

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ  
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ  
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

**ВИЩА МАТЕМАТИКА  
ЧАСТИНА 2**

**Кратні, криволінійні, поверхні інтеграли та елементи теорії поля**

Практикум

Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського  
як навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра за освітньою програмою  
*«Нанотехнології та комп'ютерний дизайн матеріалів»*  
спеціальності 132 **Матеріалознавство**  
*Комп'ютеризовані процеси лиття*  
спеціальності 136 **Металургія**

**Укладачі: В.М. Горбачук, Ю.В. Співак**

Електронне видання

Київ  
КПІ ім. Ігоря Сікорського  
2024

Укладачі: Горбачук Володимир Мирославович, д-р фіз.-мат. наук, проф.  
Співак Юлія Володимирівна, асистент

Рецензент Л.А. Репета, канд. фіз.-мат. наук, доцент,  
Національний технічний університет України  
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

Відповідальний М.Є.Дудкін, доктор фіз.-мат. наук, професор,  
редактор Національний технічний університет України  
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

*Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського  
(протокол № 1 від 26.09.2024 р.)  
за поданням Вченої ради Фізико-математичного факультету  
(протокол № 8 від 26.06.2024 р.)*

Навчальний посібник відповідає навчальній програмі дисципліни «Вища математика» спеціальності 132 «матеріалознавство» та спеціальності 136 «металургія» підготовки студентів НН Навчально-науковий інститут матеріалознавства та зварювання імені Є.О. Патона. Подано короткі теоретичні відомості за основними темами кредитного модуля «Вища математика. Частина 2 інтегральне числення та диференціальні рівняння». Розглянуто приклади розв'язування задач «Кратні криволінійні і інтеграли по поверхні та теорія поля». Наведено 30 варіантів індивідуальних розрахункових завдань для самостійної роботи. Додатки містять довідковий матеріал з відповідних тем курсу вищої математики.

Для студентів технічних спеціальностей Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут» імені Ігоря Сікорського».

Обсяг 3 авт. Арк.

Національний технічний університет України  
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»  
проспект Перемоги, 37, м. Київ, 03056  
<https://kpi.ua>

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру видавців, виготовлювачів  
і розповсюджувачів видавничої продукції ДК № 5354 від 25.05.2017 р.

© КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2024

## Передмова

Подано короткі теоретичні відомості тем кредитного модуля «Вища математика. Частина 2». Розглянуто на прикладах основні поняття та методи обчислення кратних криволінійних і інтегралів по поверхні а також теорії поля.

Основною частиною посібника є розділи кратні криволінійних і інтеграли по поверхні а також теорії поля . За основу подання матеріалу взято навчальні посібники [1], [2]. Теоретичний матеріал, його застосування на практиці доповнено методиками обчислення кратних криволінійних та поверхневих інтегралів та теорії поля .

В навчальному посібнику наведено 30 різних варіантів завдань для РР. Наведено розв'язування типових прикладів, що допомагає студентові вивчати, знайомитись із основними формулами, правилами, теоремами теоретичної частини матеріалу, працювати над виконанням індивідуальної роботи.

Навчальне видання призначено для студентів денної форми навчання технічних спеціальностей. Його можна використати для контрольних робіт студентам заочної форми, також для підготовки до занять, заліків, екзаменів студентам всіх форм навчання, які вивчають подібний матеріал.

## Зміст

|                                                      |    |
|------------------------------------------------------|----|
| Зміст .....                                          | 4  |
| Подвійні інтеграли обчислення .....                  | 5  |
| Індивідуальні завдання №1 .....                      | 9  |
| Індивідуальні завдання № 2 .....                     | 11 |
| Індивідуальні завдання №3 .....                      | 13 |
| Потрійні інтеграли обчислення.....                   | 15 |
| Індивідуальні завдання № 4 .....                     | 21 |
| Індивідуальні завдання № 5 .....                     | 23 |
| Криволінійні інтеграли першого та другого роду ..... | 25 |
| Індивідуальні завдання № 6 .....                     | 32 |
| Індивідуальні завдання № 7 .....                     | 34 |
| Поверхневі інтеграли першого та другого роду .....   | 36 |
| Індивідуальні завдання №8 .....                      | 41 |
| Індивідуальні завдання №9 .....                      | 43 |
| Елементи теорії поля.....                            | 46 |
| Індивідуальні завдання №10 .....                     | 51 |
| Індивідуальні завдання №11 .....                     | 53 |
| Індивідуальні завдання №12 .....                     | 54 |
| Індивідуальні завдання №13 .....                     | 56 |
| Список літератури .....                              | 60 |

## Подвійні інтеграли обчислення

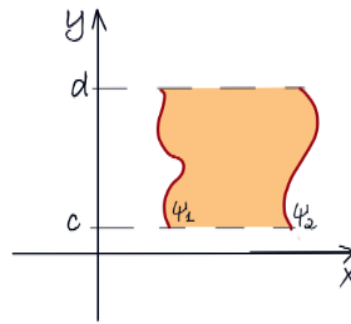
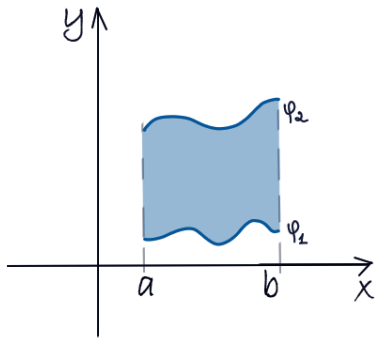
Нехай задано область  $D$  на декартовій площині і функція  $f(x, y)$  є неперервною у цій області.

Нехай на інтервалі  $[a, b]$  криві якими ця область обмежена зверху  $y = \varphi_2(x)$  а знизу  $y = \varphi_1(x)$ , то тоді  $D$  є правильною у напрямі осі  $Oy$  і

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy.$$

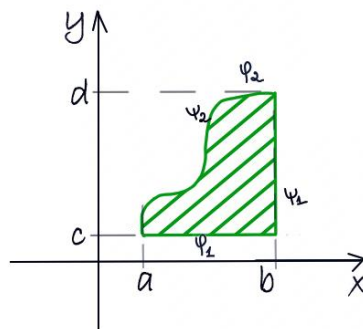
Аналогічно на інтервалі  $[c, d]$  криві якими вона обмежена зліва та справа є  $x = \psi_1(y)$  та  $x = \psi_2(y)$ , то тоді  $D$  є правильною у напрямі осі  $Ox$  і

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx.$$



Якщо  $D$  є правильною у обох напрямках, то тоді

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx.$$



## Заміна змінних в подвійному інтегралі

Нехай область  $D$  правильна в системі координат  $ХОУ$  а її образ  $D'$  в системі координат  $UoV$ , перехід від однієї системи координат до іншої задається функціями :  $x = \varphi(u, v)$  та  $y = \psi(u, v) \in C^1(D')$  тоді

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D'} f(\varphi(u, v), \psi(u, v)) \cdot |J| du dv ,$$

де  $J$  якобіан переходу від одної до іншої системи координат, тобто визначник

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \varphi}{\partial v} \\ \frac{\partial \psi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial v} \end{vmatrix} .$$

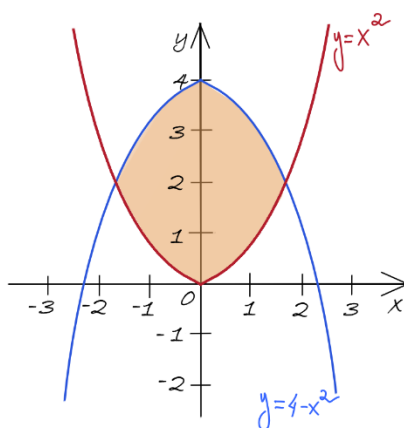
У випадку коли ми переходимо до полярної системи координат :

$$x = \rho \cos \varphi, y = \rho \sin \varphi \quad J = \rho .$$

**Приклад 1.** Знайти границі повторного інтегралу  $\iint_D f(x, y) dx dy$  при

$$D = \{(x, y) : y \geq x^2, y \leq 4 - x^2\} .$$

Розв'язок: Побудуємо область  $D$ .



Спосіб 1. Знайдемо точки перетину  $y = x^2$  та  $y = 4 - x^2$ .

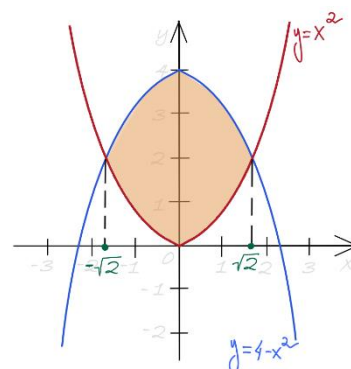
$$x^2 = 4 - x^2 \Rightarrow 2x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm \sqrt{2} .$$

Таким чином  $x \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$ .

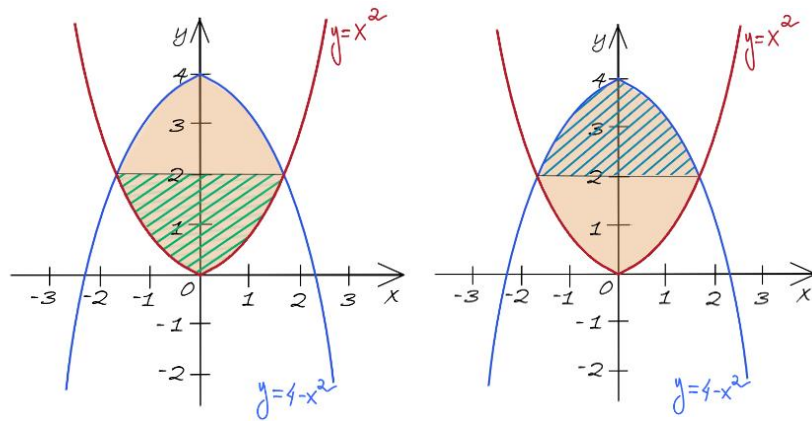
Знайдемо межі для  $y$ :  $x^2 \leq y \leq 4 - x^2$ .

Таким чином,

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dx \int_{x^2}^{4-x^2} f(x, y) dy .$$



Спосіб 2. Розіб'ємо задану область на дві та визначимо межі для кожної з них.



При  $x = \pm\sqrt{2}$  маємо  $y = 2$ . Тоді для першої області  $y \in [0; 2]$ . Для  $x$  маємо зміну в межах гілок параболи  $y = x^2$ , тому  $-\sqrt{y} \leq x \leq \sqrt{y}$ .

Для другої області  $y \in [2; 4]$ , а  $x$  змінюється в межах гілок параболи  $y = 4 - x^2$ .

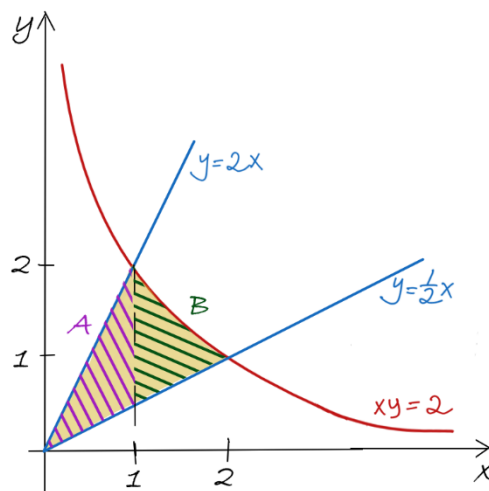
Отже  $-\sqrt{4-y} \leq x \leq \sqrt{4-y}$ . Тоді

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_0^2 dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x, y) dx + \int_2^4 dy \int_{-\sqrt{4-y}}^{\sqrt{4-y}} f(x, y) dx.$$

**Приклад 2.** Обчислити подвійний інтеграл  $\iint_D (x + y) dx dy$  по області  $D$ , що

обмежена  $xy = 2$ ,  $y = 2x$  та  $y = \frac{1}{2}x$  ( $x \geq 0$ ).

Розв'язок: Зобразимо область  $D$ .



Розіб'ємо область на дві,  $A$  та  $B$ . Для області  $A$  маємо  $0 \leq x \leq 1$ , а

$\frac{1}{2}x \leq y \leq 2x$ . Для  $B$  —  $1 \leq x \leq 2$ ,  $\frac{1}{2}x \leq y \leq \frac{2}{x}$ . Тоді

$$\begin{aligned}
\iint_D (x+y) dx dy &= \iint_A (x+y) dx dy + \iint_B (x+y) dx dy = \\
&= \int_0^1 dx \int_{x/2}^{2x} (x+y) dy + \int_1^2 dx \int_{x/2}^{2/x} (x+y) dy = \int_0^1 \left[ xy + \frac{y^2}{2} \right]_{x/2}^{2x} dx + \int_1^2 \left[ xy + \frac{y^2}{2} \right]_{x/2}^{2/x} dx = \\
&= \frac{3}{2} \int_0^1 x^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^1 \left( 4x^2 - \frac{x^2}{4} \right) dx + \int_1^2 x \left( \frac{2}{x} - \frac{x}{2} \right) dx + \frac{1}{2} \int_1^2 \left( \frac{4}{x^2} - \frac{x^2}{4} \right) dx = \frac{11}{3}.
\end{aligned}$$

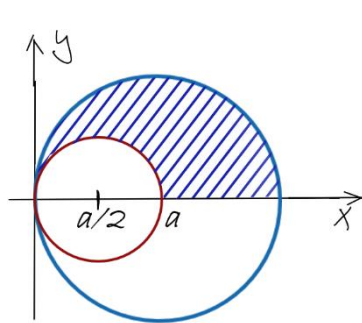
**Приклад 3.** Обчислити подвійний інтеграл  $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$  по області  $D$ , що

$$\text{обмежена } x^2 + y^2 = 2ax, x^2 + y^2 = ax, y = 0.$$

Розв'язок: Зобразимо область  $D$  та перейдемо до полярних координат.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi. \text{ Таким чином,}$$

$$x^2 + y^2 = 2ax \Rightarrow r = 2a \cos \varphi, x^2 + y^2 = ax \Rightarrow r = a \cos \varphi. \text{ І область}$$



$$D = \left\{ (r, \varphi) : 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, a \cos \varphi \leq r \leq 2a \cos \varphi \right\}.$$

Знайдемо інтеграл

$$\begin{aligned}
\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy &= \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_{a \cos \varphi}^{2a \cos \varphi} r^2 dr = \\
&= \frac{7a^3}{3} \int_0^{\pi/2} \cos^3 \varphi d\varphi = \frac{7a^3}{3} \int_0^{\pi/2} (1 - \sin^2 \varphi) \varphi d(\sin \varphi) = \\
&= \frac{7a^3}{3} \left( \sin \varphi - \frac{\sin^3 \varphi}{3} \right) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{14a^3}{9}.
\end{aligned}$$

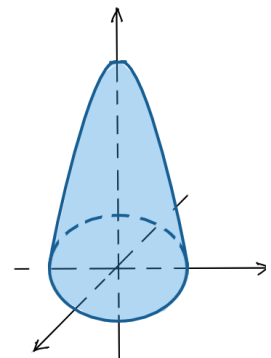
**Приклад 4.** Знайти об'єм тіла, що обмежене поверхнями  $x^2 + y^2 + za^2 = a^2, z = 0$ .

Розв'язок: Побудуємо дане тіло та скористаємось формулою

$$V = \iint_D z dx dy.$$

Дана поверхня – параболоїд обертання, де область  $D$  - коло  $x^2 + y^2 = a^2$ . Знайдемо  $z$ :

$$x^2 + y^2 + za^2 = a^2 \Leftrightarrow za^2 = a^2 - (x^2 + y^2)$$



$$z = \frac{1}{a^2} [a^2 - (x^2 + y^2)].$$

$$\text{Отже, } V = \iint_D \frac{1}{a^2} [a^2 - (x^2 + y^2)] dx dy = \frac{1}{a^2} \iint_D [a^2 - (x^2 + y^2)] dx dy.$$

Для знаходження цього інтегралу перейдемо до полярних координат і отримаємо  $D = \{(r, \varphi) : 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq r \leq a\}$ .

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{a^2} \iint_D (a^2 - r^2) r dr d\varphi = \frac{1}{a^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a (a^2 - r^2) r dr = \\ &= \frac{2\pi}{a^2} \int_0^a (a^2 r - r^3) dr = \frac{2\pi}{a^2} \left( a^2 \frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right) \Big|_0^a = \frac{2\pi}{a^2} \left( \frac{a^4}{2} - \frac{a^4}{4} \right) = \frac{1}{2} \pi a^2. \end{aligned}$$

### Індивідуальні завдання №1

Обчислити подвійний інтеграл по області  $D$ , що обмежена вказаними кривими.

1.  $\iint_D xy dx dy;$   $x^2 + y^2 = 4, x + y = 2.$
2.  $\iint_D \frac{x}{y} dx dy;$   $y = x^2, x = y^2.$
3.  $\iint_D y dx dy;$   $y = \sqrt{x}, y = 0, x + y = 2.$
4.  $\iint_D \cos(x + y) dx dy;$   $x = 0, y = x, y = \pi.$
5.  $\iint_D xy dx dy;$   $x^2 + y^2 = 1, x + y = 1.$
6.  $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy;$   $y = x^2, y^2 = x.$
7.  $\iint_D x dx dy;$   $x = 2 + \sin y, x = 0, y = 2\pi.$
8.  $\iint_D (2x + y) dx dy;$   $x = 0, y = 0, x + y = 3.$
9.  $\iint_D y dx dy;$   $x^2 + y^2 = 1, x + y = 1.$

10.  $\iint_D e^{x+y} dx dy;$   $y = e^x, x = 0, y = 2.$
11.  $\iint_D x dx dy;$   $xy = 6, x + y = 7.$
12.  $\iint_D (x^3 + y^3) dx dy;$   $y = x, y = \frac{1}{2}x, x = 4.$
13.  $\iint_D \frac{y^2}{x^2} dx dy;$   $y = x, y = \frac{1}{x}, x = 2.$
14.  $\iint_D xy^2 dx dy;$   $y^2 = 6x, x = 3.$
15.  $\iint_D e^{x+y} dx dy;$   $y = e^x, x = 0, y = 0, x = \ln 2.$
16.  $\iint_D xy dx dy;$   $y^2 = 6x, x = 3.$
17.  $\iint_D x dx dy;$   $x^2 + y^2 = 1, x + y = 1.$
18.  $\iint_D xy dx dy;$   $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1, x = 0, y = 0.$
19.  $\iint_D (1 + xy^2) dx dy;$   $y = \frac{x}{2}, x = 2y^2.$
20.  $\iint_D e^x dx dy;$   $x = \ln y, x = 0, y = 1, y = 2.$
21.  $\iint_D (x^2 + y) dx dy;$   $y = 2x, y = \frac{1}{2}x, yx = 2.$
22.  $\iint_D xy dx dy;$   $xy = 1, x + y = 3, 5.$
23.  $\iint_D x^4 y dx dy;$   $xy = 1, y = x, x = 2.$
24.  $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy;$   $x = 0, y = 0, x + y = 4.$
25.  $\iint_D e^{\frac{x}{y}} dx dy;$   $y^2 = x, x = 0, y = 1.$

26.  $\iint_D \frac{y^3}{x^2} dx dy;$   $y^2 = x, x=1, y=\frac{1}{3}x.$
27.  $\iint_D xy^2 dx dy;$   $y=\frac{x}{2}, x=2y^2.$
28.  $\iint_D xy dx dy;$   $y=\sqrt{x}, y=0, x+y=2.$
29.  $\iint_D \frac{y^2}{x^2+y^2} dx dy;$   $|x|+|y|=4, x^2+y^2=1.$
30.  $\iint_D \frac{x^2}{x^2+y^2} dx dy;$   $|x|+|y|=4, x^2+y^2=1.$

## Індивідуальні завдання № 2

Обчислити подвійний інтеграл, переходячи до полярних або узагальнених полярних координат.

1.  $\iint_D e^{x^2+y^2} dx dy;$   $D=\{(x,y): x^2+y^2 \leq \pi^2\}.$
2.  $\int_D (x^2+y^2)^2 dx dy;$   $D=\{(x,y): 1 \leq x^2+y^2 \leq 4\}.$
3.  $\int_D \frac{dx dy}{\sqrt{25-x^2-y^2}};$   $D=\{(x,y): x^2+y^2 \leq 16\}.$
4.  $\iint_D \sin \sqrt{x^2+y^2} dx dy;$   $D=\{(x,y): \pi^2 \leq x^2+y^2 \leq 4\pi^2\}.$
5.  $\int_D x^2 dx dy;$   $D=\{(x,y): x^2+y^2 \leq 2x\}.$
6.  $\int_D (x^2+y^2) dx dy;$   $D=\left\{(r,\varphi): 0 \leq r \leq \cos 2\varphi, -\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}\right\}.$
7.  $\int_D (x^2+y^2)^2 dx dy;$   $D=\{(x,y): x^2+y^2 \leq 2x\}.$
8.  $\iint_D \cos \sqrt{x^2+y^2} dx dy;$   $D=\{(x,y): \pi^2 \leq x^2+y^2 \leq 4\pi^2\}.$

9.  $\int_D (x^2 + y^2) dx dy;$   $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 2x\}.$
10.  $\int_D x^2 dx dy;$   $D = \left\{ (r, \varphi) : 0 \leq r \leq \cos 2\varphi, -\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4} \right\}.$
11.  $\int_D (x^2 + y^2)^3 dx dy;$   $D = \{(x, y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}.$
12.  $\int_D y^2 dx dy;$   $D = \left\{ (r, \varphi) : 0 \leq r \leq \cos 2\varphi, -\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4} \right\}.$
13.  $\iint_D \sqrt{4 - x^2 - y^2} dx dy;$   $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4\}.$
14.  $\int_D (x^2 + y^2)^2 dx dy;$   $D = \left\{ (r, \varphi) : 0 \leq r \leq \cos 2\varphi, -\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4} \right\}.$
15.  $\int_D y^2 dx dy;$   $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 2x\}.$
16.  $\int_D \frac{x^2 + y^2}{x^2} dx dy;$   $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq x\}.$
17.  $\int_D \left( 1 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} \right) dx dy;$   $D = \left\{ (x, y) : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1 \right\}.$
18.  $\int_D x^2 y^2 dx dy;$   $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 2x\}.$
19.  $\int_D \frac{x^2}{x^2 + y^2} dx dy;$   $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq x\}.$
20.  $\int_D (x^2 + y^2) \sqrt{9 - x^2 - y^2} dx dy;$   $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 9\}.$
21.  $\int_D \frac{y^2}{x^2} dx dy;$   $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq x\}.$
22.  $\int_D \left( 1 - \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{25} \right) dx dy;$   $D = \left\{ (x, y) : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} \leq 1 \right\}.$
23.  $\int_D dx dy;$   $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 2x\}.$

24.  $\int_D \frac{dxdy}{x^2 + y^2};$   $D = \{(x, y): 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}.$
25.  $\iint_D \sin \sqrt{x^2 + y^2} dxdy;$   $D = \{(x, y): 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}.$
26.  $\iint_D e^{\sqrt{x^2 + y^2}} dxdy;$   $D = \{(x, y): 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9\}.$
27.  $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} e^{\sqrt{x^2 + y^2}} dxdy;$   $D = \{(x, y): 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9\}.$
28.  $\iint_D \cos \sqrt{x^2 + y^2} dxdy;$   $D = \{(x, y): 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}.$
29.  $\int_D \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right) dxdy;$   $D = \left\{(x, y): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\right\}.$
30.  $\iint_D \frac{e^{\sqrt{x^2 + y^2}}}{\sqrt{x^2 + y^2}} dxdy;$   $D = \{(x, y): 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}.$

### Індивідуальні завдання №3

Обчислити об'єми тіл, що обмежені заданими поверхнями, використовуючи подвійний інтеграл.

1.  $z = x^2 + y^2, y = x^2, y = 1, z = 0.$
2.  $z = x^2 + y^2, z = x + y.$
3.  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$
4.  $z = a^2 - x^2, x + y = a, y = 2x, z = 0, y = 0.$
5.  $z = \sin \sqrt{x^2 + y^2}, x^2 + y^2 = \pi^2, z = 0.$
6.  $z = x, z = 2x, x^2 + y^2 = 4x.$
7.  $z = 4 - x^2, y = 0, y = 5, z = 0.$
8.  $z = 4 - x^2 - y^2, x = -1, x = 1, y = -1, y = 1.$
9.  $z = 1 + x^2 + y^2, x = 0, x = 4, y = 0, y = 4, z = 0.$

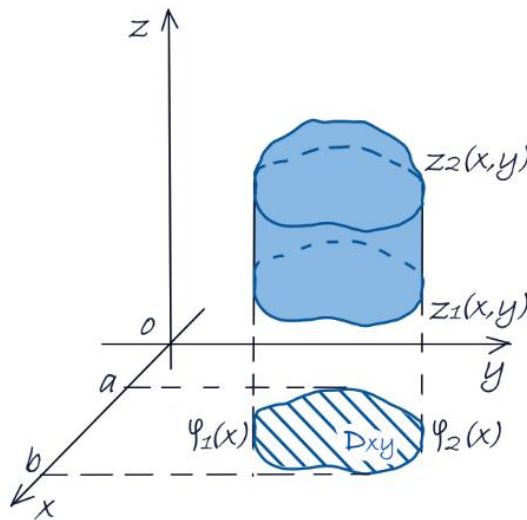
10.  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}, (z > 0).$
11.  $z = 4 - y^2, y = \frac{x^2}{2}, z = 0.$
12.  $z = a^2 - x^2, x^2 + y^2 = a^2, x = 0, z = 0, y = 0.$
13.  $z = x^2 + y^2, x^2 + y^2 = x, x^2 + y^2 = 2x, z = 0.$
14.  $x^2 + y^2 + z^2 = 2z, z = x^2 + y^2.$
15.  $z = \frac{4}{x^2 + y^2}, x^2 + y^2 = 1, x^2 + y^2 = 4, z = 0.$
16.  $z = x^2 + y^2, x - y = 0, \sqrt{3}x - y = 0, x^2 + y^2 = 8, (x \geq 0, y \geq 0).$
17.  $z = x^2 + y^2, x^2 + y^2 = x, z = 0.$
18.  $z = \frac{1}{a}(x^2 + y^2), x^2 + y^2 = 2ax, z = 0.$
19.  $z = xy, x^2 + y^2 = 2a^2xy, z = 0.$
20.  $z = \frac{1}{a}xy, x^2 + y^2 = ax, z = 0 (x > 0, y > 0).$
21.  $z^2 = x^2 + y^2 + a^2, x^2 + y^2 = a^2.$
22.  $z = c \left( 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right), z = 0.$
23.  $z = \ln(1 + x^2 + y^2), x^2 + y^2 = 2, z = 0.$
24.  $z = \frac{1}{a}(a^2 - x^2 - 4y^2), z = 0.$
25.  $z = yx, x^2 + y^2 = a^2, x = 0, y = 0, z = 0 (x > 0, y > 0).$
26.  $\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1.$
27.  $z = ce^{-\left(\frac{x^2 + y^2}{a^2 + b^2}\right)}, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$
28.  $2az = x^2 + y^2, x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2.$

$$29. \quad z = x^2 + y + 1, x = 0, y = 0, z = 0, x + 2y = 1.$$

$$30. \quad z = x^2 + y^2, (x^2 + y^2)^2 = 2a^2 xy, z = 0.$$

### Потрійні інтеграли обчислення

Як і для подвійного інтегралу, обчислення потрійного інтегралу зводиться до обчислення повторного інтегралу.



Якщо область інтегрування має вигляд

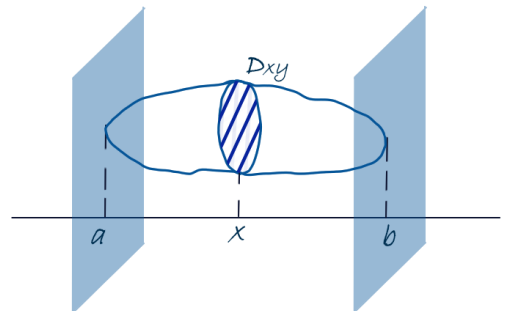
$$V = \{(x, y, z) : a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x), z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y)\},$$

де  $\varphi_1(x)$ ,  $\varphi_2(x)$ ,  $z_1(x, y)$ ,  $z_2(x, y)$  - неперервні, то потрійний інтеграл обчислюється за формулою

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{D_{xy}} dx dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz.$$

Якщо  $a \leq x \leq b$ , а  $G(x)$  - перетин області площиною, що відсікає на осі  $Ox$  відрізок  $x$ ,

$$\text{то } \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dx \iint_{G(x)} f(x, y, z) dy dz.$$

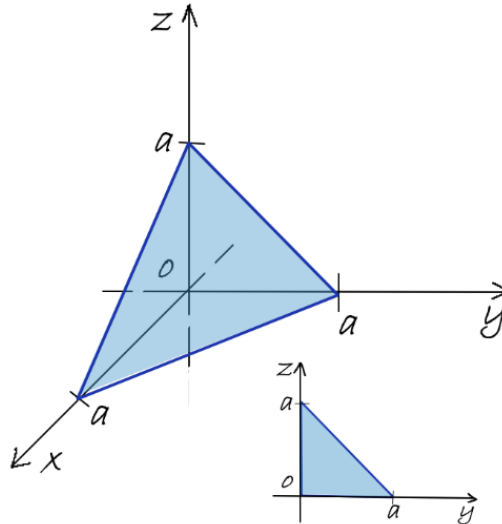


**Приклад 1.** Обчислити потрійний інтеграл  $\iiint_V x dx dy dz$ , якщо область інтегрування має вигляд  $V: x + y + z = a, x = 0, y = 0, z = 0, (a > 0)$ .

Розв'язок: Розв'яжемо задачу двома способами.

Спосіб 1: Побудуємо задану область.

Визначимо межі для змінної  $x$ ,  $0 \leq x \leq a - y - z$ , та спроектуємо область  $V$  на  $yOz$ . Таким чином, ми отримаємо проекцію  $G_{yz}$ .



Отже, початковий інтеграл можна записати як

$$\begin{aligned} \iiint_V x dx dy dz &= \iint_{G_{yz}} dy dz \int_0^{a-y-z} x dx = \\ &= \iint_{G_{yz}} dy dz \int_0^{a-y-z} x dx = \iint_{G_{yz}} \left( \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^{a-y-z} dy dz = \frac{1}{2} \iint_{G_{yz}} (a-y-z)^2 dy dz. \end{aligned}$$

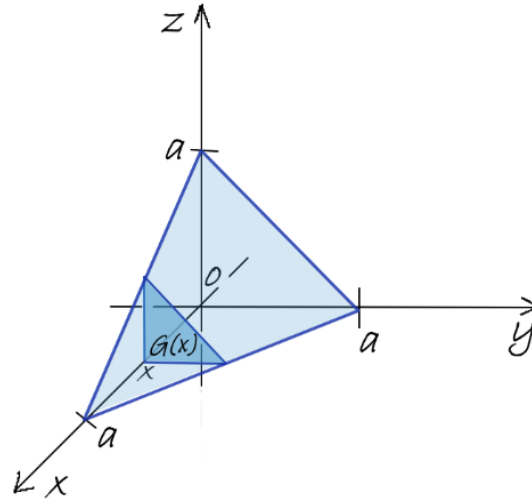
Для області  $G_{yz}$  нехай  $y \in [0, a]$ , тоді  $0 \leq z \leq a - y$ .

$$\begin{aligned} \iint_{G_{yz}} (a-y-z)^2 dy dz &= \int_0^a dy \int_0^{a-y} (a-y-z)^2 dz = -\frac{1}{3} \int_0^a (a-y-z)^3 \Big|_0^{a-y} dy = \\ &= -\frac{1}{3} \int_0^a (a-y)^3 dy = -\frac{1}{3} \frac{(a-y)^4}{4} \Big|_0^a = \frac{1}{12} a^4. \end{aligned}$$

$$\text{А отже, } \iiint_V x dx dy dz = \frac{a^4}{24}.$$

Спосіб 2: Оскільки  $0 \leq x \leq a$ , то побудуємо перетин області площиною, що відсікає на осі  $Ox$  відрізок  $x$ . Тепер ми можемо скористатись формулою

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dx \iint_{G(x)} f(x, y, z) dy dz.$$



Отримуємо  $\iiint_V x dx dy dz = \int_0^a x \left( \iint_{G(x)} dy dz \right) dx.$

Розглянемо прямокутний рівнобедрений трикутник  $G(x)$ . Його катети дорівнюють  $a - x$ . А оскільки  $\iint_{G(x)} dy dz$  є площею цього

трикутника, то  $\iint_{G(x)} dy dz = \frac{1}{2}(a - x)^2.$

Тоді  $\iiint_V x dx dy dz = \frac{1}{2} \int_0^a x(a - x)^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^a (a^2 x - 2ax^2 + x^3) dx =$

$$= \frac{1}{2} \left( \frac{a^2 x^2}{2} - \frac{2ax^3}{3} + \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^a = \frac{a^4}{2} \left( \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \right) = \frac{a^4}{24}.$$

**Приклад 2.** Обчислити інтеграл  $\iiint_V \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^5} dx dy dz$ , якщо  $V$  - це куля

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2.$$

Розв'язок: Зобразимо кулю та перейдемо до сферичних координат.

$$\begin{aligned}x &= r \cos \varphi \sin \theta, \\y &= r \sin \varphi \sin \theta, \\z &= r \cos \theta, \\r &\geq 0, 0 \leq \varphi < 2\pi, 0 \leq \theta \leq \pi.\end{aligned}$$

Таким чином область  $V$  для сферичних координат буде мати вигляд

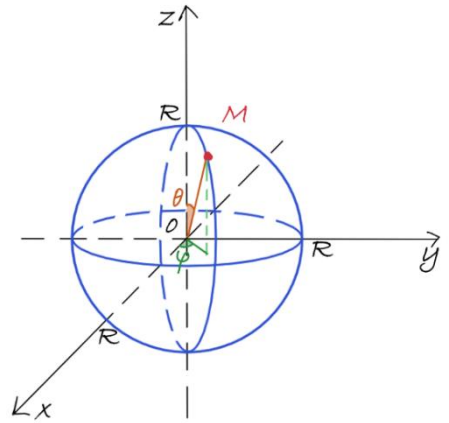
$$V' = \{(r, \varphi, \theta) : 0 \leq r \leq R, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \theta \leq \pi\},$$

а для обчислення інтегралу вище використаємо формулу

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{V'} f(r \cos \varphi \sin \theta, r \sin \varphi \sin \theta, r \cos \theta) r^2 \sin \theta dr d\varphi d\theta.$$

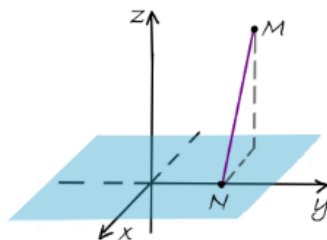
Тому

$$\begin{aligned}\iiint_V \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^5} dx dy dz &= \iiint_{V'} r^5 r^2 \sin \theta dr d\varphi d\theta = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \int_0^R r^7 \sin \theta dr = \\&= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^R r^7 dr = \left(\varphi \Big|_0^{2\pi}\right) \cdot \left(-\cos \theta \Big|_0^\pi\right) \cdot \left(\frac{r^8}{8} \Big|_0^R\right) = \frac{\pi R^8}{2}.\end{aligned}$$



**Приклад 3.** Знайти масу та центр мас тіла, що обмежене параболоїдом  $by = x^2 + z^2$  та площиною  $y = b$ , якщо в кожній точці його густина рівна квадрату відстані від цієї точки до осі  $Oy$ .

Розв'язок: Знайдемо густину. Нехай  $M(x, y, z)$  - довільна точка цього тіла.

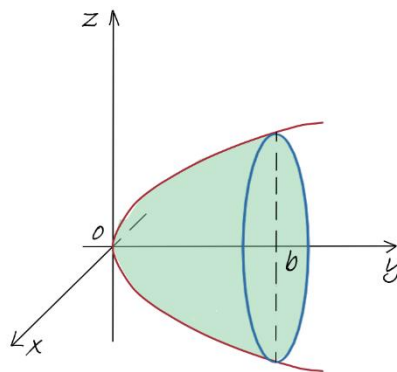


Тоді густина дорівнює квадрату довжини відрізка  $MN$ . Тобто,  $\gamma(x, y, z) = x^2 + z^2$ .

Масу даного тіла можна знайти обчисливши

$$\text{інтеграл } m = \iiint_V (x^2 + z^2) dx dy dz.$$

Зобразимо даний параболоїд та обмежимо його площиною  $y = b$ .



Перейдемо до циліндричних координат:

$$x = r \cos \varphi, \quad z = r \sin \varphi, \quad y = y.$$

$$\begin{aligned} \text{Тоді } \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz &= \\ &= \iiint_V f(r \cos \varphi, y, r \sin \varphi) r dr d\varphi dy. \end{aligned}$$

В площині  $xOz$  ми маємо коло з радіусом

$$b, \text{ тому } 0 \leq r \leq b, 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \text{ А } \frac{x^2 + z^2}{b} \leq y \leq b, \text{ тож } \frac{r^2}{b} \leq y \leq b.$$

Таким чином, маса тіла

$$\begin{aligned} m &= \iiint_V (x^2 + z^2) dx dy dz = \iiint_{V'} r^2 r dr d\varphi dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^b dr \int_{\frac{r^2}{b}}^b r^3 dy = \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^b r^3 \left( y \Big|_{\frac{r^2}{b}}^b \right) dr = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^b r^3 \left( b - \frac{r^2}{b} \right) dr = 2\pi \int_0^b \left( br^3 - \frac{r^5}{b} \right) dr = \\ &= 2\pi \left( \frac{br^4}{4} - \frac{r^6}{6b} \right) \Big|_0^b = 2\pi \left( \frac{b^5}{4} - \frac{b^5}{6} \right) = \frac{\pi b^5}{6}. \end{aligned}$$

Обчислимо координати центру мас за формулами:

$$x_0 = \frac{1}{m} \iiint_V x \gamma(x, y, z) dx dy dz; \quad y_0 = \frac{1}{m} \iiint_V y \gamma(x, y, z) dx dy dz;$$

$$z_0 = \frac{1}{m} \iiint_V z \gamma(x, y, z) dx dy dz.$$

Враховуючи положення тіла та його симетрію одразу отримуємо, що

$x_0 = 0$  та  $z_0 = 0$ . Знайдемо  $y_0 = 0$ . Для цього розглянемо інтеграл

$$\iiint_V y \gamma(x, y, z) dx dy dz \quad \text{та обчислимо його в циліндричних}$$

координатах, використовуючи міркування вище.

$$\iiint_V y \gamma dx dy dz = \iiint_V y (x^2 + z^2) dx dy dz = \iiint_{V'} r^3 y dr d\varphi dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^b dr \int_{\frac{r^2}{b}}^b r^3 y dy =$$

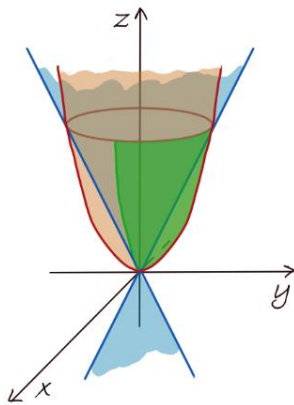
$$\begin{aligned}
&= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^b r^3 \left( \frac{y^2}{2} \Big|_{\frac{r^2}{b}}^b \right) dr = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^b \left( \frac{r^3 b^2}{2} - \frac{r^7}{2b^2} \right) dr = 2\pi \int_0^b \left( br^3 - \frac{r^5}{b} \right) dr = \\
&= 2\pi \left( \frac{b^6}{8} - \frac{b^6}{16} \right) \Big|_0^b = \frac{\pi b^6}{8}.
\end{aligned}$$

Отже,  $y_0 = \frac{1}{m} \iiint_V y(x^2 + z^2) dx dy dz = \frac{\pi b^6}{8} \cdot \frac{6}{\pi b^5} = \frac{3}{4}b$  і центр мас має координати  $\left(0, \frac{3}{4}b, 0\right)$ .

**Приклад 4.** Знайти масу тіла, що обмежене  $x^2 + y^2 = \frac{4}{25}z^2$ ,  $x^2 + y^2 = \frac{2}{5}z$ ,  $y \geq 0$ ,

$x \geq 0$  та має густину  $\gamma(x, y, z) = 80xz$ .

Розв'язок: Побудуємо задане тіло.



Для обчислення маси порахуємо інтеграл

$$m = \iiint_V 80xz dx dy dz = 80 \iiint_V xz dx dy dz.$$

Перейдемо до циліндричних координат

$$x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi, z = z.$$

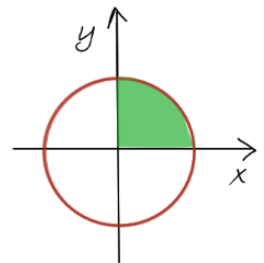
Спроектуємо дане тіло на площину  $xOy$  та визначимо межі інтегрування. Для початку

знайдемо перетин параболоїда та конуса:  $\frac{2}{5}z = \frac{4}{25}z^2 \Rightarrow z_1 = 0, z_2 = \frac{5}{2}$ ,

а отже  $x^2 + y^2 = 1$  в перетині.

Розглянемо проекцію тіла на площину  $xOy$ ,

$$x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0, x \geq 0.$$



Це перша чверть круга і  $0 \leq r \leq 1, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ .

Перепишемо поверхні в циліндричній системі координат:

$$x^2 + y^2 = \frac{4}{25} z^2 \Rightarrow r^2 = \frac{4}{25} z^2 \Rightarrow z = \frac{5}{2} r \quad (\text{рівняння верхньої частини}$$

$$\text{конуса}), \quad x^2 + y^2 = \frac{2}{5} z \Rightarrow r^2 = \frac{2}{5} z \Rightarrow z = \frac{5}{2} r^2 \quad (\text{рівняння параболоїда}).$$

$$\begin{aligned} m &= 80 \iiint_V r \cos \varphi z r dr d\varphi dz = 80 \iiint_V r^2 \cos \varphi z r dr d\varphi dz = \\ &= 80 \int_0^{\pi/2} \cos \varphi d\varphi \int_0^1 r^2 dr \int_{\frac{5}{2}r^2}^{\frac{5}{2}r} z dz = 80 \left( \sin \varphi \Big|_0^{\pi/2} \right) \int_0^1 r^2 \left( \frac{z^2}{2} \Big|_{\frac{5}{2}r^2}^{\frac{5}{2}r} \right) dr = \\ &= 80 \frac{1}{2} \frac{25}{4} \int_0^1 r^2 (r^2 - r^4) dr = 250 \int_0^1 (r^4 - r^6) dr = 250 \left( \frac{r^5}{5} - \frac{r^7}{7} \right) \Big|_0^1 = \frac{500}{35} = \frac{100}{7}. \end{aligned}$$

#### Індивідуальні завдання № 4

Обчислити потрійний інтеграл по області, що обмежена вказаними поверхнями.

1.  $\iiint_V z dx dy dz;$   $V : z^2 = x^2 + y^2, z = a, z > 0.$
2.  $\iiint_V (x + y + z) dx dy dz;$   $V : x + y + z = a, x = 0, y = 0, z = 0, (a > 0).$
3.  $\iiint_V z dx dy dz;$   $V : z^2 = x^2 + y^2, z = a.$
4.  $\iiint_V z^3 dx dy dz;$   $V : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, z > 0.$
5.  $\iiint_V z^2 dx dy dz;$   $V : x + y + z = a, x = 0, y = 0, z = 0, (a > 0).$
6.  $\iiint_V (x^2 + y^2) dx dy dz;$   $V : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$
7.  $\iiint_V z^2 dx dy dz;$   $V : z^2 = x^2 + y^2, z = a, z > 0.$
8.  $\iiint_V z^3 dx dy dz;$   $V : z^2 = x^2 + y^2, z = a.$
9.  $\iiint_V z dx dy dz;$   $V : x + y + z = a, x = 0, y = 0, z = 0, (a > 0).$

10.  $\iiint_V (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}} dx dy dz;$   $V : x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z \geq 0$
11.  $\iiint_V z^4 dx dy dz;$   $V : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, z > 0.$
12.  $\iiint_V (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} dx dy dz;$   $V : x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z \geq 0$
13.  $\iiint_V e^{-(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} dx dy dz;$   $V : x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$
14.  $\iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz;$   $V : x + y + z = a, x = 0, y = 0, z = 0, (a > 0).$
15.  $\iiint_V z^4 dx dy dz;$   $V : z^2 = x^2 + y^2, z = a.$
16.  $\iiint_V z dx dy dz;$   $V : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, z > 0.$
17.  $\iiint_V z^3 dx dy dz;$   $V : z^2 = x^2 + y^2, z = a, z > 0.$
18.  $\iiint_V (x^2 + y^2 + z^2)^2 dx dy dz;$   $V : x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z \geq 0$
19.  $\iiint_V z^3 dx dy dz;$   $V : x + y + z = a, x = 0, y = 0, z = 0, (a > 0).$
20.  $\iiint_V z^2 dx dy dz;$   $V : z^2 = x^2 + y^2, z = a.$
21.  $\iiint_V z^3 dx dy dz;$   $V : x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z \geq 0$
22.  $\iiint_V z^4 dx dy dz;$   $V : z^2 = x^2 + y^2, z = a, z > 0.$
23.  $\iiint_V (x^3 + y^3) dx dy dz;$   $V : x + y + z = a, x = 0, y = 0, z = 0, (a > 0).$
24.  $\iiint_V z^5 dx dy dz;$   $V : z^2 = x^2 + y^2, z = a.$
25.  $\iiint_V z^2 dx dy dz;$   $V : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, z > 0.$

26.  $\iiint_V z^5 dx dy dz;$   $V : z^2 = x^2 + y^2, z = a, z > 0.$
27.  $\iiint_V z^4 dx dy dz;$   $V : x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z \geq 0$
28.  $\iiint_V z^3 dx dy dz;$   $V : x + y + z = a, x = 0, y = 0, z = 0, (a > 0).$
29.  $\iiint_V z^2 dx dy dz;$   $V : x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z \geq 0$
30.  $\iiint_V z dx dy dz;$   $V : x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z \geq 0$

### Індивідуальні завдання № 5

Знайти координати центра мас тіла, що обмежене заданими поверхнями та має густину  $\gamma = \gamma(x, y, z)$ .

1.  $x + y + z = 3, x = 0, z = 0, y = 0,$   $\gamma(x, y, z) = x + y + z.$
2.  $3x + 2z = 4, x = 0, z = 0, y = 0, y = 4,$   $\gamma(x, y, z) = xyz.$
3.  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, (z \geq 0),$   $\gamma(x, y, z) = q, q = \text{Const}.$
4.  $x^2 + y^2 + z^2 = 1, z = c, c > 0,$   $\gamma(x, y, z) = q, q = \text{Const}.$
5.  $x^2 + y^2 = a^2, z = 0, z = c, c > 0,$   $\gamma(x, y, z) = x^2 + y^2.$
6.  $x^2 + y^2 = cz, z = 0, z = c, c > 0,$   $\gamma(x, y, z) = x^2 + y^2 + z.$

Знайти моменти інерції однорідного тіла, що обмежене вказаними поверхнями, відносно початку координат

7.  $2x + 3y = 6, x = 0, y = 0, z = 0, z = 4.$
8.  $x = 1, x = 3, y = 2, y = 3, z = 1, z = 4.$
9.  $x + y + z = 3, x = 0, y = 0, z = 0.$
10.  $x^2 + y^2 = z^2 (z \geq 0), z = 2.$

11.  $y^2 + z^2 = 4, x = 0, x = 2.$
12.  $y^2 = 3z, z = 3, x = 0, x = 3.$
13.  $x^2 + y^2 = 16, z = y, z = 0.$
14.  $3x = y^2 + z^2, x = 3.$
15.  $z = x^2 + y^2, z = 4.$

Знайти моменти інерції однорідного тіла, що обмежене заданими поверхнями, відносно координатних площин.

16.  $2x + 3y = 6, x = 0, y = 0, z = 0, z = 4.$
17.  $x = 1, x = 4, y = 1, y = 3, z = 1, z = 3.$
18.  $x + y + z = 1, x = 0, y = 0, z = 0.$
19.  $x^2 + y^2 = z^2 (z \geq 0), z = 2.$
20.  $y^2 + z^2 = 9, x = 0, x = 3.$
21.  $y^2 = 5z, z = 5, x = 0, x = 5.$
22.  $x^2 + y^2 = 16, z = y, z = 0.$
23.  $2x = y^2 + z^2, x = 2.$

Знайти моменти інерції однорідного тіла, що обмежене заданими поверхнями, відносно осей координат.

24.  $2x + 3y = 6, x = 0, y = 0, z = 0, z = 4.$
25.  $x = 1, x = 3, y = 2, y = 3, z = 1, z = 4.$
26.  $x + y + z = 3, x = 0, y = 0, z = 0.$
27.  $3x = y^2 + z^2, x = 3.$
28.  $y^2 + z^2 = 4, x = 0, x = 2.$
29.  $y^2 = 3z, z = 3, x = 0, x = 3.$
30.  $x^2 + y^2 = 16, z = y, z = 0.$

## Криволінійні інтеграли першого та другого роду

Криволінійний інтеграл першого роду  $\int_L f(x, y) dS$  можна обчислити за

допомогою наступних формул:

1. Якщо крива  $L$  задана параметрично, то

$$\int_L f(x, y) dS = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt, \quad t \in [\alpha, \beta].$$

2. Якщо крива  $L$  задана в декартових координатах, то

$$\int_L f(x, y) dS = \int_a^b f(x, y(x)) \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx, \quad x \in [a, b],$$

$$\int_L f(x, y) dS = \int_c^d f(x(y), y) \sqrt{1 + (x'(y))^2} dy, \quad y \in [c, d],$$

3. Якщо крива  $L$  задана в полярних координатах, то

$$\int_L f(x, y) dS = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(\varphi), y(\varphi)) \sqrt{(\rho(\varphi))^2 + (\rho'(\varphi))^2} d\varphi, \quad \varphi \in [\alpha, \beta].$$

Криволінійний інтеграл другого роду  $\int_L L(x, y) dx + M(x, y) dy$  можна обчислити

за допомогою:

1. Якщо крива  $L$  задана параметрично та  $t \in [\alpha, \beta]$ , то

$$\int_L L(x, y) dx + M(x, y) dy = \int_{\alpha}^{\beta} [L(x(t), y(t)) x'(t) + M(x(t), y(t)) y'(t)] dt.$$

2. Якщо крива  $L$  задана в декартових координатах, то

$$\int_L L(x, y) dx + M(x, y) dy = \int_{\alpha}^{\beta} [L(x, y(x)) + M(x, y(x)) y'(x)] dx,$$

$$\int_L L(x, y) dx + M(x, y) dy = \int_{\alpha}^{\beta} [L(x(y), y) x'(y) + M(x(y), y)] dy.$$

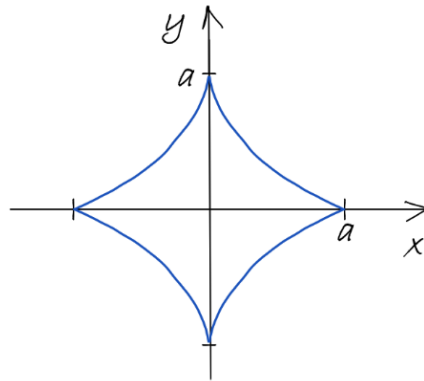
Якщо  $D$  - правильна область, що обмежена кривою  $L$ , а  $L(x, y)$ ,  $M(x, y)$  та їх частинні похідні є неперервними в цій області то справедлива формула Гріна:

$$\int_L L(x, y) dx + M(x, y) dy = \iint_D \left( \frac{\partial M(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial L(x, y)}{\partial y} \right) dx dy.$$

**Приклад 1:** Знайти масу кривої  $L$ , якщо густина в точці  $M(x, y, z)$  кривої

$$\text{дорівнює } \gamma(x, y) = |xy|, \text{ а крива } L \text{ задана рівняннями } \begin{cases} x = a \cos^3 t, \\ y = a \sin^3 t. \end{cases}$$

Розв'язок: Побудуємо задану криву. Поступово надаючи значення  $t$  з відрізка  $[0, 2\pi]$  та обчислюючи  $(x, y)$  отримуємо астроїду.



Перепишемо густину через параметр  $t$ :

$$\gamma(t) = |a \cos^3 t \cdot a \sin^3 t| = |a^2 \cos^3 t \sin^3 t|$$

та порахуємо інтеграл  $\int_L \gamma(x, y) dS$ .

$$\begin{aligned} m &= \int_L \gamma(x(t), y(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt = \\ &= \int_0^{2\pi} |a^2 \cos^3 t \sin^3 t| \sqrt{\left((a \cos^3 t)'\right)^2 + \left((a \sin^3 t)'\right)^2} dt. \end{aligned}$$

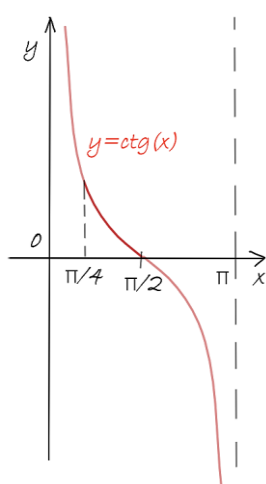
Оскільки крива симетрична відносно координатних осей, то можемо обчислити масу лише частини кривої, що знаходиться в першій чверті. Кінцями будуть точки  $(a, 0)$  та  $(0, a)$ , що відповідають значенням  $t_1 = 0$  та  $t_2 = \frac{\pi}{2}$ . Це й будуть межі інтегрування. І оскільки  $x$  та  $y$  будуть додатніми на цій частині кривої, то модуль можна прибрати.

$$\begin{aligned}
m &= 4 \int_0^{\pi/2} a^2 \cos^3 t \sin^3 t \sqrt{(-3a \cos^2 t \sin t)^2 + (3a \sin^2 t \cos t)^2} dt = \\
&= 12a^3 \int_0^{\pi/2} \cos^3 t \sin^3 t \sqrt{\cos^4 t \sin^2 t + \sin^4 t \cos^2 t} dt = 12a^3 \int_0^{\pi/2} \cos^4 t \sin^4 t dt = \\
&= 12a^3 \int_0^{\pi/2} (\cos t \sin t)^4 dt = 12a^3 \int_0^{\pi/2} \left(\frac{\sin 2t}{2}\right)^4 dt = 12a^3 \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^4 2t}{16} dt = \\
&= \frac{3}{4} a^3 \int_0^{\pi/2} \sin^4 2t dt = \frac{3}{4} a^3 \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1 - \cos 4t}{2}\right)^2 dt = \frac{3}{16} a^3 \int_0^{\pi/2} (1 - 2\cos 4t + \cos^2 4t) dt = \\
&= \frac{3}{16} a^3 \left( \int_0^{\pi/2} 1 dt - 2 \int_0^{\pi/2} \cos 4t dt + \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (1 + \cos 8t) dt \right) = \\
&= \frac{3}{16} a^3 \left( t - \frac{1}{2} \sin 4t + \frac{1}{2} t + \frac{1}{16} \sin 8t \right) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{3}{16} a^3 \frac{3\pi}{4} = \frac{9\pi a^3}{64}.
\end{aligned}$$

**Приклад 2:** Обчислити криволінійний інтеграл першого роду  $\int_L \sin x \sqrt{1 + \sin^4 x} dS$ ,

де  $L$  - дуга кривої  $y = \operatorname{ctg} x$ ,  $\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ .

Розв'язок: Скористаємось тим, що



$$\int_L f(x, y) dS = \int_a^b f(x, g(x)) \sqrt{1 + (g'(x))^2} dx, \quad a \leq x \leq b.$$

Маємо  $g'(x) = (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$ , а отже,

$$\begin{aligned}
\int_L \sin x \sqrt{1 + \sin^4 x} dS &= \int_L \sin x \sqrt{1 + \sin^4 x} \sqrt{1 + \frac{1}{\sin^4 x}} dx = \\
&= \int_L \sin x \sqrt{1 + \sin^4 x} \frac{\sqrt{\sin^4 x + 1}}{\sin^2 x} dx = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{1 + \sin^4 x}{\sin x} dx =
\end{aligned}$$

$$= \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{1}{\sin x} dx + \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin^3 x dx = \frac{1}{2} \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{dx}{\cos \frac{x}{2} \sin \frac{x}{2}} + \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin^2 x \sin x dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{dx}{\cos^2 \frac{x}{2} \operatorname{tg} \frac{x}{2}} - \int_{\pi/4}^{\pi/2} (1 - \cos^2 x) (\cos x)' dx =$$

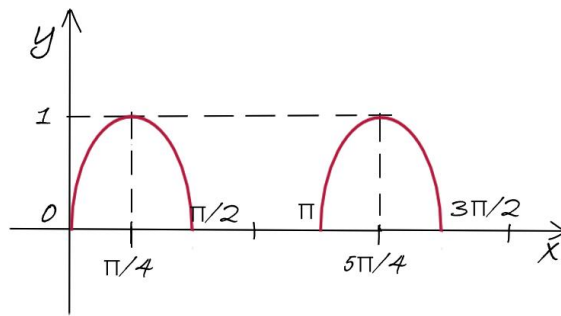
$$\begin{aligned}
&= \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{x}{2}} d\left(\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right) - \int_{\pi/4}^{\pi/2} (1 - \cos^2 x) d(\cos x) = \left( \ln\left(\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right) - \cos x + \frac{\cos^3 x}{3} \right) \Bigg|_{\pi/4}^{\pi/2} = \\
&= \ln 1 - \ln\left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{8}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{2\sqrt{2}}{24} = \frac{5\sqrt{2}}{12} - \ln\left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{8}\right).
\end{aligned}$$

**Приклад 3:** Обчислити  $\int_L \left(\operatorname{arctg} \frac{y}{x}\right)^2 \sqrt{x^2 + y^2} dS$ , де  $L$  - дуга лінії

$$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2 xy, \text{ що лежить в першій чверті.}$$

Розв'язок: Перейдемо до полярних координат  $x = \rho \cos \varphi$ ,  $y = \rho \sin \varphi$ . Таким чином, лінія прийме вигляд  $\rho = a\sqrt{\sin 2\varphi}$ . Побудуємо її.

Для цього розглянемо спочатку графік функції  $y = \sqrt{\sin 2x}$ .



Як бачимо, функція існує для всіх  $x \in \left[ \pi n, \frac{\pi}{2} + \pi n \right]$ , а отже ми маємо

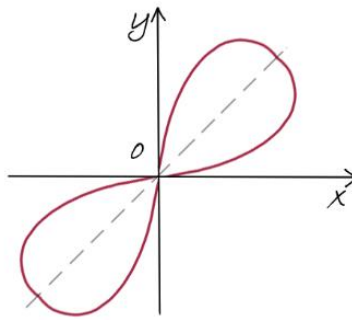
дві області зміни  $\varphi$ :  $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$  та  $\pi \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{2}$ . Враховуючи

періодичність та непарність функції  $\sin 2x$ , достатньо знайти точки лінії для  $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ . Графік приймає найбільше значення в точці

$x = \frac{\pi}{4}$ , а отже  $\rho\left(\frac{\pi}{4}\right) = a$ . Для  $0 \leq x < \frac{\pi}{4}$  функція  $y = \sqrt{\sin 2x}$  зростає,

а при  $\frac{\pi}{4} < x \leq \frac{\pi}{2}$  - спадає. Таким самим чином поводить себе і  $\rho$ .

Враховуючи симетрію можемо побудувати дві пелюстки.



Оскільки для задачі нам потрібна перша чверть, то  $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ .

Скористаємось формулою

$$\int_L f(x, y) dS = \int_a^b f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \sqrt{\rho^2(\varphi) + (\rho'(\varphi))^2} d\varphi, \quad a \leq \varphi \leq b.$$

Знайдемо похідну  $\rho = a\sqrt{\sin 2\varphi} \Rightarrow \rho' = \frac{a \cos 2\varphi}{\sqrt{\sin 2\varphi}}$  та отримаємо

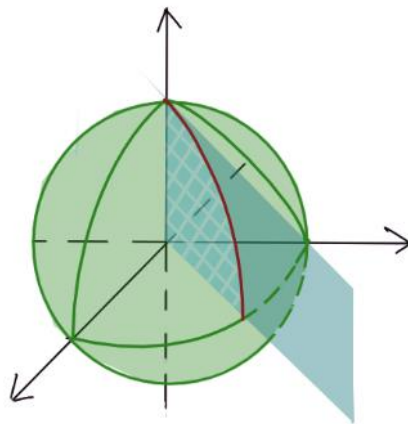
$$\begin{aligned} \int_L \left( \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \right)^2 \sqrt{x^2 + y^2} dS &= \int_0^{\pi/2} \left( \operatorname{arctg} \frac{\rho \sin \varphi}{\rho \cos \varphi} \right)^2 \sqrt{(\rho \cos \varphi)^2 + (\rho \sin \varphi)^2} \cdot \\ &\cdot \sqrt{\left( a\sqrt{\sin 2\varphi} \right)^2 + \left( \frac{a \cos 2\varphi}{\sqrt{\sin 2\varphi}} \right)^2} d\varphi = \int_0^{\pi/2} \varphi^2 \rho \sqrt{a \sin 2\varphi + \frac{a^2 \cos^2 2\varphi}{\sin 2\varphi}} d\varphi = \\ &= \int_0^{\pi/2} \varphi^2 \underbrace{a\sqrt{\sin 2\varphi}}_{\rho} \sqrt{\frac{a^2 \sin^2 2\varphi}{\sin 2\varphi} + \frac{a^2 \cos^2 2\varphi}{\sin 2\varphi}} d\varphi = a^2 \int_0^{\pi/2} \varphi^2 d\varphi = a^2 \frac{\varphi^3}{3} \Big|_0^{\pi/2} = \\ &= \frac{a^2 \pi^3}{24}. \end{aligned}$$

**Приклад 4:** Знайти  $\int_L (x + y) dS$ , якщо  $L$  - четверть кулі  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ ,  $y = x$ ,

що лежить в першому октанті.

Розв'язок: Знайдемо перетин кулі  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$  площиною  $y = x$  та

$$\text{побудуємо його} \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \\ y = x \end{cases} \Rightarrow 2y^2 + z^2 = R^2.$$



Спростимо та отримаємо  $\frac{z^2}{R^2} + \frac{y^2}{R^2/2} = 1$  - еліпс з осями  $R$  та  $\frac{R}{\sqrt{2}}$ .

Запишемо даний еліпс в параметричному вигляді:  $z = R \cos t$ ,

$x = \frac{R}{\sqrt{2}} \sin t$  та  $y = \frac{R}{\sqrt{2}} \sin t$  (бо  $y = x$ ). Знайдемо значення  $t$  на кінцях:

для точки  $(0,0,R)$   $t$  буде дорівнювати  $0$ , а для  $\left(\frac{R}{\sqrt{2}}, \frac{R}{\sqrt{2}}, 0\right)$  -  $t = \frac{\pi}{2}$ .

Отже,  $\int_L (x + y) dS =$

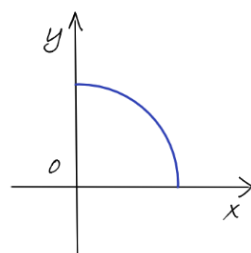
$$= \int_0^{\pi/2} \left( \frac{R}{\sqrt{2}} \sin t + \frac{R}{\sqrt{2}} \sin t \right) \sqrt{\left( (R \cos t)' \right)^2 + \left( \left( \frac{R}{\sqrt{2}} \sin t \right)' \right)^2 + \left( \left( \frac{R}{\sqrt{2}} \sin t \right)' \right)^2} dt =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{2R}{\sqrt{2}} \sin t \sqrt{R^2 \sin^2 t + R^2 \cos^2 t} dt = \frac{2R^2}{\sqrt{2}} \int_0^{\pi/2} \sin t dt = \frac{2R^2}{\sqrt{2}} \cos t \Big|_0^{\pi/2} = \sqrt{2} R^2.$$

**Приклад 5.** Обчислити  $\int_L \frac{(y^3 - x^2) dx + (x^3 + y^2) dy}{x^2 + y^2}$ , де  $L$  - дуга  $\begin{cases} x = R \cos t \\ y = R \sin t, \end{cases}$  при

$$t \in \left[ 0, \frac{\pi}{2} \right].$$

Розв'язок: Побудуємо задану дугу та отримаємо четверту частину кола.



Враховуючи, що  $\begin{cases} x = R \cos t \\ y = R \sin t, \end{cases}$  а  $\begin{cases} x' = -R \sin t \\ y' = R \cos t, \end{cases}$

$$\begin{aligned} \text{отримуємо: } \int_L \frac{(y^3 - x^2)dx + (x^3 + y^2)dy}{x^2 + y^2} &= \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{(R^3 \sin^3 t - R^2 \cos^2 t)(-R \sin t) + (R^3 \cos^3 t + R^2 \sin^2 t)R \cos t}{R^2 \cos^2 t + R^2 \sin^2 t} dt = \\ &= \frac{1}{R^2} \int_0^{\pi/2} R^3 (-R \sin^4 t + \sin t \cos^2 t + R \cos^4 t + \sin^2 t \cos t) dt = \\ &= R \int_0^{\pi/2} (R(\cos^4 t - \sin^4 t) + \sin t \cos^2 t + \sin^2 t \cos t) dt = \\ &= R^2 \int_0^{\pi/2} \cos 2t dt + R \int_0^{\pi/2} \sin t \cos^2 t dt + R \int_0^{\pi/2} \sin^2 t \cos t dt = \\ &= R^2 \left( \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^{\pi/2} + R \left( -\frac{\cos^3 t}{3} + \frac{\sin^3 t}{3} \right) \Big|_0^{\pi/2} = R \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \right) = \frac{2R}{3}. \end{aligned}$$

**Приклад 6.** Обчислити  $\int_L (xy + x + y)dx + (xy + x - y)dy$ , де  $L$  - еліпс  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ .

Розв'язок: Скористаємось формулою Гріна:  $I = \int_L (xy + x + y)dx + (xy + x - y)dy =$

$$= \iint_D \left( \frac{\partial(xy + x - y)}{\partial x} - \frac{\partial(xy + x + y)}{\partial y} \right) dx dy = \iint_D (y - x) dx dy.$$

Оскільки  $L$  - еліпс з півосями  $a$  та  $b$ , то переходячи до узагальнених

полярних координат, маємо  $\begin{cases} x = a\rho \cos \varphi, \\ y = b\rho \sin \varphi, \end{cases} \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \rho \leq 1.$

$$\begin{aligned} I &= \iint_{D'} (b\rho \sin \varphi - a\rho \cos \varphi) ab\rho d\rho d\varphi = ab \int_0^{2\pi} (b \sin \varphi - a \cos \varphi) d\varphi \int_0^1 \rho^2 d\rho = \\ &= ab \left( \frac{\rho^3}{3} \right) \Big|_0^1 (-b \cos \varphi - a \sin \varphi) \Big|_0^{2\pi} = 0. \end{aligned}$$

## Індивідуальні завдання № 6

Обчислити криволінійний інтеграл першого роду

1.  $\int_L \sqrt{1+x^6} dS;$   $L$  - дуга кривої  $4y = x^4$  між точками  $A(0,0)$  та  $B\left(1, \frac{1}{4}\right)$ .
2.  $\int_L \frac{\sin^3 x}{\sqrt{1+\sin^2 x}} dS;$   $L$  - дуга косинусоїди  $y = \cos x$ , якщо  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ .
3.  $\int_L y^2 dS;$   $L$  - верхня частина кола  $x^2 + y^2 = R^2$ ,  $y \geq 0$ .
4.  $\int_L x dS;$   $L$  - дуга кривої  $2y = x^2$  між точками  $A(1,1)$  та  $B\left(1, \frac{1}{2}\right)$ .
5.  $\int_L (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} dS;$   $L$  - дуга кривої  $(x^2 + y^2)^2 = a^2 xy$ ,  $(x \geq 0 \ y \geq 0)$ .
6.  $\int_L \frac{\cos^2 x}{\sqrt{1+\cos^2 x}} dS;$   $L$  - дуга синусоїди  $y = \sin x$ , якщо  $0 \leq x \leq \pi$ .
7.  $\int_L y dS;$   $L$  - відрізок прямої  $y = x$  між точками  $A(0,0)$  та  $B(1,1)$ .
8.  $\int_L \sqrt{x^2 + y^2} dS;$   $L$  - верхня половина кардіоїди  $\rho = a(1 + \cos \varphi)$
9.  $\int_L \sqrt{x^2 + y^2} dS;$   $L$  - дуга кривої  $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ ,  
 $(x \geq 0 \ y \geq 0)$ .
10.  $\int_L y^2 dS;$   $L$  - дуга кривої  $x = \ln y$  між точками  $A(0,1)$  та  $B(1,2)$ .
11.  $\int_L xy^2 dS;$   $L$  - дуга кола  $\begin{cases} x = R \cos t \\ y = R \sin t, \end{cases}$  що лежить в першій чверті.

12.  $\int_L \sqrt{1 + \cos^4 x} dS;$   $L$  - дуга тангенсоїди  $y = \operatorname{tg} x$  при  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ .
13.  $\int_L y dS;$   $L$  - дуга  $\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t, \end{cases}$  при  $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ .
14.  $\int_L (x^2 + y^2 + z^2) dS;$   $L$  - дуга  $\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \\ z = at, \end{cases}$  при  $0 \leq t \leq 2\pi$ .
15.  $\int_L \frac{x^3}{y^2} dS;$   $L$  - дуга кривої  $xy = 1$  між точками  $A(1,1)$  та  $B\left(2, \frac{1}{2}\right)$ .
16.  $\int_L \sqrt{2x^2 + y^2} dS;$   $L$  - коло  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, z = x$ .
17.  $\int_L x dS;$   $L$  - відрізок  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, 0 \leq x \leq a$ .
18.  $\int_L x^2 y dS;$   $L$  - дуга астроїди  $\begin{cases} x = a \sin^3 t \\ y = a \cos^3 t, \end{cases}$  при  $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ .
19.  $\int_L y dS;$   $L$  - дуга лінії  $y^2 = 2px, 0 \leq x \leq 2p$ .
20.  $\int_L \sin^4 x \cos x dS;$   $L$  - дуга лінії  $y = \ln \sin x$  при  $\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{3}$ .
21.  $\int_L \left( \sqrt{x^2 + y^2} + a^2 \right) dS;$   $L$  - дуга спіралі Архімеда  $\rho = a^\varphi (a > 0)$  між точками  $A(0,0)$  та  $B(a^2, a)$ .
22.  $\int_L (x^2 + y^2 + z^2) dS;$   $L$  - відрізок прямої між точками  $A(1, 1, 1)$  та  $B(3, 0, 3)$ .
23.  $\int_L \sqrt{2y} dS;$   $L$  - дуга  $\begin{cases} x = a(1 - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases}$  при  $0 \leq t \leq 2\pi$ .
24.  $\int_L \sqrt{1 + \frac{x}{R}} dS;$   $L$  - дуга кривої  $x = R \sin^2 t, y = R \sin t \cos t, z = R \cos t, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ .

25.  $\int_L \sin^2 x \cos^3 x dS;$   $L$  - дуга кривої  $y = \ln \cos x$  при  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ .
26.  $\int_L \frac{z^2}{x^2 + y^2} dS;$   $L$  - дуга  $\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \\ z = at, \end{cases}$  при  $0 \leq t \leq 2\pi$ .
27.  $\int_L (3x + 4y + 2z - 2) dS;$   $L$  - відрізок прямої між точками  $A(4, -3, 6)$  та  $B(2, -5, 5)$ .
28.  $\int_L |y| dS;$   $L$  - дуга кривої  $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ .
29.  $\int_L x dS;$   $L$  - дуга кривої  $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2), (x \geq 0)$ .
30.  $\int_L \sqrt{1 + 4y + 9x} dS;$   $L$  - дуга кривої  $x = t, y = t^2, z = t^3, 0 \leq t \leq 1$ .

### Індивідуальні завдання № 7

Обчислити криволінійний інтеграл другого роду

- $\int_L (x^2 - 2xy) dx + (y^2 - 2xy) dy;$   $L$  - парабола  $y = x^2, -1 \leq x \leq 1$ .
- $\int_L y dx + z dy + x dz;$   $L: x = a \cos t, y = b \sin t, z = bt,$  при  $0 \leq t \leq 2\pi$ .
- $\int_L (x - y) dx + (x + y) dy;$   $L: x = a \cos t, y = b \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi$ .
- $\int_L y dx + x dy;$   $L$  - парабола  $y = \sqrt{x}, 0 \leq x \leq 1$ .
- $\int_L y^2 dx + x^2 dy;$   $L: x = a \cos t, y = \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi$ .
- $\int_L y dx - x dy - z^2 dz;$   $L: x = \sin t, y = \cos t, z = t^2, 0 \leq t \leq 1$ .
- $\int_L y dx + x dy;$   $L$  - парабола  $y = x^2, 0 \leq x \leq 1$ .
- $\int_L (2a - y) dx + x dy;$   $L$  - арка циклоїди  $x = a(t - \sin t),$   
 $y = a(1 - \cos t), 0 \leq t \leq 2\pi$

- |                                                       |                                                                                                           |
|-------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 9. $\int_L ydx - xdy;$                                | $L : x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t, 0 \leq t \leq 2\pi.$                                                 |
| 10. $\int_L ydx - xdy - z^3 dz;$                      | $L : x = \sin t, y = \cos t, z = t^3, 0 \leq t \leq 1.$                                                   |
| 11. $\int_L xydx + x^2 zdy + xyzdz;$                  | $L : x = e^t, y = e^{-t}, z = t^2, 0 \leq t \leq 1.$                                                      |
| 12. $\int_L (x + y)dx + (x - y)dy;$                   | $L : x = a \cos t, y = b \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi.$                                                     |
| 13. $\int_L y^2 dx + x^2 dy;$                         | $L : x = a \cos t, y = b \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi.$                                                     |
| 14. $\int_L (xy - x^2)dx + xdy;$                      | $L$ - парабола $y = 2x^2, 0 \leq x \leq 1.$                                                               |
| 15. $\int_L ydx - xdy - zdz;$                         | $L : x = \sin t, y = \cos t, z = t, 0 \leq t \leq 1.$                                                     |
| 16. $\int_L \frac{(x + y)dx - (x - y)dy}{x^2 + y^2};$ | $L$ - коло $x^2 + y^2 = a^2$ (обхід проти<br>часової стрілки)                                             |
| 17. $\int_L ydx - xdy + e^z dz;$                      | $L : x = \sin t, y = \cos t, z = t^2, 0 \leq t \leq 1.$                                                   |
| 18. $\int_L y^2 dx + x^2 dy;$                         | $L$ - дуга параболи $y = 4 - x^2$ , що<br>знаходиться в верхній півплощині<br>(обхід за часовою стрілкою) |
| 19. $\int_L ydx - xdy - z^5 dz;$                      | $L : x = \sin t, y = \cos t, z = t^4, 0 \leq t \leq 1.$                                                   |
| 20. $\int_L ydx - xdy - xydz;$                        | $L : x = \sin t, y = \cos t, z = \cos^2 t, 0 \leq t \leq 2\pi.$                                           |
| 21. $\int_L (y^2 - z^2)dx + 2yzdy - x^2 dz;$          | $L : x = t, y = t^2, z = t^3, 0 \leq t \leq 1.$                                                           |
| 22. $\int_L (x + y)dx - (x - y)dy;$                   | $L : x = a \cos t, y = b \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi.$                                                     |
| 23. $\int_L ydx - xdy + zdz;$                         | $L : x = \sin t, y = \cos t, z = \sqrt{t}, 0 \leq t \leq 1.$                                              |
| 24. $\int_L y^2 dx + xydy;$                           | $L : x = a \cos t, y = b \sin t, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}.$                                            |

25.  $\int_L ydx - xdy - z^7 dz;$   $L: x = \sin t, y = \cos t, z = t^5, 0 \leq t \leq 1.$
26.  $\int_L ydx + x^2 dy;$   $L$  - дуга параболи  $y = 4 - x^2$ , що знаходиться в верхній півплощині (обхід за часовою стрілкою)
27.  $\int_L ydx + xdy;$   $L: x = \cos t, y = \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi.$
28.  $\int_L ydx - xdy + xydz;$   $L: x = \sin t, y = \cos t, z = \cos^2 t, 0 \leq t \leq 2\pi.$
29.  $\int_L y^2 dx + x^2 dy;$   $L$  - перша арка циклоїди  
 $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$
30.  $\int_L (xy + x + y)dx + (xy + x - y)dy;$   $L: x = a \cos t, y = b \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi.$

## Поверхневі інтеграли першого та другого роду

### Поверхневий інтеграл першого роду

Обчислення поверхневого інтегралу першого роду зводиться до обчислення подвійного інтегралу по проекції поверхні на одну з координатних площин.

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_{D_{xy}} f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} dx dy,$$

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_{D_{yz}} f(x(y, z), y, z) \sqrt{1 + (x'_y)^2 + (x'_z)^2} dy dz,$$

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_{D_{xz}} f(x, y(x, z), z) \sqrt{1 + (y'_x)^2 + (y'_z)^2} dy dz.$$

### Поверхневий інтеграл другого роду

Поверхневий інтеграл другого роду зводиться до поверхневого інтегралу першого роду

$$\iint_S P(x, y, z) dydz + Q(x, y, z) dzdx + R(x, y, z) dxdy =$$

$$= \iint_S (P(x, y, z) \cos \alpha + Q(x, y, z) \cos \beta + R(x, y, z) \cos \gamma) dS.$$

Нормаль до поверхні  $\vec{n} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$  визначає знак інтегралу.

1. Якщо поверхня  $S$  однозначно проектується на область  $D$  на  $xOy$  і

$z = z(x, y)$ , то  $\iint_S R(x, y, z) dxdy = \pm \iint_D R(x, y, z(x, y)) dxdy$ , а знак залежить від знаку  $\cos \gamma$ .

2. Якщо поверхня  $S$  однозначно проектується на область  $D$  на  $xOz$  і

$y = y(x, z)$ , то  $\iint_S Q(x, y, z) dxdz = \pm \iint_D Q(x, y(x, z), z) dxdz$ , а знак залежить від знаку  $\cos \beta$ .

3. Якщо поверхня  $S$  однозначно проектується на область  $D$  на  $yOz$  і

$x = x(y, z)$ , то  $\iint_S P(x, y, z) dydz = \pm \iint_D P(x(y, z), y, z) dydz$ , а знак залежить від знаку  $\cos \alpha$ .

Якщо поверхня  $S$  замкнута і обмежує область  $G$ , то справедлива формула Остроградського-Гауса:

$$\iint_S P(x, y, z) dydz + Q(x, y, z) dzdx + R(x, y, z) dxdy =$$

$$= \iiint_G \left( \frac{\partial P(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial Q(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial R(x, y, z)}{\partial z} \right) dxdydz.$$

**Приклад 1:** Обчислити інтеграл  $\iint_S (3x^2 + 3y^2 + 5z^2) dS$ , де  $S$  - частина поверхні

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}, \text{ що відсікається площинами } z = 0, z = 1.$$

Розв'язок: Скористаємось формулою

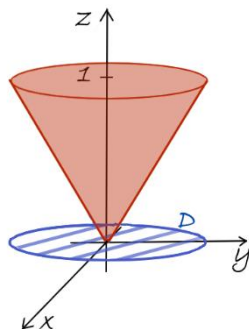
$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_D f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} dxdy.$$

Обчислимо похідні

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

$$\text{Тоді } \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2}} = \sqrt{1 + \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2}} = \sqrt{2}.$$

$$\begin{aligned} \text{Отже, } \iint_S (3x^2 + 3y^2 + 5z^2) dS &= \iint_D (3x^2 + 3y^2 + 5(x^2 + y^2)) \sqrt{2} dx dy = \\ &= 8\sqrt{2} \iint_D (x^2 + y^2) dx dy. \end{aligned}$$



Побудуємо  $S$  та її проекцію  $D$  на  $xOy$ .

Як бачимо,  $D$  - це круг  $x^2 + y^2 \leq 1$ , а отже

для обчислення подвійного інтегралу перейдемо до полярних координат.

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq \rho \leq 1.$$

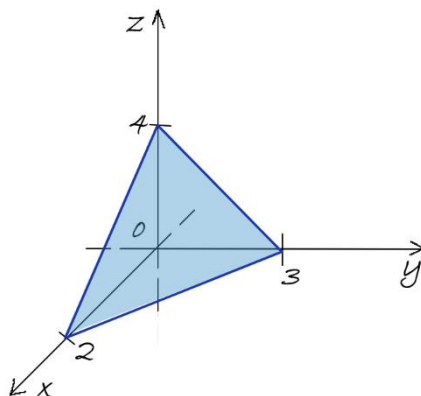
$$\iint_D (x^2 + y^2) dx dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho^2 \rho d\rho = \left(\varphi\right)_0^{2\pi} \left(\frac{\rho^4}{4}\right)_0^1 = 2\pi \frac{1}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

$$\text{Тоді } \iint_S (3x^2 + 3y^2 + 5z^2) dS = 4\sqrt{2}\pi.$$

**Приклад 2:** Обчислити інтеграл  $\iint_S \left(z + 2x + \frac{4}{3}y\right) dS$ , де  $S$  - частина площини

$$6x + 4y + 3z = 12, \text{ розміщена в першому октанті.}$$

Розв'язок: Побудуємо задану площину та спроектуємо її на  $xOy$ .



$$\text{З рівняння } 6x + 4y + 3z = 12 \text{ отримуємо } z = 4 - 2x - \frac{4}{3}y.$$

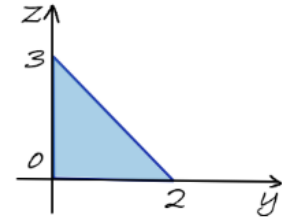
Порахуємо частинні похідні:  $\frac{\partial z}{\partial x} = -2$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{4}{3}$ . Підставляємо в

відповідну формулу обчислення

$$\begin{aligned} \iint_S \left( z + 2x + \frac{4}{3}y \right) dS &= \iint_{D_{xy}} \left( 4 - 2x - \frac{4}{3}y + 2x + \frac{4}{3}y \right) \sqrt{1 + (-2)^2 + \left(-\frac{4}{3}\right)^2} dx dy = \\ &= \frac{4}{3} \sqrt{61} \iint_{D_{xy}} dx dy. \end{aligned}$$

Розглянемо проекцію. Маємо прямокутний трикутник з катетами 2 та 3, а подвійний інтеграл – це його площа. Тому

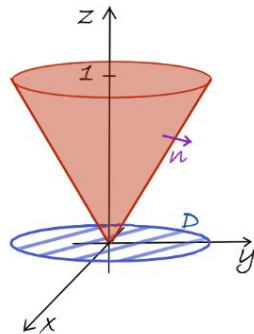
$$\iint_S \left( z + 2x + \frac{4}{3}y \right) dS = 4\sqrt{61}.$$



**Приклад 3:** Обчислити поверхневий інтеграл  $\iint_S (5x^2 + 5y^2 + 3z^2) dx dy$ , де  $S$  -

зовнішня частина поверхні конуса  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ , що відсікається площинами  $z = 0$ ,  $z = 1$ .

Розв'язок: Скористаємось малюнком з попереднього прикладу та зобразимо



нормаль зовнішньої частини конуса.

Нормаль  $\vec{n}$  утворює з віссю  $Oz$  тупий кут, а отже під час обчислень будемо брати знак «-» перед відповідним подвійним інтегралом. Оскільки  $S$  однозначно проектується на  $xOy$  то

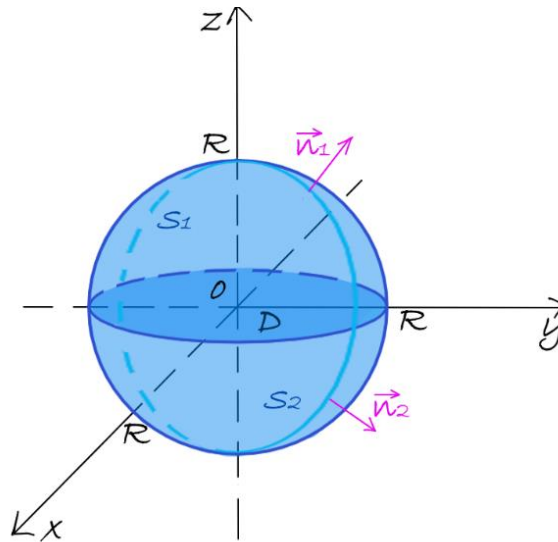
$$\begin{aligned} \iint_S f(x, y, z) dx dy &= \pm \iint_D f(x, y, z(x, y)) dx dy \text{ і} \\ \iint_S (5x^2 + 5y^2 + 3z^2) dx dy &= - \iint_D (5x^2 + 5y^2 + 3(x^2 + y^2)) dx dy = \\ &= -8 \iint_D (x^2 + y^2) dx dy = -8 \frac{\pi}{2} = -4\pi. \end{aligned}$$

**Приклад 4:** Обчислити поверхневий інтеграл другого роду

$$\iint_S x dy dz + y dz dx + z dx dy, \text{ де } S - \text{зовнішня сторона поверхні сфери}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

Розв'язок: Скористаємось малюнком



Поверхня  $S$  однозначно проектується на всі три площини, тому

$$\iint_S x dy dz + y dz dx + z dx dy = \iint_S x dy dz + \iint_S y dz dx + \iint_S z dx dy.$$

Обчислимо  $\iint_S z dx dy$ , інші інтеграли будуть такі ж. Розіб'ємо  $S$  на

дві частини: верхню ( $S_1$ ) та нижню ( $S_2$ ) частини.

$$\iint_S z dx dy = \iint_{S_1} z dx dy + \iint_{S_2} z dx dy.$$

Розглянемо  $S_1$ : Рівняння площини має вигляд  $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ , а нормаль  $\vec{n}_1$  утворює гострий кут з віссю  $Oz$ , тому при обчисленні інтегралу треба взяти знак «+».

Розглянемо  $S_2$ : Рівняння площини має вигляд  $z = -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ , а нормаль  $\vec{n}_2$  утворює тупий кут з віссю  $Oz$ , тому при обчисленні інтегралу треба взяти знак «-».

$$\text{Отже, } \iint_S z dx dy = \iint_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} dx dy - \iint_D \left( -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \right) dx dy =$$

$$= 2 \iint_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} dx dy.$$

Оскільки  $D$  - це круг  $x^2 + y^2 \leq R^2$ , то перейдемо до полярних координат.

$$\begin{aligned} \iint_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} dx dy &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \rho \sqrt{R^2 - \rho^2} d\rho = -\pi \int_0^R \sqrt{R^2 - \rho^2} d(R^2 - \rho^2) = \\ &= -\pi \left( \frac{2}{3} (R^2 - \rho^2)^{\frac{3}{2}} \right) \Big|_0^R = \frac{2}{3} \pi R^3. \end{aligned}$$

$$\text{Тому, } \iint_S z dx dy = \frac{4}{3} \pi R^3 \text{ і } \iint_S x dy dz + y dz dx + z dx dy = 3 \iint_S z dx dy = 4 \pi R^3.$$

### Індивідуальні завдання №8

Обчислити поверхневий інтеграл першого роду

1.  $\iint_S (x + y + z) dS;$   $S: x^2 + y^2 + z^2 = a^2, z \geq 0.$
2.  $\iint_S x dS;$   $S:$  частина сфери  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ , що лежить в першому октанті
3.  $\iint_S z^4 dS;$   $S: x^2 + y^2 + z^2 = a^2, z \geq 0.$
4.  $\iint_S xyz dS;$   $S:$  частина площини  $x + y + z = 1$ , що лежить в першому октанті
5.  $\iint_S (x^2 + y^2) dS;$   $S: x^2 + y^2 + z^2 = a^2, z \geq 0.$
6.  $\iint_S (x^2 + y^3 + z^2) dS;$   $S:$  півсфера  $y = \sqrt{R^2 - x^2 - z^2}.$
7.  $\iint_S (x^2 + y^2) dS;$   $S:$  поверхня, що обмежена  $z = \sqrt{x^2 + y^2}, z = 1.$
8.  $\iint_S (x^2 + y^2)^3 dS;$   $S:$  бокова поверхня конуса  $z = \sqrt{x^2 + y^2} (0 \leq z \leq 1).$

9.  $\iint_S z dS;$   $S: x^2 + y^2 + z^2 = a^2, z \geq 0.$
10.  $\iint_S \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} dS;$   $S:$  частина поверхні  $z = 2xy, (x \geq 0, y \geq 0)$ , що вирізана циліндром  $(x^2 + y^2)^2 = 4xy.$
11.  $\iint_S y dS;$   $S: x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z \geq 0.$
12.  $\iint_S (y^2 + x^2 + z - 2) dS;$   $S:$  частина поверхні  $2z = 9 - x^2 - y^2,$ , що вирізана площиною  $z = 0.$
13.  $\iint_S z^3 dS;$   $S: x^2 + y^2 + z^2 = a^2, z \geq 0.$
14.  $\iint_S \sqrt{x^2 + y^2} dS;$   $S:$  бокова поверхня конуса  $z = \sqrt{x^2 + y^2} (0 \leq z \leq 1).$
15.  $\iint_S y^2 dS;$   $S: x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z \geq 0.$
16.  $\iint_S z(x + y) dS;$   $S: z = \sqrt{4 - x^2} (0 \leq y \leq 5).$
17.  $\iint_S x^2 dS;$   $S: x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z \geq 0.$
18.  $\iint_S (x^2 + y^2)^2 dS;$   $S: x^2 + y^2 + z^2 = a^2, z \geq 0.$
19.  $\iint_S (2z^2 - y^2 - x^2) dS;$   $S:$  частина поверхні конуса  $z = \sqrt{x^2 + y^2},$  що вирізана циліндром  $x^2 + y^2 = 2x.$
20.  $\iint_S (x^4 + y^4 + z^4) dS;$   $S: x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z \geq 0.$
21.  $\iint_S y^4 dS;$   $S: x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z \geq 0.$
22.  $\iint_S \sqrt{x^2 + y^2} dS;$   $S:$  бокова поверхня конуса  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 0 (0 \leq z \leq b).$
23.  $\iint_S (x + y) dS;$   $S: x^2 + y^2 + z^2 = a^2, z \geq 0.$

24.  $\iint_S (x^2 + 3y^2 + z^2 + 5) dS$ ; S: частина конуса  $y = \sqrt{x^2 + z^2}$ , що вирізана площинами  $y = 0$ ,  $y = 2$ .
25.  $\iint_S z^2 dS$ ; S:  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ,  $z \geq 0$ .
26.  $\iint_S (x^2 + y^2) dS$ ; S: бокова поверхня конуса  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  ( $0 \leq z \leq 1$ ).
27.  $\iint_S (xy + yz + zx) dS$ ; S: частина поверхні конуса  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ , що вирізана циліндром  $x^2 + y^2 = 2x$ .
28.  $\iint_S (x^2 + y^2)^3 dS$ ; S:  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ,  $z \geq 0$ .
29.  $\iint_S (x^2 + y^2)^2 dS$ ; S: бокова поверхня конуса  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  ( $0 \leq z \leq 1$ ).
30.  $\iint_S x^2 y^2 dS$ ; S:  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ ,  $z \geq 0$ .

### Індивідуальні завдання №9

Обчислити поверхневі інтеграли другого роду

- $\iint_S (9x^2 + 9y^2 + z^2) dx dy$ , де S: зовнішня сторона верхньої частини сфери  $z = \sqrt{8 - y^2 - x^2}$ , що вирізана конусом  $z = \sqrt{y^2 + x^2}$ .
- $\iint_S (x^2 + 3y^2 + z^2) dx dz$ , де S: зовнішня сторона частини поверхні конуса  $z = \sqrt{x^2 + z^2}$ , що відрізається площинами  $y = 0$ ,  $y = 1$ .
- $\iint_S (y - z) dy dz + (z - x) dz dx + (x - y) dx dy$ , де S: зовнішня сторона поверхні конуса  $z = \sqrt{y^2 + x^2}$ , ( $0 \leq z \leq h$ ).
- $\iint_S (4x^2 + 4y^2 - 5z^2) dx dz$ , де S: внутрішня сторона частини поверхні  $z = \sqrt{9 - x^2}$ , що відрізається площинами  $y = 4$ ,  $z = 0$ ,  $z = 3$ .

5.  $\iint_S xdydz + ydzdx + zdx dy$ , де  $S$ : зовнішня сторона еліпсоїда  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ .
6.  $\iint_S dx dy$ , де  $S$ : зовнішня сторона еліпсоїда  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ .
7.  $\iint_S x^2 y^2 z dx dy$ , де  $S$ : зовнішня сторона нижньої половини сфери  
 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ .
8.  $\iint_S yz dz dx$ , де  $S$ : зовнішня сторона верхньої частини еліпсоїда  
 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ .
9.  $\iint_S \left( \frac{dy dz}{x} + \frac{dz dx}{y} + \frac{dx dy}{z} \right)$ , де  $S$ : зовнішня сторона еліпсоїда  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ .
10.  $\iint_S (3x^2 + 7y^2 + 7z^2) dy dz$ , де  $S$ : внутрішня сторона частини сфери  
 $x = \sqrt{R^2 - y^2 - z^2}$ , що вирізана конусом  $x = \sqrt{y^2 + z^2}$ .
11.  $\iint_S (2x + 3y + 4z) dx dy$ , де  $S$ : верхня частина площини  $x + y + z = 6$ , що  
обрізана циліндром  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ .
12.  $\iint_S (4x^2 + 4y^2 + z^2) dx dy$ , де  $S$ : зовнішня сторона поверхні конуса  
 $z = \sqrt{y^2 + x^2}$ , що відрізається площинами  $y = 0$ ,  $y = 2$ .
13.  $\iint_S \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + z \right) dx dy$ , де  $S$ : зовнішня сторона частини поверхні  
 $z = c^2 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$ , що обрізана площиною  $z = 0$ .
14.  $\iint_S (7x^2 + 7y^2 + 3z^2) dx dy$ , де  $S$ : внутрішня сторона частини конуса  
 $z = \sqrt{y^2 + x^2}$ , що відрізається площинами  $z = 0$ ,  $z = 1$ .

15.  $\iint_S xdydz + ydzdx + zdx dy$ , де  $S$ : зовнішня сторона сфери  $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = R^2$ .
16.  $\iint_S x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dx dy$ , де  $S$ : зовнішня сторона половини сфери  
 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2, (z > 0)$
17.  $\iint_S xdydz + ydzdx + zdx dy$ , де  $S$ : зовнішня сторона сфери  $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = R^2$ .
18.  $\iint_S (x^2 + y^2 + z^2) dx dz$ , де  $S$ : зовнішня сторона частини сфери  $y = \sqrt{1 - x^2 - z^2}$ ,  
що вирізана конусом  $y = \sqrt{x^2 + z^2}$ .
19.  $\iint_S \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 3z \right) dx dy$ , де  $S$ : зовнішня сторона частини поверхні  
 $z = c^2 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$ , що обрізана площиною  $z = 0$ .
20.  $\iint_S \left( \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} \right) dx dy$ , де  $S$ : зовнішня сторона частини поверхні  $z = 4 - \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9}$ ,  
що обрізана площиною  $z = 0$ .
21.  $\iint_S xdydz + ydzdx + zdx dy$ , де  $S$ : зовнішня сторона сфери  $x^2 + (y-1)^2 + z^2 = R^2$ .
22.  $\iint_S x^3 dydz$ , де  $S$ : зовнішня сторона верхньої частини еліпсоїда  
 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ .
23.  $\iint_S \left( \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} \right) dx dy$ , де  $S$ : внутрішня сторона частини поверхні  $z = 4 - \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9}$ ,  
що обрізана площиною  $z = 0$ .
24.  $\iint_S \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 5z \right) dx dy$ , де  $S$ : зовнішня сторона частини поверхні  
 $z = c^2 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$ , що обрізана площиною  $z = 0$ .

25.  $\iint_S (y^2 + z^2) dx dy$ , де  $S$ : зовнішня сторона частини поверхні  $z = \sqrt{9 - x^2}$ , що відрізається площинами  $y = 0$ ,  $y = 2$ .
26.  $\iint_S \left( \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z}{4} \right) dx dy$ , де  $S$ : зовнішня сторона нижньої частини еліпсоїда  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$ .
27.  $\iint_S x^3 dx dz$ , де  $S$ : зовнішня сторона верхньої половини сфери  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ .
28.  $\iint_S z dx dy$ , де  $S$ : зовнішня сторона верхньої половини еліпсоїда  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ .
29.  $\iint_S z^3 dx dy$ , де  $S$ : зовнішня сторона еліпсоїда  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ .
30.  $\iint_S \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} \right) dx dz$ , де  $S$ : зовнішня сторона частини поверхні  $y = b^2 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2}$ , що обрізана площиною  $y = 0$ .

### Елементи теорії поля

**Приклад 1:** Знайти дивергенцію та найбільшу густину циркуляції векторного поля  $\vec{F} \{x^3 + xy^2, y^3 + x^3y, z^2\}$  в точці  $M_0(1, 2, 3)$ .

Розв'язок: Для обчислення дивергенції векторного поля використаємо формулу

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}.$$

Знайдемо частинні похідні:  $\frac{\partial F_x}{\partial x} = 3x^2 + y^2$ ,  $\frac{\partial F_y}{\partial y} = 3y^2 + x^3$ ,  $\frac{\partial F_z}{\partial z} = 2z$ .

Тоді  $\operatorname{div} \vec{F} = 3x^2 + y^2 + 3y^2 + x^3 + 2z = 3x^2 + 4y^2 + x^3 + 2z$  і

$$\operatorname{div} \vec{F} \Big|_{M_0} = (3x^2 + 4y^2 + x^3 + 2z) \Big|_{M_0} = 3 + 16 + 1 + 6 = 26.$$

Оскільки найбільша густина циркуляції векторного поля рівна модулю ротора, то обчислимо спочатку ротор.

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{F} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^3 + xy^2 & y^3 + x^3y & z^2 \end{vmatrix} = \\ &= \vec{i} \left( \frac{\partial z^2}{\partial y} - \frac{\partial (y^3 + x^3y)}{\partial z} \right) - \vec{j} \left( \frac{\partial z^2}{\partial x} - \frac{\partial (x^3 + xy^2)}{\partial z} \right) + \\ &+ \vec{k} \left( \frac{\partial (y^3 + x^3y)}{\partial x} - \frac{\partial (x^3 + xy^2)}{\partial y} \right) = 0\vec{i} - 0\vec{j} + (3x^2y - 2xy)\vec{k}. \end{aligned}$$

$$\text{Тоді } \operatorname{rot} \vec{F} = \sqrt{(3x^2y - 2xy)^2} = |3x^2y - 2xy| \text{ і } \operatorname{rot} \vec{F} \Big|_{M_0} = |6 - 4| = 2.$$

**Приклад 2:** Обчислити потік векторного поля  $\vec{F} \{x^3 + xy^2, y^3 + x^3y, z^2\}$ , через зовнішню сторону замкнутої поверхні  $S: x^2 + y^2 = 1, 0 \leq z \leq 3$ .

Розв'язок: Для обчислення потоку векторного поля порахуємо інтеграл

$$I = \iint_S (x^3 + xy^2) dydz + (y^3 + x^2y) dzdx + z^2 dx dy.$$

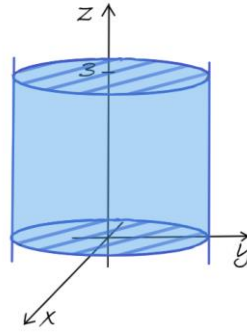
Порахуємо інтеграл за формулою Остроградського-Гауса

$$\iint_S P dydz + Q dzdx + R dx dy = \iiint_{\Omega} \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz.$$

$$\text{Порахуємо частинні похідні: } \frac{\partial P}{\partial x} = 3x^2 + y^2, \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = 3y^2 + x^2, \quad \frac{\partial R}{\partial z} = 2z.$$

$$\text{Отже, } I = \iiint_{\Omega} (4x^2 + 4y^2 + 2z) dx dy dz.$$

Поверхня  $S$  - це циліндр, що обмежений площинами  $z = 0$  та  $z = 3$ .



Для обчислення потрійного інтегралу перейдемо до циліндричних координат:

$$\begin{aligned}
 I &= \iiint_{\Omega} (4\rho^2 \cos^2 \varphi + 4\rho^2 \sin^2 \varphi + 2z) \rho d\rho d\varphi dz = \iiint_{\Omega} (4\rho^2 + 2z) \rho d\rho d\varphi dz = \\
 &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho d\rho \int_0^3 (4\rho^2 + 2z) dz = 2\pi \int_0^1 \rho (4\rho^2 z + z^2) \Big|_0^3 d\rho = 2\pi \int_0^1 (12\rho^3 + 9\rho) d\rho = \\
 &= 2\pi \int_0^1 (12\rho^3 + 9\rho) d\rho = 2\pi \left( 3\rho^4 + \frac{9}{2}\rho \right) \Big|_0^1 = 15\pi.
 \end{aligned}$$

**Приклад 3:** Показати, що поле потенціальне.

$$\vec{F} \{ 2x \cos y - y^2 \sin x, 2y \cos x - x^2 \sin y \}$$

Розв'язок: Поле потенціальне коли  $\text{rot} \vec{F} = \vec{0}$ .

$$\begin{aligned}
 \text{rot} \vec{F} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2x \cos y - y^2 \sin x & 2y \cos x - x^2 \sin y & 0 \end{vmatrix} = \\
 &= \vec{i} \left( -\frac{\partial (2y \cos x - x^2 \sin y)}{\partial z} \right) - \vec{j} \left( -\frac{\partial (2x \cos y - y^2 \sin x)}{\partial z} \right) + \\
 &+ \vec{k} \left( \frac{\partial (2y \cos x - x^2 \sin y)}{\partial x} - \frac{\partial (2x \cos y - y^2 \sin x)}{\partial y} \right) = \\
 &= 0\vec{i} + 0\vec{j} + (-2\sin x - 2x\sin y + 2x\sin y + 2y\sin x)\vec{k} = \vec{0}.
 \end{aligned}$$

**Приклад 4:** Знайти циркуляцію векторного поля  $\vec{F}$  по контуру  $L$ .

$$\vec{F} \{ x - y, x, z^2 \}, \quad L = \begin{cases} x^2 + y^2 = 4z^2, \\ z = 0.5. \end{cases}$$

Розв'язок: Розв'яжемо задачу двома способами.

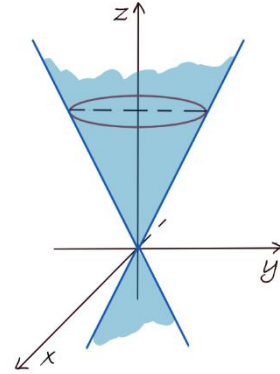
### Спосіб 1. Безпосередньо.

Циркуляція векторного поля дорівнює криволінійному інтегралу по кривій  $L$ :

$$C = \int_L P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz.$$

$$\text{Отже, } C = \int_L (x - y)dx + xdy + z^2 dz.$$

Розглянемо контур  $L$ . Підставляючи  $z = 0.5$  в рівняння конуса  $x^2 + y^2 = 4z^2$ , отримуємо коло  $x^2 + y^2 = 1$ .



Пам'ятаючи, що параметричне представлення для кола буде  $x = \cos t$ ,  $y = \sin t$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ , можемо обчислити криволінійний інтеграл:

$$\begin{aligned} C &= \int_0^{2\pi} \left[ (\cos t - \sin t)(-\sin t) + \cos t \cos t + \frac{1}{4} \cdot 0 \right] dt = \\ &= \int_0^{2\pi} \left[ -\sin t \cos t + \sin^2 t + \cos^2 t \right] dt = \int_0^{2\pi} [1 - \sin t \cos t] dt = \\ &= t \Big|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \cos t d \cos t = 2\pi. \end{aligned}$$

### Спосіб 2. Формула Стокса.

$$\text{За формулою Стокса } C = \oint_L \vec{F} dl = \iint_{\Omega} (\text{rot} \vec{F}, \vec{n}) d\Omega.$$

Тож знайдемо ротор векторного поля  $\vec{F}$ .

$$\text{rot} \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x - y & x & z^2 \end{vmatrix} = 0\vec{i} + 0\vec{j} + 2\vec{k}.$$

$$\text{Таким чином } C = \iint_{\Omega} (\text{rot} \vec{F}, \vec{n}) d\Omega = 2 \iint_{\Omega} dx dy.$$

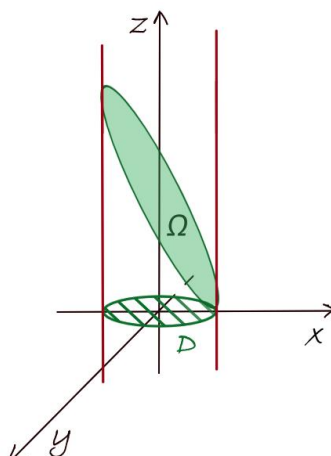
Останній інтеграл рівний площі фігури, що обмежена  $L$ , а це коло  $x^2 + y^2 = 1$ , тому  $C = 2\pi$ .

**Приклад 5:** Знайти циркуляцію векторного поля  $\vec{F}$  по контуру  $L$ .

$$\vec{F}\{3z^3 - y^3, x^3 - 2y^2, 2xy - z\},$$

$L$  - перетин циліндра  $x^2 + y^2 = 4$  площиною  $z = 4 - 2x$  (нормаль утворює гострий кут з віссю аплікат).

Розв'язок: Побудуємо перетин  $L$ .



Отримуємо еліпс.  $\Omega$  - область що обмежена цим еліпсом. Застосуємо формулу Стокса

$$C = \oint_L \vec{F} dl = \iint_{\Omega} (\text{rot} \vec{F}, \vec{n}) d\Omega.$$

Спочатку обчислимо ротор:

$$\begin{aligned} \text{rot} \vec{F} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 3z^3 - y^3 & x^3 - 2y^2 & 2xy - z \end{vmatrix} = \\ &= \left( \frac{\partial(2xy - z)}{\partial y} - \frac{\partial(x^3 - 2y^2)}{\partial z} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial(3z^3 - y^3)}{\partial z} - \frac{\partial(2xy - z)}{\partial x} \right) \vec{j} + \\ &+ \left( \frac{\partial(x^3 - 2y^2)}{\partial x} - \frac{\partial(3z^3 - y^3)}{\partial y} \right) \vec{k} = 2x\vec{i} + (9z^2 - 2y)\vec{j} + (3x^2 + 3y^2)\vec{k}. \end{aligned}$$

Приведемо поверхневий інтеграл  $\iint_{\Omega} (\text{rot} \vec{F}, \vec{n}) d\Omega$  до подвійного.

Площину  $z = 4 - 2x$  перепишемо як  $-2x + 0y - z + 4 = 0$ . За умовою, вектор нормалі утворює гострий кут з віссю  $Oz$ , а це означає що вектор нормалі слід взяти зі знаком «+», тобто  $\vec{n} = (2, 0, 1)$ .

$$(\operatorname{rot} \vec{F}, \vec{n}) = 2x \cdot 2 + (9z^2 - 2y) \cdot 0 + (3x^2 + 3y^2) \cdot 1 = 4x + 3x^2 + 3y^2,$$

а отже  $\iint_{\Omega} (\operatorname{rot} \vec{F}, \vec{n}) d\Omega = \iint_D (4x + 3x^2 + 3y^2) dx dy$ , де  $D$  - проекція  $\Omega$  на площину  $xOy$ .

Оскільки  $D$  - це коло, то перейдемо до полярних координат  $x = \rho \cos \varphi$ ,  $y = \rho \sin \varphi$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ,  $0 \leq \rho \leq 2$ .

$$\begin{aligned} \iint_D (4x + 3x^2 + 3y^2) dx dy &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 (4\rho \cos \varphi + 3\rho^2) \rho d\rho = \\ &= \int_0^{2\pi} \left( 4\frac{\rho^3}{3} \cos \varphi + 3\frac{\rho^4}{4} \right) \Big|_0^2 d\varphi = \int_0^{2\pi} \left( \frac{32}{3} \cos \varphi + 12 \right) d\varphi = \left( \frac{32}{3} \sin \varphi + 12\varphi \right) \Big|_0^{2\pi} = 24\pi. \end{aligned}$$

### Індивідуальні завдання №10

Знайти дивергенцію та найбільшу густину циркуляції векторного поля  $\vec{F}$  в точці  $M_0$ .

1.  $\vec{F} \{xy, yx^3, zx\}, \quad M_0(1, 2, 3).$
2.  $\vec{F} \{x + z, y + z^2, xy\}, \quad M_0(1, 1, 0).$
3.  $\vec{F} \{xy^2, y, z^2\}, \quad M_0(1, 3, 9).$
4.  $\vec{F} \{5x^2z, y^4, z\}, \quad M_0(1, 3, 9).$
5.  $\vec{F} \{yz, yzx^6, 9zx^2\}, \quad M_0(1, 1, 1).$
6.  $\vec{F} \{3xy^2 + y^3, zy + x^2, yz^2\}, \quad M_0(1, 2, 3).$
7.  $\vec{F} \{x^2yz + z^3, y^2x + z, x^2y^2\}, \quad M_0(1, 2, 3).$
8.  $\vec{F} \{z^2 - y^3, y^3 - x^3, x^4 + z\}, \quad M_0(1, 2, 3).$
9.  $\vec{F} \{xy^2 + xyz, 5y^2 + xz, 2z + xy^2\}, \quad M_0(1, 2, 3).$

10.  $\vec{F}\{x^3, y^3, z^3\},$   $M_0(1, 2, 3).$
11.  $\vec{F}\{x^6, xy^3 + z^2y, x + z\},$   $M_0(1, -1, 1).$
12.  $\vec{F}\{2xy^3z^2, x - y^5, z\},$   $M_0(1, 4, 1).$
13.  $\vec{F}\{3x^2y^2z, zy^3, y - z\},$   $M_0(-1, -1, -1).$
14.  $\vec{F}\{2z - x, x - y, 3x + z\},$   $M_0(16, 5, 0).$
15.  $\vec{F}\{x + y, z^2 - y, -3z^2\},$   $M_0(-4, 1, 5).$
16.  $\vec{F}\{x^7 + yz, -3y + z, xy^2\},$   $M_0(1, 1, 0).$
17.  $\vec{F}\{x^4 + y^2, y^4, z^4\},$   $M_0(1, -2, 1).$
18.  $\vec{F}\{yx^2, 2y + 4z, x^3 - 5z\},$   $M_0(-3, 0, 3).$
19.  $\vec{F}\{x^2 + 3xy, -y^4, z^2 + xy\},$   $M_0(-7, -2, 1).$
20.  $\vec{F}\{x^4 + y^2 + z, y - 3z^2, -5z\},$   $M_0(-5, -2, 0).$
21.  $\vec{F}\{x^2 + y, y^2 + x, xz\},$   $M_0(1, 2, 3).$
22.  $\vec{F}\{y^2, z^2, x^2\},$   $M_0(-1, -3, 2).$
23.  $\vec{F}\{x^3 + z, y^3 + 2z^2, x^2 + 3y\},$   $M_0(1, 1, 1).$
24.  $\vec{F}\{x^7 + yz, -3y + z, xy^2\},$   $M_0(1, 1, 0).$
25.  $\vec{F}\{x^2yz + z^3, y^2x + z, x^2y^2\},$   $M_0(3, 3, 3).$
26.  $\vec{F}\{x + z, y + z^2, xy\},$   $M_0(1, 2, 3).$
27.  $\vec{F}\{z^3, y^3, x^3\},$   $M_0(6, 2, 0).$
28.  $\vec{F}\{x + z, y + z^2, xy\},$   $M_0(2, 1, 4).$
29.  $\vec{F}\{z^4, x^4, y^4\},$   $M_0(1, 1, 1).$
30.  $\vec{F}\{x^7 + yz, -3y + z, xy^2\},$   $M_0(3, 1, 4).$

## Індивідуальні завдання №11

Обчислити потік векторного поля  $\vec{F}$  через зовнішню сторону замкнутої поверхні  $S$ .

1.  $\vec{F}\{x, y, z\},$   $S: x^2 + y^2 = 1, z = 0, z = x^2.$
2.  $\vec{F}\{x + z, y + z, 0\},$   $S: x^2 + z^2 = 4, y = 0, y = 5.$
3.  $\vec{F}\{z - y, y - x, x + z\},$   $S: x^2 + y^2 = z^2, y = 1.$
4.  $\vec{F}\{x + z, y + z, z + y\},$   $S: x^2 + y^2 = 9, x = z, z \geq 0.$
5.  $\vec{F}\{x^3, y^3, z^3\},$   $S: x^2 + y^2 + z^2 = 1.$
6.  $\vec{F}\{x, y, x + z\},$   $S: x + 2y + z = 2, x = 0, y = 0, z = 0.$
7.  $\vec{F}\{2x, -y, z\},$   $S: 9 - z = x^2 + y^2, 0 \leq z \leq 9.$
8.  $\vec{F}\{3x, 2z, y - z\},$   $S: \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1.$
9.  $\vec{F}\{2z - x, x - y, 3x + z\},$   $S: 2x + 2y + z = 2, x = 0, y = 0, z = 0.$
10.  $\vec{F}\{x + y, z - y, -3z\},$   $S: x + 2y + 2z = 2, x = 0, y = 0, z = 0.$
11.  $\vec{F}\{x, -y, z\},$   $S: 2x + 2y + 2z = 1, x = 0, y = 0, z = 0.$
12.  $\vec{F}\{x, y, z\},$   $S: x + y + z = 1, x = 0, y = 0, z = 0.$
13.  $\vec{F}\{x, 2y, -5z\},$   $S: x^2 + y^2 + z^2 = 1.$
14.  $\vec{F}\{x, -y, 1\},$   $S: x^2 + y^2 = 1, z = 0, z = 1.$
15.  $\vec{F}\{3x, 4y, -5z\},$   $S: 4x + 3y + 5z = 1, x = 0, y = 0, z = 0.$
16.  $\vec{F}\{x, y, z\},$   $S: z = x^2 + y^2, x^2 + y^2 = 1, z = 0.$
17.  $\vec{F}\{x + z, y + z, x + y\},$   $S: x^2 + y^2 + z^2 = 4.$
18.  $\vec{F}\{x, 2y, -4z\},$   $S: x + y + z = 3, x = 0, y = 0.$
19.  $\vec{F}\{x^2, y^2, z^2\},$   $S: x = 0, x = 2, y = 0, y = 2, z = 0, z = 2.$
20.  $\vec{F}\{x, 2y, -4z\},$   $S: x^2 + y^2 = 1, z = 0, z = 1.$
21.  $\vec{F}\{2x, -4y, z\},$   $S: 2x + 4y + z = 3, x = 0, y = 0, z = 0.$

22.  $\vec{F}\{x, y, z\},$   $S: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{25} = 1.$
23.  $\vec{F}\{3x, -2z, y\},$   $S: x + y + z = 2, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0.$
24.  $\vec{F}\{yz, -x, -z\},$   $S: x^2 + z^2 = y^2, y = 0, y = 5.$
25.  $\vec{F}\{x, 2y, -3z\},$   $S: x^2 + y^2 = 1, z = 0, z = 1.$
26.  $\vec{F}\{x, y, z\},$   $S: x^2 + y^2 = z^2, z = 3.$
27.  $\vec{F}\{yz, xz, xz\},$   $S: x^2 + z^2 = y, x = 0, y = 1, z = 0.$
28.  $\vec{F}\{x, y, z\},$   $S: x^2 + y^2 = 16, z = 0, z = 4.$
29.  $\vec{F}\{x^3, y^3, z^3\},$   $S: x^2 + y^2 = z^2, 0 \leq z \leq 3.$
30.  $\vec{F}\{y, 3x, -2z\},$   $S: x + y + z = 2, x = 0, y = 0, z = 0.$

### Індивідуальні завдання №12

Показати, що векторне поле  $\vec{F}$  потенціальне.

- $\vec{F} = \{3x^2 + 3y - 4, 3x + z^2, 2yz + 4\}.$
- $\vec{F} = \{3x^2 + 2y^2 + 3z, 4xy + 2y - z, 3x - y + 5\}.$
- $\vec{F} = \{6x + 2y, 2x + z^2, 2yz\}.$
- $\vec{F} = \left\{ \frac{1}{y} - \frac{z}{x^2}, \frac{1}{z} - \frac{x}{y^2}, \frac{1}{x} - \frac{y}{z^2} \right\}.$
- $\vec{F} = \{2x - 2y + 4z, -2x + 4y + 2z, 6z + 4x + 2y\}.$
- $\vec{F} = \{\sin z, -\cos z, x \cos z + y \sin z\}.$
- $\vec{F} = \{2x + y + z, x + 2y + z, 2z\}.$
- $\vec{F} = \{-yz, 2y - xz, 3z^2 - xy\}.$
- $\vec{F} = \{z^2 e^{x+y^2}, 2yz^2 e^{x+y^2}, 2ze^{x+y^2}\}.$
- $\vec{F} = \left\{ \frac{1}{y}, -\frac{x}{y^2}, 2z \right\}.$

11.  $\vec{F} = \{3x^2 - 4xy, -2x^2, 6z\}.$
12.  $\vec{F} = \{3x^2 + 2xz^2, 3y^2, 2x^2z\}.$
13.  $\vec{F} = \{8xy + 5z^3, 4x^2 - 8, 15xz^2\}.$
14.  $\vec{F} = \{3x^2y^2z, 2x^3yz, x^3y^2\}.$
15.  $\vec{F} = \left\{ \frac{1}{\cos^2 x}, -2\sin y \cos y, -\frac{1}{\sin^2 z} \right\}.$
16.  $\vec{F} = \{yz, xz, xy\}.$
17.  $\vec{F} = \left\{ x - \frac{y^2}{4x^2}, \frac{y}{2x} - \frac{z^2}{y^2}, \frac{2z}{y} - \frac{2}{z^2} \right\}.$
18.  $\vec{F} = \{yze^{xyz}, xze^{xyz}, xye^{xyz}\}.$
19.  $\vec{F} = \{12x^2 + 6xz + 3y^2, 6xy, 3x^2 - 3z^2\}.$
20.  $\vec{F} = \left\{ \frac{2x}{x^2 + y^2 + z^2}, \frac{2y}{x^2 + y^2 + z^2}, \frac{2z}{x^2 + y^2 + z^2} \right\}.$
21.  $\vec{F} = \{2xy^3z^4, 3x^2y^2z^4, 4x^2y^3z^3\}.$
22.  $\vec{F} = \{y^2z^2, 2xyz^2, 2xy^2z\}.$
23.  $\vec{F} = \{y^2z^3, 2xyz^3, 3xy^2z^2\}.$
24.  $\vec{F} = \{yz^2, xz^2 + 4y + 3z, 2xyz + 3y\}.$
25.  $\vec{F} = \{7, 2y, 3z^2\}.$
26.  $\vec{F} = \{ye^{xy} \sin z, xe^{xy} \sin z, e^{xy} \cos z\}.$
27.  $\vec{F} = \{2x, 2y, 2z\}.$
28.  $\vec{F} = \{2xy^2z^2, 2x^2yz^2, 2x^2y^2z\}.$
29.  $\vec{F} = \{2x - y + 7, 2y - x, 2z + 7\}.$
30.  $\vec{F} = \{-y + 5, 4y - x - z, 2z - y\}.$

### Індивідуальні завдання №13

Знайти циркуляцію векторного поля  $\vec{F}$  по контуру  $L$ .

$$1. \quad \vec{F} = \{z - 1, xz, y^2\},$$

$L$  - перетин гіперболоїда

$$x^2 - y^2 + 3z^2 = -1 \text{ площиною } x + 2y = 3$$

(нормаль утворює гострий кут з віссю абсцис).

$$2. \quad \vec{F} = \{y, z, xy\},$$

$L$  - перетин гіперболоїда  $x^2 - 5y^2 - z^2 = 1$

площиною  $x = 2y + 1$  (нормаль утворює гострий кут з віссю абсцис).

$$3. \quad \vec{F} = \{x^2 + y^2, y + z, x\},$$

$L$  - перетин еліпсоїда  $2x^2 + y^2 + z^2 = 1$

площиною  $z = y - 1$  (нормаль утворює гострий кут з віссю аплікат).

$$4. \quad \vec{F} = \{y^2, \sqrt{x^2 + y^2}, y\},$$

$L$  - перетин гіперболоїда

$$-x^2 + 2y^2 + z^2 = 1 \text{ площиною } x = y$$

(нормаль утворює гострий кут з віссю абсцис).

$$5. \quad \vec{F} = \left\{ \begin{array}{l} 3z^2 - y^3, \\ x^3 - 2y^2z^2, \\ 2xyz - x^2y^2 \end{array} \right\},$$

$L$  - перетин циліндра  $x^2 + y^2 = 4$

площиною  $z = 4 - 2x$  (нормаль утворює гострий кут з віссю аплікат).

$$6. \quad \vec{F} = \{z^2, z, x^2 + y^2\},$$

$L$  - перетин гіперболоїда

$$x^2 - 4y^2 + 5z^2 = 1 \text{ площиною } x = 3y$$

(нормаль утворює гострий кут з віссю абсцис).

$$7. \quad \vec{F} = \left\{ \frac{x}{z+1}, xz, y \right\},$$

$L$  - перетин еліпсоїда  $2x^2 + y^2 + z^2 = 1$

площиною  $z = 1 - y$  (нормаль утворює гострий кут з віссю аплікат).

$$8. \quad \vec{F} = \{y^2 z, -e^x, \sin z\},$$

$$9. \quad \vec{F} = \{2y - x, 1, z\},$$

$$10. \quad \vec{F} = \left\{ \begin{array}{l} z^3 + 2y^3 + 3y, \\ y^3 - 2x^3 + xz^2, \\ z^2 - 5xy^2 \end{array} \right\},$$

$$11. \quad \vec{F} = \{y + x, z, 2y - x\},$$

$$12. \quad \vec{F} = \{x, xz, -y\},$$

$$13. \quad \vec{F} = \{z^2, -x, e^{x^2+y^2}\},$$

$$14. \quad \vec{F} = \{y - 3x, -3x, 2z\},$$

$$15. \quad \vec{F} = \left\{ \begin{array}{l} y^3 - 8yz - z, \\ yz - x^3 + 2x, \\ yx^3 - 2z^3 \end{array} \right\},$$

$$16. \quad \vec{F} = \{2z, y - x, 3x\},$$

$L$  - перетин циліндра  $y^2 + z^2 = 4$

площиною  $x = -y$  (нормаль утворює гострий кут з віссю абсцис).

$L$  - перетин гіперболоїда

$x^2 - y^2 + 3z^2 = -1$  площиною  $x + 2y = 3$  (нормаль утворює гострий кут з віссю абсцис).

$L$  - перетин сфери  $x^2 + y^2 + z^2 = 2$  та конуса  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

$L$  - контур  $ABCA$ , якщо  $A(2; 0; 0)$ ,

$B(0; 3; 0)$ ,  $C(0; 0; 1)$

$L$  - перетин гіперболоїда

$x^2 + 2y^2 - 2z^2 = -1$  площиною  $2z = 2 - x$  (нормаль утворює гострий кут з віссю ординат).

$L$  - перетин циліндра  $x^2 + y^2 = 4$

площиною  $z = 2y$  (нормаль утворює гострий кут з віссю аплікат).

$L$  - контур  $ABCA$ , якщо  $A(2; 0; 0)$ ,

$B(0; 3; 0)$ ,  $C(0; 0; 1)$

$L$  - перетин параболоїда  $x^2 + y^2 = z$  площиною  $z = 1$ .

$L$  - контур  $ABCA$ , якщо  $A(2; 0; 0)$ ,

$B(0; 3; 0)$ ,  $C(0; 0; 1)$

$$17. \quad \vec{F} = \{\cos z^2, 1+x, z-y\},$$

$L$  - перетин параболоїда  $z = x^2 + y^2$

площиною  $z = 2x + 1$  (нормаль утворює гострий кут з віссю аплікат).

$$18. \quad \vec{F} = \left\{ \begin{array}{l} 3+y, \\ -\cos y, \\ y+z-x \end{array} \right\},$$

$L$  - перетин еліпсоїда  $x^2 + 2y^2 + z^2 = 4$

площиною  $z = x + 1$  (нормаль утворює гострий кут з віссю аплікат).

$$19. \quad \vec{F} = \{2+x, -yz, x^2\},$$

$L$  - перетин параболоїда  $z = x^2 + y^2$

площиною  $z = -2x$  (нормаль утворює гострий кут з віссю аплікат).

$$20. \quad \vec{F} = \{5x-7, x+2y, y-3z\},$$

$L$  - контур  $ABCA$ , якщо  $A(2; 0; 0)$ ,

$B(0; 3; 0)$ ,  $C(0; 0; 1)$

$$21. \quad \vec{F} = \left\{ (y+z), \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, xyz \right\},$$

$L$  - перетин еліпсоїда  $x^2 + y^2 + 5z^2 = 2$

площиною  $y = 2x$  (нормаль утворює гострий кут з віссю ординат).

$$22. \quad \vec{F} = \{x-z, y+z, x-y\},$$

$L$  - контур  $ABCA$ , якщо  $A(2; 0; 0)$ ,

$B(0; 3; 0)$ ,  $C(0; 0; 1)$

$$23. \quad \vec{F} = \{yz, \sin(x^2 + y^2), xz\},$$

$L$  - перетин гіперболоїда

$-2x^2 + y^2 + 2z^2 = 1$  площиною  $y = 2x$

(нормаль утворює гострий кут з віссю ординат).

$$24. \quad \vec{F} = \{y+x, y+z, 2x+4z\},$$

$L$  - контур  $ABCA$ , якщо  $A(2; 0; 0)$ ,

$B(0; 3; 0)$ ,  $C(0; 0; 1)$

$$25. \quad \vec{F} = \{z^2, x, z+y\},$$

$L$  - перетин еліпсоїда  $x^2 + y^2 + 2z^2 = 1$

площиною  $y = -x$  (нормаль утворює гострий кут з віссю ординат).

$$26. \quad \vec{F} = \{y, e^{z^2}, z + x\},$$

$L$  - перетин параболоїда  $x^2 + y^2 = z$   
площиною  $z = 2y$  (нормаль утворює  
гострий кут з віссю аплікату).

$$27. \quad \vec{F} = \{\sin(x + z), 2, y\},$$

$L$  - перетин параболоїда  $x^2 + y^2 = z$   
площиною  $z = -x$  (нормаль утворює  
гострий кут з віссю аплікату).

$$28. \quad \vec{F} = \{e^{x^2}, xy, y + z\},$$

$L$  - перетин параболоїда  $x^2 + y^2 = z$   
площиною  $z = 4x$  (нормаль утворює  
гострий кут з віссю аплікату).

$$29. \quad \vec{F} = \{x - 1, -y, -1\},$$

$L$  - перетин гіперболоїда  $x^2 - 5y^2 - z^2 = 1$   
площиною  $x = 2y + 1$  (нормаль утворює  
гострий кут з віссю абсцис).

$$30. \quad \vec{F} = \{y^2, e^{x^2+y^2}, y\},$$

$L$  - перетин циліндра  $x^2 + y^2 = 1$   
площиною  $z = x$  (нормаль утворює  
гострий кут з віссю аплікату).

### Список літератури

1. Дубовик В. П. Вища математика : навч.посіб. / В. П. Дубовик, І. І. Юрик. – Київ : А.С.К., 2005. – 648 с.
2. Дубовик В.П. Вища математика. Збірник задач : навч.посіб. / В. П. Дубовик, І. І. Юрик. – Київ : А.С.К., 2005. – 648 с.
3. Дудкін М. Є., Дюженкова О. Ю., Степахно І. В. Вища математика: підручник для здобувачів ступеня бакалавра за інженерними спеціальностями. — К.: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2022. — 449 с.
4. Hobson M. P., Bence S. J., Riley K. F. Mathematical Methods for Physics and Engineering: A Comprehensive Guide. 3rd ed. Cambridge University Press, 2006. 1362 p.