Визначник Вронського (вронськіан)

А. Ю. Шумлянський[1], Л. Б. Федорова[1]

[1] *КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна*

fedova.lb@gmail.com

Анотація

Ця доповідь присвячена визначнику Вронського (вронськіану), вона включає в себе такі аспекти: швидке знайомство з ученим, пояснення явища «вронськіан», доведення його недосконалості.

Ключові слова: Юзеф Вронський; Вронськіан; Контрприклади; Висновок.

Юзеф Вронський

Юзеф Гоене-Вронський (*Józef Maria Hoene-Wroński*, **1776–1853**) — **польський учений** першої половини **XIX століття**, сферами інтересів якого були **вища математика** та **історія філософії**. Ці науки він поїхав вивчати до Німеччини після участі в бойових діях під час захисту Варшави в 1794 році в якості офіцера артилерії. Його ідеї в галузі математики були досить проривними для того часу, і навіть такий відомий учений як **Жозеф Лагранж** був тієї думки, що **теорії Вронського** можуть зробити **переворот у науці**, але через його складний характер, схильність до містицизму та складні формулювання в його роботах наукові досягнення Юзефа були непомічені його сучасниками. Але після смерті Вронського в другій половині XIX століття було виявлено, що йому належить авторство значної кількості методів і деяких тверджень, які на той час були заново відкриті іншими математиками. Одним з **найважливіших** його **досягнень**, яке викарбувало його прізвище в сучасній теорії математичного аналізу, є **визначник Вронського** (*вронськіан*).

Визначник Вронського (вронськіан)

Так як авторство більшості досягнень Вронського було розкрито після смерті ученого, то, як наслідок, одне з найважливіших його математичних відкриттів отримало свою назву не від самого автора, а **назву було запропоновано шотландським** ученим **Томасом Муіром** (*Thomas Patterson Brown Muir*, **1844-1934**) у **1882** році в його монографії про визначники.

Означення. Визначник Вронського *(вронськіан) (класичний)* — це визначник квадратної матриці (зазвичай позначається $\mathbf{W}$), яка складається з двох або більше функцій (перший рядок матриці) та їх похідних (інші рядки матриці) та має такий вигляд:

$$\mathbf{W}\big[f_1(x),\, f_2(x),\, \ldots,\, f_n(x)\big] \;=\; \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \cdots & f_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

, де $\mathbf{n}$ – це кількість функцій.

Узагальнений вронськіан[Gatto, Scherbak] — **це адаптована версія** класичного визначення **для роботи** з **функціями декількох змінних, диференціальних рівнянь з частинними похідними** або **багатовимірними поліномами**. **Головною відмінністю** узагальненого поняття від класичного **є заміна** в матриці послідовних **похідних за** x **на диференціальні оператори** (частинних похідних чи інші). Зазвичай таку матрицю позначають як $\mathbf{M}(x)$, та вона має наступний вигляд:

$$\mathbf{M}(x) \;=\; \begin{pmatrix} D_0\big(f_1\big) & D_0\big(f_2\big) & \ldots & D_0\big(f_n\big) \\ D_1\big(f_1\big) & D_1\big(f_2\big) & \ldots & D_1\big(f_n\big) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{n-1}\big(f_1\big) & D_{n-1}\big(f_2\big) & \ldots & D_{n-1}\big(f_n\big) \end{pmatrix}$$

, де $\mathbf{n}$ – це кількість функцій, а $\mathbf{D_{n-1}}(\mathbf{f_n})$ – диференціальний оператор.

Наприклад, для диференційного оператора частинних похідних $\mathbf{D_{n-1}}(\mathbf{f_n})$ прийме наступний вигляд:

$$\mathbf{D_i}\big(\mathbf{f_j}\big) \;=\; \sum\nolimits_{|\alpha|\leqslant i} a_\alpha \,\frac{\partial^{|\alpha|} f_j}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_m^{\alpha_m}},$$

де α – це індекс, а $\mathbf{a}_\alpha$ – сталі.

А сам узагальнений вронськіан — це визначник матриці $\mathbf{M}(x)$:

$$\mathbf{W}\big(f_1,\ldots,f_n\big)(x) \;=\; \det\big(\mathrm{M}(x)\big).$$

Також **вронськіан** можна загалом використовувати для **лінійних однорідних диференціальних рівнянь** (*ЛОДР*) **n-го** порядку. Якщо відомі $\mathbf{n-1}$ його розв'язків, то останній можна знайти за допомогою цього визначника.

Приклад 1. Для двох рівнянь другого порядку у формі:

$$y'' + g(x)\,y' + h(x)\,y = 0$$

Є дійсними наступні вирази:

$W' + g(x)\,W = 0$ або $W = C\,e^{-\int g(x)\,dx}$, де $\mathbf{W}\big(y_1, y_2\big)(x) = y_1\,y_2' - y_2\,y_1'$, а $\mathbf{W}'\big(y_1, y_2\big)(x) = g(x)\,W(x)$.

Контрприклади

Вронськіан використовується для аналізу функцій на лінійну залежність між собою, а саме якщо $\mathbf{W} \neq \mathbf{0}$, то **функції є лінійно незалежними**. Також він має ключове значення для **дослідження** лінійних зв'язків у розв'язках одного й того самого **ЛОДР** з неперервними коефіцієнтами. У такому випадку виконуються **базові твердження**:

- Якщо $\mathbf{W} \neq \mathbf{0}$ у деякій точці, то набір розв'язків на відповідному інтервалі лінійно незалежний;
- Якщо $\mathbf{W} = \mathbf{0}$, то розв'язки лінійно залежні.

Проте для довільних функцій (які необов'язково є розв'язками ЛОДР) існують контрприклади, коли тотожний нуль Вронськіана не означає їх лінійної залежності.

Приклад 2. **Функції з модулем.**[Wirkus, Swift]

Нехай задано дві функції, які потрібно дослідити на лінійну залежність:
$\mathbf{f_1}(x) = x^3, \quad \mathbf{f_2}(x) = |x|^3$

Застосуємо вронськіан:

$$\mathbf{W}\big(f_1, f_2\big)(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) \end{vmatrix} = x^3\,\tfrac{d}{dx}\big(|x|^3\big) - 3x^2\,\big|x\big|^3.$$

Через $|\mathbf{x}|^3$ маємо два випадки:

1. Для $\mathbf{x} > \mathbf{0}$: $|x|^3 = x^3, \quad \frac{d}{dx}\big(|x|^3\big) = 3x^2$, тоді вронськіан дорівнює:
$\mathbf{W_1}\big(f_1, f_2\big)(x) = x^3 \cdot 3x^2 - 3x^2 \cdot x^3 = \mathbf{0}.$

2. Для $\mathbf{x} < \mathbf{0}$: $|x|^3 = -x^3, \quad \frac{d}{dx}\big(|x|^3\big) = -3x^2$, тоді вронськіан дорівнює:
$\mathbf{W_2}\big(f_1, f_2\big)(x) = x^3 \cdot \big(-3x^2\big) - 3x^2\,\big(-x^3\big) = \mathbf{0}.$

Отже, вронськіан тотожно дорівнює нулю на обох інтервалах, що повинно було б свідчити, що функції є лінійно залежними.

Перевірка:

$\alpha_1 x^3 + \alpha_2 \big|x\big|^3 = 0$

Знову маємо розгалуження розв'язків:

1. Для $\mathbf{x} > \mathbf{0}$: $|x|^3 = x^3$:

$\alpha_1 x^3 + \alpha_2 x^3 = 0$

$(\alpha_1 + \alpha_2)\,x^3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = -\alpha_2$

2. Для $\mathbf{x} < \mathbf{0}$: $|x|^3 = -x^3$:

$\alpha_1 x^3 - \alpha_2 x^3 = 0$

$(\alpha_1 - \alpha_2)\,x^3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 - \alpha_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = \alpha_2.$

Отже, значення коефіцієнтів відрізняються на множник $\mathbf{-1}$, з чого випливає, що єдиним випадком, коли виконується умова $a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) = 0$, є $a_1 = a_2 = 0$, що свідчить про лінійну незалежність функцій.

Приклад 3. **Кусково-задані функції.**[Wirkus, Swift]

$$f_1(x) = \begin{cases} e^x, & x \geqslant 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases} \qquad f_2(x) = \begin{cases} 0, & x \geqslant 0, \\ e^{-x}, & x < 0. \end{cases}$$

Як підсумок, Вронськіан не є універсальним індикатором лінійної залежності для будь-яких функцій. Його визначна властивість залишається справедливою у чітко визначених умовах, зокрема коли йдеться про сімейство розв'язків ЛОДР (з неперервними коефіцієнтами). Якщо ж умови виходять за ці рамки, слід бути обережним: нульове значення Вронськіана не гарантує, що функції лінійно залежні.

Висновок

Отже, визначник Вронського (Вронськіан) є серйозним інструментом у теорії лінійних диференціальних рівнянь, дозволяючи просто й ефективно перевіряти лінійну незалежність (або залежність) розв'язків. Завдяки властивостям Вронськіана можна:

- Оцінювати повноту системи розв'язків для ЛОДР n-го порядку з неперервними коефіцієнтами;
- Знаходити невідомі розв'язки, якщо вже відомо $\mathbf{n-1}$ незалежних розв'язків;
- Застосовувати у фізичних задачах: при моделюванні коливальних, хвильових, електричних процесів часто достатньо одного-двох обчислень Вронськіана, щоб переконатися в правильності побудованих фундаментальних систем розв'язків.

Також узагальнене поняття Вронськіана використовується й в алгебраїчній геометрії та теорії чисел. Зокрема, Теорема Рота (одна з фундаментальних у діофантовій апроксимації) спирається на результат про «узагальнені Вронськіани»: якщо всі вони тотожно дорівнюють нулю для певного набору поліномів, то ці поліноми є лінійно залежними.

Отож, Визначник Вронського (вронськіан) є важливим інструментом не лише в теорії звичайних диференціальних рівнянь (ЗДР), а й у багатьох сучасних розділах математичного аналізу та суміжних сферах.

Перелік посилань

Gatto, L., Scherbak, I. (2009). On Generalized Wronskians. *PDF:* `https://www.impan.pl/~pragacz/GattoScherbak.pdf`

Wirkus, S., Swift, R. (2006). *A course in ordinary differential equations.*