

**Національний технічний університет України**  
**«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ**  
**імені Ігоря Сікорського»**  
НАВЧАЛЬНО - НАУКОВИЙ МЕХАНІКО-МАШИНОБУДІВНИЙ  
ІНСТИТУТ  
Кафедра технології машинобудування

«На правах рукопису»  
УДК 621.91

«До захисту допущено»

Завідувач кафедри  
Олександр Охріменко  
(підпис) (власне ім'я, прізвище)

“ ” \_\_\_\_\_ 2023р.

## Магістерська дисертація

на здобуття ступеня магістра

за освітньо-науковою програмою «Технології машинобудування»

зі спеціальності 131 «Прикладна механіка»

на тему: Дослідження впливу режимів різання на шорсткість обробленої поверхні при фрезеруванні кінцевими фрезами горизонтальних поверхонь

Виконав:  
студент 2 курсу, групи МТ-21мп

Макарицький Юрій Сергійович

\_\_\_\_\_ (прізвище, ім'я, по батькові)

\_\_\_\_\_ (підпис)

к.т.н., доц. Кореньков В.М.

Науковий керівник \_\_\_\_\_

(посада, науковий ступінь, вчене звання, прізвище та ініціали)

\_\_\_\_\_ (підпис)

к.т.н., доц.каф. КМ Красновид Д.О.

Рецензент \_\_\_\_\_

(посада, науковий ступінь, вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали)

\_\_\_\_\_ (підпис)

Засвідчую, що у цій магістерській дисертації немає запозичень з праць інших авторів без відповідних посилань.

Студент \_\_\_\_\_  
(підпис)

Київ – 2023

**Національний технічний університет України**  
**«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»**  
**Навчально – науковий механіко-машинобудівний інститут**  
**Кафедра технології машинобудування**

Рівень вищої освіти – другий (магістерський)

Спеціальність – 131 «Прикладна механіка»

Освітньо-науковою програмою «Технології машинобудування»

ЗАТВЕРДЖУЮ

Завідувач кафедри

\_\_\_\_\_ Олександр Охріменко

« \_\_\_ » \_\_\_\_\_ 20\_\_ р.

**ЗАВДАННЯ**  
**на магістерську дисертацію студенту**

\_\_\_\_\_  
(прізвище, ім'я, по батькові)

1. Тема дисертації Дослідження впливу режимів різання на шорсткість обробленої поверхні при фрезеруванні кінцевими фрезами горизонтальних поверхонь

науковий керівник: к.т.н., доц. Кореньков В.М.  
(прізвище, ім'я, по батькові, науковий ступінь, вчене звання)

затверджені наказом по університету від «21» березня 2023р. № 1293-с

2. Термін подання студентом дисертації « \_\_\_ » \_\_\_\_\_ 20\_\_ р.

3. Об'єкт дослідження: процес фрезеруванні кінцевими фрезами горизонтальних поверхонь деталей з алюмінієвих сплавів

4. Вихідні дані: матеріал оброблюваних деталей алюмінієвий сплав 7075; різальний інструмент фірми ZCC модельного ряду AL-3E діаметром 10мм; діапазон подач 0,05..0,13мм/зуб; швидкостей обертання шпинделя 2000..10000об/хв; глибин різання 0,5..1,5мм



## ЗМІСТ

1. ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРНИХ ДЖЕРЕЛ .....	10
1.1. Фактори, що впливають на шорсткість при фрезерування алюмінієвих сплавів .....	10
1.2. Дослідження параметрів шорсткості .....	15
2. СТАТИСТИЧНІ МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ.....	19
2.1. Регресійний та кореляційний аналіз .....	19
2.2. Дисперсійний аналіз (ANOVA) .....	20
3. РОЗРОБКА МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ .....	25
3.1. Постановка задачі в предметній галузі .....	25
3.2. Формалізація задачі .....	25
3.3. Планування експерименту .....	27
3.4. Виконання експериментальних досліджень.....	30
3.5. Попередній статистичний аналіз.....	35
3.5.1. Перевірка гетероскедастичності (аналіз однорідності дисперсій) .....	35
3.6. Побудова моделі.....	36
3.6.1. Виконання перетворень до ортогональних поліномів Чебишева і нормування поліномів .....	37
3.6.2. Побудова взаємодій .....	44
3.6.3. Ідентифікація моделі .....	45
3.7. Аналіз якості моделі .....	50
3.7.1. Інформативність.....	50
3.7.2. Адекватність.....	51
3.7.3. Стійкість.....	52
3.7.4. Аналіз структури зв'язків.....	52
3.7.5. Аналіз залишків.....	53
3.8. Висновки .....	55
4. СТАРТАП.....	58
4.1. Опис ідеї.....	58
4.2. Технологічний аудит .....	59
4.3. Аналіз ринкових можливостей запуску .....	59

	5
4.4. Розроблення ринкової стратегії.....	60
4.5. Розроблення маркетингової програми.....	61
4.6. Висновки до розділу .....	63
ЛІТЕРАТУРА.....	64
ДОДАТКИ.....	64

## АННОТАЦІЯ

**Макарицький Ю.С. Дослідження впливу режимів різання на шорсткість обробленої поверхні при фрезеруванні кінцевими фрезами горизонтальних поверхонь.**

В даній роботі досліджується вплив режимів різання на шорсткість поверхні при фрезеруванні кінцевими фрезами горизонтальних поверхонь. Для цього був проведений повний факторний експеримент і на основі нього побудована математична модель залежності шорсткості поверхні від параметрів різання, таких як: швидкість подачі, швидкість різання, глибина різання та наявність МОР.

Було визначено наскільки фактори описують побудовану модель, оцінено її адекватність. За моделлю було визначено вплив факторів на відгук, оцінено вид функції та на основі отриманих даних проаналізовано її прогностичні властивості.

**Ключові слова:** шорсткість поверхні, режими різання, статистичні методи, повний факторний експеримент, емпірична залежність, математична модель.

## ABSTRACT

**Makarytskyi Y. S. Study of the effect of cutting parameters on the roughness of the treated surface when milling horizontal surfaces with end mills.**

This work investigates the influence of cutting parameters on surface roughness when milling horizontal surfaces with end mills. A full factorial experiment was conducted to build a mathematical model of the dependence of surface roughness on cutting parameters such as feed rate, cutting speed, depth of cut, and the coolant.

The adequacy of the model was assessed, and the impact of factors on the response was determined. The type of function was evaluated, and based on the obtained data, its predictive properties were analyzed.

**Keywords:** surface roughness, end milling, cutting modes, statistical methods, full factorial experiment, empirical dependence, mathematical model.

## РЕФЕРАТ

Магістерська дисертація на тему: «Дослідження впливу режимів різання на шорсткість обробленої поверхні при фрезеруванні кінцевими фрезами горизонтальних поверхонь», містить 68 сторінок пояснювальної записки, рисунків – 19, таблиць – 18, використаних джерел – 40, загальний об'єм роботи складає 78 сторінок.

### **Актуальність**

Часто на виробництвах при фрезеруванні користуються заданими режимами різання від виробника інструменту, не знаючи, яку шорсткість поверхні вони отримають в результаті. Також постає проблема в пришвидшенні обсягу вироблених деталей. Якщо поверхня не відповідає і відповідно її шорсткість, то важливо змінити режими різання задля пришвидшення процесу оброблення з забезпеченням необхідної шорсткості.

### **Мета дослідження**

Отримати математичну модель залежності шорсткості від режимів різання, визначити вплив параметрів різання на шорсткість за моделлю, оцінити прогностичні властивості моделі.

### **Задачі дослідження**

1. Огляд літературних джерел за темою дослідження.
2. Виконання натурних експериментів.
3. Побудова й аналіз математичної моделі.
4. Розробка стартап проекту.

### **Об'єкт дослідження**

Об'єктом дослідження є параметри різання та їхній вплив на шорсткість поверхні.

### **Предмет дослідження**

Предметом дослідження є статистичні методи для побудови математичної моделі.

### **Наукова новизна отриманих результатів**

Результати відрізняються від результатів попередників, при побудові математичної моделі було використано метод Чебишева (ортогональних контрастів).

### **Практичне значення отриманих результатів**

Побудована математична модель залежності шорсткості від параметрів різання, оцінені вплив факторів на відгук моделі та прогностичні властивості моделі.

**Ключові слова:** шорсткість поверхні, режими різання, статистичні методи, повний факторний експеримент, емпірична залежність, математична модель.

## 1. ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРНИХ ДЖЕРЕЛ

### 1.1. Фактори, що впливають на шорсткість при фрезерування алюмінієвих сплавів

Незважаючи на розвиток різноманітних процесів формоутворення деталей, механічна обробка все ще залишається основним методом виготовлення деталей машин. Як відомо, процеси фрезерування складають значну частку механічної обробки. Така обробка здійснюється з використанням фрез і високих значень параметрів різання. Постійна модифікація геометрії ріжучого інструменту та розробка інструментальних матеріалів і покриттів призвели до того, що поверхні, оброблені кінцевим фрезеруванням, зазвичай не підлягають подальшим фінішним операціям.

Однозначно визначити та описати процес фрезерування дуже складно, оскільки на нього впливає дуже багато неконтрольованих факторів [1]. На практиці твердосплавні пластини в корпусі фрезерної головки не ідеально вирівняні, що в поєднанні з рухом подачі впливає на швидкість подачі на зуб, фактичну довжину ріжучих кромek, які беруть участь у видаленні матеріалу [2], і мікрогеометрію сформованої поверхні [3]. Як продемонстровано в дослідженні Arizmendi та ін. [4], на мікрогеометрію поверхні може вплинути навіть неточне позиціонування ріжучого інструменту. Вони продемонстрували, що неоднорідні смуги шорсткості, які утворюються на обробленій поверхні при торцевому фрезеруванні по колу, залежать від похибок налаштування інструменту, допуску на геометрію інструменту та величини подачі. Процес фрезерування також супроводжується відносними переміщеннями системи «інструмент – заготовка», які є несприятливим і небажаним явищем. Вони знижують точність розмірів і форми оброблених деталей і якість оброблених поверхонь, що спричиняє зниження рентабельності виробничого процесу, як спостерігалось в роботі Skrzyniarz та ін. [5]. Зміщення, створювані в системі «інструмент – заготовка», також знижують термін служби інструменту та

складових верстату. Крім того, вони є перешкодою для підвищення ефективності процесу обробки матеріалу заготовки та суттєво впливають на геометричну структуру обробленої поверхні [6]. Вплив цих переміщень на якість оброблених поверхонь вивчали Fei та ін. [7]. Результати їх досліджень показали, що деформація під час механічної обробки є основною причиною поганої якості поверхні заготовки, особливо тонкостінної заготовки. Li та ін. [8] наголошували на велике значення способу затиску заготовки. Неправильний затиск може серйозно вплинути на кінцеву якість обробленої поверхні, особливо на точність форми. Це питання є важливим під час обробки тонкостінних компонентів, як підкреслено в дослідженні Wu та ін. [9].

З іншого боку, Yang і Liu [10] показали, що в додаток до прогину заготовки, прогин інструменту та биття інструменту мають значний вплив на профіль обробленої поверхні. У свою чергу, Morelli та ін. [11] звернули увагу на динамічну жорсткість інструменту та вказали, що зміна цього параметра сприяє виникненню похибок поверхні при фрезерних операціях. Однак слід зазначити, що розглядаючи налаштування інструменту як параметр, що регулюється, можна вплинути на кінцевий ефект обробки. Liu та ін. [12] показали, що нахил фрезерних інструментів під відповідним кутом може допомогти значно придушити вібрацію під час обробки та покращити якість обробленої поверхні. Про важливість вібрації в процесі фрезерування також свідчать результати досліджень, проведених Wang та ін. [13]. Вони довели, що зміна динамічної жорсткості верстата змінює частоту вібрації системи, що потім призводить до різної якості поверхні.

На вібрацію інструменту можна вплинути шляхом оптимізації параметрів обробки. Yan та ін. [14] показали, що коли вібрація інструменту зведена до мінімуму, шорсткість обробленої поверхні залежить здебільшого від величини подачі і найменше від глибини різання. Вплив параметрів обробки на шорсткість обробленої поверхні досліджували Wang та ін. [15]. Щоб підвищити якість обробленої поверхні, вони взяли за оптимізацію параметрів процесу

різання. Змінюючи швидкість шпинделя, швидкість подачі, глибину різання та відстань різання, вони досліджували, як ці параметри впливають на мікрорельєф поверхні. Дослідження проводилося для процесу різання малими інструментами (мікрорізання). Під час мікрорізання нам часто доводиться мати справу зі значенням найменшого знімного припуску за заданих умов обробки. Ця величина визначається параметром мінімальної товщини припуску  $h_{\min}$  [16,17]. Замість різання відбувається процес випалювання поверхні. Oliveira та ін. [18] встановили, що чисельне значення параметра  $h_{\min}$  змінюється практично від 1/4 до 1/3 значення радіуса ріжучої кромки зуба інструменту незалежно від матеріалу заготовки, геометрії інструменту, процесу обробки або використаного методу вимірювання. Skrzyniarz [19] представив метод визначення параметра  $h_{\min}$  шляхом аналізу профілю виготовленої поверхні.

Підсумовуючи, фактори, що впливають на шорсткість обробленої поверхні, можна розділити на чотири групи: параметри обробки (вісім змінних), властивості інструменту (дев'ять змінних), матеріал заготовки (шість змінних), і явища, що супроводжують процес різання (вісім змінних). Цей поділ детально показано на рис. 1.

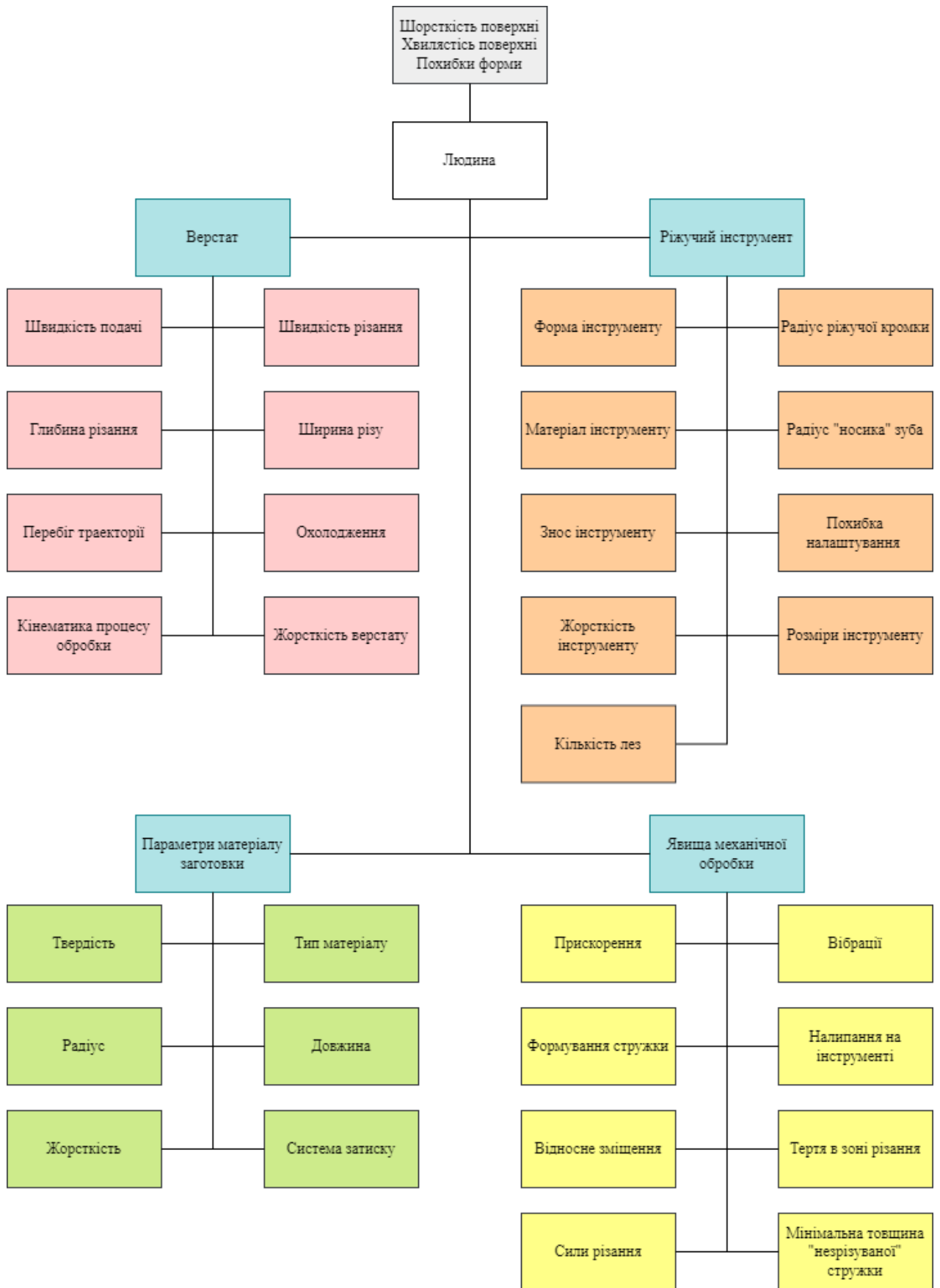


Рис. 1. Фактори, що впливають на геометричну структуру поверхні в процесі механічної обробки.

На практиці прийнято спочатку вибирати параметри обробки, запропоновані виробником інструменту, а потім оптимізувати їх значення. Процес оптимізації параметрів різання часто підтримується аналітичними [20, 21] або імітаційними моделями [22, 23], які використовуються для прогнозування шорсткості поверхні оброблених поверхонь. Однак ці моделі не ідеальні. Тому вони постійно розробляються та доповнюються новими даними. Наприклад, Zawada-Michałowska та ін. [24] зазначив, що на точність обробки впливає стратегія обробки та напрямок ходу інструмента, що також було описано Dzyuga та ін. [25] і Chuchala та ін. [26]. Це доводить, що фрезерування в напрямку, перпендикулярному до напрямку прокатки (попереднє фрезерування), викликає більшу деформацію, ніж фрезерування в паралельному напрямку.

Таким чином, легко побачити, що існує багато факторів, які можуть впливати на процес формування поверхні під час механічної обробки. Відповідно, різні алгоритми впроваджуються в процеси прийняття рішень при механічній обробці. Генетичний алгоритм, а саме оптимізація методом рою частинок, та інші алгоритми використовуються для оптимізації параметрів процесу з метою досягнення ідеального вибору параметрів обробки [27-29]. Однак дані, що описують фактори, що впливають на рельєф поверхні, є досі неясними, тому необхідний багатопотоковий аналіз взаємозв'язків цих факторів.

У промисловості лише основні параметри процесу обробки, такі як швидкість різання  $v_c$ , глибина різання  $a_p$  і швидкість подачі на зуб  $f_z$ , вибираються для отримання обробленої поверхні із заданою шорсткістю. Інші фактори, що впливають на мікрогеометрію поверхні, не розглядаються.

## 1.2. Дослідження параметрів шорсткості

Що стосується теми запропонованої дисертаційної роботи, оглянуті попередні дослідницькі роботи і розкриті вони таким чином:

Surasti Rawangwong та ін. [30] досліджували вплив основних факторів на шорсткість поверхні при торцевому фрезеруванні алюмінію AA 7075. Для експерименту використовувався твёрдосплавний інструмент діаметром 63 мм із подвійною ріжучою кромкою. Змінними факторами були швидкість, швидкість подачі та глибина різання. Результати показали, що факторами, які вплинули на шорсткість поверхні, були коефіцієнт подачі та швидкість, тоді як глибина різання не впливає на шорсткість поверхні. Результат випробування показав, що шорсткість поверхні, ймовірно, зменшилася при використанні швидкості 3800 об/хв і швидкості подачі 1000 мм/хв.

W. Li та ін. [31] досліджували вплив зносу інструменту на цілісність поверхні та його вплив на характеристики втоми сплаву Inconel 718 шляхом кінцевого фрезерування з використанням інструментів з PVD покриттям. Цілісність поверхні, включаючи шорсткість поверхні, мікроструктуру та мікротвердість, були охарактеризовані на трьох рівнях зносу бокової сторони інструменту для дослідження. На кожному рівні зносу бічної поверхні інструменту досліджували вплив швидкості різання, подачі та радіальної глибини різання на цілісність поверхні. Усі відфрезеровані поверхні мали шорсткість менше 0,4 мкм, а шорсткість більшості поверхонь менше 0,25 мкм. Високий знос інструменту спричинив меншу шорсткість поверхні.

M. S. Sukumar та ін. [32] використовували метод Тагучі для визначення оптимальної комбінації впливових факторів на процес фрезерування. Експеримент із фрезеруванням було проведено на матеріалі Al 6061 відповідно до ортогональної матриці Тагучі (L16) для різної шорсткості (Ra), яка була виміряна та записана для кожного експерименту та проаналізована за допомогою співвідношення сигнал/шум Тагучі та визначено оптимальну комбінацію контрольованих параметрів. Штучна нейрона мережева модель

(ШНМ) була розроблена та навчена з використанням повних експериментальних даних факторного експерименту та комбінації контрольних параметрів, які були знайдені з ШНМ для значення шорсткості поверхні ( $R_a$ ), отриманого з підтверджувального тесту, для оптимальних контрольних параметрів, які отримані з аналізу співвідношення сигнал/шум Тагучі. Метод Тагучі та ШНМ знайшли різні набори оптимальних комбінацій, але підтверджувальний тест показав, що обидва отримали майже однакові значення  $R_a$ .

Lohithaksha M. Maiyar та ін. [33] досліджує оптимізацію параметрів операції торцевого фрезерування для матеріалу Inconel 718 з критеріями мультивідповіді на основі ортогонального масиву Тагучі з реляційним аналізом Грея. Швидкість різання, швидкість подачі та глибина різання є вхідними параметрами, шорсткість поверхні та швидкість знімання матеріалу є вихідними параметрами. Було встановлено, що оптимальні параметри різання для процесу обробки лежать на рівні 75 м/хв для швидкості різання, 0,06 мм/зуб для швидкості подачі та 0,4 мм для глибини різання. Помічено збільшення швидкості знімання матеріалу на 64,8% і водночас зменшення шорсткості поверхні на 9,52%. Дисперсійний аналіз показує, що швидкість різання є найбільш значущим параметром обробки, а швидкість подачі впливає на численні характеристики продуктивності з впливом 56,88% і 34,64% відповідно.

Surasit Rawangwong та ін. [34] досліджує вплив основних факторів шорсткості поверхні при торцевому фрезеруванні алюмінію 2024. Контрольованими факторами були швидкість, швидкість подачі та глибина різання. Швидкість різання та подача найбільше впливали на шорсткість поверхні. Шорсткість поверхні, ймовірно, зменшилася, коли швидкість обертів становила 3600 об/хв, а швидкість подачі становила 1000 мм/хв. Результат також показав, що вищі значення швидкості та менша подача мали тенденцію до зменшення поверхні.

A. Shokrani та ін. [35] представляє одну з найперших дослідження кріогенного торцевого фрезерування з ЧПУ сплаву на основі нікелю Inconel 718 з використанням твердосплавних інструментів із покриттям TiAlN. Обраними параметрами різання були діаметр інструменту, швидкість різання, швидкість різання, глибина різання та швидкість занурення, тоді як обраними факторами відгуку були шорсткість поверхні, знос інструменту та споживання електроенергії. Статистичний аналіз результатів показав, що кріогенне охолодження призвело до зменшення шорсткості поверхні Ra та Rz оброблених деталей на 33% та 40% порівняно з сухою обробкою без помітного збільшення енергоспоживання верстата (1,9%). Кріогенне охолодження значно зменшило термін служби твердосплавних кінцевих фрез із покриттям.

A.K.M. Nurul Amin та ін. [36] зосереджені на новому підході до мінімізації шорсткості поверхні при торцевому фрезеруванні м'якої (низьковуглецевої) сталі з використанням вставок WC-Co без покриття під магнітним полем постійних магнітів. Були обрані такі параметри різання, як швидкість різання, подача та глибина різання, а також коефіцієнт відгуку – шорсткість поверхні. Подача найбільше вплинула на Ra, потім швидкість різання і глибина різання. Оптимальна швидкість різання, подача і глибина різання становили 70 м/хв, 0,10 мм/зуб і 1,02 мм відповідно. Значне покращення обробки поверхні ( $Ra < 0,4$  мкм) усуває необхідність шліфування та полірування.

Lakshmi pathi Tamminenі та ін. [37] досліджували вплив швидкості різання, подачі та глибини різання на шорсткість поверхні та площинність алюмінію 1050 під час операції фрезерування. Значення площинності та шорсткості поверхні аналізуються за допомогою графіків, створених за допомогою методології RSM програмного забезпечення Minitab. Шорсткість поверхні перевірялася за допомогою тестера шорсткості поверхні TR-200, а площинність – за допомогою координатно-виміральної машини (КВМ).

Muhammmad Yasiret та ін. (2016) [38] досліджували вплив параметрів різання на шорсткість поверхні нержавіючої сталі AISI 316L за допомогою інструменту

з карбіду вольфраму та методології поверхні відгуку RSM. Експеримент проводять без MOP. Швидкість різання варіюється від 80 м/хв до 120 м/хв, а швидкість подачі – від 0,10 мм/об до 0,14 мм/об. Для детального вивчення рельєфу поверхні нержавіючої сталі AISI 316L використовували скануючий електронний мікроскоп (SEM) і тестер поверхні Mitutoyo. Згідно з результатами дисперсійного аналізу (ANOVA), швидкість подачі ( $f$ ) є найбільш значущим параметром шорсткості поверхні, тоді як швидкість різання ( $V_c$ ) є менш значущим параметром. Постійна швидкість різання не впливає на шорсткість поверхні, але коли швидкість подачі змінюється, шорсткість змінюється.

## 2. СТАТИСТИЧНІ МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ

### 2.1. Регресійний та кореляційний аналіз

Регресійний та кореляційний аналізи - два методи дослідження взаємозв'язку між двома або більше безперервними змінними. У регресійному аналізі розглядається зв'язок між однією змінною, званою *залежною змінною*, та кількома іншими, званими *незалежними змінними*. Цей зв'язок представляється за допомогою *математичної моделі*, тобто рівняння, яке пов'язує залежну змінну з незалежними з урахуванням множини відповідних припущень. Незалежні змінні пов'язані з залежною ним за допомогою *функції регресії*, що залежить також від набору невідомих параметрів. Якщо функція лінійна щодо параметрів (але необов'язково лінійна щодо незалежних змінних), то говорять про *лінійну модель* регресії. В іншому випадку модель називається *нелінійною*. У кожному з цих випадків йдеться про регресію залежної змінної по незалежним змінним. Статистичними проблемами регресійного аналізу є:

- а) отримання найкращих точкових та інтервальних оцінок невідомих параметрів регресії;
- б) перевірка гіпотез щодо цих параметрів;
- в) перевірка адекватності майбутньої моделі;
- г) перевірка відповідних припущень.

Вибір відповідної моделі ґрунтується скоріше не на статистичних аргументах, а на основі обліку фізичних факторів.

Регресійний аналіз використовується з двох причин. По-перше, тому, що опис залежності між змінними допомагає встановити наявність можливого причинного зв'язку. По-друге, для отримання *предиктора* для залежної змінної, оскільки рівняння регресії дозволяє передбачати значення залежної

змінної за значеннями незалежних змінних. Ця можливість особливо важлива в тих випадках, коли виміри залежної змінної утруднені чи дорого коштують.

Величина лінійної залежності між двома змінними вимірюється за допомогою простого *коефіцієнта кореляції*, тоді як величина лінійної залежності однієї змінної від кількох вимірюється *множинним коефіцієнтом кореляції*. Інша міра залежності - *частковий коефіцієнт кореляції* - вимірює лінійну залежність між двома змінними після усунення частини лінійної залежності, обумовленої залежністю цих змінних з іншими змінними. *Методи кореляційного аналізу* дозволяють робити статистичні висновки про ці три міри лінійної залежності. Методи регресійного та кореляційного аналізів тісно пов'язані між собою.

## 2.2. Дисперсійний аналіз (ANOVA)

Нехай в нас є  $n$  спостережень  $y_1, \dots, y_n$  з відповідними реалізаціями  $n$  випадкових величин  $Y_1, \dots, Y_n$ . Припустимо, що середнє значення кожної величини  $Y_i$  лінійно залежить від  $p$  невідомих параметрів  $\theta_1, \dots, \theta_p$ , тоді

$$E(Y_i) = \theta_1 x_{1i} + \dots + \theta_p x_{pi}, \quad i = 1, \dots, n$$

де  $x_{1i}, \dots, x_{pi}$  - невідомі сталі. В цьому випадку кожне спостережене значення  $y_i$  можна записати у вигляді суми

$$y_i = \theta_1 x_{1i} + \dots + \theta_p x_{pi} + e_i$$

де  $e_1, \dots, e_n$  - похибки. Загальна лінійна модель задається останніми відношеннями при додаткових припущеннях:

$$E(e_i) = 0, \quad V(e_i) = \sigma^2, \quad \text{cov}(e_i, e_j) = 0, \quad i, j = 1, \dots, n, \quad i \neq j.$$

Іншими словами, похибки вважаються некорельованими, мають нульове середнє і однакову дисперсію  $\sigma^2$ .

Тоді вид моделі множинної лінійної регресії буде наступний:

$$y_i = \theta_0 + \theta_1 x_{1i} + \dots + \theta_q x_{qi} + e_i, \quad q = p - 1.$$

Далі опишемо процедури точкової оцінки для параметрів  $\theta_1, \dots, \theta_p$  і опишемо методи отримання довірчих інтервалів і перевірки гіпотез відносно цих параметрів. Точкові оцінки можна отримати без додаткових припущень, але для отримання довірчих інтервалів і для перевірки гіпотез нам необхідно буде допустити, що похибки  $e_i$  мають нормальний розподіл.

Зазвичай оцінка параметрів  $\theta_1, \dots, \theta_p$  знаходиться за методом найменших квадратів (МНК). Оцінка МНК визначається як значення  $\theta_1, \dots, \theta_p$ , параметрів  $\theta_1, \dots, \theta_p$ , що мінімізують суму квадратів

$$S = \sum_{i=1}^n (y_i - \theta_1 x_{1i} - \dots - \theta_p x_{pi})^2$$

По всім наборам значень  $\theta_1, \dots, \theta_p$ . Значення  $\theta_1, \dots, \theta_p$  лінійно залежать від спостережень. Сама точка мінімуму може або визначатися однозначно (як у разі множинної лінійної регресії), або таких точок буде дуже багато. Подібна неоднозначність може виникнути у ситуації дисперсійного аналізу. Для отримання єдиного рішення зазвичай накладають додаткові умови на параметри та його оцінку. За необхідності вводитимемо подібні умови.

Вважатимемо, що або відразу, або після накладення потрібних умов отримано єдиний набір МНК-оцінок  $\theta_1, \dots, \theta_p$ . Тоді оцінка найменших квадратів для будь-якої лінійної функції параметрів є тією ж лінійною функцією від МНК-оцінок самих параметрів. Значить,

$$\sum_{i=1}^p c_i \theta_i = \sum_{i=1}^p c_i \theta_i$$

де  $c_i$  - відомі сталі,  $i=1, \dots, p$ . Оскільки  $\theta_i$  лінійно залежить від  $y_1, \dots, y_n$ , то  $\sum_{i=1}^p c_i \theta_i$  лінійно залежить від спостережень  $y$ . Важливість МНК полягає в тому, що МНК-оцінки незміщеними оцінками, які лінійно залежать від спостережень. Це є теорема Гаусса-Маркова.

Крім оцінок параметрів  $\theta_1, \dots, \theta_p$ , треба провести оцінку дисперсій похибок  $\sigma^2$ . Зазвичай для цього використовують оцінку, яка називається середнім квадратом похибки):

$$MS_R \equiv s^2 = \frac{SS_R}{v_R}$$

де залишкова сума квадратів  $SS_R$  має вигляд:

$$SS_R = \sum_{i=1}^n (y_i - \theta_1 x_{1i} - \dots - \theta_p x_{pi})^2$$

$v_R$  - число ступенів вільності. Залишкова сума квадратів  $SS_R$  показує, наскільки добре побудована модель узгоджується з даними: чим менша  $SS_R$ , тим краща узгодженність.

Для отримання довірчих інтервалів значень параметрів або функцій від параметрів нам знадобиться припущення про вид функцій розподілу помилок. Зазвичай припускають, що вони нормально розподілені.

$$e_1, \dots, e_n \text{ незалежні і розподілені по } N(0, \sigma^2).$$

В цих припущеннях можна показати, що  $100(1-\alpha)\%$  - довірчий інтервал для будь якої лінійної комбінації параметрів  $\psi = \sum_{i=1}^p c_i \theta_i$

$$\psi = t_{1-(\alpha/2)}(v_R) \sqrt{V(\psi)},$$

де  $\psi = \sum_{i=1}^p c_i \theta_i$ , а  $V(\psi)$  - оцінка дисперсії  $\psi$ . Оскільки оцінка  $\psi$  лінійно залежить від спостережень, то її можна записати у вигляді  $\psi = \sum_{i=1}^n a_i y_i$  з відомими сталими  $a_i$ . Звідси маємо:

$$V(\psi) = \sigma^2 \sum_{i=1}^n a_i^2$$

$$V(\psi) = s^2 \sum_{i=1}^n a_i^2$$

де  $s^2$  - незміщенна оцінка дисперсії  $\sigma^2$  з  $\nu_R$  степенями свободи.

У більшості завдань дисперсійного аналізу гіпотезу, що перевіряється можна записати у вигляді  $H_0 : \theta_{i_1} = \theta_{i_2} = \dots = \theta_{i_m} = 0$  як гіпотезу про те, що  $m$  з  $p$  параметрів дорівнюють нулю. Отже, запишемо нульову гіпотезу:  $H_0 : \theta_{p-m+1} = \dots = \theta_p = 0$ . Сформулюємо критерій відношення правдоподібності для перевірки цієї гіпотези. Для цього випишемо усічену модель  $y_i = \theta_1 x_{1i} + \dots + \theta_{p-m} x_{p-m,i} + e_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Таку форму набуває наша загальна лінійна модель з урахуванням гіпотези  $H_0$ . Потім знайдемо МНК-оцінки  $\bar{\theta}_1, \dots, \bar{\theta}_{p-m}$  для параметрів  $\theta_1, \dots, \theta_{p-m}$ . Сума квадратів з прийняттям гіпотези  $H_0$ :

$$SS'_R = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{\theta}_1 x_{1i} - \dots - \bar{\theta}_{p-m} x_{p-m,i})^2,$$

Тоді статистика критерію правдоподібності має вигляд:

$$F = \frac{(SS'_R - SS_R) / (\nu'_R - \nu_R)}{SS_R / \nu_R}.$$

Чим більше  $F$ , тим гірша усічена модель. Відповідно при великих  $F$  необхідно відкинути гіпотезу  $H_0$ .

Загалом:

1. Метод найменших квадратів є оптимальним методом оцінювання параметрів моделей дисперсійного аналізу. Він призводить до незміщених оцінок, що мають найменшу дисперсію серед усіх незміщених оцінок, лінійно залежних від спостережень.
2. У будь-якій моделі дисперсійного аналізу в таблиці ANOVA наводиться звичайна незміщена оцінка дисперсії помилок, що задається середнім залишковим квадратом  $MS_R$ . Іноді цієї величини використовують більш звичне позначення  $s^2$ . Ця оцінка дисперсії використовується при побудові довірчих інтервалів для будь якої лінійної комбінації параметрів. Число ступенів свободи  $t$ -розподілу, що виникає при цьому, дорівнює залишковому числу ступенів свободи.
3. Кожне завдання перевірки гіпотез, щодо параметрів моделі дисперсійного аналізу призводить до деякого значення  $F$ -критерію. Кожна  $F$ -статистика є відношення середніх квадратів, зазвичай представлених у відповідній таблиці ANOVA.

### 3. РОЗРОБКА МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ

#### 3.1. Постановка задачі в предметній галузі

Ціль даної роботи – отримати багатофакторну регресійну модель залежності шорсткості поверхні від параметрів різання при кінцевому фрезеруванні горизонтальних площин алюмінієвих сплавів.

#### 3.2. Формалізація задачі

**Мета побудови регресійної моделі.** Регресійна модель нам необхідна для дослідження впливу параметрів різання на шорсткість поверхні, для отримання оптимальних значень параметрів різання для досягнення необхідної шорсткості поверхні, а також для прогнозування поведінки системи за границями наших спостережень.

**Засоби і методи побудови регресійної моделі.** Для побудови регресійної моделі поліноміального виду будемо виконувати перетворення незалежних змінних у ортогональні поліноми Чебишева. Цей спосіб зможе значно спростити процес розрахунку без похибок округлення при побудові поліноміальної моделі високих степеней.

**Вимоги до моделі.** Наявність впливу всіх факторів на відгук, наявність взаємодій, необхідне прогнозування функції за межами дослідних даних.

**Формалізація мети дослідження.** Визначення впливу параметрів різання на шорсткість поверхні, а також визначення структури зв'язків між ними.

**Аналіз і структурування об'єкту дослідження.**

Незалежні змінні:

- |                                  |                             |
|----------------------------------|-----------------------------|
| - Подача $F$ , мм/зуб.           | Умовне позначення - $X_1$ . |
| - Швидкість обертання $S$ , RPM. | Умовне позначення - $X_2$ . |
| - Глибина різання $H$ , мм.      | Умовне позначення - $X_3$ . |

- MOP (1 - є; 0 - немає).

Умовне позначення -  $X_4$ .

Залежні змінні:

- Шорсткість поверхні, Ra.

Умовне позначення -  $Y$ .

Неконтрольовані змінні:

- Жорсткість системи ТОС.

Зміною жорсткості системи в даному дослідженні нехтуємо так як система закріплення заготовки забезпечує малий вплив цього фактору на шорсткість поверхні.

Контрольовані змінні

- Зношування інструменту.

Знос інструменту не враховуємо так як в даному експерименті неможливо його враховувати.

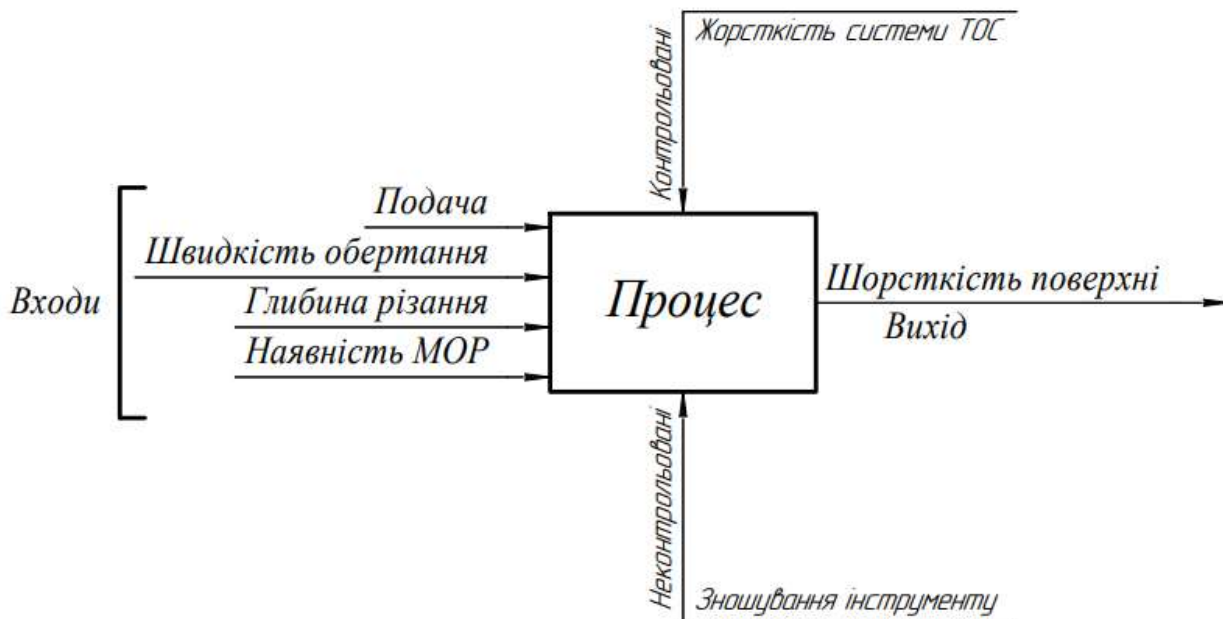


Рис. 3.1. «Чорний ящик» процесу

### 3.3. Планування експерименту

В нашому випадку проведемо повний факторний експеримент (ПФЕ). Він утворюється повним комбінуванням всіх факторів всіх рівнів варіювання.

Потрібно розібратись, вплив яких факторів ми будемо досліджувати, встановити кількість рівнів варіювання цих факторів і значення факторів на всіх рівнях.

Раніше ми вже розібрались з досліджуваними факторами впливу (див рис. 3.1). Тепер оберемо кількість рівнів варіювання цих факторів і діапазон зміни цих даних.

Так як ми не можемо заздалегідь оцінити, яка в нас буде залежність, кількість рівнів треба брати з запасом для більш точної оцінки.

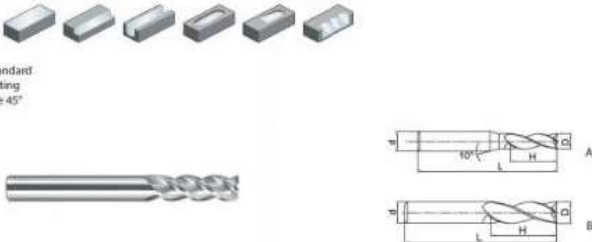
Для фактору подачі  $X_1$  оберемо кількість рівнів рівною 5.

Визначимо діапазон зміни даних на цих рівнях. Для конкретної фрези (в нашому випадку ZCC AL-3E-D10.) з каталогу виробника обираємо «ідеальні режими різання по версії виробника».

End mill General machining of Al and Al alloys

AL-3E

— Factory standard  
— Centre cutting  
— Helix angle 45°



Article	Dimensions (mm)				Teeth	Geometry	Grade
	D	d (h6)	H	L			
AL-3E-D1.0	1	4	3	50	3	A	●
AL-3E-D1.5	1,5	4	4	50	3	A	●
AL-3E-D2.0	2	4	6	50	3	A	●
AL-3E-D2.5	2,5	4	7	50	3	A	●
AL-3E-D3.0	3	6	9	50	3	A	●
AL-3E-D4.0	4	6	12	50	3	A	●
AL-3E-D5.0	5	6	15	50	3	A	●
AL-3E-D6.0	6	6	18	60	3	B	●
AL-3E-D8.0	8	8	20	60	3	B	●
AL-3E-D10.0	10	10	30	75	3	B	●
AL-3E-D12.0	12	12	32	75	3	B	●
AL-3E-D16.0	16	16	45	100	3	B	●
AL-3E-D20.0	20	20	45	100	3	B	●

● Ex stock ○ On demand  
⊙ With internal cooling

Рис. 3.2. Дані обраного інструменту [39].

### Solid carbide milling group 8 – High feed mills AL series

	$a_e / D$	Feed rate per cutting edge ( $f_z$ ) [mm]									
		Ø 6	Ø 8	Ø 10	Ø 12	Ø 14	Ø 16	Ø 18	Ø 20		
<b>N</b>	1/1	0,04	0,05	0,08	0,09	0,11	0,13	0,16	0,18		
	3/4	0,05	0,07	0,10	0,12	0,14	0,16	0,20	0,23		
	1/10	0,08	0,11	0,16	0,19	0,22	0,25	0,31	0,36		

Note: The given cutting values are guide values, which were determined under ideal conditions.  
The values have to be adapted in individual cases.

Рис. 3.3. Дані режимів обраного інструменту [39].

Як бачимо з рис. 3.3 подача в 0,08 мм/зуб є рекомендованим значенням від виробника інструменту. Встановимо діапазон адекватних значень подач для цього інструменту в 0,05-0,13 мм/зуб. Розіб'ємо цей діапазон на наші 5 рівнів. Для кращої апроксимації при застосуванні ортогональних контрастів рекомендують розміщувати рівні рівномірно, якщо це дозволяє дослід.

Так само проведемо розрахунки для наступного параметру різання для швидкості різання. Але в нашому досліді будемо працювати з параметром швидкості обертання шпинделя  $X_2$ , так як діаметр інструменту сталий то це можна зробити.

З теоретичної інформації про торцеву фрезерування ми знаємо, що параметр глибини різання  $X_3$  не дуже впливає на шорсткість поверхні. Тому для цього фактору встановимо 3 рівні варіювання з кроком в 0,5 мм.

Останній досліджуваний параметр – наявність МОР. В цьому випадку можливі тільки два рівні – «є» і «немає». Дамо значення їм як «1» і «0» відповідно.

Назва і натуральне позначення фактору	Умовне позначення фактору	Рівні варіювання фактору				
		0	1	2	3	4
Подача F, мм/зуб	$X_1$	0,05	0,07	0,09	0,11	0,13
Швидкість обертання S, RPM	$X_2$	2000	4000	6000	8000	10000
Глибина різання H, мм	$X_3$	0,5	1	1,5	-	-
МОР (1;0)	$X_4$	1	0	-	-	-

В цьому розділі постає проблема для статистики. З точки зору статистики необхідна якнайбільша кількість експериментів для однієї точки, в той час як економічні і технічні умови вимагають якнайменшої кількості числа експериментів. На жаль, в нашому випадку економічна сторона процесу грає досить високу роль, тому кількість експериментів для однієї точки має бути мінімальною.

Коли кількість головних ефектів дорівнює числу експериментів в загальному випадку такий дослід є непридатним для побудови «хорошої» моделі, але не для випадку повного факторного експерименту.

Для ПФЕ кількість дослідів дорівнює кількості переборів всіх можливих варіантів факторів. Обрахуємо їх:

$$n = q^k$$

де  $q$  - кількість рівнів;

$k$  - кількість факторів.

$$n = q^k = 5^2 \cdot 3^1 \cdot 2^1 = 150 \text{ дослідів.}$$

Далі побудуємо робочу матрицю в програмі Microsoft Excel (див. Додаток 1).

### 3.4. Виконання експериментальних досліджень

Розрахуємо необхідні матеріали для проведення дослідів. Матеріал для дослідів оберемо алюміній Д16Т ГОСТ 4784-97.

Таблиця 3.2. - Хімічний склад Д16Т (масова доля елементів), %:

Al	Cu	Mg	Mn	Si	Fe	інші
94,7	4,9	1,8	0,9	0,5	0,5	0,15

Таблиця 3.3. - Механічні властивості Д16Т при T=20°C

Сортамент	$\sigma_b$ , МПа
Круг ГОСТ 4784-97	435

Таблиця 3.4. - Механічні властивості Д16Т при T=100°C

Сортамент	$\sigma_b$ , МПа
Круг ГОСТ 4784-97	410

Розрахуємо заготовку. Для зменшення витрат оберемо форму заготовки круг. Зробимо з неї 8-ми кутник. Довжина грані має дорівнювати  $a = 20$  мм, що в свою чергу довіннює ходу носика профілометра (довжина вимірюваної площадки).

Формула діаметру описаного кола навколо восьмикутника:

$$D = 2a \sqrt{\frac{2 + \sqrt{2}}{2}}$$

Отже діаметр заготовки:

$$D = 2 \cdot 20 \sqrt{\frac{2 + \sqrt{2}}{2}} = 52,26 \text{ мм}$$

З сортаменту оберемо форму заготовки круг  $\varnothing 56$ . Зробимо з неї 8-ми кутник. Заготовки буде дві виходячи з наявного матеріалу.

Розрахуємо довжину заготовки:

Ширина різку - 10мм.

К-сть дослідів на одну заготовку – 75.

Відсань між пазами – 4мм.

Довжина придатка для затиску заготовки – 50 мм.

Отже довжина заготовки:

$$l = \frac{(10+4)75}{8} + 50 \approx 180 \text{ мм}$$

В результаті нам необхідні дві заготовки круг  $\varnothing 56$  довжиною 180 мм.

Обраний інструмент AL-3E-D10.



Рис. 3.4. Дані обраного інструменту [39].

Заготовку затиснемо в трьохкулачковому патроні в четвертій осі фрезерного верстату.



Рис. 3.5. Фото заготовки й базування її на верстаті.

Обробляти будемо на верстаті DOOSAN DNM 5700. MOP – BLASER. В-COOL MC 600.



Рис. 3.6. Doosan DNM 5700

Вимірювати шорсткість будемо профілометром ACCRETECH Surfcom Touch 50.



Рис. 3.7. ACCRETECH Surfcom Touch 50.

Розробимо керуючу програму для нарізання лисок при різних умовах оброблення:

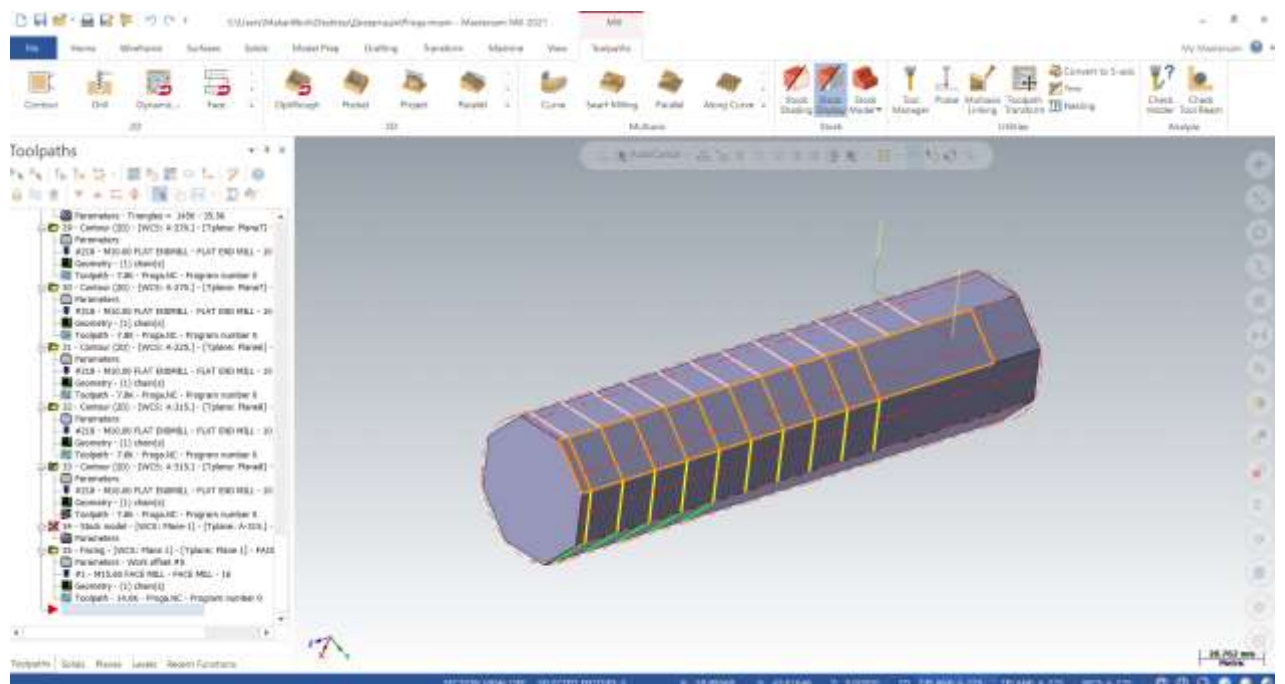


Рис. 3.8. Фото інтерфейсу програми оброблення лисок в програмному середовищі Mastercam 2021.

Підготуємо технологічні бази заготовки для проведення дослідів:

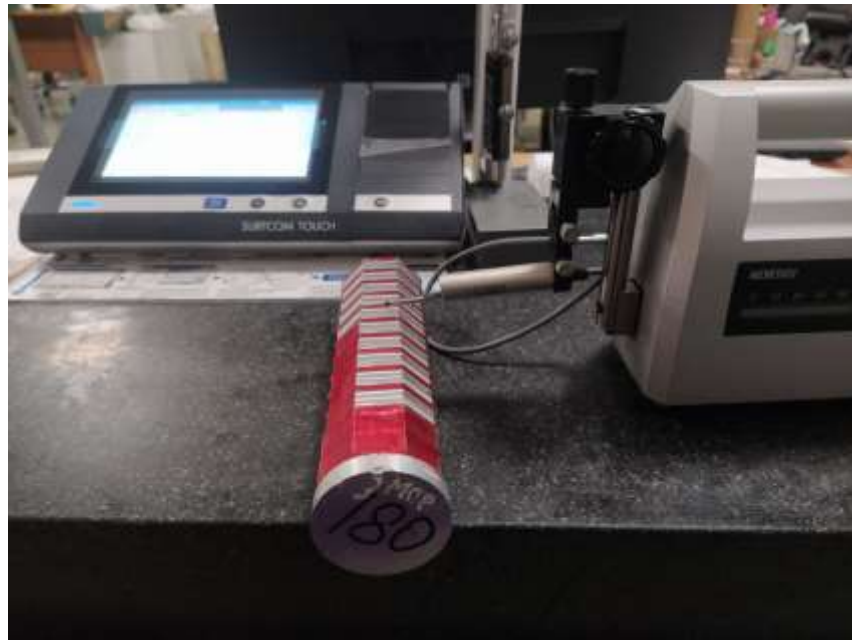


Рис. 3.9. Фото підготування баз заготовки.

Проведення дослідів:



Рис. 3.10. Фото проведення дослідів.



Вимірювання результатів шорсткості на профілометрі:

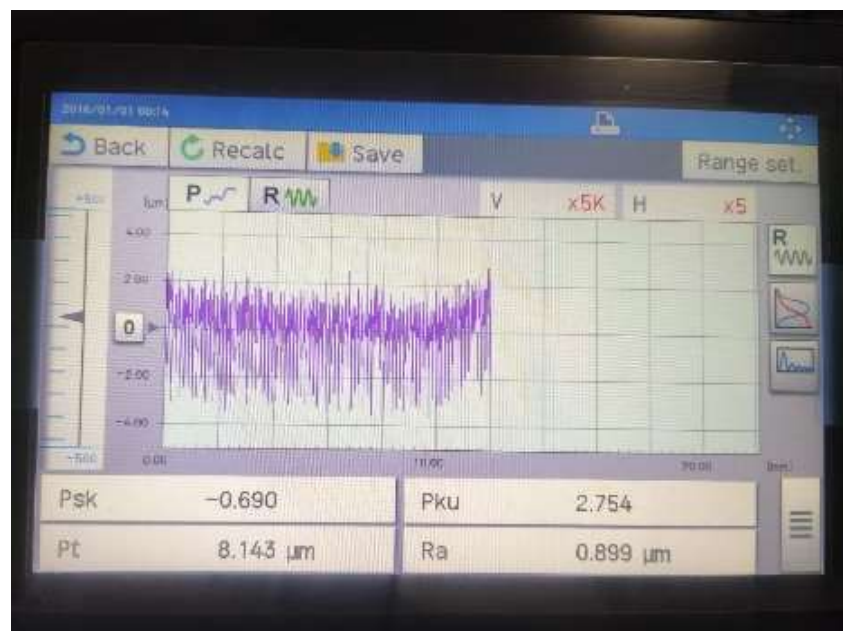


Рис. 3.11. Фото вимірювання шорсткості.

Результати шорсткості зведемо у робочу таблицю результатів відгуку (див. додаток А1).

### 3.5. Попередній статистичний аналіз

#### 3.5.1. Перевірка гетероскедастичності (аналіз однорідності дисперсій)

Використаємо критерій Кохрена, для перевірки однорідності дисперсій:

$$G^{експ} = \frac{s_{\max}^2}{\sum_{u=1}^N s_u^2},$$

де  $s_{\max}^2$  - максимальна з дисперсій;

$s_u^2$  - дисперсії, які обраховуються в кожному із дослідів, розраховується за формулою:

$$s_u^2 = \frac{\sum_{l=1}^n (y_{ul} - \bar{y}_u)^2}{n-1},$$

де  $n$  - кількість повторювань дослідів;

$\bar{y}_u$  - середнє значення відгуку в  $u$ -му досліді;

$y_{ul}$  - значення відгуку в  $u$ -му досліді.

Критерій Кохрена:

$$G^{експ} < G_{\alpha; n-1; N}^{крит}$$

Тоді дисперсія відтворюваності розраховується за формулою:

$$s_{відм}^2 = \frac{\sum_{u=1}^N s_u^2}{N}$$

Число ступенів вільності  $\nu_{відм} = N(n-1)$ .

В нашому випадку для одної варіації параметрів різання відповідає одне значення відгуку, тобто дослід один. Раніше ми обґрунтували це з економічної сторони. Тому

$$s_{відм}^2 = 0, \quad G^{експ} < G_{\alpha; n-1; N}^{крит}$$

Гіпотеза приймається.

### 3.6. Побудова моделі

Апроксимуючий нелінійний поліном виду  $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_3x^3 + \dots + a_p$  може бути будь-якої степені, але при побудові поліному високих степеней помилки округлення починають сильно впливати на результат.

При кожному збільшенні степеня поліному потрібно буде вираховувати новий коефіцієнт і ще перераховувати й старі коефіцієнти. Наприклад, по експериментальним даним побудований поліном  $y = a_0 + a_1x + a_2x^2$ . Щоб побудувати поліном вищої степені  $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ , необхідно вирахувати  $a_3$  і ще й перерахувати коефіцієнти  $a_0, a_1, a_2$ .

Спосіб Чебишева дозволяє значно спростити цей процес. [40]

Перетворення даних матриці незалежних змінних, побудова ортогональних контрастів і побудова взаємодій, необхідні для формування складної моделі для адекватного опису процесу. Також необхідно провести нормування даних для більш стійкої структури.

Необхідно побудувати взаємодії. Взаємодії – це вплив кількох факторів на відгук. Взаємодії будують перемноженням відповідних значень стовпців одного фактору на інший. Зазвичай будують подвійні взаємодії (вплив двох факторів на відгук) їх буде достатньо для нашого дослідження, бо чим складніша взаємодія тим менший вплив цієї взаємодії на відгук. Для ПФЕ доцільно будувати всі види подвійних взаємодій між факторами. Отже, нам необхідно виконати перетворення матриці початкових даних до ортогональних поліномів Чебишева, нормувати дані, і наступним етапом буде побудова взаємодій.

### ***3.6.1. Виконання перетворень до ортогональних поліномів Чебишева і нормування поліномів***

Поліноми Чебишева записуються у такій формі:

$$f_{iu}^{(1)} = x_{iu} = a_{11i}(X_{iu} + a_{10i})$$

$$f_{iu}^{(2)} = z_{iu} = a_{22i}((f_{iu}^{(1)})^2 + a_{21i}f_{iu}^{(1)} + a_{20i})$$

$$f_{iu}^{(3)} = u_{iu} = a_{33i}((f_{iu}^{(1)})^3 + a_{32i}(f_{iu}^{(1)})^2 + a_{31i}f_{iu}^{(1)} + a_{30i})$$

$$f_{iu}^{(4)} = v_{iu} = a_{44i}((f_{iu}^{(1)})^4 + a_{43i}(f_{iu}^{(1)})^3 + a_{42i}(f_{iu}^{(1)})^2 + a_{41i}f_{iu}^{(1)} + a_{40i})$$

і т.д.,

Це є поліноміальні функції від рівнів варіацій початкових факторів.

де  $i$  - номер фактору  $1 \leq i \leq k$ ,  $k$  - загальна кількість факторів;

$u$  - номер досліду  $1 \leq u \leq N$ ,  $N$  - загальна кількість дослідів;

$X_{iu}$  - значення даних фактору на його рівні варіювання.

Значення коефіцієнтів  $a$  знаходяться з рівнянь рівності до нуля сум ортогональних контрастів відповідних степенів і їх сум від множення відповідних ортогональних контрастів для кожного наступного степеня поліному.

$$\sum_{u=1}^N f_{iu}^{(p)} = 0, \quad \sum_{u=1}^N f_{iu}^{(p)} f_{iu}^{(p')} = 0$$

де  $f_{iu}^{(p)}$  і  $f_{iu}^{(p')}$  - ортогональні контрасти степенів  $p$  і  $p'$  для фактора  $X_i$ ;  
 $1 \leq p \leq p' \leq s_i - 1$

$s_i$  - кількість рівнів варіювання фактора  $X_i$ .

Корені цих рівнянь є коефіцієнтами ортогональних поліномів Чебишева, вони розраховуються за наступними формулами:

$$a_{10i} = -\frac{\sum_{u=1}^N X_{iu}}{N}, \quad a_{20i} = -\frac{\sum_{u=1}^N (f_{iu}^{(1)})^2}{N}, \quad a_{21i} = -\frac{\sum_{u=1}^N (f_{iu}^{(1)})^3}{\sum_{u=1}^N (f_{iu}^{(1)})^2},$$

$$a_{30i} = -\frac{\sum_{u=1}^N (f_{iu}^{(1)})^3}{N}, \quad a_{31i} = -\frac{\sum_{u=1}^N (f_{iu}^{(1)})^4}{\sum_{u=1}^N (f_{iu}^{(1)})^2}, \quad a_{32i} = -\frac{\sum_{u=1}^N (f_{iu}^{(1)})^5}{\sum_{u=1}^N (f_{iu}^{(1)})^4}.$$

Значення  $a_{11i}$ ,  $a_{22i}$ ,  $a_{33i}$  встановлюються так, щоб значення поліномів Чебишева змінювались в інтервалі  $[-1, 1]$ , і розраховуються за формулою:

$$a_{11i} = \frac{1}{|(X_{iu} + a_{10i})_{\max}|}$$

$$a_{22i} = \frac{1}{|(f_{iu}^{(1)})^2 + a_{21i}f_{iu}^{(1)} + a_{20i}|_{\max}}$$

$$a_{33i} = \frac{1}{|(f_{iu}^{(1)})^3 + a_{32i}(f_{iu}^{(1)})^2 + a_{31i}f_{iu}^{(1)} + a_{30i}|_{\max}};$$

Ортогональності не вистачає для забезпечення обумовленості матриці. Якщо значення сильно відрізняються то накопичується похибка обчислень. Для того необхідно додатково нормувати матрицю. Нормування роблять так, щоб сума квадратів по стовпцям були однаковими:

$$k_i^p = \sqrt{\frac{N}{\sum_{u=1}^N (f_{iu}^{(p)})^2}} - \text{коефіцієнт нормування.}$$

В нашому випадку є фактори з 5-тьма рівнями варіювання фактору, тобто поліном Чебишева буде й 4-го степеня. Але виходячи з того, що ми очікуєм не таку складну модель і не швидкозмінну то ми не будемо будувати поліном 4-ї степені для нашої моделі.

Розрахуємо ці поліноми.

- Для фактору подачі,  $X_1$ :

Поліном 1 степеня має наступний вигляд:

$$f_{iu}^{(1)} = x_{iu} = a_{11i}(X_{iu} + a_{10i})$$

Розрахуємо коефіцієнти  $a_{10i}$ ,  $a_{11i}$ :

$$a_{10i} = -\frac{\sum_{u=1}^N X_{iu}}{N} = -\frac{13,5}{150} = -0,09$$

$$a_{11i} = \frac{1}{|(X_{iu} + a_{10i})_{\max}|} = \frac{1}{|0,04|} = 25$$

Тоді поліном Чебишева 1-ї степені буде:

$$f_{iu}^{(1)} = x_{iu} = 25(X_{iu} - 0,09)$$

Поліном 2 степеня має вигляд:

$$f_{iu}^{(2)} = z_{iu} = a_{22i}((f_{iu}^{(1)})^2) + a_{21i}f_{iu}^{(1)} + a_{20i}$$

Розрахуємо коефіцієнти  $a_{20i}$ ,  $a_{21i}$ ,  $a_{22i}$ :

$$a_{20i} = -\frac{\sum_{u=1}^N (f_{iu}^{(1)})^2}{N} = -\frac{75}{150} = -0,5$$

$$a_{21i} = -\frac{\sum_{u=1}^N (f_{iu}^{(1)})^3}{\sum_{u=1}^N (f_{iu}^{(1)})^2} = -\frac{-4,26326E-13}{75} = 5,68434E-15$$

$$a_{22i} = \frac{1}{|(f_{iu}^{(1)})^2 + a_{21i}f_{iu}^{(1)} + a_{20i}|_{\max}} \cdot k_i^p = \frac{1}{0,5} \cdot 1 = 2$$

де  $k_i^p = \sqrt{\frac{N}{\sum_{u=1}^N (f_{iu}^{(p)})^2}} = \sqrt{\frac{150}{\sum_{u=1}^N (f_{iu}^{(p)})^2}} = 1$  - коефіцієнт нормування.

Тоді поліном Чебишева 2-ї степені буде:

$$f_{iu}^{(2)} = z_{iu} = 2(x_{iu}^2 + (5,684E-15)x_{iu} - 0,5)$$

Поліном 3 степеня має вигляд:

$$f_{iu}^{(3)} = u_{iu} = a_{33i}((f_{iu}^{(1)})^3) + a_{32i}(f_{iu}^{(1)})^2 + a_{31i}f_{iu}^{(1)} + a_{30i}$$

Розрахуємо коефіцієнти  $a_{30i}$ ,  $a_{31i}$ ,  $a_{32i}$ ,  $a_{33i}$ :

$$a_{30i} = -\frac{\sum_{u=1}^N (f_{iu}^{(1)})^3}{N} = -\frac{-4,26326E-13}{150} = 2,84217E-15$$

$$a_{31i} = -\frac{\sum_{u=1}^N (f_{iu}^{(1)})^4}{\sum_{u=1}^N (f_{iu}^{(1)})^2} = -\frac{63,75}{75} = -0,85$$

$$a_{32i} = -\frac{\sum_{u=1}^N (f_{iu}^{(1)})^5}{\sum_{u=1}^N (f_{iu}^{(1)})^4} = -\frac{-5,9952E-13}{63,75} = 9,40424E-15$$

$$a_{33i} = \frac{1}{|((f_{iu}^{(1)})^3 + a_{32i}(f_{iu}^{(1)})^2 + a_{31i}f_{iu}^{(1)} + a_{30i})_{\max}|} \cdot k_i^p = \frac{1}{0,15} \cdot 0,5 = 3,333333333$$

$$\text{де } k_i^p = \sqrt{\frac{N}{\sum_{u=1}^N (f_{iu}^{(p)})^2}} = \sqrt{\frac{150}{\sum_{u=1}^N (f_{iu}^{(p)})^2}} = 0,5$$

Тоді поліном Чебишева 3-ї степені буде:

$$f_{iu}^{(3)} = u_{iu} = 3,333333333(x_{iu}^3 + 9,40424E-15x_{iu}^2 - 0,85x_{iu} + 2,84217E-15)$$

Отже для фактору подачі,  $X_1$  ми отримали наступні поліноми Чебишева для перетворення даних:

$$f_{iu}^{(1)} = x_{iu} = 25(X_{iu} - 0,09)$$

$$f_{iu}^{(2)} = z_{iu} = 2(x_{iu}^2 + (5,684E-15)x_{iu} - 0,5)$$

$$f_{iu}^{(3)} = u_{iu} = 3,333333333(x_{iu}^3 + 9,40424E-15x_{iu}^2 - 0,85x_{iu} + 2,84217E-15)$$

- Для фактору обертів шпинделя за швилину,  $X_2$ :

$$f_{iu}^{(1)} = x_{iu} = a_{11i}(X_{iu} + a_{10i})$$

$$a_{10i} = -\frac{\sum_{u=1}^N X_{iu}}{N} = -\frac{900000}{150} = -6000$$

$$a_{11i} = \frac{1}{|(X_{iu} + a_{10i})_{\max}|} = \frac{1}{4000} = 0,00025$$

$$f_{iu}^{(1)} = x_{iu} = 0,00025(X_{iu} - 6000)$$

$$f_{iu}^{(2)} = z_{iu} = a_{22i}((f_{iu}^{(1)})^2) + a_{21i}f_{iu}^{(1)} + a_{20i}$$

$$a_{20i} = -\frac{\sum_{u=1}^N (f_{iu}^{(1)})^2}{N} = -\frac{75}{150} = -0,5$$

$$a_{21i} = -\frac{\sum_{u=1}^N (f_{iu}^{(1)})^3}{\sum_{u=1}^N (f_{iu}^{(1)})^2} = -\frac{0}{75} = 0$$

$$a_{22i} = \frac{1}{|((f_{iu}^{(1)})^2 + a_{21i}f_{iu}^{(1)} + a_{20i})_{\max}|} \cdot k_i^p = \frac{1}{0,5} \cdot 1 = 2$$

$$\text{де } k_i^p = \sqrt{\frac{N}{\sum_{u=1}^N (f_{iu}^{(p)})^2}} = \sqrt{\frac{150}{\sum_{u=1}^N (f_{iu}^{(p)})^2}} = 1$$

$$f_{iu}^{(2)} = z_{iu} = 2(x_{iu}^2 - 0,5)$$

$$f_{iu}^{(3)} = u_{iu} = a_{33i}((f_{iu}^{(1)})^3) + a_{32i}(f_{iu}^{(1)})^2 + a_{31i}f_{iu}^{(1)} + a_{30i}$$

$$a_{30i} = -\frac{\sum_{u=1}^N (f_{iu}^{(1)})^3}{N} = -\frac{0}{150} = 0$$

$$a_{31i} = -\frac{\sum_{u=1}^N (f_{iu}^{(1)})^4}{\sum_{u=1}^N (f_{iu}^{(1)})^2} = -\frac{63,75}{75} = -0,85$$

$$a_{32i} = -\frac{\sum_{u=1}^N (f_{iu}^{(1)})^5}{\sum_{u=1}^N (f_{iu}^{(1)})^4} = -\frac{0}{63,75} = 0$$

$$a_{33i} = \frac{1}{|((f_{iu}^{(1)})^3 + a_{32i}(f_{iu}^{(1)})^2 + a_{31i}f_{iu}^{(1)} + a_{30i})_{\max}|} \cdot k_i^p = \frac{1}{0,15} \cdot 0,5 = 3,333333333$$

$$\text{де } k_i^p = \sqrt{\frac{N}{\sum_{u=1}^N (f_{iu}^{(p)})^2}} = \sqrt{\frac{150}{\sum_{u=1}^N (f_{iu}^{(p)})^2}} = 0,5$$

$$f_{iu}^{(3)} = u_{iu} = 3,333333333(x_{iu}^3 - 0,85x_{iu})$$

Отже для фактору обертів шпинделя за хвилину,  $X_2$  ми отримали наступні поліноми Чебишева:

$$f_{iu}^{(1)} = x_{iu} = 0,00025(X_{iu} - 6000)$$

$$f_{iu}^{(2)} = z_{iu} = 2(x_{iu}^2 - 0,5)$$

$$f_{iu}^{(3)} = u_{iu} = 3,333333333(x_{iu}^3 - 0,85x_{iu})$$

- **Для фактору глибини різання,  $X_3$ .**

$$f_{iu}^{(1)} = x_{iu} = a_{11i}(X_{iu} + a_{10i})$$

$$a_{10i} = -\frac{\sum_{u=1}^N X_{iu}}{N} = -\frac{150}{150} = -1$$

$$a_{11i} = \frac{1}{|(X_{iu} + a_{10i})_{\max}|} = \frac{1}{|0,5|} = 2$$

$$f_{iu}^{(1)} = x_{iu} = 2(X_{iu} - 1)$$

$$f_{iu}^{(2)} = z_{iu} = a_{22i}((f_{iu}^{(1)})^2 + a_{21i}f_{iu}^{(1)} + a_{20i})$$

$$a_{20i} = -\frac{\sum_{u=1}^N (f_{iu}^{(1)})^2}{N} = -\frac{100}{150} = -0,66667$$

$$a_{21i} = -\frac{\sum_{u=1}^N (f_{iu}^{(1)})^3}{\sum_{u=1}^N (f_{iu}^{(1)})^2} = -\frac{0}{100} = 0$$

$$a_{22i} = \frac{1}{|((f_{iu}^{(1)})^2 + a_{21i}f_{iu}^{(1)} + a_{20i})_{\max}|} \cdot k_i^p = \frac{1}{0,333333} \cdot 0,5 = 1,5$$

$$\text{де } k_i^p = \sqrt{\frac{N}{\sum_{u=1}^N (f_{iu}^{(p)})^2}} = \sqrt{\frac{150}{\sum_{u=1}^N (f_{iu}^{(p)})^2}} = 0,5$$

$$f_{iu}^{(2)} = z_{iu} = 1,5(x_{iu}^2 - 0,66667)$$

Для фактору глибини різання,  $X_3$  ми отримали наступні поліноми Чебишева:

$$f_{iu}^{(1)} = x_{iu} = 2(X_{iu} - 1)$$

$$f_{iu}^{(2)} = z_{iu} = 1,5(x_{iu}^2 - 0,66667)$$

- Для фактору подачі МОР,  $X_4$ .

$$f_{iu}^{(1)} = x_{iu} = a_{11i}(X_{iu} + a_{10i})$$

$$a_{10i} = -\frac{\sum_{u=1}^N X_{iu}}{N} = -\frac{75}{150} = -0,5$$

$$a_{11i} = \frac{1}{|(X_{iu} + a_{10i})_{\max}|} = \frac{1}{|0,5|} = 2$$

$$f_{iu}^{(1)} = x_{iu} = 2(X_{iu} - 0,5)$$

Для фактору подачі МОР,  $X_4$  ми отримали наступні поліноми Чебишева:

$$f_{iu}^{(1)} = x_{iu} = 2(X_{iu} - 0,5)$$

### 3.6.2. Побудова взаємодій

Як вже було вказано вище, взаємодії будуються почленним перемноженням значень стовпців перетвореного фактора (значень поліномів Чебишева) між собою.

Виведемо матрицю початкових, перетворених даних і взаємодій (див. Додаток 2)

### 3.6.3. Ідентифікація моделі

Загальний вигляд статистичної моделі буде наступний:

$$y = b_0 + b_1x_1 + \dots + b_i x_i + \dots + b_k x_k - \text{лінійний поліном.}$$

Задача регресійного аналізу коли місце має вплив багатьох факторів на результат відгуку постає в тому, щоб побудувати функцію моделі таку при якому відхилення результатів відгуку  $y_i$  було б мінімальним. Тобто мінімізуючи вираз:

$$\sum_{u=1}^N (y_i - y_i)^2 \rightarrow \min$$

Для визначення мінімуму попереднього виразу необхідно знайти часткові похідні по всім невідомим коефіцієнтам  $b_0, b_1, b_2, \dots, b_i, \dots, b_k$  і прирівняти їх до нуля. Отримані рівняння складають систему лінійних рівнянь, коренями якої є коефіцієнти моделі  $b_0, b_1, b_2, \dots, b_i, \dots, b_k$ .

$$Nb_0 + b_1 \sum x_{i1} + b_2 \sum x_{i2} + \dots + b_j \sum x_{ij} + \dots + b_p \sum x_{ip} = \sum y_i$$

$$b_0 \sum x_{i1} + b_1 \sum x_{i1}^2 + b_2 \sum x_{i1}x_{i2} + \dots + b_j \sum x_{i1}x_{ij} + \dots + b_p \sum x_{i1}x_{ip} = \sum y_i x_{i1}$$

.....

$$b_0 \sum x_{ij} + b_1 \sum x_{i1}x_{ij} + b_2 \sum x_{i2}x_{ij} + \dots + b_j \sum x_{ij}^2 + \dots + b_p \sum x_{ip}x_{ij} = \sum y_i x_{ij}$$

.....

$$b_0 \sum x_{ip} + b_1 \sum x_{i1}x_{ip} + b_2 \sum x_{i2}x_{ip} + \dots + b_j \sum x_{ij}x_{ip} + \dots + b_p \sum x_{ip}^2 = \sum y_i x_{ip}$$

Або в матричній формі:

$$X^T XB = X^T Y$$

де  $B$  - вектор-стовбець невідомих коефіцієнтів апроксимуючого поліному.

$$B = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_j \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_p \end{pmatrix}$$

$X$  - матриця всіх значень всіх факторів, які були отримані при проведенні вимірів чи спостережень.

$$X = \begin{pmatrix} x_{10} & x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1j} & \dots & x_{1p} \\ x_{20} & x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2j} & \dots & x_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{i0} & x_{i1} & x_{i2} & \dots & x_{ij} & \dots & x_{ip} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n0} & x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nj} & \dots & x_{np} \end{pmatrix}$$

$x_{i0}$  - вектор-стовбець, який визначає вільний член рівняння регресії. В матриці початкових даних цей стовбець складається з одиниць.

$Y$  - вектор-стовбець дослідних даних (відгук).

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_i \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{pmatrix}$$

$^T$  - знак транспонування матриці.

$X^T$  - матриця транспонована до матриці  $X$  :

$$X^T X = \begin{pmatrix} n & \sum x_{i1} & \sum x_{i2} & \dots & \sum x_{ij} & \dots & \sum x_{ip} \\ \sum x_{i1} & \sum x_{i1}^2 & \sum x_{i1}x_{i2} & \dots & \sum x_{i1}x_{ij} & \dots & \sum x_{i1}x_{ip} \\ \sum x_{i2} & \sum x_{i2}x_{i1} & \sum x_{i2}^2 & \dots & \sum x_{i2}x_{ij} & \dots & \sum x_{i2}x_{ip} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum x_{ij} & \sum x_{ij}x_{i1} & \sum x_{ij}x_{i2} & \dots & \sum x_{ij}^2 & \dots & \sum x_{ij}x_{ip} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum x_{ip} & \sum x_{ip}x_{i1} & \sum x_{ip}x_{i2} & \dots & \sum x_{ip}x_{ij} & \dots & \sum x_{ip}^2 \end{pmatrix}$$

$$X^T Y = \begin{pmatrix} \sum y_i \\ \sum y_i x_{i1} \\ \sum y_i x_{i2} \\ \dots \\ \dots \\ \sum y_i x_{ij} \\ \dots \\ \sum y_i x_{ip} \end{pmatrix}$$

Для вирішення системи нормальних рівнянь в матричній формі, помножимо її зліва на обернену матрицю до системи нормальних рівнянь:

$$(X^T X)^{-1}(X^T X)B = (X^T X)^{-1}(X^T Y)$$

$$(X^T X)^{-1}(X^T X) = E$$

де  $E$  - одинична матриця.

Таким чином, вирішення системи рівнянь в матричній формі запишемо наступним чином:

$$B = (X^T X)^{-1}(X^T Y)$$

Звідки кожен коефіцієнт регресії можна знайти по формулі:

$$b_j = \sum_{i=0}^n c_{ij} \sum_{i=1}^n y_i y_{ij}$$

де  $c_{ij}$  - елементи оберненої матриці  $(X^T X)^{-1}$ .

Були отримані наступні коефіцієнти регресії.

Таблиця 3.5 – Коефіцієнти регресії

$Y$	1,08775
$x_1$	0,13409
$z_1$	-0,01503
$u_1$	0,01341
$x_2$	-0,13133
$z_2$	0,00134
$u_2$	0,05349
$x_3$	-0,15357
$z_3$	0,06169
$x_4$	0,15373
$x_1x_2$	-0,03526
$x_1x_3$	-0,05182
$x_1x_4$	0,04905
$x_2x_3$	0,17507
$x_2x_4$	-0,13430
$x_3x_4$	-0,16989

Тоді наша модель буде наступною:

$$y = 1,08775 + 0,13409x_1 - 0,01503z_1 + 0,01341u_1 - 0,13133x_2 + 0,00134z_2 + 0,05349u_2 - 0,15357x_3 + 0,06169z_3 + 0,15373x_4 - 0,03526x_1x_2 - 0,05182x_1x_3 + 0,04905x_1x_4 + 0,17507x_2x_3 - 0,13430x_2x_4 - 0,16989x_3x_4$$

Індивідуальні довірчі інтервали для коефіцієнтів регресії обчислюються за формулою:

$$b_i \pm t_{\alpha, \nu_{\text{відм}}} s_{\text{відм}} \sqrt{c_{ii}} / \sqrt{n} \alpha, \nu_{\text{відм}}$$

де  $s_{\text{відм}}$  - середнє квадратичне відхилення;

$c_{ii}$  - діагональний елемент матриці  $(X^T X)^{-1}$ ;

$t_{\alpha, \nu_{\text{відм}}}$  - критичне значення критерію Стьюдента;

$\alpha$  - рівень значущості ( $\alpha=0,05$ );

$\nu_{\text{відг}}$  - степенями свободи.

Таблиця 3.6 – Довірчі інтервали

Позн.	Коефіцієнти	Нижні 95%	Верхні 95%
$Y$	1,08775	1,04639	1,12910
$x_1$	0,13409	0,07561	0,19258
$z_1$	-0,01503	-0,06446	0,03440
$u_1$	0,01341	-0,04507	0,07190
$x_2$	-0,13133	-0,18981	-0,07284
$z_2$	0,00134	-0,04809	0,05077
$u_2$	0,05349	-0,00500	0,11197
$x_3$	-0,15357	-0,20422	-0,10292
$z_3$	0,06169	0,00320	0,12017
$x_4$	0,15373	0,11238	0,19509
$x_1x_2$	-0,03526	-0,11797	0,04745
$x_1x_3$	-0,05182	-0,12345	0,01981
$x_1x_4$	0,04905	-0,00943	0,10754
$x_2x_3$	0,17507	0,10344	0,24670
$x_2x_4$	-0,13430	-0,19279	-0,07581
$x_3x_4$	-0,16989	-0,22054	-0,11924

Щоб перевірити значущість коефіцієнта регресії використовують значення  $t$ -критерію. Використання цього критерію є обґрунтованим у випадку ПФЕ, коли всі стовпці матриці ортогональні.

Формула критерію Стюдента:

$$t = \frac{b_i \sqrt{n}}{s_{\text{відг}} \sqrt{c_{ii}}}$$

Якщо  $t > t_{\alpha, \nu_{\text{відг}}}$  - коефіцієнт значимий.

Таблиця 3.7. – Значення  $t$ -критерію.

Позн.	Коефіцієнти	$t$	$P$
-------	-------------	-----	-----

$Y$	1,08775	52,02	0,00000
$x_1$	0,13409	4,53	0,00001
$z_1$	-0,01503	-0,60	0,54863
$u_1$	0,01341	0,45	0,65085
$x_2$	-0,13133	-4,44	0,00002
$z_2$	0,00134	0,05	0,95738
$u_2$	0,05349	1,81	0,07273
$x_3$	-0,15357	-6,00	0,00000
$z_3$	0,06169	2,09	0,03887
$x_4$	0,15373	7,35	0,00000
$x_1x_2$	-0,03526	-0,84	0,40065
$x_1x_3$	-0,05182	-1,43	0,15481
$x_1x_4$	0,04905	1,66	0,09949
$x_2x_3$	0,17507	4,83	0,00000
$x_2x_4$	-0,13430	-4,54	0,00001
$x_3x_4$	-0,16989	-6,63	0,00000

Відкинемо не значущі коефіцієнти регресії (позначені червоним) і отримаємо остаточну модель:

$$y = 1,08775 + 0,13409x_1 - 0,13133x_2 - 0,15357x_3 + 0,15373x_4 + 0,17507x_2x_3 - 0,13430x_2x_4 - 0,16989x_3x_4$$

### 3.7. Аналіз якості моделі

#### 3.7.1. Інформативність

Про інформативність свідчить величина множинного коефіцієнта кореляції  $R$ . Чим ближче значення  $R$  до одиниці тим інформативніша у нас модель.

Знайдемо величину  $R^2$ :

$$R^2 = \frac{\sum_{u=1}^N (y_u - \bar{y})^2}{\sum_{u=1}^N (\bar{y}_u - \bar{y})^2} = 0,63$$

Тоді

$$R = \sqrt{R^2} = \sqrt{0,63} = 0,8$$

Ця умова є необхідною, але не достатньою. Для достатності необхідно перевірити значущість  $R$  за критерієм Фішера:

$$F_{\nu_k, \nu_{зал}}^{експ} = \frac{SS_{k'}}{\nu_{k'}} \div \frac{SS_{зал}}{\nu_{зал}} = \frac{s_{k'}^2}{s_{зал}^2} = \frac{1,01438}{0,06558} = 15,4673$$

$SS_{k'}$  - пов'язана з  $k'$  коефіцієнтами моделі сума квадратів відхилень;

$SS_{зал}$  - залишкова сума квадратів відхилень;

$\nu_k, \nu_{зал}$  - відповідні степені вільності;

$$SS_{k'} = \sum_{u=1}^N (\bar{y}_u - \bar{y})^2 - \sum_{u=1}^N (\bar{y}_u - y_u)^2$$

$$SS_{зал} = \sum_{u=1}^N \sum_{l=1}^n (y_{ul} - y_u)^2$$

$$\nu_k = k' - 1$$

$$\nu_{зал} = Nn - k'$$

$$F_{\alpha, \nu_k, \nu_{зал}}^{крит} = 1,7416$$

Якщо  $F_{\nu_k, \nu_{зал}}^{експ} > F_{\alpha, \nu_k, \nu_{зал}}^{крит}$  то модель інформативна.

$15,4673 > 1,7416$  - модель інформативна.

### 3.7.2. Адекватність

Якщо є дублюючі досліди в експерименті то адекватність перевіряється за критерієм Фішера. Якщо задовольняється умова:

$$F^{експ} = \frac{S_{зал}^2}{S_{відм}^2} < F_{\alpha; N-k'; N(n-1)}^{крит}$$

то модель є адекватною.

Коли повторні досліди відсутні, модель вважається адекватною, якщо виконується умова:

$$\frac{s^2}{s_{\text{заг}}^2} > \frac{(N-k')F_{\alpha; N-k'; N(n-1)}^{\text{крим}}}{(N-1)(1+(k'-1)(N-k')}$$

$$\frac{s^2}{s_{\text{заг}}^2} = 2,456436538 > 0,000778865 = \frac{(N-k')F_{\alpha; N-k'; N(n-1)}^{\text{крим}}}{(N-1)(1+(k'-1)(N-k')}$$

Модель є адекватною.

### 3.7.3. Стійкість

При повному факторному експерименті стійкість – ідеальна. Недоцільно перевіряти її в нашому випадку.

### 3.7.4. Аналіз структури зв'язків

Визначимо розподіл впливу регресора на відгук. Знаходиться цей вплив за формулою:

$$\gamma = \frac{\sum_{i=1}^N (k_j \cdot x_i)^2}{\sum_{i=1}^N y_i^2}$$

де  $k_j$  - коефіцієнт в моделі біля регресора;

$x_i$  - значення регресора;

$y_i$  - значення відгуку за моделлю.

Отримуємо наступні данні:

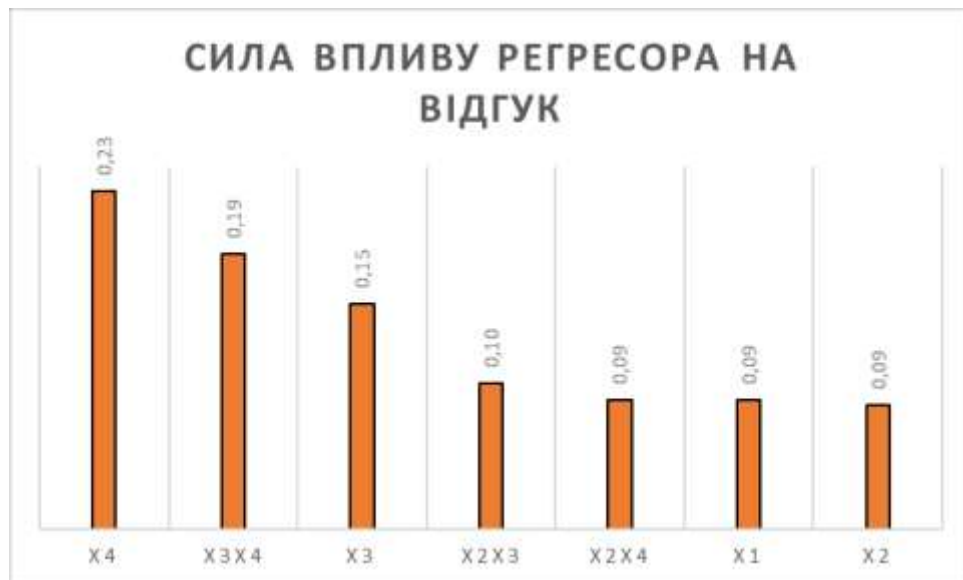


Рис. 3.12. Сила впливу регресора на відгук.

### 3.7.5. Аналіз залишків

Залишки (похибки) – величини, які не пояснюються регресійним рівнянням. Залишки визначаються як різниця «дослідного» відгуку для конкретного номеру досліду і його розрахованим значенням по моделі:

$$e = \bar{y}_i - y_i$$

Якщо модель правильна то:

- Похибки незалежні.
- Похибки мають нульові середні значення та постійну дисперсію.
- Розподіл похибки має бути нормальним.
- Залишки мають бути незалежними (незалежність залишків від часу).

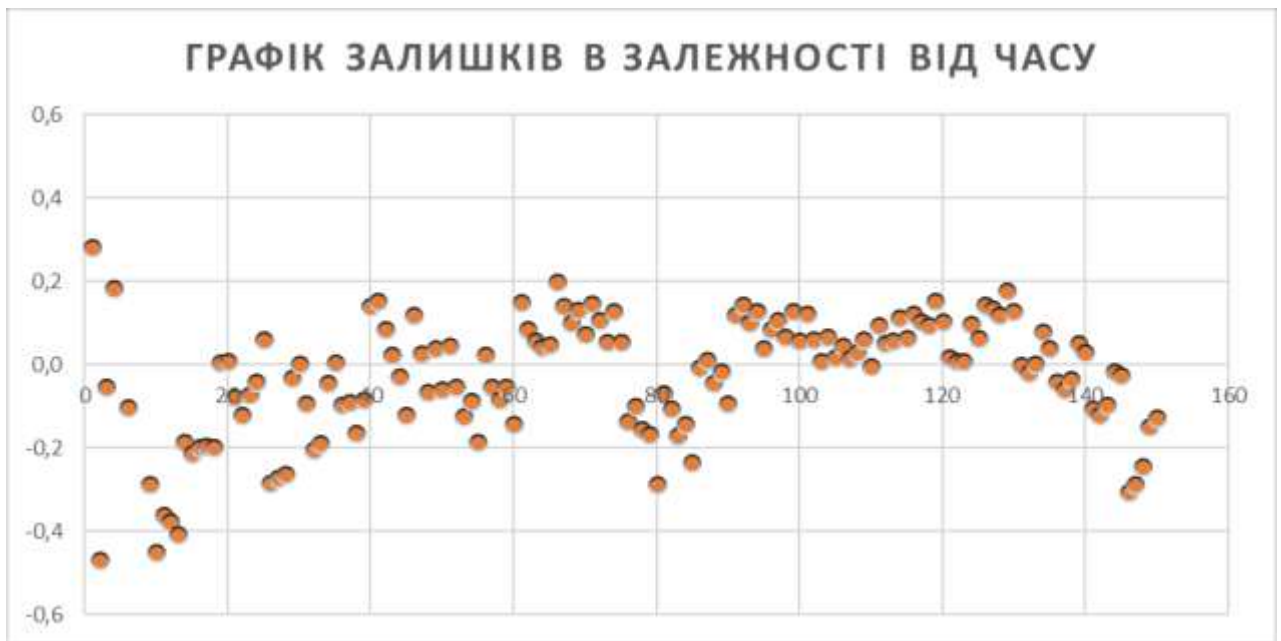


Рис. 3.13. Графік залишків в залежності від часу.

Як бачимо точки здебільшого вкладаються в рівну горизонтальну смугу, що означає сталу дисперсію залишків отже залежності від часу немає.



Рис. 3.14. Залежність залишку від розрахованого значення відгуку за моделлю.

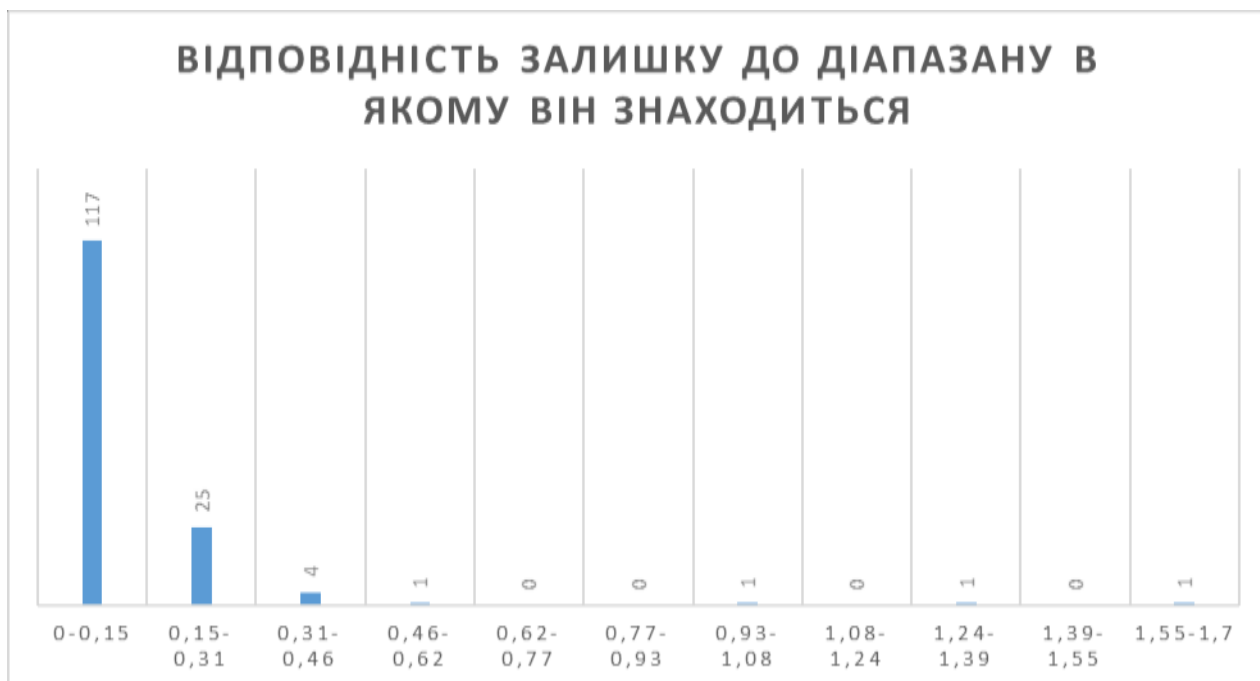


Рис. 3.15. Кількість точок залишків у відповідності до діапазону значень в якому вони знаходяться.

### 3.8. Висновки

В ході даної роботи була побудована математична модель, для досліджуваного процесу, на основі повного факторного експерименту, а саме

$$y = 1,08775 + 0,13409x_1 - 0,13133x_2 - 0,15357x_3 + 0,15373x_4 + 0,17507x_2x_3 - 0,13430x_2x_4 - 0,16989x_3x_4$$

де

$$x_1 = 25(X_{1u} - 0,09)$$

$$x_2 = 0,00025(X_{2u} - 6000)$$

$$x_3 = 2(X_{3u} - 1)$$

$$x_4 = 2(X_{4u} - 0,5).$$

Значення множинного коефіцієнта кореляції  $R = 0,8$ . Значущість  $R$  за критерієм Фішера з рівнем значущості ( $\alpha = 0,05$ ):  $15,4673 = F_{V_k, V_{зал}}^{експ} > F_{\alpha, V_k, V_{зал}}^{крит} = 1,7416$ , що говорить нам про хорошу інформативність моделі. Умова адекватності моделі без повторних дослідів теж виконується – модель адекватна. Стійкість

моделі при повному факторному експерименті – ідеальна. При аналізі залишків було отримано: залежності від часу немає, похибки незалежні, розподіл похибки нормальний.

Дані регресори ( $X_1, X_2, X_3, X_4$ ) пояснюють модель на 60% ще 40% - фактори, які не враховувалися в даному дослідженні.

Серед наявних регресорів у нашому дослідженні найбільше на значення шорсткості ( $R_a$ ) впливає наявність МОР ( $X_4$ ) – 23%, далі йде спільний вплив факторів глибини різання і наявності МОР ( $X_3, X_4$ ) – 19%, глибина різання ( $X_3$ ) – 15%, спільний вплив факторів швидкості різання і глибини різання ( $X_2, X_3$ ) – 9%, вплив фактору швидкості подачі ( $X_1$ ) – 9%, вплив фактору швидкості різання ( $X_2$ ) – 9% (див. рис. 3.12).

Модель має хорошу прогностичність оскільки вплив факторів на модель має лінійний характер (див. рис. 3.16 - 3.18). Бачимо, що зі збільшенням швидкості подачі на зуб ( $X_1$ ) – параметр шорсткості ( $R_a$ ) зростає. Зі збільшенням швидкості різання ( $X_2$ ) – параметр шорсткості ( $R_a$ ) зменшується. Зі збільшенням глибини різання ( $X_3$ ) – параметр шорсткості ( $R_a$ ) збільшується. Про фактор наявності МОР ( $X_4$ ), можна сказати, що шорсткість більша при обробці з використанням МОР, а без - менша.

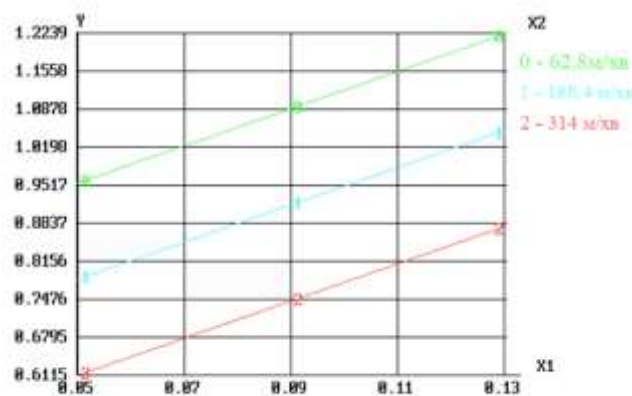


Рис. 3.16. Залежність шорсткості від швидкості подачі при різних швидкостях різання ( $X_3 = 0,5, X_4 = 0$ )

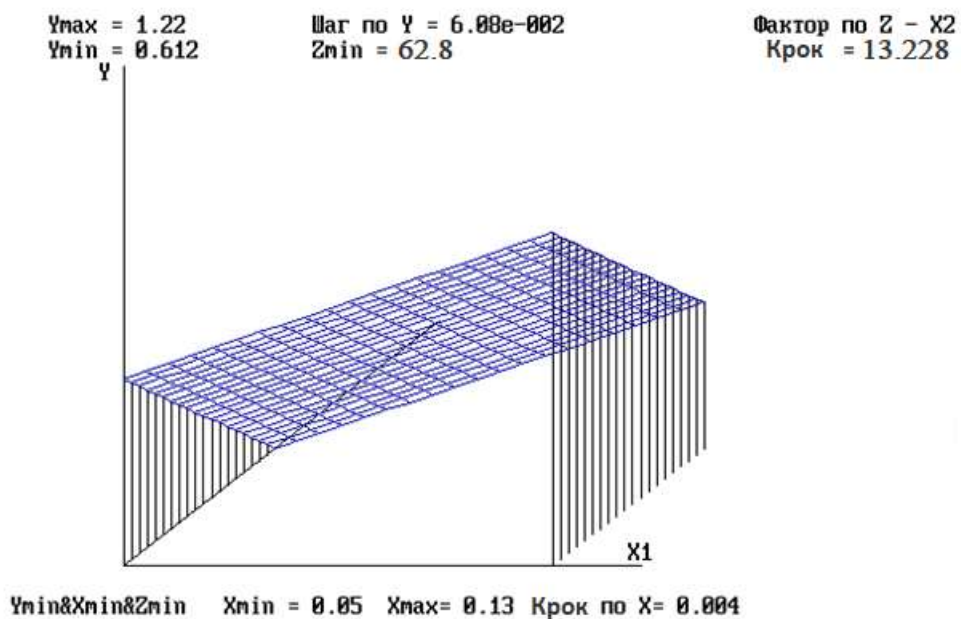


Рис. 3.17. Залежність шорсткості від швидкості подачі ( $X_1$ ) та швидкості різання ( $X_2$ ) при  $X_3 = 0,5$ ,  $X_4 = 0$ .

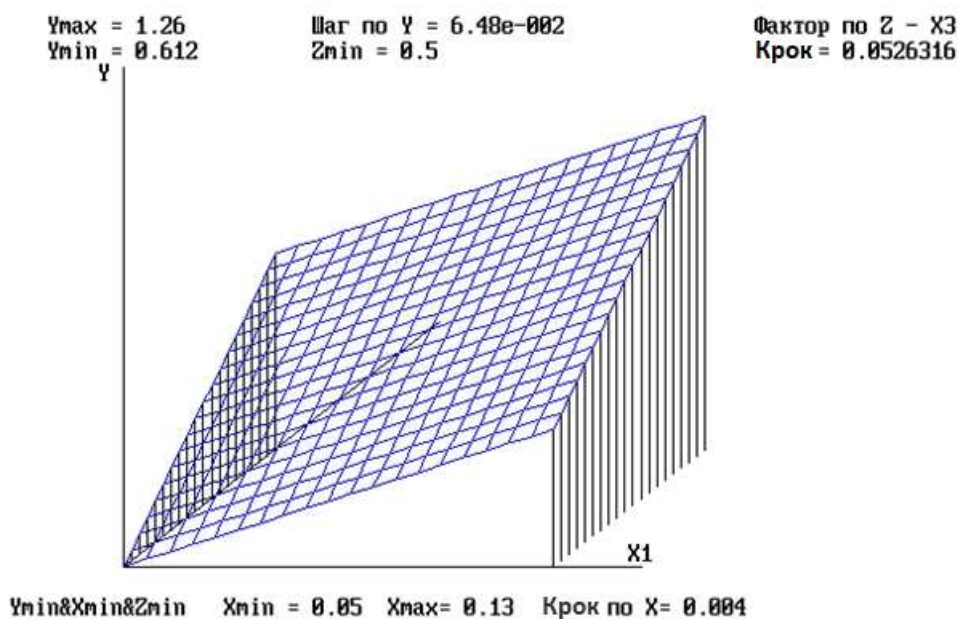


Рис. 3.18. Залежність шорсткості від швидкості подачі ( $X_1$ ) та глибини різання ( $X_3$ ) при  $X_2 = 314$ ,  $X_4 = 0$ .

## 4. СТАРТАП

### 4.1. Опис ідеї

Математична модель процесу різання для отримання відповідної шорсткості може бути корисною для виробників інструментів та обладнання для обробки матеріалів. Ця модель дозволить точно визначити параметри різання, які забезпечать потрібну якість обробки поверхні матеріалу.

Загальні напрями використання цього проекту включають удосконалення технологій обробки матеріалів, підвищення якості виготовлених деталей, зменшення витрат на виробництво через оптимізацію процесу різання.

Відмінність цього проекту від конкурентів полягає в тому, що він базується на математичних моделях, які дозволяють прогнозувати результати різання з великою точністю. Це дає перевагу у виборі оптимальних параметрів різання і забезпечує високу якість обробки поверхні матеріалу.

Для реалізації цього проекту важливо провести аналіз ринку і визначити потенційних клієнтів, які можуть зацікавитися використанням математичної моделі процесу різання. Це можуть бути виробники інструментів та обладнання для обробки матеріалів, а також підприємства, які займаються виготовленням деталей з алюмінію або інших матеріалів.

Також важливо вивчити потреби цих компаній і визначити, як саме математична модель може вирішити їхні проблеми або покращити їхні технології. Наприклад, це може бути зменшення часу обробки, підвищення точності обробки або зменшення витрат на матеріали та енергію.

Також варто врахувати конкурентне середовище і визначити, чим саме цей проект відрізняється від інших пропозицій на ринку. Якщо схожих продуктів немає, це може бути великою перевагою.

Нарешті, важливо також провести аналіз фінансової доцільності проекту, визначивши очікувану вартість розробки моделі, потенційний обсяг продажів

та прибуток від її використання. Такий аналіз допоможе зробити висновок про рентабельність проекту і його перспективи на ринку.

Табл.4.1. - Опис ідеї проекту

Зміст ідеї	Напрямки застосування	Вигоди для користувача
Математична модель процесу різання для отримання відповідної шорсткості при обробленні деталей	Виробники інструментів та обладнання для обробки матеріалів, а також підприємства, які займаються виготовленням деталей з алюмінію	1. Удосконалення технологій обробки матеріалів
		2. Підвищення якості виготовлених деталей
		3. Зменшення витрат на виробництво через оптимізацію процесу різання.

#### 4.2. Технологічний аудит

Аудит допоможе визначити, чи існують вже наявні технології, які можна використати для реалізації проекту, або чи потрібно розробляти нові методи. Також важливо врахувати можливі технічні обмеження і ризики, пов'язані з впровадженням нової технології.

В нашому випадку проводити аудит не доцільно. Технологія створення моделі мені доступна і в даній роботі вже було наведено її алгоритм.

#### 4.3. Аналіз ринкових можливостей запуску

Табл. 4.2. - Характеристика ринку стартап-проекту

№	Показники стану ринку	Характеристика
---	-----------------------	----------------

1	К-сть гравців, од.	3
2	Загальний обсяг продаж грн/од.	4000/4000/4000
3	Динаміка ринку	Зростає
4	Специфічні вимоги до стандартизації	ДСТУ
5	Середня норма рентабельності в галузі (%)	40%

Табл. 4.3. - Характеристика потенційних клієнтів

№	Потреба	Цільова аудиторія	Відмінності у поведінці цільових груп клієнтів	Вимоги до товару
1.	Математична модель процесу різання для отримання відповідної шорсткості при обробленні деталей	Метрологічні компанії, виробничі компанії	Точність Швидкість та прибутковість	Точність Зручне використання

Табл. 4.4. - Фактори загроз

№	Фактор	Реакція компанії
1	Недостатня точність продукту	Підвищення точності
2	Висока вартість	Зниження ціни за рахунок високої рентабельності

#### 4.4. Розроблення ринкової стратегії

Табл. 4.5. - Вибір цільових груп потенційних споживачів

№	Готовність прийняти продукт	Готовність прийняти продукт	Попит в межах групи	Інтенсивність конкуренції	Простота входу
---	-----------------------------	-----------------------------	---------------------	---------------------------	----------------

1	Метрологічні компанії	Готові	Високий	Висока	Легка
2	Виробничі компанії	Готові	Високий	Висока	Легка

Таблиця 4.6. - Визначення стратегії розвитку

№	Обрана альтернатива розвитку	Стратегія охоплення ринку	Ключові конкурентоспроможні позиції відповідно до обраної альтернативи	Базова стратегія розвитку
1	Стратегія стабільності	Орієнтування на постійних клієнтів	Постійна ціна та хороша якість	Стратегія стабільності

#### 4.5. Розроблення маркетингової програми

Таблиця 4.7. - Визначення ключових переваг концепції потенційного товару

№	Потреба	Вигода, що пропонує товар	Переваги над конкурентами
1	Точність	Висока точність	Модель достатньо точна, щоб конкурувати на ринку
2	Ціна	Низька ціна	Собівартість виготовлення дуже низька
3	Зручність	Досить зручний продукт	В керуванні розібратись легко

Таблиця 4.8. - Опис трьох рівнів моделі товару

Рівні	Сутність та складові
Товар за задумом	Висока точність, низька ціна, зручне

	використання.		
Товар у реальному виконанні	Характеристики	Нм	Тл/Вр
	Точність	Нм	Тл
	Економічність	Нм	Вр
	Якість: відповідає ДСТУ		
	Пакування: електронний носій		
	Марка: назва виробника		
Товар з підкріпленням	Реклама, знижки, постійна ціна		
З рахунок розробленого патенту товар буде захищений.			

Таблиця 4.9. - Витрати на створення стартапу

№	Витрати	Обсяг, тис. грн.
1	Оренда обладнання	50
2	Оренда приміщення	20
3	Виготовлення програми	30
4	Заробітна платня	40
5	Тестування	10
6	Рекламна компанія	20

Таблиця 4.10. - Визначення меж встановлення ціни.

№	Рівень цін аналогічних товарів	Рівень доходів споживачів	Межі встановлення ціни на товар
1	10000 грн	Середній	9000-10000 грн

Таблиця 4.11. - Система збуту

№	Специфіка поведінки закупівель клієнтів	Функції постачальника	Канал збуту	Система збуту
1	Постійне подовження підписки, передбачається зниження ціни	Доставка активаційних кодів	На нульовому рівні	Продаж від виробника

#### 4.6. Висновки до розділу

Було проведено аналіз ринку проекту. Реалізувати цей проект технічно – можливо. Продумані напрямки реалізації та збуту. Продукт має хороші характеристики для конкурування на ринку. Була розроблена рекламна компанія для просування проекту. Використовування ринку машинобудування ідеально підходить для цього стартапу. Низька собівартість виготовлення й постійний дохід за рахунок підписки на продукт за розрахунками допоможуть окупити проект за 6 місяців, при зазначеній вище кількості клієнтів.

**ЛІТЕРАТУРА**

1. Benardos, P.G.; Vosniakos, G.C. Predicting surface roughness in machining: A review. *Int. J. Mach. Tools Manuf.* 2003, 43, 833-844.
2. Felhő, C, János, K. Effects of Setting Errors (Insert Run-Outs) on Surface Roughness in Face Milling When Using Circular Inserts. *Machines* 2018, 6, 14.
3. Nowakowski, L.; Skrzyniarz, M.; Miko, E The analysis of relative oscillation during face milling. In *Proceedings of the 23rd International Conference Engineering Mechanics 2017*, Svatka, Czech Republic, 15-18 May 2017; pp. 730-733.
4. Arizmendi, M., Fernández, J Gal, A Veiga, F. Effect of tool setting error on the topography of surfaces machined by peripheral milling. *Int. J. Mach. Tools Manuf* 2009, 49, 36-52.
5. Skrzyniarz, M.; Nowakowski, L., Miko, E.; Borkowski, K. Influence of Relative Displacement on Surface Roughness in Longitudinal Turning of X37CrMoV5-1 Steel. *Materials* 2021, 14, 1317.
6. Oniță, G. Experimental Study of Vibrations in Face Milling Cutting, *ACTA Unit. Cibiniensis Tech. Ser.* 2014, 65, 73-77.
7. Fei, J., Lin, B; Yan, S.; Ding, M.; Zhang, 1; Ji, C.; Zhang, X. Modeling of surface roughness for manufactured thin-walled structure.. *Proc. Inst. Mech. Eng. Part B J. Eng. Manuf*, 2018, 233, 095440541878016.
8. Li, G.; Du, S; Huang, D., Zhao, C.; Deng, Y. Elastic mechanics-based fixturing scheme optimization of variable stiffness structure workpieces for surface quality improvement. *Precis. Eng.* 2019, 56, 343-363.
9. Wu, G., Li, G.; Pan, W.; Raja, L., Wang, X. Ding, S. A state-of-art review on chatter and geometric errors in thin-wall machining processes. *J. Manuf, Processes* 2021, 68, 454-480.
10. Yang, D.; Liu, Z. Surface plastic deformation and surface topography prediction in peripheral milling with variable pitch end mill. *Int. J. Mach. Tools Manuf*, 2015, 91, 43-53.

11. Morelli, L.; Grossi, N.; Campatelli, G.; Scippa, A. Surface location error prediction in 2.5-axis peripheral milling considering tool dynamic stiffness variation. *Precis. Eng.* 2022, 76, 95-109.
12. Liu, G.; Dang, J.; Li, C.; Ming, W.; An, Q.; Chen, M. Investigation on the vibration and machined surface quality in tilt side milling of thin-walled plates. *Int. J. Adv. Manuf. Technol.* 2019, 103, 2287-2300.
13. Wang, W.; Li, Q.; Yunfeng, J. Effect of the dynamic stiffness of a five-axis machine tool on the quality of sculptured surface. *Adv. Mech. Eng.* 2016, 8, 1687814016683306.
14. Yan, B.; Zhu, L.; Liu, C. Prediction model of peripheral milling surface geometry considering cutting force and vibration. *Int. J. Adv. Manuf. Technol.* 2020, 110, 1429-1443.
15. Wang, W.; Kweon, S.H.; Yang, S.H. A study on roughness of the micro-end-milled surface produced by a miniaturized 471 machine tool. *J. Mater. Processing Technol.* 2005, 162, 702-708.
16. Coelho, R.T.; Diniz, A.E.; da Silva, T.M. An Experimental Method to Determine the Minimum Uncut Chip Thickness ( $h_{min}$ ) in Orthogonal Cutting. *Procedia Manuf.* 2017, 10, 194-207.
17. Nowakowski, L.; Miko, E.; Skrzyniarz, M. Designation of the minimum thickness of machined layer for the milling process of Duralumin PA6. In *Proceedings of the 23rd International Conference Engineering Mechanics 2017*, Svratka, Czech Republic, 15-18 May 2017; pp. 722-725.
18. Oliveira, F.B.; Rodrigues, A.R.; Coelho, R.T.; Souza, A.F. Size effect and minimum chip thickness in micromilling. *Int. J. Mach. Tools Manuf.* 2015, 89, 39-54.
19. Skrzyniarz, M. A Method to Determine the Minimum Chip Thickness during Longitudinal Turning. *Micromachines* 2020, 11, 1029.

20. Denkena, B.; Köhler, J.; Sellmeier, V.; Mörke, T. Topography prediction of resilient parts after flank milling with chamfered tools. *Prod. Eng.* 2011, 5, 273-281.
21. Zhuo, Y., Han, Z.; An, D.; Jin, H. Surface topography prediction in peripheral milling of thin-walled parts considering cutting vibration and material removal effect. *Int. J. Mech. Sci.* 2021, 211, 106797.
22. Arizmendi, M.; Jiménez, A. Modelling and analysis of surface topography generated in face milling operations. *Int. J. Mech. Sci.* 2019, 163, 105061.
23. Torta, M.; Albertelli, P.; Monno, M. Surface morphology prediction model for milling operations. *Int. J. Adv. Manuf. Technol.* 2020, 106, 3189-3201.
24. Zawada-Michałowska, M.; Kuczmaszewski, J.; Legutko, S.; Pieško, P. Techniques for Thin-Walled Element Milling with Respect to Minimising Post-Machining Deformations. *Materials* 2020, 13, 4723.
25. Dayura, V.; Maruschak, P.; Slavov, S.; Dimitrov, D.; Vasileva, D. Experimental Research of Partial Regular Microreliefs Formed on Rotary Body Face Surfaces. *Aviation* 2021, 25, 268-277.
26. Chuchala, D.; Dobrzyński, M.; Pimenos, D.Y.; Orłowski, A.K.; Królczyk, G.; Glasin, K. Surface Roughness Evaluation in Thin EN AW-6086-T6 Alloy Plates after Face Milling Process with Different Strategies. *Materials* 2021, 14, 3006.
27. Yildiz, A.R. A new hybrid differential evolution algorithm for the selection of optimal machining parameters in milling operations. *Appl. Soft Comput.* 2013, 13, 1561-1566.
28. Xing, Z.; Zhang, J.; Bo, P.; Zhao, W. An accurate prediction method of cutting forces in 5-axis flank milling of sculptured surface. *Int. J. Mach. Tools Manuf.* 2016, 104, 26-36.

29. Yildiz, A.R. Cuckoo search algorithm for the selection of optimal machining parameters in milling operations. *Int J Ado Ma Technol.* 2013, 64, 55-61.
30. Surasit Rawangwong, Jaknarin Chatthong, Worapong Boonchouytan, Romadorn Burapa, "Influence of Cutting Parameters in Face Milling Semi-Solid AA 7075 Using Carbide Tool Affected the Surface Roughness and Tool Wear", 11th Eco- Energy and Materials Science and Engineering, *Energy procedia* 56 (2014) 448-457.
31. W. Li, Y.B. Guo, M.E. Barkey, J.B. Jordon, "Effect Tool Wear during End Milling on the Surface Integrity and Fatigue Life of Inconel 718", 6th CIRP International Conference on High Performance Cutting, 2014, *Procedia CIRP* 14 (2014)546-551.
32. M. S. Sukumar, P. Venkata Ramaiah, A. Nagarjuna, "Optimization and Prediction of Parameters in Face Milling of Al-6061 Using Taguchi and ANN Approach", 12th Global Congress On Manufacturing And Management.2014. *Procedia Engineering* 97 ( 2014) 365-371.
33. Lohithaksha M Maiyar, Dr.R.Ramanujam, K.Venkatesan Dr.J.Jerald, "Optimization of Machining Parameters for End Milling of Inconel 718 Super Alloy Using Taguchi Based Grey Relational Analysis", International Conference on DESIGN AND MANUFACTURING, IConDM 2013, *Procedia Engineering* 64 ( 2013) 1276-1282.
34. Surasit Rawangwong, Jaknarin Chatthong, Worapong Boon chouytan, and Romadorn Burapa, "An Investigation of Optimum Cutting Conditions in Face Milling Aluminum Semi Solid 2024 Using Carbide Tool", 10th Eco-Energy and Materials Science and Engineering (EMSES2012), *Energy Procedia* 34 (2013) 854-862.
35. Shokrani, V. Dhokia, S.T Newman, R. Imani-Asrai, "An Initial Study of the Effect of Using Liquid Nitrogen Coolant on the Surface Roughness of Inconel 718

Nickel-Based Alloy in CNC Milling", 45th CIRP Conference on Manufacturing Systems 2012. Procedia CIRP 3 (2012) 121-125.

36. A.K.M. Nurul Amin, Syidatul Akma Sulaima, Siti Noor Izzati Mohd Zainun, M. D. Arif, "Surface Roughness Optimization in End Milling of Stainless Steel AISI304 with Uncoated WC-Co Insert Under Magnetic Field", Advanced Materials Research Vol. 576 (2012) pp 119-122.

37. Lakshmi pathi Tammineni, Hari Prasada Reddy Yedula, "Investigation of influence of milling parameters on surface roughness and flatness", International Journal of Advances in Engineering & Technology, Jan. 2014. IJAET ISSN: 22311963

38. Muhammad Yasir, Turnad Lenggo Ginta, "Effect of Cutting Speed And Feed Rate On Surface Roughness Of AISI 316L SS Using End-Milling". ARPN Journal of Engineering and Applied Sciences, VOL. 11, NO. 4, February 2016.

39. ZCCCT Catalogue 2022-2023.

40. Статистические методы построения эмпирических формул, Львовский Б.Н., 1988. Во 2-м издании пособия (1-е - 1982 г.)