

(k + 1)-ДІАГОНАЛЬНІ МАТРИЦІ ТА ЇХ ЗВ'ЯЗОК З ПОВОРОТНИМИ ПОСЛІДОВНОСТЯМИ k-ГО ПОРЯДКУ

А.С. АЛЕКСАНДРОВА, В.О. БІЛИЙ, О.Ю. КОЛЕСОВ

Якщо поворотна послідовність k -го порядку задана своїм рекурентним співвідношенням $x_n = \sum_{p=1}^k a_p x_{n-p}$, то виникає необхідність для зручності обчислень або вивчення властивостей елементів даної послідовності та інших задач знайти альтернативний метод визначення загального члена x_n . Це або аналітична формула типу формули Біне, або вираження через біноміальні коефіцієнти, континуанти, матриці і т. д. У даній роботі для цього розглянемо $(k + 1)$ -діагональні матриці типу Тепліца–Гессенберга.

Розглянемо матрицю $A_n(a_0; a_1, a_2, \dots, a_k)$ та обчислимо її визначник методом рекурсивних співвідношень. Маємо, розкладаючи покроково за елементами першого стовпчика,

$$\begin{aligned} \Delta_n = \det A_n(a_0, a_1, \dots, a_k) &= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_k & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{k-1} & a_k & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & \dots & a_{k-2} & a_{k-1} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & a_0 & a_1 \end{vmatrix}_n \\ &= a_1 \Delta_{n-1} - a_0 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_k & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{k-2} & a_{k-1} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & \dots & a_{k-3} & a_{k-2} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & a_0 & a_1 \end{vmatrix}_{n-1} \\ &= a_1 \Delta_{n-1} - a_0 a_2 \Delta_{n-2} + a_0^2 a_3 \Delta_{n-3} - a_0^3 a_4 \Delta_{n-4} + \dots + \\ &\quad + (-1)^{k-2} a_0^{k-2} a_{k-1} \Delta_{n-k-1} + (-1)^{k-1} a_0^{k-1} a_k \Delta_{n-k} = \\ &= \sum_{p=1}^k (-1)^{p-1} a_0^{p-1} a_p \Delta_{n-p}. \end{aligned}$$

Або, якщо $a_0 = -1$, то $\Delta_n = \det A_n(-1; a_1, a_2, \dots, a_k) = \sum_{p=1}^k a_p \Delta_{n-p}$.

Для обчислення Δ_n складемо характеристичне рівняння

$$\lambda^k - a_1 \lambda^{k-1} - a_2 \lambda^{k-2} - \dots - a_{k-1} \lambda - a_k = 0.$$

Знайдемо корені цього многочлена $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ та запишемо $\Delta_n = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n + \dots + C_k\lambda_k^n$, де константи $C_1, C_2, \dots, C_k$ знаходимо із початкових умов $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_k$.

Відмітимо тепер, що для відповідної поворотної послідовності k -го порядку з $x_n = \sum_{p=1}^k a_p x_{n-p} = \sum_{p=1}^k a_p \Delta_{n-p}$ та узгодженими початковими умовами $x_1 = \Delta_1, x_2 = \Delta_2, \dots, x_k = \Delta_k$, алгоритм дій для знаходження x_n та Δ_n ідентичний. Тому робимо висновок, що

$$x_n = \det A_n(-1; a_1, a_2, \dots, a_k),$$

тобто маємо шукане представлення загального члена відповідної поворотної послідовності у вигляді визначника $(k+1)$ -діагональної матриці.

Приклад 1. При $a_1 = 2, a_2 = -2$, маємо $x_{n+1} = 2x_n - 2x_{n-1}$, з п. у. $x_0 = 1, x_1 = 2$. Тоді $\{x_n\} = \{1, 2, 2, 0, -4, \dots\}$; $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$; $\lambda_{1,2} = 1 \pm i$,

$$x_n = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n = C_1(1+i)^n + C_2(1-i)^n, \text{ де } \begin{cases} C_1 + C_2 = 1, \\ C_1(1+i) + C_2(1-i) = 2. \end{cases}$$

$$x_n = (1+i)^{n-1} + (1-i)^{n-1} = (\sqrt{2})^{n+1} \cos \frac{(n-1)\pi}{4}, \quad x_n = \det A_n(-1, 2, -2).$$

Приклад 2. Розглянемо $\det A_n(-1, 4, 1, -16, 12)$.

Відповідна послідовність задана таким рекурентним співвідношенням: $x_{n+1} = 4x_n + x_{n-1} - 16x_{n-2} + 12x_{n-3}$. Характеристичне рівняння: $\lambda^4 - 4\lambda^3 - \lambda^2 + 16\lambda - 12 = (\lambda-1)(\lambda^2-4)(\lambda-3) = 0$, $\lambda_{1-4} = \{1; -2; 2; 3\}$. Послідовність $x_n = \{0, 0, 0, 1, 4, 17, 56, 189, \dots\}$, $x_n = C_1 + C_2(-2)^n + C_32^n + C_43^n$, де $C_1 = \frac{1}{6}, C_2 = -\frac{1}{60}, C_3 = \frac{1}{4}, C_4 = \frac{1}{10}$, тобто $x_n = \frac{1}{6} - \frac{1}{60}(-2)^n - \frac{1}{4}2^n + \frac{1}{10}3^n$. Таким чином, маємо формулу загального члена при $n \geq 1$: $x_{n+3} = \det A_n(-1, 4, 1, -16, 12)$.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] В.О. Білий, О.Г. Білий *Про послідовність Фібоначчі та інші зворотні послідовності. Матеріали VI Міжнар. наук.-практ. конф. «Математика в сучасному технічному університеті»*, Київ, - Київ: КПП ім. Ігоря Сікорського, 2018. — [інтернет-джерело], 28–29 грудня 2017р. — 201–208 с.
- [2] Taras Goy, Mark Shattuck, *Determinants of Toeplitz–Hessenberg Matrices with General Fibonacci Elements*, Faculty of Mathematics and Informatics, Vasyl Stefanyk Precarpathian National University, Ivano-Frankivsk, Ukraine / Department of Mathematics, University of Tennessee, Knoxville, USA, 2019. — [online source], October 13, 2019, pp. 83–95.

КПП ім. ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО, КИЇВ, УКРАЇНА
Email address: alexandrova23042009@gmail.com

КПП ім. ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО, КИЇВ, УКРАЇНА
Email address: valeri_y@ukr.net

КПП ім. ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО, КИЇВ, УКРАЇНА
Email address: sanyakolesov348@gmail.com