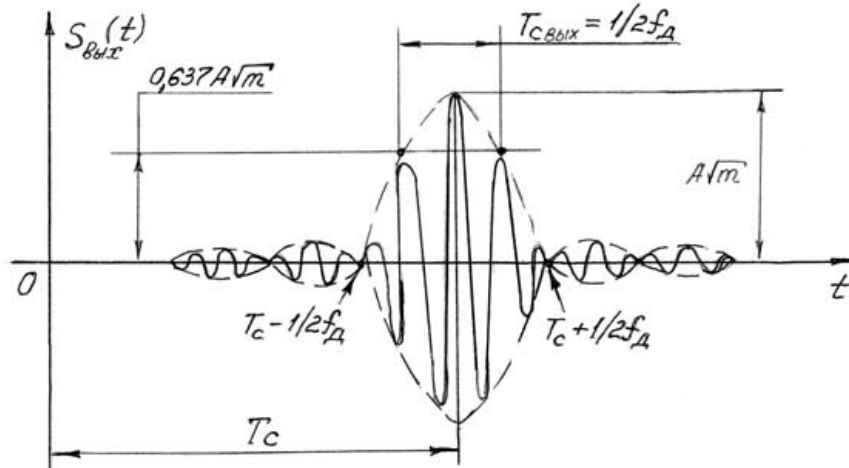


Рис. 8.4. Сигнал на виході оптимального фільтра для імпульсних сигналів з ЛЧМ

## 8.8 Оптимальний фільтр для послідовності імпульсних сигналів

Оптимальний фільтр для послідовності імпульсних сигналів (пачка імпульсів з однаковою тривалістю  $T_c$  та різними інтервалами  $T_n$  між сусідніми імпульсами, рис. 8.5а) повинен мати передатну функцію

$$K(j\omega) = K_1(j\omega) \left[ 1 + e^{-j\omega(T_{n-1}-T_{n-2})} + e^{-j\omega(T_{n-1}-T_{n-3})} \dots + e^{-j\omega(T_{n-1}-T_1)} + e^{-j\omega T_{n-1}} \right]. \quad (8.7)$$

У цьому виразі  $K_1(j\omega) = CS_1^*(j\omega)e^{-j\omega T_c}$  — коефіцієнт передачі фільтра, узгодженого з одиночним імпульсом.

Структурну схему узгодженого фільтра зображено на рис. 8.5б. Такий фільтр повинен мати коло з передатною функцією  $K_1(j\omega)$ , що забезпечує оптимальну обробку окремих імпульсів, ЛЗ з  $n$  відводами і суматор. Відводи розміщують так, щоб відповідні затримки наростали в порядку, протилежному розміщенню імпульсів в пачці на вході фільтра.

Побудова узгодженого фільтра спрощується, якщо вхідний сигнал є послідовністю рівновіддалених однакових імпульсів, тобто коли  $T_1 = T$ ,  $T_2 = 2T$ ,  $T_3 = 3T$ ,  $T_{n-1} = (n-1)T$ . В цьому випадку

$$K(j\omega) = K_1(j\omega) \left[ 1 + e^{-j\omega T} + e^{-j\omega 2T} \dots + e^{-j\omega(n-1)T} \right] = K_1(j\omega)K_2(j\omega).$$

При досить великому  $n$  вираз у фігурних дужках можна згорнути за формулою геометричної прогресії  $K_2(j\omega) = 1/[1 - \exp(-j\omega T)]$ .

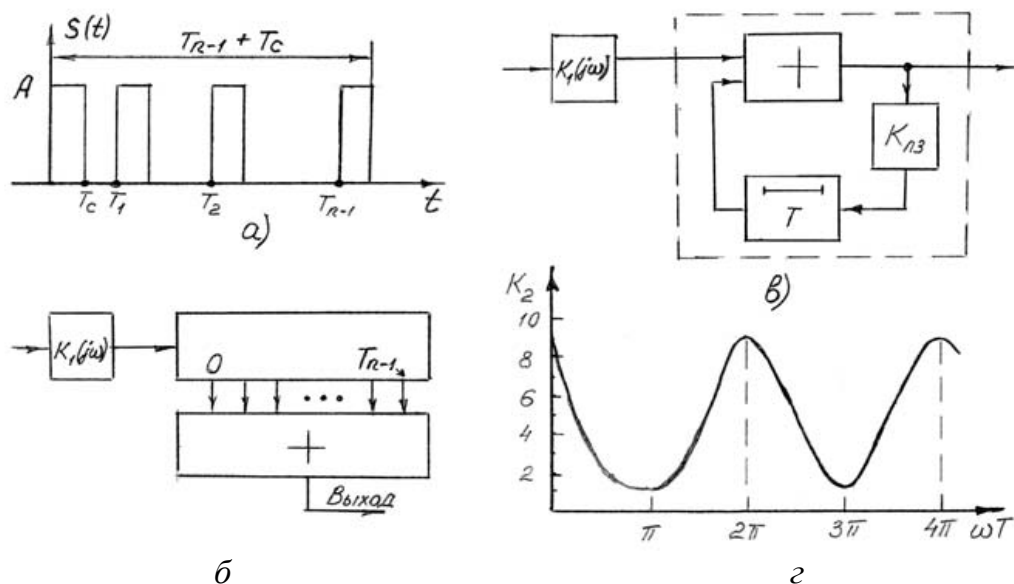


Рис. 8.5. Оптимальний фільтр для послідовності імпульсних сигналів

Структурна схема фільтра має вигляд каскадного з'єднання двох чотириполюсників: одного — з передатною функцією  $K_1(j\omega)$ , узгодженого з одиночним імпульсом, та іншого — у вигляді кола зі зворотним зв'язком, що має тільки одну ЛЗ  $T$  (рис. 8.5в). Передатна функція такого кола (на рис. 8.5в обведено штриховою лінією) визначається виразом:

$$K_2(j\omega) = \frac{1}{1 - K_{ЛЗ} \exp(-j\omega T)} = 1 + K_{ЛЗ} \exp(-j\omega T) + K_{ЛЗ}^2 \exp(-j\omega 2T) + \dots \quad (8.18)$$

Символом  $K_{ЛЗ}$  позначений безінерційний чотириполюсник з урахуванням втрат у ЛЗ (десятки децибел), що містить підсилювач, що компенсує ці втрати. Для стійкості до самозбудження,  $K_{ЛЗ}$  має бути менше одиниці. Сама ЛЗ при цьому може розглядатися як ідеальна, з передатною функцією  $\exp(-j\omega T)$ . На частотах, що відповідають умові  $\omega T = (2k + 1)\pi$ ,  $k = 0, 1, \dots$ , зворотний зв'язок (ЗЗ) відємний, і  $K_2(\omega) = 1/(1 + K_{ЛЗ})$ , а на частотах  $\omega = 2k\pi$ , ЗЗ позитивний та  $K_2(\omega) = 1/(1 - K_{ЛЗ})$ . Фільтри з такою характеристикою (рис. 8.5г) називають гребінчастими.

Зазначимо, що побудова гребінчастого фільтра з використанням набору резонансних фільтрів, які мають бути досить точно налаштовані на частоти, кратні частоті повторювача, є складною задачею. Коло, обведено штриховою лінією на рис. 8.5в, називають рециркулятором.

## 8.9 Узгоджена фільтрація заданого сигналу при небілому шумі

Узгоджена фільтрація заданого сигналу при небілому шумі зводиться до оптимальної фільтрації на фоні білого шуму, приведенням заданого шуму до білого. Структурна схема показана на рис. 8.6, пояснює суть цього способу. На цій схемі  $K(j\omega)$  позначає шукану передатну функцію синтезованого фільтра, а  $K_1(j\omega)$  і  $1/K_1(j\omega)$  є передатними функціями допоміжних, умовних чотириполюсників, введення яких ніяк не впливає на роботу пристрою, оскільки їх загальна передатна функція дорівнює одиниці.

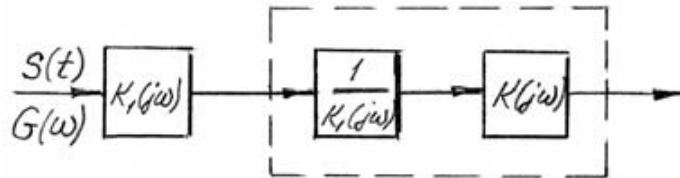


Рис. 8.6. Принцип «відбілення» шуму

На виході першого чотиріполюсника, модуль передавальної функції якого можна задати у вигляді  $K_1(j\omega) = \sqrt{G_0 / G(\omega)}$ , буде діяти шум з рівномірним енергетичним спектром  $G_1(\omega) = G_0 = \text{const}$ , тобто білий шум. Оскільки на вході двох наступних чотиріполюсників (обведені штриховою лінією) шум є білим, ця частина схеми повинна мати передатну функцію

$$\frac{K(j\omega)}{K_1(j\omega)} = CS_1^*(j\omega) \exp(-j\omega t_0),$$

де  $S_1(j\omega) = S(j\omega)K_1(j\omega)$ . Очевидно, що передатною функцією оптимального фільтра при небілому шумі буде:

$$K(j\omega) = \frac{CG_0}{G(\omega)} S^*(j\omega) \exp(-j\omega t_0). \quad (8.19)$$

Такий фільтр має у своєму складі «відбілювач» шуму і фільтр, який є оптимальним для заданого сигналу при білому шумі.

### 8.10 Оптимальний лінійний фільтр по мінімуму середньоквадратичної помилки

Оптимальний лінійний фільтр по мінімуму середньоквадратичної помилки виділяє з адитивної суміші сигналу і шуму  $x(t) = s(t) + n(t)$  корисний сигнал  $s(t)$  з мінімальною середньоквадратичною помилкою. Задача та сигнал є стаціонарними гаусівськими випадковими процесами з відомими кореляційними функціями. Оптимальний фільтр мінімізує величину

$$\varepsilon^2 = M\{[s^*(t) - s(t + \Delta)]^2\},$$

де  $\Delta$  — часовий зсув.

При  $\Delta > 0$  оцінка  $s^*(t)$  на виході фільтра повинна передбачати (прогнозувати) значення вихідного сигналу  $s(t)$  на час  $\Delta$ ; при  $\Delta = 0$  задача зводиться до виділення (згладжування) сигналу  $s(t)$  із коливання  $x(t)$ .

Для фізично реалізуємого фільтра з ІХ  $g(t)$ ,  $t \geq 0$ , вираз середньоквадратичної помилки фільтрації має вигляд:

$$\varepsilon^2 = M\left\{\left[\int_0^\infty g(\tau)x(t-\tau)d\tau - s(t+\Delta)\right]^2\right\}. \quad (8.20)$$

При цьому ІХ оптимального фільтра  $g(t)$ , що мінімізує середньоквадратичну помилку, має задовольняти інтегральне рівняння Вінера–Хопфа [8]

$$\int_0^{\infty} g(\nu) B_x(\tau - \nu) d\nu = B_{sx}(\tau + \Delta), \quad \tau \geq 0, \quad (8.21)$$

де  $B_x(\tau)$  — КФ процесу  $x(t)$ ,  $B_{sx}(\tau)$  — взаємно кореляційна функція процесів  $s(t)$  і  $x(t)$ .

Рішення цього рівняння в загальному випадку зустрічає серйозні труднощі, зумовлені переважно вимогою фізичної реалізованості оптимального фільтра [8]. Для окремого випадку згладжування ( $\Delta = 0$ ) адитивної суміші взаємно незалежних стаціонарного процесу  $s(t)$  і білого шуму  $n(t)$  з нульовим математичним очікуванням  $m_{1n} = 0$ , передатна функція оптимального фільтра має вигляд:

$$K(j\omega) = 1 - \frac{G_0}{[2G_s(\omega) + G_0]_+}, \quad (8.22)$$

де  $G_0$  — енергетичний спектр білого шуму,  $G_s(\omega)$  — енергетичний спектр сигналу. Індекс «+» тут означає, що якщо вираз у квадратних дужках розкласти на прості дроби, то слід залишити тільки ті з них, які відповідають полюсам, розташованим у верхній півплощині. Усі прості дроби функції  $F(\omega) = G_s(\omega) + G_0/2$ , що відповідають полюсам у нижній напівплощині, а також ціла частина  $F(\omega)$  мають бути відкинуті.

Якщо не накладати на оптимальний фільтр умови фізичної реалізованості, то для окремого випадку статистично незалежних сигналу та шуму комплексна частотна характеристика оптимального фільтра матиме вигляд:

$$K(j\omega) = \frac{G_s(\omega)}{G_s(\omega) + G_{ш}(\omega)}, \quad (8.23)$$

де  $G_{ш}(\omega)$  — енергетичний діапазон шуму.

Хоча цей вираз відповідає оптимальному фільтру, що фізично не реалізується, воно корисне для порівняння, оскільки ніякий фізично реалізований фільтр не може дати меншої середньоквадратичної помилки, ніж фільтр, який не реалізується. Характеристики та схеми оптимальних фільтрів, які мінімізують середньоквадратичну помилку, для деяких типів сигналів наведені в [10].

## Література

1. Васильєв В.М. *Теорія ймовірностей в радіотехніці: підручник* / В. М. Васильєв, С. Я. Жук. — Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, Вид-во «Політехніка», 2022. — 368 с.
2. Бабак В.П. *Теорія ймовірностей, випадкові процеси та математична статистика: підруч.* / В.П. Бабак, Б.Г. Марченко, М.Є. Фриз. — К.: Техніка, 2004. — 288 с.
3. Гоноровский И.С. *Радиотехнические цепи и сигналы* / И.С. Гоноровский. — М. : Сов. радио, 1986.— 512 с.
4. Баскаков С.И. *Радиотехнические цепи и сигналы* / С.И. Баскаков.— М. : Высшая школа, 1983.— 536 с.
5. Зиновьев А.Л. *Введение в теорию сигналов и цепей* / А.Л. Зиновьев, Л.И. Филиппов. — М. : Высшая школа, 1975.— 264 с.
6. Васильев Д. В. *Радиотехнические цепи и сигналы* / Д. В. Васильев и др. ; под ред. К.А. Самойло. — М. : Радио и связь, 1982. — 526 с.
7. Филипский Ю.К. *Случайные сигналы в радиотехнике* / Ю.К. Филипский. — К. : Вища школа, 1986.— 126 с.
8. Жильцов О.Б. *Теорія ймовірностей та математична статистика у прикладах і задачах: навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл.* / О.Б. Жильцов; за ред. Г.О. Михаліна. — К. : Київ. ун-т ім. Б. Грінченка, 2015. — 336 с.
9. Заездный А.М. *Основы расчетов по статистической радиотехнике* / А.М. Заездный. — М. : Связь, 1969.— 447 с.
10. Горяинов В.Т. *Статистическая радиотехника: Примеры и задачи* / В.Т. Горяинов, А.Г. Журавлев, В.И. Тихонов ; под ред. В.И. Тихонова. — М. : Сов. радио, 1980. — 544 с.
11. Тихонов В.И. *Статистический анализ и синтез радиотехнических устройств и систем* / В.И. Тихонов, В.Н. Харисов. — М. : Радио и связь, 1991. — 608 с.
12. Ван Трис Г. *Теория обнаружения, оценок и модуляции* : в 2 т. Т. 1 / Г. Ван Трис ; под ред. В. И. Тихонова. — М. : Сов. радио, 1972. — 744 с.

## Зміст

|     |  |    |
|-----|--|----|
| 1   | Лекція 1. Сигнали, завади, і випадкова подія.....                  | 3  |
| 1.1 | PCO .....  | 3  |
| 1.2 | Сигнали і завади. Їх класифікація .....                            | 3  |
| 1.3 | Випадкова подія .....  | 6  |
| 1.4 | Термінологія .....   | 6  |
| 1.5 | Теореми імовірності.....   | 6  |
| 1.6 | Випадкова величина.....  | 9  |
| 1.7 | Інтегральна функція розподілу.....                                 | 9  |
| 1.8 | Густина імовірності .....  | 9  |
| 1.9 | Моменти, математичне сподівання та дисперсія.....                  | 10 |
| 2   | Лекція 2. Випадковий процес і його характеристики.....             | 11 |
| 2.1 | Випадковий процес .....  | 11 |
| 2.2 | Функція розподілу випадкового процесу .....                        | 12 |
| 2.3 | Густина імовірності випадкового процесу .....                      | 13 |
| 2.4 | Умовні закони розподілу.....                                       | 13 |
| 2.5 | Головні числові характеристики випадкового процесу .....           | 14 |
| 2.6 | Інші числові характеристики випадкового процесу.....               | 15 |
| 2.7 | Характеристична функція та її властивості.....                     | 16 |
| 2.8 | Імовірнісні характеристики випадкових процесів.....                | 19 |
| 3   | Лекція 3. Стаціонарність, ергодичність, кореляція.....             | 21 |
| 3.1 | Стаціонарний випадковий процес .....                               | 21 |
| 3.2 | Ергодичний випадковий процес .....                                 | 22 |
| 3.3 | Оцінка характеристик випадкового процесу.....                      | 26 |
| 3.4 | Фізичний зміст моментів ергодичного випадкового процесу ....       | 26 |
| 3.5 | Кореляція (детермінований сигнал).....                             | 28 |
| 3.6 | Автокореляційна функція.....                                       | 28 |
| 3.7 | Взаємно-кореляційна функція .....                                  | 30 |
| 3.8 | Взаємний енергетичний спектр сигналів.....                         | 31 |
| 4   | Лекція 4. Кореляційний і спектральний аналіз випадкових сигналів.. | 33 |
| 4.1 | Коварійна та кореляційна функції.....                              | 33 |
| 4.2 | Коефіцієнт та матриця кореляції .....                              | 34 |
| 4.3 | Інтервал кореляції .....   | 35 |

|      |   |    |
|------|---|----|
| 4.4  | ВКФ випадкових процесів.....  | 36 |
| 4.5  | Кореляційний приймач .....  | 36 |
| 4.6  | Когерентний приймач .....   | 37 |
| 4.7  | Енергетичний спектр .....   | 38 |
| 4.8  | Ефективна ширина спектра.....   | 39 |
| 4.9  | Формули Вінера-Хінчина .....  | 40 |
| 4.10 | Білий шум.....  | 40 |
| 4.11 | Взаємні енергетичні спектри стаціонарних ергодичних випадкових процесів .....                     | 41 |
| 5    | Лекція 5. Експериментальне визначення статистичних характеристик та деякі випадкові процеси ..... | 43 |
| 5.1  | Вимірювання математичного сподівання.....   | 43 |
| 5.2  | Вимірювання другого початкового моменту та дисперсії.....   | 43 |
| 5.3  | Вимірювання АКФ, функції коваріації та ВКФ.....   | 44 |
| 5.4  | Вимірювання енергетичного спектру ЕС .....  | 45 |
| 5.5  | Вимірювання функції розподілу $F$ випадкового процесу .....                                       | 45 |
| 5.6  | Вимірювання функції густини імовірності $f$ .....   | 46 |
| 5.7  | Гармонійне коливання з випадковою амплітудою (приклад) ....                                       | 47 |
| 5.8  | Гармонійне коливання з випадковою фазою (приклад).....  | 48 |
| 5.9  | Нормальний (гаусівський) випадковий процес.....   | 50 |
| 6    | Лекція 6. Шуми як випадкові процеси та їх врахування при розробці пристроїв .....                 | 54 |
| 6.1  | Класифікація та опис шумів.....   | 54 |
| 6.2  | Теплові шуми.....   | 55 |
| 6.3  | Дробовий шум електронних та напівпровідникових приладів ..  | 57 |
| 6.4  | Фліккер-шум або ефект мерехтіння .....  | 58 |
| 6.5  | Методи еквівалентного представлення шумів.....  | 59 |
| 7    | Лекція 7. Перетворення випадкових сигналів у лінійних та нелінійних колах .....                   | 66 |
| 7.1  | Перетворення у лінійних колах. Вступ.....   | 66 |
| 7.2  | Розподіл ймовірностей випадкового сигналу на виході лінійного кола .....                          | 66 |
| 7.3  | Центральна гранична теорема Ляпунова (ЦГТ).....   | 67 |
| 7.4  | Спектрально-кореляційні характеристики випадкового сигналу на виході лінійного кола .....         | 67 |

|      |  |    |
|------|--|----|
| 7.5  | Диференціювання випадкового сигналу.....   | 69 |
| 7.6  | Інтегрування випадкового сигналу .....   | 69 |
| 7.7  | Перетворення у нелінійних колах. Вступ.....                                      | 70 |
| 7.8  | Розподіл ймовірностей випадкового сигналу на виході НБП....                      | 70 |
| 7.9  | Спектрально-кореляційні характеристики випадкового сигналу на виході НБП.....    | 73 |
| 8    | Лекція 8. Оптимальна узгоджена фільтрація сигналу на фоні завад                  | 77 |
| 8.1  | Оптимальний лінійний фільтр по максимуму відношення сигнал/шум.....              | 77 |
| 8.2  | Сигнал на виході узгодженого фільтра.....  | 79 |
| 8.3  | Кореляційна функція шуму.....  | 79 |
| 8.4  | Імпульсна характеристика узгодженого фільтра.....                                | 80 |
| 8.5  | Оптимальний фільтр для прямокутного відеоімпульсу.....                           | 80 |
| 8.6  | Оптимальний фільтр для прямокутного радіоімпульсу.....                           | 81 |
| 8.7  | Оптимальний фільтр для імпульсних сигналів з лінійною частотною модуляцією ..... | 81 |
| 8.8  | Оптимальний фільтр для послідовності імпульсних сигналів...                      | 82 |
| 8.9  | Узгоджена фільтрація заданого сигналу при небілому шумі.....                     | 83 |
| 8.10 | Оптимальний лінійний фільтр по мінімуму середньоквадратичної помилки.....        | 84 |
|      | Література .....   | 86 |