МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

В. П. Бригінець, С. О. Подласов, О. В. Матвійчук

ФІЗИКА: МЕХАНІКА - ВЧИМОСЯ РОЗВ'ЯЗУВАТИ ЗАДАЧІ.
КОМПЕНСАЦІЙНИЙ КУРС

Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського як навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавр

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2021

Рецензент *Мєняйлов С. М.*, кандидат педагогічних наук, доцент, доцент кафедри загальної та прикладної фізики, Національний авіаційний університет

Малежик П. М., кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри програмної інженерії Факультету інформатики, Національний педагогічний університет імені М.П. Драгоманова

Відповідальний
редактор *Котовський В. Й.*, доктор технічних наук, професор

Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського (протокол № 6 від 25.02.2021 р.) за поданням Вченої ради Фізико-математичного факультету (протокол № 07 від16.12.2020 р.)

Електронне мережне навчальне видання

Валентин Петрович Бригінець, канд. фіз.-мат. наук, доцент
Сергій Олександрович Подласов
Олексій Васильович Матвійчук, канд. пед. наук

ФІЗИКА: МЕХАНІКА - ВЧИМОСЯ РОЗВ'ЯЗУВАТИ ЗАДАЧІ.

КОМПЕНСАЦІЙНИЙ КУРС

Назва: Фізика: Механіка - Вчимося розв’язувати задачі: Компенсаційний курс [Електронний ресурс] : навч. посіб. для здобувачів ступеня бакалавр / КПІ ім. Ігоря Сікорського ; В.П. Бригінець, С.О. Подласов, О.В.Матвійчук. – Електронні текстові данні (1 файл: 6,11 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. – 221 с.

Навчальний посібник «ФІЗИКА: МЕХАНІКА - Вчимося розв'язувати задачі: Компенсаційний курс» створений на основі програми з фізики загальноосвітньої середньої школи і тематично охоплює всі розділи Механіки. Посібник покликаний допомогти студентам першого курсу набути вмінь розв’язувати задачі з Механіки. Навчальний посібник включає короткі теоретичні відомості, приклади розв’язування задач та задачі для самостійного розв’язування. В посібнику даються методичні рекомендації як розв’язувати задач. При цьому роз’яснюються як загальні підходи, так і алгоритми розв’язування задач конкретної тематики та типу.

Модуль 1
Механіка

Вступ

В механіці вивчаються найпростіші фізичні явища – **механічний рух** і **рівновага тіл**.

Механічним рухом називається зміна положення тіл у просторі з плином часу. Про положення тіла у просторі та його рух можна судити лише по відношенню до якогось іншого тіла (тіло відліку). Тому точний математичний опис руху можливий тільки в обраній системі відліку.

Системою відліку називається сукупність тіла відліку, зв'язаної з ним системи координат та приладу для вимірювання часу (годинника)[1]. Систему відліку, в принципі, можна обирати як завгодно. При цьому вид та характеристики руху даного тіла відносно різних систем відліку будуть різними. Тому

рух є відносним за самою своєю природою.

Слід зауважити, що не лише механічні, а й усі інші фізичні явища відбуваються у просторі і часі, тобто "десь" і "колись". Тому система відліку є фундаментальним поняттям фізики.

Будь-яку фізичну задачу ми завжди аналізуємо і розв'язуємо у певній системі відліку, інколи навіть не усвідомлюючи цього.

Залежно від умов і цілей фізика у своїх дослідженнях використовує ті чи інші моделі. Основними моделями механіки є матеріальна точка та абсолютно тверде тіло.

Матеріальною точкою називається тіло, розмірами якого можна нехтувати в умовах даної задачі, тобто - по відношенню до інших лінійних розмірів (відстаней), які фігурують у задачі.

Абсолютно твердим називається тіло, відстань між будь-якими двома точками котрого лишається незмінною за будь-яких умов. Абсолютно тверде тіло можна розглядати як систему жорстко зв'язаних між собою матеріальних точок.

У даному посібнику розглянуті наступні розділи механіки:

1. Кінематика

2. Динаміка

3. Закон збереження імпульсу

4. Робота та енергія

5. Статика

6. Гідроаеромеханіка

[1] Мається на увазі не конкретний механізм, а прийнятий принцип вимірювання часу.

Розділ 1. Кінематика

Кінематика – це розділ механіки, в якому вивчається рух тіл без з'ясування причин, що його визначають. В кінематиці встановлюються основні поняття, кількісні характеристики руху та рівняння кінематики для різних видів руху, що спостерігаються у природі.

- **Теоретичні відомості**
- **Приклади розв'язування задач**
- **Задачі для самостійної роботи**

Розділ 1. Кінематика
Теоретичні відомості

- **основні поняття та величини кінематики**
- **відносність руху**
- **рівнозмінний рух**
- **графіки руху**
- **рівномірний рух по колу**

Розділ 1. Кінематика
Теоретичні відомості

Основні поняття та величини кінематики

Основні кінематичні поняття та величини дозволяють визначити **положення** тіл у просторі, його **швидкість** та **прискорення**.

Положення точки в просторі визначається її **радіусом-вектором** або координатами, а зміну положення в процесі руху характеризують **траєктория**, **шлях** і **переміщення**.

Радіус-вектор $\vec{\mathbf{r}}$ – це вектор[2], проведений з початку відліку в дану точку. Радіус-вектор визначає положення рухомої точки (тіла) в даний момент часу. Координати точки є проекціями[3] радіуса-вектора на осі координат **(рис.1.1)**.

[2] У рукописах вектор позначають літерою зі стрілкою, наприклад, $\vec{\mathbf{r}}$, а його модуль - тією самою літерою без стрілки $|\vec{\mathbf{r}}| = r$. У друкованих виданнях вектор позначають жирною літерою, наприклад, $\vec{\mathbf{r}}$, а його модуль – так само, як у рукописах: r.

[3] **Проекцією вектора на вісь** називається алгебраїчна величина, рівна добутку модуля вектора на косинус кута між його напрямком та позитивним напрямком осі.

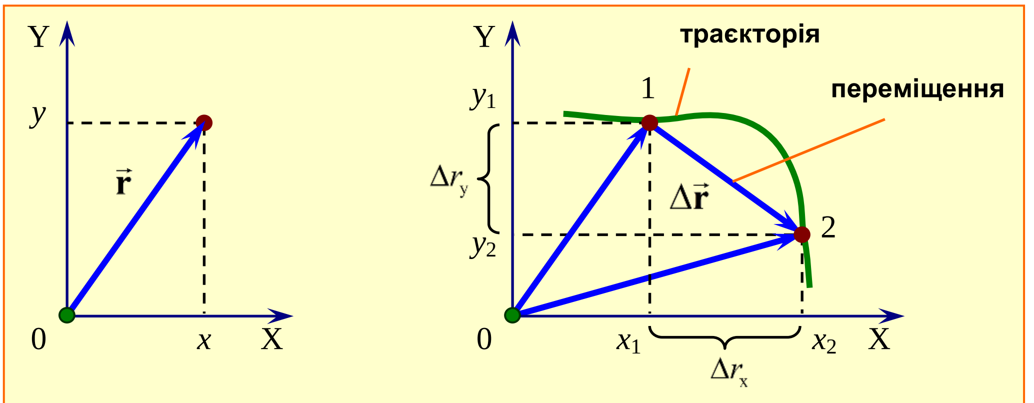


Рис.1.1. **Рис.1.2.**

Траєктория – це неперервна лінія у просторі, вздовж якої рухається матеріальна точка. Можна також сказати, що траєкторія - то є лінія, яку описує кінець радіуса-вектора рухомої точки **(рис.1.2)**.

Шлях S – це довжина відрізка траєкторії, пройденого тілом за даний проміжок часу. Шлях є скалярною додатною величиною, яка не зменшується з часом.

Переміщення $\Delta\vec{\mathbf{r}}$ – це вектор, проведений з початкового (1) у кінцеве (2) положення тіла **(рис.1.2)**. Переміщення є мірою зміни положення тіла в просторі за даний проміжок часу. Переміщення дорівнює зміні радіуса-вектора, а його проекції - змінам координат рухомої точки:

$$\Delta\vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{r}}_2 - \vec{\mathbf{r}}_1; \qquad (1.1)$$

$$\begin{aligned} \Delta r_x &= x_2 - x_1 = \Delta x, \\ \Delta r_y &= y_2 - y_1 = \Delta y. \end{aligned} \qquad (1.1а)$$

Середня швидкість переміщення $\langle\vec{\mathbf{v}}\rangle$ (вектор середньої швидкості) – це відношення вектора переміщення до проміжку часу $\Delta t = t_2 - t_1$, за який здійснене це переміщення:

$$\langle\vec{\mathbf{v}}\rangle = \frac{\Delta\vec{\mathbf{r}}}{\Delta t} \qquad (1.2)$$

Модуль цього вектора дорівнює:

$$\left|\langle\vec{\mathbf{v}}\rangle\right| = \frac{|\Delta\vec{\mathbf{r}}|}{\Delta t}. \qquad (1.3)$$

Напрям вектора $\langle\vec{\mathbf{v}}\rangle$ співпадає з напрямом вектора переміщення.

Середня шляхова швидкість (**середня швидкість**) – це відношення шляху S до проміжку часу Δt, за який пройдено цей шлях:

$$\langle v\rangle = \frac{S}{\Delta t}. \qquad (1.4)$$

Середні швидкості (1.2) і (1.4) не містять інформації про стан руху тіла в кожен момент часу (або в кожній точці траєкторії). Таку інформацію містить **миттєва швидкість**.

Миттєва швидкість $\vec{\mathbf{v}}$ (або просто **швидкість**) – це границя відношення переміщення $\Delta\vec{\mathbf{r}}$ до проміжку часу Δt, за який воно здійснене, при умові, що цей проміжок необмежено зменшується ($\Delta t \to 0$):

$$\vec{\mathbf{v}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{\mathbf{r}}}{\Delta t} = \vec{\mathbf{r}}'(t) \equiv \frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt}. \qquad (1.5)$$

$$\vec{\mathbf{v}} = \frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt}.$$

Таким чином, вектор миттєвої швидкості є похідною[4] радіуса-вектора рухомого тіла по часу. Проекції швидкості на координатні осі є похідними відповідних координат по часу:

$$v_x = x'(t) = \frac{dx}{dt},$$
$$v_y = y'(t) = \frac{dy}{dt}. \qquad (1.5a)$$

Вектор миттєвої швидкості завжди напрямлений **по дотичній до траєкторії**.

Середнє прискорення $\langle \vec{a} \rangle$ – відношення зміни вектора швидкості $\Delta\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{v}}_2 - \vec{\mathbf{v}}_1$ до проміжку часу Δt, за який сталася ця зміна:

$$\langle \vec{a} \rangle = \frac{\Delta\vec{\mathbf{v}}}{\Delta t}. \qquad (1.6)$$

Миттєве прискорення – точна характеристика зміни вектора швидкості в кожен момент часу. Аналогічно миттєвій швидкості воно визначається границею:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{\mathbf{v}}}{\Delta t} = \vec{\mathbf{v}}'(t) = \frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt} \qquad (1.7)$$

або

$$\vec{a} = \vec{\mathbf{r}}''(t) = \frac{d^2\vec{\mathbf{r}}}{dt^2}. \qquad (1.7)$$

Миттєве прискорення є першою похідною вектора швидкості по часу або другою похідною радіуса-вектора по часу.

У випадку рівнозмінного руху прискорення не змінюється з часом і визначається формулою (1.6).

---

[4] Існують два рівнозначних позначення похідної функції $f(t)$: $f'(t)$ та df/dt. Те ж саме стосується позначення другої похідної функції $f(t)$: $f''(t)$ та $d^2 f/dt^2$.

Відносність руху

Положення та рух точки в двох різних системах відліку – нерухомій (XOY) та рухомій[5] ($X_1O_1Y_1$) - визначаються різними, але взаємопов'язаними значеннями радіуса-вектора, швидкості та прискорення. Радіуси-вектори $\vec{\mathbf{r}}$ і $\vec{\mathbf{r}}_1$ точки в нерухомій та в рухомій системі відліку **(рис.1.3)** зв'язані співвідношенням:

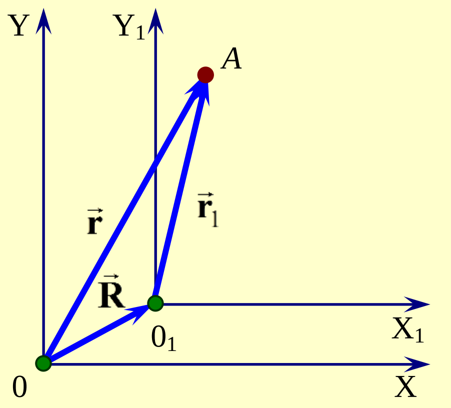


Рис.1.3.

$$\vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{r}}_1 + \vec{\mathbf{R}}, \qquad (1.8)$$

де $\vec{\mathbf{R}}$ – радіус-вектор, що задає положення початку відліку рухомої системи відносно нерухомої **(рис.1.3)**. Звідси, згідно з формулою **(1.5)**, виходить **класичний закон додавання швидкостей**:

$$\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{u}} + \vec{\mathbf{V}}, \qquad (1.9)$$

тобто швидкість тіла відносно нерухомої системи відліку $\vec{\mathbf{v}}$ дорівнює сумі вектора його швидкості відносно рухомої системи відліку $\vec{\mathbf{u}}$ та вектора швидкості рухомої системи $\vec{\mathbf{V}}$ відносно нерухомої.

Швидкість $\vec{\mathbf{u}}$ тіла відносно рухомої системи через його швидкість $\vec{\mathbf{v}}$ у нерухомій системі визначається зворотним співвідношенням:

$$\vec{\mathbf{u}} = \vec{\mathbf{v}} - \vec{\mathbf{V}}, \qquad (1.10)$$

Швидкість $\vec{\mathbf{u}}$ називають відносною швидкістю.

Векторні рівняння (1.9) і (1.10) є універсальними – вони чинні для будь-яких рухів тіла та будь-яких систем відліку.

Якщо система $X_1O_1Y_1$ рухається поступально відносно нерухомої системи XOY, прискорення $\vec{a}$ точки відносно нерухомої системи відліку дорівнює сумі вектора прискорення $\vec{a}_{\mathrm{p}}$ цієї точки відносно рухомої системи відліку та вектора прискорення $\vec{a}_0$ рухомої системи відносно нерухомої:

$$\vec{a} = \vec{a}_{\mathrm{p}} + \vec{a}_0 \qquad (1.11)$$

Рівнозмінний рух

Рівнозмінний рух – це рух, в якому вектор прискорення залишається незмінним $(\vec{a} = \mathrm{const})$. Закон такого руху у векторній формі (залежність радіуса-вектора від часу) має вигляд:

$$\vec{\mathbf{r}}(t) = \vec{\mathbf{r}}_0 + \vec{\mathbf{v}}_0 t + \frac{\vec{a}t^2}{2}, \qquad (1.12)$$

де $\vec{\mathbf{r}}_0 = \vec{\mathbf{r}}(0)$, $\vec{\mathbf{v}}_0 = \vec{\mathbf{v}}(0)$ – радіус-вектор та вектор швидкості в початковий момент часу $(t = 0)$ відповідно.

---

[5] Поняття рухомої та нерухомої системи відліку, звичайно, відносні: при бажанні систему $X_1O_1Y_1$ можна вважати нерухомою, а XOY - такою, що рухається відносно неї.

Це рівняння містить повну інформацію про рух точки і є самодостатнім. Але для зручності такий рух часто описують двома векторними **рівняннями кінематики рівнозмінного руху** – рівнянням переміщення та рівнянням швидкості. Вони безпосередньо випливають з рівняння **(1.12)** і формул **(1.1)**, **(1.5)** та мають вигляд:

$$\Delta\vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{v}}_0 t + \frac{\vec{a}t^2}{2}, \tag{1.13}$$

$$\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{v}}_0 + \vec{a}t. \tag{1.14}$$

Слід наголосити на тому, що ці рівняння однаково чинні як для прямолінійного, так і для криволінійного рухів. При цьому, яким буде рух, залежить від напрямків початкової швидкості та прискорення: якщо ці вектори напрямлені вздовж однієї прямої (в одному або протилежних напрямках), рух є прямолінійним; якщо ж вони напрямлені під кутом один до одного, то рух є криволінійним.

Рівняння **(1.12)** або **(1.13)** і **(1.14)** включають як окремий випадок **кінематику рівномірного прямолінійного руху**. При такому русі $\vec{a} = 0$ і $\vec{\mathbf{v}} = \mathrm{const}$, тому

$$\vec{\mathbf{r}}(t) = \vec{\mathbf{r}}_0 + \vec{\mathbf{v}}t. \tag{1.15}$$

При розв’язуванні задач для обчислень використовують скалярні рівняння руху, тобто рівняння для проекцій векторів: $\vec{\mathbf{r}}$, $\vec{\mathbf{r}}_0$, $\vec{\mathbf{v}}$, $\vec{\mathbf{v}}_0$, $\vec{a}$:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + v_{0x}t + \frac{a_x t^2}{2}; & y &= y_0 + v_{0y}t + \frac{a_y t^2}{2}, \\ v_x &= v_{0x} + a_x t; & v_y &= v_{0y} + a_y t, \\ a_x &= \mathrm{const}. & a_y &= \mathrm{const}. \end{aligned} \tag{1.16}$$

Рівномірний прямолінійний рух визначається одним скалярним[6] рівнянням для координати:

$$x = x_0 + vt. \tag{1.17}$$

В багатьох задачах зручно користуватись формулами, що випливають з рівнянь **(1.16)** і пов'язують між собою переміщення, швидкість і прискорення у рівнозмінному русі, проминаючи час:

$$\begin{aligned} v_x^2 - v_{0x}^2 &= 2a_x(x - x_0), \\ v_y^2 - v_{0y}^2 &= 2a_y(y - y_0). \end{aligned} \tag{1.18}$$

У найпростішому випадку **прямолінійного рівноприскореного** руху така ж формула чинна для модулів кінцевої і початкової швидкостей та прискорення і величини пройденого шляху:

$$v^2 - v_0^2 = 2aS. \tag{1.19}$$

Графіки руху

Графіками руху називають графіки залежностей від часу кінематичних величин: проекцій та модулів прискорення, швидкості, переміщення, а також координати та шляху.

Згідно з рівняннями кінематики **(1.16)** для руху зі сталим прискоренням графіки

---

[6] Мається на увазі, що координатна вісь вибирається паралельно до напряму руху тіла.

прискорення та швидкості зображуються відрізками прямої, а переміщення, координати та шляху – відрізками параболи, як, наприклад, **на рис.1.4**.

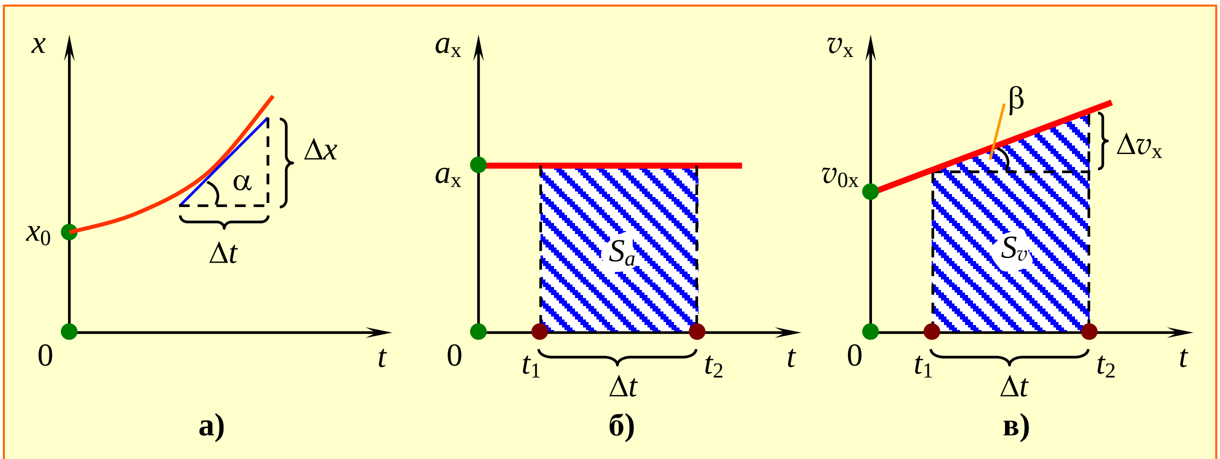


Рис.1.4.

Графіки руху мають певні загальні властивості, які дозволяють з графіка даної величини отримати інформацію не лише про неї, а й про інші кінематичні величини. Ці властивості такі:

1. Тангенс кута нахилу дотичної[7] до графіка координати **(рис.1.4 а)** чисельно дорівнює проекції миттєвої швидкості тіла на дану координатну вісь:

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{\Delta x}{\Delta t} = v_{\mathrm{x}}. \quad (1.20)$$

2. Тангенс кута нахилу графіка проекції швидкості **(рис.1.4 в)** чисельно дорівнює проекції прискорення на ту ж вісь:

$$\mathrm{tg}\beta = \frac{\Delta v_{\mathrm{x}}}{\Delta t} = a_{\mathrm{x}}. \quad (1.21)$$

3. Площа під заданою ділянкою графіка проекції швидкості на вісь (заштрихована на **рис.1.4 в**) чисельно дорівнює проекції на цю вісь переміщення (зміні координати) тіла за відповідний проміжок часу.

$$S_v = \Delta x$$

4. Шлях чисельно дорівнює площі під відповідною ділянкою графіка модуля швидкості.

5. Площа під ділянкою графіка проекції прискорення (заштрихована на **рис.1.4 б**) чисельно дорівнює зміні проекції швидкості на цю вісь за відповідний проміжок часу:

$$S_a = \Delta v_x.$$

[7] Мається на увазі, що координатна вісь вибирається паралельно до напряму руху тіла.

Рівномірний рух по колу

Одним з поширених простих видів руху є рівномірний рух по колу. Такий рух визначається радіусом кола R та швидкістю v, яка в цьому випадку називається **лінійною швидкістю**. Рівномірне обертання є періодичним рухом, тому для його характеристики використовують **період і частоту**

Крім лінійних величин для опису рівномірного колового руху точки та обертання твердого тіла використовують також **кутові величини**: **кут повороту та кутову швидкість**. Існує однозначний **зв'язок між лінійними та кутовими величинами**.

Період T – це час, за який тіло здійснює один повний оберт по колу.

Частота обертання n – це кількість обертів, яку здійснює тіло за одиницю часу:

$$n = \frac{1}{T}. \qquad (1.22)$$

Вказані величини і швидкість точки пов'язані співвідношеннями:

$$v = 2\pi R n = \frac{2\pi R}{T}. \qquad (1.23)$$

Кут повороту φ – це кут, на який повертається за даний проміжок часу радіус, проведений з центра кола до обертової точки (рис.1.5):

$$\varphi = \frac{S}{R}, \qquad (1.24)$$

де φ – вимірюють в **радіанах** (**рад**).

Кутова швидкість – це відношення кута повороту до проміжку часу, протягом якого він здійснений:

$$\omega = \frac{\varphi}{t}. \qquad (1.25)$$

Одиниця вимірювання кутової швидкості – **1 рад/с**.

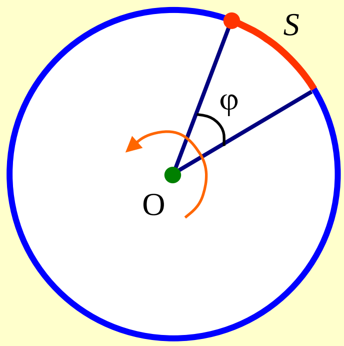


Рис.1.5.

Зв'язок між лінійною та кутовою швидкостями:

$$v = \omega R. \qquad (1.26)$$

Зв'язок між кутовою швидкістю та періодом (або частотою) обертання:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi n. \qquad (1.27)$$

При рівномірному обертовому русі модуль лінійної швидкості не змінюється, але змінюється її напрям. Тому такий рух характеризується **доцентровим прискоренням**:

$$a_{\text{дц}} = \frac{v^2}{R} = 4\pi^2 n^2 R = \frac{4\pi^2 R}{T^2} = \omega^2 R = \omega v. \quad (1.28)$$

Вектор доцентрового прискорення напрямлений до центра кола, по якому рухається дана точка.

Розділ 1. Кінематика. Приклади розв'язування задач	Етапи розв'язування задач	Теорія	Рекомендації до розділу

Розв'язування багатьох задач кінематики можна проводити за певною схемою, яка викладена у **рекомендаціях до розділу**, враховуючи поради по оформленню розв'язку задач (див. **"Етапи розв'язування задач"**).

Повторивши **теоретичні відомості** та розглянувши **приклади** розв'язування задач можна приступити до задач для самостійної роботи.

Кінематичні величини, відносність руху	Рекомендації до теми.	Задача 1.1
		Задача 1.2
		Задача 1.3
		Задача 1.4
		Задача 1.5
		Задача 1.6
		Задача 1.7
		Задача 1.8
	Задачі для самостійної роботи	Рівень А
		Рівень Б
		Рівень В
Прямолінійний рівнозмінний рух одного тіла	Рекомендації до теми.	Задача 1.9
		Задача 1.10
		Задача 1.11
		Задача 1.12
		Задача 1.13
		Задача 1.14
	Задачі для самостійної роботи	Рівень А
		Рівень Б
		Рівень В
Графіки руху та їх використання	Рекомендації до теми.	Задача 1.15
		Задача 1.16
		Задача 1.17
		Задача 1.18
	Задачі для самостійної роботи	Рівень А
		Рівень Б
Рух тіла, кинутого під кутом до	Рекомендації до теми.	Задача 1.19
		Задача 1.20
		Задача 1.21

горизонту	Задачі для самостійної роботи		Рівень А
			Рівень Б
			Рівень В
Рух двох тіл	Рекомендації до теми.		Задача 1.22
			Задача 1.23
			Задача 1.24
	Задачі для самостійної роботи		Рівень А
			Рівень Б
Рівномірний рух по колу	Рекомендації до теми.		Задача 1.25
			Задача 1.26
			Задача 1.27
			Задача 1.28
			Задача 1.29
			Задача 1.30
	Задачі для самостійної роботи		Рівень А
			Рівень Б

Рекомендації до розділу "Кінематика "

При розв'язуванні задач кінематики слід дотримуватися наступної послідовності дій.

1) Вивчити умову задачі, звернувши особливу увагу, відносно яких тіл (системи відліку) задані в умові кінематичні величини та відносно яких тіл необхідно визначити шукані величини.

2) Відповідно до цього обрати систему відліку, тобто вибрати тіло відліку та зв'язати з ним систему координат, задавши початок координат, напрями осей та момент початку відліку часу (початковий момент).

3) Зобразити на рисунку систему координат та показати схематично траєкторії руху розгляданих тіл. Показати вектори всіх кінематичних величин для початкового та для довільного моментів часу згідно з умовою задачі.

4) Вибрати та записати необхідні загальні рівняння кінематики у векторній формі, зосереджуючи увагу перш за все на тих, в які входять шукані величини. Записати також рівняння (співвідношення), що виражають додаткові зв'язки між величинами, вказані в умові задачі.

5) На основі отриманих векторних рівнянь записати систему скалярних рівнянь для проекцій векторів на осі координат[1].

6) Перевірити, чи є система рівнянь повною, тобто чи відповідає кількість рівнянь системи кількості шуканих величин. Якщо ні, то це означає, що використано не всі дані умови задачі, або не всі необхідні рівняння кінематики. Тоді треба повернутись до п.**1)** та п.**4)**.

7) Розв'язати отриману систему рівнянь, проаналізувати знайдену відповідь і виконати обчислення за загальною схемою (**"Етапи розв'язування задач"**).

[1] У випадку прямолінійного руху це можна робити відразу, не записуючи векторних рівнянь.

Рекомендації до теми "Кінематичні величини, відносність руху"

Основні характеристики руху - **шлях** і **переміщення**, **середня** й **миттєва** швидкість - є спорідненими за змістом і виражаються схожими співвідношеннями. При розв'язуванні простих задач це інколи викликає бажання відразу записати "очевидну" відповідь, яка часто виявляється невірною. Тому, приступаючи до розв'язування, треба згадати означення (зміст та формули) тих величин, які підлягають визначенню, а не спиратися лише на інтуїтивні уявлення, які доволі часто виявляються хибними.

Задача 1.1

Автомобіль проїхав прямою дорогою відстань $L_1 = 1\text{ км}$. Потім, рухаючись по дузі кола радіусом $R = 300\text{ м}$, розвернувся на 180° і, проїхавши далі прямо ще $L_2 = 200\text{ м}$, зупинився. Загальний час руху $t = 4\text{ хв}$.

Визначити за час руху:

А) середню шляхову швидкість автомобіля $\langle v \rangle$;

Б) модуль вектора середньої швидкості переміщення $|\langle \vec{\mathbf{v}} \rangle|$;

В) кут α між напрямом вектора переміщення та початковим напрямом руху ділянкою шляху.

Дано:
$L_1 = 1\text{ км} = 1000\text{ м}$
$L_2 = 200\text{ м}$
$R = 300\text{ м}$
$t = 4\text{ хв} = 240\text{ с}$

Визначити:
$\langle v \rangle$, $|\langle \vec{\mathbf{v}} \rangle|$, α

Розв'язання:

А) Пройдений автомобілем шлях є сумою довжин: відрізка прямої AC, дуги кола CDE (півкола) та відрізка прямої EF (**рис.1**). Оскільки $\mathrm{AC} = L_1$, $\mathrm{EF} = L_2$, довжина дуги CDE $S = \pi R$, то шлях

$$S = L_1 + \pi R + L_2 = 2{,}14\ \text{км}.$$

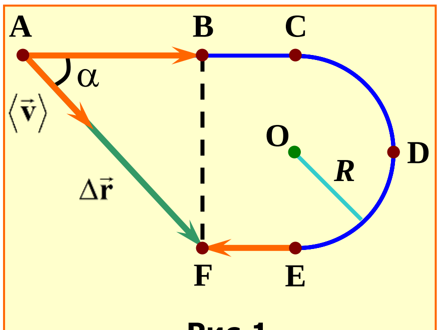


Рис.1

Середня шляхова швидкість дорівнює відношенню шляху до часу його проходження:

$$\langle v \rangle = \frac{S}{t} = \frac{2140}{240} \approx 8{,}9\text{ м/с} = 32{,}1\text{ км/год}.$$

Б) Модуль вектора переміщення автомобіля дорівнює стороні AF прямокутного трикутника ABF, в якому $\mathrm{AB} = \mathrm{AC} - \mathrm{EF}$ та $\mathrm{BF} = 2R$. За теоремою Піфагора маємо:

$$\Delta r = \sqrt{\mathrm{AB}^2 + \mathrm{BF}^2} = \sqrt{(L_1 - L_2)^2 + (2R)^2} = 1\text{ км}.$$

Модуль середньої швидкості переміщення становить:

$$|\langle \vec{\mathbf{v}} \rangle| = \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{1000}{240} \approx 4{,}2\text{ м/с} = 15\text{ км/год}.$$

Напрям $\langle \vec{\mathbf{v}} \rangle$ співпадає з напрямом $\Delta \vec{\mathbf{r}}$ і визначається кутом

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{BF}{AF}\right) = \arcsin\left(\frac{2R}{\Delta r}\right); \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 37^0.$$

Задача 1.2

Першу половину шляху автомобіль рухався зі швидкістю $v_1 = 36$ км/год. На другій половині шляху він половину часу рухався зі швидкістю $v_2 = 72$ км/год, а другу половину часу – зі швидкістю $v_3 = 90$ км/год.

Визначити середню швидкість автомобіля $\langle v \rangle$ за весь час руху.

Дано:
$v_1 = 36$ км/год
$v_2 = 72$ км/год
$v_3 = 90$ км/год

Визначити $\langle v \rangle$

Розв'язання:

Середня швидкість у будь-якому русі дорівнює відношенню пройденого шляху до часу руху $\langle v \rangle = S/t$.

Загальний час руху автомобіля t складається з трьох проміжків, на яких він мав різні швидкості v_1, v_2, v_3: $t = t_1 + t_2 + t_3$. Час проходження першої ділянки становить $t_1 = S/(2v_1)$. Друга половина шляху складається з двох відрізків S_2 та S_3, при чому $S_2 + S_3 = S/2$. Час руху на обох ділянках однаковий $t_2 = t_3 = \tau$. Довжина шляху дорівнює сумі добутків швидкості на час руху на відповідних ділянках:

$$\frac{S}{2} = v_2 t_2 + v_3 t_3 = (v_2 + v_3)\tau; \quad \Rightarrow \quad \tau = \frac{S/2}{v_2 + v_3}.$$

Для середньої швидкості дістанемо:

$$\langle v \rangle = \frac{S}{t_1 + 2\tau} = \frac{S}{\frac{S}{2}\left(\frac{1}{v_1} + \frac{2}{v_2 + v_3}\right)} = \frac{2v_1(v_2 + v_3)}{2v_1 + v_2 + v_3}.$$

Виконаємо обчислення:

$$\langle v \rangle = \frac{2 \cdot 36 \cdot (72 + 90)}{2 \cdot 36 + 72 + 90} = 49{,}8 \text{ км/год}.$$

Зауважимо, що середня швидкість автомобіля зовсім не дорівнює величині $(v_1 + v_2 + v_3)/3$, як могло б здатися "на перший погляд".

Задача 1.3

Сліди дощових крапель на бічному склі трамвая вертикальні, коли він рухається, і відхилені від вертикалі на кут $\alpha = 30°$ під час зупинки.

Визначити кут β, на який відхилені від вертикалі сліди дощових крапель на склі зустрічного трамвая, що рухається з такою ж самою швидкістю.

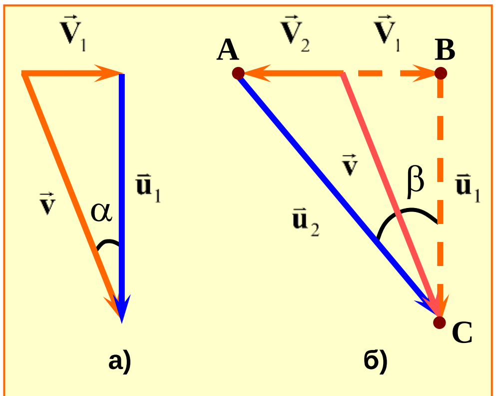


Рис.3

Дано:
$\alpha = 30°$

Визначити β

Розв'язання:

Вертикальні сліди вказують напрям швидкості крапель $\vec{u}$ відносно трамвая, що рухається, тобто в рухомій системі відліку.

Так само, нахилені сліди вказують напрям швидкості крапель відносно нерухомого трамвая та землі (нерухома система відліку).

Швидкість краплі відносно землі $\vec{\mathbf{v}}$ дорівнює сумі швидкостей краплі відносно трамвая $\vec{\mathbf{u}}$ та трамвая відносно землі $\vec{\mathbf{V}}$ (**рис.3**). Для першого трамвая (**рис.3а**): $\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{u}}_1 + \vec{\mathbf{V}}_1$; для другого (**рис.3б**): $\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{u}}_2 + \vec{\mathbf{V}}_2$. При цьому модулі $V_1 = V_2$.

З **рис.3а** знайдемо, що $u_1 = V_1 / tg\alpha$. Тепер, з **рис.3б**, врахувавши, що $\mathrm{AB} = V_1 + V_2 = V_1$, дістанемо:

$$\mathrm{tg}\beta = 2V_1 / u_1 = 2\mathrm{tg}\alpha\,; \quad \Rightarrow \beta = \mathrm{arctg}(2 \cdot \mathrm{tg}\alpha) = 49{,}1°.$$

Задача 1.4

Хлопчик, який може пливти зі швидкістю у $n = 2$ рази меншою за швидкість течії, хоче переплисти річку.

Визначити,

під яким кутом до берега α повинен тримати курс хлопчик, щоб його знесло течією якнайменше? Швидкість течії вважати однаковою по всій ширині ріки.

Дано:

$$\frac{V}{u} = n = 2$$

Визначити: α

Розв’язання:

Виберемо систему відліку так, як показано на **рис.4**. Швидкість руху хлопчика відносно берега $\vec{\mathbf{v}}$ визначається законом додавання швидкостей **(1.9)**):

$$\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{u}} + \vec{\mathbf{V}} \qquad (1)$$

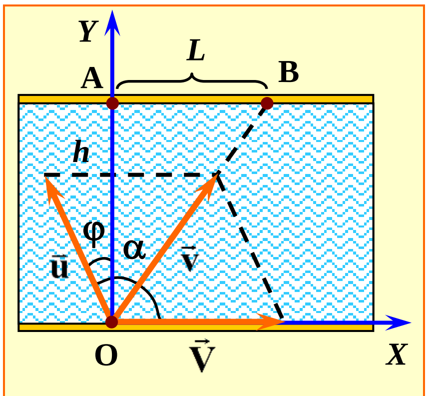


Рис.4

де $\vec{\mathbf{u}}$ – швидкість руху хлопчика відносно води, $\vec{\mathbf{V}}$ – швидкість течії.

Рухаючись з незмінною швидкістю $\vec{\mathbf{v}}$, хлопчик потрапляє у точку B на протилежному березі. Позначимо ширину річки h, а величину знесення хлопчика L, тоді $\mathrm{AO} = h$, $\mathrm{AB} = L$.

Нехай хлопчик тримає курс під кутом φ до осі OY. Проекції його швидкості $\vec{\mathbf{v}}$ на координатні вісі дорівнюють:

$$v_x = V - u\sin\varphi\,,$$
$$v_y = u\cos\varphi\,.$$

Час переправи визначається складовою швидкості v_y та шириною ріки h:

$$t = \frac{h}{v_y} = \frac{h}{u\cos\varphi}\,.$$

За цей час хлопчик зміститься вздовж берега на відстань

$$L(\varphi) = v_x t = h \cdot \frac{V - u\sin\varphi}{u\cos\varphi}\,. \qquad (2)$$

Відстань L досить складно залежить від кута φ. За умовою задачі вона повинна бути мінімальною, тому проаналізуємо функцію **(2)** на мінімум. Для цього спочатку знайдемо похідну $L'(\varphi)$:

$$L'(\varphi)=\frac{h}{u}\cdot\frac{(-u\cos^2\varphi+(V-u\sin\varphi)\sin\varphi)}{\cos^2\varphi}. \qquad (3)$$

Відстань $L=L_{\min}$ буде мінімальна при такому значенні кута $\varphi=\varphi_{\mathrm{m}}$, для якого $L'(\varphi_{\mathrm{m}})=0$. Це можливо тоді, коли чисельник дробу у виразі **(3)** рівний нулю, отже:

$$(V-u\sin\varphi_{\mathrm{m}})\sin\varphi_{\mathrm{m}}-u\cos^2\varphi_{\mathrm{m}}=0,$$

звідки знайдемо

$$\sin\varphi_{\mathrm{m}}=\frac{u}{V}=\frac{1}{2} \;\Rightarrow\; \varphi_{\mathrm{m}}=30^0.$$

Шуканий кут між напрямком руху хлопчика та напрямком течії

$$\alpha=90^0+\varphi_{\mathrm{m}}=120^0.$$

Задача 1.5

Визначити

мінімальну швидкість $u_{\min}$, з якою має рухатись човен відносно води, щоб потрапити з точки А на одному березі ріки у точку В на іншому березі. Швидкість течії V по всій ширині ріки однакова, ширина ріки дорівнює h, відстань між точками А і В вздовж берега дорівнює S.

Дано: V, h, S

Визначити: $u_{\min}$

Розв'язання:

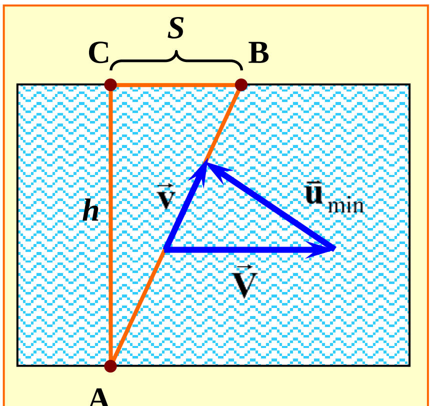


Рис.5-1

Цю задачу можна було б розв'язати аналогічно попередній, склавши рівняння для швидкості руху і проаналізувавши його на мінімум. Однак це досить складний шлях. Значно простіше одержати відповідь, користуючись геометричною побудовою, показаною на **рис.5-1**.

При переправі вектор швидкості човна $\vec{\mathbf{v}}$ відносно берега повинен бути напрямлений вздовж лінії АВ. Цей вектор, згідно із законом додавання швидкостей **(1.9)**, є сумою вектора швидкості човна відносно води $\vec{\mathbf{u}}$ та швидкості течії $\vec{\mathbf{V}}$ (**рис.5-1**):

$$\vec{\mathbf{v}}=\vec{\mathbf{u}}+\vec{\mathbf{V}}.$$

Швидкість човна відносно води буде мінімальною, якщо вектор $\vec{\mathbf{u}}$ буде перпендикулярним до вектора $\vec{\mathbf{v}}$. В такому разі трикутник векторів швидкостей подібний трикутнику ABC. Із співвідношення подібності маємо:

$$\frac{u_{\min}}{V}=\frac{h}{\sqrt{h^2+S^2}} \quad\Rightarrow\quad u_{\min}=\frac{Vh}{\sqrt{h^2+S^2}}.$$

Задача 1.6

На середині широкої ріки стоїть бакен. Від нього одночасно відпливають два човни: один за течією, другий - перпендикулярно до течії. Пройшовши однакову відстань, човни повертаються до бакена тими самими шляхами.

Визначити

відношення часів руху човнів τ_1/τ_2, якщо їх швидкість відносно води в $\eta=1{,}8$ рази більша за швидкість течії.

Дано:

$\eta = 1,8$

Визначити: τ_1/τ_2

Розв'язання:

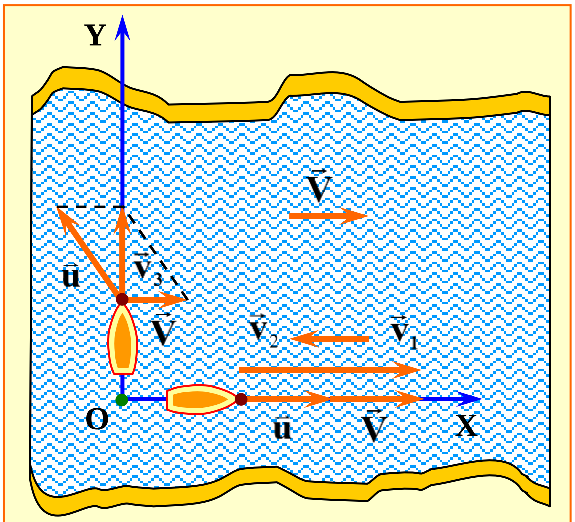


Рис.6

Зв'яжемо систему відліку з бакеном і напрямимо вісь OX за течією, а вісь OY - перпендикулярно (**рис.6**).

Нехай перший човен рушає за течією. Його швидкість відносно бакена за законом додавання швидкостей **(1.9)** дорівнює сумі векторів швидкості човна відносно води $\vec{\mathbf{u}}$ та швидкості течії $\vec{\mathbf{V}}$. Оскільки ці вектори співпадають за напрямком, то $v_1 = u + V$. Якщо пройдена човном відстань дорівнює S, то час руху за течією становить:

$$t_1 = \frac{S}{v_1} = \frac{S}{V(u/V+1)} = \frac{S}{V(\eta+1)}.$$

При русі цього човна проти течії, його швидкість відносно бакена становить $v_2 = u - V$, а час руху:

$$t_2 = \frac{S}{u-V} = \frac{S}{V(u/V-1)} = \frac{S}{V(\eta-1)}.$$

Загальний час руху першого човна

$$\tau_1 = t_1 + t_2 = \frac{S}{V} \cdot \frac{2\eta}{\eta^2 - 1}.$$

Для того, щоб другий човен рухався перпендикулярно до течії, вектор його швидкості повинен бути напрямлений під деяким кутом до осі OY (**рис.6**). Швидкість руху цього човна відносно бакена також визначається законом додавання швидкостей: $\vec{\mathbf{v}}_3 = \vec{\mathbf{u}} + \vec{\mathbf{V}}$, а її модуль – теоремою Піфагора:

$$v_3 = \sqrt{u^2 - V^2} = V\sqrt{\eta^2 - 1}.$$

Неважко збагнути, що таку саму за модулем швидкість човен буде мати і на зворотному шляху. Загальний час його руху становить:

$$\tau_2 = \frac{2S}{v_3} = \frac{2S}{V \cdot \sqrt{\eta^2 - 1}}.$$

Таким чином, відношення часу руху човнів

$$\frac{\tau_1}{\tau_2} = \frac{\eta \cdot \sqrt{\eta^2 - 1}}{\eta^2 - 1} = \frac{\eta}{\sqrt{\eta^2 - 1}} = \frac{1,8}{\sqrt{1,8^2 - 1}} = 1,2.$$

Задача 1.7

Два катери, які рухалися по річці, зустрілися під мостом і розійшлися у протилежні боки. Повернувши через час $\tau = 0,5$ год назад, вони знов зустрілися на відстані $L = 2$ км від моста.

Визначити

швидкість течії ріки V, коли відомо, що після повороту швидкості катерів відносно води не змінилися.

Дано:
$L = 2$ км
$\tau = 0,5$ год

Визначити: V

Розв'язання:

Цю задачу можна розв'язувати в системі відліку, пов'язаній з берегом ріки (мостом), відносно якої сформульовані умова та завдання задачі. Для цього слід скласти рівняння руху катерів, врахувавши, що при русі за течією швидкість кожного з них становить $u+V$ (V – швидкість течії, u – швидкість катера відносно води), а проти течії вона дорівнює $u-V$. Далі треба розв'язати отриману систему рівнянь, врахувавши, що початкові та кінцеві положення катерів однакові. Але такий шлях досить громіздкий.

Значно простіше розглядати задачу в системі відліку, зв'язаній з водою. Дійсно, уявімо, що в початковий момент часу під мостом, крім катерів, знаходиться пліт, що вільно спливає за водою, і зв'яжемо з ним рухому систему відліку. В цій системі відліку (тобто відносно плота) швидкість кожного з катерів незмінна за величиною протягом усього часу руху. Тому повний час руху кожного катера однаковий і вдвічі більший за час руху до повороту $t = 2\tau$. За цей час пліт пропливає відстань L, рухаючись зі швидкістю V. Відтак швидкість течії становить

$$V = \frac{L}{2\tau} = 2 \text{ км/год.}$$

Таким чином, раціонально обравши систему відліку, нам вдалося розв'язати задачу практично усно. Звичайно, що вводити у розгляд додаткове тіло (пліт) зовсім необов'язково. Ми це зробили тільки для того, щоб легше було уявити події.

Задача 1.8

Два автомобілі рухаються по взаємно перпендикулярних дорогах у напрямку до перехрестя (точка O на **рис.8-1**) зі сталими швидкостями v_1 і v_2. У початковий момент часу вони знаходилися на відстанях L_1 та L_2 від перехрестя.

Визначити

мінімальну відстань $L_{\min}$ між автомобілями.

Дано:
L_1, L_2
v_1, v_2

Визначити: $L_{\min}$

Розв'язання:

Розв'яжемо цю задачу двома способами.

I спосіб. Розмістимо початок координат у перехресті і напрямимо осі координат вздовж доріг (**рис.8-1**), тобто будемо розглядати рух автомобілів в системі відліку, зв'язаній із землею. Очевидно, що початкові координати автомобілів $x_{01} = -L_1$, $y_{01} = 0$, $x_{02} = 0$, $y_{02} = L_2$. Рівняння руху мають вигляд:

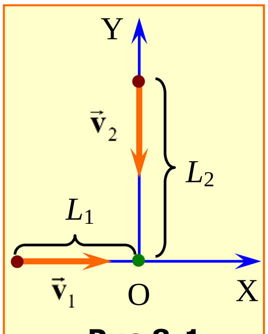


Рис.8-1

$$\begin{aligned} x_1 &= -L_1 + v_1 t, \quad & x_2 &= 0, \\ y_1 &= 0, & y_2 &= L_2 - v_2 t. \end{aligned} \qquad (1)$$

Відстань між автомобілями $L = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$, або згідно з виразами (1),

$$L = \sqrt{(v_1 t - L_1)^2 + (L_2 - v_2 t)^2}. \qquad (2)$$

Для визначення мінімального значення відстані L знайдемо похідну $L'(t)$ і прирівняємо її до нуля.

$$L'(t)=\frac{2(v_1t-L_1)+2(L_2-v_2t)(-v_2)}{2\cdot\sqrt{(v_1t-L_1)^2+(L_2-v_2t)^2}}=\frac{(v_1^2+v_2^2)t-(L_1v_1+L_2v_2)}{\sqrt{(v_1t-L_1)^2+(L_2-v_2t)^2}}.$$

Умова $L'(t)=0$ виконується якщо чисельник дробу дорівнює нулю, тобто

$$\left(v_1^2+v_2^2\right)t_0-\left(L_1v_1+L_2v_2\right)=0,$$

де t_0 – момент, коли відстань між автомобілями мінімальна.

Зрозуміло, що

$$t_0=\frac{L_1v_1+L_2v_2}{v_1^2+v_2^2}.$$

Підставляючи цей вираз у формулу **(2)**, визначаємо шукану відстань:

$$L_{\min}=\sqrt{\left(\frac{v_1\left(L_1v_1+L_2v_2\right)^2}{v_1^2+v_2^2}-L_1\right)^2+\left(L_2-\frac{v_2\left(L_1v_1+L_2v_2\right)^2}{v_1^2+v_2^2}\right)^2}=\frac{\left|L_2v_1-L_1v_2\right|}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}}.$$

II спосіб. Розв'яжемо задачу в рухомій системі відліку $X_1O_1Y_1$, зв'язаній з першим автомобілем (**рис.8-2**). Природно, в цій системі перший автомобіль нерухомий і знаходиться в точці O_1, а другий – рухається з відносною швидкістю[8]

$$\vec{\mathbf{u}}=\vec{\mathbf{v}}_2-\vec{\mathbf{v}}_1 \qquad (1)$$

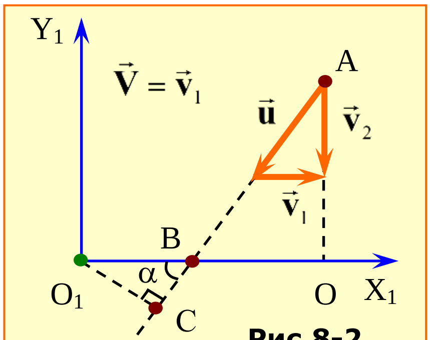


Рис.8-2

по прямій AC під певним кутом α до осі O_1X_1. Модуль цієї швидкості

$$u=\sqrt{v_1^2+v_2^2}. \qquad (2)$$

Відстань між автомобілями буде найменшою, коли другий буде проходити точку C: $L_{\min}=\mathrm{O_1C}$. За умовою задачі $\mathrm{O_1O}=L_1$, $\mathrm{AO}=L_2$. Позначимо також $\mathrm{BO}=s$. Тоді (див. **рис.8-2**)

$$L_{\min}=(L_1-s)\sin\alpha, \qquad (3)$$
$$s=L_2/\mathrm{tg}\alpha,\qquad \sin\alpha=v_2/u,\qquad \mathrm{tg}\alpha=v_2/v_1.$$

Підставивши вирази s, $\sin\alpha$, $\mathrm{tg}\alpha$ у формулу для $L_{\min}$ і врахувавши вираз **(2)**, отримаємо відповідь:

$$L_{\min}=\left(L_1-\frac{L_2v_1}{v_2}\right)\frac{v_2}{u}=\frac{\left|L_2v_1-L_1v_2\right|}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}}.$$

[8] Це випливає з формули додавання швидкостей **(1.9)**, в якій треба взяти $\vec{\mathbf{V}}=\vec{v}_1$.

Очевидно, що II спосіб (використання рухомої системи відліку) робить розв'язок набагато коротшим.

Задачі для самостійної роботи

Рівень А

1.1. Повітряна куля піднялася на висоту *h* = 800 м і при цьому була віднесена вітром у горизонтальному напрямі на відстань *L* = 600 м. Визначити шлях, який пройшла куля, вважаючи її рухи по вертикалі та горизонталі рівномірними. [1 км]

1.2. Тіло, що рухається по колу радіуса *R* = 10 м, зробило 3/4 оберту. Визначити переміщення та шлях тіла. [14,1 м, 47,1 м]

1.3. Диск радіуса *R* зробив чверть оберту, половину оберту, цілий оберт. Визначити шляхи та переміщення точки на краю диска в кожному випадку. [$0,5\pi R$, $R\sqrt{2}$; πR, $2R$; $2\pi R$, 0]

1.4. За $\tau = 10\,c$ точка пройшла рівномірно половину кола радіуса $R = 100$ см. Визначити модуль швидкості точки та вектор середньої швидкості переміщення. [31,4 см/с; 20 см/с, вектор напрямлений вздовж діаметра кола]

1.5. Визначити рівняння траєкторій руху тіл $y = f(x)$, в яких координати x і y залежать від часу за законом: а) $x = 2t + 3;\ y = 3t;$ б) $x = 2t^2 - 3;\ y = 4t^2;$ в) $x = 2\cos(\pi t/2);\ y = 3\sin(\pi t/2)$. [а) $y = 1,5x - 4,5$; б) $y = 2x + 6$; в) $y = 3\sqrt{1 - x^2/4}$]

1.6. Поїзд метрополітену проходить відстань між станціями L = 6,0 км за τ = 8,0 хв. Визначити середню швидкість на всьому шляху (в м/с і км/год). [12,5 м/с; 45 км/год]

1.7. Тіло одночасно бере участь у двох рівномірних рухах, напрямлених під кутом α = 120° один до одного. При цьому модулі векторів швидкостей однакові $\upsilon_1 = \upsilon_2 = \upsilon_3 = \upsilon$. Визначити величину і напрям швидкості результуючого руху $\vec{\mathbf{V}}$. [υ, під кутом 60° до υ_1]

1.8. Розв'язати попередню задачу для кута π = 60°. [$\upsilon_1\sqrt{3}$, під кутом 30° до υ_1]

1.9. Ящик ковзає зі сталою швидкістю υ = 1,0 м/с по похилому помосту, що розташований під кутом α = 30° до горизонту. Визначити вертикальну та горизонтальну складові його швидкості. [0,5 м/с, ~0,87 м/с]

1.10. Літак піднімається із злітної смуги під кутом α = 20° до горизонту зі швидкістю υ = 216 км/год. Визначити вертикальну та горизонтальну складові його швидкості. [~73 км/год; ~200 км/год]

1.11. Швидкість течії річки V = 1,5 м/с, швидкість човна відносно води u = 2,0 м/с. Визначити швидкість човна відносно берега у випадках, коли човен рухається за течією та проти течії. [3,5 м/с; 0,5 м/с]

Рівень Б

1.11. Визначити рівняння траєкторій руху тіл $y = f(x)$, в яких координати x і y залежать від часу за законом: а) $x = 2t + 3;\ y = 3t;$ б) $x = 2t^2 - 3;\ y = 4t^2;$ в)

$x = 2\cos(\pi t/2)$; $y = 3\sin(\pi t/2)$. [а) $y = 1,5x - 4,5$; б) $y = 2x + 6$; в) $y = 3\sqrt{1 - x^2/4}$]

1.12. Першу половину часу руху велосипедист їхав зі швидкістю v_1 = 10 км/год, а другу – зі швидкістю v_2 = 20 км/год. Визначити середню швидкість велосипедиста за весь час. [15 км/год]

1.13. Першу половину шляху тепловоз пройшов зі швидкістю v_1 = 70 км/год, а другу – зі швидкістю v_2 = 10 км/год. Визначити середню швидкість тепловоза на всьому шляху. [17,5 км/год]

1.14. Мотоцикліст проїхав *k* = 0,4 всього шляху між двома містами зі швидкістю v_1 = 72 км/год, а решту - зі швидкістю v_2 = 54 км/год. Визначити середню швидкість мотоцикліста на всьому шляху. [60 км/год]

1.15. Тіло здійснює два послідовних однакових за величиною переміщення. Перше – зі швидкістю v_1 = 20 м/с під кутом α = 60° до напрямку осі ОХ, друге – зі швидкістю v_2 = 40 м/с під кутом β = 120° до того ж напрямку. Визначити величину середньої швидкості переміщення. [23,1 м/с]

1.16. З катера, який пливе за течією річки, випало рятувальний круг. Через τ = 45 хв катер повернув назад і зустрів круг на відстані L = 3 км нижче того місця, де він випав. Визначити швидкість течії. [2 км/год]

1.17. Корабель рухається уздовж екватора на схід зі швидкістю v_1 = 30 км/год. З південного сходу дме вітер під кутом 60° до екватора зі швидкістю v_2 = 15 км/год. Яку швидкість вітру зафіксує прилад на борту корабля? Під яким кутом до екватора зорієнтований прапор корабля? [40 км/год; ~19°]

1.18. Швидкість теплохода відносно берега при русі за течією v_1 = 20 км/год, а проти течії v_2 = 18 км/год. Визначити швидкість теплохода відносно води та швидкість течії. [19 км/год; 1 км/год]

1.19. Між двома пристанями на річці на відстані L = 24 км одна від одної, курсує катер, який, рухаючись за течією, проходить цю відстань за t_1 = 2 години, а проти течії - за t_2 = 4 години. Визначити швидкість течії та швидкість катера відносно води. [3 км/год, 9 км/год]

1.20. Через річку переправляється човен, що тримає курс перпендикулярно до течії. Швидкість човна відносно води v_1 = 1,4 м/с, швидкість течії V = 0,70 м/с, ширина ріки *h* = 308 м. Визначити час переправи та знесення човна течією? [~3,7 хв; 150 м]

1.21. Човен рухається відносно води зі швидкістю u = 3 м/с під кутом α = 60° до течії, швидкість якої V = 1 м/с. Визначити швидкість човна відносно берега ріки та його переміщення за τ = 30 с після початку руху. [3,6 м/с, 108 м під кутом ~46° до напрямку течії]

1.22. Коли спостерігач сприймає за звуком, що літак знаходиться у зеніті, він бачить його під кутом α = 60° до горизонту. Визначити швидкість літака. [196 м/с]

Рівень В

1.23. На станції метро швидкість руху ескалатора v = 0,80 м/с. Визначити вертикальну та горизонтальну складові швидкості та глибину залягання тунелю метро, якщо кут нахилу екскалатора α=30°, а час спуску людини, що стоїть на сходах ексаклатора, t = 2,5 хв. [0,4 м/с, ~0,69 м/с, 60 м]

1.24. Пряма, що перетинає сторони прямого кута і перпендикулярна до його бісектриси, переміщується паралельно самій собі зі сталою швидкістю v = 2 м/с. З якою швидкістю рухаються точки, перетину прямої зі сторонами кута? [~2,8 м/с]

1.25. Трактор рухався t_1 = 1,0 хв зі швидкістю v_1 = 2,25 км/год, t_2 = 1,0 хв зі швидкістю v_2 = 3,60 км/год і t_3 = 1,0 хв зі швидкістю v_3 = 4,95 км/год. Визначити його середню швидкість за весь час руху. [3,6 км/год]

1.26. Точка здійснює послідовно два переміщення S_1 = 3,0 м і S_2 = 1,73 м так, що S_1 складає кут α = 30° з прямою АВ, а результуюче переміщення виявилось паралельним до АВ. Визначити результуюче переміщення та кут між векторами $\mathbf{S}_1$ и $\mathbf{S}_2$. [3,46 м, 90°або 1,73 м, 150°]

1.27. Два тіла А і В рухаються вздовж однієї прямої із швидкостями v_1 і v_2 (v_1 > v_2). Визначити швидкість точки С, яка знаходиться завжди посередині між точками А та В? Розглянути випадки, коли тіла рухаються: 1) в одному напрямку; 2) в протилежних напрямках. [$(v_1+v_2)/3$; $(v_1-v_2)/2$]

1.28. Ескалатор метро спускає людину, котра стоїть на ньому, за t_1 = 50 с. Якщо людина йтиме по ескалатору, то спуститься за t_2 = 30 с. За який час спуститься людина нерухомим ескалатором? [75 с]

1.29. Літак рухається горизонтально на висоті H = 4 км з надзвуковою швидкістю. Звук дійшов до спостерігача на поверхні землі через час t = 10 с після того, як над ним пролетів літак. Визначити швидкість літака. [$v=\sqrt{c/(H^2-c^2t^2)}=583$ м/с, c - швидкість звуку]

1.30. Поїзд довжиною l = 120 м рухається по мосту рівномірно зі швидкістю v = 18 км/год. За який час поїзд пройде міст, якщо довжина моста L = 480 м? Чи можна поїзд у цій задачі розглядати як матеріальну точку? [2 хв; ні]

1.31. Двома паралельними коліями рівномірно рухаються два поїзди: вантажний довжиною l_1 = 630 м зі швидкістю v_1 = 48 км/год та пасажирський довжиною l_2 = 120 м зі швидкістю v_2 = 102 км/год. Визначити: А) відносну швидкість руху поїздів, якщо вони рухаються в одному напрямі; в протилежних напрямах; Б) час, протягом якого один поїзд проходить повз іншого. [54 км/год; 150 км/год; 50 с; 18 с]

1.32. Катер, який має швидкість v = 90 км/год, проходить від корми до носа пароплава і назад за час τ = 37,5 с. Визначити швидкість пароплава, якщо його довжина L = 300 м. Течія відсутня. [15 м/с]

Рекомендації до теми "Прямолінійний рівнозмінний рух одного тіла "

1)	В задачах даного типу систему відліку завжди вибирають так, щоб одна з координатних осей була напрямлена вздовж траєкторії руху тіла. При такому виборі всі вектори, що характеризують рух, паралельні до цієї осі, тому їх проекції дорівнюють модулям, взятим зі знаком «+» або «-», залежно від напрямку[1]. При цьому немає потреби в другій координатній осі, отже кількість необхідних для розв'язування задачі рівнянь буде вдвічі меншою. Початок координат звичайно вибирають у початковому положенні тіла (тоді $x_0 = 0$), а вісь напрямляють вздовж початкової швидкості $\vec{\mathbf{v}}_0$ (або прискорення, якщо $\vec{\mathbf{v}}_0 = 0$).
2)	Якщо в процесі руху тіла відбувається зміна напрямку руху, то можуть виникнути складнощі у визначенні пройденого шляху. Тому слід пам'ятати, що шлях ніколи не зменшується і дорівнює сумі довжин всіх відрізків траєкторії, на яких напрям руху тіла залишався незмінним. Окремим випадком задач даного типу є задачі на рух тіла, що кинуте вертикально (вгору або вниз) поблизу поверхні Землі. Ці задачі, у принципі, не відрізняються від інших задач на рівнозмінний прямолінійний рух, але мають певну специфіку: **а)** залежно від умови задачі початок координат вибирають або в точці кидання, або в точці падіння; **б)** опір повітря не враховується, тому прискорення $\vec{\mathbf{g}}$ завжди приймається рівним $g = 9{,}8\ \text{м}/\text{с}^2$. При обчисленнях інколи допускається округлення $g = 10\ \text{м}/\text{с}^2$; **в)** в такому русі завжди є кінцевий момент часу (момент падіння тіла на Землю) і відповідний повний час руху $t_\text{п}$. Тому, якщо в рівняння руху підставити $t > t_\text{п}$, вони втрачають фізичний зміст.

[1] З цієї причини при записі проекцій векторів інколи опускають індекс осі.

Задача 1.9

Спочатку літак рухався прямолінійно зі сталою швидкістю $v_0 = 720\ \text{км/год}$, а потім протягом $t = 10\ \text{с}$ – рівноприскорено. За останню секунду ($\tau = 1\ \text{с}$) рівноприскореного руху він пролетів відстань $S = 295\ \text{м}$.

Визначити кінцеву швидкість літака v.

Дано:

$v_0 = 720\ \text{км/год} = 200\ \text{м/с}$

$t = 10\ \text{с}$

$\tau = 1\ \text{с}$

$S = 295\ \text{м}$

Визначити: v

Розв'язання:

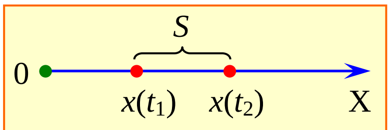


Рис. 9

Виберемо вісь OX у напрямку руху літака, сумістивши початок координат з точкою початку прискореного руху. В такому разі швидкість літака і його координата змінюються з часом за законами

$$v = v_0 + at, \qquad (1)$$

$$x = v_0 t + \frac{at^2}{2}.$$

Зрозуміло, що для визначення кінцевої швидкості необхідно знати прискорення a. Для цього використаємо шлях S.

Шлях за останню (десяту) секунду $S = x_2 - x_1$, де x_1 і x_2 – координати літака в моменти $t_1 = t - \tau$ і $t_2 = t = 10\,\text{с}$.

При рівноприскореному русі:

$$x_1 = v_0 t_1 + \frac{at_1^2}{2} = v_0(t-\tau) + \frac{a(t-\tau)^2}{2};\ x_2 = v_0 t_2 + \frac{at_2^2}{2} = v_0 t + \frac{at^2}{2};$$

$$S = x_2 - x_1 = v_0\tau + a\tau\left(t - \frac{\tau}{2}\right),$$

Звідки знаходимо:

$$a = \frac{2(S - v_0\tau)}{\tau(2t-\tau)} = 10\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Підставивши це значення в рівняння **(1)**, отримуємо кінцеву швидкість літака

$$v = 200 + 10\cdot 10 = 300\ \text{м/с}.$$

Задача 1.10

Рухаючись рівноприскорено, поїзд проходить ділянку спуску із середньою швидкістю $\langle v\rangle = 43{,}2\ \text{км/год}$, збільшуючи за цей час швидкість на $\Delta v = 36\ \text{км/год}$.

Визначити швидкість поїзда v_1 на середині спуску.

Дано:

$\langle v\rangle = 43{,}2\ \text{км/год}$

$\Delta v = 36\ \text{км/год}$

Визначити: v_1

Розв'язання:

Розмістимо початок відліку шляху на початку вказаної ділянки спуску. При рівноприскореному русі шлях та швидкість змінюються за законами:

$$S = v_0 t + \frac{at^2}{2}, \qquad (1)$$

$$v = v_0 + at. \qquad (2)$$

де v_0 - початкова швидкість, a – прискорення. Поділивши пройдений шлях на час руху, одержимо середню швидкість:

$$\langle v\rangle = v_0 + \frac{at}{2}.$$

З формули **(2)** виразимо t і підставимо його в останнє рівняння. Після перетворень знаходимо:

$$\langle v\rangle = \frac{v_0 + v}{2}. \qquad (3)$$

Таким чином, у рівноприскореному русі середня швидкість дорівнює половині суми початкової v_0 та кінцевої v швидкостей.

Зміна швидкості поїзда – це різниця кінцевої та початкової швидкостей:

$$\Delta v = v - v_0. \qquad (4)$$

Розв'язавши сумісно рівняння **(3)** та **(4)**, знайдемо:

$$v_0 = \langle v \rangle - \frac{\Delta v}{2}, \qquad v = \langle v \rangle + \frac{\Delta v}{2}. \qquad (5)$$

Шлях, пройдений тілом у рівноприскореному русі, пов'язаний з його початковою та кінцевою швидкостями співвідношенням:

$$S = \frac{v^2 - v_0^2}{2a}. \qquad (6)$$

На середині спуску, де швидкість поїзда дорівнювала v_1, маємо:

$$\frac{S}{2} = \frac{v_1^2 - v_0^2}{2a}, \quad \Rightarrow \quad S = \frac{v_1^2 - v_0^2}{a}. \qquad (7)$$

Прирівнюючи праві частини рівнянь **(6)** та **(7)**, після перетворень дістанемо:

$$v_1^2 = \frac{v^2 + v_0^2}{2}. \qquad (8)$$

Підставимо сюди значення швидкостей з формул **(5)** і одержимо відповідь:

$$v_1 = \sqrt{\langle v \rangle^2 + \left(\frac{\Delta v}{2}\right)^2} = \sqrt{43{,}2^2 + \left(\frac{36}{2}\right)^2} = 46{,}8 \text{ км/год} = 13 \text{ м/с}.$$

Задача 1.11

Тіло вільно падає з висоти $h = 25{,}0 \text{ м}$.

Визначити його середню швидкість $\langle v \rangle$ на другій половині шляху.

Дано:
$h = 25{,}0 \text{ м}$

Визначити: $\langle v \rangle$

Розв'язання:

Середня швидкість тіла дорівнює відношенню пройденого шляху до часу проходження цього шляху. У даному випадку:

$$\langle v \rangle = \frac{h/2}{\Delta t},$$

де $\Delta t = t_2 - t_1$ – час проходження нижньої половини шляху, t_1 – момент, коли тіло знаходилось на висоті $h/2$, t_2 – момент торкання землі.

Напрямимо вісь OY вертикально вниз (**рис.11**) і розташуємо початок координат на висоті h від землі. В такому разі тіло рухається з початку координат без початкової швидкості зі сталим прискоренням $\vec{\mathbf{g}}$. Рівняння його руху має вигляд

$$y = \frac{gt^2}{2}.$$

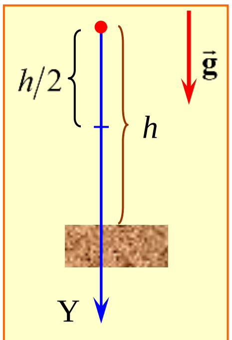


Рис. 11

Для моменту t_1, коли тіло знаходилось на половині висоти,

$$h=\frac{gt_1^2}{2}; \quad \Rightarrow \quad t_1=\sqrt{\frac{h}{g}}.$$

В момент падіння на землю t_2

$$h=\frac{gt_2^2}{2}; \quad \Rightarrow \quad t_2=\sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Таким чином, час руху на нижній половині шляху становить

$$\Delta t=t_2-t_1=\sqrt{\frac{h}{g}}\cdot\left(\sqrt{2}-1\right),$$

а середня швидкість

$$\langle v\rangle=\frac{h}{2\Delta t}=\frac{h}{2\cdot\sqrt{\frac{h}{g}}\cdot\left(\sqrt{2}-1\right)}=\frac{\sqrt{gh}}{2}\left(\sqrt{2}+1\right)=18{,}9\ \text{м/с}.$$

Задача 1.12

По похилій дошці знизу вгору пустили кульку. На відстані $s=30$ см від нижньої точки кулька побувала двічі: через $t_1=1$ с та через $t_2=2$ с після початку руху.

Визначити мінімально можливу довжину дошки L. Тертя відсутнє.

Дано:
$s=30$ см
$t_1=1$ с
$t_2=2$ с
Визначити: L

Розв'язання:

Напрямимо вісь ОХ здовж дошки, розмістивши початок координат в початковому положенні кульки. Кулька рухається рівносповільнено з певною початковою швидкістю v_0 та прискоренням a, тому (формула **(1.18)**)

$$v_0^2-v^2=2ax,$$

де v і x – швидкість та координата кульки у довільний момент часу.

Очевидно, що мінімальна необхідна довжина дошки $L=x_\text{m}$, де x_m – максимальна відстань, на яку підніметься кулька. Вона визначається з умови $v=0$, отже

$$L=\frac{v_0^2}{2a}. \qquad (1)$$

Величини v_0 та a знайдемо з рівняння координати кульки

$$x=v_0t-\frac{at^2}{2}.$$

Якщо покласти $x=s$, то після нескладних перетворень, дістанемо:

$$t^2-\frac{2v_0}{a}t+\frac{s}{2a}=0.$$

За теоремою Вієта маємо: $t_1+t_2=2v_0/a$, $t_1t_2=s/2a$, звідки

$$a = \frac{2s}{t_1 t_2}, \qquad\qquad v_0 = \frac{a(t_1+t_2)}{2} = \frac{s(t_1+t_2)}{t_1 t_2},$$

де t_1 – моменту часу, коли кулька проходила вказане положення, рухаючись вгору, а t_2 – момент, коли вона його проходила, повертаючись назад. Підставивши значення a та v_0 у формулу **(1)**, знаходимо

$$L = \frac{v_0^2}{2a} = \frac{s(t_1+t_2)^2}{4t_1 t_2} = \frac{s}{4}\cdot\left(\frac{t_1}{t_2} + 2 + \frac{t_2}{t_1}\right) = 33{,}75\ \text{см} \approx 34\ \text{см},$$

Може виникнути запитання, чи недостатньо відповіді у вигляді $s(t_1+t_2)^2/4t_1t_2$, та навіщо виконувати додаткові перетворення і отримувати більш громіздкий вираз $\frac{s}{4}\cdot\left(\frac{t_1}{t_2} + 2 + \frac{t_2}{t_1}\right)$?

У принципі, достатньо, але останній вираз зручніший для обчислень та для перевірки розмірностей.

Задача 1.13

Тіло кинули вертикально вгору з балкона, розташованого на висоті $h = 25$ м над землею. Початкова швидкість тіла $v_0 = 15$ м/с.

Визначити:

А) максимальну висоту H, на яку підніметься тіло над землею;

Б) час τ, через який тіло впаде на землю;

В) швидкість v тіла на момент падіння на землю.

Дано:
$h = 25$ м
$v_0 = 15$ м/с

Визначити: H, τ, v

Розв'язання:

Напрямимо вісь OY вертикально вгору і розташуємо її початок на землі (**рис.13**). В такому разі початкова координата тіла $y_0 = h$, а проекції векторів $\vec{\mathbf{v}}_0$ та $\vec{\mathbf{g}}$ на вісь OY:

$$v_{0y} = v_0, \quad g_y = -g.$$

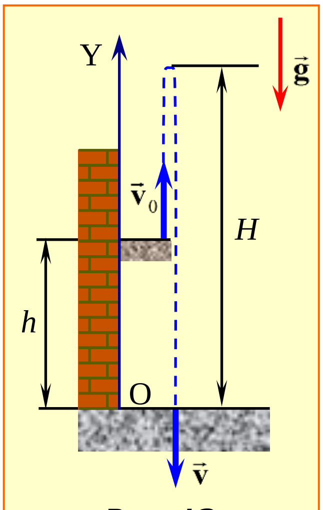


Рис. 13

Координата та проекція швидкості тіла задовольняють рівнянням **(1.16)**:

$$y = h + v_0 t - \frac{gt^2}{2}; \quad v = v_0 - gt.$$

А) У найвищій точці підйому швидкість тіла дорівнює нулю. Це дозволяє визначити час підйому t_h:

$$v_0 - gt_h = 0, \quad \Rightarrow \quad t_h = \frac{v_0}{g}.$$

В цей момент координата *y* дорівнює найбільшій висоті підйому тіла над землею:

$$\boxed{H = y(t_h) = h + v_0 t_h - \frac{gt_h^2}{2} = h + \frac{v_0^2}{2g} \approx 36{,}5\ \text{м}.}$$

Б) В момент падіння на землю τ координата тіла дорівнює нулю:

$$y(\tau) = h + v_0\tau - \frac{g\tau^2}{2} = 0.$$

Розв'язавши це квадратне рівняння, знайдемо[1]:

$$\boxed{\tau = \frac{v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2gh}}{g} = 4{,}26 \text{ с.}}$$

В) Підставивши значення τ в рівняння швидкості, дістанемо

$$\boxed{v(\tau) = v_0 - g\tau = -26{,}75 \text{ м/с.}}$$

Знак "–" означає, що вектор швидкості в момент падіння тіла на землю напрямлений проти осі OY, тобто вертикально вниз.

Задача 1.14

Кабіна ліфта висотою $h = 2{,}47$ м починає підніматися з прискоренням $a = 2$ м/с^2. В той момент, коли її швидкість досягла $v_0 = 2{,}4$ м/с, зі стелі відірвалася гайка.

Визначити:

А) час падіння гайки на підлогу τ;

Б) переміщення гайки відносно шахти l;

В) шлях S, який пройшла гайка.

Дано:

$h = 2{,}47$ м

$a = 2$ м/с^2

$v_0 = 2{,}4$ м/с

Визначити: τ, l, S

Розв’язання:

Рух гайки, залежно від ситуації, зручно розглядати або відносно кабіни (система відліку O_1Y_1, **рис.14а**), або відносно шахти ліфта (система відліку OY, **рис.14б**).

А) Для визначення часу падіння гайки розглянемо її рух відносно кабіни ліфта. Відносно землі гайка рухається з прискоренням вільного падіння $\vec{g}$, ліфт рухається вгору з прискоренням $\vec{a}$. Відносно ліфта, згідно з формулою **(1.11)**, гайка має прискорення $\vec{a}'_{\text{відн}} = \vec{g} - \vec{a}$. У проекціях на вісь O_1Y_1:

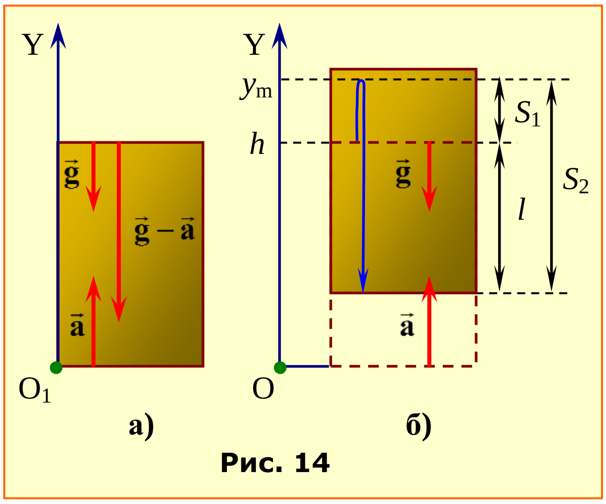


Рис. 14

$$a'_{\text{відн}} = -g - a = -(g + a).$$

Отже, координата y' визначається рівнянням

$$y' = h - \frac{(g+a)t^2}{2}.$$

В момент падіння τ на підлогу координата y' гайки дорівнює нулю:

$$y'(\tau) = h - \frac{(g+a)t^2}{2} = 0, \quad \Rightarrow \quad \tau = \sqrt{\frac{2h}{g+a}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 2{,}47}{9{,}8+2}} = 0{,}65 \text{ с.}$$

---

[1] Від'ємний корінь не має фізичного змісту.

Б) Модуль переміщення гайки l відносно шахти ліфта дорівнює абсолютному значенню різниці координат точки падіння і точки відриву гайки (**рис.14б**). Початок відліку О розмістимо в точці, де знаходилась підлога кабіни ліфта на момент відриву гайки. В такому разі залежність координати y гайки від часу визначається рівнянням $y = h + v_0 t - \frac{gt^2}{2}$, де враховано, що в момент відриву від стелі ($t = 0$) гайка мала однакову з ліфтом швидкість і знаходилась у точці $y(0) = h$. В момент падіння на підлогу τ координата гайки $y(\tau) = h + v_0\tau - \frac{g\tau^2}{2}$. Отже, величина переміщення дорівнює:

$$l = |y(\tau) - y(0)| = \left|v_0\tau - \frac{g\tau^2}{2}\right| = \left|2{,}4 \cdot 0{,}65 - \frac{9{,}8 \cdot 0{,}65^2}{2}\right| = 0{,}51\,\text{м}. \qquad (1)$$

В) Шлях, який пройшла гайка, складається з двох відрізків S_1 і S_2 (**рис.14б**). Перший з них S_1 – це відрізок шляху, пройдений гайкою при русі вгору (від точки відриву до верхньої точки траєкторії); він дорівнює різниці координат гайки в моменти $t_0 = 0$ та t_1, де t_1 – час підйому до вищої точки траєкторії: $S_1 = |y(t_1) - y(t_0)|$. Відрізок S_2 дорівнює відстані між верхньою точкою траєкторії та точкою, де знаходилась гайка в момент падіння τ на підлогу. З **рис.14б** видно, що $S_2 = S_1 + l$. Отже, загальний шлях, пройдений гайкою:

$$S = S_1 + S_2 = 2S_1 + l. \qquad (2)$$

Визначимо S_1. В момент $t_0 = 0$ гайка мала координату $y(0) = h$ і рухалася в гору разом із ліфтом зі швидкістю v_0. В найвищій точці траєкторії її швидкість дорівнює нулю, отже, згідно з формулою **(1.19)**, шлях гайки від моменту відриву до вищої точки траєкторії

$$S_1 = h + \frac{v_0^2}{2g} - h = \frac{v_0^2}{2g}.$$

Підставимо це значення, а також значення l з формули **(1)** у формулу **(2)**:

$$S = \frac{v_0^2}{g} + \left|v_0\tau - \frac{g\tau^2}{2}\right| = \frac{2{,}4^2}{9{,}8} + \left|2{,}4 \cdot 0{,}65 - \frac{9{,}8 \cdot 0{,}65^2}{2}\right| \approx 1{,}1\,\text{м}.$$

Задачі для самостійної роботи

Рівень А

1.33 Які з наведених рівнянь описують рівнозмінний рух тіла вздовж осі ОХ? 1) $v_x = 5 - 3t$; 2) $a_x = 0{,}25t$; 3) $x = 2t^2$; 4) $v_x = -8t + 7$; 5) $v_x = 0{,}8t$; 6) $x = 12 - 4t + 0{,}2t^2$; 7) $x = 2t^3 - 8t$; 8) $a_x = \sqrt{4t}$. Тут x – координата, v – швидкість, a – прискорення, t – час. [1); 3); 4); 6)]

1.34 За час $\tau = 1\,\text{мс}$ швидкість космічної ракети збільшилася на $\Delta v = 0{,}5\,\text{см/с}$. Визначити прискорення ракети. [$5\,\text{м/с}^2$]

1.35 За час $\tau = 10\,\text{с}$ швидкість матеріальної точки рівномірно збільшилася від нуля до $v = 8{,}0\,\text{м/с}$. Визначити прискорення a точки. [$0{,}8\,\text{м/с}^2$]

1.36 За час $\tau = 5{,}0\,\text{с}$ до фінішу швидкість велосипедиста $v_0 = 27\,\text{км/год}$, а на фініші - $v = 36\,\text{км/год}$. Визначити прискорення велосипедиста (в м/с^2), вважаючи рух рівноприскореним. [$0{,}5\,\text{м/с}^2$]

1.37 Поїзд відходить від станції, рухаючись з постійним прискоренням $a = 0{,}20\ \text{м/с}^2$. Визначити швидкість поїзда через $t_1 = 0{,}5$ хв та $t_2 = 1$ хв. [$6\ \text{м/с}, 12\ \text{м/с}$]

1.38 Вагонетка рухається зі стану спокою з прискоренням $a = 25\ \text{см/с}^2$. Визначити: А) швидкість вагонетки через 10 с від початку руху; Б) середню швидкість за перші 10 с руху. [$2{,}5\ \text{м/с},\ 1{,}25\ \text{м/с}$]

1.39 Електропоїзд під час гальмування рухається рівносповільнено з прискоренням $a = -0{,}30\ \text{м/с}^2$ і зупиняється через $\tau = 1{,}0$ хв після початку гальмування. Визначити початкову швидкість. [65 км/год]

1.40 По підлозі рівносповільнено котиться куля. Її початкова швидкість $\upsilon_0 = 0{,}64\ \text{м/с}$, а прискорення $a = -16\ \text{см/с}^2$. Визначити: А) час руху до зупинки; Б) шлях, який пройшла куля до зупинки. [4 с; 1,28 м]

1.41 Куля скочується жолобом за $\tau = 5{,}0$ с і проходить при цьому шлях $S = 75$ см. Визначити прискорення кулі. [$6\ \text{см/с}^2$]

1.42 Космічна ракета розганяється із стану спокою. Пролетівши відстань $L = 200$ км, вона досягає швидкості $\upsilon = 11\ \text{км/с}$. Визначити: А) прискорення ракети; Б) час розгону. [$300\ \text{м/с}^2$; 37 с]

1.43 Лижник спускається з гори рівноприскорено без початкової швидкості. Відстань $L = 1000$ м він проходить за $\tau = 1$ хв. Визначити середню і максимальну швидкості лижника на цьому шляху. [60 км/год; 120 км/год]

1.44 З нерухомого вертольота, що знаходиться на висоті $h = 1000$ м, падає бомба, запал якої встановлено на $\tau = 14$ с. На якій висоті над землею бомба вибухне? [20 м]

1.45 При швидкості $\upsilon = 43{,}2$ км/год гальмівний шлях автобуса дорівнює $S = 54$ м. Скільки секунд автобус рухається від початку гальмування до зупинки? Рух вважати ріносповільненим [9 с]

1.46 При підході до світлофора тепловоз зменшив швидкість від $\upsilon_1 = 90$ км/год до $\upsilon_2 = 40$ км/год за $t = 23$ с. Визначити прискорення, вважаючи рух тепловоза рівнозмінним. [$0{,}6\ \text{м/с}^2$]

1.47 Камінь, що падає з урвища на березі річки, долітає до води за $\tau = 3{,}0$ с. Зайти: А) висоту урвища; Б) швидкість каменя при падінні у воду. [45 м; $30\ \text{м/с}$]

1.48 М'яч, кинутий вертикально вгору, повернувся у вихідну точку через $\tau = 3$ с. Визначити початкову швидкість м'яча. [$\approx 15\ \text{м/с}$]

1.49 Парашутист розкриває парашут через $\tau = 2$ с після відокремлення від літака. Визначити: А) відстань, яку він проходить по вертикалі за час τ; Б) кінцеву швидкість на цьому відрізку шляху. [≈ 20 м; $\approx 20\ \text{м/с}$]

1.50 Який шлях пройде моторний човен, який рухається протягом $t_1 = 5{,}0$ с прямолінійно зі сталою швидкістю $\upsilon = 1{,}0\ \text{м/с}$, а потім протягом $t_2 = 5{,}0$ с – з прискоренням $a = 1{,}0\ \text{м/с}^2$? [≈ 23 м]

1.51 Яку швидкість розвине моторолер, пройшовши зі стану спокою шлях $S = 200$ м із прискоренням $a = 1{,}0\ \text{м/с}^2$? [$20\ \text{м/с}$]

1.52 Який шлях пройшов автомобіль, рухаючись з прискоренням $a = 2{,}0\ \text{м/с}^2$, за час, протягом якого його швидкість збільшилася від $\upsilon_1 = 4{,}0\ \text{м/с}$ до $\upsilon_2 = 12{,}0\ \text{м/с}$? [32 м]

1.53 Автомобіль, рухаючись з прискоренням $a = 2{,}0\ \text{м/с}^2$, за час $\tau = 5{,}0$ с пройшов шлях $S = 125$ м. Визначити початкову швидкість автомобіля. [$20\ \text{м/с}$]

1.54 З яким прискоренням має рухатися локомотив, щоб на шляху $S = 0{,}5$ км збільшити швидкість від $\upsilon_1 = 18$ км/год до $\upsilon_2 = 36$ км/год? [$0{,}075\ \text{м/с}^2$]

1.55 Молот вільно падає з висоти $h = 1{,}25$ м. Визначити швидкість молота на момент удару по ковадлі. Взяти $g = 10$ м/с^2. [5 м/с]

1.56 Яструб, який пікірує з висоти на свою здобич, досягає швидкості $v = 100$ м/с. Яку відстань пролітає при цьому хижак? Падіння вважати вільним. [0,51 км]

1.57 У скільки разів треба збільшити початкову швидкість кинутого вгору м'яча, щоб збільшити вдвоє: А) час підйому; Б) висоту підйому? [2; 4]

Рівень Б

1.58 Які з записаних нижче рівнянь описують рівнозмінний рух вздовж осі OX? Визначити прискорення та залежність від часу швидкості при рівнозмінному русі. А) $x = -2 + 2t - 4t^2$; Б) $v = 3 + 4t^2$; В) $x = 1 + 2t - 3t^2$; Г) $v_x = 1 - 0{,}01t$; Д) $x = 4t^2$. [А, Г, Д; А) $2 - 8t$ (м/с); -8 (м/с^2); Г) $1 - 0{,}01t$ (м/с); $-0{,}01$ (м/с^2); Д) $8t$ (м/с); 8 (м/с^2)]

1.59 Рівняння руху тіла вздовж осі OX має вигляд: $x = 5 + 12t - 4t^2$. Визначити: А) швидкість тіла на момент $t_0 = 3$ с; Б) момент часу , коли тіло змінює напрямок руху на протилежний; В) момент часу, коли тіло повернеться у точку $x = 0$; Г) швидкість тіла в точці $x = 0$. [-12 м/с , $1{,}5$ с , $3{,}375$ с , -15 м/с]

1.60 Куля, що летить зі швидкістю $v_0 = 400$ м/с, ударяє в земляний вал і заглиблюється в нього на $L_0 = 36$ см. Визначити: А) час руху кулі у землі; Б) прискорення кулі; В) швидкість кулі на глибині 18 см; Г) глибину, на якій швидкість кулі зменшилась у 3 рази порівняно з v_0. Рух вважати рівнозмінним. [1,8 мс ; -221 км/с^2 ; 282 м/с ; 32 см]

1.61 Посадкова швидкість літака $v_0 = 270$ км/год, шлях пробігу $L = 1{,}0$ км. Визначити прискорення і час пробігу літака по посадковій смузі аеродрому, вважаючи його прискорення незмінним. [$\sim -2{,}8$ м/с^2 , ~ -27 с]

1.62 Поїзд, що рухається зі швидкістю $v_0 = 72$ км/год, проходить від початку гальмування до зупинки відстань $L = 1{,}0$ км. Визначити: А) прискорення поїзда; Б) час гальмування; В) швидкість поїзда біля світлофора, встановленого в середній точці гальмівного шляху. Рух вважати рівносповільненим [$-0{,}2$ м/с^2 ; $\sim 1{,}7$ с ; 14 м/с]

1.63 З яким постійним прискоренням починає рухатись тіло, якщо за восьму секунду руху воно проходить відстань $L = 30$ м? Визначити шлях, пройдений тілом за п'ятнадцяту секунду. [4 м/с^2 , 58 м]

1.64 Тіло рухається прямолінійно без початкової швидкості й за шосту секунду проходить $L = 12$ м. Визначити А) прискорення тіла; Б) шлях, пройдений за шістнадцяту секунду. [2,2 м/с^2 ; 34 м]

1.65 З якою початковою швидкістю треба кинути тіло вертикально вгору, щоб через $t = 10$ с воно рухалося вниз зі швидкістю $v = 20$ м/с? [78 м/с]

1.66 З даху будинку висотою $h = 28$ м кинули вгору камінь зі швидкістю $v_0 = 8$ м/с. Визначити швидкість, яку матиме камінь при падінні на землю. Опір повітря не враховувати, $g = 10$ м/с^2. [25 м/с]

1.67 З вертольота скинули без початкової швидкості два вантажі, причому другий на $\tau = 1$ с пізніше від першого. Визначити відстань між вантажами через $t_1 = 2$ с та через $t_2 = 4$ с після початку падіння першого вантажу. [~ 15 м ; ~ 34 м]

1.68 З прямовисного урвища упав камінь. Людина, яка стоїть біля того місця, з якого упав камінь, почула звук його падіння через $t = 6{,}0$ с. Визначити глибину урвища, вважаючи, що прискорення вільного падіння $g = 10$ м/с^2 і швидкість звуку $v_{зв} = 330$ м/с. [~ 150 м]

1.69 З повітряної кулі, що опускається вниз зі сталою швидкістю $v = 2$ м/с, кинули вертикально вгору камінь зі швидкістю $v_0 = 18$ м/с відносно землі. Визначити: А) відстань між кулею та каменем на момент, коли камінь досягне найбільшої висоти; Б) час після кидання, через який камінь пролетить повз кулю. [$20,3$ м; $4,1$ с]

1.70 Аеростат піднімається без початкової швидкості з поверхні землі з прискоренням $a = 2,0$ м/с^2. Через $\tau = 5,0$ с від початку піднімання з нього скинули баласт без початкової швидкості відносно аеростата. Через який час після скидання баласт впаде на землю? Прискорення вільного падіння $g = 10$ м/с^2. [$3,4$ с]

1.71 Тіло кинули вертикально вгору з початковою швидкістю $v_0 = 30$ м/с. Через який час тіло досягне висоти $h = 25$ м? [~ 1 с, $\sim 5,1$ с]

1.72 У вертикальній площині розташовано дротяне кільце діаметра d. З т. А по спицях, встановлених вздовж різних хорд (**рис. 1.72**), одночасно починають ковзати намистинки. Нехтуючи тертям та опором повітря, визначити час, за який намистинки досягнуть кільця. [$\sqrt{2d/g}$]

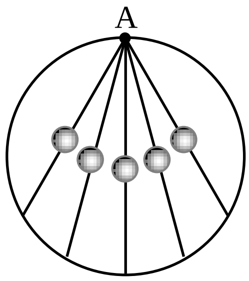


Рис.1.72

Рівень В

1.73 Радіус-вектор тіла змінюється з часом за законом $\vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{b}}t(1 - ct)$, де $\vec{\mathbf{b}}$ – сталий вектор, c – стала. Визначити: А) шлях, який пройде тіло за час, протягом якого воно повернеться у вихідне положення; Б) середню швидкість тіла на цьому шляху. [$b/2c$; $b/2$]

1.74 Рівняння руху точки вздовж осі OX має вигляд: $x = 6t - 0,125t^3$ м. Визначити середню швидкість точки за проміжок часу від $t_1 = 2$ с до $t_2 = 6$ с. [3 м/с]

1.75 За час τ тіло пройшло шлях S, причому його швидкість збільшилась в n разів. Вважаючи рух рівноприскореним з початковою швидкістю, визначити величину прискорення тіла. [$2S(n-1)/((n+1)\tau^2)$]

1.76 Перший вагон поїзда пройшов повз спостерігача, що стоїть на платформі, за $t_1 = 1$ с, а другий – за $t_2 = 1,5$ с. Довжина вагона $l = 12$ м. Визначити прискорення поїзда та його швидкість на початку спостереження. Рух поїзда вважати рівнозмінним. [$-3,2$ м/с^2, $13,6$ м/с]

1.77 Тіло, яке вільно падає без початкової швидкості, пройшло останні $S_1 = 30$ м за $\tau = 0,5$ с. А) З якої висоти падає тіло? Б) За який час тіло проходить перший і останній метри свого шляху? В) Який шлях проходить тіло за першу та останню секунди свого руху? Г) Яку середню швидкість має тіло на нижній половині шляху? [А) 199 м; Б) $0,45$ с; $0,016$ с; В) 49 м; $57,55$ м; Г) $53,3$ м/с]

1.78 Ракета стартує з землі з прискоренням $a = 2g$. Паливо згорає в ракеті за $\tau = 2$ с. Визначити: А) максимальну висоту підйому ракети; Б) час підйому ракети угору; В) час падіння на землю. [$117,6$ м; 6 с; $4,9$ с]

1.79 Чи можна вважати, що два тіла рухаються з однаковою швидкістю, якщо відстань між ними залишається постійною? [Ні]

1.80 Тіло, яке кинуто вертикально вгору, на висоті $h = 10$ м побувало двічі з інтервалом $\tau = 1{,}5$ с. Визначити: А) початкову швидкість тіла; Б) час всього руху. [16 м/с ; $3{,}2$ с]

1.81 Автомобіль повинен проїхати відстань $S = 450$ м зі сталою швидкістю, а далі рухатися до зупинки зі сталим прискоренням, модуль якого $|\vec{\mathbf{a}}| = 2$ м/с^2. Визначити: А) швидкість рівномірного руху, при якому час проходження всього шляху буде найменшим; Б) час руху до зупинки; В) шлях, який пройде автомобіль за весь час руху. [30 м/с ; 30 с ; 675 м]

1.82 Яким повинен бути нахил даху будинку, щоб дощова вода стікала з нього якнайшвидше? Тертя не враховувати. [$45°$]

1.83 По гладкому плоскому клину з кутом $\alpha = 45°$ під таким самим кутом $\alpha = 45°$ до його ребра пускають кульку зі швидкістю v (**рис.1.83**). Яку відстань по горизонталі пройде кулька за час руху по клину? [$\sqrt{2}v^2/g$]

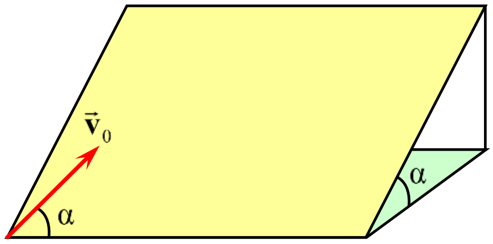


Рис.1.83

Рекомендації до теми "Графіки руху та їх використання "

Виконуючи графічні завдання, варто враховувати наступне.

1) Якщо треба показати графіки декількох кінематичних величин, то їх слід розміщувати один під одним так, щоб осі ординат знаходились на одній вертикалі і масштаби по осі абсцис (осі часу) були однаковими. За таких умов на графіках буде чітко відображена взаємопов'язаність і узгодженість змін розгляданих величин.

2) Якщо протягом заданого в умові часу характер руху тіла змінюється (наприклад, змінюється напрям або величина швидкості чи прискорення), то кожну ділянку руху доцільно розглядати окремо, користуючись для часу новою змінною $\tau = t - t_0$, де t_0 – момент зміни характеру руху. При цьому початкові значення координати та швидкості на даній ділянці дорівнюють кінцевим значенням відповідних величин на попередній ділянці руху.

3) Задачі «на побудову графіків» не слід розуміти буквально: навіть якщо в умові задані числові рівняння, то це не передбачає розрахунку таблиць значень і побудови кривих по точках. Треба зробити обчислення тільки для всіх **характерних точок** (точки перетину з координатними осями, точки екстремумів, тощо) і відмітити їх на графіку. Після цього показати вигляд кривих, намагаючись правильно відобразити їх форму (щоб парабола не була схожою на пряму, а пряма – на параболу).

3.1) Окремо треба сказати про графіки модуля швидкості $v(t)$ та шляху $S(t)$, при побудові котрих можуть виникнути певні труднощі. Базою тут є графіки проекцій швидкості та переміщення. При прямолінійному русі модулі проекції та вектора швидкості однакові. Тому на ділянках, де $v_x > 0$, графік модуля $v(t)$ співпадає з графіком проекції швидкості $v_x(t)$, а там, де $v < 0$, графік модуля швидкості є віддзеркаленням графіка проекції швидкості відносно осі часу. При побудові графіка шляху кожну спадаючу ділянку графіка переміщення віддзеркалюють від горизонтальної прямої, що проходить через початок цієї ділянки, і всі ділянки переносять по вертикалі так, щоб утворилась неперервна зростаюча лінія.

4) Якщо умова задачі задана графіком, то слід:

- ретельно проаналізувати характер руху на кожній його ділянці (для кожного інтервалу часу);
- для кожного інтервалу записати рівняння розгляданих в задачі величин;
- знайти значення всіх необхідних величин в моменти зміни характеру руху та в екстремумах;
- на основі записаних рівнянь, враховуючи попередні обчислення, побудувати необхідні графіки.

Зміни кінематичних величин з часом не є незалежними - вони взаємообумовлені існуючими між цими величинами зв’язками. Це накладає суттєві обмеження на можливий вигляд графіків, а саме:

а) прискорення спричинюється силою. Сила ж може змінюватися дуже швидко, практично миттєво, зумовлюючи "стрибкові" зміни прискорення. Тому **на графіку прискорення в такі моменти часу виникають розриви**;

б) через інертність тіл швидкість не може змінюватись миттєво, тому **на графіках швидкості не може бути розривів**;

в) оскільки прискорення визначається тангенсом кута нахилу графіка швидкості, то **на графіку швидкості в точках розриву прискорення спостерігаються злами**;

г) тіло не може миттєво змінити свого положення у просторі, тому **на графіку координати (переміщення, шляху) не може бути розривів. Не може бути й зламів** – адже швидкість визначається тангенсом кута нахилу графіка координати, і злам на ньому означав би, що тіло має одночасно дві різні швидкості руху, що неможливо. Сказане означає, що **різні ділянки графіка координати мають бути спряженими** (плавно переходити одна в одну).

Задача 1.15

Тіло рухається рівномірно зі швидкістю $\upsilon_0 = 10$ м/с вздовж осі OX протягом $t_1 = 5$ с, а потім ще $\tau_0 = 15$ с зі сталим прискоренням $a = 2$ м/с^2, проекція якого на вісь OX від'ємна.

Побудувати графіки проекції швидкості $\upsilon_x(t)$ та координати $x(t)$ тіла, прийнявши початкову координату $x_0 = 0$.

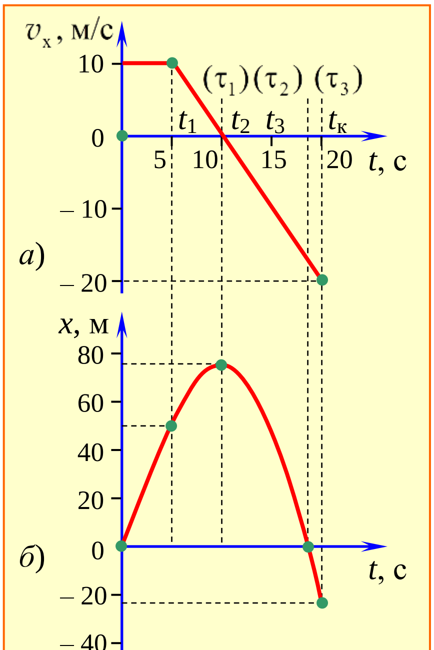


Рис. 15

Дано:

$\upsilon_0 = 10$ м/с

$t_1 = 5$ с

$a = 2$ м/с^2

$x_0 = 0$

$\tau_0 = 15$ с

Побудувати: $v_x(t)$, $x(t)$

Розв’язання:

На першому відтинку часу (від $t=0$ до $t_1=5\,\text{с}$) рух є рівномірним, $v=v_0=\text{const}$. Отже, графік $v_x(t)$ – це відрізок прямої, паралельної до осі часу.

На другому проміжку часу (від $t_1=5\,\text{с}$ до $t_К=t_1+\tau_0=20\,\text{с}$) рух тіла рівнозмінний, оскільки за умовою задачі $a_x=-a$. Цей рух починається в момент t_1, тому $v_x=v_0-a(t-t_1)$. Для подальшого розгляду зручно використати змінну $\tau=t-t_1$ і записати $v_x=v_0-a\tau$. Графік цієї функції являє собою відрізок прямої, нахилений до осі абсцис під певним кутом. Ця пряма перетинає вісь абсцис в момент $\tau_1=v_0/a=10/2=5\,\text{с}$ (йому відповідає $t_2=t_1+\tau_1=5+5=10\,\text{с}$). В цей момент змінюється напрям руху тіла (v_x стає від'ємною), отже він визначає точку повороту на траєкторії. В кінцевий момент проекція швидкості $v_{xк}=v_0-a\tau_0=10-2\cdot15=-20\,\text{м/с}$. По знайдених точках будуємо графік $v_x=\text{f}(t)$. (**рис.15а**).

Координата x тіла за час від $t=0$ до $t=t_1$ змінюється за законом $x=v_0t$. На другому проміжку часу

$$x=x_1+v_0\tau-\frac{a\tau^2}{2}, \qquad (1)$$

де $x_1=v_0t_1=50\,\text{м}$ – початкова координата на ділянці рівнозмінного руху і в той же час – кінцева координата на ділянці рівномірного руху. Таким чином, окремі ділянки графіка координати зображуються відрізками, прямої та параболи відповідно, причому гілки параболи напрямлені донизу, оскільки $a_x<0$.

Для побудови параболи знайдемо координату її вершини, кінцеву координату тіла $x_к=x(t_к)$ та момент часу, в який тіло проходить початок координат ($x=0$).

Вершина параболи відповідає максимальному значенню функції $x(t)$. Умовою максимуму функції є рівність нулю першої похідної, тобто рівність нулю швидкість $x'(t)=v_x(t)=0$. Таким чином, вершина параболи припадає на момент часу τ_1, або $t_2=t_1+\tau_1=10\,\text{с}$ (див. **рис.15а**). При цьому

$$x_2=x_1+v_0\tau_1-\frac{a\tau_1^2}{2}=50+10\cdot5-\frac{2\cdot25}{2}=75\,\text{м}.$$

Координата тіла в кінцевий момент часу ($t_к$):

$$x_к=x_1+v_0\tau_0-\frac{a\tau_0^2}{2}=50+10\cdot5-\frac{2\cdot25}{2}=75\,\text{м}.$$

Момент часу τ_2, в який тіло проходить через початок координат, знайдемо з умови $x(\tau_3)=0$:

$$x_1+v_0\tau_2-\frac{a\tau_2^2}{2}=0 \;\Rightarrow\; \tau_2^2-10\tau_2-50=0 \quad \tau_2=5\left(1+\sqrt{3}\right)\approx13{,}7\,\text{с}.$$

(другий корінь цього рівняння від'ємний і не задовольняє умові задачі). Моменту τ_2 відповідає

$$t_3=t_1+\tau_2=18{,}7\,\text{с}.$$

Згідно з обчисленнями відмічаємо на графіку всі розраховані точки і проводимо через них відрізок прямої та відрізок параболи (**рис.15б**).

Задача 1.16

Тіло рухається вздовж осі OX так, що його швидкість визначається зображеним на **рис.16** графіком.

Побудувати графіки прискорення $a_x(t)$, координати $x(t)$ та шляху $s(t)$, пройденого тілом. Початкова координата $x_0 = 0$.

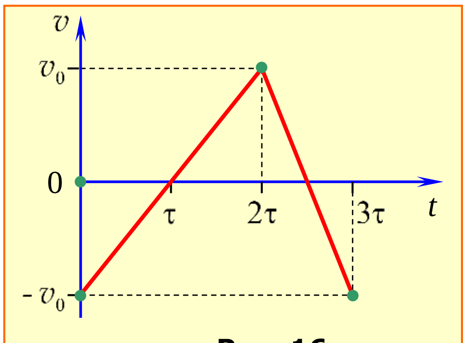


Рис. 16

Розв'язання:

Графік швидкості являє собою два відрізки прямої, що відповідають руху зі сталим прискоренням на кожній з двох ділянок. Позначимо прискорення a_1 та a_2. Оскільки $a_x = \Delta v_x / \Delta t$, то

$$a_{1x} = \frac{v_0 - (-v_0)}{2\tau} = \frac{v_0}{\tau},$$
$$a_{2x} = \frac{-v_0 - v_0}{3\tau - 2\tau} = \frac{2v_0}{\tau},$$

тобто $a_{2x} = -2a_{1x}$.

Згідно з цим зображуємо графік прискорення (**рис.16-1б**).

Графік $x(t)$ складається з ділянок двох парабол: перша – з вершиною донизу (оскільки на проміжку часу від 0 до 2τ $a_{1x} > 0$); друга з вершиною догори (бо за час від 2τ до 3τ $a_{2x} > 0$). Вершини парабол розташовані в точках, в яких змінюється знак проекції швидкості (див. **задачу 1.15**), тобто при $t = \tau$ та $t = 2{,}5\tau$. З **рис.16-1а** видно, що сумарні площі під графіком $v_x(t)$ як на першій, так і на другій ділянці руху рівні нулю, отже рівні нулю і відповідні переміщення. Тому координати тіла на момент зміни характеру руху $t = 2\tau$ та в кінцевий момент часу $t = 3\tau$ дорівнюють початковій координаті, тобто нулю.

Координату першої точки повороту знайдемо з рівняння

$$v_x^2 - v_{0x}^2 = 2a_x(x - x_0).$$

Підставимо сюди $v_x = 0$, $v_{0x} = -v_0$, $a_x = v_0/\tau$, $x_0 = 0$ і знайдемо: $x_1 = -v_0\tau/2$. Аналогічно визначимо другу точку повороту, підставивши $v_x = 0$, $v_{0x} = v_0$, $a_x = -2v_0/\tau$ і $x_0 = 0$: $x_2 = v_0\tau/4$. Згідно з цим аналізом зображуємо графік $x(t)$ (**рис.16-1в**). Зверніть увагу на те, що в точці $t = 2\tau$

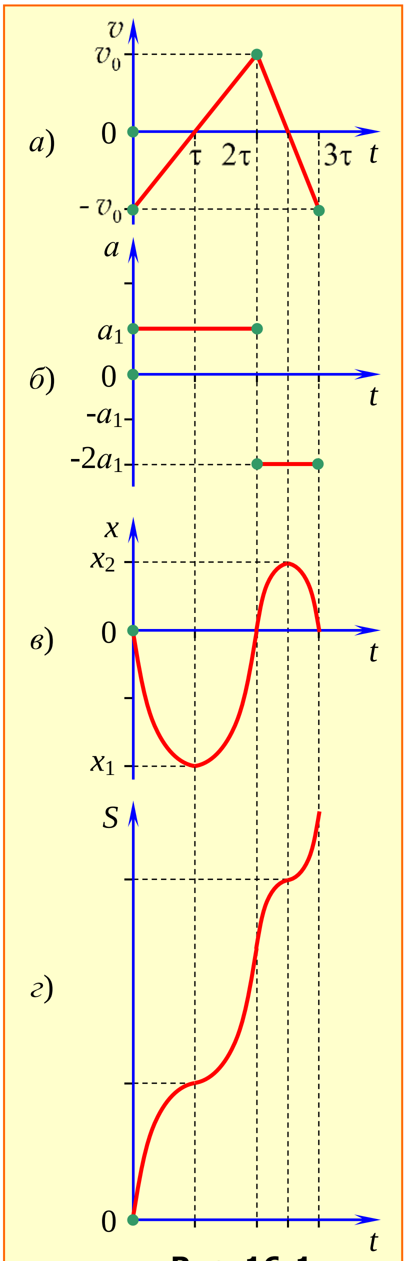


Рис. 16-1

параболи спряжені, тобто плавно переходять одна в одну. Розглянемо тепер побудову графіка шляху. На проміжку часу від 0 до τ він є віддзеркаленням графіка координати (див. **рис.16-1г**). На наступному проміжку від τ до $2{,}5\tau$ координата зростає, отже її зміна дорівнює пройденому шляху. Тому цю ділянку шляху отримуємо паралельним перенесенням вказаної ділянки графіка координати до з'єднання з попередньою ділянкою графіка шляху. Останню ділянку графіка шляху отримаємо аналогічно, але після попереднього віддзеркалення заключної ділянки графіка координати від горизонталі.

Задача 1.17

На перегоні довжиною $s = 4\text{ км}$ між двома станціями поїзд метро рухається з середньою швидкістю $\langle v \rangle = 64{,}8\text{ км/год}$. На розгін та гальмування зі сталим прискоренням поїзд витрачає по $\tau = 20\text{ с}$, решту часу він рухається рівномірно.

Визначити швидкість v_0 рівномірного руху поїзда.

Дано:

$\langle v \rangle = 64{,}8\text{ км/год} = 18\text{ м/с}$

$s = 4 \cdot 10^3\text{ м}$

$\tau = 20\text{ с}$

Визначити: v_0

Розв'язання:

Для розв'язування задачі скористаємось графіком швидкості поїзда, який відповідно до умови являє рівнобічну трапецію (**рис.17**). Шлях поїзда s чисельно дорівнює площі цієї трапеції:

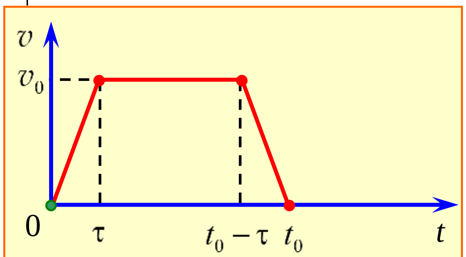


Рис. 17

$$s = \frac{1}{2}\left(t_0 + \left(t_0 - 2\tau\right)\right)v_0 = \left(t_0 - \tau\right)v_0\,, \qquad (1)$$

де t_0 – повний час руху поїзда, τ – час розгону та гальмування, v_0 – шукана швидкість. Повний час руху визначимо через шлях та середню швидкість: $t_0 = s/\langle v \rangle$.Отже,

$$s = \left(\frac{s}{\langle v \rangle} - \tau\right)v_0 \quad \Rightarrow$$

$$v_0 = \frac{s\langle v \rangle}{s - \langle v \rangle \tau} = \frac{\langle v \rangle}{1 - \dfrac{\langle v \rangle \tau}{s}} = \frac{18}{1 - \dfrac{18 \cdot 20}{4 \cdot 10^3}} \approx 19{,}8\text{ м/с} \approx 71{,}2\text{ км/год}.$$

Задача 1.18

Від поїзда, що рухається рівномірно, відчіплюють останній вагон. Рухаючись рівносповільнено вагон, проходить до зупинки шлях S.

Визначити шлях S_1, який пройде за цей час поїзд, якщо його швидкість не змінилася.

Дано:

S

Визначити: S_1

Розв'язання:

Графік швидкості вагона зображується нахиленим відрізком, а поїзда – горизонтальним відрізком прямої (**рис.18**). Очевидно, що площа під графіком швидкості поїзда вдвічі більша, ніж площа під графіком швидкості вагона.

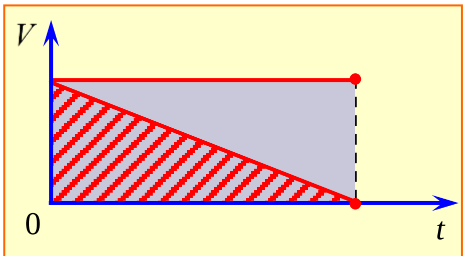


Рис.18

Отже, шлях поїзда

$$S_1 = 2S\ .$$

Задачі для самостійної роботи

Рівень А

1.84 За графіком швидкості (**рис.1.84**) визначити модуль переміщення за S за $10\,\text{с}$ та накреслити графік залежності $S=\text{f}(t)$. $[150\,\text{м}]$

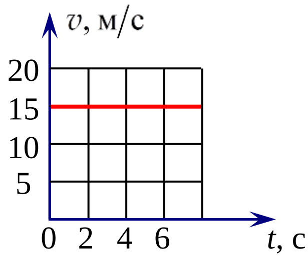


Рис.1.84

1.85 За графіком координати (**рис.1.85**) визначити швидкість руху і побудувати графік швидкості. Виразити швидкість у **м/с** та в **км/год**. $[10\,\text{м/с};\ 36\,\text{км/год}]$

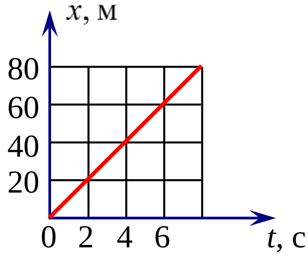


Рис.1.85

1.86 На **рис.1.86** зображено траєкторію AB руху матеріальної точки в системі координат XOY. Мірило: 1 поділка – $3{,}0\,\text{м}$. Визначити координати точок початку і кінця руху. Чому дорівнюють проекції переміщення на осі OX і OY та довжина самого переміщення? Який час тривав рух, якщо точка рухалася зі сталою швидкістю $v=50\,\text{см/с}$? Визначити проекції швидкості на осі OX і OY. $[X_A=3\,\text{м},\ Y_A=6\,\text{м},\ X_B=13{,}5\,\text{м},\ Y_B=9\,\text{м};\ \Delta X=10{,}5\,\text{м},\ \Delta Y=3\,\text{м};\ 10{,}9\,\text{м};\ 21{,}8\,\text{с};\ 0{,}48\,\text{м/с};\ 0{,}137\,\text{м/с}]$

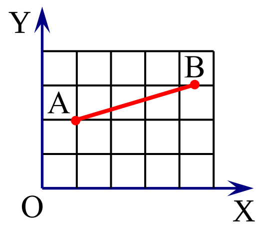


Рис.1.86

1.87 На **рис.1.87** зображені: **1** – графік руху катера в стоячій воді; **2** – графік руху води в річці. Побудуйте графік руху катера за течією та проти течії ріки. За графіками знайдіть швидкість катера при русі за та проти течії. $[15\,\text{км/год};\ 25\,\text{км/год}]$

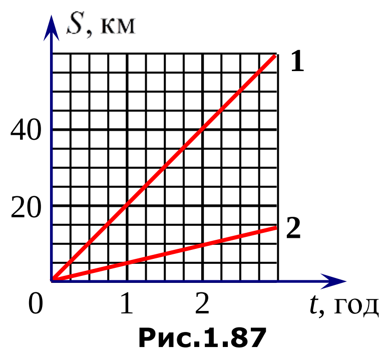


Рис.1.87

1.88 За графіком шляху, показаним на **рис.1.88**, визначити середню швидкість руху тіла протягом першої секунди, шостої секунди і за весь час руху. $[5\,\text{м/с};\ 5\,\text{м/с};$

$5\,\text{м/с}$]

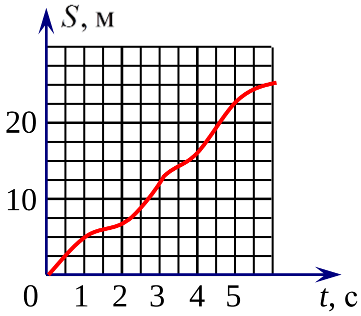


Рис.1.88

1.89 Побудувати графіки швидкості руху тіл для проміжку часу $5\,\text{с}$, якщо: 1) $v_0 = 10\,\text{см/с}$; $a = 0$; 2) $v_0 = 10\,\text{см/с}$; $a = 2\,\text{см/с}^2$; 3) $v_0 = 0$; $a = 4\,\text{см/с}^2$; 4) $v_0 = 10\,\text{см/с}$; $a = -2{,}5\,\text{см/с}^2$.

1.90 Тіло рухається з прискоренням, яке змінюється так, як показано на графіку **рис.1.90**. Зобразити графік швидкості цього руху та охарактеризувати його.

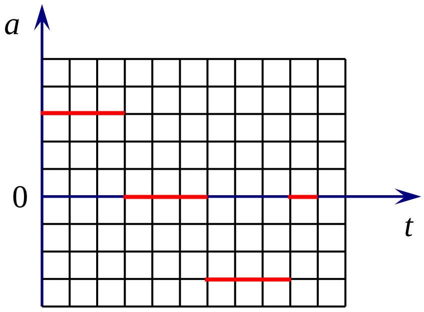


Рис.1.90

1.91 Протягом $\tau = 20\,\text{с}$ швидкість матеріальної точки рівномірно збільшувалася від нуля до $v = 8{,}0\,\text{м/с}$. Накреслити графік залежності прискорення від часу.

1.92 Тіло рухається вздовж осі OX так, що його швидкість змінюється з часом, як подано на **рис.1.92**. Який шлях пройшло тіло за перші $t_1 = 5\,\text{с}$ і $t_2 = 10\,\text{с}$? Визначити його переміщення за ті ж проміжки часу. [$5\,\text{м}$; $10\,\text{м}$; $5\,\text{м}$; 0]

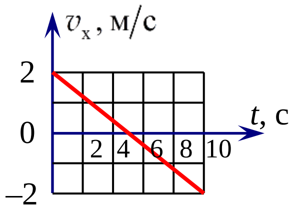


Рис.1.92

1.93 На **рис.1.93** показані графіки швидкостей тіл. По кожному з них: 1) охарактеризувати рух тіл; 2) порівняти прискорення тіл; 3) визначити шлях за час $5\,\text{с}$. **3)** [а) $37{,}5\,\text{м}$, $31{,}25\,\text{м}$; б) $125\,\text{м}$, $11\,\text{м}$; в) $25\,\text{м}$, $11{,}25\,\text{м}$; г) $18{,}75\,\text{м}$, $10\,\text{м}$; д) $37{,}5\,\text{м}$, $20\,\text{м}$; е) $37{,}5\,\text{м}$, $42{,}25\,\text{м}$]

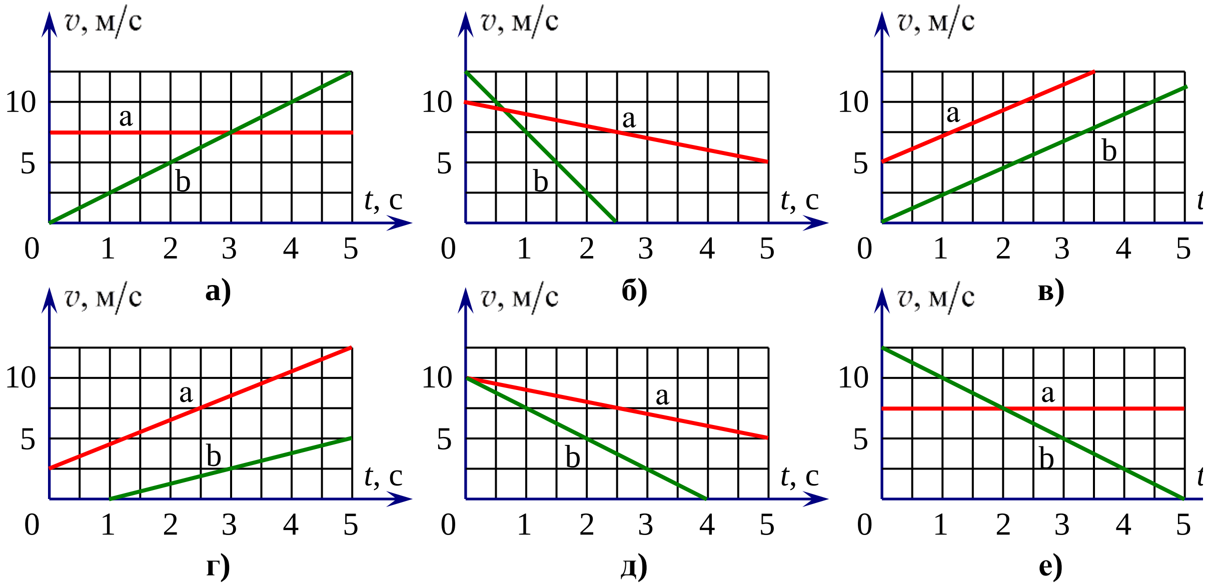


Рис.1.93

1.94 Побудувати графік швидкості тіла, якщо його початкова швидкість $\upsilon_0 = -3\,\text{м/с}$, прискорення $a = 0{,}4\,\text{м/с}^2$. Визначити шлях тіла за $\tau = 5\,\text{с}$. $[10\,\text{м}]$

Рівень Б

1.95 Вантаж, що лежить на землі, піднімають лебідкою. Перші $t_1 = 2\,\text{с}$ вантаж рухається з прискоренням $a_1 = 0{,}5\,\text{м/с}^2$, наступні $t_2 = 11\,\text{с}$ – рівномірно, останні $t_3 = 2\,\text{с}$ – сповільнено з прискоренням $a_2 = 0{,}5\,\text{м/с}^2$. На яку висоту підніметься вантаж? Накреслити графік швидкості $\upsilon = \text{f}(t)$ та прискорення $a = \text{f}(t)$. За графіком швидкості визначити висоту підйому вантажу. $[13\,\text{м}]$

1.96 На **рис.1.96 а), б)** наведені графіки швидкості двох тіл. Для кожного з тіл визначити: а) переміщення і шлях за $10\,\text{с}$ руху; б) прискорення на кожній ділянці. Побудувати графіки прискорення, координати та шляху. Початкові координати тіл дорівнюють нулю. $[32\,\text{м};\ 48\,\text{м};\ 2\,\text{м/с}^2;\ 0;\ -4\,\text{м/с}^2;\ 0\,\text{м};\ 10\,\text{м};\ -2\,\text{м/с}^2;\ 0{,}5\,\text{м/с}^2]$

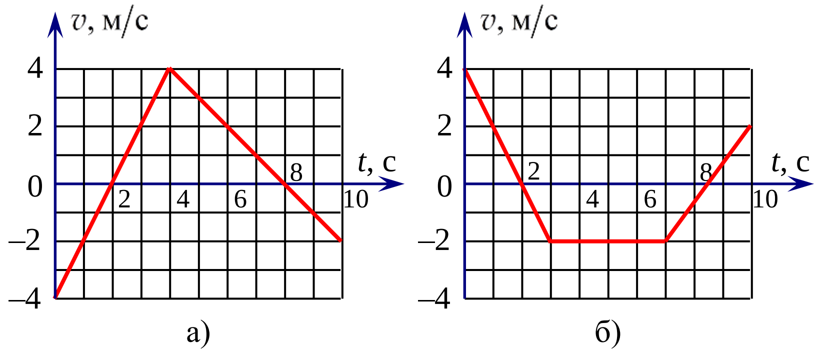


Рис.1.96

1.97 Тіло рухається з точки $x_0 = -3\,\text{м}$, маючи початкову швидкість $\upsilon_0 = 2\,\text{м/с}$. Графік його прискорення показано на **рис.1.97**. Побудувати графіки швидкості, координати та пройденого шляху.

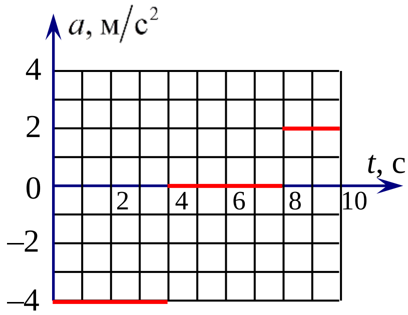


Рис.1.97

1.98 Велосипедист рушає зі сталим прискоренням $a_1 = 2\,\text{м/с}^2$. Досягнувши швидкості $v = 6\,\text{м/с}$, він деякий час рухається рівномірно, а потім гальмує до зупинки з прискоренням, модуль якого $|a_2| = 3\,\text{м/с}^2$. За який час велосипедист подолав всю дистанцію, якщо її довжина $L = 120\,\text{м}$? [$22{,}5\,\text{с}$]

1.99 За графіком прискорення (**рис.1.99**) визначити швидкість тіла у моменти $t_1 = 4\,\text{с}$ і $t_2 = 15\,\text{с}$, якщо у момент часу $t_0 = 1\,\text{с}$ швидкість тіла $v = 3\,\text{м/с}$. [$43\,\text{м/с}$; $423\,\text{м/с}$]

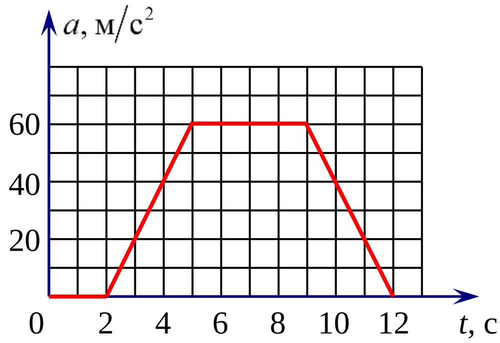


Рис.1.99

Рекомендації до теми "Рух тіла, кинутого під кутом до горизонту "

В задачах, де треба аналізувати криволінійний рух зі сталим прискоренням, слід керуватись тими ж вказівками та порадами, що й для задач на **рух тіла, кинутого вертикально** (вгору або вниз). Але при цьому використовують дві координатні осі (вертикальну та горизонтальну) і повну систему скалярних рівнянь кінематики **(1.16)**.

Задача 1.19

Тіло кинули з поверхні землі з початковою швидкістю $v_0 = 10\,\text{м/с}$. Через час $t = 0{,}5\,\text{с}$ швидкість тіла зменшилася до $v_1 = 7\,\text{м/с}$.

Визначити максимальну висоту підйому тіла H.

Дано:

$v_0 = 10\,\text{м/с}$

$v_1 = 7\,\text{м/с}$

$t = 0{,}5\,\text{с}$

Визначити: H

Розв’язання:

Очевидно, що тіло рухається зі сталим прискоренням $\vec{\mathbf{g}}$. На перший погляд може здатися, що воно кинуте вертикально, але в такому разі через 0,5 с його швидкість була б $v = v_0 - gt = 5\,\text{м/с}$. Отже, тіло кинуте під кутом до горизонту.

Оберемо осі: OX – горизонтально, OY – вертикально. Початок координат розташуємо у точці кидання. В такому разі висота підйому тіла дорівнює максимальному значенню координати y:

$$H = y_{\max}.$$

Згідно з рівнянням кінематики **(1.18)**

$$v_y^2 - v_{0y}^2 = 2g_y(y - y_0),$$

де $g_y = -g$. Врахувавши, що $y_0 = 0$, а у верхній точці підйому $y = H$ і $v_y = 0$, дістанемо:

$$v_{0y}^2 = 2gH \quad \Rightarrow \quad H = \frac{v_{0y}^2}{2g}. \qquad (1)$$

Для визначення v_{0y} запишемо рівняння проекцій швидкості на осі координат:

$$v_x = v_{0x}$$
$$v_y = v_{0y} - gt.$$

З цих рівнянь легко отримати v_{0y}, якщо піднести їх до квадрата та додати:

$$v_x^2 + v_y^2 = v_{0x}^2 + (v_{0y} - gt)^2 = v_{0x}^2 + v_{0y}^2 - 2v_{0y}gt + g^2t^2 \quad \Rightarrow$$
$$v^2 = v_0^2 - 2gtv_{0y} + g^2t^2.$$

Звідси маємо

$$v_{0y} = \frac{v_0^2 - v^2 + g^2t^2}{2gt}.$$

Підставивши цей результат у вираз **(1)**, отримаємо відповідь:

$$H = \frac{(v_0^2 - v^2 + g^2t^2)^2}{8g^3t^2} = \frac{(10^2 - 7^2 + 9{,}8^2 \cdot 0{,}5^2)^2}{8 \cdot 9{,}8^3 \cdot 0{,}5^2} = 3 \text{ м}.$$

Задача 1.20

Тіло кинули з висоти h над землею під кутом α до горизонту з початковою швидкістю v_0.

Визначити:

А) рівняння траєкторії $y = f(x)$;

Б) час підйому до найвищої точки траєкторії t_h;

В) найбільшу висоту підйому тіла над горизонтом H;

Г) горизонтальну дальність польоту тіла L;

Д) кут кидання $\alpha_{\max}$, при якому дальність польоту найбільша.

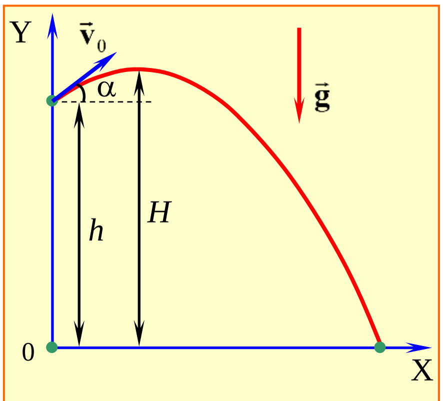


Рис. 20

Дано:
h
v_0
α

Визначити: $y = f(x)$, t_h,

H, L, α_{max}

Розв'язання:

Оберемо систему координат, як показано на **рис.20**, розмістивши її початок на землі під місцем кидання тіла. Рух тіла відбувається зі сталим прискоренням $\vec{\mathbf{g}}$. Тоді маємо:

$$x_0 = 0; \qquad y_0 = h;$$
$$v_{0x} = v_0 \cos\alpha; \quad v_{0y} = v_0 \sin\alpha;$$
$$g_x = 0; \qquad g_y = -g.$$

З урахуванням цього, рівняння руху **(1.16)** відносно обраних осей мають вигляд:

$$x = v_0 t \cos\alpha\,, \tag{1}$$

$$v_x = v_0 \cos\alpha\,, \tag{2}$$

$$y = h + v_0 t \sin\alpha - \frac{gt^2}{2}, \tag{3}$$

$$v_y = v_0 \sin\alpha - gt. \tag{4}$$

А) Знайти рівняння траєкторії означає знайти залежність $y = \mathrm{f}(x)$. Для цього треба виключити час t з рівнянь **(1)** та **(3)**. З рівняння **(1)**

$$t = \frac{x}{v_0 \cos\alpha}.$$

Підставивши цей вираз у рівняння **(3)**, одержимо:

$$y = h + x \cdot \mathrm{tg}\alpha - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2\alpha} x^2. \tag{5}$$

Це рівняння параболи, гілки якої напрямлені вниз (**рис.20**).

Б) Вектор швидкості напрямлений по дотичній до траєкторії у кожній точці. У верхній точці вектор швидкості напрямлений горизонтально, і його проекція на вісь OY дорівнює нулю:

$$v_y(t_h) = v_{0y} - gt_h = 0\,,$$

де t_h – час підйому до верхньої точки траєкторії.

З цього рівняння маємо:

$$t_h = \frac{v_{0y}}{g} = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}.$$

В) Найбільша висота підйому тіла над землею дорівнює координаті y в момент часу t_h:

$$H = y(t_h) = h + v_{0y} t_h - \frac{gt_h^2}{2} = h + \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}. \tag{6}$$

Г) Горизонтальна дальність польоту тіла L дорівнює координаті x точки перетину траєкторії з віссю OX (**рис.20**), при цьому $y = 0$. З рівняння траєкторії **(5)** маємо

$$0 = h + L \cdot \mathrm{tg}\alpha - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} L^2, \qquad (7)$$

звідки знаходимо[1]

$$L = \frac{v_0^2 \sin\alpha \cdot \cos\alpha + v_0 \cos\alpha \sqrt{v_0^2 \sin^2 \alpha + 2gh}}{g}. \qquad (8)$$

(Від'ємний корінь не має фізичного змісту).

В окремому випадку, коли тіло кидають з поверхні землі ($h = 0$), формула **(8)** спрощується:

$$L = \frac{2v_0^2 \sin\alpha \cdot \cos\alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}. \qquad (8a)$$

Д) В принципі, можна було б визначити кут кидання, якому відповідає найбільша дальність польоту тіла, проаналізувавши рівняння **(8)** на максимум. Однак це досить громіздко, і ми оберемо інший шлях, ще раз скориставшись отриманим вище рівнянням **(7)**. Зробимо заміну $\cos^2 \alpha = 1/(tg^2\alpha + 1)$. Тоді

$$h + L \cdot \mathrm{tg}\alpha - \frac{gL^2}{2v_0^2}\left(\mathrm{tg}^2\alpha + 1\right) \;\Rightarrow\; \mathrm{tg}^2\alpha - \frac{2v_0^2}{gL}\mathrm{tg}\alpha - \left(\frac{2hv_0^2}{gL} - 1\right) = 0.$$

Розв'яжемо це рівняння відносно $\mathrm{tg}\alpha$:

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{v_0^2}{gL}\left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{2gh}{v_0^2} - \left(\frac{gL}{v_0^2}\right)^2}\right). \qquad (9)$$

Цей розв'язок має фізичний зміст лише тоді, коли вираз під коренем не є від'ємним:

$$1 + \frac{2gh}{v_0^2} - \left(\frac{gL}{v_0^2}\right)^2 \geq 0,$$

а це можливо лише при $L \leq \dfrac{v_0\sqrt{v_0^2 + 2gh}}{g}$. Знак рівності відповідає максимальному переміщенню тіла по горизонталі, тобто:

$$L_{\max} = \frac{v_0\sqrt{v_0^2 + 2gh}}{g}.$$

Підставимо це значення у формулу **(9)** і одержимо вираз для визначення кута $\alpha_{\max}$, при якому дальність польоту найбільша:

$$\mathrm{tg}\alpha_{\max} = \frac{v_0^2}{gL_{\max}} = \frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + 2gh}}.$$

Якщо тіло кидають з поверхні землі ($h = 0$), то вираз спрощується: $\mathrm{tg}\alpha_{\max} = 1$, звідки випливає, що при киданні з поверхні землі дальність польоту максимальна при куті

---

[1] Звичайно, можна було б використати рівняння руху **(3)** і, прирівнявши координату *y* до нуля, знайти час руху. Далі підставити цей час у рівняння **(1)** і знайти шукану відстань. Це простий, але досить громіздкий шлях.

кидання $45°$. До цього ж висновку, звичайно, можна було б прийти з рівняння **(8а)**: максимальне значення $\sin 2\alpha = 1$, що відповідає куту кидання $45°$.

Задача 1.21

Тіло вільно падає з висоти $h = 20$ см на похилу площину і пружно відбивається. Кут нахилу площини до горизонту $\alpha = 30°$.

Визначити:

А) відстань L вздовж площини між місцем першого та другого відскоків тіла;

Б) швидкість тіла v на момент другого відскоку;

В) кут β між вектором швидкості та перпендикуляром до площини на момент другого відскоку.

Дано:
$h = 20$ см
$\alpha = 30°$

Визначити: L, v, β

Розв'язання:

Перед ударом об площину тіло проходить у вільному падінні відстань h і на момент першого відскоку набуває швидкості (див. формулу **(1.19)**)

$$v_0 = \sqrt{2gh}. \qquad (1)$$

Оскільки удар тіла об площину пружний, модуль швидкості залишається незмінним, а напрямок змінюється так, що кут падіння дорівнює куту відбивання (кути відраховують від перпендикуляра до площини). З геометричної побудови на **рис.21** очевидно, що кут падіння та кут відбивання дорівнюють кутові нахилу площини до горизонту α.

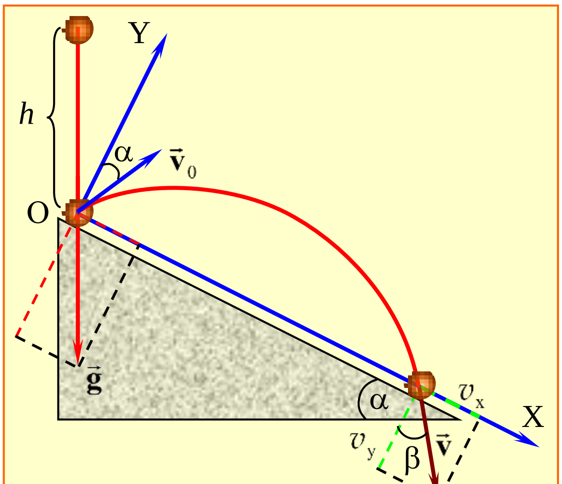


Рис.21

Виберемо осі координат: вісь ОХ вздовж площини, вісь OY – перпендикулярно, а початок координат розташуємо у точці першого удару тіла. В такому разі

$$x_0 = 0; \qquad y_0 = h;$$
$$v_{0x} = v_0 \sin\alpha; \quad v_{0y} = v_0 \cos\alpha;$$
$$g_x = g\sin\alpha; \qquad g_y = -g\cos\alpha.$$

Рівняння руху **(1.16)** тіла відносно координатних осей мають вигляд:

$$x = v_0 t \sin\alpha + \frac{gt^2}{2}\sin\alpha, \qquad y = v_0 t\cos\alpha - \frac{gt^2}{2}\cos\alpha.$$

А) На момент τ другого відскоку від площини координата y тіла дорівнює нулю, тобто $y(\tau)=0$ (так саме вона дорівнюватиме нулю і при наступних відскоках). З цієї умови визначимо момент τ:

$$y(\tau)=v_0\tau\cos\alpha-\frac{g\tau^2}{2}\cos\alpha=0;\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}\tau_1=0;\\ \tau_2=\dfrac{2v_0}{g}.\end{cases}$$

Перший корінь $\tau_1=0$ відповідає моменту першого відскоку і не являє інтересу. Другий корінь τ_2 відповідає шуканому моменту часу. В цей момент координата тіла $x(\tau_2)$ дорівнює відстані L між точками першого та другого ударів:

$$L=x(\tau_2)=v_0\tau_2\sin\alpha+\frac{g\tau_2^2}{2}\sin\alpha=\frac{4v_0^2}{g}\sin\alpha.$$

Підставивши в цю формулу значення з виразу швидкості тіла **(1)**, остаточно одержимо:

$$L=8h\sin\alpha\,.$$

$$L=8\cdot 0{,}2\cdot\sin 30^\circ=0{,}8\text{ м}=80\text{ см}.$$

Б) Тіло рухається з прискоренням $\vec{\mathbf{g}}$, тому вектор швидкості змінюється з часом за законом:

$$\vec{\mathbf{v}}=\vec{\mathbf{v}}_0+\vec{\mathbf{g}}t,$$

а його проекції на обрані координатні осі:

$$v_\text{x}=v_0\sin\alpha+gt\sin\alpha,$$
$$v_\text{y}=v_0\cos\alpha-gt\cos\alpha.$$

На момент другого відскоку тіла від площини ($\tau_2=2v_0/g$) ці проекції дорівнюють:

$$v_\text{x}(\tau_2)=3v_0\sin\alpha;\qquad v_\text{y}(\tau_2)=-v_0\cos\alpha,$$

Модуль вектора швидкості на цей момент:

$$v(\tau_2)=\sqrt{v_\text{x}^2+v_\text{y}^2}=v_0\sqrt{9\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=\sqrt{2gh\left(8\sin^2\alpha+1\right)}.$$

Виконаємо обчислення:

$$v(\tau_2)=\sqrt{2\cdot 9{,}8\cdot 0{,}2\cdot\left(8\cdot\sin^2 30^\circ+1\right)}=3{,}43\text{ м/с}.$$

В) Шуканий кут β знайдемо із співвідношення $\text{tg}\beta=v_\text{x}/v_\text{y}$, где v_x, v_y – проекції швидкості на осі на момент τ (див.**рис.21**):

$$\text{tg}\beta=-3\text{tg}\alpha,\quad\Rightarrow\quad\beta=\text{arctg}(3\text{tg}\alpha)=-60^\circ.$$

Зауважимо, що після другого відскоку вектор швидкості тіла буде напрямлений під кутом $\beta'=+60^\circ$ до перпендикуляру. Значення $v(\tau_2)$ та β' можна використовувати для визначення відстані до місця третього відскоку.

Задачі для самостійної роботи

Рівень А

1.100 Два тіла кинуті з однієї точки з однаковою швидкістю під кутами $\alpha_1=30^\circ$ і $\alpha_2=60^\circ$ до горизонту. Визначити: 1) відношення найбільших висот, яких досягають тіла; 2) відношення найбільших дальностей польоту тіл. [3;1]

1.101 М'яч, кинутий горизонтально з висоти $h=2$ м над землею, упав на землю на відстані $L=7$ м по горизонталі. Визначити початкову і кінцеву швидкості м'яча. [≈ 11 м/с ; ≈ 13 м/с]

1.102 Визначити мінімальну швидкість v_0, яку повинен мати мотоцикліст у точці А (**рис.1.102**), для того, щоб приземлитися у точці В. [6 м/с]

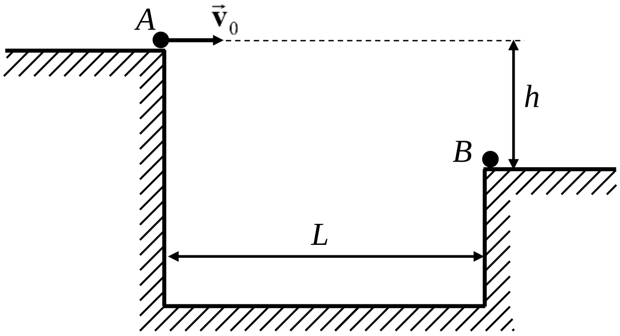


Рис.1.102

1.103 Камінь кинули горизонтально. Через $\tau=3$ с вектор його швидкості був напрямлений під кутом $\alpha=45°$ до горизонту. Визначити початкову швидкість каменя. [≈ 29 м/с]

1.104 Тіло кинули з землі під кутом $\alpha=30°$ до горизонту з початковою швидкістю $v_0=100$ м/с . Через який час тіло буде на висоті $h=50$ м? [1,12 с; 9,1 с]

Рівень Б

1.105 М'яч кинули з землі під кутом $\alpha=30°$ до горизонту з початковою швидкістю $v_0=10$ м/с . Визначити горизонтальну і вертикальну складові початкової швидкості, висоту підняття, час і дальність польоту м'яча. [$\approx 8,7$ м/с , 5 м/с , $\approx 1,3$ м , 1 с , $\approx 8,7$ м]

1.106 Тіло кинули з поверхні землі під кутом $\alpha=60°$ до горизонту з початковою швидкістю $v_0=20$ м/с . Прийняти $g=10$ м/с^2. Визначити:

А) рівняння траєкторії тіла, вважаючи, що вісь OY напрямлена вертикально вгору, а вісь OX - горизонтально.
Б) час руху тіла до вищої точки траєкторії;
В) найбільшу висоту підйому тіла;
Г) час руху до падіння на землю;
Д) відстань по горизонталі від місця кидання до місця падіння;
Е) кут між вектором швидкості та горизонтом через $\tau=1$ с після кидання.

[а) $y=1,732x-0,05x^2$; б) 1,73 с ; в) 1 м ; г) 3,46 с ; д) 34,6 м ; е) 36°]

1.107 Двоє хлопчиків кидають м'яч один одному. На яку найбільшу висоту над точкою кидання підіймається м'яч, якщо він летить $\tau=2$ с? [5 м]

1.108 Тіло кинули з висоти $h=30$ м з початковою швидкістю $v_0=10$ м/с , напрямленою вниз під кутом $\alpha=30°$ до горизонту. Визначити: 1) час польоту; 2) відстань по горизонталі від місця кидання до місця падіння; 3) напрямок та модуль швидкості тіла на момент падіння на землю. Вважати $g=10$ м/с^2. [2 с ; 17,3 м ; $-71°$; $\approx 26,5$ м/с]

1.109 Камінь, який кинули горизонтально зі швидкістю $v_0=15$ м/с , впав на землю під кутом $\alpha=60°$ до горизонту. З якої висоти кинуто камінь? На якій відстані по горизонталі камінь впав на землю? [34,4 м ; 40 м]

1.110 Снаряд, який випущено під кутом $\alpha=30°$ до горизонту, двічі побував на висоті h : через $t_1=3$ с і $t_2=5$ с після початку руху. Визначити його початкову швидкість v_0 та максимальну висоту підйому h . [78,4 м/с ; 73,5 м]

1.111 На схилі гори з кутом нахилу до горизонту $\alpha = 30°$ стоїть хлопчик. Він кидає камінь під кутом $\beta = 60°$ до горизонту в бік підйому з початковою швидкістю $v_0 = 10$ м/с . На якій відстані від хлопчика камінь впаде на гору? [$6,8$ м]

1.112 Тіло кинуто з поверхні землі з початковою швидкістю $v_0 = 10$ м/с . Через $\tau = 0,5$ с його швидкість становила $v = 7$ м/с . На яку максимальну висоту над точкою кидання піднімається тіло? На якій відстані по горизонталі тіло впаде на землю? [3 м ; 10 м]

Рівень В

1.113 Частинка рухається у площині XOY зі сталим прискоренням $a = 10$ м/с^2, напрямок якого протилежний напрямку осі OY. Рівняння траєкторії частинки має вигляд: $y = 1{,}732x - 2x^2$. Визначити швидкість частинки в точці $x = 0$, $y = 0$. [$2,24$ м/с]

1.114 З якою мінімальною швидкістю слід кинути камінь, щоб він перелетів через будівлю, переріз якої подано на **рис.1.114**. Під яким кутом та з якої відстані необхідно кидати камінь? [$\sqrt{g\left(\frac{l^2}{2(H-h}+2H\right)}$; $\mathrm{arctg}\left(\frac{\sqrt{4H(H-h)}}{l}\right)$; $l\sqrt{H/(H-h)}$].

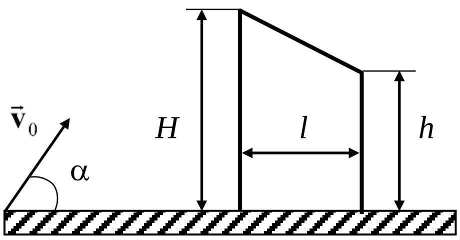


Рис.1.114

1.115 Тіло кинуто під кутом φ до горизонту з початковою швидкістю v_0. Під час його польоту дме попутний горизонтальний вітер, який надає тілу сталого прискорення a. На якій відстані від точки кидання тіло впаде на землю? [$L = (2v_0^2/g)\cdot(\mathrm{ctg}\varphi + a/g)\cdot(\sin\varphi)^2$]

1.116 Зі шланга, що лежить на землі, б'є струмінь води під кутом $\alpha = 45°$ до горизонту. Швидкість вильоту води $v_0 = 10$ м/с , площа перетину шланга $S = 5$ см^2. Яка маса води знаходиться в повітрі? [7 кг]

1.117 У напівсферичній лунці стрибає кулька (**рис.1.117**), що пружно відбивається від стінок у двох точках, які розташовані на одній горизонталі. Проміжок часу між ударами при русі праворуч завжди T_1, а ліворуч - завжди T_2, причому $T_1 \neq T_2$. Визначити радіус лунки. [$gT_1T_2/2\sqrt{2}$]

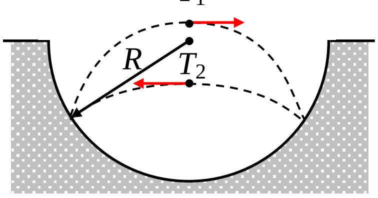


Рис.1.117

Рекомендації до теми "Рух двох тіл "

Порядок аналізу та розв'язування задач, в яких фігурують два рухомих тіла, в принципі, лишається таким самим, як і в задачах з одним рухомим тілом (див. **рекомендації до теми** "Прямолінійний рівнозмінний рух одного тіла"). Проте існують і певні особливості.

1)	Розглядати рух обох тіл і складати відповідні рівняння треба обов'язково відносно однієї й тієї ж системи відліку.

2)	Розв'язування може спроститися, якщо перейти в рухому систему відліку, зв'язану з одним з тіл, оскільки в такій системі відліку рухається лише одне тіло.

3)	При аналізі умови задачі та її розв'язуванні буває корисно використати ті чи інші графіки руху.

Задача 1.22

Рух двох мотоциклістів вздовж прямої ділянки шосе задано рівняннями: $x_1 = 8t$, $x_2 = 14 + 0{,}5t^2$ (всі числа задані в СІ).

Проаналізувати
характер руху мотоциклістів.

Визначити:
А) момент часу t та місце l їх зустрічі;
Б) момент часу τ, на який пройдені мотоциклістами шляхи будуть однаковими.

Дано:

$x_1 = 8t$

$x_2 = 14 + 0{,}5t^2$

Визначити: t, l, τ

Розв'язання.

Характер руху мотоциклістів можна проаналізувати двома методами:

1) записати рівняння рівнозмінного руху і співставити з ним рівняння руху кожного з мотоциклістів;

2) знайти першу та другу похідні координат мотоциклістів[1] по часу і зробити відповідні висновки.

Перша з цих можливостей простіша, але такий метод дозволяє аналізувати тільки рівнозмінний рух. Другий метод дещо складніший математично, однак більш універсальний, придатний для аналізу складних рухів. Ми розглянемо обидва способи.

1) Загальне рівняння координати *x* при рівнозмінному русі тіла **(1.16)** має вигляд:

$$x = x_0 + \upsilon_{0x}t + \frac{a_x t^2}{2}. \qquad (2)$$

Співставляючи йому рівняння руху першого мотоцикліста $x_1 = 8t$, робимо висновок: початкова координата $x_0 = 0$, прискорення $a = 0$. Отже рух першого мотоцикліста – це рівномірний рух з точки, яка обрана за початок координат, зі швидкістю $\upsilon_1 = 8$ м/с .

---

[1] Так будуть знайдені залежності від часу швидкості та прискорення мотоциклістів, див. формули **(1.5)**, **(1.7)**.

Порівняння рівняння руху другого мотоцикліста $x_2 = 14 + 0{,}5t^2$ з рівнянням **(1)** показує, що початкова координата $x_0 = 14$ м, початкова швидкість $v_0 = 0$, прискорення $a = 1$ м/с^2. Таким чином, другий мотоцикліст рухається зі сталим прискоренням без початкової швидкості з точки, яка віддалена від початку координат на $+14$ м (тобто у додатному напрямку осі OX).

2) Тепер застосуємо метод математичного аналізу. Для першого мотоцикліста маємо:

$$v_{1x} = x_1'(t) = 8 \text{ м/с}; \qquad a_{1x} = v'_{1x}(t) = x_1''(t) = 0.$$

Швидкість мотоцикліста не залежить від часу, тому це рівномірний рух. Оскільки при $t = 0$: $x_1(0) = 0$, рух починається з точки $x = 0$.

Для другого мотоцикліста маємо:

$$v_{2x} = x_2'(t) = t; \qquad a_{2x} = v'_{2x}(t) = x_2''(t) = 1 \text{ м/с}^2.$$

При $t = 0$: $x_2(0) = 14$ м; $v_2(0) = 0.$

З отриманих виразів робимо висновок, що другий мотоцикліст рухається у додатньому напрямку зі сталим прискоренням $a = 1$ м/с^2 без початкової швидкості з точки, яка віддалена від початку координат у додатному напрямку на відстань $x_{02} = 14$ м.

А) Знайдемо момент та місце зустрічі мотоциклістів. В цей момент їх координати однакові:

$$x_1(t) = x_2(t),$$

тобто

$$8t = 14 + 0{,}5t^2 \qquad \Rightarrow \qquad t^2 - 16t + 28 = 0.$$

Розв'язавши квадратне рівняння, дістанемо $t_1 = 2$ с, $t_2 = 14$ с. Обидва корені мають фізичний зміст, а це означає, що мотоциклісти зустрічалися двічі: перший раз в момент $t_1 = 2$ с на відстані $l_1 = 8t_1 = 16$ м від початку координат, а другий – через $t_2 = 14$ с після початку руху на відстані $l_2 = 8t_2 = 112$ м.

$$t_1 = 2 \text{ с}, \quad l_1 = 16 \text{ м};$$
$$t_2 = 14 \text{ с}, \quad l_2 = 112 \text{ м}.$$

Ці результати просто зрозуміти з графіків залежностей від часу координат мотоциклістів (**рис.22**): спочатку перший мотоцикліст наздоганяє і переганяє другого, а потім другий мотоцикліст, розігнавшись, наздоганяє і переганяє першого.

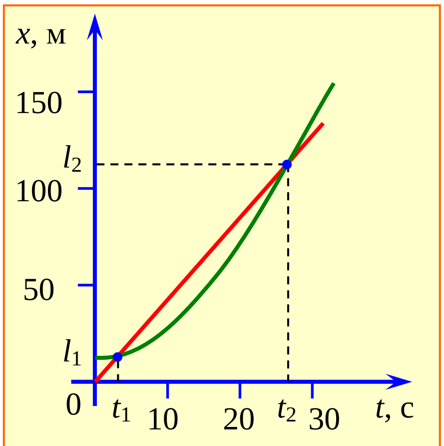


Рис. 22

Б) Напрям руху мотоциклістів не змінювався, тому для кожного пройдений шлях дорівнює зміні координати за час руху. Для першого мотоцикліста $S_1 = 8t$, для другого $S_2 = t^2$. Прирівнюючи шляхи, дістанемо:

$$8\tau = 0{,}5\tau^2 \quad \Rightarrow \quad \tau = 16\ \text{с}$$

(розв'язок $\tau = 0$ є тривіальним).

Задача 1.23

Два тіла, що знаходяться на певній висоті над землею, кинули горизонтально у протилежних напрямках зі швидкостями $v_{01} = 4$ м/с і $v_{02} = 9$ м/с.

Визначити, через який час t вектори швидкостей тіл будуть взаємно перпендикулярні. Прийняти $g = 10$ м/с^2.

Дано:
$v_{01} = 4$ м/с
$v_{02} = 9$ м/с
$g = 10$ м/с^2

Визначити: t

Розв'язання:

I спосіб. За відсутності опору повітря швидкості тіл

$$\vec{\mathbf{v}}_1(t) = \vec{\mathbf{v}}_{01} + \vec{\mathbf{g}}t, \qquad \vec{\mathbf{v}}_2(t) = \vec{\mathbf{v}}_{02} + \vec{\mathbf{g}}t.$$

визначаються рівнянням **(1.14)**:

Згадаємо, що скалярний добуток двох векторів $\vec{\mathbf{b}}$ і $\vec{\mathbf{c}}$ дорівнює $\vec{\mathbf{b}} \cdot \vec{\mathbf{c}} = b \cdot c \cdot \cos\alpha$, де α – кут між векторами. Якщо вектори взаємно перпендикулярні, то $\alpha = \pi/2$ і скалярний добуток векторів дорівнює нулю, отже:

$$\vec{\mathbf{v}}_1(t) \cdot \vec{\mathbf{v}}_2(t) = (\vec{\mathbf{v}}_{01} + \vec{\mathbf{g}}t) \cdot (\vec{\mathbf{v}}_{02} + \vec{\mathbf{g}}t) =$$
$$= \vec{\mathbf{v}}_{01} \cdot \vec{\mathbf{v}}_{02} + \vec{\mathbf{v}}_{01} \cdot \vec{\mathbf{g}}t + \vec{\mathbf{v}}_{02} \cdot \vec{\mathbf{g}}t + \vec{\mathbf{g}}t \cdot \vec{\mathbf{g}}t = 0.$$

За умовою задачі вектори $\vec{\mathbf{v}}_{01}$ та $\vec{\mathbf{v}}_{02}$ напрямлені протилежно, тобто кут між ними дорівнює π. Це означає, що

$$\vec{\mathbf{v}}_{01} \cdot \vec{\mathbf{v}}_{02} = -v_{01} \cdot v_{02}.$$

Кут між векторами $\vec{\mathbf{v}}_{01}$ і $\vec{\mathbf{g}}$, так само як між $\vec{\mathbf{v}}_{02}$ і $\vec{\mathbf{g}}$, дорівнює $\pi/2$, тому

$$\vec{\mathbf{v}}_{01} \cdot \vec{\mathbf{g}}t = \vec{\mathbf{v}}_{02} \cdot \vec{\mathbf{g}}t = 0.$$

Крім того, скалярний добуток вектора самого на себе дорівнює квадрату його модуля: $\vec{\mathbf{g}} \cdot \vec{\mathbf{g}} = g^2$. Таким чином,

$$\vec{\mathbf{v}}_1(t) \cdot \vec{\mathbf{v}}_2(t) = -v_{01} \cdot v_{02} + g^2 t^2 = 0,$$

звідки знаходимо:

$$t = \frac{\sqrt{v_{01} v_{02}}}{g} = \frac{\sqrt{4 \cdot 9}}{10} = 0{,}6\ \text{с}.$$

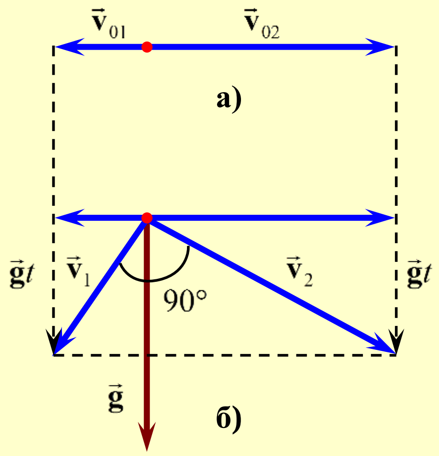


Рис. 23

II спосіб. Оскільки вектори $\vec{v}_{01}$, $\vec{v}_{02}$ перпендикулярні до вектора $\vec{g}$, то для квадратів модулів можна записати (див. **рис.23**):

$$v_1^2 = v_{01}^2 + (gt)^2, \qquad v_2^2 = v_{02}^2 + (gt)^2. \qquad (1)$$

З іншого боку, оскільки за умовою вектори $\vec{v}_1$ і $\vec{v}_2$ взаємно перпендикулярні (**рис.23б**), звідки

$$v_1^2 + v_2^2 = (v_{01} + v_{02})^2.$$

Підставивши сюди вирази **(1)**, дістанемо:

$$v_{01}^2 + 2(gt)^2 + v_{02}^2 = v_{01}^2 + 2v_{01}v_{02} + v_{02}^2 \quad \Rightarrow$$

$$gt = \sqrt{v_{01}v_{02}} \quad \Rightarrow \quad t = \frac{\sqrt{v_{01}v_{02}}}{g} = \frac{\sqrt{4 \cdot 9}}{10} = 0{,}6\ \text{с}.$$

Задача 1.24

З однієї точки одночасно з однаковою початковою швидкістю $v = 20$ м/с кидають два тіла: одне вертикально вгору, а друге - вгору під кутом $\alpha = 50°$ до горизонту.
Визначити відстань L між тілами через час $t = 0{,}5$ с після початку руху.

Дано:
$v = 20$ м/с
$\alpha = 50°$
$t = 0{,}5$ с

Визначити: L

Розв'язання.

I спосіб. Напрямимо координатні осі горизонтально (ОХ) та вертикально (ОУ), початок координат розмістимо у точці кидання (**рис.24**). Відтак, початкові координати обох тіл дорівнюють нулю. Проекції початкових швидкостей: $v_{1x} = 0$, $v_{1y} = v$, $v_{2x} = v \cdot \cos\alpha$, $v_{2y} = v \cdot \sin\alpha$. Координати тіл на момент часу t визначаються рівняннями **(1.16)**:

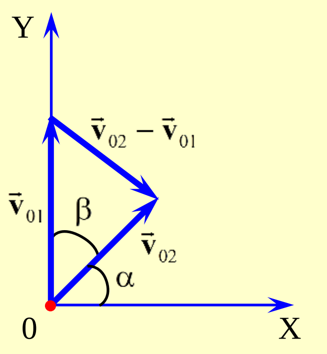


Рис. 24

$$x_1 = 0, \qquad x_2 = vt \cdot \cos\alpha;$$
$$y_1 = vt - \frac{gt^2}{2}, \qquad y_2 = v \cdot \sin\alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}. \qquad (1)$$

З геометрії відомо, що відстань між двома точками через їх координати виражається формулою:

$$L = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Підставимо сюди вирази **(1)**:

$$L = \sqrt{(v \cdot \cos\alpha \cdot t)^2 + \left(v \cdot \sin\alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2} - vt + \frac{gt^2}{2}\right)^2} = vt\sqrt{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha - 2\sin\alpha + 1}.$$

Звідки знаходимо

$$L = vt\sqrt{2(1 - \sin\alpha)}. \quad (2)$$

Виконаємо обчислення:

$$L = 20 \cdot 0{,}5 \cdot \sqrt{2(1 - \sin 50°)} = 6{,}84 \text{ м}.$$

II спосіб. Зв'яжемо систему відліку з першим тілом. В такому разі його швидкість $\vec{\mathbf{v}}_1$ є швидкістю рухомої системи відліку відносно нерухомої. Згідно з формулою додавання швидкостей **(1.10)** друге тіло відносно цієї рухомої системи відліку має швидкість

$$\vec{\mathbf{u}} = \vec{\mathbf{v}}_2 - \vec{\mathbf{v}}_1 = (\vec{\mathbf{v}}_{02} + gt) - (\vec{\mathbf{v}}_{01} + gt) = \vec{\mathbf{v}}_{02} - \vec{\mathbf{v}}_{01} = \text{const}.$$

Отже, рух другого тіла відносно першого є рівномірним і прямолінійним. Тому відстань між тілами

$$L = ut = \left|\vec{\mathbf{v}}_{02} - \vec{\mathbf{v}}_{01}\right| \cdot t. \quad (3)$$

Модуль різниці векторів швидкості легко знайти за теоремою косинусів (див. **рис.24**). Врахувавши, що $v_{01} = v_{02} = v$,

$$u = \sqrt{v^2 + v^2 + 2vv\cos\beta} = v\sqrt{2(1 - \sin\alpha)}.$$

Отже,

$$L = vt\sqrt{2(1 - \sin\alpha)},$$

що, природно, співпадає з попереднім результатом.

Задачі для самостійної роботи

Рівень А

1.118 З пунктів А і В, відстань між якими $L = 100$ км, назустріч один одному одночасно почали рухатись два автомобілі: перший – зі швидкістю $v_1 = 50$ км/год, другий - $v_2 = 30$ км/год. Через який час t і на якій відстані S від пункту *А* вони зустрінуться? Через який час і на якій відстані зустрінуться автомобілі, якщо вони рухатимуться в одному напрямку? [1 год 15 хв, 62,5 км; 5 год, 250 км]

1.119 З пунктів А і В, відстань між якими $L = 120$ км, назустріч один одному виїхали два автобуси: перший – о 9 год, а другий – о 9 год 30 хв. Перший рухався зі швидкістю $v_1 = 40$ км/год, а другий – $v_2 = 60$ км/год. Визначити алгебраїчно і графічно, де і коли зустрінуться автобуси. [посередині між А та В о 10 год. 30 хв.]

1.120 О 8-мій ранку над пунктом А пролетів літак зі швидкістю $v_1 = 300$ км/год. Через $t = 1$ год в тому ж напрямку пролетів літак зі швидкістю $v_2 = 400$ км/год. Визначити алгебраїчно і графічно, о котрій годині кожний з літаків дістанеться пункту В, якщо відстань АВ $= 1200$ км. [обидва о 12 год]

1.121 Дві дороги перетинаються під кутом $\alpha = 45°$. У напрямку до перехрестя рухаються два автомобілі зі швидкостями $v_1 = 50$ км/год і $v_2 = 80$ км/год. З якою швидкістю та під яким кутом рухається перший автомобіль відносно другого? [$120{,}6$ км/год,

$163°$; 57 км/год, $141,6°$]

1.122 Водій легкового автомобіля помітив, що краплі дощу не залишають слідів на задньому склі при швидкості більшій $v = 30$ км/год. Найти швидкість краплі, якщо заднє скло нахилене вперед під кутом $\alpha = 60°$ до горизонту. [$14,4$ м/с]

Рівень Б

1.123 Два тіла вільно падають з однієї точки. Друге тіло починає рух на $\tau = 2$ с пізніше першого. Через який час після початку руху першого тіла відстань між тілами буде в $n = 3$ рази більшою, ніж вона була на момент початку руху другого тіла? [6 с]

1.124 На **рис. 1.124** наведено графіки швидкості двох тіл. Відомі моменти часу $t_1 = 5$ с і $t_2 = 9$ с. В який момент часу тіла зустрінуться? [15 с]

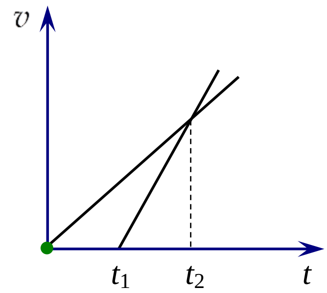


Рис. 1.124

1.125 З однієї точки з інтервалом по часу τ кинуто два тіла під одним кутом до горизонту з однаковими початковими швидкостями. Визначити швидкість першого тіла відносно другого. [$v_x = 0$; $v_y = g\tau$]

1.126 Ракета стартує вгору з прискоренням $a = 6{,}2$ м/с^2. Під яким кутом до горизонту необхідно зробити постріл з гармати, яка знаходиться на відстані $l = 5$ км від місця старту, щоб влучити в ракету снарядом, початкова швидкість якого $v_0 = 400$ м/с? Постріл відбувається в момент старту ракети; опором повітря знехтувати. [$15°$]

1.127 Недосвідчений "мисливець" кидає камінь, цілячись точно в качку, що летить горизонтально по прямій зі швидкістю u. Швидкість каменя в момент кидання дорівнювала v_0 і була напрямлена під кутом φ до горизонту. На якій висоті летіла качка, якщо камінь все ж таки влучив у неї? [$(2u/g)(v_0\cos\varphi - u)\cdot \mathrm{tg}^2\varphi$]

Рекомендації до теми "Рівномірний рух по колу"

Розв'язування задач кінематики колового руху матеріальної точки принципово не відрізняється від розв'язування інших задач кінематики точки. Специфіка таких задач полягає лише в тому, що в них, крім лінійних, можуть фігурувати та підлягати визначенню кутові характеристики обертального руху.

Задача 1.25

Автомобіль рухається по колу радіуса $R = 250$ м зі сталою швидкістю $v = 10$ м/с. Помістивши початок декартової системи координат у центр кола

Визначити:

А) залежність модуля переміщення автомобіля $|\Delta\vec{\mathbf{r}}|$ від часу та побудувати її графік;

Б) залежності від часу: його координат $x(t)$, $y(t)$; проекцій вектора швидкості $v_x(t)$, $v_y(t)$; проекцій вектора прискорення $a_x(t)$, $a_y(t)$ та модуль a.

Дано:

$R = 250$ м

$v = 10$ м/с

Визначити: $|\Delta\vec{\mathbf{r}}| = \mathrm{f}(t)$, $x(t)$, $y(t)$, $v_x(t)$, $v_y(t)$, $a_x(t)$, $a_y(t)$, a

Розв'язання:

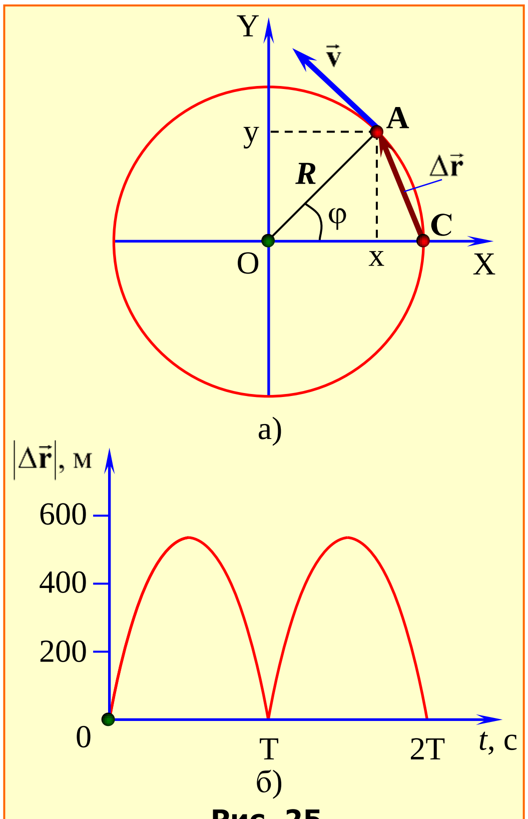


Рис. 25

На **рис.25а** показані: система координат XOY, траєкторія автомобіля (коло радіуса R), переміщення $\Delta\vec{\mathbf{r}}$, координати x і y, вектор швидкості $\vec{\mathbf{v}}$, кут повороту φ та шлях S (довжина дуги CA) автомобіля на певний момент часу. Початкове положення автомобіля – точка C.

А) Модуль вектора переміщення знайдемо за теоремою косинусів з трикутника AOC:

$$|\Delta\vec{\mathbf{r}}| = \sqrt{R^2 + R^2 - 2R^2\cos\varphi} = 2R\cdot\left|\sin\frac{\varphi}{2}\right|.$$

З геометрії відомо, що центральний кут $\varphi = S/R$, де S - довжина дуги кола між точками A і C[1]. Оскільки рух автомобіля рівномірний, то $S = vt$, і

$$\varphi = \frac{vt}{R}. \qquad (1)$$

Тоді

$$|\Delta\vec{\mathbf{r}}| = 2R\left|\sin\left(\frac{vt}{2R}\right)\right| = 500|\sin(0{,}02t)|.$$

Графік модуля переміщення за час двох повних обертів руху T показаний на **рис.25 б**.

Б) З **рис. 25 а** видно, що координати автомобіля

$$x = R\cos\varphi, \qquad y = R\sin\varphi.$$

Підставивши сюда вираз **(1)**, одержуємо:

$$x = R\cos\left(\frac{vt}{R}\right) = 250\cos(0{,}04t), \qquad y = R\sin\left(\frac{vt}{R}\right) = 250\sin(0{,}04t).$$

Проекції вектора швидкості на осі координат є похідними координат автомобіля по часу:

$$v_x = x'(t) = -v\sin\left(\frac{vt}{R}\right) = -10\sin(0{,}04t);$$

$$v_y = y'(t) = -v\cos\left(\frac{vt}{R}\right) = 10\cos(0{,}04t).$$

Проекції вектора прискорення визначаються через похідні проекцій швидкості :

$$a_x = v'_x = x''(t) = -v\sin\left(\frac{vt}{R}\right) = -0{,}4\cos(0{,}04t);$$

$$a_y = v'_y = y''(t) = v\cos\left(\frac{vt}{R}\right) = -0{,}4\sin(0{,}04t).$$

Модуль прискорення

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \frac{v^2}{R} = 0{,}4\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$$

Цей результат очевидний – адже при рівномірному русі по колу прискорення тіла є доцентровим і визначається саме такою формулою (див. формули **(1.28)**).

Задача 1.26

Диск рівномірно обертається навколо горизонтальної осі O'. Сама вісь рухається горизонтально зі швидкістю $v_0 = 2$ м/с, як це показано на рис.26.

Визначити швидкість точки 2 v_2, якщо швидкість точки 1 $v_1 = 1$ м/с.

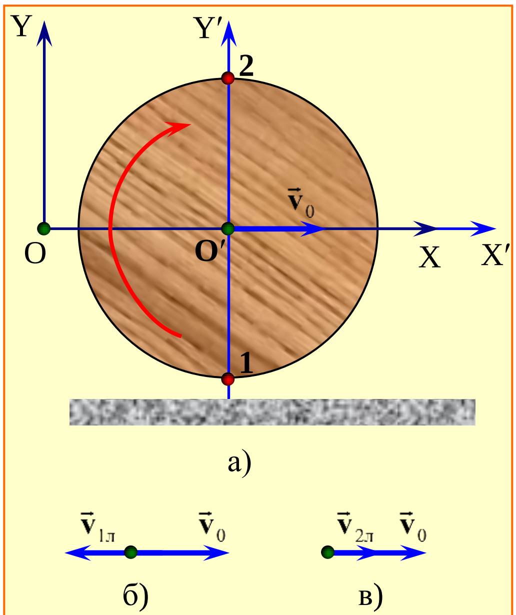


Рис. 26.

Дано:	**Розв'язання:**
$v_0 = 2$ м/с $v_1 = 1$ м/с	Виберемо дві системи відліку: рухому X′O′Y′, зв'язану з віссю диска, та нерухому XOY, відносно якої рухається вісь
Визначити: v_2	

[1] Кут у цій формулі, звичайно, вимірюється в радіанах.

(**рис.26 а**). Тоді, згідно з формулою додавання швидкостей **(1.9)**, вектор швидкості $\vec{\mathbf{v}}$ будь-якої точки диска

$$\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{v}}_л + \vec{\mathbf{v}}_0\,, \qquad (1)$$

де $\vec{\mathbf{v}}_л$ – вектор лінійної швидкості обертання даної точки навколо осі O′. Оскільки за умовою $v_1 < v_0$, то в точці 1 вектори $\vec{\mathbf{v}}_{1л}$ і $\vec{\mathbf{v}}_0$ напрямлені протилежно (**рис.26 б**), отже диск обертається за годинниковою стрілкою. В такому разі для точки 2 вектори $\vec{\mathbf{v}}_{2л}$ і $\vec{\mathbf{v}}_0$ співнапрямлені (**рис.26 в**). З урахуванням напрямків векторів запишемо для кожної точки рівняння **(1)** у проекціях на вісь OX:

$$v_2 = v_л + v_0\,,$$
$$v_{1x} = -v_л + v_0\,.$$

Додавши ці рівняння, отримаємо:

$$v_2 + v_{1x} = 2v_0 \;\;\Rightarrow\;\; v_2 = -v_{1x} + 2v_0\,. \qquad (2)$$

Залежно від швидкості обертання можливі два випадки: $v_{1x} = v_1$ (відносно нерухомої системи відліку точка **1** рухається праворуч) або $v_{1x} = -v_1$ (точка **1** рухається ліворуч). Відповідно, можливі два значення швидкості другої точки:

$$\boxed{v_2 = -v + 2v_0 = 3\,\text{м/с}\,,} \quad \text{або} \quad \boxed{v_2 = -v + 2v_0 = 5\,\text{м/с}\,.}$$

Задача 1.27

Колесо радіуса R котиться горизонтальною площиною без проковзування так, що швидкість його центра дорівнює v_0 (рис.27).

Визначити швидкість v_A та прискорення a точки A на поверхні колеса, якщо відомий кут α між вертикаллю та прямою, проведеною з центра колеса у точку A.

Дано:

R, v_0, α

Визначити: v_A, a

Розв'язання:

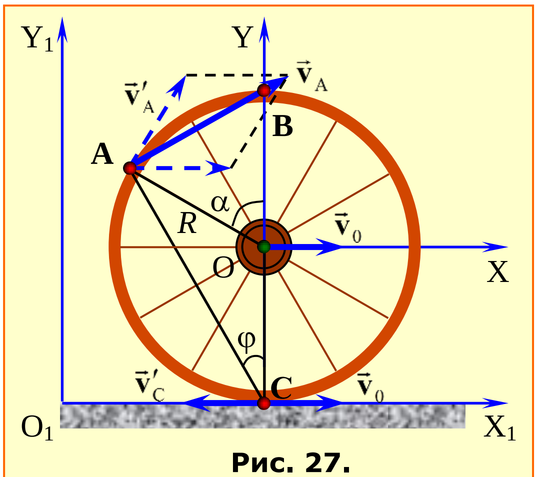


Рис. 27.

I спосіб. Виберемо нерухому систему відліку $X_1O_1Y_1$ так, щоб осі координат лежали у площині колеса. Рухому систему відліку XOY пов'яжемо з віссю колеса (**рис.27**). Швидкість осі колеса $\vec{\mathbf{v}}_0$ є швидкістю рухомої системи відліку відносно нерухомої. Всі точки колеса в рухомій системі відліку (тобто відносно осі) здійснюють колові рухи. Позначимо вектор лінійної швидкості обертання точки A як $\vec{\mathbf{v}}'_A$. Тоді за законом додавання швидкостей **(1.9)** точка A рухається відносно землі зі швидкістю

$$\vec{\mathbf{v}}_A = \vec{\mathbf{v}}_0 + \vec{\mathbf{v}}'_A.$$

З геометричної побудови на **рис.27** неважко зрозуміти, що кут між векторами $\vec{\mathbf{v}}_0$ та $\vec{\mathbf{v}}'_A$ дорівнює куту α між прямими OA та OB. Модуль швидкості точки A визначимо за теоремою косинусів:

$$v_A = \sqrt{(v')^2 + v_0^2 + 2v'v_0\cos\alpha}.$$

Тепер розглянемо точку С дотику колеса з землею. Її швидкість відносно землі також визначається законом додавання швидкостей $\vec{\mathbf{v}}_c = \vec{\mathbf{v}}_0 + \vec{\mathbf{v}}'_c$. Але за відсутності проковзування швидкість точки С дорівнює нулю $\vec{\mathbf{v}}_c = \vec{\mathbf{v}}_0 + \vec{\mathbf{v}}'_c = 0$. Це означає, що вектори $\vec{\mathbf{v}}_0$ та $\vec{\mathbf{v}}'_c$ мають рівні модулі і протилежні напрямки, тобто $v = v_0$. Врахувавши це, знайдемо швидкість точки А:

$$v_A = \sqrt{v_0^2 + v_0^2 + 2v_0v_0\cos\alpha} = v_0\sqrt{2(1+\cos\alpha)} = 2v_0\cos\frac{\alpha}{2}.$$

У рухомій системі відліку (відносно осі) прискорення точок колеса є доцентровими (формула **(1.28)**), і для точки А

$$a' = a_ц = v'^2/R = v_0^2/R.$$

Прискорення точки А в нерухомій системі відліку таке ж саме, оскільки вісь колеса рухається без прискорення.

II спосіб. За відсутності проковзування точка дотику колеса до поверхні (точка С на **рис.27**) у кожну мить нерухома. Це дозволяє використати штучний прийом, який часто спрощує розгляд кочення колеса, або аналогічні рухи. Він полягає у тому, що кочення колеса можна розглядати як послідовність нескінченно малих поворотів навколо осі, що проходить через точку дотику С і напрямлена паралельно до осі колеса. Звичайно, ця вісь весь час переміщується, тому її називають **миттєвою віссю**.

Використаємо миттєву вісь для розв'язування цієї задачі. Усі точки колеса мають однакову кутову швидкість обертання навколо миттєвої осі. Цю кутову швидкість легко визначити врахувавши, що точка О має швидкість v_0. Оскільки лінійна швидкість пов'язана з кутовою швидкістю співвідношенням $v = \omega R$, то для точки О маємо:

$$v_0 = \omega R, \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{v_0}{R}.$$

Таку саму кутову швидкість має і хорда СА. Її довжину, тобто відстань від осі обертання С до точки А знайдемо з прямокутного трикутника АВС: $\mathrm{CA} = 2R\cos\varphi$. Тоді швидкість точки А:

$$v_\mathrm{A} = \omega\cdot CA = 2v_0\cos\varphi.$$

Оскільки $\varphi = \alpha/2$, то остаточно маємо:

$$v_\mathrm{A} = 2v_0\cos\frac{\alpha}{2}.$$

Неважко зрозуміти, що кут САВ на **рис. 27** є прямим, тому вектор швидкості А (при будь-якому її положенні) напрямлений вздовж хорди, що з’єднує точки А і В.

Задача 1.28

Котушка з намотаною на неї ниткою лежить на горизонтальній поверхні стола і може котитись по ній без проковзування. Зовнішній та внутрішній радіуси котушки дорівнюють R та r (**рис.28**) відповідно.

Визначити швидкість u руху осі котушки, якщо нитку тягнути горизонтально зі швидкістю v.

Дано: R, r, v	**Розв’язання:**
Визначити: u	Цю задачу найпростіше розв'язати, розглянувши рух котушки відносно миттєвої осі (див. **задачу 1.27**), що проходить через точку С (**рис.28**).

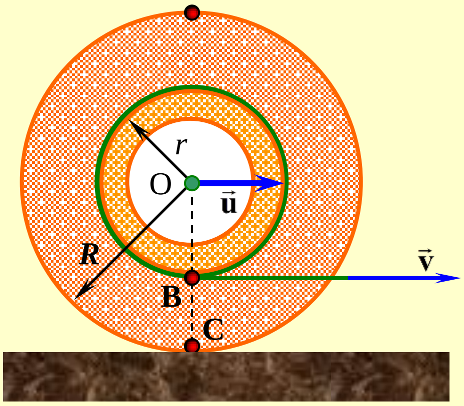


Рис. 28

У дану мить ця точка перебуває у спокої, а точка В рухається з тією ж швидкістю v, що й нитка. Це означає, що пряма СО обертається навколо миттєвої осі з кутовою швидкістю

$$\omega = \frac{v}{R-r}.$$

Центр котушки (точка О), який знаходиться на відстані R від точки С, має швидкість

$$u = \omega R = \frac{vR}{R-r}.$$

Задача 1.29

Колесо радіуса R котиться горизонтальною площиною без проковзування (**рис.29**). З точки А колеса відривається шматочок грязюки.

Визначити мінімальну швидкістю u руху осі колеса, при якій грязюка знов потрапить у точку А при тому ж її положенні відносно осі.

Дано:
R

Визначити: u

Розв'язання:

У системі відліку XOY, яка пов'язана з віссю колеса (**рис.29**), шматочок грязюки після відриву рухається вертикально, оскільки його початкова швидкість і прискорення напрямлені паралельно до осі OY.

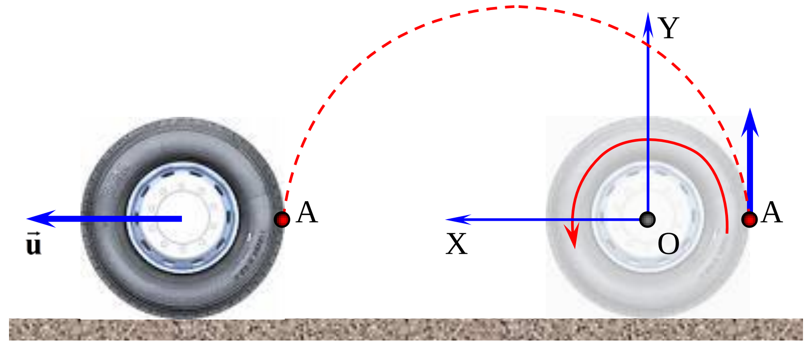


Рис. 29

Очевидно, що за час руху шматочка колесо має здійснити ціле число обертів. При мінімальній швидкості – це один оберт, протягом якого колесо проходить шлях $S = 2\pi R$. Якщо позначити швидкість осі колеса u, то час одного оберту (період обертання), а отже й повний час руху шматочка,

$$T = \frac{2\pi R}{u}. \qquad (1)$$

У рухомій системі відліку в момент відриву шматочка його швидкість напрямлена вертикально і за модулем дорівнює лінійній швидкості обертального руху точок на поверхні колеса, тобто $v_0 = \dfrac{2\pi R}{T}$. Підставивши сюди T з виразу **(1)**, дістанемо $v_0 = u$. Координата y шматочка визначається рівнянням

$$y = v_{0y}t - \frac{gt^2}{2} = t\left(u - \frac{gt}{2}\right).$$

На момент $t = T$, коли шматочок знов опиниться в точці А, його координата $y = 0$, отже

$$u - \frac{gT}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2u}{g}. \qquad (2)$$

Прирівнюючи праві частини формул **(1)** та **(2)**, дістанемо:

$$\boxed{\frac{2\pi R}{u} = \frac{2u}{g} \quad \Rightarrow \quad u = \sqrt{\pi g R}.}$$

Задача 1.30

Через блок радіуса R перекинута нитка з прив'язаними до її кінців вантажами, що встановлені на одному рівні. Якщо вантажі вивільнити, то вони починають рухатись рівноприскорено і через час t відстань між ними стає рівною h.

Визначити кут повороту блока φ за час t та вектор повного прискорення $\vec{\mathbf{a}}_\text{п}$ точки А поверхні блока у цей момент часу. Проковзування нитки по поверхні блока немає.

Дано:
R, t, h

Визначити: $\vec{\mathbf{a}}_\text{п}$, φ

Розв'язання:

Вантажі зміщуються один відносно одного на відстань h, отже кожен з них проходить відносно землі (або осі блока) відстань $h/2$. За відсутності проковзування таку ж відстань проходить по колу й будь-яка точка поверхні блока, а сам блок здійснює $N = \dfrac{(h/2)}{2\pi R}$ обертів і повертається на кут $\varphi = 2\pi N$. Отже,

$$\varphi = \frac{h}{2R}.$$

Для визначення прискорення точки А блока треба взяти до уваги, що в будь-який момент часу її швидкість співпадає зі швидкістю точки нитки, що дотикається до неї, тобто - з швидкістю вантажів. Отже швидкість точки А змінюється з часом, тому крім доцентрового прискорення $a_\text{дц}$ вона має ще й прискорення[1)], що напрямлене вздовж нитки і дорівнює прискоренню вантажів. Таким чином повне прискорення точки А

$$\vec{\mathbf{a}}_\text{п} = \vec{\mathbf{a}}_\text{дц} + \vec{\mathbf{a}}. \qquad (1)$$

Рух вантажів рівноприскорений без початкової швидкості, пройдений шлях $h/2$. Отже, згідно з рівняннями **(1.16)**

$$\frac{h}{2} = \frac{at^2}{2} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{h}{t^2}. \qquad (2)$$

Швидкість вантажів, відтак і лінійна швидкість точки А, у кінцевий момент часу

$$v = at \quad \Rightarrow \quad v = \frac{h}{t}.$$

при цьому доцентрове прискорення

[1)] Його називають дотичним або тангенціальним прискоренням.

$$a_{\text{дц}} = \frac{v^2}{R} \Rightarrow a_{\text{дц}} = \frac{h^2}{Rt^2}. \qquad (3)$$

Вектори $\vec{\mathbf{a}}_{\text{дц}}$ та $\vec{\mathbf{a}}$ взаємно перпендикулярні, тому модуль повного прискорення

$$a_{\text{п}} = \sqrt{a^2 + a_{\text{дц}}^2}.$$

Підставляючи вирази **(2)** та **(3)**, дістаємо

$$a_{\text{п}} = \frac{h}{t^2}\sqrt{1+\left(\frac{h}{R}\right)^2}.$$

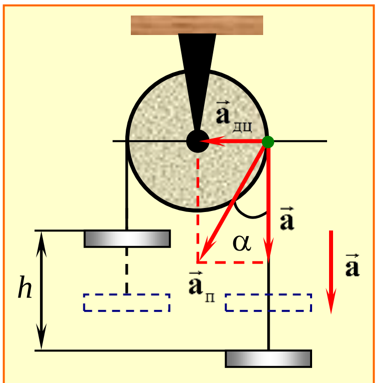


Рис. 30

Напрям вектора повного прискорення точки А визначимо кутом α, який він складає з вертикаллю. З рис.30 видно, що

$$\text{tg}\alpha = \frac{a_{\text{дц}}}{a} = \frac{(h^2/Rt^2)}{(h/t^2)} = \frac{h}{R} \Rightarrow \alpha = \text{arctg}\left(\frac{h}{R}\right).$$

Задачі для самостійної роботи

Рівень А

1.128 Лінійна швидкість точок на поверхні диска, що обертається навколо осі, $v_1 = 3$ м/с, а точок, які знаходяться на $l = 10$ см ближче до осі – $v_2 = 2$ м/с. Визначити частоту обертання диска. [1,6 об/с]

1.129 Визначити швидкість тіла, що рухається рівномірно по колу радіуса $R = 3$ м, якщо доцентрове прискорення $a_{\text{д}} = 12$ см/с^2. [60 см/с]

1.130 Крила вітряка, що мають довжину $l = 2$ м, роблять $n = 40$ об/хв. Визначити доцентрове прискорення кінцевих точок крил. При якій частоті обертання прискорення буде у $k = 2$ рази більшим? [36 м/с^2; 56,6 об/хв]

1.131 Визначити кутові швидкості валів, які мають періоди обертання $T_1 = 10$ с, $T_2 = 0{,}05$ с, $T_3 = 10^{-3}$ с. [0,63 рад/с; 130 рад/с; $6{,}28 \cdot 10^3$ рад/с]

1.132 Визначити кутові швидкості валів, частоти обертання яких $n_1 = 24$ об/хв, $n_2 = 60$ об/хв і $n_3 = 1800$ об/хв. [2,5 рад/с; 2π рад/с; 60π рад/с]

1.133 Визначити частоту та кутову швидкість обертання колеса, якщо за $t = 2$ хв воно зробило $N = 50$ обертів. [0,42 с$^{-1}$; 2,62 рад/с]

1.134 Яку лінійну швидкість мають точки екватора Землі внаслідок добового обертання. Радіус Землі $R = 6380$ км? [464 м/с]

1.135 У скільки разів кутова швидкість хвилинної стрілки годинника більша, ніж кутова швидкості годинної стрілки? [у 12 разів]

1.136 Кулька, що висить на нитці довжиною $l = 1{,}25$ м, рухається по колу в горизонтальній площині з частотою $n = 38{,}2$ об/хв. Кут відхилення нитки від вертикалі $\alpha = 30°$. Визначити швидкість і прискорення кульки. [2,5 м/с; 10 м/с^2]

1.137 З якою швидкістю рухається штучний супутник Землі по коловій орбіті радіуса $R = 6400$ км рівного радіусу Землі? Прискорення вільного падіння $g = 10$ м/с^2. [8 км/с]

Рівень Б

1.138 Хвилинна стрілка годинника у $k = 1{,}5$ рази довша за годинну. Визначити відношення швидкостей та прискорень кінців стрілок. [18; 216]

1.139 Стержень завдовжки $l = 50$ см обертається навколо перпендикулярної до нього осі з частотою 30 об/хв. Один з кінців стержня має лінійну швидкість $v = 57$ см/с. Визначити лінійну швидкість другого кінця стержня. [1 м/с; 2,14 м/с]

1.140 Колесо котиться горизонтальною площиною без ковзання так, що швидкість руху його центра $v_0 = 5$ м/с. У деякий момент часу положення колеса подано на **рис.1.140**. Визначити: 1) швидкості точок A, B, C і D відносно землі; 2) кути з горизонтом, які утворюють ці вектори. [10 м/с, 7 м/с, 0,7 м/с; 0, –45°, 0, +45°]

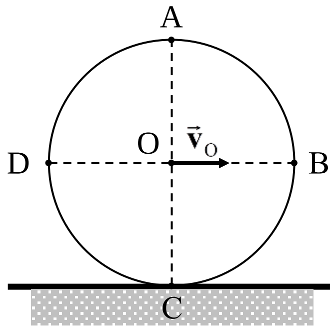


Рис.1.140

1.141 Диск радіуса R котиться без ковзання по поверхні нерухомого диска радіуса $2R$ (**рис.1.141**) і робить один повний оберт навколо нього. Скільки обертів навколо власної осі здійснить при цьому менший диск? [3]

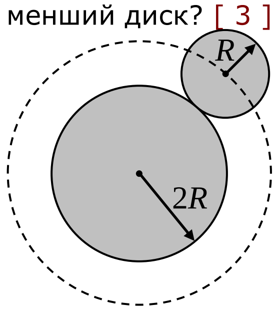


Рис.1.141

1.142 Рівняння руху тіла відносно координатних осей OX і OY мають вигляд: $x = R\sin(\omega t)$, $y = R\cos(\omega t)$. Визначити: **А)** рівняння траєкторії тіла; **Б)** швидкість і прискорення (модуль та напрямок) в моменти часу, коли $x = 0$. **А)** [$x^2 + y^2 = R$] ; **Б)** [$v_x = \omega R$; $v_y = 0$; $a_x = 0$; $a_y = \omega^2 R$]

1.143 На поверхні Землі стоїть сферичний резервуар радіуса R. З якою найменшою швидкістю необхідно кинути камінь з поверхні Землі для того, щоб він перелетів резервуар? ***Вказівка.*** Малу ділянку параболи можна вважати дугою кола. [$\sqrt{5gR}$]

Розділ 2. **Динаміка**

Динаміка - це розділ механіки, в якому рух тіл вивчається з урахуванням причин, що зумовлюють його характер. У цьому посібнику розглядається тільки класична динаміка матеріальної точки, тобто динаміка рухів, що є повільними у порівнянні зі швидкістю світла у вакуумі $c = 3 \cdot 10^8$ м/с.

Характер руху тіла визначається не лише системою відліку, а й властивостями самого тіла та його взаємодією з іншими тілами. Тому в динаміці існують свої основні поняття і величини, а також основні закони.

- **Теоретичні відомості**
- **Приклади розв'язування задач**
- **Задачі для самостійної роботи**

Розділ 2. **Динаміка**

Теоретичні відомості

- **основні поняття динаміки**
- **закони Ньютона**
- **сили в механіці**
- **рівномірний рух по колу**

Динаміка

Теоретичні відомості

Основні поняття динаміки

Основними величинами динаміки матеріальної точки є: **маса**, **імпульс**, **сила**.

Маса m – міра інертності тіла[1]. Маса є скалярною адитивною[2] величиною.

---

[1] **Інертністю** називається універсальна властивість всіх тіл, завдяки якій неможлива миттєва зміна швидкості. Щоб змінити швидкість тіла навіть на дуже малу величину, завжди потрібен певний проміжок часу.

[2] **Адитивними** називають такі величини, значення яких для всього тіла або системи дорівнює сумі значень для окремих частин тіла, або системи. Не всі величини є адитивними, наприклад, температура тіла не є адитивною величиною.

Одиницею маси є **кілограм** (кг). **1 кг** - це маса еталонного тіла.

Імпульсом $\mathbf{p}$ називається добуток маси тіла на його швидкість:

$$\vec{\mathbf{p}} = m\vec{\mathbf{v}}. \quad (2.1)$$

Імпульс вимірюють у кг·м/с. Спеціальної назви ця одиниця не має.

Сила $\mathbf{F}$ є кількісною мірою дії на дане тіло з боку іншого тіла або тіл[3]. Сила – векторна величина: вона характеризується числовим значенням (модулем) та напрямом.

Одиницю сили називають **ньютон** (**Н**). **1 Н = 1 кг·м/с²** - це сила, що тілу масою 1 кг надає прискорення 1 м/с².

Якщо сила $\mathbf{F}$ зумовлена дією на дане тіло декількох тіл[4], то

$$\vec{\mathbf{F}} = \sum_{i} \vec{\mathbf{F}}_i, \quad (2.2)$$

де $\mathbf{F}_i$ – сили, що діють з боку кожного з тіл зокрема. Ці сили називають **складовими**, а силу $\mathbf{F}$ – **рівнодійною**.

Якщо рівнодійна декількох сил дорівнює нулю

$$\sum_{i} \vec{\mathbf{F}}_i = 0,$$

то такі сили називають **скомпенсованими**. Формула **(2.2)** выражає **принцип суперпозиції сил** (принцип незалежності дії сил).

Динаміка

Теоретичні відомості

Закони Ньютона

Основними законами класичної динаміки є три закони Ньютона (**I закон Ньютона**, **II закон Ньютона**, **III закон Ньютона**), які були сформульовані на базі аналізу результатів спостережень та дослідів.

I закон Ньютона (закон інерції)

Якщо на тіло не діють інші тіла, то воно рухається рівномірно і прямолінійно або ж перебуває у спокої.

Цей закон діє не в усіх, а тільки у так званих **інерціальних системах відліку**[5]. Експериментально встановлено, що інерціальними є системи відліку, котрі пов'язані з зірками. Зокрема, такою є **геліоцентрична система відліку**, в якій початок координат розташований у центрі Сонця, а осі напрямлені на віддалені зірки.

---

[3] В механіці розрізняють взаємодію між тілами при їх безпосередньому контакті та на відстані. В останньому випадку говорять, що на тіло діє сила з боку силового поля, створеного іншими тілами.
[4] Так буває майже завжди.
[5] Термін "інерціальні" системи відліку пояснюється тим, що рух вільного тіла називається рухом по інерції. З цієї ж причини I закон Ньютона ще називають **законом інерції**.

Будь-яка система відліку, яка рухається поступально, рівномірно та прямолінійно відносно даної інерціальної системи відліку, також є інерціальною[6)].

II закон Ньютона

Швидкість зміни імпульсу тіла дорівнює діючій на це тіло силі[7)].

$$\frac{\Delta\vec{\mathbf{p}}}{\Delta t}=\vec{\mathbf{F}}. \qquad (2.3)$$

В цьому рівнянні $\Delta\vec{\mathbf{p}}=\vec{\mathbf{p}}_2-\vec{\mathbf{p}}_1$ – зміна імпульсу за заданий проміжок часу $\Delta t=t_2-t_1$, $\vec{\mathbf{F}}$ - рівнодійна всіх сил, прикладених до тіла.

Формулу **(2.3)** можна також записати як

$$\Delta\vec{\mathbf{p}}=\vec{\mathbf{F}}\Delta t. \qquad (2.4)$$

Добуток сили $\vec{\mathbf{F}}$ на час її дії Δt називається **імпульсом сили**. Таким чином,

зміна імпульсу тіла дорівнює імпульсу сили, що подіяла на тіло.

Це інше, але рівносильне попередньому, формулювання **II закона Ньютона**.

Наведені формулювання є найбільш широкими, зокрема вони придатні навіть для тіл, маса котрих з будь-яких причин змінюється під час руху (наприклад, у випадку ракети з працюючим двигуном, маса якої швидко зменшується за рахунок викидання відпрацьованих газів).

В окремому випадку, коли маса тіла не змінюється,

$$\Delta\vec{\mathbf{p}}=m\vec{\mathbf{v}}_2-m\vec{\mathbf{v}}_1=m(\vec{\mathbf{v}}_2-\vec{\mathbf{v}}_1)=m\Delta\vec{\mathbf{v}},$$

і рівняння **(2.3)** набуває вигляду:

$$m\cdot\frac{\Delta\vec{\mathbf{v}}}{\Delta t}=\vec{\mathbf{F}} \quad\Rightarrow\quad m\vec{a}=\vec{\mathbf{F}}. \qquad (2.5)$$

Це ще одне формулювання **II закону Ньютона**:

добуток маси тіла на його прискорення дорівнює діючій на тіло силі (природно, мається на увазі рівнодійна сила).

В такому вигляді цей закон найзручніше використовувати для більшості задач елементарної динаміки.

Якщо відомі закони взаємодії даного тіла з іншими тілами (сили взаємодії), то з рівняння **(2.5)** можна знайти прискорення, а потім, за допомогою рівнянь кінематики, - всі інші характеристики руху тіла в довільний момент часу, тобто повністю визначити його рух. Саме тому II закон Ньютона називають **основним законом**

[6)] Системи відліку, які рухаються з прискроенням відносно інерціальної, називаються **неінерціальними системами відліку**. Очевидно, що в них закон інерції не виконується. Це стосується, зокрема, і систем відліку, пов'язаних з Землею, оскільки Земля має прискорення відносно Сонця. Воно зумовлене добовим обертанням та орбітальним рухом Землі. Але це прискорення не перевищує 3,5 см/с^2. В той час сама Земля надає тілам прискорення приблизно 980 см/с^2. Тому в більшості випадків систему відліку, зв'язану з Землею, можна вважати інерціальною.

[7)] Мається на увазі, що $\mathbf{F}=\text{const}$. Якщо сила змінна, то ліва частина рівняння визначається похідною: $\mathrm{d}\mathbf{p}/\mathrm{d}t=\mathbf{F}$.

механіки.

З рівняння **(2.5)** видно, що якщо $\vec{\mathbf{F}} = 0$, то $\vec{\boldsymbol{a}} = 0$. Це означає, що II закон Ньютона виконується тільки в інерціальних системах відліку.

III закон Ньютона

два тіла взаємодіють між собою з силами, які рівні за модулем, протилежні за напрямом і діють вздовж прямої, що з'єднує ці тіла:

$$\vec{\mathbf{F}}_1 = -\vec{\mathbf{F}}_2.$$

Цей закон відображає той факт, що дія одних тіл на інші завжди має характер взаємодії. Треба пам'ятати, що сили взаємодії між двома тілами завжди мають одну фізичну природу. Крім того, вони не зрівноважуються, оскільки прикладені до різних тіл.

В системі з довільної кількості тіл III закон виконується для кожної пари тіл окремо.

Цей закон також виконується тільки в інерціальних системах відліку.

Динаміка

Теоретичні відомості

Сили в механіці

Для визначення прискорення тіла треба знати діючі на нього сили. В задачах механіки найчастіше зустрічаються **гравітаційна сила**, **сила тяжіння**, **вага**, **пружні сили**, **сили сухого тертя** і **сили опору середовища**.

Гравітаційна сила діє між всіма тілами і визначається **законом всесвітнього тяжіння**:

дві матеріальні точки притягаються одна до одної з силами, котрі прямо пропорційні їх масам, обернено пропорційні квадрату відстані між ними і діють вздовж прямої, що з’єднує ці точки:

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}, \qquad (2.6)$$

де $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ $\text{м}^3/(\text{кг} \cdot \text{с}^2)$ – **гравітаційна стала**.

Закон всесвітнього тяжіння у формі рівняння **(2.6)** виконується також для однорідних куль довільного розміру; в цьому випадку r – відстань між центрами куль.

Сила гравітаційного притягання тіла до планети, біля якої воно знаходиться, називається **силою тяжіння**. Її записують як

$$\vec{\mathbf{F}} = m\vec{\mathbf{g}}, \qquad (2.7)$$

де m – маса тіла, $\mathbf{g}$ – вектор прискорення сили тяжіння, який напрямлений до центра планети (вертикально вниз) і має модуль

$$g = G\frac{M}{r^2} = G\frac{M}{(R+h)^2}. \qquad (2.8)$$

Тут M – маса планети, R – її радіус, r – відстань від тіла до центра планети, h – висота тіла над поверхнею планети.

Біля поверхні планети ($h << R$) прискорення сили тяжіння дорівнює

$$g = G\frac{M}{R^2} = \text{const}. \qquad (2.9)$$

Це прискорення називають ще **прискоренням вільного падіння**[8)]. Для Землі $g = 9{,}8\ \text{м/с}^2$.

З гравітацією пов'язане поняття **ваги** тіла.

Вага – це сила, з якою тіло діє на горизонтальну опору або підвіс внаслідок притягання до планети.

Вага прикладена не до тіла, а з боку тіла до опори, на якій воно знаходиться. Якщо опора (підвіс) не має прискорення відносно планети, то вага тіла дорівнює силі тяжіння:

$$\vec{\mathbf{P}} = m\vec{\mathbf{g}}.$$

Якщо ж опора (підвіс) рухається з прискоренням $\boldsymbol{a}$, то вага тіла

$$\vec{\mathbf{P}} = m(\vec{\mathbf{g}} - \vec{\boldsymbol{a}}). \qquad (2.10)$$

Зокрема, при $\vec{\boldsymbol{a}} = \vec{\mathbf{g}}$ вага тіла $\vec{\mathbf{P}} = 0$, і настає **невагомість**, тобто стан, при якому тіло перестає тиснути на опору чи розтягувати підвіс.

Пружні сили – це сили, що виникають при деформації тіла. Вони зумовлені взаємодією між атомами тіла й підпорядковані **закону Гука**:

сила пружності напрямлена в бік, протилежний деформації і за модулем прямо пропорційна величині деформації.

Для **поздовжніх деформацій** (стиснення або видовження) закон Гука записується у вигляді:

$$F = -kx, \qquad (2.11)$$

де F – проекція сили пружності на вісь, що напрямлена в бік видовження тіла, ($x = l - l_0$) – деформація, тобто різниця довжини деформованого та недеформованого тіла (x – алгебраїчна величина, при стисненні $x < 0$). Коефіцієнт k називається **жорсткістю тіла**.

Для **суцільного твердого тіла** закон Гука записують у вигляді

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}, \qquad (2.12)$$

[8)] Це не зовсім точно, оскільки пов'язана з поверхнею Землі система відліку не є строго інерціальною.

де $\varepsilon = \left|\frac{l - l_0}{l_0}\right|$ – відносна деформація, $\sigma = F/S$ – механічна напруга – відношення деформуючої сили до площі поперечного перерізу тіла (вимірюється в **паскалях, 1 Па = 1 Н/м^2**).

Величина E називається **модулем пружності** (або **модулем Юнга**). Вона є характеристикою пружних властивостей даного матеріалу. Значення E можна знайти у довідкових таблицях.

Сила сухого тертя виникає між твердими тілами, що притиснені одне до одного, при їх відносному русі, або спробі такого руху. Причиною тертя є шорсткість поверхонь взаємодіючих тіл. Тертя між нерухомими одне відносно одного тілами називається **тертям спокою**. У відсутності руху $a = 0$ і з другого закону Ньютона випливає, що сила тертя спокою за модулем дорівнює модулю суми решти прикладених до тіла сил $\vec{\mathbf{F}}_\text{р}$ і має протилежний напрям:

$$\vec{\mathbf{F}}_\text{т} = -\vec{\mathbf{F}}_\text{р}. \qquad (2.13)$$

Для кожної пари тіл існує граничне (максимально можливе) значення сили тертя спокою

$$F_{\text{т}\max} = \mu N, \qquad (2.14)$$

де μ – **коефіцієнт тертя**, N – сила нормального тиску, що діє між цими тілами.

Якщо рівнодійна всіх інших сил перевищить значення $F_{\text{т}\max}$, то починається рух тіл одне відносно одного, і тертя спокою переходить у **тертя ковзання**.

Прийнято вважати, що сила тертя ковзання дорівнює максимальній силі тертя спокою[9], тобто її величина визначається формулою **(2.14)**. Сила тертя ковзання напрямлена протилежно до швидкості руху даного тіла відносно того тіла, з яким воно контактує. Ідеалізований графік залежності сили тертя від величини прикладеної до тіла зовнішньої сили показано на **рис.2.1**.

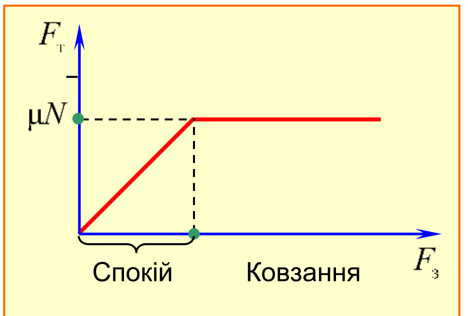


Рис. 2.1

При русі в середовищі на тверде тіло діє **сила опору**, що напрямлена проти вектора швидкості тіла відносно середовища. Сила опору має складні властивості. Зокрема, вона суттєво залежать від форми тіла і величини його швидкості. При малих швидкостях силу опору можна вважати прямо пропорційною швидкості:

[9] Насправді сила тертя ковзання залежить від прикладеної сили.

$$F_{\text{оп}} = \beta_1 v, \qquad (2.15)$$

а при великих – прямо пропорційною квадрату швидкості тіла:

$$F_{\text{оп}} = \beta_2 v^2, \qquad (2.16)$$

де β_1, β_2 – коефіцієнти опору, які залежать від властивостей середовища, розмірів, форми тіла та ін.

Динаміка

Теоретичні відомості

Рівномірний рух по колу

Сила призводить до зміни не лише модуля, а й напрямку імпульсу і швидкості тіла. Тому при рівномірному криволінійному русі, зокрема коловому, тіло теж має прискорення, яке називається **доцентровим прискоренням**. Прикладом такого руху є **рух штучних супутників Землі**.

Рівномірний рух по колу характеризується **доцентровим прискоренням**, яке напрямлене до центра колової траєкторії і має модуль (див. формулу **(1.28)**)

$$a = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r,$$

де v, ω - лінійна та кутова швидкості, r - радіус колової траєкторії. Це прискорення визначає зміну напрямку швидкості тіла з часом і створюється **"доцентровою силою"**

$$F = \frac{mv^2}{r} = m\omega^2 r, \qquad (2.17)$$

Термін **"доцентрова сила"** не означає якусь особливу силу, що створює обертовий рух. За відповідних умов доцентровою може бути будь-яка сила або рівнодійна декількох.

Рух штучних супутників Землі здійснюється під дією сили тяжіння (формули **(2.6)**, **(2.7)**). На коловій орбіті радіуса r супутник має швидкість

$$v = \sqrt{G\frac{M}{R}}.$$

Для того, щоб вивести тіло на низьку колову орбіту штучного супутника планети, коли радіус траєкторії практично дорівнює радіусу планети R ($r \approx R$), йому необхідно надати швидкість

$$v_1 = \sqrt{G\frac{M}{R}} = \sqrt{gR}, \qquad (2.18)$$

яку називають **першою космічною швидкістю**. Для Землі $v_1 = 7{,}9$ км/с.

Розділ 2. Динаміка. Розв'язування задач

Розв'язування задач динаміки проводять за певною схемою, яка викладена у **рекомендаціях до розділу**, враховуючи поради по оформленню розв'язку задач (див. **"Етапи розв'язування задач"**).

В цьому посібнику не розглядається динаміка тіл змінної маси, як наприклад, ракети з працюючими двигунами, тому в усіх задачах маса є сталою. Також вважається відсутнім опір середовища за винятком тих задач, в яких необхідно його враховувати за умовою.

Прямолінійний рух одного тіла та зв'язаних тіл	**Рекомендації до теми**		**Задача 2.1**
			Задача 2.2
			Задача 2.3
			Задача 2.4
			Задача 2.5
			Задача 2.6
			Задача 2.7
			Задача 2.8
			Задача 2.9
	Задачі для самостійної роботи		**Рівень А**
			Рівень Б
			Рівень В
Зв'язок між імпульсом та силою	**Рекомендації до теми**		**Задача 2.10**
			Задача 2.12
			Задача 2.13
			Задача 2.14
			Задача 2.15
	Задачі для самостійної роботи		**Рівень А**
			Рівень Б
			Рівень В
Рівномірний рух по колу	**Рекомендації до теми**		**Задача 2.16**
			Задача 2.17
			Задача 2.18
			Задача 2.19
			Задача 2.20
	Задачі для самостійної роботи		**Рівень А**
			Рівень Б
			Рівень В

Рекомендації до розділу "Динаміка"

Закони Ньютона складають базу для розв'язування задач динаміки матеріальної точки та поступального руху тіл[10]. Основним при цьому є II закон. Його математичний вираз записують як через прискорення (рівняння **(2.5)**), так і через імпульс (рівняння **(2.3)** або рівняння **(2.4)**). Імпульсне формулювання II закону буває корисним в задачах, де не треба визначати залежності кінематичних величин від часу.

При розв'язуванні задач динаміки варто дотримуватись наступного загального плану.

1)	Уважно ознайомитись з умовою задачі. Проаналізувати, з якими тілами взаємодіє кожне з тіл, що розглядаються в задачі, і встановити сили, котрі діють на них в результаті взаємодії.

[10] При поступальному русі всі точки тіла рухаються однаково, тому рух всього тіла визначається рухом якої-небудь однієї його точки.

Зробити схематичний рисунок і показати на ньому всі вектори сил[11], що діють на кожне тіло, вектори прискорень, а при необхідності, і вектори імпульсів.

2) Записати рівняння руху кожного тіла (**ІІ закон Ньютона**) у векторній формі

$$\sum_{\mathrm{i}} \vec{\mathbf{F}}_{\mathrm{i}} = m\vec{\mathbf{a}},$$

або

$$\left(\sum_{\mathrm{i}} \vec{\mathbf{F}}_{\mathrm{i}} \right) \Delta t = \Delta \vec{\mathbf{p}}.$$

У простих випадках, як наприклад, при горизонтальному прямолінійному русі одного тіла, цей пункт можна випустити.

3) Обрати систему відліку та систему координат[12]. Записати рівняння руху в проекціях на осі, врахувавши напрями векторів та визначені при аналізі зв'язки між величинами (рівність модулів сил взаємодії двох тіл, модулів прискорень тіл, що зв'язані ниткою, тощо).

4) З отриманої системи рівнянь визначити необхідні величини (сили, прискорення, імпульси).

Якщо в задачі необхідно шукати також інші величини, наприклад, швидкості або шляхи, слід продовжити розв'язування, використовуючи необхідні **рівняння та методи кінематики**.

Рекомендації до теми «Прямолінійний рух одного тіла та зв'язаних тіл»

У всіх розглянутих далі прикладах вважається, що

- **нитки невагомі та нерозтяжні**,

- **блоки невагомі й обертаються без тертя**.

Розділ 2. Динаміка. Розв'язування задач

Тема: Прямолінійний рух одного тіла та зв'язаних тіл. Приклади

Задача 2.1

Автомобіль рухається прямою горизонтальною дорогою зі швидкістю $v_0 = 36\ \text{км/год}$.

Визначити:

А) відстань S від місця розвантаження, на якій водій має вимкнути двигун, щоб зупинитися там без використання гальм;

Б) час t руху автомобіля до зупинки.

---

[11] При цьому можуть виникнути труднощі у визначенні напрямку сил тертя, якщо напрям руху тіл заздалегідь не є очевидним. В такій ситуації слід уявити, що тертя відсутнє, і з'ясувати, в якому напрямку рухалося б тіло. Прикладена до нього сила тертя напрямлена в протилежний бік.

[12] Оскільки зв'язки між тілами вже враховані відповідними силами, то для кожного тіла можна, якщо це зручно, вибирати окрему систему координат.

Коефіцієнт опору[13] на всьому шляху $\mu = 0,05$.

Розв'язання.

Дано:
$v_0 = 36\ \text{км/год} = 10\ \text{м/с}$
$\mu = 0,05$

Визначити: S, t

На автомобіль діють вертикальні сили тяжіння $m\vec{\mathbf{g}}$ та нормальної реакції опори $\vec{\mathbf{N}}$, а також горизонтальна сила опору $\vec{\mathbf{F}}_0$ (**рис.1**).

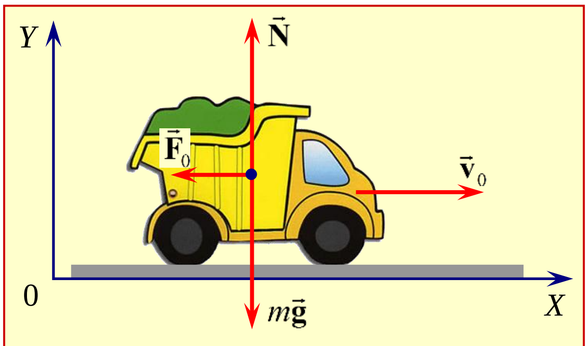


Рис.1

Рівняння руху автомобіля у векторній формі має вигляд:

$$m\vec{\mathbf{g}} + \vec{\mathbf{N}} + \vec{\mathbf{F}}_0 = m\vec{\mathbf{a}}.$$

Очевидно, що вертикальні сили скомпенсовані, тому:

$$m\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{F}}_0.$$

або у проекціях на вісь OX (напрям руху):

$$ma_x = -F_0.$$

За умовою $F_0 = \mu mg$, отже

$$a_x = -\mu g.$$

Знак мінус вказує на те, що вектор $\vec{\mathbf{a}}$ напрямлений протилежно вектору $\vec{\mathbf{v}}_0$, тобто рух – сповільнений.

Використаємо рівняння **(1.18)** кінематики рівнозмінного руху, згідно з яким:

$$S = \frac{v_x^2 - v_{0x}^2}{2a_x}.$$

Так як кінцева швидкість $v = 0$, то шлях автомобіля до зупинки:

$$S = \frac{v_0^2}{2\mu g} = \frac{10^2}{2 \cdot 0,05 \cdot 9,8} \approx 100\ \text{м}.$$

Б) Час руху до зупинки визначимо з рівняння швидкості v_x **(1.16)**:

$$v_x = v_{0x} + at \qquad \Rightarrow \qquad v_0 - \mu g t = 0 \qquad \Rightarrow \qquad t = \frac{v_0}{\mu g} = \frac{10}{0,05 \cdot 9,8} = 20,4\ \text{с}.$$

Цей же час можна визначити, використовуючи рівняння II закону Ньютона у формі **(2.4)**. Дійсно, зміна імпульсу автомобіля зумовлена дією тільки сили опору $\vec{\mathbf{F}}_0$. Початковий імпульс автомобіля $\vec{\mathbf{p}}_1 = -m\vec{\mathbf{v}}_0$, кінцевий – $\vec{\mathbf{p}}_2 = 0$, тому зміна імпульсу $\Delta\vec{\mathbf{p}} = \vec{\mathbf{p}}_2 - \vec{\mathbf{p}}_1 = -m\vec{\mathbf{v}}_0$. В проекціях на вісь OX рівняння **(2.4)** має вигляд:

$$-mv_0 = -F\Delta t \qquad \Rightarrow \qquad \Delta t = \frac{mv_0}{F} = \frac{mv_0}{\mu mg} = \frac{v_0}{\mu g},$$

що, природно, співпадає з попереднім результатом.

[13] **Коефіцієнтом опору** називається відношення сумарної сили опору рухові до ваги автомобіля.

Задача 2.2

По горизонтальній поверхні тягнуть за мотузку ящик маси m, прикладаючи силу під кутом до горизонту. Коефіцієнт тертя між ящиком та поверхнею дорівнює μ.

Визначити:

А) кут нахилу мотузки до горизонту α_m, при якому прикладена сила F буде мінімальна ($F_{\min}$);

Б) величину $F_{\min}$.

Розв'язання.

Дано:
m
μ

Визначити: α_m, $F_{\min}$

А) Ящик взаємодіє з землею та з мотузкою, внаслідок чого на нього діють сили: тяжіння $m\vec{\mathbf{g}}$, нормальної реакції опори $\vec{\mathbf{N}}$, тертя $\vec{\mathbf{F}}_{\text{т}}$ та натягу мотузки $\vec{\mathbf{F}}$, що дорівнює прикладеній силі (**рис.2**). За II законом Ньютона **(2.5)** рівняння руху ящика

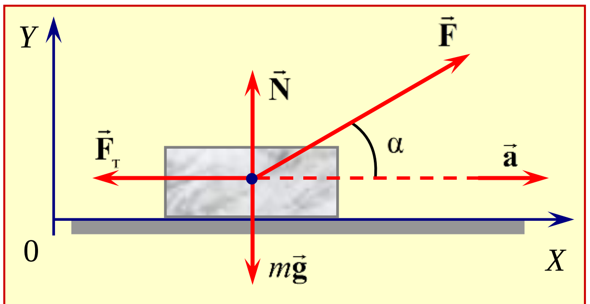


Рис.2

$$\vec{\mathbf{F}} + m\vec{\mathbf{g}} + \vec{\mathbf{N}} + \vec{\mathbf{F}}_{\text{т}} = m\vec{\mathbf{a}}.$$

Ящик рухається горизонтально ($a_y = 0$, $a_x = a$), тому у проекціях на осі координат (рис.2) маємо

$$OX: \quad F\cos\alpha - F_{\text{т}} = ma,$$

$$OY: \quad F\sin\alpha + N - mg = 0.$$

Урахувавши, що сила тертя $F_{\text{т}} = \mu N$, отримуємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} F\cos\alpha - \mu N = ma, \\ F\sin\alpha + N - mg = 0. \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему відносно сили натягу мотузки, дістанемо

$$F = \frac{\mu mg + ma}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha}. \qquad (1)$$

звідки випливає, що сила натягу залежить як від кута нахилу мотузки до горизонту α, так і від прискорення ящика a. При заданому куті α найменша сила натягу F_0, яка необхідна для руху ящика, відповідає умові $a = 0$:

$$F_0 = \frac{\mu mg}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha}. \qquad (2)$$

В свою чергу сила натягу F_0 буде мінімальною, якщо знаменник формули **(2)**

$$\mathrm{f}(\alpha) = \cos\alpha + \mu\sin\alpha \qquad (3)$$

буде максимальним.

Позначимо $\mu = \mathrm{tg}\varphi$. Тоді формула (3) набуває вигляду

$$\mathrm{f}(\alpha) = \cos\alpha + \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\sin\alpha = \frac{\cos(\alpha - \varphi)}{\cos\varphi}.$$

Кут φ сталий, оскільки $\mu = \mathrm{const}$, і функція $\mathrm{f}(\alpha)$ досягає максимуму за умови $\cos(\alpha - \varphi) = 1$, тобто при $\alpha_m = \varphi$. Отже натяг мотузки мінімальний при

$$\mathrm{tg}\alpha_m = \mu \qquad \Rightarrow \qquad \alpha_m = \mathrm{arctg}\mu. \qquad (4)$$

Умову максимуму функції (3) можна встановити значно простіше, якщо ви вже знаєте похідні – умовою екстремуму (максимуму, чи мінімуму) функції є рівність нулю її першої похідної, тобто

$$\mathrm{f}'(\alpha) = -\sin\alpha + \mu\cos\alpha \qquad \Rightarrow \qquad -\sin\alpha + \mu\cos\alpha = 0,$$

звідки

$$\alpha_m = \mathrm{arctg}\mu.$$

що природно співпадає з (4).

Б) Підставивши вираз $\mu = \mathrm{tg}\alpha_m$ у формулу **(3)**, знайдемо:

$$f(\alpha_m) = \cos\alpha_m + \mathrm{tg}\alpha_m \cdot \sin\alpha_m = \frac{1}{\cos\alpha_m}.$$

Оскільки $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha}}$, то $f(\alpha) = \sqrt{1+\mu^2}$, і тоді з формули **(2)** знаходимо мінімальну силу натягу мотузки:

$$F_{\min} = \frac{\mu mg}{\sqrt{1+\mu^2}}.$$

Задача 2.3

На горизонтальному столі лежать два вантажі, що зв'язані ниткою. Маси вантажів m_1 і m_2, коефіцієнти тертя між ними та столом μ_1 і μ_2 відповідно. До вантажу m_1 приклали сталу горизонтальну силу F.

Визначити

прискорення вантажів a та силу натягу нитки T.

Розв'язання.

Дано:
m_1, m_2
μ_1, μ_2
F
Визначити: a, T

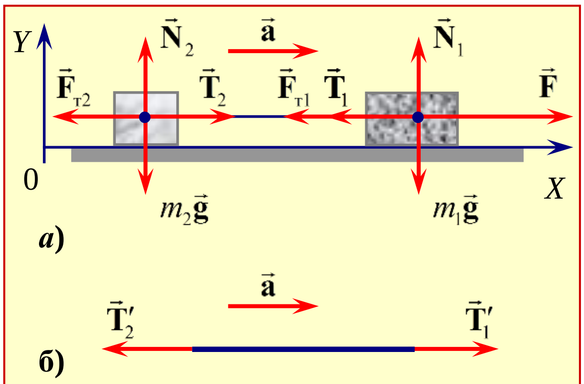


Рис.3

На вантажі діють сили тяжіння $m_1\vec{\mathbf{g}}$, $m_2\vec{\mathbf{g}}$, сили реакції опори $\vec{\mathbf{N}}_1$, $\vec{\mathbf{N}}_2$, сили тертя $\vec{\mathbf{F}}_{т1}$, $\vec{\mathbf{F}}_{т2}$, прикладена сила $\vec{\mathbf{F}}$ та сили натягу нитки $\vec{\mathbf{T}}_1$, $\vec{\mathbf{T}}_2$ (**рис.3а**). Розглянемо останні більш детально. В процесі руху на вантаж m_1 з боку нитки діє сила натягу $\vec{\mathbf{T}}_1$, а на нитку з боку вантажу (за третім законом Ньютона) діє така сама за величиною і протилежна за напрямком сила $\vec{\mathbf{T}}_1'$, отже за модулем $T_1' = T_1$. На друге тіло з боку нитки також діє сила натягу $\vec{\mathbf{T}}_2$, а на нитку – сила $\vec{\mathbf{T}}_2'$. За третім законом Ньютона $T_2' = T_2$. Таким чином, нитка рухається під дією двох сил $\vec{\mathbf{T}}_1'$ і $\vec{\mathbf{T}}_2'$ (**рис.3б**). Формально рівняння її руху $\vec{\mathbf{T}}_1' + \vec{\mathbf{T}}_2' = m\vec{\mathbf{a}}$, але оскільки нитка невагома ($m = 0$), то $\vec{\mathbf{T}}_1' + \vec{\mathbf{T}}_2' = 0$ і $\vec{\mathbf{T}}_1' = -\vec{\mathbf{T}}_2'$. Отже модулі всіх сил натягу однакові:

$$T_1' = T_1 = T_2' = T_2 = T.$$

Нитка нерозтяжна, отже прискорення тіл однакове $\vec{\mathbf{a}}_1 = \vec{\mathbf{a}}_2 = \vec{\mathbf{a}}$. Таким чином, невагома нерозтяжна нитка забезпечує взаємодію між тілами системи, не впливаючи на характеристики їх руху. З урахуванням цього, рівняння руху вантажів у векторній формі мають вигляд:

$$\vec{\mathbf{F}} + m_1\vec{\mathbf{g}} + \vec{\mathbf{N}}_1 + \vec{\mathbf{F}}_{т1} + \vec{\mathbf{T}}_1 = m_1\vec{\mathbf{a}},$$

$$\vec{\mathbf{T}}_2 + m_2\vec{\mathbf{g}} + \vec{\mathbf{N}}_2 + \vec{\mathbf{F}}_{т2} + = m_2\vec{\mathbf{a}}.$$

Зв'яжемо систему відліку зі столом і візьмемо напрям осі так, як показано на **рис.3а**. Рівняння руху тіл у проекціях на осі

$$OX: \begin{cases} F - T_1 - F_{т1} = m_1 a, \\ T_2 - F_{т2} = m_2 a, \end{cases} \qquad (1a)$$

$$OY:\ \begin{cases} N_1 - m_1 g = 0, \\ N_2 - m_2 g = 0. \end{cases} \qquad (1б)$$

Врахуємо, що $T_1 = T_2 = T$, і, що сила тертя ковзання $F_т = \mu N$. Тоді

$$\begin{cases} F - T - \mu_1 m_1 g = m_1 a, \\ T - \mu_2 m_2 g = m_2 a. \end{cases} \qquad (2)$$

Для визначення модуля прискорення вантажів найпростіше додати праві та ліві частини системи рівнянь **(2)**:

$$F - (\mu_1 m_1 + \mu_2 m_2) g = (m_1 + m_2) a \quad \Rightarrow \quad a = \frac{F - (\mu_1 m_1 + \mu_2 m_2) g}{m_1 + m_2}.$$

Отриманий результат показує, що задача має розв'язок лише за умови $F \ge (\mu_1 m_1 + \mu_2 m_2) g$, тобто прикладена сила має бути не менша, ніж сумарна сила тертя, яка діє на тіла.
Підставивши отриманий вираз для прискорення у будь-яке з рівнянь системи **(2)**, знайдемо силу натягу нитки:

$$T = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\left[F + (\mu_2 - \mu_1) m_1 g\right].$$

Задача 2.4

Тіло маси $m = 10$ кг знаходиться на похилій площині, кут нахилу якої до горизонту α може змінюватись. Коефіцієнт тертя між тілом і площиною $\mu = 0{,}8$.

Побудувати
графік залежності сили тертя F, яка діє на тіло, від кута α.

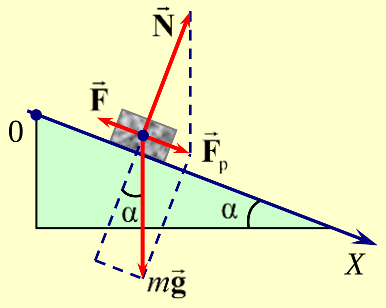


Рис.4

Розв'язання.

Дано:
$m = 10$ кг
$\mu = 0{,}8$
Визначити: $F = f(\alpha)$

На тіло діють сили: тяжіння $m\vec{g}$, нормальної реакції площини $\vec{N}$ та тертя $\vec{F}$. При порівняно невеликих кутах нахилу, поки не почалося ковзання тіла, $\vec{F}$ – це сила тертя спокою. Згідно з формулою **(2.13)** вона зрівноважує рівнодійну решти сил $\vec{F}_р = m\vec{g} + \vec{N}$ (**рис.4**), модуль якої $F_р = mg\sin\alpha$. Отже, при невеликих кутах нахилу α сила тертя між тілом та площиною залежить від α за законом
$F = mg\sin\alpha.$

При збільшенні кута α сила тертя спокою F буде зростати і при певному критичному куті α_0 досягне максимально можливого значення μN (формула **(2.14)**). Сила N компенсує нормальну до площини складову сили тяжіння, яка дорівнює $mg\cos\alpha$. Тому максимальна сила тертя спокою $F_0 = \mu mg\cos\alpha$, і, враховуючи рівняння **(1)**, маємо:

$$mg\sin\alpha = \mu mg\cos\alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha_0 = \mathrm{arctg}\,\mu.$$

При подальшому збільшенні кута нахилу площини (α_0) тіло рухається, і на нього вже буде діяти сила тертя ковзання $F = \mu N = \mu mg\cos\alpha$.
Таким чином, сила тертя між тілом та площиною в залежності від кута нахилу площини виражається однією з двох формул:

$$F = mg\sin\alpha \quad \text{при} \quad 0 \le \alpha \le \alpha_0 \qquad (1)$$

або

$$F = \mu mg\cos\alpha \quad \text{при} \quad \alpha_0 < \alpha \le 90°, \qquad (2)$$

де $\alpha_0 = \mathrm{arctg}\,\mu$.

Графік шуканої залежності $F = f(\alpha)$ складається з відрізка синусоїди **(1)** відрізка косинусоїди **(2)** і показаний на **рис.4-1** з урахуванням числових значень m, g, μ та α_0.

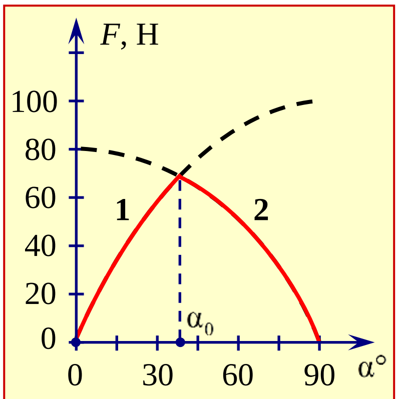


Рис.4-1

= = =

Задача 2.5

Невеличке тіло починає ковзати по похилій площині з точки A над вертикальним упором AB (рис.5), за допомогою якого можна змінювати кут нахилу площини. Коефіцієнт тертя між тілом і площиною $\mu = 0{,}14$.

Визначити,
кут нахилу площини α_{m}, при якому час спуску тіла буде найменший.

Розв'язання.

Дано:
$\mu = 0{,}14$

Визначити: α_{m}

Для визначення часу спуску тіла з точки A в точку C (**рис.5**) необхідно визначити його прискорення. Для цього скористаємося рівнянням другого закону Ньютона **(2.5)**.

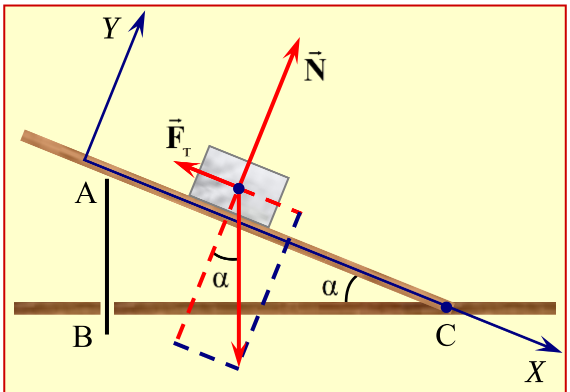


Рис.5

На тіло на похилій площині діють сила тяжіння $m\vec{\mathbf{g}}$, сила нормальної реакції опори $\vec{\mathbf{N}}$ та сила тертя ковзання $\vec{\mathbf{F}}_{\text{т}}$ (**рис.5**).

Рівняння руху тіла $\vec{\mathbf{F}} = m\vec{\mathbf{a}}$ має вигляд:

$$m\vec{\mathbf{g}} + \vec{\mathbf{N}} + \vec{\mathbf{F}}_{\text{т}} = m\vec{\mathbf{a}}. \qquad (1)$$

Зв'яжемо систему відліку з площиною та візьмемо напрям осей координат так, як показано на **рис.5**. Проекції сил нормальної реакції опори та сили тертя на обрані осі дорівнюють або нулю, або модулю відповідного вектора. Проекції сили тяжіння на осі показані штриховими лініями. У проекціях на осі рівняння руху тіла мають вигляд

$$OX: \quad mg\sin\alpha - F_{\text{т}} = ma,$$

$$OY: \quad N - mg\cos\alpha = 0.$$

З другого рівняння системи маємо $N = mg\cos\alpha$, а оскільки $F_{\text{т}} = \mu N$, то $F_{\text{т}} = \mu mg\cos\alpha$.

Підставивши цей вираз у перше рівняння, одержимо:

$$a = g\left(\sin\alpha - \mu\cos\alpha\right).$$

Таким чином, тіло рухається рівноприскоренно без початкової швидкості і проходить по площині певний шлях $l = \mathrm{AC}$ (**рис.5**). Згідно з рівнянням кінематики **(1.16)** $L = \dfrac{at^2}{2}$, отже час спуску

$$t = \sqrt{\frac{2L}{a}} = \sqrt{\frac{2L}{g\left(\sin\alpha - \mu\cos\alpha\right)}}.$$

При зміні кута нахилу площини змінюється відстань l, однак довжина BC (див. **рис.5**) при цьому залишається незмінною. Позначимо її довжину S. Тоді

$$L = \frac{S}{\cos\alpha}, \qquad (2)$$

і час спуску:

$$t = \sqrt{\frac{2S/g}{\cos\alpha\left(\sin\alpha - \mu\cos\alpha\right)}}.$$

Цей час буде мінімальним, якщо знаменник дробу під коренем $f(\alpha) = \cos\alpha\left(\sin\alpha - \mu\cos\alpha\right)$ буде максимальним. Проаналізуємо функцію $f(\alpha)$ на максимум, для чого знайдемо похідну $f'(\alpha)$:

$$f'(\alpha) = -\sin\alpha\left(\sin\alpha - \mu\cos\alpha\right) + \cos\alpha\left(\cos\alpha + \mu\sin\alpha\right) =$$
$$= -\sin^2\alpha + \cos^2\alpha + 2\mu\sin\alpha\cos\alpha = \cos 2\alpha + \mu\sin 2\alpha.$$

У точці максимуму при куті $\alpha = \alpha_m$ похідна дорівнює нулю:

$$\cos 2\alpha_m + \mu\sin 2\alpha_m = 0,$$

звідки:

$$\alpha_m = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\mu}\right) = \frac{1}{2}\left(180° - \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\mu}\right)\right) = 49°.$$

При збільшенні кута нахилу площини зростає прискорення і пройдений тілом шлях. При цьому час спуску спочатку (поки $\alpha < \alpha_m$) зменшується, а потім (при $\alpha > \alpha_m$) зростає. Корисно проаналізувати фізичний зміст такого результату, тобто зрозуміти, чому це так. Відповідь дістанемо, згадавши, що при малих кутах $\sin\alpha$ змінюється швидше, ніж $\cos\alpha$, а при великих – навпаки. В такому разі з формул **(1)** та **(2)** видно, що спочатку домінує швидке зростання прискорення (оскільки шлях l змінюється повільно), що зумовлює зменшення часу спуску. Потім головну роль починає відігравати відносно більш швидке зростання довжини шляху l, через що часу спуску починає зростати.

Задача 2.6

Канат маси m довжиною l і площею поперечного перерізу S підіймають по похилій площині, приклавши до його верхнього кінця паралельно площині силу F (рис.6).

Визначити

механічну напругу σ в канаті в залежності від відстані x до верхнього кінця канату.

Розв'язання.

Дано:
m
l
S
F

Визначити: $\sigma(x)$

Механічна напруга — це відношення сили, що діє всередині тіла $F_в$, до площі його перерізу:

$$\sigma = \frac{F_в}{S}.$$

Сила $F_в$ залежить від прикладеної зовнішньої сили $\vec{\mathbf{F}}$ і є силою взаємодії між окремими частинами каната. Для її визначення використаємо такий прийом: подумки розріжемо канат на дві частини і уявимо їх двома брусками з масами m_1 та m_2, що зв'язані між собою невагомою нерозтяжною ниткою. Ця удавана нитка, не впливаючи сама на прискорення та швидкість каната (див. **задачу 2.3**), забезпечує рух його частин як єдиного цілого. Отже сила її натягу – то є потрібна нам сила взаємодії між частинами каната: $F_в \equiv T$.

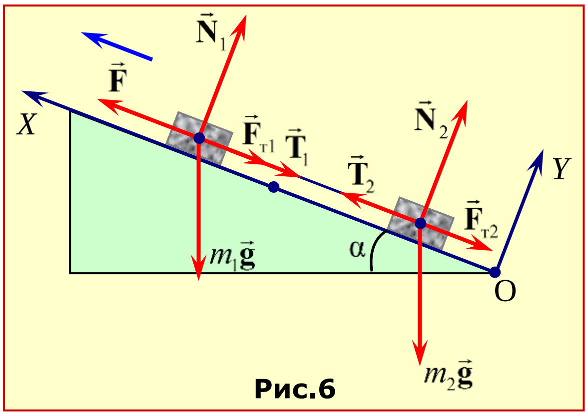


Рис.6

Тепер розглянемо рух брусків. На брусок m_1 діють сили: тяжіння $m_1\vec{\mathbf{g}}$, натягу нитки $\vec{\mathbf{T}}_1$, нормальної реакції опори $\vec{\mathbf{N}}_1$, тертя $\vec{\mathbf{F}}_{т1}$ та прикладена до каната сила $\vec{\mathbf{F}}$ (**рис.6**). Рівняння його руху у векторній формі за II законом Ньютона **(2.5)** має вигляд:

$$\vec{\mathbf{F}} + m_1\vec{\mathbf{g}} + \vec{\mathbf{N}}_1 + \vec{\mathbf{T}}_1 + \vec{\mathbf{F}}_{т1} = m_1\vec{\mathbf{a}}. \qquad (1)$$

На другий брусок діють сили $m_2\vec{\mathbf{g}}$, $\vec{\mathbf{T}}_2$, $\vec{\mathbf{N}}_2$, $\vec{\mathbf{F}}_{т2}$ і для нього

$$\vec{\mathbf{T}}_2 + m_2\vec{\mathbf{g}} + \vec{\mathbf{N}}_2 + \vec{\mathbf{F}}_{т2} = m_2\vec{\mathbf{a}}. \qquad (2)$$

Оберемо систему відліку, зв'язану з площиною, і візьмемо напрям координатної осі, як показано на **рис. 6**. Проекції сил тяжіння на осі OX та OY становлять $mg\sin\alpha$ та $mg\cos\alpha$ відповідно. Тоді рівняння **(1)** та **(2)** у проекціях на осі матимуть вигляд:

$$OX: \begin{array}{l} F - m_1 g\sin\alpha - F_{т1} - T_1 = m_1 a, \\ -m_2 g\sin\alpha - F_{т2} + T_2 = m_2 a; \end{array}$$

$$OY: \begin{array}{l} N_1 - m_1 g\cos\alpha = 0, \\ N_2 - m_2 g\cos\alpha = 0; \end{array}$$

Як ми вже знаємо (див. **задачу 2.3**), сили натягу нитки T_1 та T_2 однакові за модулем: $T_1 = T_2 = T$. Врахувавши також вираз сили тертя $F_т = \mu N$, одержимо систему рівнянь:

$$\begin{cases} F - m_1 g\sin\alpha - \mu N_1 - T = m_1 a, \\ N_1 = m_1 g\cos\alpha, \\ T - m_2 g\sin\alpha - \mu N_2 = m_2 a, \\ N_2 = m_2 g\cos\alpha, \end{cases}$$

розв'язавши яку відносно сили натягу, дістанемо:

$$T = \frac{m_2}{m_1 + m_2}F = \frac{m_2}{m}F, \qquad (3)$$

де $m_1 + m_2 = m$ – маса всього каната.

А тепер визначимо m_2. Для цього складемо пропорцію: канат довжиною l має масу m, а частина каната довжиною x має масу m_1:

$$\begin{array}{lcl} m & - & l, \\ m_1 & - & x, \end{array}$$

звідки: $m_1 = \frac{mx}{l}$, $m_2 = m - m_1 = m\left(1 - \frac{x}{l}\right)$. Підставивши вирази m_2 у формулу **(3)**, отримаємо

$$F_в = T = \left(1 - \frac{x}{l}\right)F.$$

Отже, механічна напруга $\sigma = \frac{T}{S}$ на відстані x від початку канату

$$\sigma = \left(1 - \frac{x}{l}\right)\frac{F}{S}.$$

Задача 2.7

Через нерухомий блок перекинули довгу нитку з прикріпленими до її кінців двома однаковими тягарцями масами M кожен, які спочатку утримують на одному рівні. Потім до одного з тягарців підвісили на нитці ще один тягарець масою m, після чого тягарці відпустили.

Визначити:

А) прискорення a, з яким рухаються тягарці;

Б) час t, через який відстань по вертикалі між більшими тягарцями становитиме H;

В) силу натягу нитки T_0, що з'єднує великий та малий тягарці;

Г) силу F, що діє на вісь блока під час руху тягарців.

Розв'язання.

Дано:
m
M
H
Визначити: a, t, T_0, F

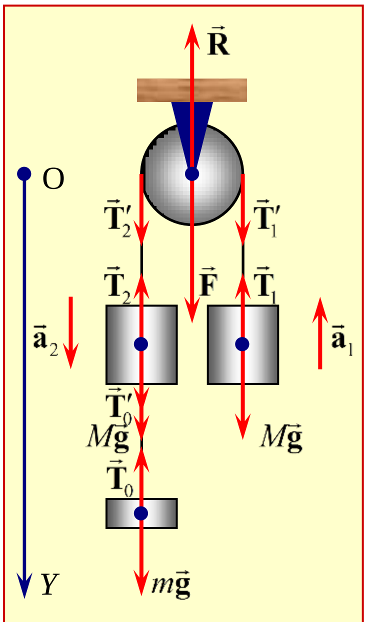


Рис.7

Сили, що діють на кожне з тіл задачі, показані на **рис.7**. Правий тягарець M взаємодіє з Землею (сила $M\vec{\mathbf{g}}$) та з ниткою (сила $\vec{\mathbf{T}}_1$). Так само на лівий малий тягарець m діють сили $m\vec{\mathbf{g}}$ і $\vec{\mathbf{T}}_0$. Лівий великий тягарець M взаємодіє з Землею (сила $M\vec{\mathbf{g}}$) та двома нитками (сили $\vec{\mathbf{T}}_2$, $\vec{\mathbf{T}}_0'$). На блок з боку ниток діють сили $\vec{\mathbf{T}}_1'$ і $\vec{\mathbf{T}}_2'$. Ця дія передається на вісь блока, створюючи силу $\vec{\mathbf{F}} = \vec{\mathbf{T}}_1' + \vec{\mathbf{T}}_2'$.

А) З урахуванням рівності прискорень лівих тіл, векторні рівняння руху (II закон Ньютона **(2.5)**) мають вигляд

$$\begin{aligned} &M\vec{\mathbf{g}} + \vec{\mathbf{T}}_1 = M\vec{\mathbf{a}}_1, \\ &M\vec{\mathbf{g}} + \vec{\mathbf{T}}_0 + \vec{\mathbf{T}}_2 = M\vec{\mathbf{a}}_2, \\ &m\vec{\mathbf{g}} + \vec{\mathbf{T}}_0 = m\vec{\mathbf{a}}_2. \end{aligned} \qquad (1)$$

Оскільки нитки та блок невагомі модулі сил натягу в нитках скрізь однакові[14]. Позначимо через T модуль сили натягу перекинутої через блок. Тоді $T_1 = T_1' = T_2 = T_2' = T$. Аналогічно, для нитки, що з'єднує великий та маленький тягарці, $T_0 = T_0'$. Врахувавши це, а також рівність модулів прискорень $a_1 = a_2 = a$, запишемо рівняння **(1)** у проекціях на вісь OY, що напрямлена вертикально вниз і нерухома відносно осі блока:

$$\begin{aligned} &Mg - T = -Ma, \\ &Mg + T_0 - T = Ma, \\ &mg - T_0 = ma. \end{aligned} \qquad (2)$$

Для визначення прискорення додамо ліві та праві частини рівнянь **(2)**, попередньо помноживши перше з них на (-1):

$$mg = (2M + m)a \qquad \Rightarrow \qquad a = \frac{m}{2M + m} g. \qquad (3)$$

Б) Обидва великі тягарці рухаються в протилежних напрямках без початкової швидкості з однаковим за величиною прискоренням a. Отже, за шуканий час кожен з них пройде однаковий шлях $l = \frac{H}{2}$. Тому згідно з рівняннями **(1.16)**,

$$\frac{H}{2} = \frac{at^2}{2} \qquad \Rightarrow \qquad t = \sqrt{\frac{H}{a}}.$$

Підставивши сюди вираз **(3)**, отримуємо відповідь:

$$t = \sqrt{\frac{(2M + m)}{m} \cdot \frac{H}{g}}. \qquad (4)$$

[14] Причини цього розглянуті у **задачі 2.3**.

В) Силу натягу нитки, що з'єднує тягарці M та m, знайдемо з останнього рівняння **(2)** та формули **(3)**:

$$T_0 = m(g-a) = mg\left(1-\frac{m}{2M+m}\right) \quad\Rightarrow\quad T_0 = \frac{2Mm}{2M+m}g. \qquad (5)$$

Г) На вісь блока діє сила $F = T_1' + T_2' = 2T$. Величину T знайдемо з першого рівняння **(2)** і формули **(3)**:

$$T = M(g+a) = Mg\left(1+\frac{m}{2M+m}\right) \quad\Rightarrow\quad T = \frac{2M(M+m)}{2M+m}g.$$

Шукана сила, що діє на вісь блока

$$F = \frac{4M(M+m)}{2M+m}g.$$

Задача 2.8

Ліфт піднімається, а потім спускається, з однаковим сталим прискоренням a.

Визначити

прискорення a, якщо при підйомі вага P_1 тіла, що стоїть на підлозі ліфта, в $n=1{,}5$ рази більша, ніж його вага P_2 при опусканні.

Розв'язання.

Дано:

$a_1 = a_2 = a$

$\frac{P_1}{P_2} = n$

$n = 1{,}5$

Визначити: a

На тіло діють сила тяжіння $m\vec{g}$ та нормальна реакція опори (підлоги ліфта) $\vec{N}$ (**рис. 8**). За означенням вага тіла $\vec{P}$ – то є сила, з якою воно діє на підлогу ліфта. Отже, згідно з третім законом Ньютона

$$\vec{P} = -\vec{N}. \qquad (1)$$

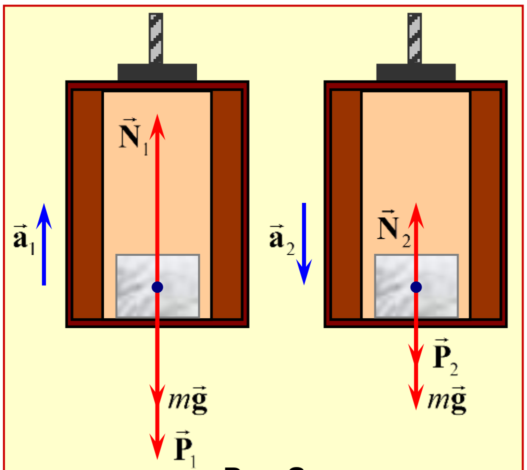


Рис.8

Згідно з другим законом Ньютона **(2.5)** для кожного випадку маємо:

$$\vec{N}_1 + m\vec{g} = m\vec{a}_1, \qquad (2)$$
$$\vec{N}_2 + m\vec{g} = m\vec{a}_2.$$

Переписавши рівняння **(2)** у проекціях на напрям руху ліфта і врахувавши однаковість модулів векторів прискорень $a_1 = a_2 = a$, а також рівняння **(1)**, отримаємо:

$$\begin{aligned} P_1 &= m(g+a) \\ P_2 &= m(g-a) \end{aligned} \quad\Rightarrow\quad \frac{P_1}{P_2} = \frac{g+a}{g-a}.$$

Оскільки за умовою $\frac{P_1}{P_2} = n$, маємо

$$\frac{g+a}{g-a} = n \quad\Rightarrow\quad a = \frac{n-1}{n+1} = \frac{1{,}5-1}{1{,}5+1} = 0{,}2g \approx 2\ \text{м/с}^2.$$

Задача 2.9

Повітряна куля загальною масою $M = 1000$ кг опускається вертикально зі сталою швидкістю.

Визначити

масу баласту m, яку треба скинути, щоб куля почала підійматися з тією ж швидкістю. На кулю діє підіймальна (Архімедова) сила $F = 9800$ Н. Взяти $g = 10$ м/с^2.

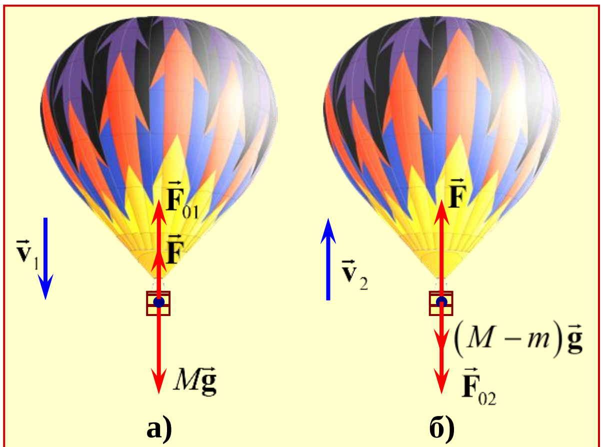


Рис.9

Розв'язання.

Дано:
$M = 1000$ кг
$F = 9800$ Н
$g = 10$ м/с^2

Визначити: m

Куля рухається під дією сили тяжіння, підіймальної сили $\vec{\mathbf{F}}$ та сили опору повітря $\vec{\mathbf{F}}_0$ (**рис.9**). Сила опору за модулем в обох випадках однакова $F_{01} = F_{02} = F_0$, оскільки однакова величина швидкості руху кулі. Підіймальну силу F теж можна вважати однаковою, оскільки об'єм викинутого баласту набагато менший, ніж об'єм кулі. При опусканні на кулю діяла сила тяжіння $M\vec{\mathbf{g}}$, а при підійманні (після викидання баласту масою m) вона стала рівною $(M-m)\vec{\mathbf{g}}$. В обох випадках маємо рух без прискорення, отже сили скомпенсовані:

$$\begin{aligned} &Mg = F + F_0, \\ &(M-m)g + F_0 = F, \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} &Mg = F + F_0, \\ &Mg - mg = F - F_0. \end{aligned}$$

Для визначення m додамо ліві та праві частини цих рівнянь:

$$2Mg - mg = 2F,$$

звідки:

$$m = 2\left(M - \frac{F}{g}\right) = 2\left(1000 - \frac{9800}{10}\right) = 40 \text{ кг}.$$

Тема: Прямолінійний рух одного тіла та зв'язаних тіл

Задачі для самостійної роботи

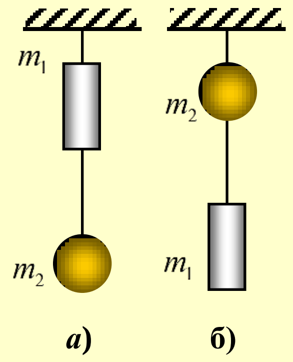
Рівень А

2.1	Двоє хлопчаків тягнуть за динамометр у протилежні боки із силою $F = 100$ Н кожний. Що показує динамометр? [100 Н]
2.2	Через блок перекинута нитка, до кінців якої прив'язані гирі маси $m = 0,5$ кг кожна. Визначити силу натягу нитки.[4,9 Н]
2.3	Визначити жорсткість пружини динамометра, якщо при навантаженні $F = 10$ Н пружина видовжилась на $x = 4,0$ см. На скільки видовжиться та сама пружина при навантаженні 5; 20; 12,5 Н? Пояснити, чому шкала динамометра рівномірна. [2,5 Н/см ; 2 см ; 8 см ; 5 см]
2.4	Визначити масу гирі, який необхідно підвісити до пружини, щоб вона розтягнулася на $x = 3,0$ см. Жорсткість пружини $k = 900$ Н/м. [2,75 кг]
2.5	Маса легкового автомобіля дорівнює $m_1 = 2$ т, а вантажного – $m_2 = 8$ т. Визначити відношення прискорень a_1/a_2 автомобілів, якщо сила тяги двигуна вантажного автомобіля в $n = 2$ рази більша, ніж легкового. Силою опору знехтувати. [2]
2.6	Яка сила повинна діяти на тіло масою $m_1 = 5$ кг, щоб воно рухалось вертикально вниз з прискоренням $a = 5$ м/с^2? [24 Н]
2.7	З якою силою притягаються один до одного два супутники Землі масою $m = 3,87$ т кожний, котрі наблизились один до одного на відстань $l = 100$ м? [10^{-7} Н]

2.8	Сила тяжіння між двома однаковими невеликими кулями $F = 0,01\,\text{Н}$. Визначити маси куль, якщо відстань між їх центрами $l = 1\,\text{м}$. [10^4 кг]
2.9	Розрахувати силу тяжіння між Землею та Місяцем. [$\sim 2 \cdot 10^{20}$ Н]
2.10	На якій відстані від поверхні Землі прискорення вільного падіння $g = 1\,\text{м/с}^2$? [$\sim 13,8 \cdot 10^6$ м]
2.11	На горизонтальний площадку під кутом $\alpha = 40°$ до його поверхні діє сила $F = 200\,\text{Н}$. Визначити силу нормального тиску на площадку. [$130\,\text{Н}$]
2.12	Сила F надає тілу масою m_1 прискорення $a_1 = 2,0\,\text{м/с}^2$, а тілу масою m_2 – прискорення $a_2 = 3,0\,\text{м/с}^2$. З яким прискоренням будуть рухатись тіла під дією тієї ж сили, якщо їх з'єднати? [$1,2\,\text{м/с}^2$]
2.13	З яким прискоренням рухається автомобіль горизонтальною дорогою після вимикання двигуна, якщо коефіцієнт тертя дорівнює μ? [μg]
2.14	Хлопчик тягне сані рівномірно по льоду, прикладаючи горизонтальну силу $F = 2\,\text{Н}$. Визначити вагу саней, якщо коефіцієнт тертя $\mu = 0,02$. Сані рухаються рівномірно. [$100\,\text{Н}$]
2.15	При працюючому двигуні автомобіль рухається з прискоренням $a = 0,6\,\text{м/с}^2$. Визначити прискорення автомобіля після того, як водій вимкне двигун. Середня сила опору в $n = 4$ рази менша від сили тяги. [$0,2\,\text{м/с}^2$]
2.16	Кулька для настільного тенісу масою $10\,\text{г}$ вільно падає з великої висоти. Визначити силу опору, яка діє на кульку, якщо вона рухається зі сталою швидкістю. [$0,1\,\text{Н}$]
2.17	Вантаж масою $m = 1,0\,\text{кг}$ нерухомо лежить на похилій площині. Визначити силу реакції опори, якщо на вантаж діє сила тертя спокою $F_т = 6,0\,\text{Н}$. [$8\,\text{Н}$]
2.18	По гладкій площині, нахиленій під кутом $\alpha = 30°$ до горизонту, рухається тіло, на яке діє сила тяжіння $F = 17\,\text{Н}$. Визначити силу, що надає тілу прискорення. [$\approx 7,4\,\text{Н}$]
2.19	На візку, що рухається горизонтально з прискоренням $a = 3,9\,\text{м/с}^2$, стоїть посудина з рідиною. Визначити кут нахилу поверхні рідини до горизонту. [$\approx 22°$]
2.20	З яким прискоренням рухається літак, якщо на нього діють чотири сили: по вертикалі – сила тяжіння $F_т = 200\,\text{кН}$ і підйомна сила $F_п = 210\,\text{кН}$; по горизонталі – сила тяги двигуна $F_д = 20\,\text{кН}$ і сила лобового опору повітря $F_с = 10\,\text{кН}$? Який напрям має вектор прискорення? [$0,7\,\text{м/с}^2$, під кутом $45°$ до горизонту]
2.21	Внаслідок взаємодії між собою два тіла набули прискорень $a_1 = 1\,\text{см/с}^2$ та $a_2 = 1\,\text{м/с}^2$. Визначити співвідношення мас тіл. [$m_2/m_1 = 1/100$]
2.22	Однакові тягарці масами по $m = 120\,\text{г}$ прикріпили до нитки, перекинутої через блок. На один з тягарців діє вертикально вниз сила $F = 0,48\,\text{Н}$. Визначити: **А)** шлях, який проходить кожен з тягарців за час $t = 2\,\text{с}$; **Б)** швидкості тягарців в ці моменти часу. [$40\,\text{см}$; $40\,\text{см/с}$]
2.23	Через блок перекинули нитку на кінцях якої висять гирі які важать $m = 200\,\text{г}$ кожна. Яку вертикальну силу треба прикласти до однієї з гир, щоб вона почала рухатись з прискоренням $a = 50\,\text{см/с}^2$? [$0,2\,\text{Н}$]

Рівень Б

2.24	Протягом $t = 30\,\text{с}$ людина жердиною відштовхує від причалу баржу, прикладаючи зусилля $F = 400\,\text{Н}$. На яку відстань відійде від причалу баржа, якщо її маса $m = 300\,\text{т}$? [$0,6\,\text{м}$]
2.25	Тіло масою $m = 2\,\text{кг}$ лежить на горизонтальній поверхні. Яка горизонтальна сила повинна діяти на тіло, щоб воно почало рухатись з прискоренням $a = 0,2\,\text{м/с}^2$? Коефіцієнт тертя між тілом і поверхнею $\mu = 0,02$. Якою буде ця сила, якщо вона напрямлена під кутом $\alpha = 30°$ до горизонту? [$0,8\,\text{Н}$; $0,9\,\text{Н}$; $0,925\,\text{Н}$]
2.26	Тіло лежить на горизонтальній поверхні. Якщо йому надати початкової швидкості $v_0 = 3\,\text{м/с}$, то до зупинки воно пройде шлях $S = 1\,\text{м}$. Визначити коефіцієнт тертя між тілом та поверхнею. [$0,46$]
2.27	Магніт масою $m = 50\,\text{г}$ прилип до вертикальної сталевої плити. Для рівномірного ковзання магніта вниз до нього прикладають силу $F = 1,5\,\text{Н}$. Визначити: **А)** силу тиску магніта на плиту; **Б)** вертикальну силу, яку необхідно прикласти до магніта для рівномірного ковзання магніта вгору. Коефіцієнт тертя $\mu = 0,2$. [$10\,\text{Н}$; $2,5\,\text{Н}$]
2.28	Космічний корабель, маса якого $m = 10^6\,\text{кг}$ піднімається з Землі вертикально вгору. Сила тяги його двигунів $F = 2,94 \cdot 10^7\,\text{Н}$. Визначити: **А)** прискорення корабля; **Б)** координату корабля через $t = 10\,\text{с}$ після старту; **В)** швидкість корабля в цей момент. [$19,6\,\text{м/с}^2$; $980\,\text{м}$; $196\,\text{м/с}$]
2.29	Спортсмен стрибає з вишки у воду. На скільки опір повітря збільшує час падіння, якщо висота вишки $h = 10\,\text{м}$, а фактичний час падіння $t = 1,8\,\text{с}$? [$0,4\,\text{с}$]
2.30	Автомобіль рухається зі швидкістю $v_1 = 72\,\text{км/год}$ у вітряну погоду. Швидкість вітру $v_2 = 15\,\text{м/с}$. Сила опору пропорційна квадрату швидкості автомобіля відносно повітря. У скільки разів зросте сила опору при тій самій швидкості руху автомобіля проти вітру. [49]
2.31	Сані можна утримати на схилі гори, що має ухил $\alpha = 0,2$ силою не меншою ніж $F = 49\,\text{Н}$. Для того, щоб рухати сані рівномірно вгору, силу необхідно збільшити на $\Delta F = 9,8\,\text{Н}$. З яким прискоренням рухатимуться сані, якщо їх звільнити? [$1,78\,\text{м/с}^2$]
2.32	Тіло зісковзує з гірки висотою $h = 2\,\text{м}$, яка нахилена до горизонту під кутом $\alpha = 45°$. Граничний кут, при якому тіло на гірці ще перебуває у спокої $\beta = 30°$. Визначити час спуску тіла. [$\approx 1,4\,\text{с}$]
2.33	Тіло зісковзує без тертя з вершини похилої площини. Його середня швидкість за перші $t_1 = 0,5\,\text{с}$ на $\Delta v = 2,45\,\text{м/с}$ менша, ніж середня швидкість за перші $t_2 = 1,5\,\text{с}$. Визначити кут нахилу площини до горизонту. [$30°$]
2.34	Тіло лежить на похилій площині, яка утворює кут $\alpha = 4°$ з горизонтом. Визначити: **А)** граничне значенні коефіцієнта тертя, при якому тіло почне ковзати по площині; **Б)** прискорення тіла, якщо коефіцієнт тертя $\mu = 0,03$; **В)** час, за який тіло проходить в цих умовах шлях $S = 100\,\text{м}$; **Г)** швидкість тіла в кінці спуску. [А) $0,07$; Б) $0,39\,\text{м/с}^2$; $22,7\,\text{с}$; $8,9\,\text{м/с}$]

2.35	Два вантажі m_1 та m_2 висять на пружній нитці, як показано на **рис.2.34а**. Якщо перепалити нитку, яка зв'язує вантажі, то m_1 починає рухатись з прискоренням $a_1 = 5\,\text{м/с}^2$. Визначити прискорення вантажу m_2, якщо вантажі поміняти місцями (**рис.2.34б**) і знов перепалити нитку. [$20\,\text{м/с}^2$]	 **Рис.2.34**

2.36	Два вантажі масами $m_1 = 2\,\text{кг}$ і $m_2 = 3\,\text{кг}$, що з'єднані між собою ниткою, лежать на горизонтальній поверхні. До тіла m_1 прикладають силу $F = 40\,\text{Н}$, яка напрямлена в гору під кутом $\alpha = 30°$ до горизонту. Коефіцієнт тертя між тілами і поверхнею $\mu = 0,4$. Визначити: **а)** прискорення тіл; **б)** силу натягу нитки. [$4,6\,\text{м/с}^2$; $25,5\,\text{Н}$]
2.37	Через блок перекинута нитка, на кінцях якої прив'язані вантажі. Чому дорівнює відношення мас вантажів, якщо вони рухаються з прискоренням $a = 0,2g$ (g – прискорення вільного падіння).[$2:3$]
2.38	Мідний брусок довжиною $l = 50\,\text{см}$ рухається зі сталим прискоренням $a = 2\,\text{м/с}^2$, вектор якого напрямлений вздовж осі бруска. Визначити механічну напругу, яка виникає при цьому на відстані $x = 30\,\text{см}$ від переднього кінця бруска. [$\rho l\left(L-a\right)x = 3,56\,\text{кПа}$; ρ – густина міді]
2.39	Ліфт при розгоні і гальмуванні рухається з одним за модулем прискоренням. Чому дорівнює модуль прискорення, якщо вага людини у ліфті відрізняється в першому і другому випадках у 3 рази? [$4,9\,\text{м/с}^2$]
2.40	У ліфті, що рухається, до стелі на нитці підвішена гиря масою $m_1 = 1\,\text{кг}$. До цієї гирі знизу прив'язано нитку, на якій висить друга гиря масою $m_2 = 2\,\text{кг}$. Визначити натяг верхньої нитки, якщо натяг нитки між гирями $F = 9,8\,\text{Н}$. [$14,7\,\text{Н}$]

Рівень В

2.41	М’яч починає вільно падати з великої висоти, та через деякий час його швидкість стає сталою. Визначити прискорення м’яча безпосередньо після пружнього удару об землю. [$2g$]
2.42	Від поїзда масою M, який рухається зі сталою швидкістю, відривається останній вагон масою m. Пройшовши відстань l, вагон зупиняється. На якій відстані від вагона буде знаходитись поїзд на момент зупинки, якщо сила тяги локомотива стала, а сила тертя кожної частини поїзда не залежить від швидкості і пропорційна її вазі? [$\dfrac{Ml}{M-m}$]
2.43	Спортсмен повинен пробігти дистанцію $S = 100\,\text{м}$ за час не більший ніж $t = 12\,\text{с}$, прискорюючись тільки на першій ділянці довжиною $l = 20\,\text{м}$. При якому мінімальному коефіцієнті тертя між взуттям та біговою доріжкою спортсмен зможе виконати поставлене завдання? [$0,25$]
2.44	Похила площина становить кут $\alpha = 20°$ з горизонтом. По ній пускають знизу вгору кульку масою $m = 1\,\text{кг}$. Визначити силу опору, що діє на кульку, якщо час її руху вгору у $n = 2$ рази менший ніж час спуску. [$2\,\text{Н}$]

2.45 По похилій площині з кутом нахилу α, підіймають за мотузку ящик маси m. Коефіцієнт тертя між ящиком та площиною дорівнює μ. При якому куті між мотузкою та горизонтом сила натягу мотузки буде найменшою? Чому дорівнює ця найменша сила? [$\beta+\mathrm{arctg}\mu$; $\frac{mg(\sin\alpha+\mu\cos\alpha)}{\sqrt{1+\mu^2}}$]

2.46 Бруски, маси яких $m_1=1\,\text{кг}$ та $m_2=1{,}5\,\text{кг}$, лежать на горизонтальному столі (**рис.2.46**). До бруска m_1 прикладена сила $F=5\,\text{Н}$, напрямлену під кутом $\vartheta=30°$ до горизонту. З яким прискоренням буде рухатись кожен з брусків, якщо коефіцієнт тертя між брусками $\mu_1=0{,}4$, а між бруском m_2 і столом – $\mu_2=0{,}1$?

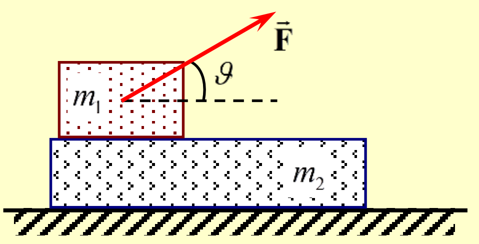


Рис.2.46

[$a_1=\frac{lF(\sin\vartheta+\mu_1\cos\vartheta)}{m_1}-\mu_1 g=2{,}5\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$; $a_2=\frac{(\mu_1-\mu_2)(m_1 g-lF\sin\vartheta)}{m_2}-\mu_2 g=0{,}38\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$]

2.47 Два бруски лежать один на одному. Маса верхнього бруска $m_1=2\,\text{кг}$, нижнього – $m_2=1\,\text{кг}$. Коефіцієнт тертя між брусками $\mu_1=0{,}25$, між бруском m_2 і поверхнею $\mu_2=0{,}5$. До нижнього бруска прикладають горизонтальну силу $F=19{,}6\,\text{Н}$. З яким прискоренням буде рухатись верхній брусок відносно нижнього та відносно поверхні стола? [$2{,}45\,\text{м}/\text{с}^2$; $7{,}35\,\text{м}/\text{с}^2$]

2.48 Дошка маси $m_2=1\,\text{кг}$ та довжини l знаходиться на гладкій горизонтальній поверхні. На краю дошки лежить тіло маси $m_1=0{,}2\,\text{кг}$. Коефіцієнт тертя між тілом і дошкою $\mu=0{,}6$. Яку силу F необхідно прикласти до тіла, щоб воно зісковзнуло з дошки, коли та пройде шлях $4l$? [$m_1 g\mu\left(1+\left[5m_1/4m_2\right]\right)=1{,}47\,\text{Н}$]

2.49 Для того, щоб зрушити з місця ящик масою M, людина масою m тягне його до себе з деякою силою, напрямленою під кутом до горизонту. Коефіцієнт тертя між підлогою і ящиком та між людиною і підлогою однакові і становить μ. Яку силу повинна прикласти людина, щоб тягнути ящик? [$\ge 0{,}5g\sqrt{(M-m)^2+\mu^2(M+m^2)}$]

2.50 З яким мінімальним прискоренням слід рухати у горизонтальному напрямі брусок A (**рис.2.50**), щоб тіла 1 та 2 не рухались відносно нього? Маси тіл однакові, коефіцієнт тертя між обома тілами та бруском становить μ. [$a_{\min}=\frac{1-\mu}{1+\mu}g$]

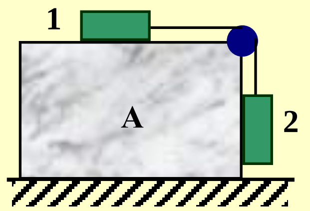


Рис.2.50

2.51 Визначити прискорення вантажів m_1 та m_2 у системі блоків, яка показана на **рис2.51**. [$a_1=\frac{2m_1-m_2}{2m_1+m_2/2}$; $a_2=a_1/2$]

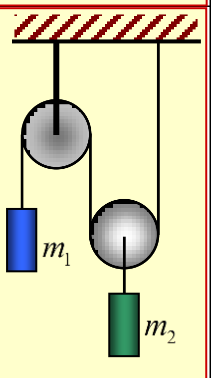
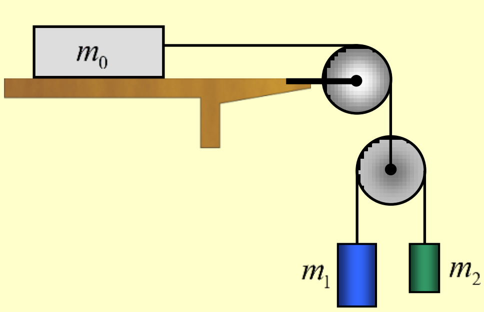


Рис.2.51

2.52	У системі, яка показана на **рис.2.52**, відомі маси тіл m_0 , m_1 та m_2 . Визначити прискорення тіла m_1 . [$\dfrac{4m_1m_2+m_0\left(m_1-m_2\right)}{4m_1m_2+m_0\left(m_1+m_2\right)}g$]	 **Рис.2.52**
2.53	Невагомий блок укріплено на вершині двох похилих площин, які утворюють кути $\alpha=45^\circ$ та $\beta=30^\circ$ з горизонтом. Однакові вантажі масою $m=1\,\text{кг}$ кожний з'єднані невагомою ниткою, яка перекинута через блок. Коефіцієнт тертя між вантажами та площинами $\mu=0{,}1$. З яким прискоренням рухаються вантажі? Чому дорівнює сила натягу нитки під час руху? Чому дорівнює сила реакції на осі блока? [$0{,}24\,\text{м/с}^2$; $6\,\text{Н}$; $7{,}3\,\text{Н}$]	

Рекомендації до теми
"Зв'язок між імпульсом та силою"

Задачі цього типу розв'язуються за загальною схемою розв'язування задач динаміки (див. **рекомендації до розділу**). Але тут на рисунку замість прискорення треба показати вектори початкового та кінцевого імпульсу та вектор зміни імпульсу тіла, що розглядається в задачі.
Типовим завданням в таких задачах є визначення сил через зміну імпульсу за певний проміжок часу. Тому не слід забувати, що, згідно з другим законом Ньютона **(2.4)**, зміна імпульсу тіла визначається не якоюсь окремою силою, а рівнодійною всіх сил, що прикладені до нього.
Досить часто розглядані сили є змінними. В такому разі зміна імпульсу тіла визначається середнім за час дії значенням сили. Імпульс змінної сили за даний проміжок часу чисельно дорівнює площі під відповідною ділянкою графіка залежності сили від часу.

Задача 2.10

Пластилінова кулька масою $m = 0{,}1\,\text{кг}$, яка кинута вертикально вгору, безпосередньо перед ударом об стелю має швидкість $v = 4{,}9\,\text{м/с}$. Деформуючись при ударі, кулька прилипає до стелі і набуває остаточної форми за час $\tau = 0{,}18\,\text{с}$.

Визначити
середню силу тиску F пластиліну на стелю в процесі удару.

Розв'язання.

Дано:
$m = 0{,}1\,\text{кг}$
$v = 4{,}9\,\text{м/с}$
$\tau = 0{,}18\,\text{с}$

Визначити: F

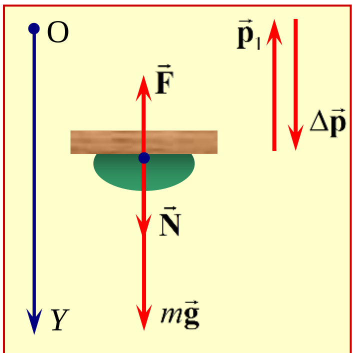


Рис.10

Прилипання кульки до стелі – це процес пластичної деформації пластиліну під дією змінних сил. Детальний характер цього процесу та залежність сил в ньому від часу невідомі, але середню силу тиску можна визначити без ускладнень, використавши "імпульсне" формулювання другого закону Ньютона **(2.4)**.
Зміна імпульсу кульки відбувається під дією сили реакції опори $\vec{N}$ та сили тяжіння $m\vec{g}$. За третім законом Ньютона сила тиску на стелю F за модулем дорівнює силі реакції опори N, отже, фактично задача полягає у визначенні сили N.

На **рис.10** показані вектори сил $\vec{N}$, $m\vec{g}$, $\vec{F}$, початкового імпульсу $\vec{p}_1$ та зміни імпульсу $\Delta\vec{p}$. Кінцевий імпульс кульки дорівнює нулю $\vec{p}_2 = 0$, тому $\Delta\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = -\vec{p}_1$. Згідно з рівнянням другого закону Ньютона ($\Delta\vec{p} = \vec{F}\Delta t$) маємо:

$$-\vec{p}_1 = \left(m\vec{g} + \vec{N}\right)\tau. \qquad (1)$$

У проекціях на вертикальну вісь OY рівняння **(1)** має вигляд:

$$p_1 = \left(mg + N\right)\tau,$$

звідки знаходимо:

$$\frac{mv}{\tau} - mg = N \qquad \Rightarrow \qquad F = N = m\left(\frac{v}{\tau} - g\right).$$

Обчислення дає:

$$F = 0{,}1\cdot\left(\frac{4{,}9}{0{,}18} - 9{,}8\right) \approx 1{,}74\,\text{Н}.$$

Задача 2.11

Дві кульки масами $m_1 = m$ і $m_2 = 2m$ мають швидкості $v_{1п} = 2v$ і $v_{2п} = v$, які показано на рис.11-1. На кульки одночасно починає діяти однакова за модулем та напрямом сила.
Визначити:
А) швидкість кульки m_2, в момент, коли вектор швидкості кульки m_1 стане таким, як показано на рис.11-1 штриховою лінією;
Б) кут між напрямками векторів швидкостей кульок.
Розв'язання.

Дано:
$m_1 = m$
$m_2 = 2m$
$v_{1п} = 2v$
$v_{2п} = v$
$\vec{F}_1 = \vec{F}_2$
$\vec{v}_{1к} = -\vec{v}_{1п}$

Визначити: $\vec{v}_{2к}$, α

За умовою задачі немає потреби визначати характер руху кульок за час дії сили. Тому доречно використати другий закон Ньютона у формі **(2.4)**: $\Delta\vec{p} = \vec{F}\Delta t$.

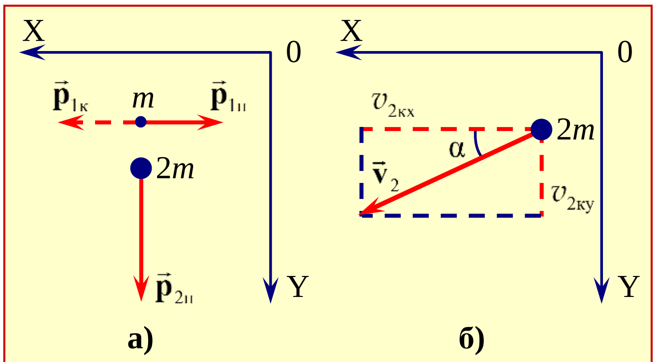


Рис.11-1

Оскільки на кульки діють однакові імпульси сили то й зміни їхніх імпульсів теж однакові:

$$\Delta\vec{p}_1 = \Delta\vec{p}_2 \qquad \Rightarrow \qquad \vec{p}_{1к} - \vec{p}_{1п} = \vec{p}_{2к} - \vec{p}_{2п}. \qquad (1)$$

де: $\vec{p}_{1к}$, $\vec{p}_{1п}$ – кінцевий та початковий імпульси першої кульки, $\vec{p}_{2к}$, $\vec{p}_{2п}$ – теж саме для другої кульки.
Оберемо осі координат так, як показано на **рис.11-1а**. Проекції імпульсів на ці осі дорівнюють:

$$p_{1пx} = -m\cdot 2v, \qquad p_{2пx} = 0,$$
$$p_{1пy} = 0, \qquad p_{2пy} = 2mv,$$
$$p_{1кx} = m\cdot 2v, \qquad p_{2кx} = 2mv_{2кx},$$
$$p_{1кy} = 0, \qquad p_{2кy} = 2mv_{2кy},$$

де $v_{2кх}$ і $v_{2ку}$ – шукані проекції вектора кінцевої швидкості кульки m_2 на координатні осі.
Векторне рівняння **(1)** у проекціях на ці осі перетворюється на систему рівнянь:

$$\begin{matrix} OX: & p_{1кx} - p_{1пx} = p_{2кx} - p_{2пx} \\ OY: & p_{1кy} - p_{1пy} = p_{2кy} - p_{2пy} \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} m\cdot 2v - (-m\cdot 2v) = 2mv_{2кx}, \\ 0 - 0 = 2mv_{2кy} - 2mv, \end{cases}$$

звідки: $v_{2кх} = 2v$; $v_{2ку} = v$. Модуль v_2 дорівнює $v_2 = \sqrt{v_{2кх}^2 + v_{2ку}^2}$, таким чином:

$$v_2 = \sqrt{(2v)^2 + v^2} = v\sqrt{5}.$$

Орієнтація вектора $\vec{v}_2$ відносно координатних осей визначається кутом α (див. **рис.11-1б**):

$$\text{tg}\alpha = \frac{v_{2y}}{v_{2x}} = \frac{v}{2v} = \frac{1}{2} \qquad \Rightarrow \qquad \alpha = \text{arctg}0,5 \approx 26,5°.$$

Задачу можна також розв'язати геометрично. З умови очевидно, що кінцевий імпульс $\vec{p}_{1к} = -\vec{p}_{1п} = -m\vec{v}_{1п}$.. Оскільки $\Delta\vec{p}_2 = \Delta\vec{p}_1$, то

$$2mv_{2к} - 2mv_{2п} = -2mv_{1п} \qquad \Rightarrow \qquad v_{2к} - v_{2п} = -v_{1п} \qquad \Rightarrow \qquad v_{2к} = v_{2п} - v_{1п}.$$

З **рис.11-1б** знаходимо:

$$v_{2к} = \sqrt{v_{2п}^2 + v_{1п}^2} = \sqrt{v^2 + (2v)^2} = v\sqrt{5};$$

$$\text{tg}\alpha = \frac{v_{2п}}{v_{1п}} = \frac{1}{2} \qquad \Rightarrow \qquad \alpha = 26,5°.$$

Задача 2.12

Ракета маси M з працюючим двигуном нерухомо "зависла" над поверхнею землі.

Визначити

скільки палива за одиницю часу μ вона повинна витрачати при цьому, якщо швидкість витікання газів відносно ракети дорівнює u .

Розв'язання.

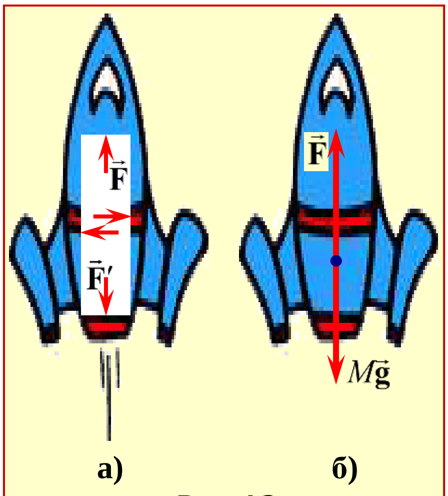


Рис.12

Дано:
M
u

Визначити: μ

Уявімо для зручності, що камера двигуна ракети має циліндричну форму (**рис.12а**). При згорянні палива утворюються гази, які спричинюють однаковий тиск на всі стінки камери. Тому, коли б камера була герметичною, сили тиску були б скомпенсованими. Проте в нижній стінці є отвір (сопло), отже її площа менша, ніж площа верхньої стінки, і, відповідно, сила тиску газів на нижню стінку теж менша, ніж на верхню. Так виникає реактивна сила $\vec{F}$, напрямлена вгору (**рис.12б**) і рівна за модулем силі F', яка діє на вилітаючи з сопла гази – продукти згоряння палива.

Нехай за невеликий проміжок часу Δt викидається маса Δm газів. Під дією сили F' ця порція газів набуває імпульсу $\Delta m u$, де u – швидкість витоку газів з сопла. Згідно з другим законом Ньютона **(2.3)**:

$$F' = \frac{\Delta m u}{\Delta t} \qquad \Rightarrow \qquad F' = \mu u,$$

де μ – шукана витрата палива за одиницю часу.

Реактивна сила $F = F'$ зрівноважує силу тяжіння, що діє на ракету. Отже

$$Mg = \mu u \qquad \Rightarrow \qquad \mu = \frac{Mg}{u}.$$

Примітка. Витрата пального μ реально досить велика і маса ракети M швидко зменшується з часом. Тому в отриманій формулі величини μ і M слід розглядати як миттєві значення для даного моменту часу. Відтак, для здійснення режиму "зависання" витрата пального повинна поступово зменшуватись відповідно до зменшення маси, але такі розрахунки виходять за межі елементарної фізики.

Задача 2.13

Пучок молекул водню налітає на стінку перпендикулярно до неї й відбивається без втрати швидкості.

Визначити

тиск P який створюють молекули на стінку, якщо маса молекули $m = 3{,}3\cdot 10^{-27}$ кг, швидкість руху $v = 1000$ м/с, концентрація молекул у пучку $n = 2{,}5\cdot 10^{19}$ см$^{-3}$.

Розв'язання.

Дано:
$m = 3{,}3\cdot 10^{-27}$ кг
$v = 1000$ м/с
$n = 2{,}5\cdot 10^{19}$ см$^{-3}$ $= 2{,}5\cdot 10^{25}$ м$^{-3}$

Визначити: P

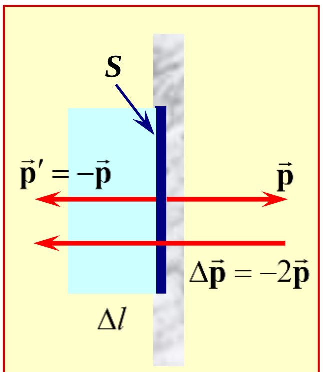


Рис.13

Стикаючись зі стінкою, окрема молекула створює дуже короткочасний, мікроскопічний імпульс сили типу "уколу". Але через дуже велику кількість молекул, ці "уколи" відбуваються настільки часто та густо, що створюється стала й рівномірно розподілена по поверхні сила тиску. Для її визначення виділимо на стінці ділянку площею S (**рис.13**). Імпульс сили, який діє на стінку під час зіткнення однієї молекули, дорівнює імпульсу сили, що діє з боку стінки на молекулу[15], отже можна записати:

$$f\,\Delta t = \left|\Delta\vec{\mathbf{p}}\right|,$$

де f – середнє значення сили взаємодії між молекулою та стінкою, Δt – час зіткнення, $\left|\Delta\vec{\mathbf{p}}\right|$ – модуль зміни імпульсу молекули за час зіткнення.

Імпульс сумарної сили F, що діє на ділянку S протягом часу τ, запишеться як:

$$F\tau = N\left|\Delta\vec{\mathbf{p}}\right|,$$

де N – кількість зіткнень молекул з цією ділянкою за час τ. Звідси маємо:

$$F = \frac{N}{\tau}\left|\Delta\vec{\mathbf{p}}\right| = n_з\left|\Delta\vec{\mathbf{p}}\right|, \qquad (1)$$

де $n_з$ – кількість зіткнень за одиницю часу.

Оскільки зіткнення відбуваються без втрати швидкості, то $\Delta\vec{\mathbf{p}} = -2\vec{\mathbf{p}}$ (**рис.13**), і

$$\left|\Delta\vec{\mathbf{p}}\right| = 2p = 2mv. \qquad (2)$$

Тепер лишається визначити $n_з$. Для цього побудуємо на площадці S як на основі циліндр висотою Δl. В цьому циліндрі міститься $N = nS\Delta l$ молекул (n – концентрація) і всі вони зіткнуться з площадкою S за час $\tau = \dfrac{\Delta l}{v}$ (v – швидкість руху молекул). Кількість зіткнень за одиницю часу

$$n_з = \frac{N}{\tau} = \frac{nS\Delta l}{(\Delta l/v)} = nvS.$$

Підставивши цей вираз та вираз **(2)** у формулу **(1)**, маємо:

$$F = 2nmv^2S.$$

Розділивши силу F на площу S, отримаємо тиск:

$$P = 2nmv^2 = 2\cdot 2{,}5\cdot 10^{25}\cdot 3{,}3\cdot 10^{-27}\cdot\left(10^3\right)^2 = 1{,}65\cdot 10^5\ \text{Па}.$$

Задача 2.14

Маленька пружна шайба ковзає без тертя по горизонтальній підлозі і вдаряє по пружній стіні. Коефіцієнт тертя між стіною та шайбою дорівнює μ. Вектор швидкості шайби перед ударом утворює кут α з перпендикуляром до стіни.

Визначити,

кут відбивання β, тобто кут між перпендикуляром до стіни та вектором швидкості шайби після відскоку.

Розв’язання.

Дано:
μ
α

Визначити: β

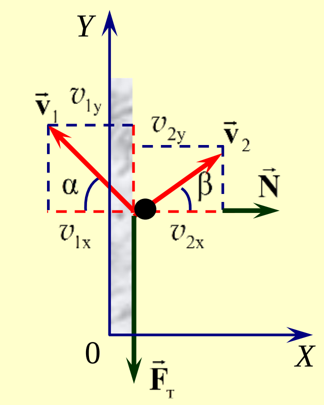


Рис.14

При контакті між шайбою та стіною сили взаємодії досить складно змінюються з часом. Тому для розв'язання задачі використаємо імпульсну форму другого закону Ньютона **(2.4)**. В момент контакту зі стіною (**рис.14**) на шайбу діють сили тертя $\vec{\mathbf{F}}_т$ та нормальної реакції опори[16] $\vec{\mathbf{N}}$. Дія цих сил призводить до зміни як величини, так і напрямку імпульсу шайби згідно з рівнянням

$$\left(\vec{\mathbf{F}}_т + \vec{\mathbf{N}}\right)\tau = \vec{\mathbf{p}}_2 - \vec{\mathbf{p}}_1, \qquad (1)$$

де $\vec{\mathbf{p}}_1$, $\vec{\mathbf{p}}_2$ – початковий та кінцевий імпульси шайби, τ – час контакту між шайбою та стіною.

У проекціях на осі координат, (см. **рис.14**), рівняння (1) має вигляд

---

[15] Це прямий наслідок **III закону Ньютона**.

[16] Сили тяжіння та нормальної реакції підлоги скомпенсовані і тому не розглядаються.

$$OX: \quad mv_2\cos\beta - (-mv_1\cos\alpha) = N\tau,$$
$$OY: \quad mv_2\sin\beta - mv_1\sin\alpha = -F_т\tau. \qquad (2)$$

Зміна нормальної складової швидкості шайби v_x під час удару відбувається під дією пружної сили $\vec{N}$. Спочатку шайба (і стіна) пружно деформується, складова її швидкості v_{1x} зменшується до нуля і відповідна частина кінетичної енергії переходить у потенціальну енергію пружної деформації. Потім, на стадії відскоку, форма шайби (і стіни) повністю відновлюється, а потенціальна енергія пружної деформації переходить знов у кінетичну. Тому нормальна складова швидкості повністю відновлюється[17]. Отже $v_2\cos\beta = v_1\cos\alpha$.

Врахувавши це, а також вираз сили тертя $F_т = \mu N$, з рівнянь **(2)** отримаємо систему:

$$\begin{cases} m(v_2\cos\beta + v_1\cos\alpha) = N\tau, \\ m(v_2\sin\beta - v_1\sin\alpha) = -\mu N\tau, \\ v_2\cos\beta = v_1\cos\alpha. \end{cases} \qquad (3)$$

Поділивши друге рівняння системи на перше і підставивши з третього виразу $v_2 = v_1\dfrac{\cos\alpha}{\cos\beta}$, отримаємо:

$$-\mu = \frac{v_2\sin\beta - v_1\sin\alpha}{v_2\cos\beta + v_1\cos\alpha} = \frac{v_1\cdot \mathrm{tg}\beta\cdot\cos\alpha - v_1\sin\alpha}{v_1\cos\alpha + v_1\cos\alpha} = \frac{\mathrm{tg}\beta - \mathrm{tg}\alpha}{2},$$

звідки

$$\mathrm{tg}\beta = \mathrm{tg}\alpha - 2\mu.$$

При великому значенні коефіцієнта тертя може статися, що $2\mu \geq \mathrm{tg}\alpha$, тангенс кута відбивання нібито від'ємний. Цього бути не може, тому що сила тертя не може змінити напрям паралельної до стіни складової вектора швидкості, оскільки вона діє лише доти, доки шайба рухається. Тому за умови $2\mu \geq \mathrm{tg}\alpha$ кут відбивання дорівнює нулю (шайба відбивається перпендикулярно стіні).

Ще один цікавий результат можна одержати з системи рівнянь **(3)**. При умові, що час контакту між стіною і шайбою дуже малий ($\tau \approx 0$) або тертя неістотне ($\mu = 0$), виходить, що $\mathrm{tg}\beta = \mathrm{tg}\alpha$, тобто кут падіння дорівнює куту відбивання. Цим користуються, розв'язуючи задачі, де розглядається удар тіл.

Задача 2.15

Вагон маси $m = 50$ т рухається за інерцією зі сталою швидкістю $v_0 = 10$ м/с. У певний момент часу на нього починає діяти гальмівна сила, яка змінюється з часом за законом $F = \alpha t$, де $\alpha = 100$ Н/с.

Визначити

час τ від початку гальмування до зупинки вагону. Тертям знехтувати.

Розв'язання.

Дано:
$m = 50\ \text{т} = 5\cdot 10^4$ кг
$v = 10$ м/с
$F = \alpha t$
$\alpha = 100$ Н/с

Визначити: τ

Після початку гальмування рух вагона визначається тільки гальмівною силою $\vec{F}$ (**рис.15-1**), оскільки сили тяжіння $m\vec{g}$ та реакції опори $\vec{N}$ скомпенсовані.

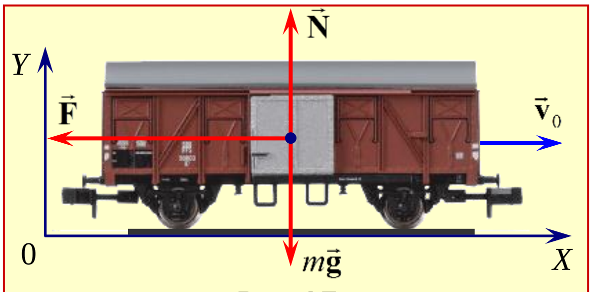


Рис.15

Гальмівна сила залежить від часу, тож і

---

[17] Ці міркування не стосуються складових швидкості v_{1y} та v_{2y}, скільки внаслідок дії сили тертя частина кінетичної енергії шайби необоротно переходить у внутрішню (теплову) енергію шайби та стіни.

прискорення вагона є функцією часу. За умовою задачі немає потреби визначати характер руху тіла за час дії сили, тому доцільно використати імпульсну форму другого закону Ньютона у формулі **(2.4)**.

Під дією сили $\vec{\mathbf{F}}$ відбувається зміна імпульсу вагона від значення $\vec{\mathbf{p}}_1 = m\vec{\mathbf{v}}_0$ до $\vec{\mathbf{p}}_2 = 0$. Вектор зміни імпульсу $\Delta\vec{\mathbf{p}} = \vec{\mathbf{p}}_2 - \vec{\mathbf{p}}_1 = -\vec{\mathbf{p}}_1$, а його проекція на вісь OX (**рис.15-1**) дорівнює

$$\Delta p_x = -p_1 = -mv_0.$$

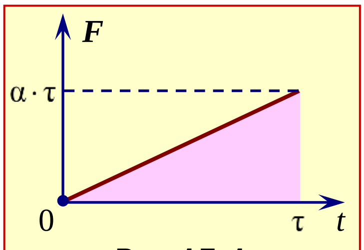


Рис.15-1

Зміна імпульсу відбувається під дією гальмівної сили, проекція якої на вісь OX $F_x = F = -\alpha t$. Як вже згадувалося у вступі, площа під графіком залежності сили від часу чисельно дорівнює імпульсу сили, отже й зміні імпульсу вагона. У даній задачі графік $F = f(t)$ являє собою пряму лінію, яка проходить через початок координат (**рис.15-2**), і площа під ним (вона заштрихована) дорівнює $\frac{1}{2}\alpha\tau\cdot\tau$. Отже за другим законом Ньютона

$$|\Delta p_x| = F\Delta t \qquad \Rightarrow \qquad mv_0 = \frac{1}{2}\alpha\tau^2,$$

звідки час руху вагона до зупинки:

$$\tau = \sqrt{\frac{2mv_0}{\alpha}} = \sqrt{\frac{2\cdot 5\cdot 10^4\cdot 10}{10^2}} = 100 \text{ с.}$$

Тема: Зв'язок між імпульсом та силою

Задачі для самостійної роботи

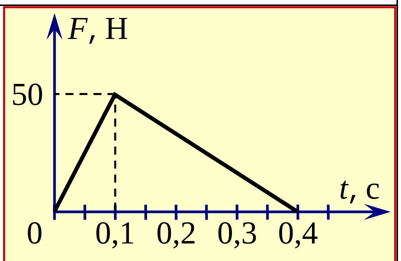
Рівень А

2.54	По нерухомому м'ячу масою $m = 0{,}5$ кг б'є футболіст, після чого м'яч летить зі швидкістю $v = 10$ м/с. Визначити середню силу удару, якщо тривалість удару $t = 0{,}02$ с. [250 Н]
2.55	Кулька маси $m = 5$ г, що летіла горизонтально зі швидкістю $v = 5$ м/с, вдарила у вертикальну стіну і пружно відбилася. Визначити середню силу, що діяла на кульку під час удару. Контакт між кулькою і стіною тривав $\tau = 0{,}05$ с. [1 Н]

= = =

Рівень Б

2.56	Рух тіла масою $m = 2$ кг описується рівнянням: $x(t) = 5 - 8t + 4t^2$, м. Визначити імпульс тіла через $t_1 = 2$ с та $t_2 = 4$ с після початку руху, а також силу, яка призвела до зміни імпульсу. [16 (кг·м)/с, 48 (кг·м)/с; 16 Н]
2.57	Поїзд, маса якого $m = 500$ т рухався рівномірно зі швидкістю $v = 12$ м/с. Після припинення дії сили тяги тепловоза він, рухаючись по інерції, зупиняється під дією сили тертя через $t = 1$ хв. Визначити силу тяги тепловоз, якщо поїзд рухався зі сталою швидкістю. [0,1 МН]
2.58	М'яч маси $m = 150$ г, який летів зі швидкістю $v = 10$ м/с, вдаряється о гладку стіну під кутом $\alpha = 30°$ до неї та відскакує без зміни величини швидкості. Визначити середню силу, що діяла на м'яч за час удару, якщо тривалість удару $t = 0{,}1$ с. [15 Н]
2.59	Тіло масою $m = 40$ г, яке кинули вертикально вгору з початковою швидкістю

	$v = 30\,\text{м/с}$, досягло найвищої точки підйому через час $t = 2{,}5\,\text{с}$. Визначити силу опору повітря, яка діяла на тіло під час польоту. [$88\,\text{мН}$]
2.60	Тіло масою $m = 1\,\text{кг}$ кинули під кутом до горизонту. За час польоту його імпульс змінився на $\Delta p = 10\,(\text{кг}\cdot\text{м})/\text{с}$. Визначити максимальну висоту підйому тіла. [$2{,}5\,\text{м}$]
2.61	Футболіст б'є по нерухомому м'ячу масою $m = 400\,\text{г}$. Залежність від часу сили, що діє на м'яч при ударі, показана на **рис.2.61**. Визначити швидкість м'яча одразу після удару. [$25\,\text{м/с}$]  **Рис.2.61**
2.62	Визначити середню швидкість, яка діє на плече при стрільбі з автомата, якщо маса кулі становить $m = 10\,\text{г}$, її швидкість під час вильоту зі ствола $v = 300\,\text{м/с}$. За час $t = 1\,\text{хв.}$ автомат робить $n = 300$ пострілів. [$15\,\text{Н}$]

Рівень В

2.63	Струмінь води перерізом $S = 6\,\text{см}^2$, б'є в стіну під кутом $\alpha = 60°$ до нормалі і пружно відбивається від неї (без втрати швидкості). Визначити силу тиску струменя на стіну, якщо швидкість води $v = 12\,\text{м/с}$? [$86{,}4\,\text{Н}$]
2.64	Тенісний м'яч масою $m = 100\,\text{г}$, який летить горизонтально зі швидкістю $v = 20\,\text{м/с}$, відбито ударом ракетки у протилежному напрямі. Швидкість ракетки в момент удару $V = 15\,\text{м/с}$. Визначити: а) модуль зміни імпульсу м'яча в результаті удару; б) середню силу, що діяла на м'яч під час удару, якщо контакт між ракеткою і м'ячем тривав $t = 0{,}05\,\text{с}$, Удар вважати пружним, дією сили тяжіння знехтувати. [$7\,(\text{кг}\cdot\text{м})/\text{с}; 140\,\text{Н}$]
2.65	Ракета, що має поперечний переріз $S = 2\,\text{м}^2$, рухається у космічному просторі зі швидкістю $v = 1\,\text{Мм/с}$ та влітає у нерухому хмару космічного пилу з густиною $\rho = 10^{-5}\,\text{кг/м}^3$. Яку силу тяги повинен розвинути двигун ракети, щоб вона продовжувала рух із сталою швидкістю? Вважати, що пилинки прилипають до корпусу ракети. Зростанням маси ракети знехтувати. [$20\,\text{МН}$]

Рекомендації до розділу
"Рівномірний рух по колу"

У задачах на рівномірний рух по колу (як і в інших задачах динаміки) одним з найважливіших етапів розв'язування є аналіз того, які взаємодії даного тіла з іншими тілами створюють "доцентрову силу", а також запис вихідного рівняння руху (**II закона Ньютона**).

При рівномірному русі по колу вектори швидкості, прискорення та діючих сил неперервно змінюють свої напрями. Тому записувати рівняння руху в проекціях і виконувати викладки відносно певної інерціальної системи координат недоцільно. Набагато зручніше записувати рівняння руху для певного моменту в проекціях на радіус колової траєкторії та (при необхідності) на якийсь інший зручний напрямок.

Тема: Рівномірний рух по колу. Приклади

Задача 2.16

Літак виконує "мертву петлю", рухаючись зі сталою швидкістю по колу радіуса $R = 1\,\text{км}$ у вертикальній площині.

Визначити

швидкість v літака, якщо максимальна вага пілота у $\eta = 3$ рази більша, ніж мінімальна.

Розв'язання.

Дано:
$R = 1\,\text{км} = 10^3\,\text{м}$
$P_{max}/P_{min} = \eta$
$\eta = 3$

Визначити: v

На схематичному **рис.16а** показане положення літака у довільній точці траєкторії. На тіло пілота в цій точці діють: сила тяжіння $m\vec{g}$, сила реакції сидіння $\vec{N}$ та реакції спинки крісла $\vec{F}$. Рівняння руху пілота має вигляд:

$$m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F} = m\vec{a}. \qquad (1)$$

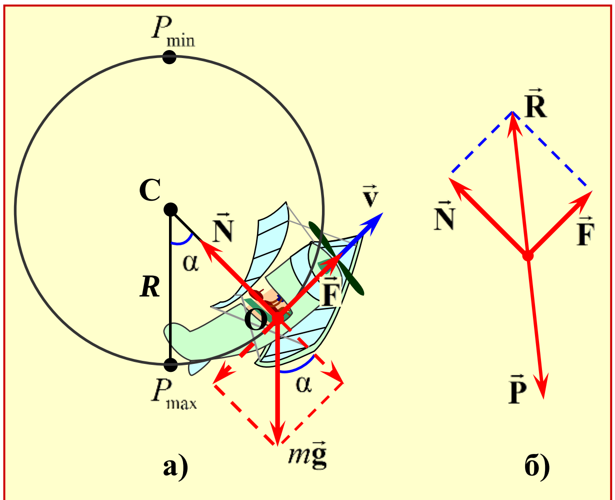


Рис.16

Модуль вектора швидкості літака залишається незмінним, отже прискорення $m\vec{a}$ – це доцентрове прискорення: $a = \dfrac{v^2}{R}$. Воно напрямлене вздовж радіуса кола тому рівняння **(1)** у проекціях на радіус має вигляд:

$$N - mg\cos\alpha = ma \quad \Rightarrow \quad N = \frac{mv^2}{R} + mg\cos\alpha, \qquad (2)$$

а у проекціях на напрям руху[18] (дотична до кола):

$$F - mg\sin\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad F = mg\sin\alpha. \qquad (3)$$

Вага пілота – це сила $\vec{P}$, з якою він тисне на опору, тобто на сидіння та спинку крісла. За величиною вага пілота дорівнює модулю $\vec{R}$ рівнодійної сили реакції крісла (**рис.16б**):

$$P = R \quad \Rightarrow \quad P = \sqrt{N^2 + F^2}.$$

Врахувавши вирази **(2)** і **(3)**, отримуємо

$$P = \sqrt{\left(\left(\frac{mv^2}{R}\right) + mg\cos\alpha\right)^2 + (mg\sin\alpha)^2}. \qquad (4)$$

Бачимо, що вага пілота залежить від кута α.
Для аналізу цієї залежності розкриємо дужки під коренем:

---

[18] В рівняннях **(2)**, **(3)** враховано, що вектор $\vec{a}$ напрямлений по радіусу, а вектор $\vec{F}$ перпендикулярно до радіусу кола.

$$P=\sqrt{\left(\frac{mv^2}{R}\right)^2+(mg)^2+2\frac{m^2gv^2}{R}\cos\alpha},$$

звідки зрозуміло, що вага пілота максимальна при $\cos\alpha=1$ (нижня точка траєкторії) і мінімальна при $\cos\alpha=-1$ (верхня точка траєкторії), причому

$$\begin{cases}P_{\max}=\dfrac{mv^2}{R}+mg,\\ P_{\min}=\dfrac{mv^2}{R}-mg.\end{cases}$$

Поділивши праві та ліві частини цих рівнянь і врахувавши, що $P_{\max}/P_{\min}=\eta$, після нескладних перетворень знайдемо:

$$v=\sqrt{\frac{\eta+1}{\eta-1}gR}=\sqrt{\frac{3+1}{3-1}\cdot 9{,}8\cdot 10^3}=140\ \text{м/с}.$$

З рівнянь **(5)** випливає, що при певному значенні швидкості вага пілота у верхній точці траєкторії ($\cos\alpha=-1$) може дорівнювати нулю. Такий стан називають **станом невагомості**; для його здійснення швидкість літака повинна дорівнювати $v=\sqrt{gR}$.

Задача 2.17

На трасі мотокросу спортсмен долає пагорб, що має у вершині форму сфери радіуса $R=40$ м.

Визначити,

при якій найменшій швидкості v_m на вершині пагорба мотоцикл зі спортсменом відірветься від землі. Прийняти $g=10\ \text{м/с}^2$.

Розв'язання.

Дано:
$R=40$ м
$g=10\ \text{м/с}^2$

Визначити: v_m

На вершині пагорба доцентрове прискорення мотоцикла зі спортсменом $\vec{\mathbf{a}}$ створюється протилежно напрямленими силами тяжіння $m\vec{\mathbf{g}}$ та реакції опори $\vec{\mathbf{N}}$ (**рис.17**). Тому з урахуванням формули **(2.17)**, рівняння руху в проекціях на вертикаль має вигляд:

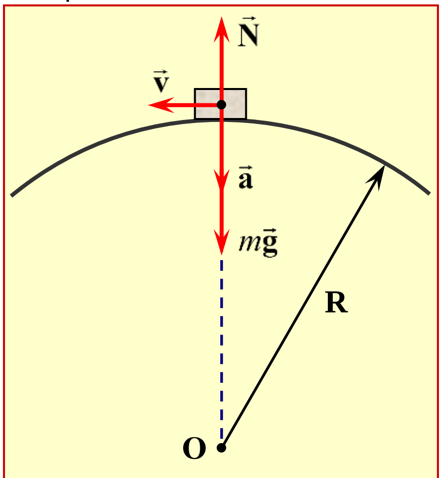


Рис.17

$$mg-N=\frac{mv^2}{R}.$$

З цього рівняння видно, що при збільшенні швидкості проходження пагорба сила N, а отже і сила тиску (вага) мотоцикла зі спортсменом на землю, зменшується і при певному значенні $v=v_m$ – обертається до нуля. Це означає, що мотоцикл відривається від землі. Таким чином,

$$mg=\frac{mv_m^2}{2}\quad\Rightarrow\quad v_m=\sqrt{gR}.$$

Обчислення дає:

$$v_m=\sqrt{10\cdot 40}=20\ \text{м/с}=72\ \text{км/год}.$$

Зауважимо, що в момент відриву $\vec{\mathbf{P}}=0$, тобто мотоцикліст знаходиться у стані невагомості (порівняйте з аналізом результату попередньої **задачі 2.16**).

Задача 2.18

Маленька кулька, що підвішена на нитці довжини l, рівномірно обертається у по колу в горизонтальній площині. Довжина нитки значно більша, ніж радіус кола.

Визначити

період обертання кульки T.

Розв'язання.

Дано:
l
$l \gg R$

Визначити: T

Радіус колової траєкторії кульки R зв'язаний з довжиною нитки співвідношенням $R = l\sin\varphi$ (**рис.18**). Отже для періоду обертання можна записати:

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi l}{v}\sin\varphi,$$

де v – швидкість кульки.

При $l \gg R$, кут φ малий, а для малих кутів $\mathrm{tg}\varphi \approx \sin\varphi \approx \varphi$. Тому можна прийняти $R = l\varphi$, і тоді

$$T = \frac{2\pi l\varphi}{v}. \qquad (1)$$

Під час рівномірного руху по колу на кульку діють сила тяжіння $m\vec{\mathbf{g}}$ та сила натягу нитки $\vec{\mathbf{F}}$. Рівняння руху кульки:

$$m\vec{\mathbf{g}} + \vec{\mathbf{F}} = m\vec{\mathbf{a}}, \qquad (2)$$

де $\vec{\mathbf{a}}$ – доцентрове прискорення, модуль якого $a = \dfrac{v^2}{R}$.

У проекціях на радіус кола та на вертикаль рівняння **(2)** має вигляд:

$$\begin{aligned} F\sin\varphi &= ma, \\ F\cos\varphi &= mg. \end{aligned} \qquad (3)$$

Поділивши перше рівняння системи **(3)** на друге, отримаємо:

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{a}{g} = \frac{v^2}{gR} \qquad \Rightarrow \qquad v = \sqrt{gR\cdot\mathrm{tg}\varphi}.$$

Урахувавши малість кута φ ($\mathrm{tg}\varphi = \varphi$) та зв'язок між радіусом кола і довжиною нитки ($R = l\varphi$), отримаємо формулу швидкості:

$$v = \varphi\sqrt{gl}.$$

Підставивши цей вираз у рівняння **(1)**, визначаємо:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Така сама формула визначає період малих коливань математичного маятника. З цієї причини кульку на нитці, яка виконує періодичні рухи в горизонтальній площині, називають конічним маятником (нитка описує конус).

Задача 2.19

Спортсмен-мотоцикліст їде зі сталою швидкістю по коловому треку. Кут нахилу полотна трека до горизонту $\alpha = 15°$. Коефіцієнт тертя між колесами та покриттям треку $\mu = 0{,}4$, максимальний радіус треку $R = 50$ м.

Визначити: **А)** максимальну швидкість v, яку може розвинути спортсмен; **Б)** кут ϑ, на який мотоцикліст повинен відхилитися від вертикалі, щоб не впасти.

Дано:
$\alpha = 15°$
$\mu = 0{,}4$
$R = 50$ м

Визначити: v, ϑ

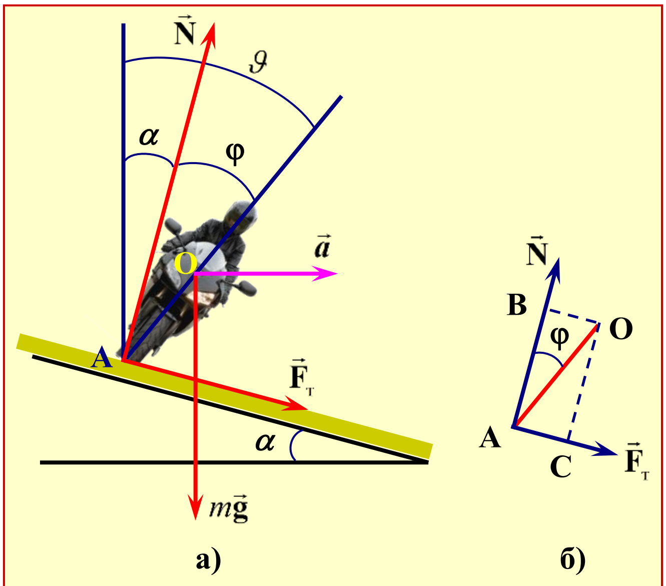


Рис. 19

Розв'язання.

А) На **рис.19а** схематично, як одне тіло, зображено спортсмена з мотоциклом та сили, що діють на нього: тяжіння $m\vec{\mathbf{g}}$ (m – сумарна маса системи), нормальна реакція опори $\vec{\mathbf{N}}$ та тертя спокою $\vec{\mathbf{F}}_{\text{т}}$. Ці сили надають мотоциклу доцентрового прискорення $\vec{a}$, модуль якого $a = v^2/r$, де v – швидкість, r – радіус колової траєкторії руху спортсмена. Рівняння руху (II закон Ньютона **(2.5)**) у векторній формі та в проекціях на напрям $\vec{a}$ (тобто на радіус кола) і на вертикаль мають вигляд:

$m\vec{\mathbf{g}} + \vec{\mathbf{N}} + \vec{\mathbf{F}}_{\text{т}} = m\vec{a}.$

$$\begin{cases} N\sin\alpha + F_{\text{т}}\cos\alpha = \dfrac{mv^2}{r}, \\ -mg - F_{\text{т}}\sin\alpha + N\cos\alpha = 0. \end{cases} \qquad (1)$$

З першого рівняння системи видно, що чим більша швидкість руху v, тим більшою має бути сила тертя спокою $F_{\text{т}}$, що утримує мотоцикл на коловій траєкторії радіуса r. При заданому коефіцієнті тертя швидкість не може перевищити певного максимального значення v_m. Оскільки максимальна можлива сила тертя спокою $F_{\text{т}\max} = \mu N$, і $r_{\max} = R$, то, підставивши ці значення в рівняння системи, отримаємо:

$$\begin{cases} N\left(\sin\alpha + \mu\cos\alpha\right) = \dfrac{mv_m^2}{R}, \\ N\left(\cos\alpha - \mu\sin\alpha\right) = mg. \end{cases}$$

Звідки після нескладних перетворень дістанемо для максимальної можливої швидкості спортсмена:

$$v_m = \sqrt{gR\frac{\operatorname{tg}\alpha + \mu}{1 - \mu\cdot\operatorname{tg}\alpha}}. \qquad (2)$$

Виконаємо обчислення:

$$v_m = \sqrt{9{,}8\cdot 50\cdot\frac{\operatorname{tg}15^\circ + 0{,}4}{1 - 0{,}4\cdot\operatorname{tg}15^\circ}} \approx 19\ \text{м/с}.$$

Б) Вираз **(2)** визначає максимальну можливу швидкість руху мотоцикла **без проковзування**. Але для руху спортсмена по колу самої відсутності проковзування недостатньо. З рис.19б добре видно, що сила тертя створює момент відносно перпендикулярної до площини рисунка осі, котра проходить через центр мас системи (точка прикладання сили $m\vec{\mathbf{g}}$, що позначена $\mathbf{O}$). Цей момент намагається перекинути спортсмена в напрямку проти годинникової стрілки. Тому, щоб не впасти, він має відхилитися від вертикалі на певний кут ϑ так, щоб виник такий же за величиною момент сили $\vec{\mathbf{N}}$, що діє за годинниковою стрілкою[19] (**рис.19б**). Отже необхідною умовою руху спортсмена без перекидання є рівність цих моментів. За означенням момент сили F дорівнює $M = Fh$, де h – плече сили, тобто найкоротша відстань між лінією дії сили та віссю. З **рис.19б** видно, що плече сили $h_{\text{N}} = \text{OB} = \text{OA}\cdot\sin\varphi$, тому $M_{\text{N}} = \text{OA}\cdot N\cdot\sin\varphi$. Для сили тертя плече $h_{\text{т}} = \text{OC} = \text{OA}\cdot\cos\varphi$; крім того $F_{\text{т}} = \mu N$, відповідно $M_{\text{т}} = \text{OA}\cdot\mu N\cos\varphi$. Прирівнюючи ці вирази, легко дістати

$$\operatorname{tg}\varphi = \mu \qquad \Rightarrow \qquad \varphi = \operatorname{arctg}\mu.$$

Кут відхилення спортсмена від вертикалі

$$\vartheta = \alpha + \varphi = \alpha + \operatorname{arctg}\mu. \qquad (3)$$

У числах

$$\vartheta = 15^\circ + \operatorname{arctg}0{,}4 = 36{,}8^\circ.$$

Формули **(2)** та **(3)** разом визначають умову руху спортсмена на треку без падіння. Зокрема, з формули **(2)** видно, що при заданих μ та R максимальна можлива

[19] Більш детально питання про момент сили та умови рівноваги тіла щодо обертання розглянуті в розділі"Статика".

швидкість руху v_m залежить від кута нахилу полотна треку α. Розглянемо два граничні випадки.

1) Полотно треку горизонтальне ($\alpha = 0$). В такому випадку максимальна швидкість має найменше значення $v_m = \sqrt{\mu g R} = \sqrt{0,4 \cdot 9,8 \cdot 50} = 14$ м/с, що суттєво менше знайденої вище швидкості. Саме тому для збільшення максимально можливої швидкості полотно треку роблять похилим.

2) Коли величина $\mu \cdot \mathrm{tg}\alpha$ у формулі **(2)** наближається до одиниці, а кут α – до значення $\alpha = \mathrm{arctg}(1/\mu) = \mathrm{arcctg}\,\mu$, максимальна можлива швидкість спортсмена необмежено зростає. Це означає, що ні при якій швидкості не буде проковзування коліс у поперечному напрямку. При цьому, як дає формула **(3)** спортсмен з мотоциклом будуть знаходитись у горизонтальній площині:

$$\vartheta = \mathrm{arcctg}\,\mu + \mathrm{arctg}\,\mu = \frac{\pi}{2}.$$

Задача 2.20

Період обертання навколо осі $T = 10$ год. Вага тіла на полюсі планети на $\eta = 10\,\%$ більша, ніж на екваторі.

Визначити

середню густину речовина планети ρ. Планету вважати однорідною кулею

Дано:

$\eta = 10\,\% = 0,1$

$T = 10$ год

Визначити: ρ

Розв'язання.

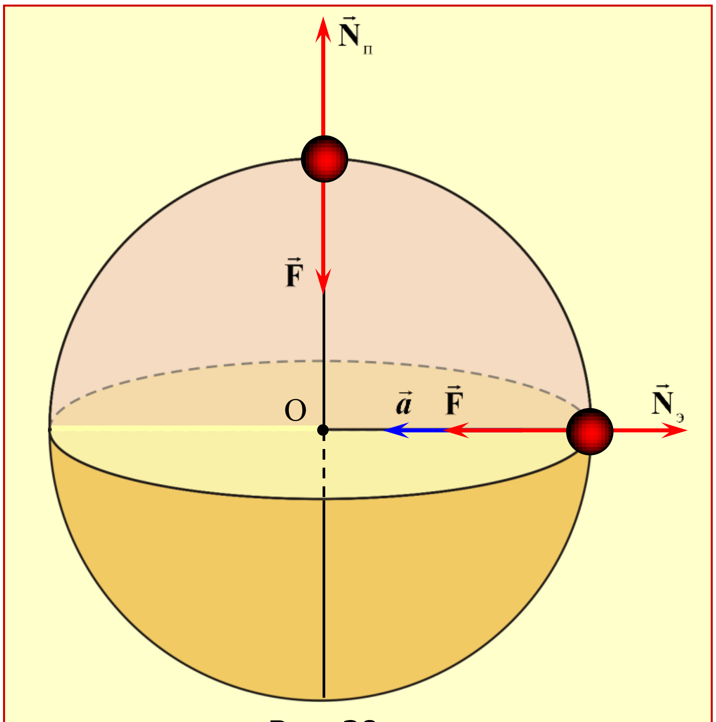


Рис. 20

Розглянемо два положення тіла: на полюсі та на екваторі. В обох випадках на тіло діють сила всесвітнього тяжіння $\vec{\mathbf{F}}$ та сила реакції опори $\vec{\mathbf{N}}$ (**рис.20**). В інерціальній системі відліку, що зв'язана з центром планети[20], на полюсі тіло знаходиться у спокої, отже

$$\vec{\mathbf{F}} + \vec{\mathbf{N}}_п = 0. \qquad (1)$$

На екваторі ж воно рухається по колу внаслідок добового обертання планети і має доцентрове прискорення $\vec{a}$. Рівняння цього руху має вигляд:

$$\vec{\mathbf{F}} + \vec{\mathbf{N}}_е = m\vec{a}. \qquad (2)$$

[20] Строго кажучи, ця система відліку не є інерціальною, оскільки центр Землі має прискорення відносно Сонця $a = 6 \cdot 10^{-3}$ м/с^2. Однак його можна не враховувати через малість.

Вага тіла P – то є сила тиску тіла на опору, тому чисельно вона дорівнює реакції опори $P = N$. Це означає, що відміна ваги тіла на полюсі та на екваторі дорівнює різниці сил реакції опори у цих точках планети. Отже задача полягає у визначенні $N_е$ та $N_п$.

Рівняння руху **(1)** и **(2)** у проекціях на радіус мають вигляд:

$$\begin{cases} -N_п + F = 0, \\ -N_е + F = ma \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N_п = F; \\ N_е = F - ma. \end{cases} \qquad (3)$$

Відносна відміна ваги тіла дорівнює:

$$\eta = \frac{P_п - P_е}{P_п} = \frac{N_п - N_е}{N_п} = 1 - \frac{N_е}{N_п}.$$

Взявши вирази сил реакції опори з рівнянь **(3)** одержимо:

$$\eta = 1 - \frac{F - ma}{F} = \frac{ma}{F}. \qquad (4)$$

Доцентрове прискорення пов'язане з періодом обертання планети T співвідношенням

$$a = \omega^2 R = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R,$$

тому з виразу **(4)** маємо

$$\eta = \frac{4\pi^2 Rm}{T^2 GMm/R^2} = \frac{4\pi^2 R^3}{T^2 GM}. \qquad (5)$$

Густина планети дорівнює відношенню її маси M до об'єму $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, отже $\rho = \frac{3M}{4\pi R^3}$.

Визначивши відношення $\frac{M}{R^3}$ з формули **(5)**, одержимо:

$$\rho = \frac{3\pi}{\eta G T^2}.$$

Перевіримо розмірність отриманої формули:

$$[\rho] = \frac{1}{[G]\cdot[T]} = \left[\frac{1}{\left(\text{м}^3/\left(\text{кг}\cdot\text{с}^2\right)\right)\text{с}^2}\right] = \left[\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}\right].$$

Виконаємо обчислення:

$$\rho = \frac{3\pi}{0,1\cdot 6,67\cdot 10^{-11}\cdot\left(3,6\cdot 10^4\right)^2} = 1090\ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}.$$

Тема: Рівномірний рух по колу

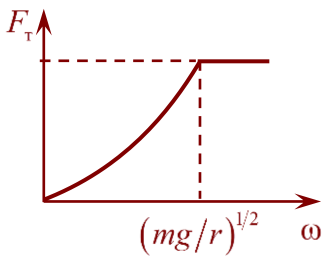
Задачі для самостійної роботи

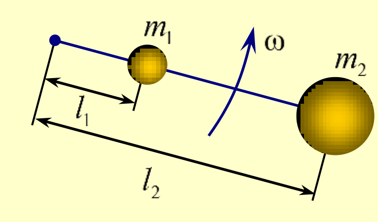
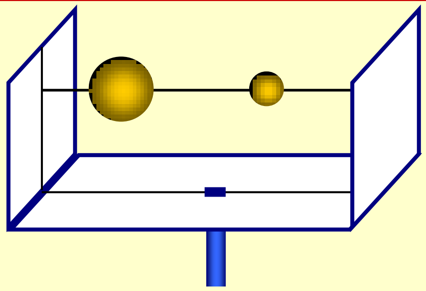
Рівень А

2.66	Диск обертається навколо вертикальної осі з частотою $n = 120$ об/хв. На якій максимальній відстані від центра диска можна покласти тіло, щоб воно не зісковзувало? Коефіцієнт тертя між тілом і диском $\mu = 0,2$. [~1,3 см]
2.67	З якою швидкістю має їхати мотоцикліст по опуклому мосту з радіусом кривизни $R = 10$ м, щоб не чинити тиску на міст в його середині? [10 м/с]
2.68	По опуклому мосту, що має радіус кривизни $R = 50$ м, рухається зі швидкістю $v = 36$ км/год автомобіль маси $m = 1000$ кг. З якою силою тисне автомобіль на середину моста? [8 кН]
2.69	Автомобіль маси $m = 2000$ кг рухається зі швидкістю $v = 36$ км/год по угнутому мосту, радіус кривизни якого $R = 100$ м. З якою силою тисне автомобіль на міст, проїжджаючи його середину? [22 кН]

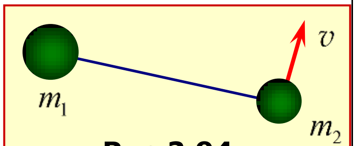
2.70	Лижник їде зі сталою швидкістю $v = 10$ м/с спочатку по опуклій, а потім по угнутій ділянці траси, радіуси кривизни ділянок однакові і дорівнюють $R = 20$ м. У скільки разів відрізняється вага лижника у найвищій точці першої ділянки та в нижній точці другої ділянки? [3]
2.71	Куля масою $m = 4$ кг прикріплена до кінця стержня завдовжки $l = 0,5$ м. Стержень обертається у вертикальній площині. При якій частоті обертання стержень розірветься, якщо максимально припустима сила його натягу $F = 90$ Н ? [5 об/с]
2.72	Гирю масою $m = 500$ г, прив'язану до кінця стержня завдовжки $l = 100$ см, обертають у вертикальній площині з частотою $n = 3$ об/с. Визначити силу натягу стержня, у найнижчій та найвищій точках траєкторії. [173 Н ; 182 Н]
2.73	Кулька, яка висить на нитці довжиною $l = 1$ м, описує коло у горизонтальній площині. Чому дорівнює швидкість і період обертання кульки, якщо нитка відхилилася від вертикалі на кут $\alpha = 45°$. [2,6 м/с , 1,7 с]
2.74	Шнур витримує навантаження не більше $F = 100$ Н. На такому шнурі завдовжки $l = 1$ м обертають у горизонтальній площині камінь масою $m = 2$ кг. Яку максимальну швидкість може мати камінь? [7 м/с]

Рівень Б

2.75	Тіло масою m лежить на горизонтальному диску на відстані r від осі. Коефіцієнт тертя між тілом та поверхнею диска становить μ. Диск починає обертатись з малим прискоренням. Побудувати графік залежності складової сили тертя в радіальному напрямі, яка діє на тіло, від кутової швидкості обертання диска. При якому значенні кутової швидкості тіло почне ковзати? [ $\sqrt{\dfrac{\mu g}{r}}$;] *Щоб відкрити/закрити відповідь, наведіть курсор на зображення та натисніть ліву кнопку "миші".*
2.76	Сфера радіусом $R = 2$ м обертається навколо вертикальної осі з частотою $n = 30$ об/хв. Всередині сфери знаходиться кулька масою $m = 200$ г. Визначити висоту, яка відповідає стану стійкої рівноваги кульки, відносно нижньої точки сфери. [1 м]
2.77	По опуклому мосту, радіус кривизни якого $R = 90$ м, зі швидкістю $v = 54$ км/год рухається автомобіль масою $m = 2$ т. У точці мосту, напрям на яку з центра кривизни мосту утворює з вертикаллю кут α, автомобіль тисне з силою $F = 14400$ Н. Визначити кут α. [8,2°]
2.78	Мотоцикл рухається зі швидкістю $v = 54$ км/год. Коефіцієнті тертя між дорогою і шинами $\mu = 0,3$. Якого найменшого радіуса поворот може зробити мотоцикліст на цій дорозі? Під яким кутом до горизонту він повинен при цьому нахилитися? [76,5 м , 73,3°]
2.79	Поїзд рухається по закругленню дороги радіусом $R = 800$ м з швидкістю $v = 72$ км/год. На скільки зовнішня рейка має бути розташована вище за внутрішню, щоб колеса "не чинили" бічного тиску на рейки? Відстань між рейками $l = 1,5$ м. [7,65 см]
2.80	У вагоні поїзда, що рухається рівномірно по закругленню дороги радіусом

	$l = 200$ м з швидкістю $v = 72$ км/год, зважують вантаж на пружинних вагах. Визначити покази вагів, якщо маса вантажу $m = 5$ кг. [51 Н]
2.81	Мотоцикліст рухається по стінці вертикального циліндра діаметром $d = 10$ м. Коефіцієнт тертя між стінкою і колесами $\mu = 0,3$. Яку найменшу швидкість повинен мати мотоцикл? [13 м/с]
2.82	Дві точкові маси $m_1 = 50$ г та $m_2 = 100$ г прив'язані до ниток і знаходяться на гладкій горизонтальній поверхні (**рис.2.82**, вид зверху). Відстані від них до точки кріплення нитки $l_1 = 20$ см, $l_2 = 50$ см. Система обертається навколо закріпленого кінця з кутовою швидкістю $\omega = 2\ \text{с}^{-1}$. Визначити сили натягу кожної з ниток. [0,24 Н; 0,2 Н]  **Рис.2.82**
2.83	Кульки масами $m_1 = 50$ г та $m_2 = 100$ г, які можуть ковзати по стержню, зв'язали ниткою так, що відстань між їх центрами $l = 12$ см (**рис.2.83**). а якій відстані від осі приладу треба розмістити кульки, щоб вони не ковзали по стержню під час обертання? [8 см; 4 см]  **Рис.2.83**
2.84	Радіус Місяця приблизно у $k = 3,7$ рази менший, за радіус Землі, а його маса у $n = 81$ раз менша від маси Землі. Визначити прискорення вільного падіння на поверхні Місяця. [1,65 м/с^2]
2.85	Якої тривалості мала б бути доба на Землі, щоб тіла на екваторі стали невагомими? [1,41 год]
2.86	Чому дорівнює перша космічна швидкість для планети, маса і радіус якої у $n = 2$ рази більші, ніж у Землі. [~ 8 км/с]
2.87	На якій висоті над поверхнею Землі рухається штучний супутник, якщо його швидкість $v = 7,5$ км/с? [~ 880 км]
2.88	Визначити першу космічну швидкість для планети з такою ж густиною, як у Землі, але вдвоє меншого радіуса. [4 км/с]
2.89	Обчислити першу космічну швидкість для Місяця, якщо прискорення вільного падіння тут у 6 разів менше, ніж на Землі. [1,7 км/с]
2.90	Визначити кутову і лінійну швидкість орбітального руху штучного супутника Землі, якщо період його обертання навколо Землі $T = 105$ хв. [0,001 об/с; 7,4 км/с]
2.91	Навколо планети по коловій орбіті радіусом $r = 10^5$ км з швидкістю $v = 4,1$ км/с обертається супутник. Визначити середню густину планети, якщо її радіус $R = 10000$ км. [5 г/см^3]
2.92	Два штучних супутники обертаються навколо Землі в одній площині і в одному напрямку, маючи швидкості $v_1 = 7,8$ км/с та $v_2 = 7,7$ км/с. Через які проміжки часу супутники зближуються на мінімальну відстань? [39 год]
2.93	Подвійна зірка – це дві зірки масами m_1 і m_2, які обертаються навколо спільного центра мас по концентричних колових траєкторіях. Відстань між зірками – l. Чому дорівнюють радіуси орбіт зірок та періоди їх обертання? [$r_1 = \dfrac{m_2 l}{m_1 + m_2}$; $r_2 = \dfrac{m_1 l}{m_1 + m_2}$; $T_1 = T_2 = \dfrac{\rho r_2 l}{(m_1 + m_2) G}$]

Рівень В

2.94	 **Рис.2.94** Два тіла масами $m_1 = 0,9\,\text{кг}$ та $m_2 = 0,5\,\text{кг}$, зв'язані ниткою довжини $l = 0,35\,\text{м}$, рухаються по гладкій горизонтальній поверхні. В деякий момент часу тіло m_1 нерухоме, а тіло m_2 має швидкість $v = 1,4\,\text{м/с}$, вектор якої перпендикулярний до нитки. Визначити сила натягу нитки. [$\dfrac{m_1 m_2 v^2}{(m_1 + m_2)l}$]
2.96	Гумова нитка з жорсткістю k прив'язана до стелі. У нерозтягнутому стані її довжина l_0. До нитки прив'язують кульку масою m, якій надають деяку швидкість, так що кулька описує коло у горизонтальній площині, а нитка відхилена від вертикалі на кут α. З якою кутовою швидкістю обертається кулька? [$\sqrt{\dfrac{kg}{kl_0 \cos\alpha + mg}}$]

Розділ 3. Закон збереження імпульсу

В задачах механіки доводиться мати справу не тільки з окремими тілами, а й з **механічними системами**, тобто з виділеними сукупностями тіл, які взаємодіють між собою та з іншими – зовнішніми тілами. Відповідно і сили поділяють на **внутрішні** та **зовнішні**.

До **внутрішніх** відносять сили взаємодії між тілами самої системи. Сили, що діють на тіла системи з боку зовнішніх тіл або силових полів, називають **зовнішніми**. Такий поділ не є однозначним: які тіла включати в систему, а які розглядати як зовнішні, залежить від умов задачі та поставлених завдань.

Якщо зовнішні сили відсутні, то система називається **ізольованою** або **замкнутою**. За наявності зовнішніх сил система є **неізольованою** (**незамкнутою**).

Розділ 3. Закон збереження імпульсу
Теоретичні відомості

Розділ 3. Закон збереження імпульсу

Теоретичні відомості

Закон збереження імпульсу

Для ізольованих систем є характерним збереження деяких важливих фізичних величин. Зокрема це стосується **імпульсу системи**.

Стан руху окремих тіл системи[21] визначається їх **імпульсами**

$\vec{\mathbf{p}}_i = m_i \vec{\mathbf{v}}_i$.

Аналогічно, стан руху системи як цілого визначається **імпульсом системи**, який дорівнює сумі імпульсів окремих тіл:

$$\vec{\mathbf{P}} = \sum_i \vec{\mathbf{p}}_i. \quad (3.1)$$

Зміна імпульсу кожного тіла, що включене до системи, визначається **рівнодійною всіх прикладених до нього сил** – як зовнішніх, так і внутрішніх (**II закон Ньютона**). Але сили взаємодії між будь-якою парою тіл системи однакові за величиною і протилежні за напрямом (**III закон Ньютона**). Тому ці сили спричинюють рівні за модулем і протилежні за напрямом зміни імпульсів, так що

[21] Тіла системи можуть бути як маленькими частинками, так і мати великі розміри. Але будь-яке тіло при необхідності теж можна розглядати як систему, що складається з маленьких частин – матеріальних точок. Тому термін "**тіла системи**" далі слід трактувати як **"матеріальні точки, з яких складається система"**.

сумарна зміна дорівнює нулю. Отже,

зміна імпульсу системи визначається тільки сумою зовнішніх сил, що діють на тіла системи:

$$\frac{\Delta\vec{\mathbf{P}}}{\Delta t}=\vec{\mathbf{F}}_{\text{зовн}} \quad \text{або} \quad \Delta\vec{\mathbf{P}}=\vec{\mathbf{F}}_{\text{зовн}}\cdot\Delta t, \qquad (3.2)$$

де $\vec{\mathbf{F}}_{\text{зовн}}=\sum_{\mathrm{i}}\vec{\mathbf{F}}_{\mathrm{i}}$ – сума всіх зовнішніх сил.

Якщо система ізольована, то зовнішніх сил немає:

$$\vec{\mathbf{F}}_{\text{зовн}}=0.$$

В такому разі $\Delta\vec{\mathbf{P}}=0$ і

$$\vec{\mathbf{P}}=\sum_{\mathrm{i}}\vec{\mathbf{p}}_{\mathrm{i}}=\mathrm{const}. \qquad (3.3)$$

Формула (3.3) виражає **закон збереження імпульсу**:

імпульс ізольованої системи зберігається, тобто не змінюється з часом[22]**.**

В ізольованій системі в будь-які два моменти часу має місце **баланс імпульсів**:

$$m_1\vec{\mathbf{v}}_1+m_2\vec{\mathbf{v}}_2+\dots+m_{\mathrm{n}}\vec{\mathbf{v}}_{\mathrm{n}}=m_1\vec{\mathbf{v}}'_1+m_2\vec{\mathbf{v}}'_2+\dots+m_{\mathrm{n}}\vec{\mathbf{v}}'_{\mathrm{n}}. \qquad (3.4)$$

В цьому рівнянні ліворуч стоять швидкості тіл системи в "початковий" момент часу, а праворуч – в "кінцевий" момент.

Закон збереження імпульсу є одним з **універсальних законів природи**. Він чинний не лише для механічних, а й для будь-яких інших фізичних систем.

Збереження імпульсу в неізольованих системах

Практична цінність закону збереження імпульсу зумовлена тим, що за відповідних умов він точно чи наближено виконується і в неізольованих системах. Це буває, коли:

1) зовнішні сили скомпенсовані, тобто

$$\vec{\mathbf{F}}_{\mathrm{i}}\neq 0, \quad \text{але} \quad \sum_{\mathrm{i}}\vec{\mathbf{F}}_{\mathrm{i}}=0.$$

Прикладом може бути зіткнення тіл, що рухаються без тертя по горизонтальній поверхні: зовнішні сили тяжіння та нормальної реакції опори скомпенсовані;

2) в неізольованій системі короткочасно діють настільки великі внутрішні сили, що протягом часу їх дії можна знехтувати набагато меншими зовнішніми силами, навіть якщо вони не скомпенсовані (приклад – розрив снаряда на уламки під дією сил тиску порохових газів). В такому випадку $\vec{\mathbf{F}}_{\text{зовн}}\cdot\Delta t\approx 0$, і, згідно з рівнянням **(3.2)**,

$$\Delta\vec{\mathbf{P}}=0 \quad\Rightarrow\quad \vec{\mathbf{P}}=\mathrm{const}.$$

3) зовнішніми силами нехтувати не можна, але вони мають незмінний напрям. В цій ситуації повний імпульс системи не зберігається ($\vec{\mathbf{P}}\neq\mathrm{const}$), але зберігається його проекція на будь-яку вісь OX, що перпендикулярна до напряму сумарної зовнішньої сили. Це випливає з рівняння **(3.2)** в проекціях на вісь:

$$F_{\mathrm{x}}=0 \quad\Rightarrow\quad \Delta P_{\mathrm{x}}=0 \quad\Rightarrow\quad \sum_{\mathrm{i}}p_{\mathrm{ix}}=\sum_{\mathrm{i}}m_{\mathrm{i}}v_{\mathrm{ix}}=\mathrm{const}. \qquad (3.5)$$

Центр масс

Швидкості та імпульси окремих тіл системи можуть суттєво відрізнятись як за модулем, так і за напрямком. Тому вираз імпульсу **(3.1)** не дає чіткого уявлення про рух системи. Рух системи як цілого наочно відображується рухом певної точки, яка називається **центром мас** (або **центром інерції**) системи.

Положення центра мас визначається радіусом-вектором

[22] Це, звичайно, не стосується окремих тіл системи, імпульси котрих можуть суттєво змінюватись під дією внутрішніх сил.

$$\vec{\mathbf{r}}_c = \frac{\sum\limits_i m_i \vec{\mathbf{r}}_i}{\sum\limits_i m_i}, \qquad (3.6)$$

де m_i, $\vec{\mathbf{r}}_i$ – маси та радіуси-вектори окремих тіл системи; величина $m = \sum\limits_i m_i$ – загальна маса системи.

Декартові координати центра мас обчислюються за формулами[23]

$$X_c = \frac{\sum\limits_i m_i x_i}{\sum\limits_i m_i}, \qquad Y_c = \frac{\sum\limits_i m_i y_i}{\sum\limits_i m_i}, \qquad (3.6а)$$

де x_i, y_i – координати окремих тіл системи.

Можна показати, що імпульс системи дорівнює добутку її загальної маси m на вектор швидкості центра мас[24] $\vec{\mathbf{V}}_c$:

$$\vec{\mathbf{P}} = m\vec{\mathbf{V}}_c. \qquad (3.7)$$

Цей вираз дозволяє інакше записати рівняння **(3.2)**:

$$m\vec{\mathbf{a}}_c = \vec{\mathbf{F}}_{зовн}, \qquad (3.8)$$

де $\vec{\mathbf{a}}_c$ – прискорення центра мас. З рівняння **(3.8)** можна зробити висновок, що

центр мас довільної системи рухається як матеріальна точка з масою, рівною масі системи, і до якої прикладені всі зовнішні сили, що діють на тіла даної системи.

Це твердження називають **теоремою про рух центра мас**.

За відсутності зовнішніх сил (ізольована система), або їх компенсації $\vec{\mathbf{a}}_c = 0$ і $\vec{\mathbf{V}}_c = \text{const}$. Це означає, що внутрішні сили не впливають на положення та рух центра мас системи.

---

[23] Нагадаємо, що координата дорівнює проекції радіуса-вектора на відповідну вісь.

[24] Дійсно,

$$\vec{\mathbf{V}}_c = \frac{\Delta\vec{\mathbf{r}}_c}{\Delta t} = \frac{\Delta\left(\sum\limits_i m_i\vec{\mathbf{r}}_i \Big/ \sum\limits_i m_i\right)}{\Delta t} = \frac{1}{\sum\limits_i m_i}\cdot\frac{\sum\limits_i m_i\Delta\vec{\mathbf{r}}_i}{\Delta t} = \frac{1}{m}\cdot\sum_i m_i\frac{\Delta\vec{\mathbf{r}}_i}{\Delta t} = \frac{1}{m}\cdot\sum_i m_i\vec{\mathbf{v}}_i = \frac{\mathbf{P}}{m}$$

$$\Rightarrow \qquad \vec{\mathbf{P}} = m\vec{\mathbf{V}}_c.$$

Рекомендації до розділу "Закон збереження імпульсу"

При розв'язуванні задач даного розділу доцільно дотримуватись такої послідовності.

1) Вивчити умову та виділити систему, включивши в неї ті тіла, імпульси котрих суттєво змінюються в умовах задачі; нерухомі тіла такі, як Земля або поверхня, по якій ковзають рухомі тіла, в систему не включаються і розглядаються як зовнішні.

2) Обрати систему координат, зв'язану з зовнішнім тілом, відносно якого задано (чи треба визначити) рух тіл системи.

3) Показати на схематичному рисунку вектори імпульсів всіх тіл та системи в цілому "до" та "після" взаємодії. Проаналізувати, зберігається в системі повний імпульс, чи тільки його проекція.

4) Скласти рівняння балансу імпульсів **(3.4)** (тобто прирівняти вирази початкового та кінцевого імпульсів системи) у векторній формі та для проекцій на осі координат. При цьому проекції відомих за напрямом векторів одразу виражають через їх модулі. **Імпульси всіх тіл системи повинні бути виражені в одній і тій самій системі відліку**.

5) З отриманих рівнянь визначити проекції, а потім – модулі та напрямки шуканих векторів.

6) Якщо в задачі треба визначати не тільки швидкості, а й інші характеристики руху, то отримані в **п.5** величини використовують як вихідні для наступного етапу розв'язування задачі.

Зауваження. У найпростіших ситуаціях, наприклад, при непружному зіткненні двох тіл або розриві снаряда на два уламки, можна не проектувати вектори на осі координат, а розв'язувати задачу безпосередньо у векторній формі, будуючи відповідний паралелограм векторів імпульсів і користуючись теоремою косинусів або синусів.

Розділ 3. **Закон збереження імпульсу.**

Розв'язування задач

В умовах, коли невелика кількість тіл (найчастіше два) утворюють повністю або частково ізольовану систему, закон збереження імпульсу **(3.4)** дозволяє легко визначити швидкості тіл у даний момент часу за відомими їхніми значеннями у попередній момент часу. Суттєво, що це можна зробити, навіть не знаючи сил взаємодії між тілами. Саме цим зумовлена продуктивність використання закону збереження імпульсу для розв'язування задач. Типовими тут є задачі на зіткнення тіл, розрив тіла на частини (вибух), стрибки з рухомих платформ тощо.
Приступаючи до розв'язування задач з цієї теми слід ознайомитися з **рекомендаціями до розділу**. Також буде корисним пригадати порядок організації розв'язування та оформлення розв'язку задач (див. **"Етапи розв'язування задач"**).

<table>
<tr><td rowspan="6">Непружні зіткнення</td><td rowspan="5">Рекомендації до теми</td><td></td><td>Задача 3.1</td></tr>
<tr><td></td><td>Задача 3.2</td></tr>
<tr><td></td><td>Задача 3.3</td></tr>
<tr><td></td><td>Задача 3.4</td></tr>
<tr><td></td><td>Задача 3.5</td></tr>
<tr><td colspan="2">Задачі для самостійної роботи</td><td>Задачі</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Комбіновані задачі</td><td rowspan="2">Рекомендації до теми</td><td></td><td>Задача 3.6</td></tr>
<tr><td></td><td>Задача 3.7</td></tr>
<tr><td colspan="2">Задачі для самостійної роботи</td><td>Задачі</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Властивості центра мас</td><td>Рекомендації до теми</td><td></td><td>Задача 3.8</td></tr>
<tr><td colspan="2">Задачі для самостійної роботи</td><td>Задачі</td></tr>
</table>

Розділ 3. **Закон збереження імпульсу. Розв'язування задач**
Тема: **Непружні зіткнення**

Розв'язування задач на непружні зіткнення тіл не вимагає якихось спеціальних вказівок.

Розділ 3. Закон збереження імпульсу. Розв'язування задач
Тема: Непружні зіткнення. Приклади

Задача 3.1

Дві пластилінові кульки з масами $m_1 = 40\,\text{г}$ та $m_2 = 60\,\text{г}$ рухаються без тертя по горизонтальній поверхні зі швидкостями $v_1 = 0{,}3\,\text{м/с}$ та $v_2 = 0{,}4\,\text{м/с}$ під кутом $\alpha = 60°$ одна до одної і непружно стикаються.

Визначити

швидкість v тіла, яке утворилося після зіткнення.

Розв’язання.

Дано:

$m_1 = 40\,\text{г} = 4\cdot10^{-2}\,\text{кг}$

$m_1 = 60\,\text{г} = 6\cdot10^{-2}\,\text{кг}$

$v_1 = 0{,}3\,\text{м/с}$

$v_2 = 0{,}4\,\text{м/с}$

$\alpha = 60°$

Визначити: v

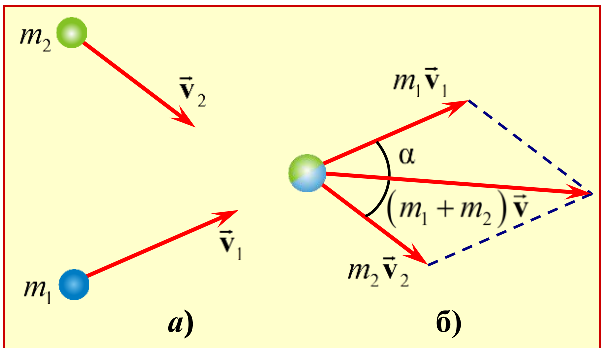


Рис.1

Кульки утворюють систему, в якій зовнішні сили (тяжіння та реакції поверхні) скомпенсовані. Тому імпульс системи зберігається:

$$\vec{\mathbf{p}}_\text{к} = \vec{\mathbf{p}}_\text{п},$$

де $\vec{\mathbf{p}}_\text{п}$ – початковий імпульс системи, $\vec{\mathbf{p}}_\text{к}$ – її кінцевий імпульс.

Початковий імпульс складається з імпульсів кульок до удару $\vec{\mathbf{p}}_\text{п} = m_1\vec{\mathbf{v}}_1 + m_2\vec{\mathbf{v}}_2$, а кінцевий імпульс – це імпульс утвореного тіла масою $m = m_1 + m_2$, яке має шукану швидкість $\vec{\mathbf{v}}$ та імпульс $\vec{\mathbf{p}}_\text{к} = (m_1+m_2)\vec{\mathbf{v}}$ (**рис.1**). Отже:

$$m_1\vec{\mathbf{v}}_1 + m_2\vec{\mathbf{v}}_2 = (m_1+m_2)\vec{\mathbf{v}}. \qquad (1)$$

З паралелограма імпульсів (**рис.1б**), побудованого відповідно до цього рівняння, за теоремою косинусів, маємо:

$$v = \frac{\sqrt{(m_1v_1)^2 + (m_2v_2)^2 + 2m_1m_2v_1v_2\cos\alpha}}{m_1+m_2}.$$

У числах

$$v = \frac{\sqrt{(4\cdot10^{-2}\cdot0{,}3)^2 + (6\cdot10^{-2}\cdot0{,}4)^2 + 2\cdot4\cdot10^{-2}\cdot6\cdot10^{-2}\cdot0{,}3\cdot0{,}4\cdot\cos60°}}{4\cdot10^{-2}+6\cdot10^{-2}} = 0{,}32\,\frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Задача 3.2

Граната, що кинута під кутом $\alpha = 60°$ до горизонту зі швидкістю $v_0 = 10\,\text{м/с}$, розривається на два однакові уламки. Один з уламків відлітає вертикально вгору, а другий – під кутом $\beta = 45°$ до горизонту.

Визначити

швидкість v_2 другого уламка. Опором повітря знехтувати.

Розв’язання.

Дано:
$v_0 = 10$ м/с
$\alpha = 60°$
$\beta = 45°$

Визначити: v_2

Система "граната-уламки" не є ізольованою, оскільки на тіла діє не скомпенсова на сила тяжіння. Але на короткий час вибуху, коли діють дуже великі внутрішні сили тиску порохових газів, силою тяжіння можна знехтувати вважати, що імпульс зберігається:

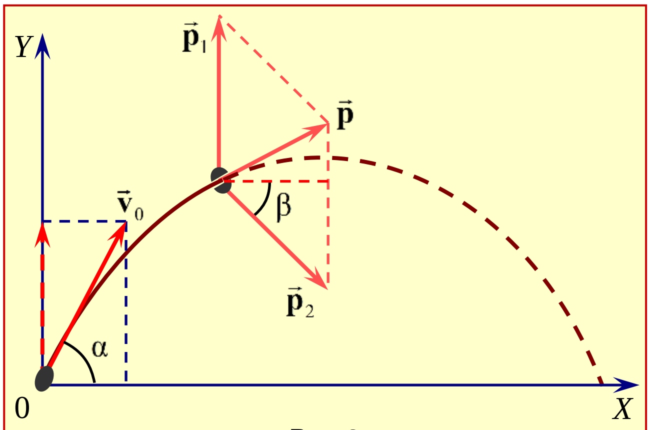


Рис.2

$$\vec{\mathbf{p}} = \vec{\mathbf{p}}_1 + \vec{\mathbf{p}}_2 \qquad (1)$$

де $\vec{\mathbf{p}}$ – імпульс гранати безпосередньо перед розривом, $\vec{\mathbf{p}}_1$ та $\vec{\mathbf{p}}_2$ – імпульси уламків безпосередньо після розриву (**рис.2**). У проекціях на вісь OX рівняння **(1)** має вигляд:

$$p_x = p_{2x}\cos\beta \quad \Rightarrow \quad mv_x = \frac{m}{2}v_2\cos\beta. \qquad (2)$$

Складова імпульсу гранати вздовж осі OX залишається незмінною від моменту кидання до моменту розриву, оскільки проекція зовнішніх сил (сили тяжіння) на цей напрямок дорівнює нулю:

$$mv_x = mv_0\cos\alpha = \text{const}. \qquad (3)$$

Прирівнявши праві частини виразів **(2)** та **(3)**, дістанемо:

$$mv_0\cos\alpha = \frac{m}{2}v_2\cos\beta \quad \Rightarrow \quad v_2 = v_0\frac{2\cos\alpha}{\cos\beta} = 14{,}1\,\frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Задача 3.3

Два човни рухаються по інерції паралельними курсами назустріч один одному. Коли вони порівнялися, з першого човна у другий обережно переклали вантаж маси $m = 25$ кг. В результаті другий човен зупинився, а перший – продовжив рух зі швидкістю $u = 4$ м/с.

Визначити

швидкості човнів v_1 та v_2 до перекладання вантажу, якщо маса другого човна $M_2 = 200$ кг. Силами опору у воді знехтувати.

Розв'язання.

Дано:
$m = 25$ кг
$u = 4$ м/с
$M_2 = 200$ кг

Визначити: v_1, v_2

В даному випадку можна розглядати дві системи: "два човни і вантаж", та "другий човен і вантаж". Обидві ці системи можна вважати ізольованими, оскільки зовнішні сили, що діють на човни (тяжіння та архімедова), скомпенсовані, отже імпульс в обох системах зберігається. Запишемо баланс імпульсів для першої системи до та після перекладання вантажу, позначивши масу першого човна M_1 і врахувавши, що другий зупинився:

$$(m + M_1)\vec{\mathbf{v}} + M_2\vec{\mathbf{v}}_2 = M_1\vec{\mathbf{u}}.$$

Для другої системи

$$M_2\vec{\mathbf{v}}_2 + m\vec{\mathbf{v}}_1 = 0.$$

Тут сума початкових імпульсів дорівнює нулю, оскільки другий човен зупинився разом з вантажем, отримавши додатковий імпульс $m\vec{\mathbf{v}}_1$.

У проекціях на напрям руху першого човна записані рівняння мають вигляд:

$$(m + M_1)v_1 - M_2v_2 = M_1u; \qquad (1)$$

$$-M_2 v_2 + m v_1 = 0. \qquad (2)$$

З рівняння **(2)** випливає, що $M_2 v_2 = m v_1$. Підставивши це значення у вираз **(1)**, знаходимо: $M_1 v_1 = M_1 u_1$, звідки

$$v_1 = u = 4\ \text{м/с},$$

тобто швидкість першого човна залишилась незмінною[25]. Врахувавши це, з рівняння **(2)** одержимо:

$$v_2 = \frac{mu}{M_2} = \frac{25 \cdot 4}{200} = 0{,}5\ \text{м/с}.$$

Задача 3.4

На краю нерухомого візка маси M стоять двоє хлопчаків маси m кожен. Нехтуючи тертям,

визначити

швидкості візка V_1 та V_2 після того, як обидва хлопчаки зістрибнуть з однаковою горизонтальною швидкістю u відносно візка:

А) одночасно (V_1);

Б) один за одним (V_2).

Розв'язання.

Дано:
M
m
u

Визначити: V_1, V_2

Система "візок-хлопчаки" не є ізольованою (на тіла системи діють сили тяжіння та сили реакції опори), однак сума зовнішніх сил дорівнює нулю, тому в системі виконується закон збереження імпульсу.

А) При одночасному стрибанні хлопчаків:

$$M\vec{\mathbf{V}}_1 + 2m\vec{\mathbf{v}}_{хл} = 0,$$

де $\vec{\mathbf{V}}_1$, $\vec{\mathbf{v}}_{хл}$ – швидкість візка та швидкість хлопчаків відносно землі. За законом додавання швидкостей $\vec{\mathbf{v}}_{хл} = \vec{\mathbf{V}}_1 + \vec{\mathbf{u}}$, тому:

$$M\vec{\mathbf{V}}_1 + 2m\left(\vec{\mathbf{V}}_1 + \vec{\mathbf{u}}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{\mathbf{V}}_1 = -\frac{2m}{M + 2m}\vec{\mathbf{u}}. \qquad (1)$$

Б) У цьому випадку закон збереження імпульсу необхідно записати двічі. Після стрибка першого хлопчика:

$$(M + m)\vec{\mathbf{V}}_1 + m\left(\vec{\mathbf{V}}_1 + \vec{\mathbf{u}}\right) = 0, \qquad (2)$$

де $\vec{\mathbf{V}}_1$ – швидкість візка відносно землі після стрибка першого хлопчика, $\left(\vec{\mathbf{V}}_1 + \vec{\mathbf{u}}\right)$ – швидкість першого хлопчика відносно землі.

Після стрибка другого хлопчика:

$$(M + m)\vec{\mathbf{V}}_1 = M\vec{\mathbf{V}}_2 + m\left(\vec{\mathbf{V}}_2 + \vec{\mathbf{u}}\right), \qquad (3)$$

де $\vec{\mathbf{V}}_2$ – швидкість візка після стрибка другого хлопчика, $\left(\vec{\mathbf{V}}_2 + \vec{\mathbf{u}}\right)$ – швидкість другого хлопчика відносно землі.

Виключивши з рівнянь **(2)** та **(3)** швидкість $\vec{\mathbf{V}}_1$, дістанемо:

$$\vec{\mathbf{V}}_2 = -\frac{m(3M + 2m)}{(M + m)\cdot(M + 2m)}\vec{\mathbf{u}}. \qquad (4)$$

Задача 3.5

На краю візка маси M, що рухається горизонтально зі швидкістю V, стоїть хлопець

[25] Це легко збагнути, адже, перекладаючи вантаж, ми в одну й ту ж кількість разів зменшуємо як масу, так і імпульс першого човна.

маси m. Хлопець стрибає у напрямку руху під кутом α до горизонту зі швидкістю u відносно візка.

Визначити

величину та напрям швидкості візка V_1 після стрибка. Опір рухові не враховувати.

Розв'язання.

Дано:	
M	
m	
u	
V	
α	
Визначити: V_1	

Ця задача нагадує попередню, але в даному випадку повний імпульс системи "візок-хлопець" не зберігається. В цьому можна переконатися безпосередньо, зобразивши вектори імпульсу системи перед стрибком

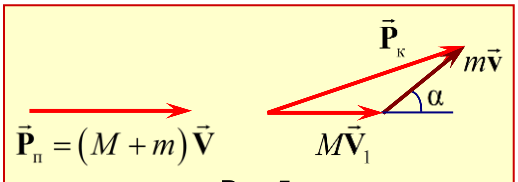


Рис.5

$\vec{\mathbf{P}}_{\text{п}} = (M+m)\vec{\mathbf{V}}$ та після стрибка хлопця $\vec{\mathbf{P}}_{\text{к}} = M\vec{\mathbf{V}}_1 + m\vec{\mathbf{v}}_1$ (**рис.5**).

Очевидно, що за будь-яких умов внаслідок стрибка імпульс системи змінюється, оскільки вектори $\vec{\mathbf{P}}_{\text{п}}$ та $\vec{\mathbf{P}}_{\text{к}}$ не паралельні і, незалежно від їх модулів, $\vec{\mathbf{P}}_{\text{п}} \neq \vec{\mathbf{P}}_{\text{к}}$. Це може здатися незрозумілим – адже до стрибка зовнішні сили тяжіння та реакції опори були скомпенсовані. Це так, але в момент стрибка така компенсація порушується. Відштовхуючись, хлопець діє на візок з певною силою $\vec{\mathbf{F}}_1$. За третім законом Ньютона візок діє на хлопця з такою ж за модулем силою $\vec{\mathbf{F}}_2$, при чому $\vec{\mathbf{F}}_2 = -\vec{\mathbf{F}}_1$ (**рис.5-1**). Це внутрішні сили, вони змінюють імпульси кожного з тіл системи: $\vec{\mathbf{F}}_2$ змінює імпульс хлопця, а $\vec{\mathbf{F}}_1$ – візка. Але сила $\vec{\mathbf{F}}_1$ не лише змінює швидкість візка своєю горизонтальною складовою $\vec{\mathbf{F}}_{\text{г}}$, а ще й притискає його до землі вертикальною складовою $\vec{\mathbf{F}}_{\text{в}}$. Внаслідок цього виникає додаткова реакція $\vec{\mathrm{N}} = -\vec{\mathbf{F}}_{\text{в}}$ з боку опори. Ця сила є зовнішньою відносно системи "візок-хлопець", і вона не скомпенсована ніякою іншою силою. Саме з цієї причини імпульс системи змінюється під час стрибка хлопця. Але оскільки сила $\vec{\mathrm{N}}$ напрямлена вертикально, то її горизонтальна проекція $\mathrm{N}_{\text{x}} = 0$. Тому зберігається горизонтальна проекція P_{x} імпульсу системи. Тому, обравши вісь OX у напрямку руху візка до стрибка, отримуємо:

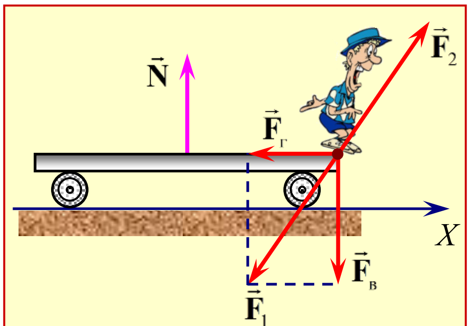


Рис.5-1

$$(M+m)V = MV_{1\text{x}} + mv_{\text{x}}. \qquad (1)$$

В цьому рівнянні v_{x} – проекція швидкості хлопця відносно Землі. Визначимо її через задану в умові швидкість u відносно візка за законом додавання швидкостей[26]:

$$\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{u}} + \vec{\mathbf{V}}_1 \qquad \Rightarrow \qquad v_{\text{x}} = u\cos\alpha + V_{1\text{x}}.$$

Підставимо вираз v_{x} у рівняння **(1)** і, розв'язавши його, дістанемо:

$$V_{1\text{x}} = \frac{(M+m)V - mu\cos\alpha}{M+m}.$$

З цього виразу видно, що можливі три різні випадки руху візка після стрибка хлопця:

1) якщо $(M+m)V > mu\cos\alpha$, то $V_{1\text{x}} > 0$, і візок рухається у тому ж напрямку, але з меншою швидкістю;

2) якщо $(M+m)V < mu\cos\alpha$, то $V_{1\text{x}} < 0$, тобто візок змінює напрям руху;

---

[26] Зверніть увагу на те, що в рівняння входить швидкість візка після, а не до стрибка, адже на момент відриву ніг хлопця від візка і початку самостійного руху візок вже набув нової швидкості

3) якщо $(M+m)V = mu\cos\alpha$, то $V_{1x}=0$, тобто візок зупиняється.

Тема: **Непружні зіткнення**

Задачі для самостійної роботи

3.1 З гармати масою $M = 3\,\text{т}$, що не має противідкотного пристрою (ствол жорстко скріплений з лафетом), вилітає в горизонтальному напрямі снаряд масою $m = 15\,\text{кг}$ зі швидкістю $v_0 = 650\,\text{м/с}$. Якої швидкості набуває гармата після пострілу? [$3,25\,\text{м/с}$]

3.2 Снаряд масою $m = 20\,\text{кг}$, що летить горизонтально вздовж залізничних рейок зі швидкістю $v = 500\,\text{м/с}$, влучає у платформу з піском масою $M = 50\,\text{т}$ і застряє. З якою швидкістю почне рухатись платформа? [$0,2\,\text{м/с}$]

3.3 З корабля масою $M = 750\,\text{т}$ проти напрямку його руху зроблено постріл під кутом $\alpha = 60°$ до горизонту. Швидкість снаряда $v = 1\,\text{км/с}$, маса снаряда $m = 30\,\text{кг}$. На скільки змінилася швидкість корабля? [$0,02\,\text{м/с}$]

3.4 З реактивної установки масою $M = 5000\,\text{кг}$ (разом із зарядами), яка перебуває у стані спокою, в горизонтальному напрямі вилітають послідовно два снаряда зі швидкістю $u = 1\,\text{км/с}$ відносно установки. Маса кожного снаряда $m = 25\,\text{кг}$. Визначити швидкість установки після вильоту другого снаряду? Тертя не враховувати. [$10\,\text{м/с}$]

3.5 Космонавт масою $M = 80\,\text{кг}$, який знаходиться на поверхні сферичного астероїда радіусом $R = 1\,\text{км}$ і густиною $\rho = 5\,\text{г/см}^3$, кидає камінь масою $m = 4\,\text{кг}$. При якій мінімальній швидкості каменя відносно астероїда космонавт стане штучним супутником астероїда? [$23,6\,\text{м/с}$]

3.6 Канонір стріляє з гармати так, щоб ядро масою m впало у ворожому таборі. Після пострілу на ядро сідає барон Мюнхгаузен, маса якого $M = 5m$. Яку частину шляху до ворожого табору барон йтиме пішки? [$35/36$]

Рекомендації до теми "Комбіновані задачі"

В комбінованих задачах крім загальних рекомендацій по розв'язуванню задач на збереження імпульсу слід враховувати рекомендації з відповідних розділів і тем кінематики та динаміки.

Тема: Комбіновані задачі. Приклади

Задача 3.6

Дошка масою $M = 1{,}4$ кг довжиною $l = 1$ м нерухомо стоїть у ставку. Жаба маси $m = 100$ г, що сиділа на краю дошки, стрибає під кутом $\alpha = 30°$ до поверхні дошки й опиняється на її протилежному кінці.

Визначити

початкову швидкість v_0 стрибка жаби відносно води, опором рухові жаби та дошки знехтувати.

Розв'язання.

Дано:

$M = 1{,}4$ кг

$l = 1$ м

$m = 100$ г $= 0{,}1$ кг

$\alpha = 30°$

Визначити: v_0

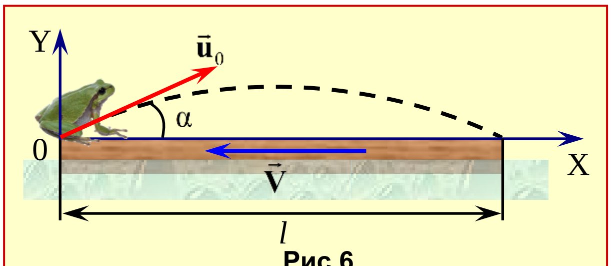


Рис.6

Нехай початкова швидкість стрибка жаби відносно дошки $\vec{\mathbf{u}}_0$. В системі відліку дошки (**рис.6**) з рівнянь кінематики[27] на момент "приземлення" жаби маємо:

$$\left.\begin{aligned} l &= u_0 \cos\alpha \cdot t \\ 0 &= u_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2} \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad u_0 = \sqrt{\frac{gl}{2\sin\alpha\cos\alpha}}.$$

Проекції швидкості $\vec{\mathbf{u}}_0$ на осі координат дорівнюють:

$$u_{0x} = u_0 \cos\alpha = \sqrt{\frac{gl\cos^2\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha}} = \sqrt{\frac{gl}{2}\mathrm{ctg}\alpha}, \tag{1}$$

$$u_{0y} = u_0 \sin\alpha = \sqrt{\frac{gl\sin^2\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha}} = \sqrt{\frac{gl}{2}\mathrm{tg}\alpha}.$$

Внаслідок стрибка дошка почне рухатись (в силу закону збереження імпульсу), причому її швидкість $\vec{\mathbf{V}}$ напрямлена протилежно до горизонтальної складової швидкості жаби. За законом додавання швидкостей (формула **(1.10)**), швидкість жаби відносно води $\vec{\mathbf{v}}_0 = \vec{\mathbf{u}}_0 + \vec{\mathbf{V}}$. У проекціях на осі OX та OY

$$v_{0x} = u_{0x} - V, \tag{2}$$

$$v_{0y} = u_{0y}. \tag{3}$$

Таким чином, для знаходження швидкості жаби відносно води треба визначити швидкість дошки $\vec{\mathbf{V}}$.

Як і у **задачі 3.5**, на момент стрибка жаби виникає додаткова реакція опори – архімедова сила, – що компенсує вертикальну складову сили тиску лап жаби на дошку під час стрибка. З цієї причини зберігається не повний імпульс системи, а тільки його горизонтальна проекція:

$$-MV + mv_{0x} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad V = \frac{m}{M}v_{0x}.$$

Підставивши цей вираз у рівняння **(2)**, отримаємо

[27] Див., для приклада, **задачу 1.20**.

$$v_{0x} = u_{0x} - \frac{m}{M} v_{0x} \qquad \Rightarrow \qquad v_{0x} = \frac{M}{M+m} u_{0x}.$$

Нарешті, врахувавши рівняння **(3)** та вирази **(1)**, дістанемо

$$v_{0x} = \frac{M}{M+m} \sqrt{\frac{gl}{2} \operatorname{ctg}\alpha}.$$

Модуль шуканої швидкості

$$v_0 = \sqrt{v_{0x}^2 + v_{0y}^2} = \sqrt{\left(\frac{M}{m+M}\right)^2 \frac{gl}{2} \operatorname{ctg}\alpha + \frac{gl}{2} \operatorname{tg}\alpha} = \sqrt{\frac{gl}{2}\left(\left(\frac{M}{m+M}\right)^2 \operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{tg}\alpha\right)}.$$

Виконаємо обчислення:

$$v_0 = \sqrt{\frac{9,8 \cdot 1}{2}\left(\left(\frac{1,4}{0,1+1,4}\right)^2 \cdot \sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)} = 3,2\ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Задача 3.7

Снаряд розривається на два однакові уламки у верхній точці траєкторії на висоті $h = 19,5$ м і на відстані по горизонталі $S_1 = 1000$ м від гармати. Один з уламків падає на землю під місцем вибуху через $\tau = 1$ с після вибуху.

Визначити

відстань L від гармати, на яку впаде на землю другий уламок. Опором повітря знехтувати.

Розв'язання.

Дано:
$h = 19,5$ м
$S_1 = 1000$ м
$\tau = 1$ с
Визначити: L

Розмістимо початок координат на поверхні Землі під місцем вибуху і виберемо координатні осі, як показано на **рис.7**. Оскільки вибух відбувся на висоті $h = 19,5$ м, то час вільного падіння тіла з такої висоти $t_0 = \sqrt{2h/g} = 2$ с. За умовою задачі перший уламок впав на Землю через 1 с. Це означає, що він мав початкову швидкість, напрямлену вниз. Час розриву снаряда дуже малий, тому можна вважати, що за цей час імпульс системи зберігається (сила тяжіння просто не встигає помітно його змінити). Отже,

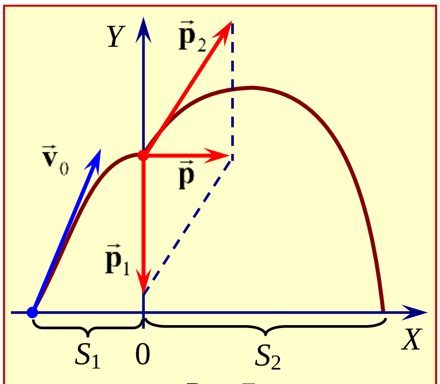


Рис.7

$$\vec{\mathbf{p}} = \vec{\mathbf{p}}_1 + \vec{\mathbf{p}}_2,$$

де $\vec{\mathbf{p}}$ – імпульс снаряда перед розривом, $\vec{\mathbf{p}}_1, \vec{\mathbf{p}}_2$ – імпульси уламків відразу після розриву. Цьому рівнянню відповідає паралелограм імпульсів на **рис.7**.

Оскільки уламки однакові, то

$$m\vec{\mathbf{v}} = \frac{1}{2} m\vec{\mathbf{v}}_1 + \frac{1}{2} m\vec{\mathbf{v}}_2 \qquad \Rightarrow \qquad \vec{\mathbf{v}}_2 = 2\vec{\mathbf{v}} - \vec{\mathbf{v}}_1.$$

У проекціях на осі координат маємо:

$$v_{2x} = 2v, \qquad v_{2y} = v_1, \qquad (1)$$

де v, v_1 – модулі швидкостей снаряда та першого уламка.

Тепер, за допомогою відомих рівнянь кінематики[28] та вихідних даних задачі, знайдемо величини v та v_1, що дозволить одержати v_{2x} та v_{2y}. Після цього, знов таки за допомогою рівнянь кінематики, знайдемо шукану відстань, на якій впаде другий уламок.

---

[28] Див. рекомендації до теми **"Рух тіла, кинутого під кутом до горизонту"** та **задачу 1.20**.

Для руху першого уламка $\vec{\mathbf{v}}_1$ є початковою швидкістю, а h – початковою координатою $y_0 = h$. Тоді, згідно рівнянням **(1.16)**,

$$y_1 = h - v_1 t - \frac{gt^2}{2}.$$

На момент падіння на землю ($t = \tau$) його координата $y_1(\tau) = 0$, тому:

$$0 = h - v_1\tau - \frac{g\tau^2}{2} \qquad \Rightarrow \qquad v_1 = \frac{h}{\tau} - \frac{g\tau}{2}. \qquad (2)$$

Початкові координати снаряда $x(0) = -S_1$, $y_1(0) = 0$. Його координати x, y та проекції швидкості v_x, v_y до вибуху задаються рівняннями **(1.16)**:

$$x_1 = -S_1 + v_{0x}\cdot t; \qquad v_x = v_{0x}$$

$$y = v_{0y}t - \frac{gt^2}{2}; \qquad v_y = v_{0y} - gt, \qquad (3)$$

де v_{0x}, v_{0y} – проекції початкової швидкості снаряда.

Вибух відбувся у верхній точці траєкторії снаряда, тому $v_y = 0$, $v_x = v$, $x = 0$, $y = h$. Врахувавши це, з системи рівнянь **(3)** легко знайдемо

$$v = S_1\sqrt{\frac{g}{2h}}. \qquad (4)$$

З виразів **(1)**, **(2)** і **(4)** отримуємо для другого уламка:

$$v_{2y} = \frac{h}{\tau} - \frac{g\tau}{2} = 14,7\ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

$$v_{2x} = 2S_1\sqrt{\frac{g}{2h}} = 1000\ \frac{\text{м}}{\text{с}}. \qquad (5)$$

Рух другого уламка починається з точки $x_{20} = 0$, $y_{20} = h$. Рівняння його руху мають вигляд (див. рівняння **(1.16)**):

$$x_2 = v_{2x}t,$$

$$y_2 = h + v_{2y}t - \frac{gt^2}{2}.$$

На момент падіння ($t = t_\text{п}$) маємо $x_2(t_\text{п}) = S_2$, $y_2(t_\text{п}) = 0$, тому

$$S_2 = v_{2x}t_\text{п}, \qquad 0 = h + v_{2y}t_\text{п} - \frac{gt_\text{п}^2}{2} \qquad \Rightarrow \qquad S_2 = \frac{v_{2x}v_{2y}}{g} + \sqrt{\left(\frac{v_{2x}v_{2y}}{g}\right)^2 + \frac{2v_{2x}h}{g}}.$$

Підставивши числові значення отримаємо $S_2 = 4000$ м, і шукану відстань

$$L = S_1 + S_2 = 5000 \text{ м}.$$

Тема: Комбіновані задачі
Задачі для самостійної роботи

3.7 Кулька масою $m = 200$ г, яка падає вертикально, на момент удару об підлогу має швидкість $v = 5$ м/с. Після удару кулька підскакує на висоту $h = 46$ см. Визначити зміну модуля імпульсу і модуль зміни імпульсу кульки при ударі. [$-0,4$ кг$\cdot$(м/с) ; $1,6$ кг$\cdot$(м/с)]

3.8 Куля, що летить горизонтально зі швидкістю $v = 750$ м/с, наздоганяє танк і пружно ударяє у задню стінку башти. Визначити швидкість кулі після удару, якщо танк рухається зі швидкістю $V = 72$ км/год, а задня стінка його башти нахилена до горизонту під кутом $\alpha = 60°$. [720 м/с]

3.9 Тенісний м'яч масою $m = 100\text{ г}$, який летить горизонтально зі швидкістю $v = 20\text{ м/с}$, відбито ударом ракетки у протилежному напрямку. Швидкість ракетки в момент удару $V = 15\text{ м/с}$. Визначити: **А)** модуль зміни імпульсу м'яча в результаті удару; **Б)** середню силу, що діяла на м'яч під час удару. Тривалість удару $\tau = 0,05\text{ с}$. Удар вважати пружним, дією сили тяжіння знехтувати. [$7\text{ кг}\cdot(\text{м/с})$; 140 Н]

3.10 Тіло масою $m = 1\text{ кг}$ кинули під кутом до горизонту. За час польоту його імпульс змінився на $\Delta p = 10\text{ кг}\cdot(\text{м/с})$. На яку найбільшу висоту підніметься тіло у своєму русі? [$1,25\text{ м}$]

Рекомендації до теми "Властивості центра мас"

Задачі на знаходження або використання координат центра мас розв'язують за допомогою формул **(3.6)**, **(3.6а)**, застосовуючи при необхідності **теорему про рух центра мас**.

Тема: Властивості центра мас. Приклади

Задача 3.8

На поверхні озера нерухомо стоїть пліт маси M, на якому знаходиться людина маси m. Людина переміщується $\vec{l}$ відносно плота і зупиняється.

Визначити

переміщення плота $\vec{\mathbf{L}}_0$ відносно води. Опором води рухові плота знехтувати.

Розв'язання.

Дано:
M
m
$\vec{l}$

Визначити: $\vec{\mathbf{L}}_0$

Задачу можна розв'язати двома способами.

I спосіб. Коли людина й пліт нерухомі, зовнішні сили (тяжіння та архімедова) скомпенсовані. Рух людини відносно плота та рух плота відносно води зумовлені силами тертя, що діють на ноги людини з боку плота та на пліт з боку ніг людини під час руху людини. Але ці сили є внутрішніми в системі "людина-пліт". Вони напрямлені горизонтально і тому не порушують рівноваги вертикальних зовнішніх сил, отже імпульс системи під час переходу людини лишається незмінним і рівним початковому значенню, тобто нулю:

$$m\vec{\mathbf{v}}_{\text{л}} + M\vec{\mathbf{V}}_{\text{п}} = 0. \qquad (1)$$

Для будь-якого малого проміжку часу переміщення $\Delta\vec{\mathbf{L}} = \vec{\mathbf{v}}\Delta t$, тому, домноживши рівняння **(1)** на Δt, маємо для малих переміщень людини $\Delta\vec{\mathbf{L}}$ та плота $\Delta\vec{\mathbf{L}}_0$:

$$m\Delta\vec{\mathbf{L}} + M\Delta\vec{\mathbf{L}}_0 = 0.$$

Очевидно, що так само зв'язані й переміщення за весь час руху:

$$m\vec{\mathbf{L}} + M\vec{\mathbf{L}}_0 = 0. \qquad (2)$$

В цьому рівнянні $\vec{\mathbf{L}}$ – переміщення людини відносно води. З заданим в умові задачі переміщенням $\vec{l}$ відносно плота воно пов'язане співвідношенням (див. формулу **(1.1)** і **(1.8)**)

$$\vec{\mathbf{L}} = \vec{l} + \vec{\mathbf{L}}_0.$$

Підставивши цей вираз в рівняння **(2)**, отримаємо:

$$m\left(\vec{l} + \vec{\mathbf{L}}_0\right) + M\vec{\mathbf{L}}_0 = 0. \qquad \Rightarrow \qquad \vec{\mathbf{L}}_0 = -\frac{m}{M+m}\vec{l}.$$

II спосіб. Імпульс системи "пліт-людина" можна подати, як $\vec{\mathbf{P}} = (M+m)\vec{\mathbf{V}}_{\text{c}}$, де $\vec{\mathbf{V}}_{\text{c}}$ – швидкість центра мас.

Оскільки $\vec{\mathbf{P}} = 0$, то $\vec{\mathbf{V}}_{\text{c}} = 0$. Отже при переміщенні людини та плота відносно води центр мас системи лишається нерухомим. Тому можна записати вирази для радіуса-вектора $\vec{\mathbf{r}}_{\text{c}}$ центра мас через радіуси-вектори початкового та кінцевого положення людини ($\vec{\mathbf{r}}_{1\text{л}}$, $\vec{\mathbf{r}}_{2\text{л}}$) та плота ($\vec{\mathbf{r}}_{1\text{п}}$, $\vec{\mathbf{r}}_{2\text{п}}$) (див. формулу **(3.6)**) і прирівняти їх:

$$\begin{array}{l} \vec{\mathbf{r}}_{1\text{c}} = \dfrac{M\vec{\mathbf{r}}_{1\text{п}} + m\vec{\mathbf{r}}_{1\text{л}}}{M+m}; \\ \vec{\mathbf{r}}_{2\text{c}} = \dfrac{M\vec{\mathbf{r}}_{2\text{п}} + m\vec{\mathbf{r}}_{2\text{л}}}{M+m}; \end{array} \quad \Rightarrow \quad M\vec{\mathbf{r}}_{1\text{п}} + m\vec{\mathbf{r}}_{1\text{л}} = M\vec{\mathbf{r}}_{2\text{п}} + m\vec{\mathbf{r}}_{2\text{л}} \quad \Rightarrow \quad M\left(\vec{\mathbf{r}}_{1\text{п}} - \vec{\mathbf{r}}_{2\text{п}}\right) = m\left(\vec{\mathbf{r}}_{2\text{л}} - \vec{\mathbf{r}}_{2\text{л}}\right).$$

Різниці радіусів-векторів – то є відповідні переміщення відносно води:

$$\vec{\mathbf{r}}_{1\text{п}} - \vec{\mathbf{r}}_{2\text{п}} = \vec{\mathbf{L}}_0;$$

$$\vec{\mathbf{r}}_{2\text{л}} - \vec{\mathbf{r}}_{1\text{л}} = \vec{\mathbf{L}} = \vec{l} + \vec{\mathbf{L}}_0,$$

Таким чином:

$$M\vec{\mathbf{L}}_0 + m\left(\vec{\mathbf{l}} + \vec{\mathbf{L}}_0\right) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \vec{\mathbf{L}}_0 = -\frac{m}{M+m}\vec{\mathbf{l}}.$$

Тема: Властивості центра мас

Задачі для самостійної роботи

3.11 Космонавт масою m наближається до космічного корабля масою M, вибираючи легкий трос. У початковому стані тіла нерухомі, а відстань між ними L. Яку відстань пройдуть космонавт і корабель до зустрічі? [$ML/(m+M)$, $mL/(m+M)$]

3.12 Двоє рибалок масами $m_1 = 60$ кг і $m_2 = 40$ кг стоять на носі та кормі човна, що не прив'язаний до берега. На скільки зміститься човен відносно дна, якщо рибалки поміняються місцями? Довжина човна $l = 4$ м, маса $M = 220$ кг. [25 см]

3.13 Космічна станція являє собою циліндр радіуса R і маси m_2. Космонавт масою m_1 починає обхід станції по її поверхні. Визначити траєкторію космонавта і центра станції. У вихідному стані космонавт і станція були нерухомі. [Коло; радіусами $m_2R/(m_1+m_2)$, $m_1R/(m_1+m_2)$]

3.14 Подвійна зірка – це дві зірки масами m_1 та m_2, які обертаються навколо центра мас по колових траєкторіях. Відстань між зірками l. Визначити радіуси орбіт зірок та періоди їх обертання. [$r_1 = m_2 l/(m_1+m_2)$; $r_2 = m_1 l/(m_1+m_2)$; $T_1 = T_2 = r_2\rho\left(l/G/(m_1+m_2)\right)$]

МЕХАНІКА

Розділ 4. Робота та енергія

Терміни "**робота**" та "**енергія**" загальновідомі. У повсякденному житті вони пов'язуються з фізичною діяльністю людини або функціонуванням механізмів. Причому самоочевидним є те, що для виконання роботи потрібна енергія. Отже, на практиці енергію можна трактувати як величину, що характеризує можливість виконання роботи. Але як наукові поняття енергія та робота мають більш чіткий і глибокий фізичний зміст.

- **Теоретичні відомості**
- **Приклади розв'язування задач**
- **Задачі для самостійної роботи**

***Розділ 4.* Робота та енергія**

Теоретичні відомості

робота сили
кінетична та потенціальна енергія
закон збереження механічної енергії
потужність. ККД механізмів
загальний закон збереження енергії
Робота та енергія
Теоретичні відомості
Робота сили

Робота є мірою дії сили на заданому переміщенні. В простих задачах розглядається **робота сталої сили та робота рівнодійної декількох сил**. В більш складних задачах доводиться мати справу з **роботою змінної сили**.

Роботою A **сталої сили** $\vec{\mathbf{F}}$ на переміщенні $\vec{\mathbf{S}}$ називається величина, що дорівнює скалярному добутку цих векторів (**рис.4.1**):

$$A = \left(\vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{S}}\right) = FS\cos\alpha. \qquad (4.1)$$

Робота – це скалярна алгебраїчна величина. Зокрема, завжди, коли $\alpha > 90°$ (**рис.4.1б**), робота сили від'ємна. Інакше кажучи, від'ємну роботу виконує сила, котра спричинює гальмівну дію. Якщо сила перпендикулярна до переміщення, то вона роботи не виконує ($\cos 90° = 0$). З означення **(4.1)** випливає також, що числове значення роботи залежить від системи відліку, в якій воно визначається. Зауважимо також, що термін **"робота"** відображає не властивість чи стан, а процес. Тому робота завжди **виконується**, а не "міститься".

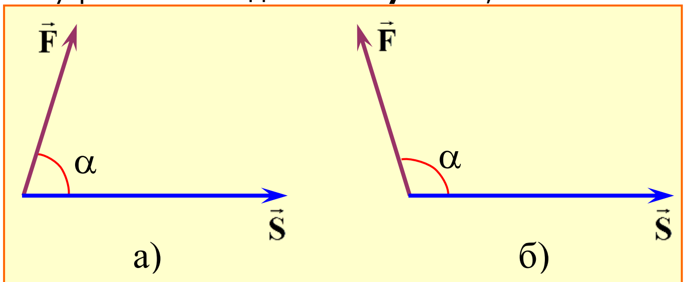


Рис. 4.1

Роботу вимірюють **джоулях** (Дж): **1 Дж = 1 Н·м** – це робота, що виконується сталою силою 1 Н на переміщенні 1 м, за умови, що сила співнапрямлена з переміщенням.

Робота рівнодійної декількох сил $\vec{\mathbf{F}} = \sum_i \vec{\mathbf{F}}_i$ на даному переміщенні $\vec{\mathbf{S}}$ дорівнює алгебраїчній сумі робіт кожної зі складових сил:

$$A = \left(\vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{S}}\right) = \left(\sum_i \vec{\mathbf{F}}_i\right)\vec{\mathbf{S}} = \sum_i \left(\vec{\mathbf{F}}_i \vec{\mathbf{S}}\right) \quad \Rightarrow \quad A = \sum_i A_i. \qquad (4.2)$$

Загальний метод розрахунку **роботи змінної сили**, тобто у випадках, коли з тих чи інших причин модуль сили F або кут α змінюються при переміщенні вздовж траєкторії, базується на тому, що робота є **адитивною** величиною. Адитивність означає, що робота *A* на заданій траєкторії АВ (**рис.4.2**) дорівнює сумі робіт $\Delta A_к$, що виконуються на окремих ділянках цієї траєкторії:

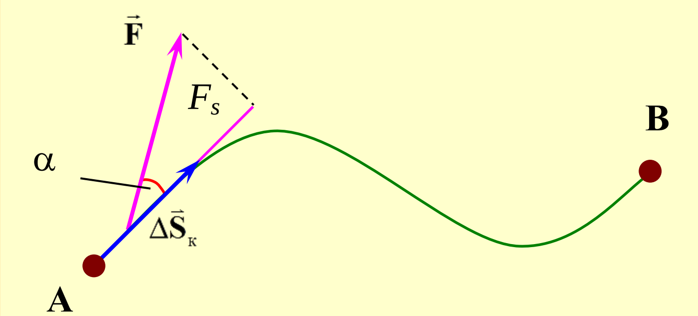


Рис. 4.2

$$A = \sum_к \Delta A_к. \qquad (4.2a)$$

Для визначення роботи змінної сили чинять так. Всю траєкторію подумки розбивають на гранично малі ділянки, на яких сила F та кут α лишаються незмінними. Далі знаходять елементарні роботи на окремих ділянках і додають їх.

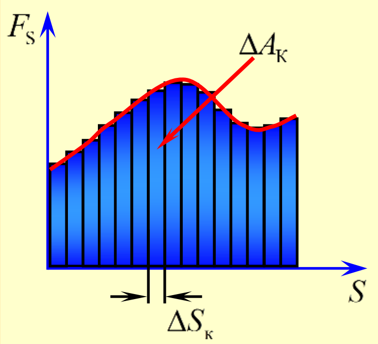


Рис. 4.3

В загальному випадку такі обчислення вимагають застосування методів вищої математики і можуть виявитись складними. Але існують зручні непрямі способи визначення роботи змінної сили, зокрема – за допомогою графіка сили, тобто графіка $F_S = f(S)$ залежності проекції сили F_S на напрям дотичної до траєкторії від пройденого шляху[29] S (**рис.4.3**). Оскільки мале переміщення $\Delta\mathbf{S}_к$ за модулем майже не відрізняється від відповідної частини пройденого шляху і його напрям практично збігається з дотичною до траєкторії (**рис.4.2**), робота $\Delta A_к$ наближено виражається формулою

$$\Delta A_к \approx F\Delta S_к \cos\alpha = F_S \Delta S_к.$$

Чисельно ця величина дорівнює площі відповідного прямокутника на графіку сили $F_S = f(S)$ (**рис.4.3**). Очевидно, що робота на всьому шляху наближено дорівнює площі ступінчастої фігури, що утворена всіма такими прямокутниками. Щоб отримати точний результат, ділянки $\Delta S_к$ треба зробити гранично малими ($\Delta S_к \to 0$). При цьому ламана на **рис.4.3** зіллється з графіком $F_S = f(S)$. Отже,

робота змінної сили на заданій ділянці траєкторії чисельно дорівнює площі під відповідною ділянкою графіка сили[30].

---

[29] Величина S визначає положення тіла на траєкторії у певний момент часу.

[30] Слід зауважити, що такий підхід зручний для якісного аналізу задачі. Для обчислень він придатний лише при лінійній залежності $F_S(S)$.

Кінетична та потенціальна енергія

Робота може виконуватись як за рахунок зміни швидкості руху тіла, так і за рахунок зміни його положення відносно тих тіл, з якими воно взаємодіє. Відповідно існують два різновиди механічної енергії: **кінетична енергія** та **потенціальна енергія**. Як і роботу, енергію вимірюють у **джоулях**.
Потенціальна енергія залежить від виду сил взаємодії між тілами. Тому в механіці **потенціальна енергія тіла у полі сил тяжіння** та **потенціальна енергія пружно деформованого тіла** виражаються різними формулами, які дозволяють легко обчислювати **роботу сил тяжіння та пружності**.

Кінетична енергія - це енергія руху. Вона визначається формулами

$$W_{\text{к}} = \frac{mv^2}{2}, \tag{4.3а}$$

або

$$W_{\text{к}} = \frac{p^2}{2m}, \tag{4.3б}$$

де m – маса, v – швидкість руху, $p = mv$ – імпульс тіла.

Кінетична енергія є додатною скалярною величиною. Вона також є **адитивною** величиною, тобто кінетична енергія системи дорівнює сумі кінетичних енергій окремих тіл системи:

$$W_{\text{к}} = \sum_{\text{i}} W_{\text{кi}}.$$

Так само як і робота, кінетична енергія тіла залежить від системи відліку: в різних системах відліку вона має різні значення.
Між кінетичною енергією та роботою існує універсальний зв'язок, який називають **теоремою про кінетичну енергію**:

робота рівнодійної всіх сил, що діють на тіло, дорівнює зміні його кінетичної енергії:

$$A = W_{\text{к}2} - W_{\text{к}1} = \Delta W_{\text{к}}, \tag{4.4}$$

де $W_{\text{к}1}$, $W_{\text{к}2}$ – початкове та кінцеве значення кінетичної енергії відповідно.

Потенціальна енергія - це "енергія положення", вона зумовлена взаємодією тіл за допомогою так званих **консервативних сил** і визначається взаємним розташуванням тіл.
Консервативними називаються сили, робота котрих не залежить від траєкторії (шляху), а визначається тільки положенням початкової та кінцевої точок переміщення. Очевидно, що при переміщенні по замкнутій траєкторії робота консервативних сил дорівнює нулю. Сили, що не мають такої властивості, звуться **неконсервативними**. В механіці консервативними є сили тяжіння (гравітаційні сили) та сили пружності. Натомість сили тертя та опору є неконсервативними силами.
Потенціальна енергія - то є алгебраїчна величина, що пов'язана з роботою консервативних сил загальним співвідношенням:

$$A = W_{\text{п}1} - W_{\text{п}2} = -\Delta W_{\text{п}}, \tag{4.5}$$

де $W_{\text{п}1}$ – початкове та кінцеве значення потенціальної енергії відповідно,
$\Delta W_{\text{п}} = W_{\text{п}2} - W_{\text{п}1}$ – приріст (зміна) потенціальної енергії. Отже,

робота консервативних сил завжди дорівнює спадові потенціальної енергії.

Вираз **(4.5)** по суті є кількісним означенням поняття **"потенціальна енергія"**[1].
Потенціальна енергія є спільною характеристикою взаємодіючих тіл. Але часто взаємодія між двома тілами впливає на механічний стан лише одного з них. Тоді

[1] Ще раз звертаємо увагу на те, що для неконсервативних сил поняття потенціальної енергії не існує.

говорять про потенціальну енергію даного тіла. Наприклад, ми говоримо про потенціальну енергію піднятого над Землею тіла, а не про потенціальну енергію взаємодії системи "тіло-Земля".
Потенціальна енергія як фізична величина має ту особливість, що вона сама по собі не визначена однозначно. Щоб надати потенціальній енергії якогось певного значення в кожній точці простору, треба спочатку вибрати **"нульовий рівень"** (початок відліку), тобто задати положення, в якому потенціальна енергія **приймається** рівною нулю. Вибирати нульовий рівень можна довільно[2], тому в кожному випадку керуються міркуваннями зручності та природності.

Для **потенціальної енергії** $W_т$ тіла, що знаходиться **у полі сил тяжіння**, за нульовий рівень приймають будь-яку горизонтальну площину і визначають енергію за формулою

$$W_т = mgh, \tag{4.6}$$

де m – маса тіла, g – прискорення сили тяжіння (прискорення вільного падіння), h – висота центра мас тіла відносно нульового рівня[3]. Якщо тіло переміщується на велику відстань так, що сила тяжіння (та прискорення вільного падіння) помітно змінюються, то нульовий рівень вибирається на нескінченності, і гравітаційна потенціальна енергія визначається формулою

$$W_п = -G\frac{Mm}{r}, \tag{4.7}$$

де G – гравітаційна стала, M, m – відповідно маса планети та даного тіла, r – відстань від центра планети до тіла.

Потенціальна енергія пружно деформованого тіла приймається рівною нулю, коли воно не деформоване, що природно. Відтак потенціальна енергія $W_{пр}$ стисненого або розтягненого тіла визначається формулою

$$W_{пр} = \frac{kx^2}{2}, \tag{4.8}$$

де k – жорсткість тіла[4], x – величина деформації.

Згідно з наведеними формулами та виразом **(4.5)**, **робота сил тяжіння та пружності** виражається формулами:

$$A_т = mgh_1 - mgh_2 , \tag{4.9}$$

$$A_г = -G\frac{mM}{r_1} + G\frac{mM}{r_2}, \tag{4.10}$$

$$A_{пр} = \frac{kx_1^2}{2} - \frac{kx_2^2}{2}. \tag{4.11}$$

Закон збереження механічної енергії

Кінетична та потенціальна енергії є складовими **повної механічної енергії**. Механічна енергія має здатність зберігатися за відповідних умов, що визначаються **законом збереження механічної енергії**. У загальному випадку механічна енергія змінюється згідно з універсальним **співвідношенням між енергією та роботою**.

Сума потенціальної та кінетичної енергії називається **повною**[5)] **механічною енергією** тіла або системи тіл:

---

[2] Така свобода вибору не впливає на кінцевий результат жодної задачі, оскільки, як виявляється, в будь-якому процесі реальне значення має не сама потенціальна енергія, а лише її зміна. Остання ж очевидно не залежить від вибору нульового рівня.

[3] Якщо тіло знаходиться нижче нульового рівня, то "висота" h і енергія $W_п$ від'ємні.

[4] В елементарній фізиці мається на увазі пружина або еластичний шнур.

$W = W_к + W_п$.

Якщо в системі діють лише консервативні сили, то, згідно зі співвідношеннями **(4.4)** і **(4.5)**, для будь-якого проміжку часу

$$\Delta W_к = -\Delta W_п \quad \Rightarrow \quad W_{к2} - W_{к1} = W_{п1} - W_{п2} \quad \Rightarrow \quad W_{к2} + W_{п2} = W_{к1} + W_{п1} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{W = \mathrm{co}} \qquad (4.12)$$

У цьому полягає **закон збереження механічної енергії**:

механічна енергія системи, в якій діють тільки консервативні сили, зберігається, тобто не змінюється з часом.

Можна сказати, що в такій системі механічна енергія "**законсервована**". Звідси походить термін "**консервативні сили**".

При наявності неконсервативних сил механічна енергія системи змінюється згідно з універсальним **співвідношенням між енергією та роботою**:

зміна механічної енергії довільної системи дорівнює сумарній роботі всіх зовнішніх та внутрішніх неконсервативних сил, які діють в цій системі.

Неконсервативні сили взаємодії між тілами механічної системи - то практично завжди ті чи інші сили тертя та опору. Тому закон зміни механічної енергії математично виражається так:

$$\Delta W = W_2 - W_1 = A_т + A_з, \qquad (4.13)$$

де W_1, W_2 – початкова та кінцева механічна енергія, $A_т$ – робота всіх сил тертя та опору, що діють між тілами системи, $A_з$ – робота всіх зовнішніх неконсервативних сил.

Якщо система замкнена (ізольована), то $A_з = 0$, і зміна енергії визначається тільки силами тертя та опору

$$\Delta W = W_2 - W_1 = A_т. \qquad (4.14)$$

Сумарна робота внутрішніх сил тертя та опору завжди від'ємна[6], тому $\Delta W < 0$. Таким чином, за наявності тертя та опору середовища механічна енергія ізольованої системи зменшується з часом. Отже, на відміну від імпульсу, однієї ізольованості системи недостатньо для збереження механічної енергії – необхідна ще й відсутність будь-яких сил тертя та опору. З іншого боку механічна енергія може зберігатися і в незамкненій системі, якщо $A_т + A_з = 0$, тобто робота зовнішніх сил "компенсує" від'ємну роботу внутрішніх сил тертя.

Потужність. ККД механізмів

Для отримання енергії того чи іншого виду існують відповідні технічні пристрої (механізми). Зокрема, для отримання механічної енергії (виконання роботи) використовують різні двигуни. При цьому функціональні характеристики двигуна визначаються не просто можливістю виконувати певну роботу, а здатністю виконати її за певний час, тобто - працювати з відповідною інтенсивністю. Мірою інтенсивності роботи є **потужність**. При цьому розглядають **середню потужність** та **миттєву потужність**.

Ефективність перетворення енергії в двигунах та інших механізмах характеризують **коефіцієнтом корисної дії (ККД)**.

Середньою потужністю $\langle P \rangle$ за даний проміжок часу t називається відношення виконаної роботи A до величини цього проміжку:

$$\langle P \rangle = \frac{A}{t}. \qquad (4.15)$$

Потужність вимірюється у **ватах** (**Вт**): **1 Вт = 1 Дж/с** - це потужність, при якій за 1 с виконується робота 1 Дж.

Якщо робота виконується нерівномірно, то в кожен момент часу вона

---

[5] Слово "повна" часто випускають.

[6] При цьому робота окремих сил тертя може бути і додатною.

характеризується **миттєвою потужністю**

$$P = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta A}{\Delta t}.$$

Згідно з означенням **(4.1)**, $\Delta A = \vec{\mathbf{F}} \Delta \vec{\mathbf{S}}$. Отже миттєва потужність сили $\vec{\mathbf{F}}$

$$P = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{\mathbf{F}} \Delta \vec{\mathbf{S}}}{\Delta t} = \vec{\mathbf{F}} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{\mathbf{S}}}{\Delta t}, \qquad \Rightarrow \qquad P = \left(\vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{v}}\right) = Fv\cos\alpha, \tag{4.16}$$

де $\vec{\mathbf{v}}$ – миттєва швидкість тіла, α – кут між векторами сили та швидкості.
Потужність як технічна характеристика механізмів виражається додатними числами, але як фізична характеристика сили потужність є алгебраїчною величиною. Знак потужності сили співпадає зі знаком роботи цієї сили і має той самий фізичний зміст.

У будь-якому механізмі енергія даного виду не виникає з нічого, вона створюється завдяки трансформації інших видів енергії. Таке перетворення ніколи не буває повним - частина затраченої енергії перетворюється в якісь непотрібні види, отже втрачається. Тому корисна енергія завжди менша, ніж затрачена.
Ефективність трансформації енергії в механізмах та фізичних процесах визначається **коефіцієнтом корисної дії** (**ККД**) η :

$$\eta = \frac{A_к}{A_з} = \frac{W_к}{W_з} = \frac{P_к}{P_з}, \tag{4.17}$$

де $A_п$ ($W_п$, $P_п$) – корисна робота (енергія, потужність), $A_з$ ($W_з$, $P_з$) – затрачена робота (енергія, потужність). ККД виражають або натуральним числом, або у відсотках (%). В останньому випадку відношення **(4.17)** множать на 100.

Загальний закон збереження енергії

Крім механічної, існують інші види енергії: внутрішня (теплова), електрична, хімічна, ядерна, тощо.
Визначальною властивістю енергії є здатність різних її видів до взаємних перетворень, причому ці перетворення підпорядковані **загальному закону збереження енергії**:

Енергія не зникає безслідно й не виникає з нічого, вона лише переходить з одних видів в інші в рівних кількостях.

Це ж можна сказати й так:

В будь-якій замкненій системі сума всіх видів енергії не змінюється при будь-яких процесах в ній.

Цей закон є **абсолютним** фізичним законом - він виконується в **будь-якій системі** за **будь-яких умов**.
Таким чином, кожна фізична система має деяку повну енергію, і кожен фізичний процес супроводжується перетворенням відповідних видів енергії. Це визначає первісний зміст поняття **"енергія"**:

енергія є універсально кількісною характеристикою стану та процесів у фізичних системах.

Аналогічно, співвідношення **(4.4)**, **(4.5)**, **(4.13)**, **(4.14)** висвітлюють первісний зміст поняття **"робота"**:

робота є мірою перетворення механічної енергії,

причому робота консервативних сил визначає взаємні перетворення різновидів механічної енергії (співвідношення **(4.12)**), а робота неконсервативних сил визначає перетворення механічної енергії в інші форми. Зокрема, робота сил тертя та опору визначає перетворення механічної енергії у внутрішню (теплову) енергію.

Рекомендації до розділу "Робота та енергія"

Для складання рівняння енергетичного балансу необхідно:

1)	Виділити механічну систему. Для цього з усієї сукупності тіл, що фігурують в задачі, треба вибрати одне чи декілька тіл, енергія яких буде далі розглядатись в розв'язанні. Поділ усіх тіл на тіла системи та зовнішні тіла не є однозначним - його можна робити по-різному. Найдоцільніше включати в систему тільки ті тіла, механічна енергія котрих змінюється за умовою задачі.

2) Розглянути всі діючі в системі сили (як внутрішні, так і зовнішні) і з'ясувати, які з них є консервативними, а які - ні. Для всіх консервативних сил згадати формули потенціальної енергії.

3) Згідно з умовою задачі вибрати початковий та кінцевий стани системи. При цьому корисно схематично показати на рисунку початкове та кінцеве положення тіл системи.

4) Обрати зручний нульовий рівень потенціальної енергії та записати вирази потенціальної енергії системи в початковому та в кінцевому станах. Нульові рівні потенціальної енергії для кожної з консервативних сил можна вибрати незалежно, але інколи буває зручно використовувати спільний нульовий рівень. Наприклад, прийняти рівною нулю потенціальну енергію будь-якого виду в початковому положенні тіл системи.

5) Записати вирази кінетичної та повної механічної енергії в початковому та кінцевому станах системи.

6) Записати вирази робіт всіх неконсервативних сил через їхні величини та переміщення, використовуючи формули чи методи обчислення роботи, розглянуті вище.

7) На основі п.п. **4**, **5**, **6** скласти рівняння енергетичного балансу (прирівняти вирази зміни повної механічної енергії та повної роботи неконсервативних сил) і визначити з нього шукану величину. Якщо в системі змінюється механічна енергія більш ніж одного тіла, в рівняння енергетичного балансу може увійти більше, ніж одна невідома величина. В такому випадку слід продовжити аналіз умови задачі та процесів у системі і скласти додаткові рівняння. Часто - це рівняння, що виражають закон збереження імпульсу.

Рекомендації до теми "Визначення роботи через силу"

1) Роботу відомої[31] сталої сили на заданому переміщенні можна обчислити безпосередньо за формулою **(4.1)**. При цьому треба бути уважним щодо напрямку сили та знаку величини $\cos\alpha$, який визначає знак шуканої роботи.

2) Роботу відомої змінної сили на заданій ділянці траєкторії зручно визначати за допомогою графіка сили[32], дотримуючись такої послідовності:
зобразити траєкторію переміщення тіла, дотичну до траєкторії в довільній точці та показати вектор потрібної сили в цій точці. Записати вираз проекції сили F_s на напрям руху в залежності від пройденого шляху S (відстані вздовж траєкторії від початкового положення до даної точки): $F_s = f(S)$.
зобразити графік $F_s = f(S)$ (графік сили) і з точок осі абсцис, що відповідають заданим початковому та кінцевому положенням тіла, провести перпендикуляри до перетину з графіком F_s.
Визначити площу[33] утвореної трапеції, яка чисельно дорівнює шуканій роботі.

---

[31] Мається на увазі, що величина та напрям сили або безпосередньо задані в умові, або можуть бути визначені з відповідних формул чи з законів Ньютона.
[32] В задачах елементарної фізики використовують тільки змінні сили з простими властивостями.
[33] Ця площа є алгебраїчною величиною: її знак визначається знаками F_s в різних точках траєкторії. Якщо знак F_s скрізь однаковий, то зручно будувати графік модуля $|F_s|$, а знак шуканої роботи враховувати окремо.

Тема: Визначення роботи через силу

Приклади розв'язування задач

Задача 4.1

Брусок маси $m = 1\,\text{кг}$ рівномірно тягнуть за мотузку по горизонтальній поверхні так, що мотузка складає з горизонтом кут $\alpha = 45°$.

Визначити: роботу A, яку при цьому виконують на шляху $S = 6\,\text{м}$, якщо коефіцієнт тертя між бруском і поверхнею $\mu = 0,5$.

Дано:
$m = 1\,\text{кг}$
$S = 6\,\text{м}$
$\alpha = 45°$
$\mu = 0,5$

Визначити: A

Розв'язання

Прикладена до мотузки сила $\vec{\mathbf{F}}$ (**рис.1**) є сталою і її робота

$$A = FS\cos\alpha. \quad (1)$$

Для визначення величини F врахуємо, що брусок рухається без прискорення. Це означає, що діючі на нього сили: прикладена $\vec{\mathbf{F}}$, тяжіння $m\vec{\mathbf{g}}$, нормальна реакція опори $\vec{\mathbf{N}}$ та тертя $\vec{\mathbf{F}}_\text{т}$ є скомпенсованими:

$$\vec{\mathbf{F}} + \vec{\mathbf{F}}_\text{т} + m\vec{\mathbf{g}} + \vec{\mathbf{N}} = 0$$

У проекціях на осі координат (**рис.1**)

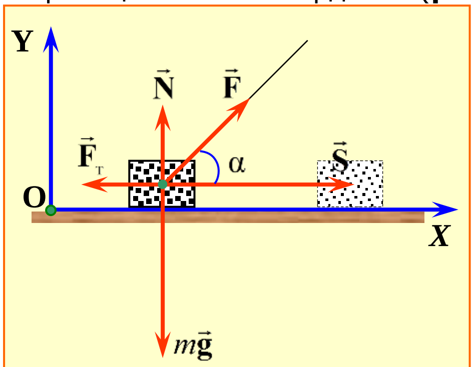


Рис. 1

Врахувавши, що $F_\text{т} = \mu N$, з цієї системи дістанемо

$$F = \frac{\mu mg}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha}.$$

Підставимо цей вираз у формулу **(1)** й отримаємо:

$$A = \frac{\mu mgS\cos\alpha}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha} \Rightarrow A = \frac{\mu mgS}{1 + \mu\,\text{tg}\alpha} = \frac{0,5\cdot 1\cdot 9,8\cdot 6}{1 + 0,5\cdot 1} = 19,6\,\text{Дж}.$$

Задача 4.2

На горизонтальній площині лежить дошка довжини l (**рис. 2**), а на ній скраю (в точці $\mathbf{O}$) - маленький брусок маси m. Коефіцієнт тертя між бруском та дошкою μ, тертя між дошкою та площиною відсутнє. Брусок пересувають по дошці з одного краю на інший (в точку $\mathbf{B}$), внаслідок чого дошка переміщується по площині на відстань $\mathbf{OO}' = S$.

Визначити:

А) роботу сили тертя, що діє на брусок в системі відліку площини (A_1) та в системі відліку дошки (A_1');

Б) сумарну роботу сил тертя A, що діють на брусок та на дошку.

Дано:
l, m, μ, S

Визначити: A_1, A_1', A

Розв'язання

А) З боку дошки на брусок діє сила тертя $\vec{\mathbf{F}}_1$, модуль якої $F_1 = \mu mg$. Така ж за модулем, але протилежна за

напрямом (III закон Ньютона) сила тертя $\vec{\mathbf{F}}_2$ діє на дошку з боку бруска (**рис.2-1**). Інші діючі сили в даній задачі не становлять інтересу і на рисунку не показані.
Відносно площини брусок переміщується на відстань $\mathbf{OB} = S + l$, і робота сили тертя $\vec{\mathbf{F}}_1$ в цій системі відліку

$$A_1 = -F_1(S+l) \quad \Rightarrow \quad A_1 = -\mu mg(S+l). \tag{1}$$

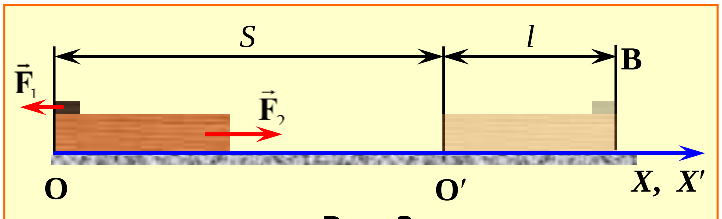


Рис. 2

Відносно дошки брусок переміщується на відстань $\mathbf{O'B} = l$, і в цій системі відліку робота

$$A_1' = -F_1 l \quad \Rightarrow \quad A_1' = -\mu mgl. \tag{2}$$

В обох системах відліку робота від'ємна, оскільки сила $\vec{\mathbf{F}}_1$ напрямлена протилежно до переміщення бруска, але за модулем роботи різні: $A_1 \neq A_1'$.

Б) Між дошкою та площиною тертя немає, тому під дією сили тертя $\vec{\mathbf{F}}_2$ дошка буде ковзати по площині і за умовою пройде шлях S. Отже робота сили тертя, що діє на дошку, виконує роботу

$$A_2 = F_2 S \quad \Rightarrow \quad A_2 = \mu mgS. \tag{3}$$

Робота $A_2 > 0$, і це не дивно, адже сила тертя $\vec{\mathbf{F}}_2$ не гальмує, а прискорює дошку.
Сумарна робота сил тертя, що діють між бруском та дошкою, $A = A_1 + A_2$ і , згідно з виразами **(1)** та **(3)**

$$A = -\mu mg(S+l) + \mu mgS \quad \Rightarrow \quad A = -\mu mgl. \tag{4}$$

В системі відліку, зв'язаній з дошкою, остання природно нерухома. Тому робота сили $\vec{\mathbf{F}}_2$ $A_2' = 0$. Отже повна робота сил тертя в цій системі відліку визначається формулою **(2)**:

$$A = A_1' = -\mu mgl.$$

Таким чином, сумарна робота сил тертя визначається добутком однієї з них на відносне переміщення відповідного тіла. Цей результат є прямим наслідком третього закону Ньютона і справедливий не тільки для сил тертя, а й для будь-яких внутрішніх сил, тобто сил взаємодії між тілами системи.
Бачимо, що сумарна робота $A < 0$.

Цей розрахунок ілюструє загальну властивість сил тертя: робота окремих сил тертя, що діють в системі, може бути як від'ємною, так і додатною, але сумарна робота всіх внутрішніх сил тертя в системі завжди від'ємна.

Рекомендації до теми "Визначення роботи через механічну енергію"

Спосіб визначення роботи через механічну енергію більш зручний й однаково придатний як для відомої, так і для невідомої сили, але його застосування можливе тільки за певних умов:

1. Дана сила є консервативною. Тоді робота обчислюється через потенціальну енергію за формулою **(4.5)**.

2. Якщо дана сила є єдиною силою, що діє на тіло, або треба визначити роботу рівнодійної всіх сил, то можна використати формулу **(4.4)**.

3. Якщо всі інші сили, крім даної, консервативні, або робота інших сил задана чи легко може бути визначена, то роботу даної сили можна визначити за загальним співвідношенням **(4.13)**. Для цього за описаною вище схемою складається рівняння енергетичного балансу, і з нього визначається шукана робота.

Примітка. Якщо за умовою шукається мінімальна робота, то кінетична енергія тіла в енергетичному балансі не враховується.

Тема: Визначення роботи через механічну енергію

Задача 4.3

На столі лежить ланцюг, що має масу m та довжину l.

Визначити:

мінімальну роботу A, яку необхідно виконати щоб, підіймаючи один з кінців перевести його у вертикальне положення.

Дано:
m, l
Визначити: A

Розв'язання

I спосіб. Для піднімання до кінця ланцюга треба прикладати вертикальну силу $\vec{\mathbf{F}}$. Її найменше значення в кожну мить має дорівнювати вазі вже піднятої частини ланцюга $m'g$ (**рис.3а, б**):

$$F = m'g.$$

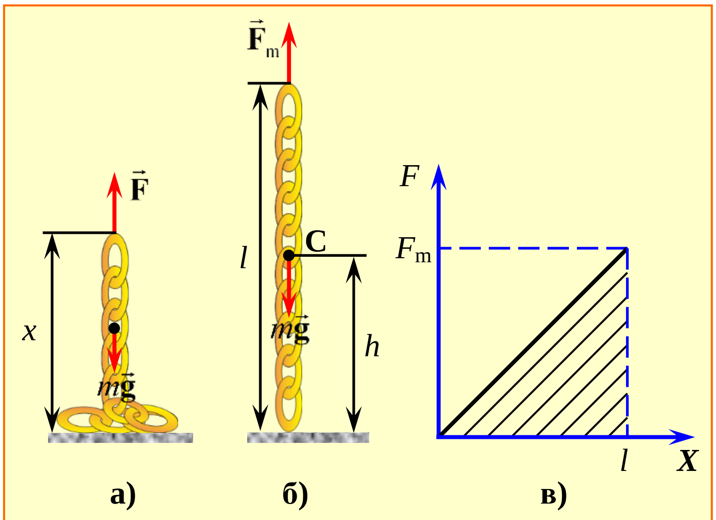


Рис. 3

Якщо над столом піднято частину ланцюга довжиною x, то її маса $m' = (m/l)x$ і

$$F = \frac{mg}{l}x.$$

Таким чином, у ході підйому прикладена сила повинна лінійно зростати від нуля (коли ланцюг лежить на столі) до максимального значення $F_{\text{m}} = mg$ (**рис.3б**). Шукана робота чисельно дорівнює площі під графіком $F(x)$ (**рис.3в**):

$$A = \frac{1}{2}F_{\text{m}}l = \frac{1}{2}mgl.$$

II спосіб. Крім прикладеної сили та сили тяжіння на ланцюг діє сила нормальної реакції стола (на рисунку не показана), яка роботи не виконує. Тому при підйомі механічна енергія ланцюга змінюється за рахунок роботи сили $\vec{\mathbf{F}}$. Ця робота мінімальна, коли змінюється лише потенціальна енергія (підйом повільний):

$$A = W_{п2} - W_{п1}.$$

Приймемо потенціальну енергію в початковому (горизонтальному) положенні ланцюга $W_{п1} = 0$, тоді в кінцевому (вертикальному) положенні $W_{п2} = mgh$, де h – висота центра ваги ланцюга над нульовим рівнем (поверхнею стола). Очевидно, що $h = \frac{l}{2}$, отже

$$A = \frac{1}{2} mgl.$$

Зверніть увагу на ефективність і простоту "енергетичного" способу розв'язання: задача фактично стає усною.

Задача 4.4

Хлопчик розтягнув пружину, виконавши роботу $A_1 = 10$ Дж.

Визначити

додаткову роботу A_2, яку має виконати хлопчик, щоб розтягнути пружину ще на $\eta = 20\%$.

Дано:

$A_1 = 10$ Дж

$\eta = 20\% = 0,2$

Визначити: A_2

Розв'язання

За рахунок роботи хлопчика змінюється потенціальна енергія пружини:

$$A_1 = W_{п2} - W_{п1}.$$

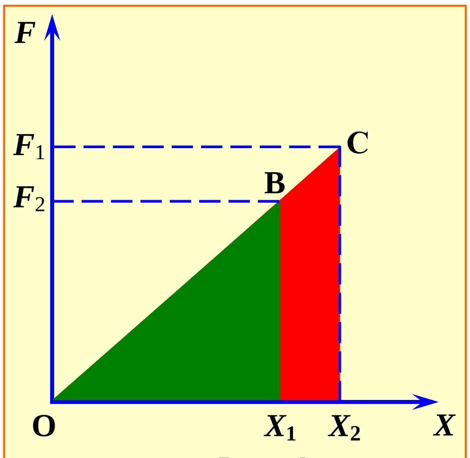


Рис. 4

Оскільки у початковому стані пружина недеформована, то $W_{п1} = 0$, і робота хлопчика по розтягуванню пружини жорсткістю k на величину x_1

$$A_1 = W_{п2} = \frac{kx_1^2}{2}. \qquad (1)$$

Робота для додаткового розтягування пружини на величину Δx дорівнює:

$$A_2 = W_{п3} - W_{п2} = \frac{k(x_1 + \Delta x)^2}{2} - \frac{kx_1^2}{2} = \frac{k\Delta x}{2}(2x_1 + \Delta x). \qquad (2)$$

Звідки, врахувавши, що $\Delta x = \eta x$, та виразивши жорсткість k з рівняння **(1)**, одержимо:

$$A_2 = \frac{A_1 \Delta x}{x_1^2}(2x_1 + \Delta x) = A_1 \cdot \eta \cdot (2 + \eta) = 5 \cdot 0,2 \cdot (2 + 0,2) = 2,2 \text{ Дж}.$$

Задача 4.5

Циліндричний колодязь діаметром $d = 1{,}5$ м та глибиною $H = 20$ м наполовину заповнений водою (густина $\rho = 1$ г/см^3).

Визначити роботу A, яку має виконати електричний насос, щоб викачати всю воду з колодязя. Втратами енергії в насосі та кінетичною енергією води знехтувати.

Дано:
$d = 1{,}5$ м
$H = 20$ м
$\rho = 1$ г/см^3
Визначити: A

Розв'язання

Робота насоса йде на збільшення потенціальної енергії води (кінетичною нехтуємо):
$A_1 = W_{п2} - W_{п1}$.

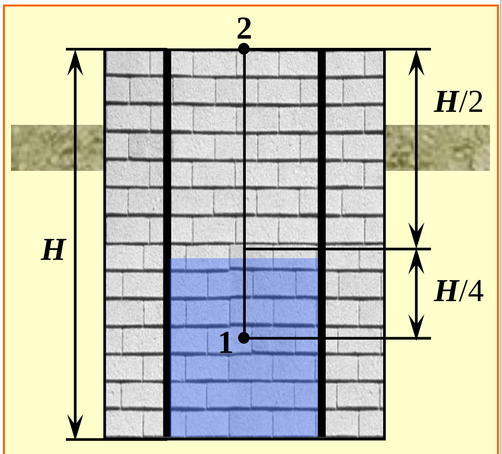


Рис. 5

Приймемо за нульовий рівень горизонтальну площину, що проходить через точку **1** - центр ваги води перед початком відкачування (**рис.5**), тоді $W_{п1} = 0$. За рахунок роботи насоса при відкачуванні кожна частинка води піднімається на рівень **2**, тому $W_{п2} = mgh$, де m – маса піднятої води, h – відстань по вертикалі між точками **2** та **1**, яка дорівнює $h = \frac{3H}{4}$ (см. **рис.5**). Отже,

$$A = \frac{3mgH}{4}.$$

Маса води в колодязі $m = \frac{\rho SH}{2} = \frac{\pi d^2 \rho H}{8}$, таким чином робота насоса

$$A = \frac{3\pi d^2 \rho g H^2}{32}.$$

Зробимо розрахунки:

$$A = \frac{3 \cdot \pi \cdot 1{,}5^2 \cdot 10^3 \cdot 9{,}8 \cdot 20^2}{32} = 2{,}6 \cdot 10^6 \text{ Дж} = 2{,}6 \text{ МДж}.$$

Задача 4.6

Автомобіль масою $m = 1000$ кг з'їжджає з вимкненим двигуном з вершини гори висотою $h = 100$ м і зупиняється на горизонтальній ділянці.

Визначити

мінімальну роботу A, яку повинен виконати двигун, щоб автомобіль піднявся на вершину гори тим самим шляхом. Взяти $g = 10$ м/с^2 .

Дано:
$m = 1000$ кг
$h = 100$ м
$g = 10$ м/с^2
Визначити: A

Розв'язання

На вершині гори автомобіль мав механічну енергію $W_1 = W_п = mgh,$ де висота h відрахована відносно горизонтальної ділянки. На момент зупинки механічна енергія автомобіля $W_2 = 0$. Оскільки сила нормального тиску що діє на автомобіль з боку гори, роботи не виконує, зміна механічної енергії на спуску визначається тільки роботою сили тертя:

$$\Delta W = W_2 - W_1 \qquad \Rightarrow \qquad A_т = -mgh. \qquad (1)$$

При підйомі на автомобіль діє ще й сила тяги двигуна, яка виконує шукану роботу A, тому

$$\Delta W_2 = A_т + A,$$

звідки:

$$A = \Delta W_2 - A_т.$$

Зміна енергії автомобіля $\Delta W_2 = mgh,$, а робота сили тертя $A_т$ визначається виразом **(1)**, отже

$$A = mgh - (-mgh) = 2mgh = 2 \cdot 1000 \cdot 10 \cdot 100 = 2 \cdot 10^6 \text{ Дж} = 2 \text{ МДж}.$$

Задача 4.7

Визначити відношення робіт A_2/A_1, які необхідно виконати, щоб підняти тіло на висоту $h = 3200\,\text{км}$ над поверхнею Землі і щоб запустити штучний супутник такої самої маси на колову орбіту тієї ж висоти. Радіус Землі $R = 6400$ км.

Дано:
$h = 3200\,\text{км}$
$R = 6400\,\text{км}$

Визначити: A_2/A_1

Розв'язання

Мінімальна робота, необхідна для підйому тіла на певну висоту, дорівнює зміні його потенціальної енергії: $A = W_{п2} - W_{п1}$. При підйомі на велику висоту сила тяжіння та прискорення g помітно змінюється, тому потенціальна енергія визначається формулою **(4.10)** та

$$A = G\cdot\frac{M\cdot m}{r_1} - G\cdot\frac{M\cdot m}{r_2},$$

де M – маса Землі, r – відстань від центра Землі. У вихідному положенні тіло знаходилось на поверхні Землі, тому $r_1 = R.$ У кінцевому положенні $r_2 = R + h.$ Відтак,

$$A_1 = GMm\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h}\right) = GMm\frac{h}{R(R+h)}. \qquad (1)$$

При виведенні супутника на колову орбіту крім роботи A_1 (по зміні його потенціальної енергії) повинна бути виконана додаткова робота для надання йому необхідної орбітальної швидкості, тобто кінетичної енергії.
Таким чином, робота по виведенню супутника

$$A_2 = A_1 + \frac{mv^2}{2}. \qquad (2)$$

За умовою задачі робота A_1 така ж, як у першому випадку (формула **(1)**).
Швидкість руху супутника визначимо за допомогою другого закону Ньютона $F = ma$, де $F = G\frac{Mm}{(R+h)^2}$ – сила всесвітнього тяжіння, $a = \frac{v^2}{R+h}$ – доцентрове прискорення на орбіті радіуса $r_2 = R + h$. Отже,

$$G\frac{Mm}{(R+h)^2} = \frac{mv^2}{(R+h)} \quad\Rightarrow\quad mv^2 = G\frac{Mm}{(R+h)}.$$

Підставивши це значення в формулу **(2)**, отримаємо:

$$A_2 = A_1 + \frac{GMm}{2(R+h)},$$

а для відношення робіт

$$\frac{A_2}{A_1} = 1 + \frac{GMm}{2(R+h)A_1}.$$

Взявши для A_1 вираз **(1)**, остаточно отримаємо

$$\frac{A_2}{A_1} = 1 + \frac{R}{2h} = 1 + \frac{6400}{2\cdot 3200} = 2.$$

Задача 4.8

Кульку масою $m = 10\,\text{г}$, яка висить на невагомій нитці довжиною $l = 1\,\text{м}$, розкручують у горизонтальній площині так, що нитка відхиляється від вертикалі на кут $\varphi = 10°$.

Визначити роботу A по розкручуванню кульки.

Дано:
$m = 10\,\text{г} = 10^{-2}\,\text{кг}$
$l = 1\,\text{м}$
$\varphi = 10°$

Визначити: A

Розв'язання

При розкручуванні кулька піднімається на деяку висоту h (**рис.8**) над початковим рівнем і набуває певної швидкості v. При цьому змінюються її кінетична $W_к$, потенціальна $W_п$ та повна механічна W енергії. Зміна повної механічної енергії ΔW зумовлені роботою по розкручуванню кульки і дорівнює їй:

$$A = \Delta W = \Delta W_п + \Delta W_к = mgh + \frac{mv^2}{2}. \qquad (1)$$

Таким чином, розв'язування задачі зводиться до визначення швидкості руху кульки v та висоти підйому h.

З **рис.8** видно, що

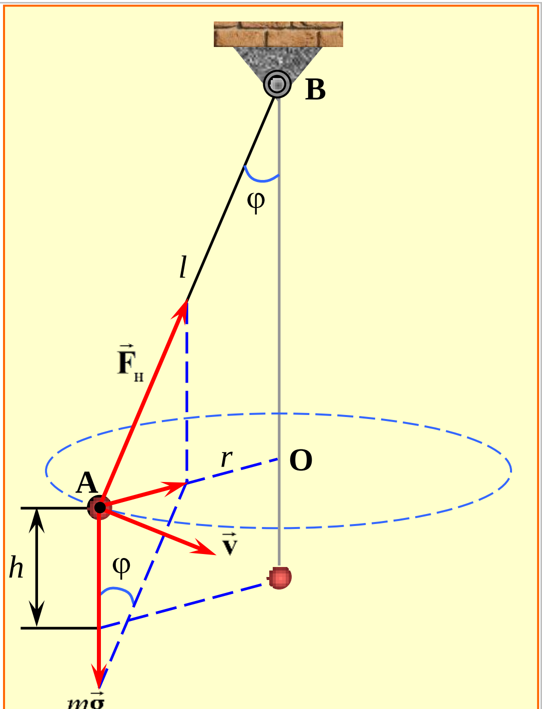


Рис. 8

$$h = AB - OB = l - l\cos\alpha = 2l\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right).$$

Для малих кутів (виражених в радіанах) $\mathrm{tg}\varphi = \sin\varphi = \varphi$, тому можна записати:

$$h \approx 2l\left(\frac{\varphi}{2}\right)^2 = \frac{l\varphi^2}{2}. \qquad (2)$$

Рух кульки по коловій траєкторії відбувається під дією рівнодійної сил тяжіння $m\vec{g}$ та натягу нитки $\vec{F}$, яку визначимо з трикутника векторів на **рис.8**:

$$F = mg\mathrm{tg}\varphi = mg\varphi.$$

З іншого боку $F = \frac{mv^2}{r}$ (формули **(2.5)** та **(1.28)**), отже

$$mg\varphi = \frac{mv^2}{r}; \qquad \Rightarrow \qquad v^2 = gr\varphi. \qquad (3)$$

Врахувавши, що $r = l\sin\varphi = l\varphi$, маємо

$$v^2 = gl\varphi^2.$$

Підставивши вирази **(2)**, **(3)** у формулу **(1)**, знайдемо шукану роботу:

$$A = mg\frac{l\varphi^2}{2} + mg\frac{l\varphi^2}{2} = mgl\varphi^2.$$

При обчисленнях врахуємо, що $\varphi(\text{рад}) = \frac{\pi\varphi}{180^\circ} = 0{,}175\ \text{рад}$. Отже

$$A = 10^{-2}\cdot 9{,}8\cdot 0{,}175^2 = 0{,}003\ \text{Дж} = 3\ \text{мДж}.$$

Рекомендації до теми "Визначення потужності та ККД"

Залежно від умови та завдання потужність сили визначають за формулами **(4.15)** або **(4.16)**. При цьому робота визначається за розглянутою вище схемою, а сила та швидкість - за допомогою законів динаміки та кінематики.
Не слід забувати, що миттєва потужність залежить не тільки від величини сили та швидкості, а й від кута між ними і може бути як додатною, так і від'ємною.

При визначенні ККД слід уважно проаналізувати процеси перетворення енергії, з'ясувати канали втрат і встановити, яка робота (енергія, потужність) є корисною, а яка - затраченою.

Задача 4.9

Камінь маси $m = 1\,\text{кг}$ кинули горизонтально з висоти $h = 1\,\text{м}$.

Визначити

потужність P сили тяжіння в момент падіння каменя на землю.

Дано:
$m = 1\,\text{кг}$
$h = 1\,\text{м}$
Визначити: P

Розв'язання

За умовою задачі необхідно визначити потужність сили у певний момент часу, тобто визначити миттєву потужність

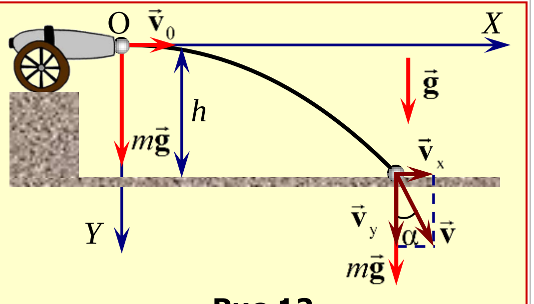


Рис.12

$P = \left(\vec{F} \cdot \vec{v}\right) = F \cdot v \cdot \cos\alpha,$

де $F = mg$ – сила тяжіння, v – швидкість каменя в момент падіння на землю (**рис.9**), α – кут між напрямком вектора сили і вектора швидкості.

З **рис.9** видно, що $v\cos\alpha$ – це вертикальна складова швидкості v_y, яку легко визначити або з рівняння **(1.18)** кінематики або за законом збереження енергії:

$v_y = \sqrt{2gh}.$

Шукана потужність

$P = mgv_y = mg\sqrt{2gh}.$

Виконаємо обчислення:

$P = 1 \cdot 9{,}8 \cdot \sqrt{2 \cdot 9{,}8 \cdot 1} = 43{,}4\,\text{Вт}.$

Корисно звернути увагу на те, що в момент кидка $P = 0$, оскільки $\vec{F} \perp \vec{v}$.

Задача 4.10

Автомобіль підіймається вгору по дорозі, з ухилом[34] $\alpha = 5°$, рухаючись зі сталою швидкістю $v_1 = 36\,\text{км/год}$. При такій самій потужності двигуна, рухаючись по цій дорозі вниз $v_2 = 54\,\text{км/год}$.

Визначити швидкість v_3 автомобіля, який рухається горизонтальною дорогою з таким самим покриттям і при тій самій потужності двигуна. Залежністю сили опору від швидкості автомобіля знехтували.

Дано:
$\alpha = 5°$
$v_1 = 36\,\text{км/год} = 10\,\text{м/с}$
$v_2 = 54\,\text{км/год} = 15\,\text{м/с}$
Визначити: v_3

Розв'язання

За умовою задачі у всіх трьох випадках двигун автомобіля має сталу потужність. Це означає, що на кожній з ділянок руху силу тяги двигуна можна визначити у вигляді з формули **(4.16)**: $F = P/v$. При русі по горизонтальній дорозі $F_3 = P/v_3$, при русі вгору $F_1 = P/v_1$, при русі вниз $F_2 = P/v_2$.

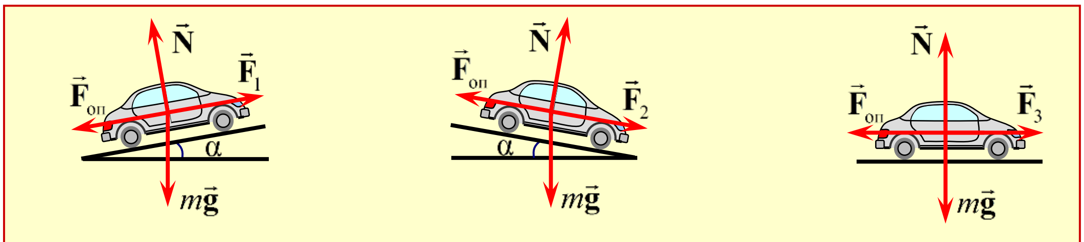


Рис.10

У всіх випадках швидкість автомобіля стала, а це означає, що сума сил, які діють на

[34] Ухилом зветься кут, що його складає полотно дороги з горизонтом.

автомобіль дорівнюють нулю. Ці сили такі (**рис.10**): сила тяги двигуна $\vec{\mathbf{F}}$, сила тяжіння $m\vec{\mathbf{g}}$, сила нормальної реакції опори $\vec{\mathbf{N}}$ та сила опору $\vec{\mathbf{F}}_{\text{оп}}$, яка складається з сили опору повітря та сили тертя. Отже в кожному випадку:

$$\vec{\mathbf{F}}+\vec{\mathbf{N}}+m\vec{\mathbf{g}}+\vec{\mathbf{F}}_{\text{оп}}=0. \qquad (1)$$

Оскільки ухил дороги малий ($\cos 5°=0,996$), можна вважати, що сили нормальної реакції в усіх випадках однакові і дорівнюють $N=mg$, відтак і сили тертя однакові. За умовою сила опору повітря не залежить від швидкості, отже в усіх випадках силу опору $\vec{\mathbf{F}}_{\text{оп}}$ теж можна вважати однаковою. Таким чином, лише сила тяги двигуна має різні значення $\vec{\mathbf{F}}_1$, $\vec{\mathbf{F}}_2$ і $\vec{\mathbf{F}}_3$.

Тому врахувавши наближену рівність $\sin\alpha=\alpha$, отримаємо такі вирази рівняння **(1)** у проекціях на напрям руху для трьох розглянутих випадків:

$$F_1-mg\alpha-F_{\text{оп}}=0, \qquad (2)$$

$$F_2+mg\alpha-F_{\text{оп}}=0, \qquad (3)$$

$$F_3-F_{\text{оп}}=0 \quad\Rightarrow\quad F_3=F_{\text{оп}}. \qquad (4)$$

Додамо рівняння **(2)** та **(3)** і врахуємо рівність **(4)**:

$$F_1+F_2-2F_3=0 \quad\Rightarrow\quad F_1+F_2=2F_3.$$

Виразивши в отриманому рівнянні сили через потужність та швидкість автомобіля, дістанемо відповідь:

$$\frac{P}{v_1}+\frac{P}{v_2}=2\frac{P}{v_3} \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{v_1}+\frac{1}{v_2}=\frac{2}{v_3} \quad\Rightarrow\quad v_3=\frac{2v_1v_2}{v_1+v_2}.$$

Виконаємо обчислення:

$$v_3=\frac{2\cdot 36\cdot 54}{36+54}\approx 43\,\text{км/год}.$$

Задача 4.11

Легкий літак масою $m=1\,\text{т}$ рівноприскорено розганяється на злітній смузі довжиною $S=300\,\text{м}$ до швидкості $v=30\,\text{м/с}$.

Визначити

середню потужність $\langle P\rangle$ двигуна літака, якщо коефіцієнт опору $\mu=0,3$.

Дано:

$m=1\,\text{т}=10^3\,\text{кг}$

$S=300\,\text{м}$

$v=30\,\text{м/с}$

$\mu=0,3$

Визначити: $\langle P\rangle$

Розв'язання

Під час розгону на літак паралельно до напрямку руху діють сила тяги двигуна та сила опору. Робота цих сил дорівнює зміні механічної енергії літака, яка в даному випадку дорівнює його кінцевій кінетичній енергії:

$$A+A_{\text{оп}}=W_{\text{к}}.$$

Середня потужність дорівнює відношенню виконаної двигуном роботи до часу її виконання:

$$\langle P\rangle=\frac{A}{t}=\frac{W_{\text{к}}-A_{\text{оп}}}{t}. \qquad (1)$$

Кінетична енергія літака $W_{\text{к}}=\dfrac{mv^2}{2}$, робота сили опору $A_{\text{оп}}=F_{\text{оп}}S\cos\alpha$. Оскільки кут між напрямком сили опору та напрямком переміщення $\alpha=\pi$, то $\cos\alpha=-1$. Величина сили опору $F_{\text{оп}}=\mu mg$, тому $A_{\text{оп}}=-\mu mg$.

Час розгону літака визначимо через шлях S та кінцеву швидкість v з рівнянь кінематики **(1.16)**:

$$\left.\begin{aligned} S&=\frac{at^2}{2}\\ v&=at \end{aligned}\right\} \quad\Rightarrow\quad \frac{S}{v}=\frac{t}{2} \quad\Rightarrow\quad t=\frac{2S}{v}.$$

Підставивши вирази $W_к$ та t у формулу **(1)**, отримаємо:

$$\langle P\rangle = \frac{mv}{2}\left(\frac{v^2}{2S}+\mu g\right)=\frac{10^3\cdot 30}{2}\left(\frac{30^2}{2\cdot 300}+0,3\cdot 9,8\right)=66,6\text{ кВт}.$$

Перевіримо розмірність відповіді.

У дужках $\left[\frac{v^2}{2S}\right]=\left[\frac{м^2}{с^2\cdot м}\right]=\left[\frac{м}{с^2}\right]$. Отже,

$$\langle P\rangle = \left[\frac{кг\cdot м}{с}\cdot\frac{м}{с^2}\right]=\left[\frac{Н\cdot м}{с}\right]=\left[\frac{Дж}{с}\right]=[Вт].$$

Задача 4.12

Вантаж піднімають по похилій площині, з кутом нахилу α до горизонту.

Визначити

ККД η похилої площини, якщо коефіцієнт тертя між вантажем та площиною становить μ.

Дано:
α
μ

Визначити: η

Розв'язання

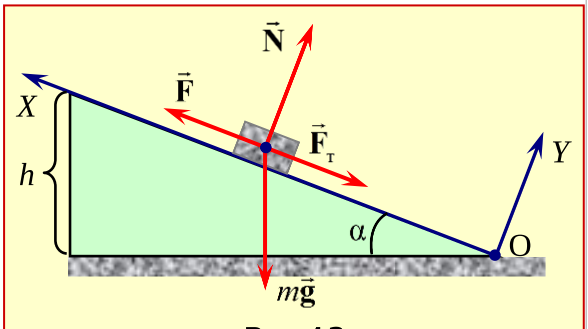


Рис.12

Крім прикладеної для піднімання сили $\vec{\mathbf{F}}$ на вантаж діють сила тяжіння $m\vec{\mathbf{g}}$, сила тертя $\vec{\mathbf{F}}_т$ та сила нормальної реакції опори $\vec{\mathbf{N}}$ (**рис.12**). Вважаємо, що вантаж піднімають повільно і без прискорення. Тоді рівняння руху **(2.5)** відносно координатних осей мають вигляд

$$OX:\quad F-mg\sin\alpha-F_т=0,$$
$$OY:\quad N-mg\cos\alpha=0.$$

З другого рівняння системи маємо $N=mg\cos\alpha$, отже сила тертя $F_т=\mu N=\mu mg\cos\alpha$. Тепер з першого рівняння маємо $F=mg\sin\alpha+\mu mg\cos\alpha$. Якщо довжина площини дорівнює l, то робота сили F при підніманні вантажу (затрачена робота)

$$A=F\cdot l=(mg\sin\alpha+\mu mg\cos\alpha)\cdot l.$$

Корисна робота – це робота по підніманню вантажу на висоту h. Вона дорівнює зміні потенціальної енергії тіла $A_к=mgh$. Отже ККД площини

$$\eta=\frac{A_к}{A}=\frac{mgh}{mgl(\sin\alpha+\mu\cos\alpha)}=\frac{h}{l(\sin\alpha+\mu\cos\alpha)}.$$

Оскільки $h=l\sin\alpha$, остаточно маємо відповідь:

$$\eta=\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha+\mu\cos\alpha}.$$

Задача 4.13

Вантаж маси $M = 50\,\text{кг}$ підіймають за допомогою системи з рухомого та нерухомого блоків (**рис.13**), прикладаючи певну силу до вільного кінця мотузки. Маса рухомого блока $m = 5\,\text{кг}$.

Визначити
ККД η цього механізму. Масою мотузки та тертям знехтувати.

Дано:
$M = 50\,\text{кг}$
$m = 5\,\text{кг}$
Визначити: η

Розв'язання
Оскільки рухомий блок і вантаж здійснюють однакові переміщення, їх можна розглядати як одне тіло маси $M + m$. На нього діють сила тяжіння $(M+m)\vec{\mathbf{g}}$ та сили натягу мотузки $\vec{\mathbf{T}}$ з обох сторін від блока[35] (**рис.13**). Вантаж піднімають повільно (тобто без прискорення), тому ці сили зрівноваженні:

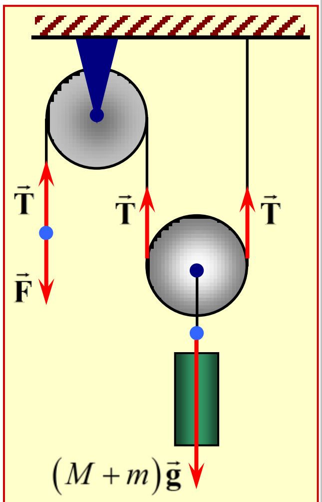


Рис.13

$$(M+m)g = 2T.$$

Так само зрівноважені прикладена сила та сила натягу мотузки[36]: $T = F$. Отже,

$$(M+m)g = 2F \qquad \Rightarrow \qquad F = \frac{(M+m)g}{2}.$$

Цей результат ілюструє принцип дії блочних механізмів (поліспаст), в яких вантаж можна піднімати силою, що набагато менша за його вагу.
Щоб підняти вантаж з блоком на висоту h, треба перемістити кінець мотузки на відстань $l = 2h$. При цьому робота сили F (затрачена робота) дорівнює

$$A = Fl = \frac{(M+m)g}{2} \cdot 2h = (M+m)gh.$$

Корисною є тільки робота по підйому вантажу $A_\text{к} = Mgh$, відповідно ККД

$$\eta = \frac{A_\text{к}}{A} = \frac{M}{M+m} = \frac{50}{50+5} \approx 0{,}91 = 91\%.$$

Задачу можна розв'язати і безпосереднього визначення роботи сил, використовуючи зв'язки між роботою і механічною енергією. Повна робота дорівнює зміні потенціальної енергії всієї системи:

$$A = (M+m)gh.$$

Корисна робота дорівнює зміні потенціальної енергії тільки вантажу m:

$$A_\text{к} = Mgh.$$

Отже, ККД механізму

$$\eta = \frac{A_\text{к}}{A} = \frac{Mgh}{(M+m)gh} = \frac{M}{M+m},$$

що співпадає з отриманим вище результатом.

Задачі для самостійної роботи
Рівень А

4.1 Чи виконує роботу сила тяжіння, що діє на Землю з боку Сонця? [Ні]

4.2 Кулька на нитці обертається у горизонтальній площині зі сталою швидкістю. Визначити роботу прикладених до неї сил натягу нитки та тяжіння. [0]

4.3 Автомобіль маси $m = 10\,\text{т}$ рухається по дорозі, яка утворює кут $\alpha = 4°$ з горизонтом. Визначити роботу сили тяжіння на шляху $S = 100\,\text{м}$. [$\pm 0{,}7\,\text{МДж}$]

4.4 Автомобіль, що має двигун потужністю $P = 42\,\text{кВт}$, проходить шлях

---
[35] Інші сили, що діють в системі, для розв`язання непотрібні і тому на рисунку не показані.
[36] Оскільки за умовою мотузка невагома, сила натягу скрізь однакова.

$S = 54$ км за час $t = 34$ хв. Визначити середню силу тяги двигуна автомобіля. [1400 Н]

4.5 Два автомобілі одночасно рушають з місця і їдуть рівноприскорено. Маси автомобілів однакові. У скільки разів середня потужність двигуна першого автомобіля більша середньої потужності другого, якщо протягом однакового часу перший автомобіль розвинув швидкість удвічі більшу ніж другий? Опором знехтувати. [4]

4.6 Сила опору, яка діє на корабель у воді, пропорційна квадрату його швидкості. У скільки разів необхідно збільшити потужність двигуна, щоб швидкість корабля зросла у $k = 2$ рази? [8]

Рівень Б

4.7 Яку роботу виконує сила $F = 30$ Н, що починає підіймати вантаж маси $m = 2$ кг на висоту $h = 2{,}5$ м по похилій площині з прискоренням $a = 10$ м/с^2? Сила діє паралельно до площини. Тертям знехтувати. [150 Дж]

4.8 Сила тиску порохових газів, що діє на кулю маси $m = 10$ г у стволі гвинтівки довжиною $l = 1$ м, залежить від положення x кулі відносно точки початку руху так, як подано на **рис.4.8**. Визначити швидкість куля на момент вильоту зі ствола. [600 м/с]

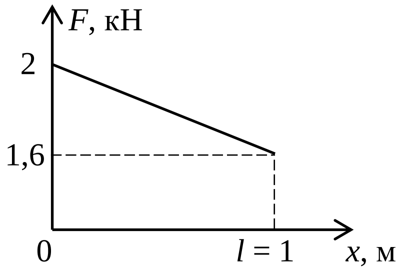


Рис. 4.8

4.9 Визначити максимальне і мінімальне прискорення тролейбуса масою $m = 5$ т при зміні швидкості на маршруті від $v_1 = 18$ км/год до $v_2 = 28{,}8$ км/год, якщо потужність двигуна: $P = 50$ кВт. [2 м/с^2, $1{,}25$ м/с^2]

4.10 Електровоз, що розвиває потужність $P = 5{,}4$ МВт, тягне поїзд масою $m = 2000$ т. Коефіцієнт опору $k = 0{,}01$. Визначити прискорення електровоза на момент, коли його швидкість $v = 12$ м/с. [$0{,}13$ м/с^2]

4.11 З'ївши варення, Карлсон піднімався вертикально до своєї хати на даху на $\Delta t = 4$ с більше ніж звичайно. Яку масу варення m з'їв Карлсон, якщо потужність його двигуна $P = 75$ Вт, а висота підйому $h = 10$ м? Рух вважати рівномірним, опором повітря знехтувати. [3 кг]

4.12 Тіло масою $m = 1$ кг кинули горизонтально з висоти $h = 1$ м. Визначити потужність сили тяжіння на момент падіння тіла на землю. [≈ 45 Вт]

4.13 Тіло масою m кинули під кутом α до горизонту з початковою швидкістю v_0. Визначити середню потужність, яку розвиває сила тяжіння за весь час руху, а також миттєву потужність цієї сили як функцію часу. [$P_{\text{ср}} = 0;\ mg(gt - v_0 \sin\alpha)$]

4.14 Швидкість струменя води, що витікає з труби діаметром $d = 20$ см, $v = 5$ м/с. Визначити потужність насосу, що подає воду. [$1{,}96$ кВт]

4.15 Гелікоптер масою m нерухомо «висить» над землею, створюючи потік повітря зі швидкістю u. Визначити потужність двигуна. [$\frac{mgu}{2}$]

4.16 Вентилятор гонить повітря крізь отвір у стіні. У скільки разів необхідно підвищити потужність вентилятора, щоб подвоїти масу повітря, яку він переганяє за одиницю часу? [8]

4.17 Визначити середню потужність порохових газів при пострілі з гвинтівки, якщо довжина ствола $l = 1\ \text{м}$, маса кулі $m = 10\ \text{г}$, швидкість кулі при вильоті зі ствола $v = 400\ \text{м/с}$. Вважати, що сила тиску порохових газів під час руху кулі у стволі стала. [$\frac{mv^3}{4l} = 160\ \text{кВт}$]

4.18 Який максимальний підйом може подолати поїзд масою $m = 2000\ \text{т}$, рухаючись зі швидкістю $v = 7{,}2\ \text{км/год}$ тепловоз з двигуном потужністю $P = 3700\ \text{кВт}$? Сила опору стала і дорівнює $k = 0{,}2\%$ ваги тепловоза. [$\approx 4^\circ$]

4.19 Автомобіль масою $m = 1000\ \text{кг}$ з'їжджає з гори при вимкнутому двигуні, рухаючись зі сталою швидкістю $v = 54\ \text{км/год}$. Ухил гори становить $h = 4\ \text{м}$ на кожні $S = 100\ \text{м}$ шляху. Яку потужність повинен розвинути двигун автомобіля, щоб забезпечити підйом автомобіля на ту ж саму гору з такою самою швидкістю? [$11{,}8\ \text{кВт}$]

4.20 Тіло пройшло відстань $S = 5\ \text{м}$ за $\tau = 10\ \text{с}$ під дією сили, яка змінюється так, як подано на **рис.4.20**. Визначити середню потужність сили за вказаний час. [$2\ \text{Вт}$]

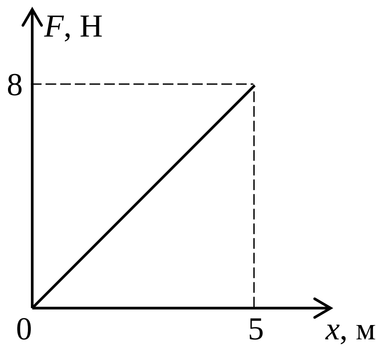


Рис. 4.20

Рівень В

4.21 Ланцюг, який має масу M і довжину l лежить біля межі поділу двох напівплощин з різних матеріалів (**рис.4.21**). Яку роботу необхідно виконати, щоб перетягнути ланцюг з однієї півплощини на другу? Коефіцієнти тертя між ланцюгом і півплощинами дорівнюють μ_1 і μ_2. [$\frac{(\mu_1 + \mu_2)Mgl}{2}$]

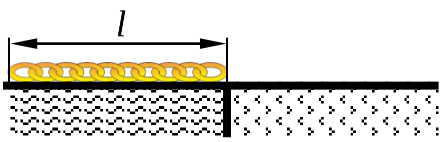


Рис.4.21

4.22 Тіло маси $m = 50\ \text{кг}$ піднімають на гірку довільного профілю так, що дотична до нього в будь-якій точці утворює з горизонтом гострий кут. Коефіцієнт тертя між тілом і гіркою всюди $\mu = 0{,}1$. Сила, що прикладена до тіла, всюди діє по дотичній до траєкторії. Визначити роботу при підйомі тіла на вершину гірки по плоскій траєкторії з точки **A** в точку **B**, відстань між якими по горизонталі $l = 10\ \text{м}$ і по вертикалі $h = 10\ \text{м}$. [$mg \cdot (\mu l + h) \approx 5500\ \text{Дж}$]

4.23 Куб масою $m = 2\ \text{кг}$ і об'ємом $V = 1000\ \text{см}^3$ знаходиться на дні озера глибиною $h = 5\ \text{м}$. Яку роботу A необхідно виконати, щоб підняти куб на висоту $H = 5\ \text{м}$ над поверхнею води? [$147\ \text{Дж}$]

4.24 Частинка масою m, яка має швидкість v_0, влітає в область простору, де на неї діє гальмівна сила F. Напрямок початкової швидкості $\vec{\mathbf{v}}_0$ становить кут α з лінією дії сили (**рис.4.24**). Ширина області дії сили l. Під яким кутом β до напрямку сили F тіло вилетить з цієї області? При якій умові тіло не зможе перетнути цю область? [$\sin\beta = \dfrac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\dfrac{2\cdot F\cdot l}{m\cdot v^2}}}$; $Fl > \dfrac{mv^2}{2} = \cos\alpha$]

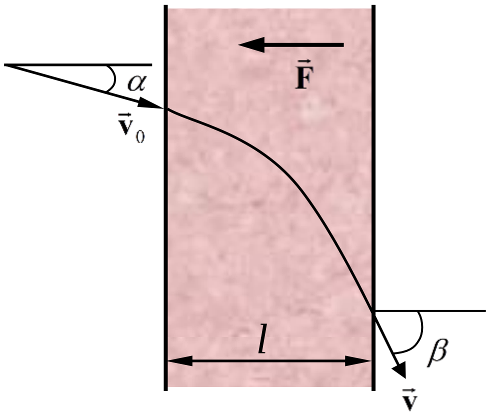


Рис.4.24

4.25 Один автомобіль, який має двигун з корисною потужністю $P_1 = 100\ \text{кВт}$, може рухатись горизонтально з максимальною швидкістю $v_1 = 120\ \text{км/год}$. Другий автомобіль, з двигуном корисною потужністю $P_2 = 60\ \text{кВт}$ може рухатись з максимальною швидкістю $v_2 = 50\ \text{км/год}$. Яку максимальну швидкість можуть мати ці автомобілі, якщо їх з'єднати тросом? [$78{,}7\ \text{км/год}$]

4.26 Вздовж діаметра сферичного астероїда радіусом $R = 10\ \text{км}$ зроблено шахту. З центра астероїда стартує ракета, маса якої значно менша маси астероїда. Прискорення вільного падіння на поверхні астероїда $g = 0{,}03\ \text{м/с}^2$. Яку мінімальну швидкість необхідно надати ракеті в центрі астероїда, що вона змогла віддалитися на дуже велику відстань від цього астероїда? [$\sqrt{3gR} = 94{,}8\ \text{м/с}$]

Тема: Робота та зміна механічного стану системи

Рекомендації до теми
"Визначення роботи та зміни механічного стану системи"

В багатьох задачах робота неконсервативних сил задана, або може бути визначена за умовою. Тоді, склавши рівняння енергетичного балансу у відповідності до **рекомендацій до розділу**, можна з нього визначити положення й швидкості тіл та інші відомості про механічний стан системи.

Тема: Робота та зміна механічного стану системи. Приклади

Задача 4.14

Завантажений самоскид рухається по прямій горизонтальній дорозі зі швидкістю $v_0 = 36\ \text{км/год}$.

Визначити:

А) відстань S від місця розвантаження, на якій водій має вимкнути двигун, щоб зупинитися там без використання гальм;

Б) час Δt руху самоскида до зупинки.
Коефіцієнт опору на всьому шляху[37] $\mu = 0,05$.

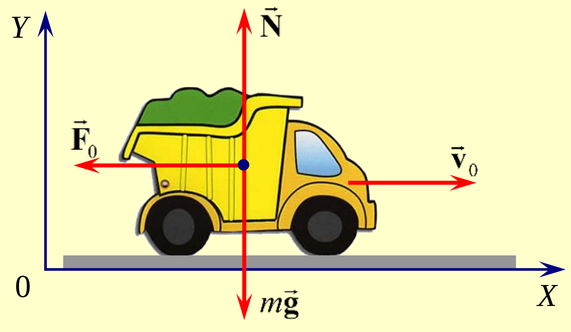


Рис.14

Дано:
$v_0 = 36$ км/год $= 10$ м/с
$\mu = 0,05$

Визначити: S, Δt

Розв'язання

Перед вимиканням двигуна самоскид мав кінетичну енергію $W_1 = \dfrac{mv_0^2}{2}$ та імпульс $\vec{\mathbf{p}}_1 = m\vec{\mathbf{v}}_0$. На момент зупинки кінетична енергія та імпульс дорівнюють нулю: $W_2 = 0$, $\vec{\mathbf{p}}_2 = 0$.
Зміна механічної енергії самоскида

$$\Delta W = W_2 - W_1 = -\frac{mv_0^2}{2}.$$

Потенціальна енергія самоскида не змінюється, оскільки самоскид рухається по горизонтальній дорозі. Зміна його імпульсу $\Delta\vec{\mathbf{p}} = \vec{\mathbf{p}}_2 - \vec{\mathbf{p}}_1 = -m\vec{\mathbf{v}}_0$ зумовлені дією тільки сили опору, оскільки інші сили, що діють на самоскид (тяжіння $m\vec{\mathbf{g}}$ та нормальна реакція опори $\vec{\mathbf{N}}$) скомпенсовані ($N = mg$).

А) Сила опору, що діє на самоскид $F_о = \mu N$, де μ – коефіцієнт опору. Зміна кінетичної енергії самоскида дорівнює роботі сили опору $A_о = -F_о S = -\mu mg$, де S – шлях самоскида до зупинки (знак ″–″ стоїть тому, що сила опору напрямлене протилежно переміщенню).
Таким чином,

$$-\frac{mv_0^2}{2} = -\mu mgS \qquad \Rightarrow \qquad S = \frac{v_0^2}{2\mu g} = \frac{10^2}{2\cdot 0,05\cdot 9,8} \approx 100 \text{ м}.$$

Б) Імпульс сили опору дорівнює зміні імпульсу самоскида: $\vec{\mathbf{F}}\Delta t = -m\vec{\mathbf{v}}_0$, або для модулів $F\Delta t = mv_0$. Звідки час руху до зупинки

$$\Delta t = \frac{mv_0}{\mu mg} = \frac{v_0}{\mu g} = \frac{10}{0,05\cdot 9,8} \approx 20 \text{ с}.$$

Задача 4.15

Куля, що летить горизонтально, зустрічає на своєму шляху низку розміщених одна за одною однакових закріплених вертикально дощок.
Визначити,
В якій за ліком дощці застряне куля, якщо при пробиванні першої вона втрачає $\eta = 10\%$ швидкості? Залежність сили опору в дошках від швидкості та вертикального зміщення кулі не враховувати.

Дано:
$\eta = 0,1$

Визначити: N

Розв'язання

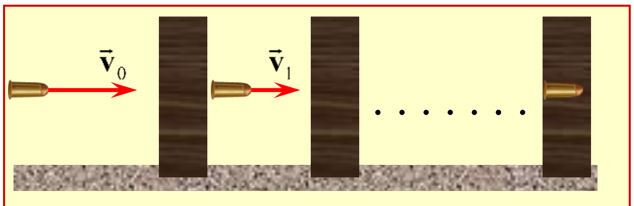


Рис.15

За умовою дошки мають однакову товщину, і в кожній на кулю діє однакова сила опору. Тому при пробиванні будь-якої дошки куля втрачає таку ж енергію ΔW, як і при пробивання першої дошки:

$$\Delta W = \frac{mv_0^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2},$$

---

[37] **Коефіцієнтом опору** називається відношення сумарної сили опору рухові до ваги самоскида.

де m – маса кулі, v_0, v_1 – швидкість кулі на вльоті та на вильоті з першої дошки. Згідно з умовою $v_1 = (1-\eta)v_0$, тому

$$\Delta W = \frac{mv_0^2}{2}\left(1-(1-\eta)^2\right) \qquad \Rightarrow \qquad \Delta W = W_0\eta(2-\eta),$$

де W_0 – початкова кінетична енергія кулі. Кількість пробитих дощок:

$$N = \frac{W_0}{\Delta W} = \frac{1}{\eta(2-\eta)} = \frac{1}{0{,}1\cdot(2-0{,}1)} = 5{,}26.$$

Номер дошки, в якій куля застряне:

$N = 6.$

Задача 4.16

Кулька для пінг-понгу маси $m = 20\ \text{г}$ вільно падає на підлогу з висоти $H = 2\ \text{м}$ і пружно (без втрати швидкості) відскакує на висоту $h = 1{,}6\ \text{м}$.

Визначити

силу опору повітря F, що діє на кульку, вважаючи її сталою.

Розв'язання.

Дано:

$m = 20\ \text{г} = 2\cdot 10^{-2}\ \text{кг}$

$H = 2\ \text{м}$

$h = 1{,}6\ \text{м}$

Визначити: F

Внаслідок дії сили опору повітря механічна енергія кульки змінюється на величину роботі цієї сили. У початковому та кінцевому положеннях кулька знаходилась у спокої і її енергія – це потенціальна енергія.

Будемо відраховувати потенціальну енергію кульки від підлоги, тоді

$$A = mgh - mgH = mg(h-H).$$

Від початкового до кінцевого положення кулька проходить шлях $S = H + h$, на якому сила опру виконує роботу $A = -F(H+h)$. Таким чином,

$$mg(H-h) = F(H+h) \qquad \Rightarrow \qquad F = \frac{H-h}{H+h}mg.$$

Виконаємо обчислення:

$$F = \frac{2-1{,}6}{2+1{,}6}\cdot 2\cdot 10^{-2}\cdot 9{,}8 \approx 2{,}2\cdot 10^{-2}\ \text{Н}.$$

Задача 4.17

Кульку для пінг-понгу радіусу $R = 1{,}5\ \text{см}$ та маси $m = 10\ \text{г}$ занурили у воду на глибину $H = 1\ \text{м}$ і відпустили.

Визначити

висоту h, на яку вискочить кулька з води. Силами опору та поверхневого натягу знехтувати. Густина води $\rho = 1\ \text{г/см}^3$.

Розв'язання.

Дано:

$R = 1{,}5\ \text{см}$

$m = 10\ \text{г}$

$H = 1\ \text{м} = 100\ \text{см}$

$\rho = 1\ \text{г/см}^3$

Визначити: h

Крім сили тяжіння $m\vec{g}$ на кульку у воді діє архімедова сила $\vec{F}$ (**рис.17**), яку будемо розглядати як неконсервативну. Зміна механічної енергії кульки дорівнює роботі цієї сили. Від початкового до кінцевого положення кулька підіймається на висоту $H + h$, а сила Архімеда F діє виключно на шляху *H*, отже

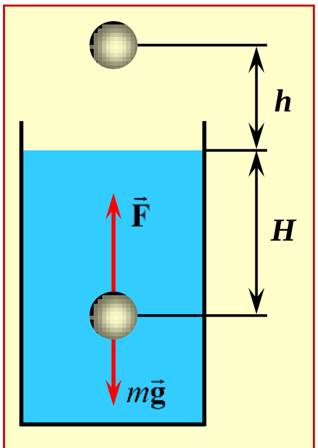


Рис.17

$$mg(H+h) = FH. \qquad (1)$$

Архімедова сила (формула **(6.8)**)

$$F = \rho V g = \rho \frac{4}{3}\pi R^3 g.$$

Підставивши цей вираз у рівняння **(1)**, дістанемо:

$$m(H+h) = \frac{4\pi R^3 \rho H}{3} \quad \Rightarrow \quad h = H\left(\frac{4\pi R^3\rho}{3m} - 1\right).$$

Виконаємо обчислення:

$$h = 100 \cdot \left(\frac{4\cdot 3{,}14 \cdot 1{,}5^3 \cdot 1\rho}{3\cdot 10} - 1\right) \approx 41\,\text{см}.$$

Зверніть увагу на те, що при обчисленні ми використали грами та сантиметри. В даному випадку так зробити зручніше.

Задача 4.18

По рейках, які утворюють горизонтальне коло радіусом R, котиться зі сталою швидкістю v іграшковий вагончик з електродвигуном.

Визначити

кількість обертів по колу N, які зробить вагончик до зупинки після відключення батарейки, що живить двигун. Коефіцієнт опору дорівнює μ.

Дано:
R
v
μ

Визначити: N

Розв'язання

До початку гальмування вагончик мав кінетичну енергію $W_1 = \dfrac{mv^2}{2}$.

На далі ця енергія зменшилася до нуля ($W_2 = 0$) за рахунок роботи сили опору A. Оскільки при русі вагончика горизонтальною поверхнею його потенціальна енергія не змінюється

$$\Delta W = -\frac{mv^2}{2} = -F\cdot S \quad \Rightarrow \quad \frac{mv^2}{2} = FS,$$

де F – сила опору, S – пройдений вагончиком шлях, який пов'язаний з кількістю обертів очевидним співвідношенням $S = 2\pi RN$. Таким чином,

$$N = \frac{mv^2}{4\pi RF}.$$

Сила опору $F = \mu N = \mu mg$, отже

$$N = \frac{v^2}{4\pi\mu Rg}.$$

Перевіряємо розмірність результату:

$$[N] = \frac{(\text{м/с})^2}{\text{м}\cdot(\text{м/с}^2)} = 1,$$

тобто N – безрозмірна величина.

Задача 4.19

Санки довжиною $l = 1\,\text{м}$, що їдуть горизонтальною засніженою дорогою зі швидкістю $v = 5\,\text{м/с}$, потраплять на вільну від снігу ділянку асфальту і зупиняються. При цьому передній край санок виявився на відстань $S = 2{,}5\,\text{м}$ від межі асфальту.

Визначити

коефіцієнт тертя μ санок об асфальт. Тертям при русі по снігу знехтувати.

Розв'язання.

Дано:
$l = 1\,\text{м}$
$v = 5\,\text{м/с}$
$S = 2{,}5\,\text{м}$

Визначити: μ

Крім сили тертя на санки діють сила тяжіння та сила нормальної реакції дороги Однак останні дві сили роботи не виконують, тому зміна кінетичної

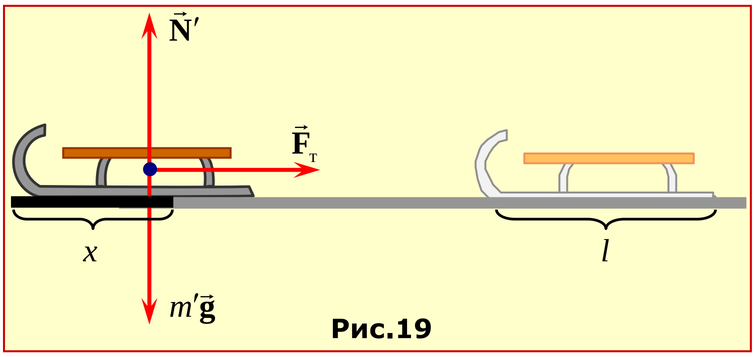


Рис.19

енергії санок при гальмуванні на асфальті зумовлена тільки роботою сили тертя:

$$\Delta W_к = A_т \quad\Rightarrow\quad -\frac{mv^2}{2} = A_т \quad\Rightarrow\quad \frac{mv^2}{2} = |A_т|, \qquad (1)$$

де m – маса санок.

У процесі гальмування, доки санки не повністю виїхали на асфальт, сила тертя є змінною, оскільки з асфальтом взаємодіє лише частина санок. Ця сила тертя визначається за формулою: $F_т = \mu N = \mu m'g$, де μ – шуканий коефіцієнт тертя, а m' – маса тієї частини санок, що вже виїхала на асфальт (**рис.19**). Очевидно, що $m' = (m/l)x$, де l – довжина санок, а x – довжина тієї частини, що вже знаходиться на асфальті. Отже $F_т(x) = \dfrac{\mu mgx}{l}$ (для $x \le l$). Після того, як санки повністю виїдуть на асфальт ($x \ge l$), сила тертя становиться рівною μmg і далі лишається сталою. Отже графік сили тертя буде таким, як показано на **рис. 19-1**. Площа під ним чисельно дорівнює модулю роботи сили тертя:

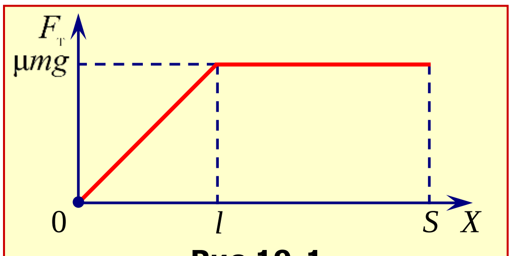


Рис.19-1

$$|A_т| = \frac{1}{2}(S + S - l)\mu mg = \frac{\mu mg(2S - l)}{2}.$$

Підставивши цей вираз у формулу **(1)**, дістанемо

$$\mu = \frac{v^2}{g(2S - l)} = \frac{5^2}{9{,}8\cdot(2\cdot 2{,}5 - 1)}0{,}64.$$

Задача 4.20

Медичний шприц площею перерізу $S = 2\text{ см}^2$ і довжиною $l = 5\text{ см}$ повністю заповнений водою. Площа отвору у шприці $S_0 = 0{,}5\text{ мм}^2$.

Визначити

час τ, за який буде витиснена вся вода, якщо до поршня шприца прикладена постійна сила $F = 1{,}6\text{ Н}$. Густина води $\rho = 1\text{ г/см}^3$.

Розв’язання.

Дано:

$S = 2\text{ см}^2 = 2\cdot 10^{-4}\text{ м}^2$

$l = 5\text{ см} = 5\cdot 10^{-2}\text{ м}$

$S_0 = 0{,}5\text{ мм}^2 = 5\cdot 10^{-7}\text{ м}^2$

$F = 1{,}6\text{ Н}$

$\rho = 1\text{ г/см}^3 = 1000\text{ кг/м}^3$

Визначити: τ

Початковий об`єм води у шприці $V = lS$. Якщо позначити об'єм води, що витікає за одиницю часу V_1, то шуканий час

$$\tau = \frac{V}{V_1} = \frac{lS}{V_1}. \qquad (1)$$

Для визначення V_1 виділимо невеликий об`єм води $\Delta V$ з площею перерізу $S_0$ і довжиною $\Delta x$: $\Delta V = S_0\Delta x$ (**рис.20**). Якщо швидкість витікання води крізь отвір позначити $u$, то вся вода з об`єму ΔV пройде крізь отвір за час $\Delta t = \Delta x/u$. За одиницю часу буде витікати об`єм води

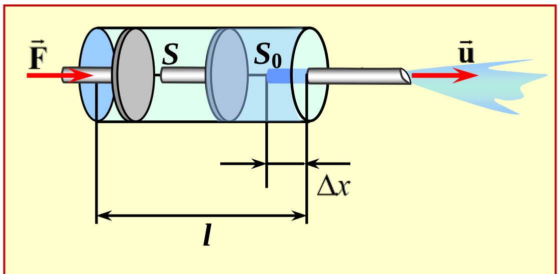


Рис.20

$$V_1 = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{S_0\Delta x}{(\Delta x/u)} \quad\Rightarrow\quad V_1 = S_0 u.$$

Підставивши цей вираз V_1 у формулу **(1)**, отримаємо

$$\tau = \frac{lS}{S_0 u}. \qquad (2)$$

Лишається визначити швидкість витікання води. Це легко зробити за допомогою енергетичних міркувань. Кожна частинка води набуває швидкості u і відповідну кінетичну енергію завдяки роботі сили F тому

$$Fl = \frac{mu^2}{2},$$

де m – повна початкова маса води в шприці. Оскільки $m = \rho lS$, то

Підставляємо цей результат у вираз **(2)**, і отримуємо відповідь:

$$\tau = \frac{lS}{S_0}\sqrt{\frac{\rho S}{2F}}.$$

Перевіряємо розмірність результату:

$$[\tau] = \left[\frac{\text{м}^2\cdot\text{м}}{\text{м}^2}\cdot\sqrt{\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}\cdot\frac{\text{м}^2}{\text{Н}}}\right] = \left[\text{м}\cdot\sqrt{\frac{\text{кг}}{\text{Н}\cdot\text{м}}}\right] = \left[\text{м}\cdot\sqrt{\frac{\text{кг}}{\left(\text{кг}\cdot\text{м}/\text{с}^2\right)\cdot\text{м}}}\right] = \left[\text{м}\cdot\sqrt{\frac{\text{с}^2}{\text{м}^2}}\right] = [\text{с}].$$

Обчислюємо результат:

$$\tau = \frac{2\cdot10^{-4}\cdot5\cdot10^{-2}}{5\cdot10^{-7}}\cdot\sqrt{\frac{10^3\cdot5\cdot10^{-2}}{2\cdot1{,}6}} = 5\text{ с}.$$

Тема: Робота та зміна механічного стану системи

Задачі для самостійної роботи

Рівень А

4.27 Тіло маси $m = 2\text{ кг}$, яке штовхнули з початковою швидкістю $v = 5\text{ м/с}$ вгору по похилій площині, зупинилося, досягнувши висоти $h = 0{,}5\text{ м}$. Визначити кількість теплоти, що виділилося при русі тіла. [15 Дж]

4.28 При розтягуванні пружини на $\Delta l_1 = 4\text{ мм}$ виконана робота $A = 0{,}02\text{ Дж}$. Яку роботу необхідно виконати для стискання пружини на $\Delta l_2 = 4\text{ см}$? [2 Дж]

4.29 Хлопчик стиснув пружину на $l_1 = 1\text{ см}$, виконавши роботу $A = 2\text{ Дж}$. Яку роботу повинен виконати хлопчик, щоб додатково стиснути пружину ще на $l_2 = 2\text{ см}$? [16 Дж]

4.30 Куля, яка летить з деякою швидкістю, проникає у стінку на глибину $l = 10\text{ см}$. На яку глибину проникне у ту ж саму стінку куля, яка матиме удвічі більшу швидкість, якщо сила опору не залежить від швидкості? [40 см]

4.31 З глибини $h = 500\text{ м}$ качають нафту насосом потужністю $P = 10\text{ кВт}$, коефіцієнт корисної дії якого $\eta = 80\%$. Яку масу нафти підніме насос за $\tau = 5$ годин роботи? [29 т]

4.32 Куля маси $m = 10\text{ г}$, яку випущено з гвинтівки вертикально вгору зі швидкістю $v_1 = 1000\text{ м/с}$, впала на землю зі швидкістю $v_2 = 50\text{ м/с}$. Визначити роботу сили опору повітря за час польоту кулі. [$\approx -5\text{ кДж}$]

4.33 Кулька масою $m = 20\text{ г}$ падає з висоти $h_1 = 1\text{ м}$ на плиту і після відбивання підстрибує на висоту $h_2 = 80\text{ см}$. Яка кількість теплоти, виділяється при ударі? Опором повітря знехтувати. [40 мДж]

4.34 Пластилінова кулька масою $m_1 = 10\text{ г}$, що летіла зі швидкістю $v = 10\text{ м/с}$, вдаряється та прилипає до сталевої плити. Яка кількість тепла виділилось при ударі? [$0{,}5\text{ Дж}$]

Рівень Б

4.35 За час $\tau = 10\text{ мс}$ стала сила $F = 20\text{ Н}$ надає нерухомому тілу кінетичну енергію $W = 3\text{ Дж}$. На скільки зміниться кінетична енергія тіла, під дією тієї ж самої сили $\vec{\mathbf{F}}$

та за той же час τ, якщо початкова швидкість тіла $v_0 = 10$ м/с? [5 Дж]

4.36 До тіла масою $m = 4$ кг прикладена вертикальна сила $F = 49$ Н. Яку кінетичну енергію матиме тіло на висоті $h = 10$ м над землею? У початковий момент на поверхні землі тіло знаходилось у стані спокою. [98 Дж]

4.37 Куля масою $m = 10$ г, яка має швидкість $v_0 = 600$ м/с, пробиває дошку товщиною $d = 4$ см. Після вильоту з дошки куля має швидкість $v = 400$ м/с. Визначити середню силу опору, яка діяла на кулю у дошці. [25 кН]

4.38 По гладкому столу зі швидкістю u рухається чорна дошка. Якої довжини слід залишить на дошці шматочок крейди, який кинули горизонтальна зі швидкістю v, якщо коефіцієнт тертя μ. [$\left(v^2+u^2\right)/\left(2\mu g\right)$]

4.39 При повільному підйомі тіла по похилій площині з кутом нахилу φ виконується робота A. Яка частина виконаної роботи пішла на зростання внутрішньої енергії тіла і площини, якщо коефіцієнт тертя тіла по площині становить μ? [$\mu/\left(\mathrm{tg}\varphi+\mu\right)$]

4.40 Чому дорівнює ККД похилої площини довжиною $l = 1$ м і висотою $h = 0,6$ м, якщо коефіцієнт тертя при русі тіла $\mu = 0,1$. [0,88]

4.41 По похилій площині повільно підіймають на висоту h тіло масою m, прикладаючи силу паралельно площині. При цьому виконують роботу A. Яку швидкість набуде тіло, якщо воно вільно зісковзне у вихідну точку? [$\sqrt{4gh-2A/m}$]

4.42 Сані, які разом з людиною мають масу $m = 100$ кг, з'їжджають з гори висотою $h = 8$ м і довжиною $l = 100$ м. Визначити середню силу опору руху саней, якщо у кінці спуску їхня швидкість $v = 10$ м/с. [30 Н]

4.43 З плоскої гори висотою $h = 2$ м і довжиною основи $l = 5$ м з'їхали сані, які зупинилися, пройшовши відстань $S = 35$ м по горизонталі. Визначити коефіцієнт тертя при русі саней, якщо вважати його однаковим на всьому шляху. [0,05]

4.44 Невеличке тіло масою $m = 10$ г зісковзує з гірки висотою $h = 1,2$ м, яка плавно переходить у «мертву петлю» радіусом $R = 0,4$ м. Визначити роботу сили тертя на шляху від вершини гірки до найвищої точки петлі, якщо в ній сила тиску тіла на поверхню дорівнює нулю. [20 мДж]

4.45 Система складається з двох послідовно з'єднаних пружин з жорсткостями k_1 і k_2. Яку мінімальну роботу необхідно виконати для того, щоб розтягнути систему на x? [$\left(k_1k_2x^2\right)/2\left(k_1+k_2\right)$]

4.46 Ящик у формі куба переміщують на деяку відстань один раз тягнучи по горизонтальній поверхні, інший раз – кантуванням, тобто перекиданням через ребро. При якому значенні коефіцієнта тертя робота в обох випадках буде однаковою? [$\sim 0,21$]

4.47 Яку найменшу роботу необхідно виконати, щоб поставити вертикально стовп масою m і довжиною l, який лежить на землі? [$mgl/2$]

4.48 Два однакових баки об'ємом V і висотою H кожний стоять один на одному. З нижнього повного бака воду перекачують у порожній верхній. Яку потужність повинен мати двигун насоса, щоб перекачати всю воду за час t, якщо його ККД η? [$\rho gVH/\eta t$, де ρ – густина води]

4.49 Яку мінімальну швидкість необхідно надати тілу на поверхні Землі, щоб воно могло покинути Сонячну систему? [$\sqrt{2gR}$]

4.50 Яку роботу необхідно виконати, щоб вивести штучний супутник масою $m = 500$ кг на колову орбіту, яка проходить безпосередньо біля поверхні Землі? Опором повітря знехтувати. [$1,6\cdot 10^{10}$ Дж]

4.51 Підйомний кран за $t = 7$ год роботи підіймає $m = 3000$ т будівельних матеріалів на висоту $h = 10$ м. Яку потужність має двигун крана, якщо його ККД дорівнює $\eta = 0,6$? [20 кВт]

4.52 Тіло масою $m = 1$ кг кинули вертикально вгору з початковою швидкістю $v_0 = 1$ м/с. Визначити потужність сили тяжіння на момент, коли кінетична енергія тіла зменшилася у $k = 2$ рази. [± 7 Вт]

4.53 Потужність гідростанції $P = 73,5$ МВт. Визначити об'ємні витрати води, якщо ККД станції $\eta = 75\%$, а гребля підіймає воду на висоту $h = 10$ м. [1000 м^3/с]

4.54 Транспортер підіймає $m = 200$ кг піску на автомашину за $\tau = 1$ с. Довжина стрічки транспортера $l = 3$ м, кут нахилу до горизонту $\alpha = 30°$. Визначити потужність двигуна транспортера, якщо його ККД $\eta = 85\%$. [$3,46$ кВт]

4.55 Брусок масою $m = 1$ кг знаходиться на горизонтальній поверхні з коефіцієнтом тертя $\mu = 0,27$. Йому надають початкову швидкість $v_0 = 1,5$ м/с. Визначити середню потужність сили тертя $\langle P \rangle$ за весь час руху бруска. [≈ 2 Вт]

4.56 Автомобіль масою $m = 1000$ кг рушає з місця зі сталим прискоренням. За перші $t_1 = 2$ с він проходить шлях $S = 20$ м. Визначити: А) потужність двигуна автомобіля у кінці другої секунди; Б) середню потужність двигуна на шляху S. ККД двигуна вважати $\eta = 50\%$. [400 кВт ; 200 кВт]

4.57 Два важки масами m_1 і m_2 ($m_1 > m_2$) прив'язані до нитки, яка перекинута через блок. У вихідному стані важок m_1 утримують на висоті h над підлогою. Потім важки відпускають без поштовху. Яка кількість теплоти виділиться при непружному ударі важка об підлогу? [$m_1 gh(m_1 - m_2)/(m_1 + m_2)$]

4.58 На горизонтальному столі висотою $h = 1$ м лежить тіло масою $m = 1$ кг. Йому поштовхом надають початкову швидкість $v_0 = 2$ м/с. Пройшовши по поверхні стола відстань $l = 2$ м, тіло падає на підлогу. Коефіцієнт тертя між тілом та поверхнею стола $\mu = 0,1$. Яка кількість теплоти виділиться при непружному ударі об підлогу? [$9,8$ Дж]

4.59 Коробка для сірників масою $m = 50$ г лежить на відстані $S = 30$ см від краю стола. Куля масою $m = 1$ г, яка летить горизонтально з швидкістю $v_1 = 150$ м/с, пробиває коробку і вилітає з неї зі швидкістю $v = 75$ м/с. При якому максимальному коефіцієнті тертя коробка втримається на столі? [$0,38$]

4.60 Після кожного удару копра паля заглиблюється у землю на $l = 1$ см. Маса копра $m = 500$ кг, його швидкість перед ударом $v = 10$ м/с. Визначити силу опору F руху палі у ґрунті, вважаючи її сталою. Масою палі можна знехтувати. [$2,5$ МН]

4.61 Палю масою $M = 1000$ кг забивають за допомогою копра, маса якого $m = 400$ кг. Копер вільно падає з висоти $H = 5$ м, і при кожному ударі паля заглиблюється на $h = 5$ см. Визначити силу опору ґрунту при забиванні палі, якщо її вважати сталою. [$125,7$ кН]

Рівень B

4.62 Камінь масою $m = 200$ г, який кинули з горизонтальної поверхні землі під кутом до горизонту, впав на відстані $S = 5$ м від точки кидання через $\tau = 1,2$ с. Яка робота A була виконана при киданні каменя? Опором повітря можна знехтувати. [$5,2$ Дж]

4.63 Камінь масою $m = 1,5$ кг кинули під певним кутом до горизонту з поверхні землі. Визначити мінімальну роботу, що має бути виконана при киданні, щоб камінь впав на відстані $S = 20$ м. [150 Дж]

4.64 До бруска масою $m = 12$ кг, який лежить на горизонтальній поверхні, прикріплено пружину жорсткістю $k = 300$ Н/м (**рис.4.64**). Коефіцієнт тертя між бруском і поверхнею $\mu = 0,4$. Спочатку пружина не деформована. До вільного кінця пружини приклали силу, яка напрямлена під кутом $\alpha = 30°$ до горизонту, і повільно перемістили тіло на відстань $S = 0,4$ м. Визначити виконану роботу A. [19 Дж]

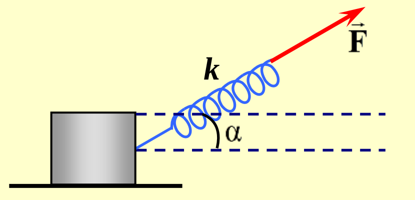


Рис.4.64

4.65 Тіло масою m кинули під кутом φ до горизонту з початковою швидкістю v_0. Визначити: А) середню потужність $\langle P \rangle$, яку розвиває сила тяжіння, за весь час руху тіла; Б) залежність миттєвої потужності сили тяжіння від часу. [0 ; $mg(gt - v_0 \sin\varphi)$]

4.66 Колодязь, який має площу дна $S_1 = 1$ м^2 і глибину $h = 10$ м, до половини заповнений водою. Яку потужність повинен мати насос з ККД $\eta = 86\%$, щоб відкачати всю воду за $\tau = 100$ с по трубі з площею перерізу $S_2 = 0,01$ м^2? [50 кВт]

4.67 М'яч падає з висоти $h = 50$ см без початкової швидкості. При ударі об підлогу він втрачає $k = 40\%$ енергії. Скільки разів (теоретично) підстрибне м'яч? Чому дорівнює весь шлях пройдений м'ячем? [нескінченно; $\approx 1,2$ м]

4.68 Тенісний м'яч, маса якого $m = 100$ г, летить зі швидкістю $v_1 = 15$ м/с. Ударом ракетки його відбивають у протилежному напрямку. Швидкість ракетки в момент удару $v_2 = 15$ м/с. Удар вважати пружним, висоту м'яча над землею сталою. Яку роботу було виконано над м'ячем? [90 Дж]

4.69 Тіло масою $m = 2$ кг ковзає з гірки висотою $h = 4,5$ м, яка плавно переходить у циліндричну поверхню радіусом $R = 2$ м. При русі з вихідного положення до вищої точки циліндричної поверхні сила тертя виконала роботу $A = 40$ Дж. Визначити тиск тіла на циліндричну поверхню у її верхній точці циліндричної поверхні. [10 Н]

Рекомендації до теми "Збереження механічної енергії"

За відсутності в системі неконсервативних сил у правій частині загального співвідношення **(4.13)** маємо нуль, тобто механічна енергія системи залишається сталою. Отже в таких задачах рівняння енергетичного балансу являє собою рівність початкового та кінцевого значень повної механічної енергії системи.
Перед складанням рівняння енергетичного балансу треба пересвідчитись, що в системі дійсно немає неконсервативних сил, які виконують роботу. При складанні рівняння слід також проаналізувати, як найдоцільніше вибрати нульовий рівень потенціальної енергії для кожної з консервативних сил, що діють в системі, та які стани прийняти за початковий та кінцевий.

Тема: Збереження механічної енергії. Приклади

Задача 4.21

Визначити,
кут α до горизонту, під яким зроблено постріл з гармати, якщо у найвищій точці траєкторії кінетична енергія снаряда на $k = 25\%$ менша, ніж початкова. Опір повітря не враховувати.

Дано:
$k = 25\% = 0,25$

Визначити: α

Розв'язання

За умовою, на снаряд діє тільки сила тяжіння, що є консервативною. Отже повна механічна енергія снаряда зберігається, і для точки пострілу та верхньої точки траєкторії можна записати:

$W_0 = W,$

або, відраховуючи потенціальну енергію, відраховану від точки пострілу,

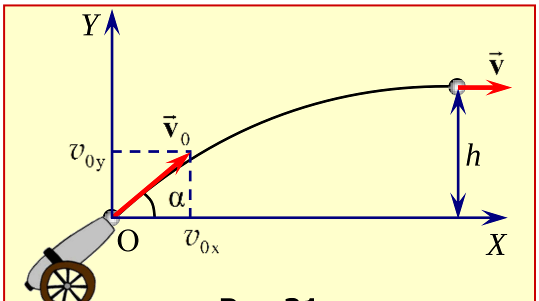


Рис.21

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + mgh, \qquad (1)$$

де m – маса снаряда v_0, v – його швидкості у точці пострілу та у вищій точці траєкторії, h – максимальна висота підйому снаряда відносно точки пострілу (**рис.21**).

За умовою задачі

$$\frac{mv_0^2}{2} - \frac{mv^2}{2} = k\frac{mv_0^2}{2},$$

тому згідно з рівнянням **(1)**, маємо:

$$mgh = k\frac{mv_0^2}{2} \qquad \Rightarrow \qquad 2gh = kv_0^2. \qquad (2)$$

Згідно з рівнянням **(1.18)** кінематики[38]

$$2gh = v_{0y}^2 = v_0^2 \sin^2 \alpha.$$

Підставивши цей вираз у рівняння **(2)**, дістанемо

$$\sin\alpha = \sqrt{k} = \frac{1}{2} \qquad \Rightarrow \qquad \alpha = 30°.$$

Задача 4.22

Визначити,
при яких кутах кидання до горизонту α на траєкторії існує точка, в якій кінетична енергія тіла у $k = 3$ рази більша за його потенціальну енергію, відраховану від

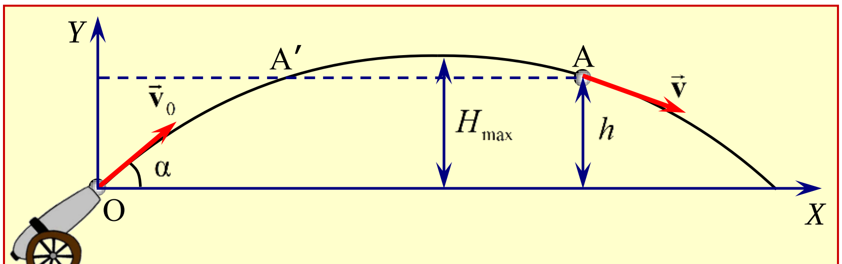


Рис.22

[38] Тут враховано, що у верхній точці траєкторії $v_y = 0$.

точки кидання. Опором повітря знехтувати.

Дано:
$k=3$

Визначити: α

Розв'язання

Оскільки за умовою задачі опором повітря можна знехтувати, то треба розглядати тільки консервативну силу тяжіння, що діє на тіло. При цьому механічна енергія тіла зберігається. В такому випадку для будь-якої точки A траєкторії (**рис.22**)

$$\frac{mv_0^2}{2}=\frac{mv^2}{2}+mgh, \qquad (1)$$

де v_0 – початкова швидкість тіла, v – його швидкість у точці A на висоті h над рівнем точки кидання. Нехай у точці A виконується умова задачі: $\frac{mv^2}{2}=kmgh$. Тоді рівняння **(1)** набуває вигляду:

$$\frac{mv_0^2}{2}=(k+1)mgh \qquad \Rightarrow \qquad h=\frac{v_0^2}{2(k+1)g}.$$

При польоті тіла $h\le H$, де H – найбільша висота підйому тіла, яка дорівнює[39]:

$$H=\frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g}.$$

Отже,

$$\frac{v_0^2}{2(k+1)g}\le\frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g} \qquad \Rightarrow \qquad \sin\alpha\ge\frac{1}{\sqrt{k+1}}.$$

Таким чином, вказана точка існує при кутах кидання

$$\alpha\ge\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right).$$

При заданому $k=3$ маємо:

$$\alpha\ge30°.$$

При $\alpha=\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)$ вказана точка співпадає з найвищою точкою траєкторії, а при більших значеннях α таких точок дві: на ділянці підйому та на ділянці спуску (точка A' і A на **рис.22**).

Варто також зауважити, що цю задачу можна розв`язати і методами кінематики, але розв'язання буде більш громіздким.

Задача 4.23

Тягарець висить на невагомій нерозтяжній нитці. Нитку відхиляють на кут $\alpha=60°$ від вертикалі і відпускають.

Визначити

кут β, на який відхилиться нитка по інший бік, якщо під точкою підвісу на середині довжини нитки забито цвях (**рис.23**-1). Тертям та опором повітря знехтувати.

Розв'язання.

Дано:
$\alpha=60°$

Визначити: β

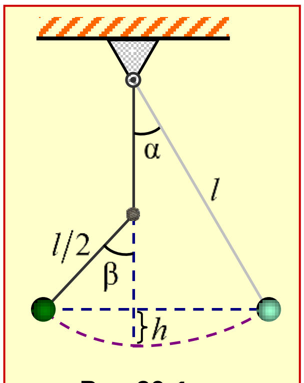


Рис.23-1

На тягарець діє консервативна сила тяжіння та сила натягу нитки, котра не виконує роботи, оскільки вона весь час перпендикулярна до напрямку руху. Тому повна механічна енергія тягарця зберігається. Оскільки в крайніх положеннях тягарець має лише потенціальну енергію (ці положення знаходяться в одній горизонтальній площині, то по обидва боки від цвяха він піднімається на однакову максимальну висоту h. З **рис.23-1** видно, що

[39] Виведення цього виразу див. у **задачі 1.19**.

$$\cos\alpha = \frac{l-h}{l} = 1-\frac{h}{l},$$

$$\cos\beta = \frac{\frac{l}{2}-h}{\frac{l}{2}} = 1-2\frac{h}{l}.$$

Виключивши з цих виразів h/l, одержимо

$$\cos\beta = 2\cos\alpha - 1 \qquad \Rightarrow \qquad \beta = \arccos\left(2\cos\alpha - 1\right).$$

Виконаємо обчислення:

$$\beta = \arccos\left(2\cos 60° - 1\right) = \arccos\left(0\right) = 90°.$$

Задача 4.24

Невеличке тіло починає зісковзувати без початкової швидкості з вершини півсфери радіуса R, яка закріплена на горизонтальній поверхні.

Визначити,

висоту h від основи, на якій тіло відірветься від поверхні півсфери. Тертям між тілом та півсферою знехтувати.

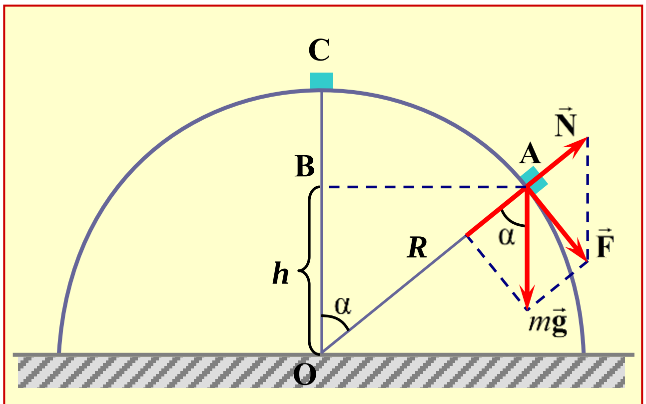


Рис.24

Дано:

R

Визначити: h

Розв'язання

До моменту відриву від поверхні півсфери тіло рухається по колу під дією рівнодійної сил тяжіння $m\vec{g}$ та нормальної реакції опори $\vec{N}$: $\vec{F} = m\vec{g} + \vec{N}$ (**рис.24**). Проекція сили $\vec{F}$ на радіус півсфери $mg\cos\alpha - N$ визначає доцентрове прискорення тіла v^2/R, отже

$$mg\cos\alpha - N = \frac{mv^2}{R}. \qquad (1)$$

Під дією сили тяжіння швидкість тіло зростає. В той же час величина $mg\cos\alpha$ в лівій частині рівняння **(1)** зменшується. Це означає, що зменшується (причому ще швидше) й величина реакції опори N так що при певному значенні швидкості вона взагалі зникає ($N = 0$), і тіло відривається від поверхні півсфери. Отже умовою відриву є

$$mg\cos\alpha = \frac{mv^2}{R}. \qquad (2)$$

Швидкість тіла в момент відриву визначимо за законом збереження механічної енергії. У верхній точці півсфери тіло мало тільки потенціальну енергію $W_1 = mgR$ (потенціальну енергію відраховано від основи півсфери), а в точці відриву його повна механічна енергія складається з кінетичної та потенціальної:

$$W_2 = \frac{mv^2}{2} + mgh.$$

Оскільки тертя відсутнє, то $W_1 = W_2$, отже:

$$mgR = \frac{mv^2}{2} + mgh \qquad \Rightarrow \qquad R = \frac{v^2}{2g} + h.$$

Підставимо сюди вираз швидкості з рівняння **(2)** й одержимо:

$$R = \frac{R\cos\alpha}{2} + h. \qquad (3)$$

З трикутника OAB на **рис.24** знаходимо:

$$\cos\alpha = \frac{R-h}{R}.$$

Тепер, з формули **(3)** після нескладних перетворень дістанемо:

$$h = \frac{2}{3}R = \frac{2}{3}\cdot 60 = 40 \text{ см}.$$

Задача 4.25

На тонкому горизонтальному штирі висить перекинутий через нього м`який канат довжини $l = 10$ м так що його кінці знаходяться на одному рівні. Через незначний поштовх канат починає зісковзувати.

Визначити

швидкість каната v в момент повного зісковзування зі штиря. Тертям знехтувати.

Дано: $l = 10$ м	**Розв'язання**
Визначити: v	

Розв'язання

За умовою на канат діють лише сила тяжіння та сила реакції штиря, причому остання не виконує роботи[40]. Отже, механічна енергія каната в початковому (**рис.25а**) та в кінцевому (**рис.25б**) положеннях однакова. Якщо відраховувати потенціальну енергію від кінцевого положення центра мас каната (точка O_2), то рівняння енергетичного балансу матиме вигляд (див. **рис.25**):

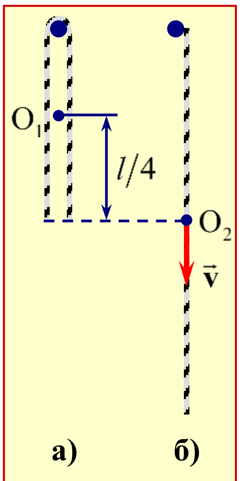


Рис.25

$$mg\frac{l}{4} = \frac{mv^2}{2} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{gl}{2}}.$$

Виконаємо обчислення:

$$v = \sqrt{\frac{9,8\cdot 10}{2}} = \sqrt{49} = 7 \text{ м/с}.$$

Задача 4.26

Тягарець, що висить на невагомій пружині, розтягає її на величину x_0. Потім тягарець вертикально підіймають до положення, в якому пружина недеформована, і відпускають. Нехтуючи тертям та опором,

визначити:

А) максимальний розтяг пружини x_m;

Б) максимальну швидкість тягарця.

Дано: x_0	**Розв'язання**
Визначити: x_m, v_m	

Розв'язання

Оскільки за умовою неконсервативні сили відсутні, механічна енергія системи "тягарець-пружина" зберігається.

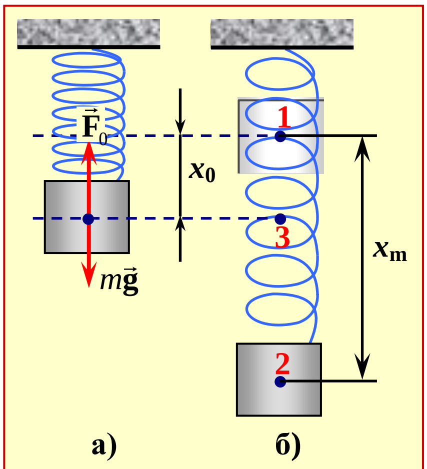


Рис.26

А) Будемо відраховувати потенціальну енергію тягарця від найнижчого положення (точка **2**, **рис.26б**), в якому пружина деформована на максимальну величину x_m. Тоді у вихідному положенні (точка **1**) енергія системи – це лише потенціальна енергія тягарця $W_1 = mgx_m$, а в кінцевому (точка 2) – лише потенціальна енергія пружини $W_2 = \frac{kx_m^2}{2}$. Оскільки $W_1 = W_2$, маємо ($x_m \neq 0$):

$$mgx_m = \frac{kx_m^2}{2} \quad \Rightarrow \quad x_m = \frac{2mg}{k}, \qquad (1)$$

де m – маса тягарця, k – жорсткість пружини. З умови рівноваги тягарця (**рис.26а**) маємо:

[40] Ця сила напрямлена вертикально в гору, тобто перпендикулярно до напрямку руху частинок каната в точці дотику до штиря.

$$kx_0 = mg \qquad \Rightarrow \qquad x_0 = \frac{mg}{k}, \qquad (2)$$

$$x_\text{m} = 2x_0 \qquad (3)$$

Б) Для визначення максимальної швидкості тягарця врахуємо, що коли він знаходиться вище положення рівноваги, то $x < x_0$, рівнодійна сил тяжіння та пружності напрямлена вниз, тобто швидкість тягарця зростає. Якщо ж він знаходиться нижче положення рівноваги $x > x_0$, то рівнодійна напрямлена вгору, і швидкість зменшується. Отже максимальну швидкість тягарець матиме при проходженні положення рівноваги (точки 3, **рис.26б**). При цьому механічна енергія системи

$$W_3 = \frac{mv_\text{m}^2}{2} + \frac{kx_0^2}{2} + mgx_0.$$

Згідно із законом збереження $W_1 = W_2$ (або $W_3 = W_2$), отже

$$\frac{mv_\text{m}^2}{2} + \frac{kx_0^2}{2} + mgx_0 = mgx_\text{m}.$$

З цього рівняння, врахувавши співвідношення **(2)** та результат **(3)**, знайдемо

$$v_\text{m} = \sqrt{gx_0}.$$

Величину v_m можна визначити інакше:

1. Скласти рівняння енергетичного балансу для початкового та довільного положень тягарця;
2. Визначити з нього швидкість як функцію розтягу пружини $v(x)$;
3. Визначити максимум цієї функції за допомогою відомих методів математики.

Задача 4.27

Куля, що рухається по горизонтальній поверхні непружно стикається з нерухомою кулею вдвічі більшої маси.

Визначити,

яка частина кінетичної енергії η перейшла у внутрішню. Тертя між кулями та поверхнею відсутнє.

Розв'язання.

Дано:
$m_2/m_1 = k = 2$

Визначити: η

При непружному зіткненні відбувається пластична деформація тіл, внаслідок чого після зіткнення вони рухаються як одне ціле[41]. В процесі деформації в тілах діють сили внутрішнього тертя, тому механічна енергія не зберігається – частина її перетворюється у внутрішню (теплову) енергію тіл. Отже можна записати:

$$W_1 = W_2 + Q, \qquad (1)$$

де W_1, W_2 – початкова і кінцева механічні енергії, Q – енергія, що перейшла у внутрішню. За умовою задачі слід визначити величину

$$\eta = \frac{Q}{W_1} = \frac{W_1 - W_2}{W_1} = 1 - \frac{W_2}{W_1}. \qquad (2)$$

Оскільки потенціальна енергія куль не змінюється (рух по горизонталі), доцільно прийняти її рівною нулю. Тоді:

$$W_1 = \frac{m_1 v^2}{2}, \quad W_2 = \frac{(m_1 + m_2)u^2}{2} = \frac{(k+1)m_1 u^2}{2}, \qquad (3)$$

де v – швидкість першого тіла до зіткнення, u – спільна швидкість тіл після зіткнення, а також враховано, що $m_2 = km_1$.

Підставивши вирази енергій **(3)** в рівняння **(2)**, отримаємо:

$$\eta = 1 - (k+1)\frac{u^2}{v^2}. \qquad (4)$$

[41] Це і є означенням поняття "абсолютне непружне зіткнення (удар)".

Зовнішні сили (тяжіння та реакції) скомпенсовані і для кульок виконується закон збереження імпульсу. У проекціях на напрямок руху першої кулі рівняння балансу імпульсів має вигляд:

$$m_1 v = (m_1 + m_2)u \qquad \Rightarrow \qquad m_1 v = (k+1) m_1 u \qquad \Rightarrow \qquad u = \frac{v}{k+1}.$$

Підставимо цей вираз у формулу **(4)**:

$$\eta = 1 - \frac{(k+1)v^2}{(k+1)^2 v^2} \qquad \Rightarrow \qquad \eta = \frac{k}{k+1} = \frac{2}{3}.$$

Варто звернути увагу на те, що частина втраченої кінетичної енергії тим більша, чим масивнішим є нерухоме тіло.

Задачі для самостійної роботи

Рівень А

4.70 Тіло кинули вертикально вгору з початковою швидкістю $v_0 = 20$ м/с. На якій висоті кінетична енергія тіла буде дорівнювати його потенціальній енергії, яку відраховано від точки кидання? [10 м]

4.71 Тіло кинули вертикально вгору так, що воно піднялося на максимальну висоту $H = 20$ м. Визначити швидкість тіла на висоті $h = H/2$. [~ 4,5 м/с]

4.72 Кулька підвішена на нерозтяжній невагомій нитці довжиною $l = 62{,}5$ см. Нитку відхилили від вертикалі на кут $\alpha = 60°$ і відпустили. Якої найбільшої швидкості набуде кулька? [2,5 м/с]

4.73 У пружинний пістолет зарядили кульку маси $m = 10$ г, при цьому пружина жорсткістю $k = 100$ Н/м була стиснута на $\Delta l = 10$ см. На яку максимальну висоту підніметься кулька після пострілу? Опором повітря знехтувати. [5 м]

Рівень Б

4.74 Тіло масою $m = 1$ кг падає на вертикально розташовану невагому пружинку жорсткістю $k = 500$ Н/м, при цьому максимальна деформація пружини $\Delta l = 10$ см. З якої висоти впало тіло? [15 см]

4.75 Кульку масою m, яка висить на нитці довжиною L, відводять до горизонтального положення і відпускають. На відстані $2L/3$ під точкою підвісу вбито гвіздок. Яку силу натягу матиме нитка в момент, коли вона займе горизонтальне положення. [$4mg$]

4.76 Кулька масою $m = 0{,}1$ кг обертається на нитці у вертикальній площині. Яку мінімальну міцність на розрив може мати при цьому нитка? [$6mg \approx 6$ Н]

4.77 Яку мінімальну швидкість повинна мати кулька математичного маятника при проходженні нижнього положення, щоб вона могла здійснити повний оберт у вертикальній площині? Розглянути випадки: а) кулька прив'язана до нерозтяжної нитки; б) кулька закріплена на кінці невагомого жорсткого стержня. Довжини стержня і нитки однакові і дорівнюють l. [$\sqrt{5gl}$; $2\sqrt{gl}$]

4.78 Мотузка довжиною $l = 1$ м, яка має масу $m = 0{,}5$ кг, лежить на гладенькому столі так, що з поверхні звисає частина довжиною $l_0 = 1$ см. До звисаючого кінця прив'язано гирю масою $M = 0{,}8$ кг. Мотузку відпускають і гиря починає падати. Яку швидкість матиме гиря в момент, коли мотузка повністю зісковзне з поверхні стола? Розмірами гирі та силами тертя знехтувати. [3,64 м/с]

4.79 Лижник масою $m=70\,\text{кг}$ розганяється по горі з точки А (**рис.4.79**). Нижня ділянка гори являє собою циліндричну поверхню радіуса $R=15\,\text{м}$. Висота гори $H=50\,\text{м}$. Визначити силу тиску лижника на сніг у точці В, якщо його рух починається з точки А без початкової швидкості. Тертя не враховувати. [$mg(2H/R+3\cos\alpha-2)\approx 5\,\text{кН}$]

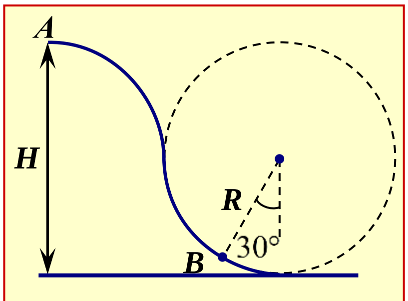


Рис.4.79

4.80 Легкий стержень довжиною l з двома однаковими маленькими важками на кінцях утримують у горизонтальному положенні. На відстані l_1 від одного з кінців проходить горизонтальна вісь, відносно якої стержень може вільно обертатися. Стержень звільнили без поштовху. Яку кутову швидкість матиме стержень в момент проходження положення стійкої рівноваги? [$\sqrt{2g(l-2l_1)/\left(l_1^2+(l-l_1)^2\right)}$]

4.81 Камінь масою $m=300\,\text{г}$ кинули горизонтально з башти. Через час $\tau=1\,\text{с}$ швидкість каменя становить кут $\alpha=30^\circ$ з горизонтом. Визначити кінетичну енергію каменя у цей момент. [$\approx 58\,\text{Дж}$]

4.82 Куля масою $m=20\,\text{г}$, випущено з гвинтівки під деяким кутом до горизонту, у верхній точці траєкторії має кінетичну енергію $W_\text{к}=900\,\text{Дж}$. Під яким кутом до горизонту випущена куля, якщо її початкова швидкість $v_0=600\,\text{м/с}$? [60°]

Рівень В

4.83 Нитку, на якій висить тіло масою $m=1\,\text{кг}$, відвели до горизонтального положення і відпустили. Визначити силу натягу нитки, в момент, коли вертикальна складова швидкості тіла максимальна. [$17{,}4\,\text{Н}$]

4.84 На шляху обруча, який котиться по горизонтальній поверхні зі швидкістю $v=5\,\text{м/с}$, зустрічається гірка довільного профілю. На яку максимальну висоту зможе піднятися обруч? Проковзування відсутнє. [$v^2/g=2{,}5\,\text{м}$]

4.85 Дошка масою $m=6\,\text{кг}$ виступає за край столу на $1/4$ своєї довжини. До кінця дошки підвішують вантаж на нитці. Нитку з вантажем відводять на кут 90° і відпускають. Яку мінімальну масу повинен мати вантаж, щоб при його вільних коливаннях кінець дошки міг відірватися від поверхні стола? [$2\,\text{кг}$]

Рекомендації до теми "Збереження енергії та імпульсу"

Поширеним типом задач механіки є такі, де розглядаються зіткнення двох тіл, або подібні взаємодії, при яких суттєво змінюється механічний стан (положення в просторі та швидкості) обох тіл. В таких задачах сумісно використовують закон збереження механічної енергії та закон збереження імпульсу, тобто для розв`язання задачі крім рівняння енергетичного балансу (див. **рекомендації до розділу**) складають ще рівняння балансу імпульсів (див. **рекомендації до розділу 3** "Закон збереження імпульсу"). При цьому слід пам’ятати умови збереження імпульсу та те, що імпульс є векторною величиною.

Тема: Збереження енергії та імпульсу. Приклади

Задача 4.28

Дві кульки з масами m_1 і m_2 рухаються без тертя по горизонтальній поверхні вздовж осі OX з швидкостями $\vec{\mathbf{v}}_1$ і $\vec{\mathbf{v}}_2$.

Визначити

швидкості куль u_1 та u_2 після абсолютно пружного центрального удару.

Дано:
m_1, m_2, $\vec{\mathbf{v}}_1$, $\vec{\mathbf{v}}_2$

Визначити: u_1, u_2

Розв’язання

Оскільки тертя відсутнє і сили тяжіння та реакції опори скомпенсовані, зміна механічного стану куль при ударі визначається лише силою взаємодії між ними. Отже сумарний імпульс куль зберігається. При абсолютно пружному ударі вказані сили є пружними, тобто консервативними. Тому зберігається і повна механічна енергія системи. При цьому спочатку кінетична енергія куль перетворюється у потенціальну енергію пружної деформації (фаза стиснення), а потім навпаки – потенціальна енергія перетворюється в кінетичну (фаза розльоту). Отже, при пружному ударі зберігається кінетична енергія тіл, що співударяються[42].

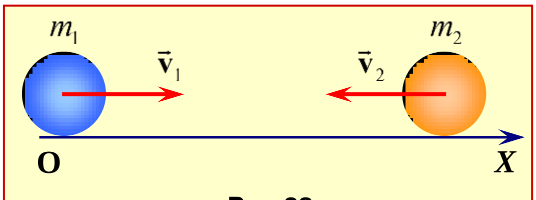


Рис.28

Складемо рівняння балансу імпульсів у проекціях на вісь OX та балансу кінетичних енергій (врахувавши, що в цій задачі $v^2 = v_x^2$):

$$m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} = m_1 u_{1x} + m_2 u_{2x}, \qquad (1)$$

$$\frac{m_1 v_{1x}^2}{2} + \frac{m_2 v_{2x}^2}{2} = \frac{m_1 u_{1x}^2}{2} + \frac{m_2 u_{2x}^2}{2}. \qquad (2)$$

Ці рівняння зручно переписати так:

$$m_1 \left(v_{1x} - u_{1x} \right) = m_2 \left(u_{2x} - v_{2x} \right), \qquad (1a)$$

$$m_1 \left(v_{1x}^2 - u_{1x}^2 \right) = m_2 \left(u_{2x}^2 - v_{2x}^2 \right). \qquad (2a)$$

Поділивши рівняння **(2a)** на **(1a)** з урахуванням формули різниці квадратів, отримаємо

$$v_{1x} + u_{1x} = u_{2x} + v_{2x}.$$

Об`єднавши це рівняння з рівнянням **(1a)**, дістанемо систему:

$$\begin{cases} v_{1x} + u_{1x} = u_{2x} + v_{2x}, \\ m_1 \left(v_{1x} - u_{1x} \right) = m_2 \left(v_{2x} - u_{2x} \right), \end{cases}$$

з якої отримаємо відповідь:

$$u_{1x} = \frac{2 m_2 v_{2x} + \left(m_1 - m_2 \right) v_{1x}}{m_1 + m_2}, \qquad (3)$$

---

[42] Збереження кінетичної енергії і є ознакою абсолютно пружного удару.

$$u_{2x} = \frac{2m_1 \upsilon_{1x} + (m_2 - m_1)\upsilon_{2x}}{m_1 + m_2}. \qquad (4)$$

Розглянемо деякі окремі випадки.

1. Маси куль однакові ($m_1 = m_2$). З рівнянь **(3)** та **(4)** маємо:

$u_{1x} = \upsilon_{2x}, \qquad u_{2x} = \upsilon_{1x},$

тобто в результаті пружного зіткнення кулі обмінюються швидкостями. Зокрема, якщо друга куля до удару знаходилась у спокої ($\upsilon_{2x} = 0$), то після удару $u_{1x} = 0, \quad u_{2x} = \upsilon_{2x}$: перша куля зупиняється, а друга починає рухатись у тому ж напрямку з тією ж швидкістю. (Це добре відомо тим хто грає у більярд).

2. Якщо маси куль різні ($m_1 \neq m_2$) і друга куля перед зіткненням знаходиться у спокої ($\upsilon_{2x} = 0$), то з формул **(3)**, **(4)** знаходимо:

$$u_{1x} = \frac{(m_1 - m_2)\upsilon_{1x}}{m_1 + m_2}; \qquad u_{2x} = \frac{2m_1 \upsilon_{1x}}{m_1 + m_2}. \qquad (5)$$

Отже, якщо перша куля масивніша ($m_1 > m_2$), то $u_{1x} > 0$ і вона після удару буде рухатись без зміни напрямку. Якщо ж перша куля легша ($m_1 < m_2$), то $u_{1x} < 0$, тобто вона відскочить у зворотному напрямку.

Задача 4.29

Куля, що рухалась зі швидкістю $\upsilon_1 = 3\,\text{м/с}$, після пружного зіткнення з іншою кулею, яка перебуває у спокої, починає рухатись не змінюючи напрям зі швидкістю $u_1 = 2\,\text{м/с}$.

Визначити

відношення мас куль m_1/m_2 та швидкість другої кулі u_2 після зіткнення. Тертя відсутнє.

Дано:
$\upsilon_1 = 3\,\text{м/с}$
$u_1 = 2\,\text{м/с}$

Визначити: m_1/m_2, u_2

Розв'язання

Загальне розв`язання цієї задачі повністю збігається з попередньою. Тому скористаємося кінцевим результатом – формулою **(5)**.

Позначимо відношення мас $m_1/m_2 = k$ та зробивши заміну $m_1 = km_2$, знаходимо

$$u_1 = \frac{(k-1)\upsilon_1}{k+1} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{\upsilon_1 + u_1}{\upsilon_1 - u_1} = 5.$$

Врахувавши цей результат з формули **(5) задачі 4.28** дістанемо:

$$u_2 = \frac{2k\upsilon_1}{k+1} = 5\,\text{м/с}.$$

Задача 4.30

Дві однакові кульки, що рухалися зі швидкостями $\vec{\mathbf{v}}_1$ та $\vec{\mathbf{v}}_2$ під кутом α один до одної, після пружного нецентрального удару розлітаються зі швидкостями $\vec{\mathbf{u}}_1$ та $\vec{\mathbf{u}}_2$.

Визначити

кут β між векторами $\vec{\mathbf{u}}_1$ та $\vec{\mathbf{u}}_2$.

Дано:
$\vec{\mathbf{v}}_1$, $\vec{\mathbf{v}}_2$, $\vec{\mathbf{u}}_1$, $\vec{\mathbf{u}}_2$, α

Визначити: β

Розв'язання

В **задачі 4.28** показано, що при пружному ударі виконуються закони збереження імпульсу та кінетичної енергії.

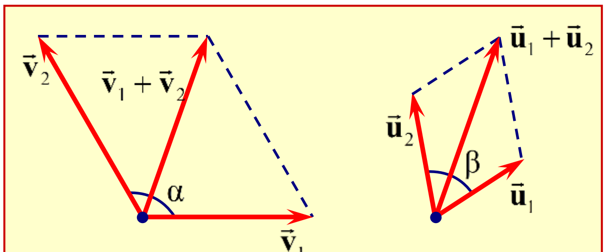


Рис.30

Тому можна записати систему рівнянь:

$$\begin{cases} m\vec{\mathbf{v}}_1 + m\vec{\mathbf{v}}_2 = m\vec{\mathbf{u}}_1 + m\vec{\mathbf{u}}_2, \\ \dfrac{m\upsilon_1^2}{2} + \dfrac{m\upsilon_2^2}{2} = \dfrac{mu_1^2}{2} + \dfrac{mu_2^2}{2}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{\mathbf{v}}_1 + \vec{\mathbf{v}}_2 = \vec{\mathbf{u}}_1 + \vec{\mathbf{u}}_2, \\ \upsilon_1^2 + \upsilon_2^2 = u_1^2 + u_2^2. \end{cases} \qquad (1)$$

Вектори $\vec{\mathbf{v}}_1+\vec{\mathbf{v}}_2$ та $\vec{\mathbf{u}}_1+\vec{\mathbf{u}}_2$ представляють собою діагоналі паралелограмів швидкостей (**рис.30**), причому $\vec{\mathbf{v}}_1+\vec{\mathbf{v}}_2=\vec{\mathbf{u}}_1+\vec{\mathbf{u}}_2$. Отже, за теоремою косинусів маємо

$$v_1^2+v_2^2+2v_1v_2\cos\alpha=u_1^2+u_2^2+2u_1u_2\cos\beta.$$

Врахувавши друге рівняння системи **(1)**, дістанемо:

$$v_1v_2\cos\alpha=u_1u_2\cos\beta \qquad \Rightarrow \qquad \cos\beta=\frac{v_1v_2}{u_1u_2}\cos\alpha.$$

В окремому випадку, якщо одна з кульок (наприклад, друга) перебувала у спокої, то $\cos\beta=0$ і $\beta=90°$, тобто кульки розлітаються під прямим кутом.

Підкреслимо, що відміна результату розв'язування цієї задачі і задачі 4.28 зумовлена тим, що у **задачі 4.28** напрямки швидкостей збігаються з лінією, що проходить через центри куль (центральний удар), а в даній задачі ця умова не виконується і маємо нецентральний удар.

Задача 4.31

Куля масою $m=10\text{ г}$, що летить горизонтально зі швидкістю $v=1000\text{ м/с}$, влучає в підвішений на міцному шнурі дерев`яний брус і застряє в ньому, заглибившись на відстань $S=10\text{ см}$. Відстань від точки підвісу до центра мас бруса $l=1{,}5\text{ м}$, маса бруса $M=5\text{ кг}$.

Визначити:
А) максимальний кут відхилення α шнура, від вертикалі після влучання кулі;
Б) силу опору F, що діє на кулю в брусі, вважаючи її сталою.
Масою шнура, а також тертям у підвісі та опором повітря знехтувати.

Розв'язання.

Дано:
$m=10\text{ г}=10^{-2}\text{ кг}$
$v=1000\text{ м/с}$
$S=10\text{ см}=0{,}1\text{ м}$
$l=1{,}5\text{ м}$
$M=5\text{ кг}$

Визначити: α, F

А) Вдаряючи в брус і застряючи, куля передає йому певні початкові імпульс та кінетичну енергію. Цей процес відбувається дуже швидко, тому будемо вважати, що під час взаємодії з кулею брус лишається у вихідному положенні і отримана ним швидкість є початковою швидкістю подальшого руху бруса разом з кулею. За такої умови, в процесі удару, зовнішні сили (тяжіння та натягу шнура) скомпенсовані і імпульс зберігається. Отже:

$$mv=(m+M)u, \qquad \Rightarrow \qquad u=\frac{mv}{m+M}, \qquad (1)$$

де u – швидкість бруса з кулею безпосередньо після удару, v – швидкість кулі безпосередньо перед ударом.

Після удару брус з кулею піднімається над початковим рівнем, збільшуючи свою потенціальну енергію у полі сил тяжіння. Одночасно зменшується кінетична енергія бруса так, що механічна енергія лишається незмінною (після застрягання кулі рух бруса відбувається за відсутності сил тертя та опору). У точці найвищого підйому кінетична енергія дорівнює нулю, а потенціальна – досягає максимального значення. За законом збереження енергії

$$W_1=W_2,$$

де W_1, W_2 – повна механічна енергія бруса з кулею в початковому та в кінцевому положеннях. Прийнявши за нульовий рівень потенціальної енергії початкове положення центра мас бруса, маємо:

$$\frac{(m+M)u^2}{2}=(m+M)gh \qquad \Rightarrow \qquad h=\frac{u^2}{2g},$$

де h – максимальна висота підйому бруса. Підставимо в останню формулу вираз початкової швидкості бруса **(1)**:

$$h=\frac{m^2v^2}{2g(m+M)^2}. \qquad (2)$$

Максимальний кут відхилення шнура визначається через h та з трикутника ОВА на **рис.31**:

$$h = OC - OA = OC - OB \cdot \cos\alpha =$$

$$= l\left(1-\cos\alpha\right) = 2l\sin^2\frac{\alpha}{2}. \qquad (3)$$

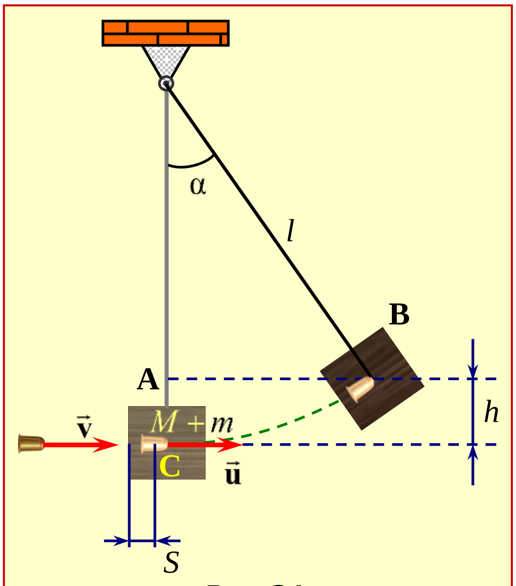


Рис.31

Прирівнюючи вирази **(2)** та **(3)**, дістанемо:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{mv}{2\sqrt{gl}\left(m+M\right)}.$$

За умовою $M \gg m$, тому замість цієї формули доцільно записати наближений вираз:

$$\sin\frac{\alpha}{2} \approx \frac{mv}{2M\sqrt{gl}}.$$

При дуже великій відмінності мас обчислення за спрощеною формулою дають практично точний результат[43].

Виконаємо обчислення.

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{10^{-2}\cdot 10^{3}}{2\cdot 5\cdot\sqrt{9{,}8\cdot 1{,}5}} = 0{,}261 \qquad \Rightarrow \qquad \alpha = 30{,}2^\circ.$$

Б) В процесі заглиблення кулі в брус між ними діють великі сили тертя (опору). Сила, що прикладена до кулі, гальмує її від швидкості v до швидкості u, а сила, прикладена до бруса, прискорює його від стану спокою до швидкості u. Наявність сил тертя спричинює втрату значної частини кінетичної енергії під час співударяння згідно з загальним рівнянням:

$$\frac{\left(m+M\right)u^2}{2} - \frac{mv^2}{2} = A_{\text{т}}, \qquad (4)$$

де $A_{\text{т}}$ – сумарна робота сил опору, що діють на нулю та на брус. Згідно з результатом **задачі 4.2**, ця робота може бути визначена лише через силу опору, що діє на кулю, та переміщення кулі відносно бруса:

$$A_{\text{т}} = -FS.$$

Після підстановки цього виразу та виразу u з формули **(1)** у рівняння **(4)** та нескладних розрахунків, отримаємо:

$$F = \frac{Mmv^2}{2S\left(m+M\right)},$$

або, врахувавши умову $M \gg m$,

$$F \approx \frac{mv^2}{2S} = 5\cdot 10^4 \text{ Н}. \qquad (5)$$

Цей результат показує, що при ударі куля втрачає практично всю свою кінетичну енергію. На завершення переконаємось у правильності вихідних припущень про короткочасність процесу удару та незмінність положення бруса під час удару кулі. Для цього оцінимо час руху кулі в брусі t і шлях $S_{\text{б}}$, пройдений брусом за цей час, вважаючи рух тіл рівнозмінним. Сила опору (формула **(5)**) надає кулі прискорення

$$a_{\text{п}} = \frac{F}{m} \approx \frac{v^2}{2S}.$$

За час τ куля майже повністю втрачає свою швидкість. Отже

$$\tau \approx \frac{v}{a_{\text{п}}} \approx \frac{2S}{v} = 2\cdot 10^{-4} \text{ с}.$$

Сила тертя F (формула **(5)**) також надає прискорення брусові

---

[43] При $M/m = 500$, як в цій задачі, відносна похибка результату становить всього $0{,}2\%$.

$$a_б = \frac{F}{M} \approx \frac{mv^2}{2SM}.$$

Рухаючись з таким прискоренням брус за час τ проходе шлях

$$S_б = \frac{a_б \tau^2}{2} \approx \frac{2mS}{M} = 4 \cdot 10^{-4} \text{ м} = 0,4 \text{ мм}.$$

Як бачимо, застрявання кулі дійсно має "миттєвий" характер.

Задача 4.32

Шматок глини масою $m = 0,5$ кг падає з певної висоти на горизонтальну плиту масою $M = 1$ кг, яка закріплена на вертикальній пружині жорсткістю $k = 980$ Н/м. Безпосередньо перед ударом об плиту глина мала швидкість $v = 5$ м/с.

Визначити

максимальне стиснення пружини x_m після удару. Вважати удар непружним, тертям в пружині та її масою знехтувати.

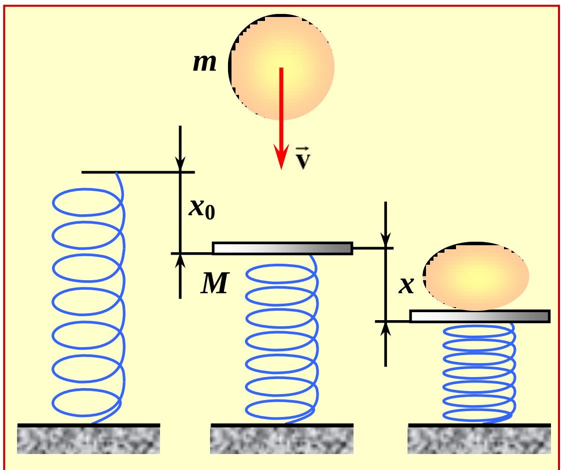


Рис.32

Дано:

$m = 0,5$ кг

$M = 1$ кг

$k = 980$ Н/м

$v = 5$ м/с

Визначити: x_m

Розв'язання

За фізичним змістом ця задача подібна до попередньої, тому будемо розв'язувати її за тією ж схемою. Прилипання глини до плити відбувається за дуже малий проміжок часу, отже впливом зовнішніх сил, що діють на систему "глина-плита-пружина", за цей час можна знехтувати і застосувати до неї закон збереження імпульсу:

$$mv = (m+M)u, \qquad \Rightarrow \qquad u = \frac{mv}{m+M}, \qquad (1)$$

де u – швидкість руху плити разом з глиною безпосередньо після удару.

Після удару в процесі стискання пружини повна механічна енергія системи залишається сталою. Будемо відраховувати потенціальну енергію в полі сил тяжіння від положення плити в момент, коли до неї пристає глина. Тоді початкова механічна енергія системи W_1 складається тільки з кінетичної енергії плити з глиною та потенціальної енергії пружини, що деформована вагою плити на певну величину x_0 (**рис.32**):

$$W_1 = \frac{(m+M)u^2}{2} + \frac{kx_0^2}{2}.$$

Величину x_0 знайдемо з умови рівноваги плити до падіння на неї глини:

$$Mg = kx_0 \qquad \Rightarrow \qquad x_0 = \frac{Mg}{k}. \qquad (2)$$

Врахувавши вирази **(1)** і **(2)**, отримаємо

$$W_1 = \frac{m^2v^2}{2(m+M)} + \frac{(Mg)^2}{2k}. \qquad (3)$$

В кінцевому (найнижчому) положенні механічна енергія системи складається тільки з потенціальної енергії пружини та плити з глиною. При цьому пружина деформована на максимальну величину $x_m = x_0 + x$, а плита з глиною знаходяться на відстані x від вибраного нульового рівня (тут x – найбільша величина додаткової деформації пружини в наслідок падіння глини).

$$W_2 = \frac{k(x+x_0)^2}{2} - (m+M)gx. \qquad (4)$$

Потенціальна енергія плити з глиною в даному випадку від'ємна, оскільки тіла знаходяться нижче від нульового рівня.
Оскільки за законом збереження енергії $W_1 = W_2$, то прирівнявши вирази **(3)** та **(4)** після спрощень отримаємо:

$$kx^2 - 2mgx - \frac{(mv)^2}{m+M} = 0.$$

З цього рівняння дістанемо[44] для додаткового стиснення:

$$x = \frac{mg + \sqrt{(mg)^2 + \frac{k(mv)^2}{m+M}}}{k}.$$

Повне максимальне стискання пружини $x_m = x_0 + x$:

$$x_m = \frac{1}{k}\left((m+M)g + \sqrt{(mg)^2 + \frac{k(mv)^2}{m+M}}\right).$$

Виконаємо обчислення:

$$x_m = \frac{1}{980}\left((1+0,5)\cdot 9,8 + \sqrt{(0,5\cdot 9,8)^2 + \frac{980\cdot(0,5\cdot 5)^2}{1+0,5}}\right) \approx 0,08\ \text{м} = 8\ \text{см}.$$

Задача 4.33

На залізничній платформі закріплено безвідкотна гармата. З гармати проводять постріл вздовж колії під кутом $\alpha = 60°$ до горизонту.

Визначити

відстань S, на яку відкотиться платформа після пострілу, якщо коефіцієнт тертя $\mu = 0,05$, відношення маси снаряду до маси платформи з гарматою $n = 10^{-3}$, швидкість вильоту снаряду $v = 600\ \text{м/с}$.

Дано:
$\alpha = 60°$
$\mu = 0,05$
$n = 10^{-3}$
$v = 600\ \text{м/с}$

Визначити: S

Розв'язання

Під час пострілу повний імпульс системи "платформа-снаряд" не зберігається, проте зберігається його проекція на горизонтальну вісь, напрямлену вздовж копії (див. розв'язок **задачі 3.5**).
Тому:

$$-Mu + mv\cos\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad u = nv\cos\alpha. \qquad (1)$$

де u – початкова швидкість відкочування платформи після пострілу, M та m – маси платформи з гарматою та снаряда.

Внаслідок пострілу платформа отримує кінетичну енергію $W = \frac{Mu^2}{2}$, яку потім витрачає на виконання роботи проти сили опору $F = \mu mg$ на шляху S. Отже:

$$\frac{Mu^2}{2} = \mu mgS \quad \Rightarrow \quad S = \frac{u^2}{2\mu g}.$$

Врахувавши вираз **(1)**, маємо

$$S = \frac{(nv\cos\alpha)^2}{2\mu g} = \frac{(10^{-3}\cdot 600\cdot 0,5)^2}{2\cdot 0,05\cdot 9,8} \approx 9\ \text{см}.$$

Задача 4.34

Невелика шайба зісковзує без початкової швидкості з гладкої гірки висотою $h = 0,9\ \text{м}$ і потрапляє на дошку, що лежить на гладкій горизонтальній поверхні, як показано на **рис.34**. В наслідок тертя між дошкою та шайбою остання гальмується і з певного моменту рухається разом з дошкою, як єдине ціле.

---

[44] Від'ємний корінь не задовольняє умові задачі, оскільки відповідає розтягуванню пружини.

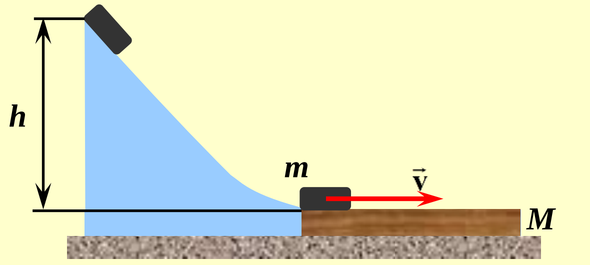


Рис.34

Визначити

відстань S, що пройде шайба відносно дошки на цей момент, якщо коефіцієнт тертя становить $\mu = 0,5$ і відношення мас шайби та дошки $n = 0,2$.

Дано:
$h = 0,9$ м
$\mu = 0,5$
$n = 0,2$

Визначити: S

Розв'язання

За умовою шайба зісковзує без тертя, отже без втрат механічної енергії. Тому:

$$\frac{mv^2}{2} = mgh \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{2gh}, \qquad (1)$$

де v – швидкість шайби в момент виходу на дошку.

Ковзаючи по дошці, шайба під дією сили тертя гальмується, а дошка, навпаки, прискорюється. Внаслідок цього через певний час швидкості шайби й дошки зрівняються, і ковзання шайби по дошці припиниться. Рух шайби й дошки відбувається із збереженням імпульсу системи (зовнішні сили тяжіння та реакції опори скомпенсовані). Це дозволяє визначити кінцеву швидкість дошки з шайбою u:

$$mv = (m+M)u \quad \Rightarrow \quad u = \frac{mv}{m+M} \quad \Rightarrow \quad u = \frac{nv}{1+n}. \qquad (2)$$

Ковзання шайби по дошці супроводжується зміною кінетичної енергії системи, рівною сумарній роботі сил тертя:

$$\frac{(m+M)u^2}{2} - \frac{mv^2}{2} = A_т. \qquad (3)$$

Згідно з результатом **задачі 4.2**, (формула **(2)**), ця сумарна робота дорівнює добутку сили тертя, що діє на шайбу, на її переміщення відносно дошки: $A_т = -\mu mg$. Після підстановки цього виразу й виразу **(2)** в рівняння **(3)** та елементарних перетворень отримаємо:

$$S = \frac{v^2}{2(1+n)\mu g},$$

або, з урахуванням виразу **(1)**,

$$S = \frac{h}{(1+n)\mu} = \frac{0,9}{(1+0,2)\cdot 0,5} = 1,5 \text{ м}.$$

Задача 4.35

Протон з кінетичною енергією $W_0 = 1,7\cdot 10^{-17}$ Дж, стикається з вільним нерухомим атомом гелію й відлітає в зворотному напрямку, втративши $k = 3/4$ енергії, а атом переходить у збуджений стане.

Визначити

енергію збудження атома $W_з$. Маса атома гелію в $n = 4$ рази більше за масу протона.

Дано:
$W_0 = 1,7\cdot 10^{-17}$ Дж
$k = \frac{3}{4}W_0$
$n = 4$

Визначити: $W_з$

Розв'язання

Зіткнення протона з атомом підпорядковане законам збереження енергії та імпульсу. Внаслідок удару протона атом не лише переходить у збуджений стан, а й починає

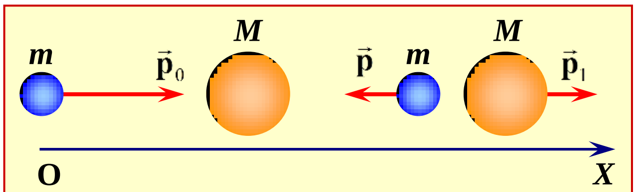


Рис.35

рухатись, тобто отримує певний імпульс і кінетичну енергію. Згідно з законом збереження енергії

$W_0 = W + W_а + W_з \qquad \Rightarrow \qquad W_з = W_0 - W - W_а,$

де W_0, W – кінетична енергія протона до та після зіткнення, $W_а$, $W_з$ – кінетична енергія та енергія збудження атома. Згідно з умовою задачі

$W_0 - W = kW_0 \qquad \Rightarrow \qquad W = W_0(1-k).$

Тепер

$W_з = kW_0 - W_а.$ (1)

Для визначення кінетичної енергії атома $W_а$ використаємо закон збереження імпульсу $\vec{\mathbf{p}}_0 = \vec{\mathbf{p}} + \vec{\mathbf{p}}_а$. У проекціях на вісь OX (**рис.35**)

$p_0 = -p + p_а,$

де p_0, p – модулі імпульсу протона до та після зіткнення, $p_а$ – імпульс атома після зіткнення. Імпульс частинки і її кінетична енергія зв'язані співвідношенням $p = \sqrt{2mW}$ (формула **(4.36)**), отже

$\sqrt{2mW_0} = \sqrt{2mW_а} - \sqrt{2mW} = \sqrt{2mW_а} - \sqrt{2mW_0(1-k)}.$

Врахувавши, що $M = nm$, після перетворень та підстановки значень k і n, знаходимо:

$W_а = \dfrac{9}{16}W_0.$

Підставимо цей вираз у рівняння **(1)** і отримаємо відповідь:

$$W_з = \frac{3}{4}W_0 - \frac{9}{16}W_0 = \frac{3}{16}W_0 = \frac{3\cdot 1,7\cdot 10^{-17}}{16} = 3,2\cdot 10^{-18}\ \text{Дж}.$$

Задачі для самостійної роботи

Рівень Б

4.86 На нерухому кулю налітає куля масою $m = 0,25$ кг, і після удару зупиняється. Чому дорівнює середня сила взаємодії куль, якщо час контакту між кулями $t = 0,015$ с, а швидкість кулі перед ударом $v = 6$ м/с. [100 Н]

4.87 Довести, що при абсолютно непружному ударі відбувається найбільше зростання внутрішньої енергії тіл.

4.88 Куля масою m, яка летить горизонтально зі швидкістю v, застрягла у дерев'яному бруску масою M, що висить на нитці довжиною l. На який максимальний кут від вертикалі відхилиться нитка після удару? [$\cos\varphi = 1 - (mv)^2 \Big/ \left((m+M)^2\, 2gl\right)$

4.89 Ковзаняр масою $M = 60$ кг, який стоїть на гладкому льоду, кидає горизонтально камінь маси $m = 5$ кг із швидкістю $v_0 = 12$ м/с відносно льоду. Яку роботу виконав ковзаняр кидаючи камінь? [390 Дж]

4.90 Ковзаняр масою $M = 60$ кг кидає у горизонтальному напрямі камінь масою $m = 3$ кг з висоти $h = 1,8$ м. Камінь падає на лід на відстані $S = 9$ м від точки кидання. Визначити відстань, на яку відкотиться ковзаняр після кидання, якщо коефіцієнт тертя ковзання $\mu = 0,02$? [1,4 м]

4.91 На шляху тіла, яке ковзає горизонтально по поверхні, знаходиться незакріплена гірка висотою $h = 2$ м (**рис.4.91**). При якій мінімальній швидкості тіло зможе подолати гірку, якщо тіло важить у 5 разів менше гірки? Тертя відсутнє. [$\approx 6,9$ м/с]

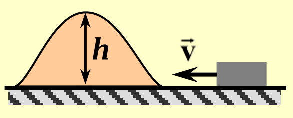


Рис.4.91

4.92 Куля масою $m = 10$ г, яка летіла горизонтально зі швидкістю $v_0 = 500$ м/с, ударяє у вільно підвішений дерев'яний брусок масою $M = 20$ кг і застрягла в ньому, заглибившись на $S = 20$ см. Визначити середню силу опору при русі кулі у бруску.

[$6,25$ кН]

4.93 Тіло масою M налітає на дві пружини, які з'єднано послідовно (**рис.4.93**). Жорсткості пружин k_1 і k_2. Максимальна енергія деформації пружини 2 становить W. Визначити початкову швидкість тіла. [$\sqrt{2W(k_1+k_2)/k_1M}$]

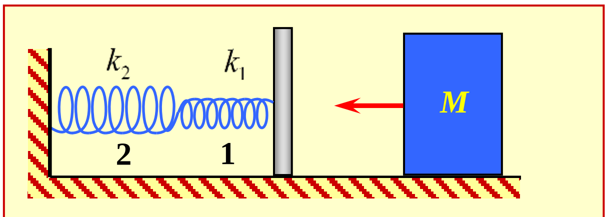


Рис.4.93

4.94 М'яч летить зі швидкістю $v_0 = 10$ м/с і ударяє в ногу футболіста. Якою повинна бути швидкість руху ноги футболіста, щоб м'яч після удару зупинився? Вважати удар абсолютно пружним, а масу м'яча значно меншою маси ноги. [5 м/с у напрямку руху м'яча до удару]

4.95 На шайбу масою $M = 100$ г, яка лежить на льоду налітає друга шайба масою $m = 50$ г. Після пружного удару шайба m змінює напрямок руху на протилежний. У скільки разів змінилася енергія цієї шайби? [зменшилася у 3 рази]

4.96 Куля, яка рухається, налітає на таку саму нерухому кулю. Під яким кутом одна до одної рухатимуться кулі після абсолютно пружного нецентрального удару? [$90°$]

4.97 Частинка 1 пружно стикається з нерухомою частинкою 2. Обидві частинки після удару рухаються симетрично відносно напрямку початкового руху частинки 1. Визначити відношення мас частинок, якщо кут, між векторами швидкостей часток після удару становить φ. [$1+2\cos\varphi$]

4.98 Бруску масою $m = 1$ кг , який лежить на довгій горизонтальній дошці масою $M = 2$ кг, поштовхом надають швидкість $v_0 = 2$ м/с. Який шлях пройде дошка на момент припинення ковзання бруска по ній? Коефіцієнт тертя між дошкою і бруском $\mu = 0,2$. Тертя між дошкою і площиною неістотне. [$mMv_0^2 / 2\mu g (m+M)^2 \approx 23$ см]

Рівень В

4.99 Кулька масою m_1, яка рухається зі швидкістю v, налітає на нерухому кульку масою m_2. Які швидкості матимуть кульки після центрального абсолютно пружного удару? [$v_1 = (m_1 - m_2)v/(m_1+m_2)$; $v_2 = 2m_1 v/(m_1+m_2)$]

4.100 Дерев'яна дошка маси M розташована горизонтально. Знизу в її середину ударяє та пробиває її куля масою m, що летить вертикально з швидкістю v. Після удару центр дошки підстрибує на висоту h. На яку висоту підніметься куля після удару? [$\left(mv - M\sqrt{2gh}\right)^2 / \left(2m^2 g\right)$]

4.101 Шайба масою m_1, що рухається зі швидкістю v, налітає на другу шайбу, яка перебуває у стані спокою. Після удару перша шайба рухається зі швидкістю $v/2$ перпендикулярно початковому напрямленню. Визначити масу другої шайби. [$5m_1/3$]

4.102 Частинка масою m, яка рухається зі швидкістю v, налітає на нерухому частинку масою $m/2$ і після пружного удару відбивається від неї під кутом $\alpha = 30°$ до початкового напрямку руху. Визначити швидкість другої частки після удару. [$1{,}17v$ під кутом $30°$ до вектора $\vec{\mathbf{v}}$]

4.103 Куля масою M знаходиться у стані спокою. Яку найбільшу енергію при центральному абсолютно пружному ударі може передати цій кулі інша куля такого ж самого радіуса, яка має масу m і рухається зі швидкістю v_0? [$\left(mv_0^2/2\right)\left(4mM/(m+M)^2\right)$]

4.104 Частинка масою m_1, яка рухається зі швидкістю $\vec{\mathbf{v}}$, пружно ударяє частинку масою

m_2, яка знаходилась у стані спокою. Після удару частинка m_2 відлітає під кутом φ до напрямку вектора $\vec{\mathbf{v}}$. Визначити швидкість частинки m_2 після удару. [$2m_1 v\cos\varphi/(m_1+m_2)$]

4.105 Дві маленькі пружні кульки підвішені на тонких нитках різної довжини так, що дотикаються одна одної. Довжина ниток $l_1 = 10$ см, $l_2 = 6$ см. Маси кульок $m_1 = 8$ г, $m_2 = 20$ г. Кульку m_1 відводять на кут $\varphi = 60°$ і відпускають. На які максимальні кути відхиляться нитки від вертикалі після пружного удару між кульками? [$\cos\alpha = 1/2 + (2m_1 m_2)/(m_1+m_2)^2$; $\cos\beta = 1 - 2m_1^2 l_1\Big/\left(l_2 (m_1+m_2)^2\right)$]

4.106 Три кулі однакового радіусу, але різних мас, підвішені на нитках однакової довжини і торкаються між собою. Центри кульок знаходяться на одній лінії. Кулю $m_1 = 36$ г відводять від положення рівноваги так, що вона підіймається на висоту $H = 18$ см, і відпускають. При яких масах m_2 і m_3 всі три кулі після пружного зіткнення першої кулі з другою та другої з третьою будуть мати однакові імпульси? На яку висоту підніметься кожна з куль після зіткнення? [$m_2 = m_1/2 = 18$ г ; $m_3 = m_1/6 = 6$ г ; $h_1 = H/9 = 2$ см ; $h_2 = 4H/9 = 8$ см]

4.107 Атом масою M у збудженому стані має енергію на ΔE більшу ніж в основному стані. При якій початковій енергії частинка масою m може перевести у збуджений стан атом, який знаходиться у стані спокою? [$\Delta E(1 + m/M)$]

4.108 Тіло маси $m = 1$ кг лежить на довгій платформі масою $M = 100$ кг, яка може рухатись горизонтально без тертя. У початковому стані платформа і тіло знаходиться у спокої. Тілу надають швидкість $v_0 = 10$ м/с. Визначити шлях платформи до того моменту, коли тіло зупиниться на ній, якщо коефіцієнт тертя між тілом і платформою $\mu = 0,2$. Яка кількість теплоти виділиться під час руху тіла по платформі? [$0,25$ м ; 50 Дж]

Тема: Робота та зміна механічного стану системи

Рекомендації до теми
"Визначення роботи та зміни механічного стану системи"

В багатьох задачах робота неконсервативних сил задана, або може бути визначена за умовою. Тоді, склавши рівняння енергетичного балансу у відповідності до **рекомендацій до розділу**, можна з нього визначити положення й швидкості тіл та інші відомості про механічний стан системи.

Тема: Робота та зміна механічного стану системи. Приклади

Задача 4.14

Завантажений самоскид рухається по прямій горизонтальній дорозі зі швидкістю $\upsilon_0 = 36\ \text{км/год}$.

Визначити:

А) відстань S від місця розвантаження, на якій водій має вимкнути двигун, щоб зупинитися там без використання гальм;

Б) час Δt руху самоскида до зупинки.

Коефіцієнт опору на всьому шляху[45] $\mu = 0,05$.

Дано:

$\upsilon_0 = 36\ \text{км/год} = 10\ \text{м/с}$

$\mu = 0,05$

Визначити: S, Δt

Розв'язання

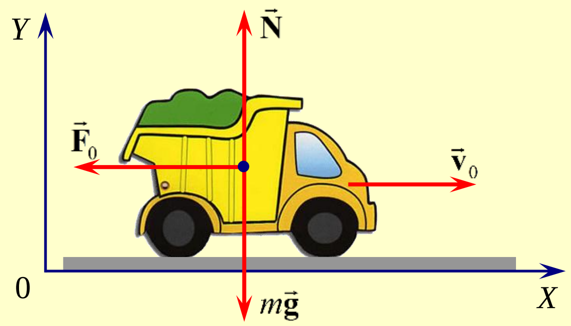


Рис.14

Перед вимиканням двигуна самоскид мав кінетичну енергію $W_1 = \dfrac{m\upsilon_0^2}{2}$ та імпульс $\vec{\mathbf{p}}_1 = m\vec{\mathbf{v}}_0$. На момент зупинки кінетична енергія та імпульс дорівнюють нулю: $W_2 = 0$, $\vec{\mathbf{p}}_2 = 0$. Зміна механічної енергії самоскида

$$\Delta W = W_2 - W_1 = -\frac{m\upsilon_0^2}{2}.$$

Потенціальна енергія самоскида не змінюється, оскільки самоскид рухається по горизонтальній дорозі. Зміна його імпульсу $\Delta\vec{\mathbf{p}} = \vec{\mathbf{p}}_2 - \vec{\mathbf{p}}_1 = -m\vec{\mathbf{v}}_0$ зумовлені дією тільки сили опору, оскільки інші сили, що діють на самоскид (тяжіння $m\vec{\mathbf{g}}$ та нормальна реакція опори $\vec{\mathbf{N}}$) скомпенсовані ($N = mg$).

А) Сила опору, що діє на самоскид $F_o = \mu N$, де μ – коефіцієнт опору. Зміна кінетичної енергії самоскида дорівнює роботі сили опору $A_o = -F_o S = -\mu mg$, де S – шлях самоскида до зупинки (знак ″–″ стоїть тому, що сила опору напрямлене протилежно переміщенню). Таким чином,

$$-\frac{m\upsilon_0^2}{2} = -\mu mgS \qquad \Rightarrow \qquad S = \frac{\upsilon_0^2}{2\mu g} = \frac{10^2}{2\cdot 0,05\cdot 9,8} \approx 100\ \text{м}.$$

Б) Імпульс сили опору дорівнює зміні імпульсу самоскида: $\vec{\mathbf{F}}\Delta t = -m\vec{\mathbf{v}}_0$, або для модулів $F\Delta t = m\upsilon_0$. Звідки час руху до зупинки

$$\Delta t = \frac{m\upsilon_0}{\mu mg} = \frac{\upsilon_0}{\mu g} = \frac{10}{0,05\cdot 9,8} \approx 20\ \text{с}.$$

Задача 4.15

[45] **Коефіцієнтом опору** називається відношення сумарної сили опору рухові до ваги самоскида.

Куля, що летить горизонтально, зустрічає на своєму шляху низку розміщених одна за одною однакових закріплених вертикально дощок.

Визначити,

В якій за ліком дошці застряне куля, якщо при пробиванні першої вона втрачає $\eta = 10\%$ швидкості? Залежність сили опору в дошках від швидкості та вертикального зміщення кулі не враховувати.

Дано:

$\eta = 0,1$

Визначити: N

Розв'язання

За умовою дошки мають однакову товщину, і в кожній на кулю діє однакова сила опору. Тому при пробиванні будь-якої дошки куля втрачає таку ж енергію ΔW, як і при пробивання першої дошки:

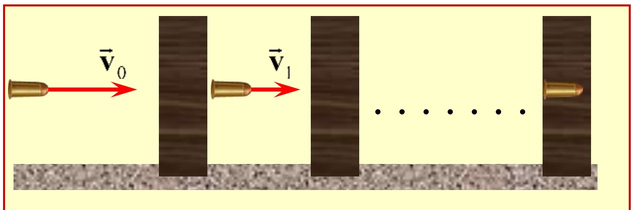


Рис.15

$$\Delta W = \frac{mv_0^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2},$$

де m – маса кулі, v_0, v_1 – швидкість кулі на вльоті та на вильоті з першої дошки. Згідно з умовою $v_1 = (1-\eta)v_0$, тому

$$\Delta W = \frac{mv_0^2}{2}\left(1-(1-\eta)^2\right) \qquad \Rightarrow \qquad \Delta W = W_0\eta(2-\eta),$$

де W_0 – початкова кінетична енергія кулі. Кількість пробитих дощок:

$$N = \frac{W_0}{\Delta W} = \frac{1}{\eta(2-\eta)} = \frac{1}{0,1\cdot(2-0,1)} = 5,26.$$

Номер дошки, в якій куля застряне:

$N = 6.$

Задача 4.16

Кулька для пінг-понгу маси $m = 20$ г вільно падає на підлогу з висоти $H = 2$ м і пружно (без втрати швидкості) відскакує на висоту $h = 1,6$ м.

Визначити

силу опору повітря F, що діє на кульку, вважаючи її сталою.

Розв'язання.

Дано:

$m = 20\text{ г} = 2\cdot10^{-2}$ кг

$H = 2$ м

$h = 1,6$ м

Визначити: F

Внаслідок дії сили опору повітря механічна енергія кульки змінюється на величину роботі цієї сили. У початковому та кінцевому положеннях кулька знаходилась у спокої і її енергія – це потенціальна енергія.

Будемо відраховувати потенціальну енергію кульки від підлоги, тоді

$$A = mgh - mgH = mg(h-H).$$

Від початкового до кінцевого положення кулька проходить шлях $S = H + h$, на якому сила опру виконує роботу $A = -F(H+h)$. Таким чином,

$$mg(H-h) = F(H+h) \qquad \Rightarrow \qquad F = \frac{H-h}{H+h}mg.$$

Виконаємо обчислення:

$$F = \frac{2-1,6}{2+1,6}\cdot 2\cdot10^{-2}\cdot 9,8 \approx 2,2\cdot10^{-2}\text{ Н}.$$

Задача 4.17

Кульку для пінг-понгу радіусу $R = 1{,}5\,\text{см}$ та маси $m = 10\,\text{г}$ занурили у воду на глибину $H = 1\,\text{м}$ і відпустили.

Визначити

висоту h, на яку вискочить кулька з води. Силами опору та поверхневого натягу знехтувати. Густина води $\rho = 1\,\text{г}/\text{см}^3$.

Розв'язання.

Дано:
$R = 1{,}5\,\text{см}$
$m = 10\,\text{г}$
$H = 1\,\text{м} = 100\,\text{см}$
$\rho = 1\,\text{г}/\text{см}^3$

Визначити: h

Крім сили тяжіння $m\vec{g}$ на кульку у воді діє архімедова сила $\vec{F}$ (**рис.17**), яку будемо розглядати як неконсервативну. Зміна механічної енергії кульки дорівнює роботі цієї сили. Від початкового до кінцевого положення кулька підіймається на висоту $H + h$, а сила Архімеда F діє виключно на шляху *H*, отже

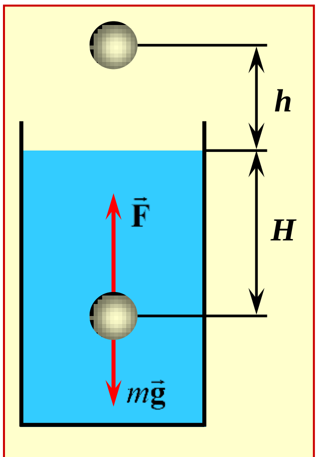


Рис.17

$$mg(H + h) = FH. \qquad (1)$$

Архімедова сила (формула **(6.8)**)

$$F = \rho V g = \rho \frac{4}{3}\pi R^3 g.$$

Підставивши цей вираз у рівняння **(1)**, дістанемо:

$$m(H + h) = \frac{4\pi R^3 \rho H}{3} \qquad \Rightarrow \qquad h = H\left(\frac{4\pi R^3 \rho}{3m} - 1\right).$$

Виконаємо обчислення:

$$h = 100 \cdot \left(\frac{4 \cdot 3{,}14 \cdot 1{,}5^3 \cdot 1\rho}{3 \cdot 10} - 1\right) \approx 41\,\text{см}.$$

Зверніть увагу на те, що при обчисленні ми використали грами та сантиметри. В даному випадку так зробити зручніше.

Задача 4.18

По рейках, які утворюють горизонтальне коло радіусом R, котиться зі сталою швидкістю v іграшковий вагончик з електродвигуном.

Визначити

кількість обертів по колу N, які зробить вагончик до зупинки після відключення батарейки, що живить двигун. Коефіцієнт опору дорівнює μ.

Дано:
R
v
μ

Визначити: N

Розв'язання

До початку гальмування вагончик мав кінетичну енергію $W_1 = \dfrac{mv^2}{2}$.

На далі ця енергія зменшилася до нуля ($W_2 = 0$) за рахунок роботи сили опору A. Оскільки при русі вагончика горизонтальною поверхнею його потенціальна енергія не змінюється

$$\Delta W = -\frac{mv^2}{2} = -F \cdot S \qquad \Rightarrow \qquad \frac{mv^2}{2} = FS,$$

де F – сила опору, S – пройдений вагончиком шлях, який пов'язаний з кількістю обертів очевидним співвідношенням $S = 2\pi R N$. Таким чином,

$$N = \frac{mv^2}{4\pi R F}.$$

Сила опору $F = \mu N = \mu m g$, отже

$$N = \frac{v^2}{4\pi \mu R g}.$$

Перевіряємо розмірність результату:

$$[N]=\frac{(\text{м}/\text{с})^2}{\text{м}\cdot\left(\text{м}/\text{с}^2\right)}=1,$$

тобто N – безрозмірна величина.

Задача 4.19

Санки довжиною $l=1\,\text{м}$, що їдуть горизонтальною засніженою дорогою зі швидкістю $v=5\,\text{м}/\text{с}$, потраплять на вільну від снігу ділянку асфальту і зупиняються. При цьому передній край санок виявився на відстань $S=2{,}5\,\text{м}$ від межі асфальту.

Визначити

коефіцієнт тертя μ санок об асфальт. Тертям при русі по снігу знехтувати.

Розв'язання.

Дано: $l=1\,\text{м}$, $v=5\,\text{м}/\text{с}$, $S=2{,}5\,\text{м}$
Визначити: μ

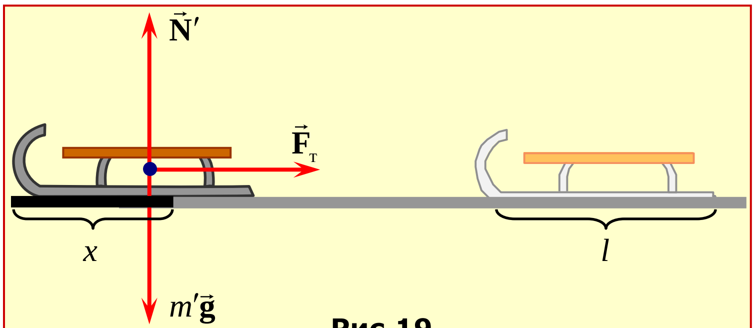


Рис.19

Крім сили тертя на санки діють сила тяжіння та сила нормальної реакції дороги Однак останні дві сили роботи не виконують, тому зміна кінетичної енергії санок при гальмуванні на асфальті зумовлена тільки роботою сили тертя:

$$\Delta W_\text{к}=A_\text{т}\quad\Rightarrow\quad -\frac{mv^2}{2}=A_\text{т}\quad\Rightarrow\quad \frac{mv^2}{2}=|A_\text{т}|,\qquad(1)$$

де m – маса санок.

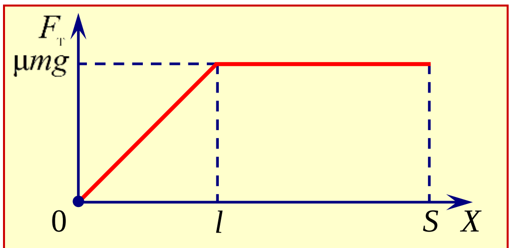


Рис.19-1

У процесі гальмування, доки санки не повністю виїхали на асфальт, сила тертя є змінною, оскільки з асфальтом взаємодіє лише частина санок. Ця сила тертя визначається за формулою: $F_\text{т}=\mu N=\mu m'g$, де μ – шуканий коефіцієнт тертя, а m' – маса тієї частини санок, що вже виїхала на асфальт (**рис.19**). Очевидно, що $m'=(m/l)x$, де l – довжина санок, а x – довжина тієї частини, що вже знаходиться на асфальті. Отже $F_\text{т}(x)=\dfrac{\mu mgx}{l}$ (для $x\le l$). Після того, як санки повністю виїдуть на асфальт ($x\ge l$), сила тертя становиться рівною μmg і далі лишається сталою. Отже графік сили тертя буде таким, як показано на **рис. 19-1**. Площа під ним чисельно дорівнює модулю роботи сили тертя:

$$|A_\text{т}|=\frac{1}{2}(S+S-l)\mu mg=\frac{\mu mg(2S-l)}{2}.$$

Підставивши цей вираз у формулу **(1)**, дістанемо

$$\mu=\frac{v^2}{g(2S-l)}=\frac{5^2}{9{,}8\cdot(2\cdot 2{,}5-1)}0{,}64.$$

Задача 4.20

Медичний шприц площею перерізу $S=2\,\text{см}^2$ і довжиною $l=5\,\text{см}$ повністю заповнений водою. Площа отвору у шприці $S_0=0{,}5\,\text{мм}^2$.

Визначити

час τ, за який буде витиснена вся вода, якщо до поршня шприца прикладена постійна сила $F=1{,}6\,\text{Н}$. Густина води $\rho=1\,\text{г}/\text{см}^3$.

Розв'язання.

Дано:

$S = 2\text{ см}^2 = 2 \cdot 10^{-4}\text{ м}^2$
$l = 5\text{ см} = 5 \cdot 10^{-2}\text{ м}$
$S_0 = 0{,}5\text{ мм}^2 = 5 \cdot 10^{-7}\text{ м}^2$
$F = 1{,}6\text{ Н}$
$\rho = 1\text{ г/см}^3 = 1000\text{ кг/м}^3$

Визначити: τ

Початковий об`єм води у шприці $V = lS$. Якщо позначити об'єм води, що витікає за одиницю часу V_1, то шуканий час

$$\tau = \frac{V}{V_1} = \frac{lS}{V_1}. \quad (1)$$

Для визначення V_1 виділимо невеликий об`єм води $\Delta V$ з площею перерізу $S_0$ і довжиною $\Delta x$: $\Delta V = S_0 \Delta x$ (**рис.20**). Якщо швидкість витікання води крізь отвір позначити $u$, то вся вода з об`єму ΔV пройде крізь отвір за час $\Delta t = \Delta x / u$. За одиницю часу буде витікати об`єм води

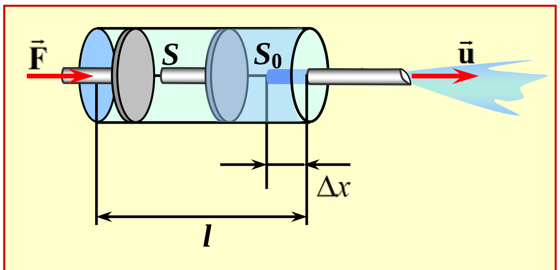


Рис.20

$$V_1 = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{S_0 \Delta x}{(\Delta x / u)} \quad \Rightarrow \quad V_1 = S_0 u.$$

Підставивши цей вираз V_1 у формулу **(1)**, отримаємо

$$\tau = \frac{lS}{S_0 u}. \quad (2)$$

Лишається визначити швидкість витікання води. Це легко зробити за допомогою енергетичних міркувань. Кожна частинка води набуває швидкості u і відповідну кінетичну енергію завдяки роботі сили F тому

$$Fl = \frac{mu^2}{2},$$

де m – повна початкова маса води в шприці. Оскільки $m = \rho l S$, то
Підставляємо цей результат у вираз **(2)**, і отримуємо відповідь:

$$\tau = \frac{lS}{S_0}\sqrt{\frac{\rho S}{2F}}.$$

Перевіряємо розмірність результату:

$$[\tau] = \left[\frac{\text{м}^2 \cdot \text{м}}{\text{м}^2} \cdot \sqrt{\frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \cdot \frac{\text{м}^2}{\text{Н}}}\right] = \left[\text{м} \cdot \sqrt{\frac{\text{кг}}{\text{Н} \cdot \text{м}}}\right] = \left[\text{м} \cdot \sqrt{\frac{\text{кг}}{(\text{кг} \cdot \text{м/с}^2) \cdot \text{м}}}\right] = \left[\text{м} \cdot \sqrt{\frac{\text{с}^2}{\text{м}^2}}\right] = [\text{с}].$$

Обчислюємо результат:

$$\tau = \frac{2 \cdot 10^{-4} \cdot 5 \cdot 10^{-2}}{5 \cdot 10^{-7}} \cdot \sqrt{\frac{10^3 \cdot 5 \cdot 10^{-2}}{2 \cdot 1{,}6}} = 5\text{ с}.$$

Тема: Робота та зміна механічного стану системи
Задачі для самостійної роботи

Рівень А

4.27 Тіло маси $m = 2\text{ кг}$, яке штовхнули з початковою швидкістю $\upsilon = 5\text{ м/с}$ вгору по похилій площині, зупинилося, досягнувши висоти $h = 0{,}5\text{ м}$. Визначити кількість теплоти, що виділилося при русі тіла. [15 Дж]

4.28 При розтягуванні пружини на $\Delta l_1 = 4\text{ мм}$ виконана робота $A = 0{,}02\text{ Дж}$. Яку роботу необхідно виконати для стискання пружини на $\Delta l_2 = 4\text{ см}$? [2 Дж]

4.29 Хлопчик стиснув пружину на $l_1 = 1\text{ см}$, виконавши роботу $A = 2\text{ Дж}$. Яку роботу повинен виконати хлопчик, щоб додатково стиснути пружину ще на $l_2 = 2\text{ см}$? [16 Дж]

4.30 Куля, яка летить з деякою швидкістю, проникає у стінку на глибину $l = 10\text{ см}$. На яку глибину проникне у ту ж саму стінку куля, яка матиме удвічі більшу швидкість, якщо сила опору не залежить від швидкості? [$40\ см$]

4.31 З глибини $h = 500\ м$ качають нафту насосом потужністю $P = 10\ кВт$, коефіцієнт корисної дії якого $\eta = 80\%$. Яку масу нафти підніме насос за $\tau = 5$ годин роботи? [$29\ т$]

4.32 Куля маси $m = 10\ г$, яку випущено з гвинтівки вертикально вгору зі швидкістю $v_1 = 1000\ м/с$, впала на землю зі швидкістю $v_2 = 50\ м/с$. Визначити роботу сили опору повітря за час польоту кулі. [$\approx -5\ кДж$]

4.33 Кулька масою $m = 20\ г$ падає з висоти $h_1 = 1\ м$ на плиту і після відбивання підстрибує на висоту $h_2 = 80\ см$. Яка кількість теплоти, виділяється при ударі? Опором повітря знехтувати. [$40\ мДж$]

4.34 Пластилінова кулька масою $m_1 = 10\ г$, що летіла зі швидкістю $v = 10\ м/с$, вдаряється та прилипає до сталевої плити. Яка кількість тепла виділилось при ударі? [$0,5\ Дж$]

Рівень Б

4.35 За час $\tau = 10\ мс$ стала сила $F = 20\ Н$ надає нерухомому тілу кінетичну енергію $W = 3\ Дж$. На скільки зміниться кінетична енергія тіла, під дією тієї ж самої сили $\vec{\mathbf{F}}$ та за той же час τ, якщо початкова швидкість тіла $v_0 = 10\ м/с$? [$5\ Дж$]

4.36 До тіла масою $m = 4\ кг$ прикладена вертикальна сила $F = 49\ Н$. Яку кінетичну енергію матиме тіло на висоті $h = 10\ м$ над землею? У початковий момент на поверхні землі тіло знаходилось у стані спокою. [$98\ Дж$]

4.37 Куля масою $m = 10\ г$, яка має швидкість $v_0 = 600\ м/с$, пробиває дошку товщиною $d = 4\ см$. Після вильоту з дошки куля має швидкість $v = 400\ м/с$. Визначити середню силу опору, яка діяла на кулю у дошці. [$25\ кН$]

4.38 По гладкому столу зі швидкістю u рухається чорна дошка. Якої довжини слід залишить на дошці шматочок крейди, який кинули горизонтальна зі швидкістю v, якщо коефіцієнт тертя μ. [$\left(v^2 + u^2\right)/\left(2\mu g\right)$]

4.39 При повільному підйомі тіла по похилій площині з кутом нахилу φ виконується робота A. Яка частина виконаної роботи пішла на зростання внутрішньої енергії тіла і площини, якщо коефіцієнт тертя тіла по площині становить μ ? [$\mu/\left(\mathrm{tg}\varphi + \mu\right)$]

4.40 Чому дорівнює ККД похилої площини довжиною $l = 1\ м$ і висотою $h = 0,6\ м$, якщо коефіцієнт тертя при русі тіла $\mu = 0,1$. [$0,88$]

4.41 По похилій площині повільно підіймають на висоту h тіло масою m, прикладаючи силу паралельно площині. При цьому виконують роботу A. Яку швидкість набуде тіло, якщо воно вільно зісковзне у вихідну точку? [$\sqrt{4gh - 2A/m}$]

4.42 Сані, які разом з людиною мають масу $m = 100\ кг$, з'їжджають з гори висотою $h = 8\ м$ і довжиною $l = 100\ м$. Визначити середню силу опору руху саней, якщо у кінці спуску їхня швидкість $v = 10\ м/с$. [$30\ Н$]

4.43 З плоскої гори висотою $h = 2\ м$ і довжиною основи $l = 5\ м$ з'їхали сані, які зупинилися, пройшовши відстань $S = 35\ м$ по горизонталі. Визначити коефіцієнт тертя при русі саней, якщо вважати його однаковим на всьому шляху. [$0,05$]

4.44 Невеличке тіло масою $m = 10\ г$ зісковзує з гірки висотою $h = 1,2\ м$, яка плавно переходить у «мертву петлю» радіусом $R = 0,4\ м$. Визначити роботу сили тертя на шляху від вершини гірки до найвищої точки петлі, якщо в ній сила тиску тіла на поверхню дорівнює нулю. [$20\ мДж$]

4.45 Система складається з двох послідовно з'єднаних пружин з жорсткостями k_1 і k_2.

Яку мінімальну роботу необхідно виконати для того, щоб розтягнути систему на x? [$\left(k_1k_2x^2\right)/2\left(k_1+k_2\right)$]

4.46 Ящик у формі куба переміщують на деяку відстань один раз тягнучи по горизонтальній поверхні, інший раз – кантуванням, тобто перекиданням через ребро. При якому значенні коефіцієнта тертя робота в обох випадках буде однаковою? [$\sim 0,21$]

4.47 Яку найменшу роботу необхідно виконати, щоб поставити вертикально стовп масою m і довжиною l, який лежить на землі? [$mgl/2$]

4.48 Два однакових баки об'ємом V і висотою H кожний стоять один на одному. З нижнього повного бака воду перекачують у порожній верхній. Яку потужність повинен мати двигун насоса, щоб перекачати всю воду за час t, якщо його ККД η? [$\rho gVH/\eta t$, де ρ – густина води]

4.49 Яку мінімальну швидкість необхідно надати тілу на поверхні Землі, щоб воно могло покинути Сонячну систему? [$\sqrt{2gR}$]

4.50 Яку роботу необхідно виконати, щоб вивести штучний супутник масою $m = 500$ кг на колову орбіту, яка проходить безпосередньо біля поверхні Землі? Опором повітря знехтувати. [$1,6\cdot 10^{10}$ Дж]

4.51 Підйомний кран за $t = 7$ год роботи підіймає $m = 3000$ т будівельних матеріалів на висоту $h = 10$ м. Яку потужність має двигун крана, якщо його ККД дорівнює $\eta = 0,6$? [20 кВт]

4.52 Тіло масою $m = 1$ кг кинули вертикально вгору з початковою швидкістю $v_0 = 1$ м/с. Визначити потужність сили тяжіння на момент, коли кінетична енергія тіла зменшилася у $k = 2$ рази. [± 7 Вт]

4.53 Потужність гідростанції $P = 73,5$ МВт. Визначити об'ємні витрати води, якщо ККД станції $\eta = 75\%$, а гребля підіймає воду на висоту $h = 10$ м. [1000 м^3/с]

4.54 Транспортер підіймає $m = 200$ кг піску на автомашину за $\tau = 1$ с. Довжина стрічки транспортера $l = 3$ м, кут нахилу до горизонту $\alpha = 30°$. Визначити потужність двигуна транспортера, якщо його ККД $\eta = 85\%$. [3,46 кВт]

4.55 Брусок масою $m = 1$ кг знаходиться на горизонтальній поверхні з коефіцієнтом тертя $\mu = 0,27$. Йому надають початкову швидкість $v_0 = 1,5$ м/с. Визначити середню потужність сили тертя $\langle P \rangle$ за весь час руху бруска. [≈ 2 Вт]

4.56 Автомобіль масою $m = 1000$ кг рушає з місця зі сталим прискоренням. За перші $t_1 = 2$ с він проходить шлях $S = 20$ м. Визначити: А) потужність двигуна автомобіля у кінці другої секунди; Б) середню потужність двигуна на шляху S. ККД двигуна вважати $\eta = 50\%$. [400 кВт ; 200 кВт]

4.57 Два важки масами m_1 і m_2 ($m_1 > m_2$) прив'язані до нитки, яка перекинута через блок. У вихідному стані важок m_1 утримують на висоті h над підлогою. Потім важки відпускають без поштовху. Яка кількість теплоти виділиться при непружному ударі важка об підлогу? [$m_1gh\left(m_1-m_2\right)/\left(m_1+m_2\right)$]

4.58 На горизонтальному столі висотою $h = 1$ м лежить тіло масою $m = 1$ кг. Йому поштовхом надають початкову швидкість $v_0 = 2$ м/с. Пройшовши по поверхні стола відстань $l = 2$ м, тіло падає на підлогу. Коефіцієнт тертя між тілом та поверхнею стола $\mu = 0,1$. Яка кількість теплоти виділиться при непружному ударі об підлогу? [9,8 Дж]

4.59 Коробка для сірників масою $m = 50$ г лежить на відстані $S = 30$ см від краю стола. Куля масою $m = 1$ г, яка летить горизонтально з швидкістю $v_1 = 150$ м/с, пробиває коробку і вилітає з неї зі швидкістю $v = 75\,\text{м/с}$. При якому максимальному коефіцієнті тертя коробка втримається на столі? [$0,38$]

4.60 Після кожного удару копра паля заглиблюється у землю на $l = 1\,\text{см}$. Маса копра $m = 500\,\text{кг}$, його швидкість перед ударом $v = 10\,\text{м/с}$. Визначити силу опору F руху палі у ґрунті, вважаючи її сталою. Масою палі можна знехтувати. [$2,5\,\text{МН}$]

4.61 Палю масою $M = 1000\,\text{кг}$ забивають за допомогою копра, маса якого $m = 400\,\text{кг}$. Копер вільно падає з висоти $H = 5\,\text{м}$, і при кожному ударі паля заглиблюється на $h = 5\,\text{см}$. Визначити силу опору ґрунту при забиванні палі, якщо її вважати сталою. [$125,7\,\text{кН}$]

Рівень В

4.62 Камінь масою $m = 200\,\text{г}$, який кинули з горизонтальної поверхні землі під кутом до горизонту, впав на відстані $S = 5\,\text{м}$ від точки кидання через $\tau = 1,2\,\text{с}$. Яка робота A була виконана при киданні каменя? Опором повітря можна знехтувати. [$5,2\,\text{Дж}$]

4.63 Камінь масою $m = 1,5\,\text{кг}$ кинули під певним кутом до горизонту з поверхні землі. Визначити мінімальну роботу, що має бути виконана при киданні, щоб камінь впав на відстані $S = 20\,\text{м}$. [$150\,\text{Дж}$]

4.64 До бруска масою $m = 12\,\text{кг}$, який лежить на горизонтальній поверхні, прикріплено пружину жорсткістю $k = 300\,\text{Н/м}$ (**рис.4.64**). Коефіцієнт тертя між бруском і поверхнею $\mu = 0,4$. Спочатку пружина не деформована. До вільного кінця пружини приклали силу, яка напрямлена під кутом $\alpha = 30°$ до горизонту, і повільно перемістили тіло на відстань $S = 0,4\,\text{м}$. Визначити виконану роботу A. [$19\,\text{Дж}$]

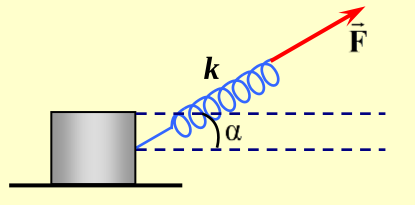


Рис.4.64

4.65 Тіло масою m кинули під кутом φ до горизонту з початковою швидкістю v_0. Визначити: А) середню потужність $\langle P \rangle$, яку розвиває сила тяжіння, за весь час руху тіла; Б) залежність миттєвої потужності сили тяжіння від часу. [0 ; $mg\left(gt - v_0 \sin\varphi\right)$]

4.66 Колодязь, який має площу дна $S_1 = 1\,\text{м}^2$ і глибину $h = 10\,\text{м}$, до половини заповнений водою. Яку потужність повинен мати насос з ККД $\eta = 86\%$, щоб відкачати всю воду за $\tau = 100\,\text{с}$ по трубі з площею перерізу $S_2 = 0,01\,\text{м}^2$? [$50\,\text{кВт}$]

4.67 М'яч падає з висоти $h = 50\,\text{см}$ без початкової швидкості. При ударі об підлогу він втрачає $k = 40\%$ енергії. Скільки разів (теоретично) підстрибне м'яч? Чому дорівнює весь шлях пройдений м'ячем? [нескінченно; $\approx 1,2\,\text{м}$]

4.68 Тенісний м'яч, маса якого $m = 100\,\text{г}$, летить зі швидкістю $v_1 = 15\,\text{м/с}$. Ударом ракетки його відбивають у протилежному напрямку. Швидкість ракетки в момент удару $v_2 = 15\,\text{м/с}$. Удар вважати пружним, висоту м'яча над землею сталою. Яку роботу було виконано над м'ячем? [$90\,\text{Дж}$]

4.69 Тіло масою $m = 2\,\text{кг}$ ковзає з гірки висотою $h = 4,5\,\text{м}$, яка плавно переходить у циліндричну поверхню радіусом $R = 2\,\text{м}$. При русі з вихідного положення до вищої точки циліндричної поверхні сила тертя виконала роботу $A = 40\,\text{Дж}$. Визначити тиск тіла на циліндричну поверхню у її верхній точці циліндричної поверхні. [$10\,\text{Н}$]

Рекомендації до теми "Збереження механічної енергії"

За відсутності в системі неконсервативних сил у правій частині загального співвідношення **(4.13)** маємо нуль, тобто механічна енергія системи залишається сталою. Отже в таких задачах рівняння енергетичного балансу являє собою рівність початкового та кінцевого значень повної механічної енергії системи.
Перед складанням рівняння енергетичного балансу треба пересвідчитись, що в системі дійсно немає неконсервативних сил, які виконують роботу. При складанні рівняння слід також проаналізувати, як найдоцільніше вибрати нульовий рівень потенціальної енергії для кожної з консервативних сил, що діють в системі, та які стани прийняти за початковий та кінцевий.

Тема: Збереження механічної енергії. Приклади

Задача 4.21

Визначити,
кут α до горизонту, під яким зроблено постріл з гармати, якщо у найвищій точці траєкторії кінетична енергія снаряда на $k = 25\%$ менша, ніж початкова. Опір повітря не враховувати.

Дано:
$k = 25\% = 0,25$

Визначити: α

Розв'язання

За умовою, на снаряд діє тільки сила тяжіння, що є консервативною. Отже повна механічна енергія снаряда зберігається, і для точки пострілу та верхньої точки траєкторії можна записати:

$W_0 = W,$

або, відраховуючи потенціальну енергію, відраховану від точки пострілу,

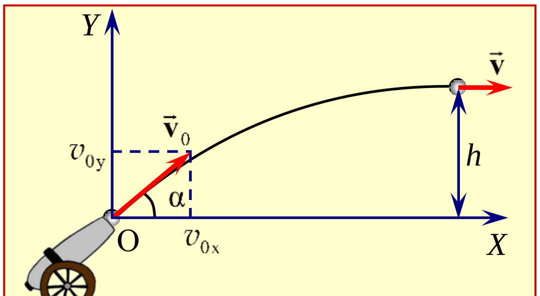


Рис.21

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + mgh, \qquad (1)$$

де m – маса снаряда v_0, v – його швидкості у точці пострілу та у вищій точці траєкторії, h – максимальна висота підйому снаряда відносно точки пострілу (**рис.21**).

За умовою задачі

$$\frac{mv_0^2}{2} - \frac{mv^2}{2} = k\frac{mv_0^2}{2},$$

тому згідно з рівнянням **(1)**, маємо:

$$mgh = k\frac{mv_0^2}{2} \qquad \Rightarrow \qquad 2gh = kv_0^2. \qquad (2)$$

Згідно з рівнянням **(1.18)** кінематики[46]

$$2gh = v_{0y}^2 = v_0^2 \sin^2 \alpha.$$

Підставивши цей вираз у рівняння **(2)**, дістанемо

$$\sin\alpha = \sqrt{k} = \frac{1}{2} \qquad \Rightarrow \qquad \alpha = 30°.$$

Задача 4.22

Визначити,
при яких кутах кидання до горизонту α на траєкторії існує точка, в якій кінетична енергія тіла у $k = 3$ рази більша за його потенціальну енергію, відраховану від

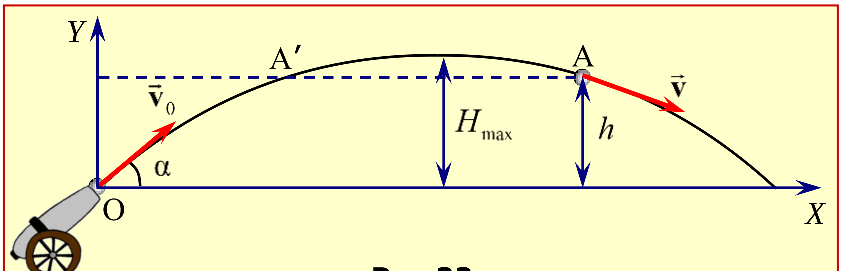


Рис.22

[46] Тут враховано, що у верхній точці траєкторії $v_y = 0$.

точки кидання. Опором повітря знехтувати.

Дано:
$k = 3$

Визначити: α

Розв'язання

Оскільки за умовою задачі опором повітря можна знехтувати, то треба розглядати тільки консервативну силу тяжіння, що діє на тіло. При цьому механічна енергія тіла зберігається. В такому випадку для будь-якої точки A траєкторії (**рис.22**)

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + mgh, \qquad (1)$$

де v_0 – початкова швидкість тіла, v – його швидкість у точці A на висоті h над рівнем точки кидання. Нехай у точці A виконується умова задачі: $\frac{mv^2}{2} = kmgh$. Тоді рівняння **(1)** набуває вигляду:

$$\frac{mv_0^2}{2} = (k+1)mgh \qquad \Rightarrow \qquad h = \frac{v_0^2}{2(k+1)g}.$$

При польоті тіла $h \le H$, де H – найбільша висота підйому тіла, яка дорівнює[47]:

$$H = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}.$$

Отже,

$$\frac{v_0^2}{2(k+1)g} \le \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g} \qquad \Rightarrow \qquad \sin\alpha \ge \frac{1}{\sqrt{k+1}}.$$

Таким чином, вказана точка існує при кутах кидання

$$\alpha \ge \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right).$$

При заданому $k = 3$ маємо:

$\alpha \ge 30°$.

При $\alpha = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)$ вказана точка співпадає з найвищою точкою траєкторії, а при більших значеннях α таких точок дві: на ділянці підйому та на ділянці спуску (точка A' і A на **рис.22**).

Варто також зауважити, що цю задачу можна розв`язати і методами кінематики, але розв'язання буде більш громіздким.

Задача 4.23

Тягарець висить на невагомій нерозтяжній нитці. Нитку відхиляють на кут $\alpha = 60°$ від вертикалі і відпускають.

Визначити

кут β, на який відхилиться нитка по інший бік, якщо під точкою підвісу на середині довжини нитки забито цвях (**рис.23**-1). Тертям та опором повітря знехтувати.

Розв'язання.

Дано:
$\alpha = 60°$

Визначити: β

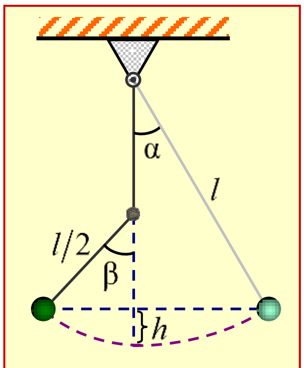


Рис.23-1

На тягарець діє консервативна сила тяжіння та сила натягу нитки, котра не виконує роботи, оскільки вона весь час перпендикулярна до напрямку руху. Тому повна механічна енергія тягарця зберігається. Оскільки в крайніх положеннях тягарець має лише потенціальну енергію (ці положення знаходяться в одній горизонтальній площині, то по обидва боки від цвяха він піднімається на однакову максимальну висоту h. З **рис.23-1** видно, що

---

[47] Виведення цього виразу див. у **задачі 1.19**.

$$\cos\alpha = \frac{l-h}{l} = 1 - \frac{h}{l},$$

$$\cos\beta = \frac{\frac{l}{2} - h}{\frac{l}{2}} = 1 - 2\frac{h}{l}.$$

Виключивши з цих виразів h/l, одержимо

$$\cos\beta = 2\cos\alpha - 1 \qquad \Rightarrow \qquad \beta = \arccos(2\cos\alpha - 1).$$

Виконаємо обчислення:

$$\beta = \arccos(2\cos 60° - 1) = \arccos(0) = 90°.$$

Задача 4.24

Невеличке тіло починає зісковзувати без початкової швидкості з вершини півсфери радіуса R, яка закріплена на горизонтальній поверхні.

Визначити,
висоту h від основи, на якій тіло відірветься від поверхні півсфери. Тертям між тілом та півсферою знехтувати.

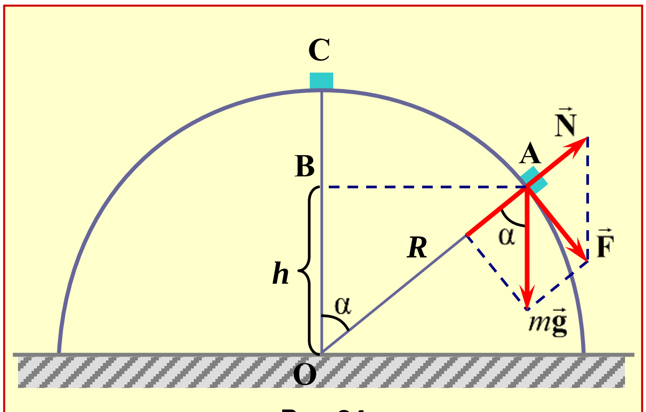


Рис.24

Дано:
R

Визначити: h

Розв'язання

До моменту відриву від поверхні півсфери тіло рухається по колу під дією рівнодійної сил тяжіння $m\vec{g}$ та нормальної реакції опори $\vec{N}$: $\vec{F} = m\vec{g} + \vec{N}$ (**рис.24**). Проекція сили $\vec{F}$ на радіус півсфери $mg\cos\alpha - N$ визначає доцентрове прискорення тіла v^2/R, отже

$$mg\cos\alpha - N = \frac{mv^2}{R}. \qquad (1)$$

Під дією сили тяжіння швидкість тіло зростає. В той же час величина $mg\cos\alpha$ в лівій частині рівняння **(1)** зменшується. Це означає, що зменшується (причому ще швидше) й величина реакції опори N так що при певному значенні швидкості вона взагалі зникає ($N = 0$), і тіло відривається від поверхні півсфери. Отже умовою відриву є

$$mg\cos\alpha = \frac{mv^2}{R}. \qquad (2)$$

Швидкість тіла в момент відриву визначимо за законом збереження механічної енергії. У верхній точці півсфери тіло мало тільки потенціальну енергію $W_1 = mgR$ (потенціальну енергію відраховано від основи півсфери), а в точці відриву його повна механічна енергія складається з кінетичної та потенціальної:

$$W_2 = \frac{mv^2}{2} + mgh.$$

Оскільки тертя відсутнє, то $W_1 = W_2$, отже:

$$mgR = \frac{mv^2}{2} + mgh \qquad \Rightarrow \qquad R = \frac{v^2}{2g} + h.$$

Підставимо сюди вираз швидкості з рівняння **(2)** й одержимо:

$$R = \frac{R\cos\alpha}{2} + h. \qquad (3)$$

З трикутника OAB на **рис.24** знаходимо:

$$\cos\alpha = \frac{R-h}{R}.$$

Тепер, з формули **(3)** після нескладних перетворень дістанемо:

$$h=\frac{2}{3}R=\frac{2}{3}\cdot 60=40\text{ см.}$$

Задача 4.25

На тонкому горизонтальному штирі висить перекинутий через нього м`який канат довжини $l=10$ м так що його кінці знаходяться на одному рівні. Через незначний поштовх канат починає зісковзувати.

Визначити

швидкість каната v в момент повного зісковзування зі штиря. Тертям знехтувати.

Дано:
$l=10$ м

Визначити: v

Розв'язання

За умовою на канат діють лише сила тяжіння та сила реакції штиря, причому остання не виконує роботи[48]. Отже, механічна енергія каната в початковому (**рис.25а**) та в кінцевому (**рис.25б**) положеннях однакова. Якщо відраховувати потенціальну енергію від кінцевого положення центра мас каната (точка O_2), то рівняння енергетичного балансу матиме вигляд (див. **рис.25**):

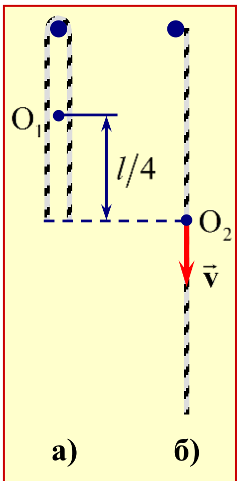


Рис.25

$$mg\frac{l}{4}=\frac{mv^2}{2}\qquad\Rightarrow\qquad v=\sqrt{\frac{gl}{2}}.$$

Виконаємо обчислення:

$$v=\sqrt{\frac{9,8\cdot 10}{2}}=\sqrt{49}=7\text{ м/с}.$$

Задача 4.26

Тягарець, що висить на невагомій пружині, розтягає її на величину x_0. Потім тягарець вертикально підіймають до положення, в якому пружина недеформована, і відпускають. Нехтуючи тертям та опором,

визначити:

А) максимальний розтяг пружини x_m;

Б) максимальну швидкість тягарця.

Дано:
x_0

Визначити: x_m, v_m

Розв'язання

Оскільки за умовою неконсервативні сили відсутні, механічна енергія системи "тягарець-пружина" зберігається.

А) Будемо відраховувати потенціальну енергію тягарця від найнижчого положення (точка **2**, **рис.26б**), в якому пружина деформована на максимальну величину x_m. Тоді у вихідному положенні (точка **1**) енергія системи – це лише потенціальна енергія тягарця $W_1=mgx_m$, а в кінцевому (точка 2) – лише потенціальна енергія пружини $W_2=\frac{kx_m^2}{2}$. Оскільки $W_1=W_2$, маємо ($x_m\neq 0$):

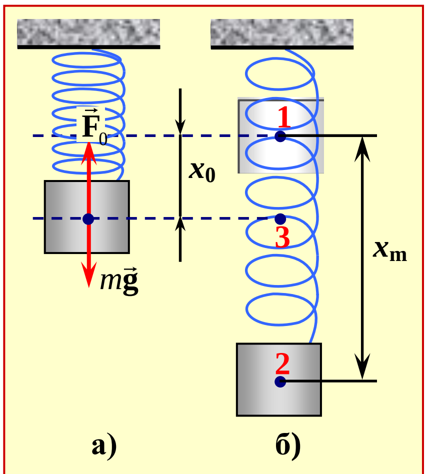


Рис.26

$$mgx_m=\frac{kx_m^2}{2}\qquad\Rightarrow\qquad x_m=\frac{2mg}{k},\qquad (1)$$

де m – маса тягарця, k – жорсткість пружини. З умови рівноваги тягарця (**рис.26а**) маємо:

[48] Ця сила напрямлена вертикально в гору, тобто перпендикулярно до напрямку руху частинок каната в точці дотику до штиря.

$$kx_0 = mg \quad \Rightarrow \quad x_0 = \frac{mg}{k}, \qquad (2)$$

$$x_m = 2x_0 \qquad (3)$$

Б) Для визначення максимальної швидкості тягарця врахуємо, що коли він знаходиться вище положення рівноваги, то $x < x_0$, рівнодійна сил тяжіння та пружності напрямлена вниз, тобто швидкість тягарця зростає. Якщо ж він знаходиться нижче положення рівноваги $x > x_0$, то рівнодійна напрямлена вгору, і швидкість зменшується. Отже максимальну швидкість тягарець матиме при проходженні положення рівноваги (точки 3, **рис.26б**). При цьому механічна енергія системи

$$W_3 = \frac{mv_m^2}{2} + \frac{kx_0^2}{2} + mgx_0.$$

Згідно із законом збереження $W_1 = W_2$ (або $W_3 = W_2$), отже

$$\frac{mv_m^2}{2} + \frac{kx_0^2}{2} + mgx_0 = mgx_m.$$

З цього рівняння, врахувавши співвідношення **(2)** та результат **(3)**, знайдемо

$$v_m = \sqrt{gx_0}.$$

Величину v_m можна визначити інакше:

1. Скласти рівняння енергетичного балансу для початкового та довільного положень тягарця;
2. Визначити з нього швидкість як функцію розтягу пружини $v(x)$;
3. Визначити максимум цієї функції за допомогою відомих методів математики.

Задача 4.27

Куля, що рухається по горизонтальній поверхні непружно стикається з нерухомою кулею вдвічі більшої маси.

Визначити,

яка частина кінетичної енергії η перейшла у внутрішню. Тертя між кулями та поверхнею відсутнє.

Розв'язання.

Дано:
$m_2/m_1 = k = 2$

Визначити: η

При непружному зіткненні відбувається пластична деформація тіл, внаслідок чого після зіткнення вони рухаються як одне ціле[49]. В процесі деформації в тілах діють сили внутрішнього тертя, тому механічна енергія не зберігається – частина її перетворюється у внутрішню (теплову) енергію тіл. Отже можна записати:

$$W_1 = W_2 + Q, \qquad (1)$$

де W_1, W_2 – початкова і кінцева механічні енергії, Q – енергія, що перейшла у внутрішню. За умовою задачі слід визначити величину

$$\eta = \frac{Q}{W_1} = \frac{W_1 - W_2}{W_1} = 1 - \frac{W_2}{W_1}. \qquad (2)$$

Оскільки потенціальна енергія куль не змінюється (рух по горизонталі), доцільно прийняти її рівною нулю. Тоді:

$$W_1 = \frac{m_1 v^2}{2}, \quad W_2 = \frac{(m_1 + m_2)u^2}{2} = \frac{(k+1)m_1 u^2}{2}, \qquad (3)$$

де v – швидкість першого тіла до зіткнення, u – спільна швидкість тіл після зіткнення, а також враховано, що $m_2 = km_1$.

Підставивши вирази енергій **(3)** в рівняння **(2)**, отримаємо:

$$\eta = 1 - (k+1)\frac{u^2}{v^2}. \qquad (4)$$

[49] Це і є означенням поняття "абсолютне непружне зіткнення (удар)".

Зовнішні сили (тяжіння та реакції) скомпенсовані і для кульок виконується закон збереження імпульсу. У проекціях на напрямок руху першої кулі рівняння балансу імпульсів має вигляд:

$$m_1 v = (m_1 + m_2) u \quad \Rightarrow \quad m_1 v = (k+1) m_1 u \quad \Rightarrow \quad u = \frac{v}{k+1}.$$

Підставимо цей вираз у формулу **(4)**:

$$\eta = 1 - \frac{(k+1) v^2}{(k+1)^2 v^2} \quad \Rightarrow \quad \eta = \frac{k}{k+1} = \frac{2}{3}.$$

Варто звернути увагу на те, що частина втраченої кінетичної енергії тим більша, чим масивнішим є нерухоме тіло.

Задачі для самостійної роботи

Рівень А

4.70 Тіло кинули вертикально вгору з початковою швидкістю $v_0 = 20$ м/с. На якій висоті кінетична енергія тіла буде дорівнювати його потенціальній енергії, яку відраховано від точки кидання? [10 м]

4.71 Тіло кинули вертикально вгору так, що воно піднялося на максимальну висоту $H = 20$ м. Визначити швидкість тіла на висоті $h = H/2$. [$\sim 4{,}5$ м/с]

4.72 Кулька підвішена на нерозтяжній невагомій нитці довжиною $l = 62{,}5$ см. Нитку відхилили від вертикалі на кут $\alpha = 60°$ і відпустили. Якої найбільшої швидкості набуде кулька? [$2{,}5$ м/с]

4.73 У пружинний пістолет зарядили кульку маси $m = 10$ г, при цьому пружина жорсткістю $k = 100$ Н/м була стиснута на $\Delta l = 10$ см. На яку максимальну висоту підніметься кулька після пострілу? Опором повітря знехтувати. [5 м]

Рівень Б

4.74 Тіло масою $m = 1$ кг падає на вертикально розташовану невагому пружинку жорсткістю $k = 500$ Н/м, при цьому максимальна деформація пружини $\Delta l = 10$ см. З якої висоти впало тіло? [15 см]

4.75 Кульку масою m, яка висить на нитці довжиною L, відводять до горизонтального положення і відпускають. На відстані $2L/3$ під точкою підвісу вбито гвіздок. Яку силу натягу матиме нитка в момент, коли вона займе горизонтальне положення. [$4mg$]

4.76 Кулька масою $m = 0{,}1$ кг обертається на нитці у вертикальній площині. Яку мінімальну міцність на розрив може мати при цьому нитка? [$6mg \approx 6$ Н]

4.77 Яку мінімальну швидкість повинна мати кулька математичного маятника при проходженні нижнього положення, щоб вона могла здійснити повний оберт у вертикальній площині? Розглянути випадки: а) кулька прив'язана до нерозтяжної нитки; б) кулька закріплена на кінці невагомого жорсткого стержня. Довжини стержня і нитки однакові і дорівнюють l. [$\sqrt{5gl}$; $2\sqrt{gl}$]

4.78 Мотузка довжиною $l = 1$ м, яка має масу $m = 0{,}5$ кг, лежить на гладенькому столі так, що з поверхні звисає частина довжиною $l_0 = 1$ см. До звисаючого кінця прив'язано гирю масою $M = 0{,}8$ кг. Мотузку відпускають і гиря починає падати. Яку швидкість матиме гиря в момент, коли мотузка повністю зісковзне з поверхні стола? Розмірами гирі та силами тертя знехтувати. [$3{,}64$ м/с]

4.79 Лижник масою $m = 70\ \text{кг}$ розганяється по горі з точки A (**рис.4.79**). Нижня ділянка гори являє собою циліндричну поверхню радіуса $R = 15\ \text{м}$. Висота гори $H = 50\ \text{м}$. Визначити силу тиску лижника на сніг у точці B, якщо його рух починається з точки A без початкової швидкості. Тертя не враховувати. [$mg\left(2H/R + 3\cos\alpha - 2\right) \approx 5\ \text{кН}$]

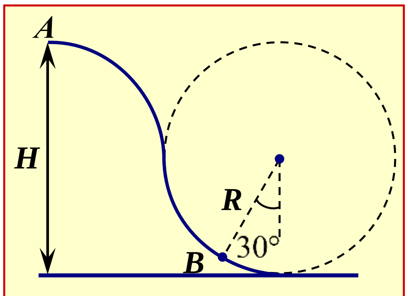


Рис.4.79

4.80 Легкий стержень довжиною l з двома однаковими маленькими важками на кінцях утримують у горизонтальному положенні. На відстані l_1 від одного з кінців проходить горизонтальна вісь, відносно якої стержень може вільно обертатися. Стержень звільнили без поштовху. Яку кутову швидкість матиме стержень в момент проходження положення стійкої рівноваги? [$\sqrt{2g\left(l - 2l_1\right) / \left(l_1^2 + \left(l - l_1\right)^2\right)}$]

4.81 Камінь масою $m = 300\ \text{г}$ кинули горизонтально з башти. Через час $\tau = 1\ \text{с}$ швидкість каменя становить кут $\alpha = 30^\circ$ з горизонтом. Визначити кінетичну енергію каменя у цей момент. [$\approx 58\ \text{Дж}$]

4.82 Куля масою $m = 20\ \text{г}$, випущено з гвинтівки під деяким кутом до горизонту, у верхній точці траєкторії має кінетичну енергію $W_к = 900\ \text{Дж}$. Під яким кутом до горизонту випущена куля, якщо її початкова швидкість $v_0 = 600\ \text{м/с}$? [60°]

Рівень B

4.83 Нитку, на якій висить тіло масою $m = 1\ \text{кг}$, відвели до горизонтального положення і відпустили. Визначити силу натягу нитки, в момент, коли вертикальна складова швидкості тіла максимальна. [$17{,}4\ \text{Н}$]

4.84 На шляху обруча, який котиться по горизонтальній поверхні зі швидкістю $v = 5\ \text{м/с}$, зустрічається гірка довільного профілю. На яку максимальну висоту зможе піднятися обруч? Проковзування відсутнє. [$v^2/g = 2{,}5\ \text{м}$]

4.85 Дошка масою $m = 6\ \text{кг}$ виступає за край столу на $1/4$ своєї довжини. До кінця дошки підвішують вантаж на нитці. Нитку з вантажем відводять на кут 90° і відпускають. Яку мінімальну масу повинен мати вантаж, щоб при його вільних коливаннях кінець дошки міг відірватися від поверхні стола? [$2\ \text{кг}$]

Рекомендації до теми "Збереження енергії та імпульсу"

Поширеним типом задач механіки є такі, де розглядаються зіткнення двох тіл, або подібні взаємодії, при яких суттєво змінюється механічний стан (положення в просторі та швидкості) обох тіл. В таких задачах сумісно використовують закон збереження механічної енергії та закон збереження імпульсу, тобто для розв`язання задачі крім рівняння енергетичного балансу (див. **рекомендації до розділу**) складають ще рівняння балансу імпульсів (див. **рекомендації до розділу 3** "Закон збереження імпульсу"). При цьому слід пам’ятати умови збереження імпульсу та те, що імпульс є векторною величиною.

Тема: Збереження енергії та імпульсу. Приклади

Задача 4.28

Дві кульки з масами m_1 і m_2 рухаються без тертя по горизонтальній поверхні вздовж осі OX з швидкостями $\vec{\mathbf{v}}_1$ і $\vec{\mathbf{v}}_2$.

Визначити

швидкості куль u_1 та u_2 після абсолютно пружного центрального удару.

Дано:
m_1, m_2, $\vec{\mathbf{v}}_1$, $\vec{\mathbf{v}}_2$

Визначити: u_1, u_2

Розв’язання

Оскільки тертя відсутнє і сили тяжіння та реакції опори скомпенсовані, зміна механічного стану куль при ударі визначається лише силою взаємодії між ними. Отже сумарний імпульс куль зберігається. При абсолютно пружному ударі вказані сили є пружними, тобто консервативними. Тому зберігається і повна механічна енергія системи. При цьому спочатку кінетична енергія куль перетворюється у потенціальну енергію пружної деформації (фаза стиснення), а потім навпаки – потенціальна енергія перетворюється в кінетичну (фаза розльоту). Отже, при пружному ударі зберігається кінетична енергія тіл, що співударяються[50].

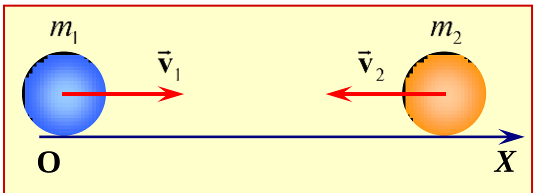


Рис.28

Складемо рівняння балансу імпульсів у проекціях на вісь OX та балансу кінетичних енергій (врахувавши, що в цій задачі $v^2 = v_x^2$):

$$m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} = m_1 u_{1x} + m_2 u_{2x}, \qquad (1)$$

$$\frac{m_1 v_{1x}^2}{2} + \frac{m_2 v_{2x}^2}{2} = \frac{m_1 u_{1x}^2}{2} + \frac{m_2 u_{2x}^2}{2}. \qquad (2)$$

Ці рівняння зручно переписати так:

$$m_1 \left(v_{1x} - u_{1x} \right) = m_2 \left(u_{2x} - v_{2x} \right), \qquad (1a)$$

$$m_1 \left(v_{1x}^2 - u_{1x}^2 \right) = m_2 \left(u_{2x}^2 - v_{2x}^2 \right). \qquad (2a)$$

Поділивши рівняння **(2a)** на **(1a)** з урахуванням формули різниці квадратів, отримаємо

$$v_{1x} + u_{1x} = u_{2x} + v_{2x}.$$

Об`єднавши це рівняння з рівнянням **(1a)**, дістанемо систему:

$$\begin{cases} v_{1x} + u_{1x} = u_{2x} + v_{2x}, \\ m_1 \left(v_{1x} - u_{1x} \right) = m_2 \left(v_{2x} - u_{2x} \right), \end{cases}$$

з якої отримаємо відповідь:

$$u_{1x} = \frac{2 m_2 v_{2x} + \left(m_1 - m_2 \right) v_{1x}}{m_1 + m_2}, \qquad (3)$$

[50] Збереження кінетичної енергії і є ознакою абсолютно пружного удару.

$$u_{2x} = \frac{2m_1 v_{1x} + (m_2 - m_1) v_{2x}}{m_1 + m_2}. \qquad (4)$$

Розглянемо деякі окремі випадки.

1. Маси куль однакові ($m_1 = m_2$). З рівнянь **(3)** та **(4)** маємо:

$$u_{1x} = v_{2x}, \qquad u_{2x} = v_{1x},$$

тобто в результаті пружного зіткнення кулі обмінюються швидкостями. Зокрема, якщо друга куля до удару знаходилась у спокої ($v_{2x} = 0$), то після удару $u_{1x} = 0$, $u_{2x} = v_{2x}$: перша куля зупиняється, а друга починає рухатись у тому ж напрямку з тією ж швидкістю. (Це добре відомо тим хто грає у більярд).

2. Якщо маси куль різні ($m_1 \neq m_2$) і друга куля перед зіткненням знаходиться у спокої ($v_{2x} = 0$), то з формул **(3)**, **(4)** знаходимо:

$$u_{1x} = \frac{(m_1 - m_2) v_{1x}}{m_1 + m_2}; \qquad u_{2x} = \frac{2m_1 v_{1x}}{m_1 + m_2}. \qquad (5)$$

Отже, якщо перша куля масивніша ($m_1 > m_2$), то $u_{1x} > 0$ і вона після удару буде рухатись без зміни напрямку. Якщо ж перша куля легша ($m_1 < m_2$), то $u_{1x} < 0$, тобто вона відскочить у зворотному напрямку.

Задача 4.29

Куля, що рухалась зі швидкістю $v_1 = 3\,\text{м/с}$, після пружного зіткнення з іншою кулею, яка перебуває у спокої, починає рухатись не змінюючи напрям зі швидкістю $u_1 = 2\,\text{м/с}$.

Визначити

відношення мас куль m_1/m_2 та швидкість другої кулі u_2 після зіткнення. Тертя відсутнє.

Дано:

$v_1 = 3\,\text{м/с}$

$u_1 = 2\,\text{м/с}$

Визначити: m_1/m_2, u_2

Розв'язання

Загальне розв`язання цієї задачі повністю збігається з попередньою. Тому скористаємося кінцевим результатом – формулою **(5)**.

Позначимо відношення мас $m_1/m_2 = k$ та зробивши заміну $m_1 = km_2$, знаходимо

$$u_1 = \frac{(k-1) v_1}{k+1} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{v_1 + u_1}{v_1 - u_1} = 5.$$

Врахувавши цей результат з формули **(5)** **задачі 4.28** дістанемо:

$$u_2 = \frac{2k v_1}{k+1} = 5\,\text{м/с}.$$

Задача 4.30

Дві однакові кульки, що рухалися зі швидкостями $\vec{\mathbf{v}}_1$ та $\vec{\mathbf{v}}_2$ під кутом α один до одної, після пружного нецентрального удару розлітаються зі швидкостями $\vec{\mathbf{u}}_1$ та $\vec{\mathbf{u}}_2$.

Визначити

кут β між векторами $\vec{\mathbf{u}}_1$ та $\vec{\mathbf{u}}_2$.

Дано:

$\vec{\mathbf{v}}_1$, $\vec{\mathbf{v}}_2$, $\vec{\mathbf{u}}_1$, $\vec{\mathbf{u}}_2$, α

Визначити: β

Розв'язання

В **задачі 4.28** показано, що при пружному ударі виконуються закони збереження імпульсу та кінетичної енергії.

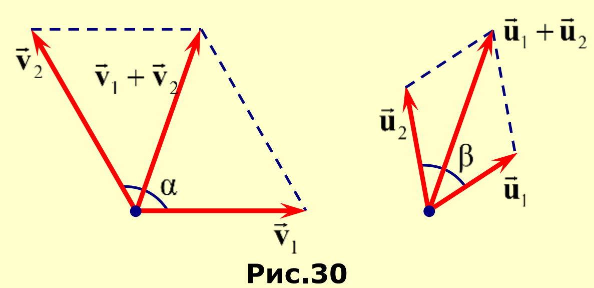


Рис.30

Тому можна записати систему рівнянь:

$$\begin{cases} m\vec{\mathbf{v}}_1 + m\vec{\mathbf{v}}_2 = m\vec{\mathbf{u}}_1 + m\vec{\mathbf{u}}_2, \\ \dfrac{mv_1^2}{2} + \dfrac{mv_2^2}{2} = \dfrac{mu_1^2}{2} + \dfrac{mu_2^2}{2}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{\mathbf{v}}_1 + \vec{\mathbf{v}}_2 = \vec{\mathbf{u}}_1 + \vec{\mathbf{u}}_2, \\ v_1^2 + v_2^2 = u_1^2 + u_2^2. \end{cases} \qquad (1)$$

Вектори $\vec{\mathbf{v}}_1+\vec{\mathbf{v}}_2$ та $\vec{\mathbf{u}}_1+\vec{\mathbf{u}}_2$ представляють собою діагоналі паралелограмів швидкостей (**рис.30**), причому $\vec{\mathbf{v}}_1+\vec{\mathbf{v}}_2=\vec{\mathbf{u}}_1+\vec{\mathbf{u}}_2$. Отже, за теоремою косинусів маємо

$$v_1^2+v_2^2+2v_1v_2\cos\alpha=u_1^2+u_2^2+2u_1u_2\cos\beta.$$

Врахувавши друге рівняння системи **(1)**, дістанемо:

$$v_1v_2\cos\alpha=u_1u_2\cos\beta \qquad \Rightarrow \qquad \cos\beta=\frac{v_1v_2}{u_1u_2}\cos\alpha\,.$$

В окремому випадку, якщо одна з кульок (наприклад, друга) перебувала у спокої, то $\cos\beta=0$ і $\beta=90^\circ$, тобто кульки розлітаються під прямим кутом.

Підкреслимо, що відміна результату розв'язування цієї задачі і задачі 4.28 зумовлена тим, що у **задачі 4.28** напрямки швидкостей збігаються з лінією, що проходить через центри куль (центральний удар), а в даній задачі ця умова не виконується і маємо нецентральний удар.

Задача 4.31

Куля масою $m=10$ г, що летить горизонтально зі швидкістю $v=1000$ м/с, влучає в підвішений на міцному шнурі дерев`яний брус і застряє в ньому, заглибившись на відстань $S=10$ см. Відстань від точки підвісу до центра мас бруса $l=1{,}5$ м, маса бруса $M=5$ кг.

Визначити:
А) максимальний кут відхилення α шнура, від вертикалі після влучання кулі;
Б) силу опору F, що діє на кулю в брусі, вважаючи її сталою.
Масою шнура, а також тертям у підвісі та опором повітря знехтувати.

Розв'язання.

Дано:
$m=10\text{ г}=10^{-2}$ кг
$v=1000$ м/с
$S=10\text{ см}=0{,}1$ м
$l=1{,}5$ м
$M=5$ кг

Визначити: α, F

А) Вдаряючи в брус і застряючи, куля передає йому певні початкові імпульс та кінетичну енергію. Цей процес відбувається дуже швидко, тому будемо вважати, що під час взаємодії з кулею брус лишається у вихідному положенні і отримана ним швидкість є початковою швидкістю подальшого руху бруса разом з кулею. За такої умови, в процесі удару, зовнішні сили (тяжіння та натягу шнура) скомпенсовані і імпульс зберігається. Отже:

$$mv=(m+M)u, \qquad \Rightarrow \qquad u=\frac{mv}{m+M}, \tag{1}$$

де u – швидкість бруса з кулею безпосередньо після удару, v – швидкість кулі безпосередньо перед ударом.

Після удару брус з кулею піднімається над початковим рівнем, збільшуючи свою потенціальну енергію у полі сил тяжіння. Одночасно зменшується кінетична енергія бруса так, що механічна енергія лишається незмінною (після застрягання кулі рух бруса відбувається за відсутності сил тертя та опору). У точці найвищого підйому кінетична енергія дорівнює нулю, а потенціальна – досягає максимального значення. За законом збереження енергії

$$W_1=W_2,$$

де W_1, W_2 – повна механічна енергія бруса з кулею в початковому та в кінцевому положеннях. Прийнявши за нульовий рівень потенціальної енергії початкове положення центра мас бруса, маємо:

$$\frac{(m+M)u^2}{2}=(m+M)gh \qquad \Rightarrow \qquad h=\frac{u^2}{2g},$$

де h – максимальна висота підйому бруса. Підставимо в останню формулу вираз початкової швидкості бруса **(1)**:

$$h=\frac{m^2v^2}{2g(m+M)^2}. \tag{2}$$

Максимальний кут відхилення шнура визначається через h та з трикутника OBA на **рис.31**:

$$h = \mathrm{OC} - \mathrm{OA} = \mathrm{OC} - \mathrm{OB} \cdot \cos\alpha =$$

$$= l\left(1 - \cos\alpha\right) = 2l\sin^2\frac{\alpha}{2}. \qquad (3)$$

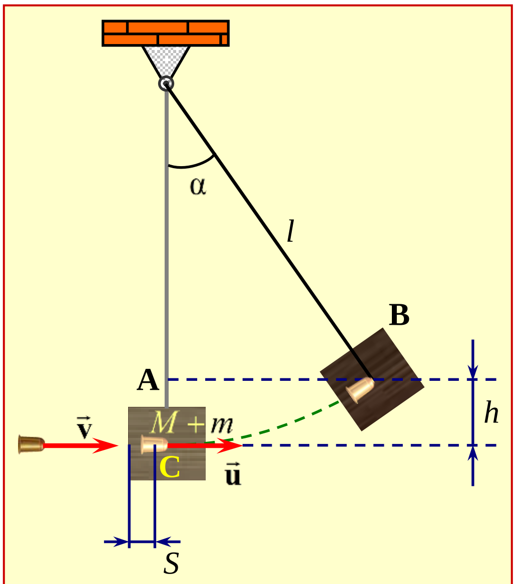


Рис.31

Прирівнюючи вирази **(2)** та **(3)**, дістанемо:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{mv}{2\sqrt{gl}\left(m+M\right)}.$$

За умовою $M \gg m$, тому замість цієї формули доцільно записати наближений вираз:

$$\sin\frac{\alpha}{2} \approx \frac{mv}{2M\sqrt{gl}}.$$

При дуже великій відмінності мас обчислення за спрощеною формулою дають практично точний результат[51].

Виконаємо обчислення.

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{10^{-2}\cdot 10^{3}}{2\cdot 5\cdot\sqrt{9{,}8\cdot 1{,}5}} = 0{,}261 \qquad \Rightarrow \qquad \alpha = 30{,}2^\circ.$$

Б) В процесі заглиблення кулі в брус між ними діють великі сили тертя (опору). Сила, що прикладена до кулі, гальмує її від швидкості v до швидкості u, а сила, прикладена до бруса, прискорює його від стану спокою до швидкості u. Наявність сил тертя спричинює втрату значної частини кінетичної енергії під час співударяння згідно з загальним рівнянням:

$$\frac{\left(m+M\right)u^2}{2} - \frac{mv^2}{2} = A_{\text{т}}, \qquad (4)$$

де $A_{\text{т}}$ – сумарна робота сил опору, що діють на нулю та на брус. Згідно з результатом **задачі 4.2**, ця робота може бути визначена лише через силу опору, що діє на кулю, та переміщення кулі відносно бруса:

$$A_{\text{т}} = -FS.$$

Після підстановки цього виразу та виразу u з формули **(1)** у рівняння **(4)** та нескладних розрахунків, отримаємо:

$$F = \frac{Mmv^2}{2S\left(m+M\right)},$$

або, врахувавши умову $M \gg m$,

$$F \approx \frac{mv^2}{2S} = 5\cdot 10^4 \text{ Н}. \qquad (5)$$

Цей результат показує, що при ударі куля втрачає практично всю свою кінетичну енергію. На завершення переконаємось у правильності вихідних припущень про короткочасність процесу удару та незмінність положення бруса під час удару кулі. Для цього оцінимо час руху кулі в брусі t і шлях $S_{\text{б}}$, пройдений брусом за цей час, вважаючи рух тіл рівнозмінним. Сила опору (формула **(5)**) надає кулі прискорення

$$a_{\text{п}} = \frac{F}{m} \approx \frac{v^2}{2S}.$$

За час τ куля майже повністю втрачає свою швидкість. Отже

$$\tau \approx \frac{v}{a_{\text{п}}} \approx \frac{2S}{v} = 2\cdot 10^{-4} \text{ с}.$$

Сила тертя F (формула **(5)**) також надає прискорення брусові

---

[51] При $M/m = 500$, як в цій задачі, відносна похибка результату становить всього $0{,}2\%$.

$$a_б = \frac{F}{M} \approx \frac{mv^2}{2SM}.$$

Рухаючись з таким прискоренням брус за час τ проходе шлях

$$S_б = \frac{a_б \tau^2}{2} \approx \frac{2mS}{M} = 4\cdot 10^{-4} \text{ м} = 0,4 \text{ мм}.$$

Як бачимо, застрявання кулі дійсно має "миттєвий" характер.

Задача 4.32

Шматок глини масою $m = 0,5$ кг падає з певної висоти на горизонтальну плиту масою $M = 1$ кг, яка закріплена на вертикальній пружині жорсткістю $k = 980$ Н/м. Безпосередньо перед ударом об плиту глина мала швидкість $v = 5$ м/с.

Визначити

максимальне стиснення пружини x_m після удару. Вважати удар непружним, тертям в пружині та її масою знехтувати.

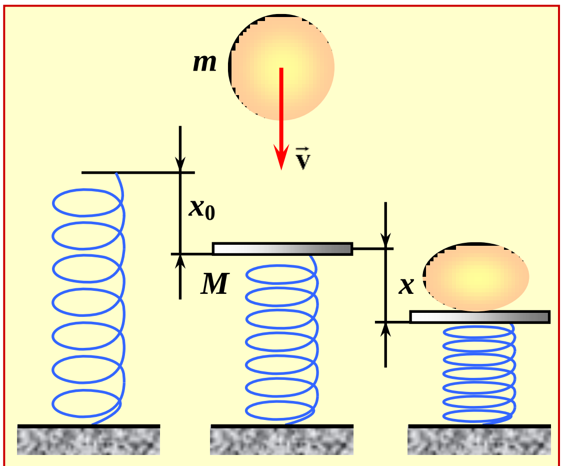


Рис.32

Дано:
$m = 0,5$ кг
$M = 1$ кг
$k = 980$ Н/м
$v = 5$ м/с

Визначити: x_m

Розв'язання

За фізичним змістом ця задача подібна до попередньої, тому будемо розв'язувати її за тією ж схемою. Прилипання глини до плити відбувається за дуже малий проміжок часу, отже впливом зовнішніх сил, що діють на систему "глина-плита-пружина", за цей час можна знехтувати і застосувати до неї закон збереження імпульсу:

$$mv = (m+M)u, \quad \Rightarrow \quad u = \frac{mv}{m+M}, \qquad (1)$$

де u – швидкість руху плити разом з глиною безпосередньо після удару.

Після удару в процесі стискання пружини повна механічна енергія системи залишається сталою. Будемо відраховувати потенціальну енергію в полі сил тяжіння від положення плити в момент, коли до неї пристає глина. Тоді початкова механічна енергія системи W_1 складається тільки з кінетичної енергії плити з глиною та потенціальної енергії пружини, що деформована вагою плити на певну величину x_0 (**рис.32**):

$$W_1 = \frac{(m+M)u^2}{2} + \frac{kx_0^2}{2}.$$

Величину x_0 знайдемо з умови рівноваги плити до падіння на неї глини:

$$Mg = kx_0 \quad \Rightarrow \quad x_0 = \frac{Mg}{k}. \qquad (2)$$

Врахувавши вирази **(1)** і **(2)**, отримаємо

$$W_1 = \frac{m^2v^2}{2(m+M)} + \frac{(Mg)^2}{2k}. \qquad (3)$$

В кінцевому (найнижчому) положенні механічна енергія системи складається тільки з потенціальної енергії пружини та плити з глиною. При цьому пружина деформована на максимальну величину $x_m = x_0 + x$, а плита з глиною знаходяться на відстані x від вибраного нульового рівня (тут x – найбільша величина додаткової деформації пружини в наслідок падіння глини).

$$W_2 = \frac{k(x+x_0)^2}{2} - (m+M)gx. \qquad (4)$$

Потенціальна енергія плити з глиною в даному випадку від'ємна, оскільки тіла знаходяться нижче від нульового рівня.
Оскільки за законом збереження енергії $W_1 = W_2$, то прирівнявши вирази **(3)** та **(4)** після спрощень отримаємо:

$$kx^2 - 2mgx - \frac{(mv)^2}{m+M} = 0.$$

З цього рівняння дістанемо[52] для додаткового стиснення:

$$x = \frac{mg + \sqrt{(mg)^2 + \dfrac{k(mv)^2}{m+M}}}{k}.$$

Повне максимальне стискання пружини $x_m = x_0 + x$:

$$x_m = \frac{1}{k}\left((m+M)g + \sqrt{(mg)^2 + \frac{k(mv)^2}{m+M}}\right).$$

Виконаємо обчислення:

$$x_m = \frac{1}{980}\left((1+0,5)\cdot 9,8 + \sqrt{(0,5\cdot 9,8)^2 + \frac{980\cdot(0,5\cdot 5)^2}{1+0,5}}\right) \approx 0,08\text{ м} = 8\text{ см}.$$

Задача 4.33

На залізничній платформі закріплено безвідкотна гармата. З гармати проводять постріл вздовж колії під кутом $\alpha = 60°$ до горизонту.

Визначити

відстань S, на яку відкотиться платформа після пострілу, якщо коефіцієнт тертя $\mu = 0,05$, відношення маси снаряду до маси платформи з гарматою $n = 10^{-3}$, швидкість вильоту снаряду $v = 600\text{ м/с}$.

Дано:
$\alpha = 60°$
$\mu = 0,05$
$n = 10^{-3}$
$v = 600\text{ м/с}$

Визначити: S

Розв'язання

Під час пострілу повний імпульс системи "платформа-снаряд" не зберігається, проте зберігається його проекція на горизонтальну вісь, напрямлену вздовж копії (див. розв'язок **задачі 3.5**).
Тому:

$$-Mu + mv\cos\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad u = nv\cos\alpha. \qquad (1)$$

де u – початкова швидкість відкочування платформи після пострілу, M та m – маси платформи з гарматою та снаряда.

Внаслідок пострілу платформа отримує кінетичну енергію $W = \dfrac{Mu^2}{2}$, яку потім витрачає на виконання роботи проти сили опору $F = \mu mg$ на шляху S. Отже:

$$\frac{Mu^2}{2} = \mu mgS \quad \Rightarrow \quad S = \frac{u^2}{2\mu g}.$$

Врахувавши вираз **(1)**, маємо

$$S = \frac{(nv\cos\alpha)^2}{2\mu g} = \frac{(10^{-3}\cdot 600\cdot 0,5)^2}{2\cdot 0,05\cdot 9,8} \approx 9\text{ см}.$$

Задача 4.34

Невелика шайба зісковзує без початкової швидкості з гладкої гірки висотою $h = 0,9\text{ м}$ і потрапляє на дошку, що лежить на гладкій горизонтальній поверхні, як показано на **рис.34**. В наслідок тертя між дошкою та шайбою остання гальмується і з певного моменту рухається разом з дошкою, як єдине ціле.

[52] Від'ємний корінь не задовольняє умові задачі, оскільки відповідає розтягуванню пружини.

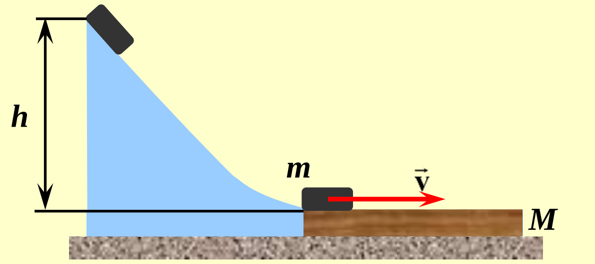


Рис.34

Визначити
відстань S, що пройде шайба відносно дошки на цей момент, якщо коефіцієнт тертя становить $\mu = 0,5$ і відношення мас шайби та дошки $n = 0,2$.

Дано:
$h = 0,9$ м
$\mu = 0,5$
$n = 0,2$
Визначити: S

Розв'язання
За умовою шайба зісковзує без тертя, отже без втрат механічної енергії. Тому:

$$\frac{mv^2}{2} = mgh \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{2gh}, \qquad (1)$$

де v – швидкість шайби в момент виходу на дошку.

Ковзаючи по дошці, шайба під дією сили тертя гальмується, а дошка, навпаки, прискорюється. Внаслідок цього через певний час швидкості шайби й дошки зрівняються, і ковзання шайби по дошці припиниться. Рух шайби й дошки відбувається із збереженням імпульсу системи (зовнішні сили тяжіння та реакції опори скомпенсовані). Це дозволяє визначити кінцеву швидкість дошки з шайбою u:

$$mv = (m+M)u \quad \Rightarrow \quad u = \frac{mv}{m+M} \quad \Rightarrow \quad u = \frac{nv}{1+n}. \qquad (2)$$

Ковзання шайби по дошці супроводжується зміною кінетичної енергії системи, рівною сумарній роботі сил тертя:

$$\frac{(m+M)u^2}{2} - \frac{mv^2}{2} = A_т. \qquad (3)$$

Згідно з результатом **задачі 4.2**, (формула **(2)**), ця сумарна робота дорівнює добутку сили тертя, що діє на шайбу, на її переміщення відносно дошки: $A_т = -\mu mg$. Після підстановки цього виразу й виразу **(2)** в рівняння **(3)** та елементарних перетворень отримаємо:

$$S = \frac{v^2}{2(1+n)\mu g},$$

або, з урахуванням виразу **(1)**,

$$S = \frac{h}{(1+n)\mu} = \frac{0,9}{(1+0,2)\cdot 0,5} = 1,5 \text{ м}.$$

Задача 4.35

Протон з кінетичною енергією $W_0 = 1,7\cdot10^{-17}$ Дж, стикається з вільним нерухомим атомом гелію й відлітає в зворотному напрямку, втративши $k = 3/4$ енергії, а атом переходить у збуджений стане.

Визначити
енергію збудження атома $W_з$. Маса атома гелію в $n = 4$ рази більше за масу протона.

Дано:
$W_0 = 1,7\cdot10^{-17}$ Дж
$k = \frac{3}{4}W_0$
$n = 4$
Визначити: $W_з$

Розв'язання
Зіткнення протона з атомом підпорядковане законам збереження енергії та імпульсу. Внаслідок удару протона атом не лише переходить у збуджений стан, а й починає

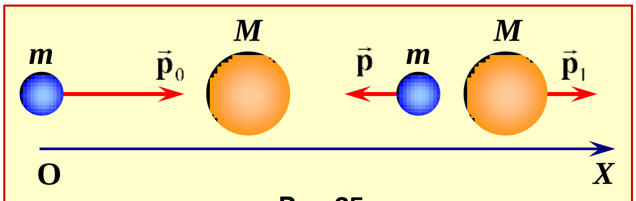


Рис.35

рухатись, тобто отримує певний імпульс і кінетичну енергію. Згідно з законом збереження енергії

$$W_0 = W + W_а + W_з \qquad \Rightarrow \qquad W_з = W_0 - W - W_а,$$

де W_0, W – кінетична енергія протона до та після зіткнення, $W_а$, $W_з$ – кінетична енергія та енергія збудження атома. Згідно з умовою задачі

$$W_0 - W = kW_0 \qquad \Rightarrow \qquad W = W_0(1-k).$$

Тепер

$$W_з = kW_0 - W_а. \qquad (1)$$

Для визначення кінетичної енергії атома $W_а$ використаємо закон збереження імпульсу $\vec{\mathbf{p}}_0 = \vec{\mathbf{p}} + \vec{\mathbf{p}}_а$. У проекціях на вісь OX (**рис.35**)

$$p_0 = -p + p_а,$$

де p_0, p – модулі імпульсу протона до та після зіткнення, $p_а$ – імпульс атома після зіткнення. Імпульс частинки і її кінетична енергія зв'язані співвідношенням $p = \sqrt{2mW}$ (формула **(4.36)**), отже

$$\sqrt{2mW_0} = \sqrt{2mW_а} - \sqrt{2mW} = \sqrt{2mW_а} - \sqrt{2mW_0(1-k)}.$$

Врахувавши, що $M = nm$, після перетворень та підстановки значень k і n, знаходимо:

$$W_а = \frac{9}{16}W_0.$$

Підставимо цей вираз у рівняння **(1)** і отримаємо відповідь:

$$W_з = \frac{3}{4}W_0 - \frac{9}{16}W_0 = \frac{3}{16}W_0 = \frac{3\cdot 1,7\cdot 10^{-17}}{16} = 3,2\cdot 10^{-18}\ \text{Дж}.$$

Задачі для самостійної роботи

Рівень Б

4.86 На нерухому кулю налітає куля масою $m = 0,25\ \text{кг}$, і після удару зупиняється. Чому дорівнює середня сила взаємодії куль, якщо час контакту між кулями $t = 0,015\ \text{с}$, а швидкість кулі перед ударом $v = 6\ \text{м/с}$. [$100\ \text{Н}$]

4.87 Довести, що при абсолютно непружному ударі відбувається найбільше зростання внутрішньої енергії тіл.

4.88 Куля масою m, яка летить горизонтально зі швидкістю v, застрягла у дерев'яному бруску масою M, що висить на нитці довжиною l. На який максимальний кут від вертикалі відхилиться нитка після удару? [$\cos\varphi = 1 - (mv)^2 \big/ \left((m+M)^2\, 2gl\right)$]

4.89 Ковзаняр масою $M = 60\ \text{кг}$, який стоїть на гладкому льоду, кидає горизонтально камінь маси $m = 5\ \text{кг}$ із швидкістю $v_0 = 12\ \text{м/с}$ відносно льоду. Яку роботу виконав ковзаняр кидаючи камінь? [$390\ \text{Дж}$]

4.90 Ковзаняр масою $M = 60\ \text{кг}$ кидає у горизонтальному напрямі камінь масою $m = 3\ \text{кг}$ з висоти $h = 1,8\ \text{м}$. Камінь падає на лід на відстані $S = 9\ \text{м}$ від точки кидання. Визначити відстань, на яку відкотиться ковзаняр після кидання, якщо коефіцієнт тертя ковзання $\mu = 0,02$? [$1,4\ \text{м}$]

4.91 На шляху тіла, яке ковзає горизонтально по поверхні, знаходиться незакріплена гірка висотою $h = 2\ \text{м}$ (**рис.4.91**). При якій мінімальній швидкості тіло зможе подолати гірку, якщо тіло важить у 5 разів менше гірки? Тертя відсутнє. [$\approx 6,9\ \text{м/с}$]

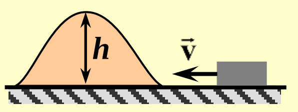


Рис.4.91

4.92 Куля масою $m = 10\ \text{г}$, яка летіла горизонтально зі швидкістю $v_0 = 500\ \text{м/с}$, ударяє у вільно підвішений дерев'яний брусок масою $M = 20\ \text{кг}$ і застрягла в ньому, заглибившись на $S = 20\ \text{см}$. Визначити середню силу опору при русі кулі у бруску.

[$6,25$ кН]

4.93 Тіло масою M налітає на дві пружини, які з'єднано послідовно (**рис.4.93**). Жорсткості пружин k_1 і k_2. Максимальна енергія деформації пружини 2 становить W. Визначити початкову швидкість тіла. [$\sqrt{2W\left(k_1+k_2\right)/k_1M}$]

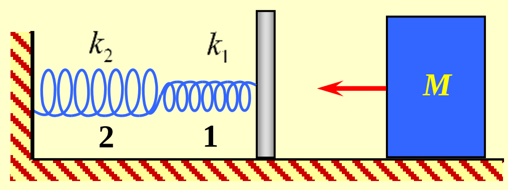


Рис.4.93

4.94 М'яч летить зі швидкістю $v_0=10$ м/с і ударяє в ногу футболіста. Якою повинна бути швидкість руху ноги футболіста, щоб м'яч після удару зупинився? Вважати удар абсолютно пружним, а масу м'яча значно меншою маси ноги. [5 м/с у напрямку руху м'яча до удару]

4.95 На шайбу масою $M=100$ г, яка лежить на льоду налітає друга шайба масою $m=50$ г. Після пружного удару шайба m змінює напрямок руху на протилежний. У скільки разів змінилася енергія цієї шайби? [зменшилася у 3 рази]

4.96 Куля, яка рухається, налітає на таку саму нерухому кулю. Під яким кутом одна до одної рухатимуться кулі після абсолютно пружного нецентрального удару? [$90°$]

4.97 Частинка 1 пружно стикається з нерухомою частинкою 2. Обидві частинки після удару рухаються симетрично відносно напрямку початкового руху частинки 1. Визначити відношення мас частинок, якщо кут, між векторами швидкостей часток після удару становить φ. [$1+2\cos\varphi$]

4.98 Бруску масою $m=1$ кг , який лежить на довгій горизонтальній дошці масою $M=2$ кг, поштовхом надають швидкість $v_0=2$ м/с. Який шлях пройде дошка на момент припинення ковзання бруска по ній? Коефіцієнт тертя між дошкою і бруском $\mu=0,2$. Тертя між дошкою і площиною неістотне. [$mMv_0^2/2\mu g\left(m+M\right)^2\approx 23$ см]

Рівень В

4.99 Кулька масою m_1, яка рухається зі швидкістю v, налітає на нерухому кульку масою m_2. Які швидкості матимуть кульки після центрального абсолютно пружного удару? [$v_1=\left(m_1-m_2\right)v/\left(m_1+m_2\right)$; $v_2=2m_1v/\left(m_1+m_2\right)$]

4.100 Дерев'яна дошка маси M розташована горизонтально. Знизу в її середину ударяє та пробиває її куля масою m, що летить вертикально з швидкістю v. Після удару центр дошки підстрибує на висоту h. На яку висоту підніметься куля після удару? [$\left(mv-M\sqrt{2gh}\right)^2/\left(2m^2g\right)$]

4.101 Шайба масою m_1, що рухається зі швидкістю v, налітає на другу шайбу, яка перебуває у стані спокою. Після удару перша шайба рухається зі швидкістю $v/2$ перпендикулярно початковому напрямленню. Визначити масу другої шайби. [$5m_1/3$]

4.102 Частинка масою m, яка рухається зі швидкістю v, налітає на нерухому частинку масою $m/2$ і після пружного удару відбивається від неї під кутом $\alpha=30°$ до початкового напрямку руху. Визначити швидкість другої частки після удару. [$1{,}17v$ під кутом $30°$ до вектора $\vec{\mathbf{v}}$]

4.103 Куля масою M знаходиться у стані спокою. Яку найбільшу енергію при центральному абсолютно пружному ударі може передати цій кулі інша куля такого ж самого радіуса, яка має масу m і рухається зі швидкістю v_0? [$\left(mv_0^2/2\right)\left(4mM/\left(m+M\right)^2\right)$]

4.104 Частинка масою m_1, яка рухається зі швидкістю $\vec{\mathbf{v}}$, пружно ударяє частинку масою

m_2, яка знаходилась у стані спокою. Після удару частинка m_2 відлітає під кутом φ до напрямку вектора $\vec{\mathbf{v}}$. Визначити швидкість частинки m_2 після удару. [$2m_1 v\cos\varphi/(m_1+m_2)$]

4.105 Дві маленькі пружні кульки підвішені на тонких нитках різної довжини так, що дотикаються одна одної. Довжина ниток $l_1 = 10\ \text{см}$, $l_2 = 6\ \text{см}$. Маси кульок $m_1 = 8\ \text{г}$, $m_2 = 20\ \text{г}$. Кульку m_1 відводять на кут $\varphi = 60°$ і відпускають. На які максимальні кути відхиляться нитки від вертикалі після пружного удару між кульками? [$\cos\alpha = 1/2 + (2m_1m_2)/(m_1+m_2)^2$; $\cos\beta = 1 - 2m_1^2 l_1\Big/\left(l_2(m_1+m_2)^2\right)$]

4.106 Три кулі однакового радіусу, але різних мас, підвішені на нитках однакової довжини і торкаються між собою. Центри кульок знаходяться на одній лінії. Кулю $m_1 = 36\ \text{г}$ відводять від положення рівноваги так, що вона підіймається на висоту $H = 18\ \text{см}$, і відпускають. При яких масах m_2 і m_3 всі три кулі після пружного зіткнення першої кулі з другою та другої з третьою будуть мати однакові імпульси? На яку висоту підніметься кожна з куль після зіткнення? [$m_2 = m_1/2 = 18\ \text{г}$; $m_3 = m_1/6 = 6\ \text{г}$; $h_1 = H/9 = 2\ \text{см}$; $h_2 = 4H/9 = 8\ \text{см}$]

4.107 Атом масою M у збудженому стані має енергію на ΔE більшу ніж в основному стані. При якій початковій енергії частинка масою m може перевести у збуджений стан атом, який знаходиться у стані спокою? [$\Delta E(1+m/M)$]

4.108 Тіло маси $m = 1\ \text{кг}$ лежить на довгій платформі масою $M = 100\ \text{кг}$, яка може рухатись горизонтально без тертя. У початковому стані платформа і тіло знаходиться у спокої. Тілу надають швидкість $v_0 = 10\ \text{м/с}$. Визначити шлях платформи до того моменту, коли тіло зупиниться на ній, якщо коефіцієнт тертя між тілом і платформою $\mu = 0{,}2$. Яка кількість теплоти виділиться під час руху тіла по платформі? [$0{,}25\ \text{м}$; $50\ \text{Дж}$]

МЕХАНІКА

Розділ 6. Гідроаеромеханіка

Гідроаеромеханіка вивчає рівновагу (**гідроаеростатика**) та рух (**гідроаеродинаміка**) рідин і газів, а також їхню дію на занурені тіла, що перебувають в стані рівноваги чи руху.

В гідроаеромеханіці рідини та гази розглядаються як суцільні середовища[53]. З цієї причини багато співвідношень та законів гідроаеромеханіки є спільними як для рідин, так і для газів. Тому далі будемо вживати, як це часто прийнято, єдиний термін – рідина, розуміючи його[54] як "рідина або газ".

Молекули рідин та газів мають велику рухливість[55], тому в цих середовищах відсутні сили тертя спокою. Це означає, що в стані рівноваги сили взаємодії між шарами рідини та між зануреним тілом та рідиною завжди напрямлені по нормалі до поверхонь дотикання. Крім того, рідина (і це відрізняє її від газу) є практично нестисливою – її об'єм не змінюється під дією зовнішніх сил. Всі основні положення гідроаеромеханіки є наслідками вказаних властивостей рідин та газів.

Між шарами реальної рухомої рідини та між рідиною та зануреними рухомими тілами діють сили внутрішнього тертя та опору середовища (**сили в'язкості**). Закони цих сил досить складні, тому в даному посібнику наведені лише деякі положення механіки ідеальної рідини, тобто такої, в якій сили в'язкості не враховуються.

Розділ 6. Гідроаеромеханіка

Теоретичні відомості

---

[53] Тобто не враховується атомно-молекулярна будова речовини.

[54] Якщо немає спеціальних застережень.

[55] Цим зумовлена властивість рідин приймати форму посудини, а газу – займати весь наданий об'єм.

Закон Паскаля, гідростатичний тиск

Сили, що діють в рідинах, не прикладені у певній точці, а неперервно розподілені по поверхні дотикання взаємодіючих шарів рідини, або по поверхні дотику рідини та твердого тіла. Тому взаємодія між окремими шарами рідини та між рідиною і твердими тілами характеризується не безпосередньо силою, а **тиском**. Тиск у рідинах має важливу особливість, яка зафіксована у **законі Паскаля**. Тиск, який створюється в рідині завдяки силі тяжіння, називається **гідростатичним тиском**.

На нестисливості рідини та здатності однаково передавати тиск у всіх напрямках грунтується дія простих механізмів: **гідравлічного преса та підйомника** (домкрата).

В різних гідравлічних механізмах використовуються **сполучені посудини**.

Тиск – це скалярна величина, що дорівнює відношенню модуля сили F_{n}, що діє перпендикулярно ділянці поверхні і рівномірно розподілена по ній, до площі ΔS цієї ділянки:

$$P = \frac{F_{\text{n}}}{\Delta S}. \qquad (6.1)$$

При нерівномірному розподілі сили по поверхні, розглядають силу F_{n}, яка діє на малу ділянку, при умові, що її площа $\Delta S \to 0$:

$$P = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta F_{\text{n}}}{\Delta S}. \qquad (6.1а)$$

Тиск характеризує механічний стан рідини у даній точці простору.

Тиск вимірюють у **паскалях** (Па): $\mathbf{1\ Па = 1\ \frac{Н}{м^2}}$. Використовують також позасистемні одиниці: **міліметри ртутного стовпчика** ($1\ \text{мм.рт.ст.} = 133{,}4\ \text{Па}$) та **атмосферу** ($1\ \text{атм} = 760\ \text{мм.рт.ст.} = 1{,}013 \cdot 10^5\ \text{Па}$).

Закон Паскаля:

в рідині тиск передається по всіх напрямках однаково.

Це твердження слід розуміти так, що

тиск, який діє в рідині на невеличку площадку, не залежить від орієнтації цієї площадки.

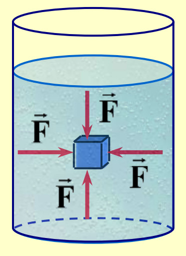


Рис.6.1

Наприклад, якщо занурити в рідину маленький кубик (**рис.6.1**), то діючі на всі його грані сили тиску будуть однаковими при будь-якому положенні кубика.

Закон Паскаля – це **основний закон гідростатики**. Всі її положення є наслідком закону Паскаля.

Тиск, який створюється в рідині завдяки силі тяжіння, називається **гідростатичним тиском**. Гідростатичний тиск $P_г$ у довільній точці[56] заданої рідини визначається тільки **висотою стовпа** рідини h, тобто відстанню по вертикалі від цієї точки до вільної поверхні рідини (**рис.6.2**):

$$P_г = \rho g h, \qquad (6.2)$$

де ρ – густина рідини, g – прискорення вільного падіння.

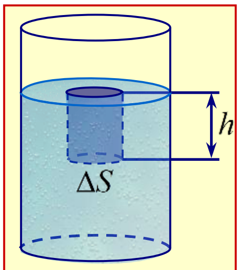


Рис.6.2

При наявності зовнішнього тиску[57] P_0 повний тиск у рідині на глибині h дорівнює сумі зовнішнього та гідростатичного тисків:

$$P = P_0 + \rho g h. \qquad (6.3)$$

Гідравлічний прес та **підйомник** складаються з двох сполучених циліндрів з різними площами перерізу ($S_1 < S_2$), що заповнені рідиною і щільно закриті поршнями (**рис.6.3**).

Дія зовнішньої сили F_1 на малий поршень створює у рідині тиск $P = F_1/S_1$, який, за законом Паскаля, однаковий у всіх точках[58]. При цьому на великий поршень діє сила тиску

$$F_2 = PS_2 = F_1 \cdot \frac{S_2}{S_1} > F_1. \qquad (6.4)$$

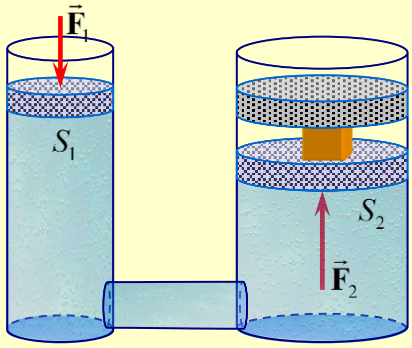


Рис.6.3

Отже,

мала сила $\vec{F}_1$, прикладена до меншого поршня S_1, створює значно більшу силу $\vec{F}_2$, що діє на більший поршень S_2.

Завдяки цьому можна підіймати великі вантажі (гідравлічний підйомник). Під дією сили $\vec{F}_1$ малий поршень переміщується на відстань l_1 і виштовхує з вузького циліндра рідину об'ємом $\Delta V = S_1 l_1$, яка переходить у широкий циліндр. При цьому великий поршень з вантажем переміщується на відстань

$$l_2 = \frac{\Delta V}{S_2} = l_1 \cdot \frac{S_1}{S_2}. \qquad (6.5)$$

З формул **(6.4)** і **(6.5)** видно, що

роботи сил $\vec{F}_1$ та $\vec{F}_2$ однакові, тобто виграючи в силі ми у стільки ж разів програємо у відстані.

Це так зване "**золоте правило механіки**", що є відображенням закону збереження енергії.

[56] Зокрема, це можуть бути точки на дні або на стінці посудини.

[57] Зовнішній тиск – це тиск, що діє на вільну поверхню рідини. Найчастіше P_0 – то є атмосферний тиск.

[58] Гідростатичним тиском у гідравлічному пресі нехтують, оскільки він значно менший, ніж зовнішній тиск.

У гідравлічному пресі (на відміну від гідравлічного підйомника) над великим поршнем розміщують міцну нерухому "стелю" (**рис.6.3**).

Сполучені посудини – це дві (або більше) відкриті посудини, які з'єднані між собою у нижній частині і заповнені рідиною (**рис.6.4**). Умовою рівноваги рідин у сполучених посудинах є рівність тисків у всіх точках трубки, що з'єднує посудини. Тому, згідно з формулою **(6.3)**, однорідна рідина в сполучених посудинах встановлюється на одному рівні незалежно від форми та площ перерізу посудин[59] (**рис.6.4а**).

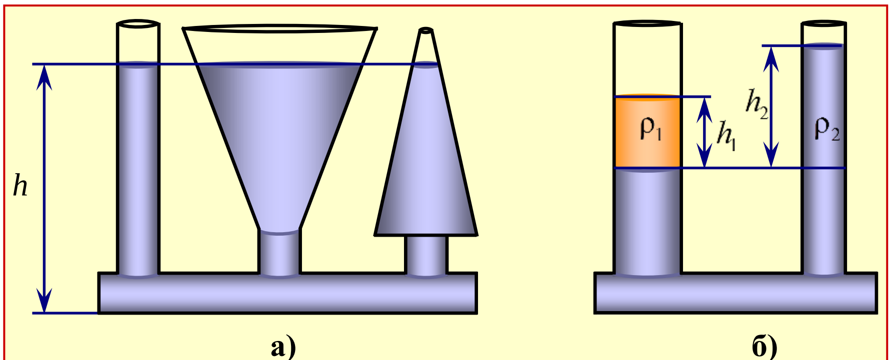


Рис.6.4

Якщо у колінах сполучених посудин знаходяться дві різні рідини (**рис.6.4б**), то відраховані від рівня поділу висоти стовпів незмішуваних рідин обернено пропорційні густинам цих рідин:

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{\rho_2}{\rho_1}. \qquad (6.6)$$

Сила Архімеда

При зануренні в рідину або газ гідростатичні тиски в різних точках поверхні тіла неоднакові. Це створює **виштовхувальну (архімедову) силу**, яка визначається **законом Архімеда**. Під дією архімедової сили спостерігається ефект спливання або плавання, який використовується у судноплавстві та аеронавтиці. Цей ефект має місце при виконанні **умов плавання**.

Закон Архімеда стверджує:

на занурене у рідину або газ тіло діє виштовхувальна сила, рівна та протилежно спрямована вазі рідини в об'ємі зануреної частини тіла

$$\vec{\mathbf{F}} = -\rho\left(\vec{\mathbf{g}} + \vec{\mathbf{a}}\right)V, \qquad (6.7)$$

де ρ – густина рідини, V – об'єм зануреної в рідину або газ частини тіла, $\vec{\mathbf{g}}$ – прискорення вільного падіння, $\vec{\mathbf{a}}$ – прискорення руху посудини з рідиною[60]

При русі посудини з прискоренням, поверхня рідини встановлюється перпендикулярно до вектора $\left(\vec{\mathbf{g}} + \vec{\mathbf{a}}\right)$, отже виштовхувальна сила (**сила Архімеда**) перпендикулярна вільній поверхні рідини. В нерухомій рідині ця сила напрямлена вертикально вгору, і її модуль дорівнює

$$F_A = \rho g V. \qquad (6.8)$$

Архімедова сила є рівнодійною сил тиску, з якими рідина (газ) діє на всі точки

[59] Тут не розглядаються капілярні явища.
[60] Далі (**задача 6.7**) показано, як можна одержати формулу **(6.7)**.

зануреного тіла. Вона завжди прикладена до тіла у центрі ваги тієї рідини, місце якої зайняло дане тіло.

Якщо тіло повністю занурене у рідину, то залежно від співвідношення між модулями сили тяжіння $F_{\text{тяж}}$ та сили Архімеда F_{A} можливі три випадки, які показано на **рис.6.5 а,б,в**):

1) $F_{\text{A}} < F_{\text{тяж}}$ – тіло тоне у рідині;

2) $F_{\text{A}} = F_{\text{тяж}}$ – тіло перебуває у зваженому стані (стані байдужої рівноваги) у будь-якій точці всередині рідини;

3) $F_{\text{A}} > F_{\text{тяж}}$ – тіло спливає на поверхню.

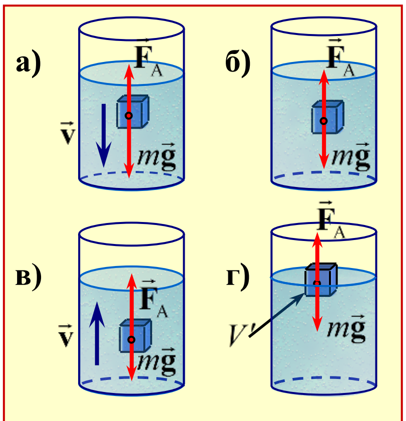


Рис.6.5

Після спливання тіла на поверхню архімедова сила, що зрівноважує силу тяжіння (**рис.6.5 г**), визначається об'ємом не всього тіла, а тільки його зануреної частини V' (**рис.6.5 г**).

Отже, для того, щоб тіло плавало або спливало, необхідно, щоб при повному зануренні виконувалася умова

$$F_{\text{тяж}} \le F_{\text{A}}.$$

Оскільки $F_{\text{тяж}} = mg = \rho_{\text{т}} Vg$ і при повному зануренні $F_{\text{A}} = \rho Vg$, то, згідно з розглянутими співвідношеннями **2)** та **3)**, занурене тіло не тоне тільки за умови[61]

$$\rho_{\text{т}} \le \rho, \qquad (6.9)$$

де $\rho_{\text{т}}$ – густина **речовини** тіла, ρ – густина рідини. Співвідношення **(6.9)** називають **умовою плавання**.

Елементи гідродинаміки

Розподіл тисків та швидкостей у рухомій рідині визначається **законами гідродинаміки**. В елементарній фізиці вивчається тільки усталений рух рідини, який підпорядкований **закону нерозривності потоку** і **рівнянню Бернуллі**. Потік рідини, що вільно падає з висоти, набуває швидкості, яка визначається **формулою Торрічеллі**, і має відповідну **потужність потоку**.

[61] Це стосується лише суцільних тіл. Порожнисті тіла можуть плавати та спливати і у випадку $\rho_{\text{т}} > \rho$. На цьому грунтується судно- та повітроплавство.

При стаціонарній (усталеній) течії ідеальної рідини всі її частинки, що проходять через дану точку простору, мають однакову швидкість. При цьому за одиницю часу через будь-який переріз потоку проходить однакова маса рідини Q (витрати рідини):

$$Q = \frac{m}{t} = \text{const.} \tag{6.10}$$

Якщо рідина густини ρ проходить через переріз S, маючи швидкість υ у всіх точках цього перерізу, то

$$Q = \rho S \upsilon. \tag{6.11}$$

З формул **(6.10)** та **(6.11)** випливає, що для двох довільних перерізів потоку

$$\rho S_1 \upsilon_1 = \rho S_2 \upsilon_2 \qquad \Rightarrow \qquad S_1 \upsilon_1 = S_2 \upsilon_2. \tag{6.12}$$

Добуток $S\upsilon$ називають **потоком**[62], а формулу **(6.12)** – **законом** (умовою) **нерозривності потоку** (струменя).

При стаціонарному русі між швидкістю течії та тиском у рідині існує простий зв'язок. Для будь-якої вибраної траєкторії руху частинок у потоці цей зв'язок виражається **рівнянням Бернуллі**:

$$P + \rho g h + \frac{\rho \upsilon^2}{2} = \text{const}, \tag{6.13}$$

де P – зовнішній тиск, υ – швидкість течії рідини у даній точці шару, h – висота даної точки над нульовим (нижнім) рівнем рідини у потоці, ρ – густина рідини.

У формулі **(6.13)** $\left(P + \rho g h\right)$ являє собою **статичний** тиск рідини, а доданок $\dfrac{\rho \upsilon^2}{2}$ – так званий **динамічний** тиск. Їх сума дає повний тиск у рухомій рідині.

Для заданих точок у двох довільних перерізах потоку ідеальної рідини, згідно з рівнянням Бернуллі, виконується рівність:

$$P_1 + \rho g h_1 + \frac{\rho \upsilon_1^2}{2} = P_2 + \rho g h_2 + \frac{\rho \upsilon_2^2}{2}. \tag{6.14}$$

Якщо рідина витікає з малого отвору у великій посудині (**рис.6.6**), то швидкість руху рідини у посудині можна вважати нехтовно малою ($\upsilon_1 = 0$), а зовнішні тиски[63] на отвір у посудині та поза нею – однаковими: $P_1 = P_2$. Тоді

$$\frac{\rho \upsilon^2}{2} = \rho g \left(h_1 - h_2\right).$$

Позначивши $h = h_1 - h_2$, одержимо

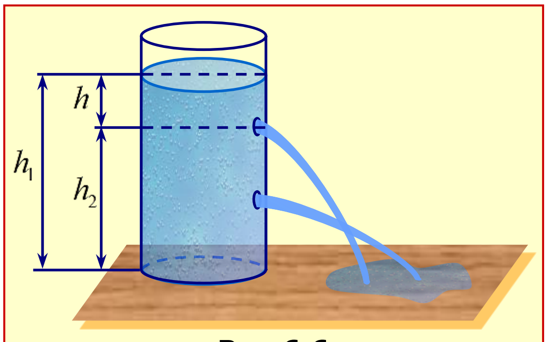


Рис.6.6

---

[62] **Потік** $\left(\text{м}^3/\text{с}\right)$ визначає об'єм рідини, що проходить крізь дану поверхню за одиницю часу.

[63] У даному випадку зовнішнім є атмосферний тиск P_0.

формулу Торрічеллі:

$$v = \sqrt{2gh}. \qquad (6.15)$$

Рідина, що рухається зі швидкістю v і падає з висоти h, має **потужність потоку**

$$N = \frac{W}{t} = \frac{W_к + W_п}{t} = \frac{mv^2}{2t} + \frac{mgh}{t}, \qquad (6.16а)$$

де W, $W_к$, $W_п$ – повна, кінетична та потенціальна енергії рідини відповідно, t – час падіння.

Вираз для потужності потоку можна записати й так:

$$N = \frac{Qv^2}{2} + Qgh; \qquad N = \rho\frac{Sv^2}{2} + \rho Svgh, \qquad (6.16б)$$

де $Q = m/t$ – витрата рідини.

Розділ 6. Гідроаеромеханіка. Розв'язування задач

Розв'язування задач гідростатики не вимагає спеціальних методів та прийомів. Слід використовувати загальні співвідношення механіки (наприклад, умови рівноваги тіла) та користуватися рекомендаціями до окремих тем. Також слід врахувати поради по організації розв'язування та оформлення розв'язку задач (див. **"Етапи розв'язування задач"**). Це ж стосується задач гідродинаміки, які розглядаються в елементарній фізиці.

Далі наведено задачі, які згруповані за темами:

Гідростатичний тиск	**Рекомендації до теми**		**Задача 6.1**
			Задача 6.2
			Задача 6.3
			Задача 6.4
	Задачі для самостійної роботи		**Задачі**
Сполучені посудини. Гідравлічні механізми	**Рекомендації до теми**		**Задача 6.5**
			Задача 6.6
	Задачі для самостійної роботи		**Задачі**
Сила Архімеда. Плавання тіл	**Рекомендації до теми**		**Задача 6.7**
			Задача 6.8
			Задача 6.9
			Задача 6.10
			Задача 6.11
			Задача 6.12
			Задача 6.13
			Задача 6.14
			Задача 6.15
			Задача 6.16
			Задача 6.17
			Задача 6.18
	Задачі для самостійної роботи		**Рівень А**
			Рівень Б
			Рівень В

Рекомендації до теми "Гідростатичний тиск"

Розв'язування задач на визначення гідростатичного тиску не потребує спеціальних рекомендацій, але при вивченні сили гідростатичного тиску може виникнути потреба розділити поверхню на малі ділянки, у межах яких тиск є однаковим, обчислити силу, що діє на кожну з них, і далі додати ці сили.

Тема: Гідростатичний тиск. Приклади

Задача 6.1

Три відра однакового об'єму (**рис.1**) і однакової висоти заповнені водою, маса якої становить m.

Визначити

сили гідростатичного тиску на дно кожного відра (F_0, F_1,), якщо $R_1 = 2R$. Пояснити одержаний результат.

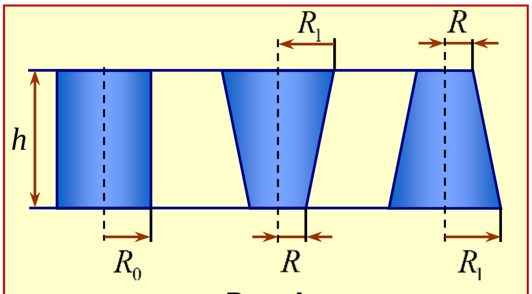


Рис.1

Дано:

R

$R_1 = 2R$

Визначити: F_0, F_1, F_2

Розв'язання

Позначимо висоту води у відрах h, радіус циліндричного відра R_0. Гідростатичний тиск P на дно кожного з відер однаковий і становить $P = \rho g h$, де ρ – густина води. Площі дна відер дорівнюють:

$$S_0 = \pi R_0^2, S_1 = \pi R^2, S_2 = \pi R_1^2 = 4\pi R^2,$$

і на них діють сили гідростатичного тиску (**рис.1-1**):

$$F_0 = P \cdot S_0 = \rho gh \cdot \pi R_0^2 = mg; \qquad (1)$$

$$F_1 = P \cdot S_1 = \rho gh \cdot \pi R^2; \qquad (2)$$

$$F_0 = P \cdot S_2 = 4\rho gh \cdot \pi R^2. \qquad (3)$$

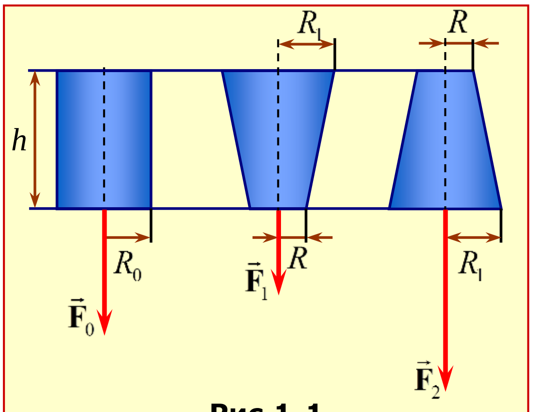


Рис.1-1

Об'єм води у конічних відрах дорівнює об'єму зрізаного конуса:

$$V = \frac{1}{3}\pi h \cdot \left(R^2 + R_1^2 + RR_1\right) = \frac{7}{3} 4\pi h R^2,$$

звідки $\pi h R^2 = \frac{3}{7}V$. Підставивши це значення у формули **(2)** та **(3)** і врахувавши **(1)**, одержимо:

$$F_0 = mg; \quad F_1 = \rho g \cdot \frac{3}{7}V = \frac{3}{7}mg; \quad F_2 = \rho g \cdot 4 \cdot \frac{3}{7}V = \frac{12}{7}mg.$$

Таким чином, сила тиску води на дно циліндричного відра дорівнює вазі води. У відрі, яке розширюється вгору, сила тиску менша ніж вага води, а у відрі, яке звужується вгору, – більша за вагу води.

Відміна у силах тиску води на дно конічних відер пояснюється тим, що на воду діє не тільки дно, а й стінки. У відрі, яке розширюється вгору, сила реакції стінок має складові, напрямлені вгору

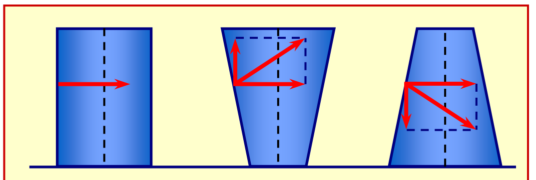


Рис.1-2

(**рис.1-2**), тобто частина ваги води врівноважується силами тиску стінок і тільки частина – силою реакції дна. Навпаки, у відрі, яке звужується вгору, сила реакції стінок має складову напрямлену вниз і ця сила через воду передається дну. Як наслідок, сила тиску на дно перевищує вагу рідини. Цей факт називають **гідростатичним парадоксом**.

Задача 6.2

Визначити,

на якій глибині h в озері тиск буде у $k=3$ рази більший ніж на поверхні. Атмосферний тиск становить $P_0=100\text{ кПа}$, густина води $\rho=10^3\text{ кг/м}^3$.

Дано:
$k=3$
$P_0=100\text{ кПа}=10^5\text{ Па}$
$\rho=10^3\text{ кг/м}^3$
$g=9{,}8\text{ м/с}^2$

Визначити: h

Розв'язання

На поверхню води діє атмосферний тиск P_0. Тиск P на глибині h у воді складається з тиску на поверхню та гідростатичного тиску: $P=P_0+\rho gh$. За умовою задачі маємо:

$$k=\frac{P}{P_0}=\frac{P_0+\rho gh}{P_0}; \qquad \Rightarrow \qquad h=\frac{(k-1)P_0}{\rho g}.$$

Виконаємо обчислення:

$$h=\frac{2\cdot 10^5}{10^3\cdot 9{,}8}=20{,}4\text{ м}.$$

Задача 6.3

Барометричну трубку відхилили на кут $\alpha=30°$ від вертикалі.

Визначити

довжину l стовпчика ртуті у трубці, якщо атмосферний тиск $H=750\text{ мм.рт.ст.}$

Дано:
$\alpha=30°$
$H=750\text{ мм.рт.ст.}$

Визначити: l

Розв'язання

Як відомо, гідростатичний тиск ртуті у трубці визначається тільки відстанню по вертикалі між даною точкою та верхнім рівнем ртуті h. Якщо за початок відліку обрати точку на рівні ртуті в посудині, то гідростатичний тиск становитиме $P_г=\rho gh$, де ρ – густина ртуті (**рис.3**). Сила гідростатичного тиску у трубці зрівноважена силою атмосферного тиску, тому $P_0=\rho gh$. Тиск в міліметрах ртутного стовпа чисельно дорівнює висоті стовпа ртуті, тобто $H=h$. З **рис.3** неважко збагнути, що довжина стовпчика ртуті у трубці становить

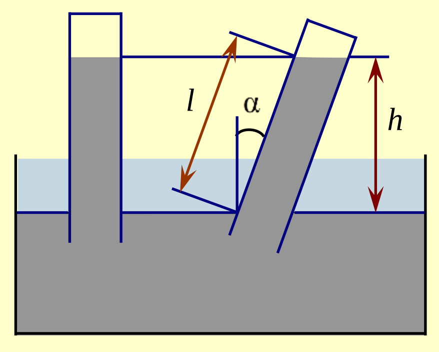


Рис.3

$$l=\frac{H}{\cos\alpha}=\frac{750}{\cos 30°}=866\text{ мм}.$$

Задача 6.4

Акваріум, що має плоску прямокутну передню стінку висотою $h = 40$ см і шириною $b = 50$ см, заповнений водою.

Визначити

силу F гідростатичного тиску на цю стінку.

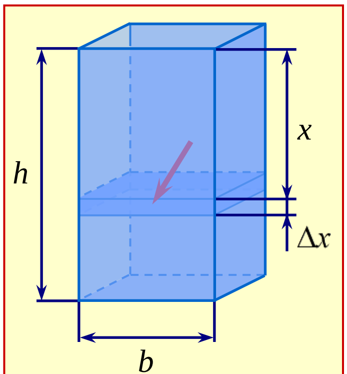


Рис.4

Дано:
$h = 40$ см
$b = 50$ см
$\rho = 10^3$ кг/м^3
$g = 9{,}8$ м/с^2

Визначити: F

Розв'язання

Гідростатичний тиск змінюється з глибиною, тому і сила тиску, що діє на окремі маленькі ділянки стінки акваріуму, залежить від глибини.

Розглянемо ділянку стінки у вигляді тоненької горизонтальної смужки висотою Δx, розташованої на глибині x (**рис.4**). Висоту смужки візьмемо малою, так, щоб зміна тиску в її межах була незначною. Тоді сила тиску на смужку наближено виражається як:

$$\Delta F_i \approx P_г(x_i) \cdot \Delta S = P_г(x_i) \cdot b \cdot \Delta x_i.$$

На графіку $P_г(x_i) \cdot b = f_г(x)$ сила ΔF_i являє собою площу прямокутника, ширина якого Δx_i, а висота $P_г(x)b$ (**рис.4-1а**).

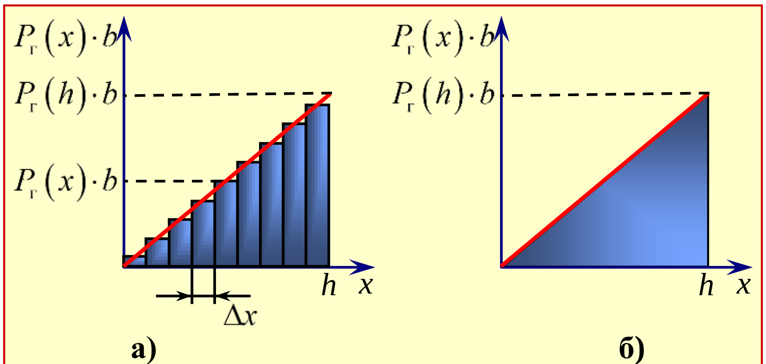


Рис.4-1

Загальна сила, що діє на стінку, дорівнює сумі сил ΔF_i:

$$F = \sum_i \Delta F_i.$$

Наближено ця сила чисельно дорівнює сумі площ прямокутників:

$$F = \sum_i \left[\left(P_г(x_i) \cdot b \right) \cdot \Delta x_i \right].$$

Точне значення отримаємо, якщо прямокутники будуть гранично вузькими ($\Delta x \to 0$). При цьому "сходинки" зіллються з графіком $P_г(x)b$, а сума площ прямокутників стане рівною площі трикутника, показаного на **рис.4-1б**. Отже,

$$F = \frac{1}{2} P(h) \cdot b \cdot h = \frac{1}{2} \rho g h \cdot b \cdot h = \rho g \cdot \frac{h}{2} \cdot b \cdot h.$$

З цієї формули випливає, що сила тиску води на стінку дорівнює добутку гідростатичного тиску на половині глибини (на рівні розташування центра мас рідини) на площу стінки.

Обчислення дає:

$$F = \frac{1}{2} \cdot 10^3 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}4 = 392 \text{ Н}.$$

Тема: Гідростатичний тиск

Задачі для самостійної роботи

6.1 У циліндричне відро діаметром $d = 25$ см налито воду, яка займає об'єм $V = 12$ л. Визначити: **А)** тиск води на стінку відра на висоті $h = 10$ см від дна; **Б)** силу, що діє на дно відра. [$1,4$ кПа ; 120 Н]

6.2 На яку найбільшу висоту можна піднімати воду поршневим насосом при атмосферному тиску $P_0 = 100$ кПа ? [~ 10 м]

6.3 У циліндричну посудину налили однакові за масою воду і ртуть. Загальна висота стовпа рідини в посудині h = 143 см. Визначити тиск на дно посудини. [$26,1$ кПа]

6.4 Куля перекриває отвір радіуса r у плоскій стінці, яка розділяє рідини, тиск у яких дорівнює P і $3P$. З якою силою притискається куля до отвору? [$2\pi r^2 P$]

Тема: Сполучені посудини. Гідравлічні механізми

Рекомендації до теми

При розв'язуванні задач, в яких представлені сполучені посудини, необхідно:

1) Зробити рисунок, на якому згідно з умовою показати рівні всіх рідин у вихідному стані.

2) Обрати нульовий рівень на найнижчій межі поділу рідин.

3) Скласти рівняння рівноваги, прирівнюючи тиски на поверхні нульового рівня у різних колінах посудин:

$$\sum_{i=1}^{n} P_i = \sum_{k=1}^{m} P'_k,$$

де P_i та P'_k – тиски стовпів рідин в одному та другому колінах. Більш розгорнуто ця умова записується так:

$$P_0 + \rho_1 g h_1 + \ldots + \rho_n g h_n = P'_0 + \rho'_1 g h'_1 + \ldots + \rho'_n g h'_n,$$

де P_0, P'_0 – тиск на вільній поверхні рідини у різних частинах посудини (найчастіше – це атмосферний тиск), а доданки $\rho g h$, $\rho' g h'$ – гідростатичний тиск окремих стовпів рідини у різних частинах посудини.

4) Якщо за умовою задачі при встановленні рівноваги відбувається перетікання рідини з однієї частини посудини в іншу, необхідно показати висоти всіх стовпів **до** та **після** встановлення рівноваги (висоти стовпів відраховують від нульового рівня). Доповнити складені рівняння рівноваги умовою нестисливості рідин: при зменшенні об'єму рідини в одній частині посудини він зростає на таку ж величину в іншій, тобто загальний об'єм рідини залишається незмінним.

5) Розв'язати отриману систему рівнянь, врахувавши всі інші умови задачі.

Тема: Сполучені посудини. Гідравлічні механізми. Приклади

Задача 6.5

Гідравлічний прес заповнений водою та закритий невагомими поршнями, які рухаються без тертя. На більший поршень площею $S_1 = 1000\ \text{см}^2$ стає людина масою $m = 80\ \text{кг}$.

Визначити,

висоту h, на яку підніметься при цьому менший поршень, якщо його площа $S_2 = 100\ \text{см}^2$.

Дано:
$S_1 = 1000\ \text{см}^2$
$S_2 = 100\ \text{см}^2$
$m = 80\ \text{кг}$
$\rho = 1000\ \text{кг/м}^3$
$g = 9{,}8\ \text{м/с}^2$

Визначити: h

Розв'язання

Тиск на рідину (воду) у гідравлічному пресі зумовлений взаємодією між поршнями та рідиною (повітря під поршнями відсутнє). У початковому положенні (**рис.5а**) поршні встановлюються на одному рівні, оскільки вони невагомі.

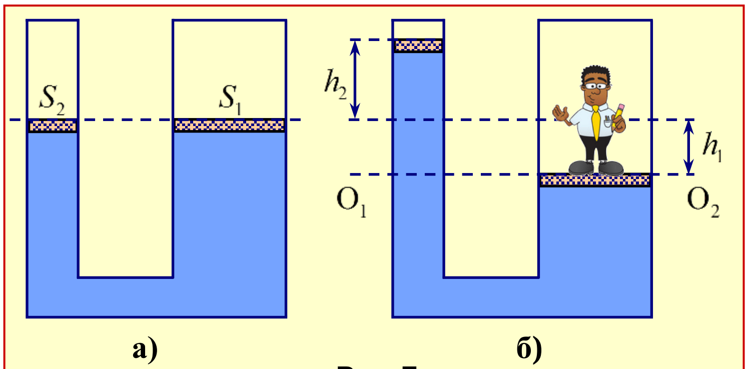


Рис.5

Якщо на більший поршень стане людина (**рис.5б**), то він опуститься на h_1. В результаті, з більшого циліндра буде витиснуто об'єм води $V = S_1 h_1$, який перейде у менший циліндр і підніме малий поршень на h_2. При цьому

$$S_1 h_1 = S_2 h_2. \qquad (1)$$

Оберемо за початок відліку висоти стовпа води (нульовий рівень) межу поділу "вода – більший поршень" після встановлення рівноваги O_1O_2. Тиск на воду у більшому циліндрі на цьому рівні визначається вагою людини та тиском атмосфери: $P_1 = P_0 + mg/S_1$, а у меншому – атмосферним та гідростатичним тиском: $P_2 = P_0 + \rho g\left(h_1 + h_2\right)$. У стані рівноваги $P_1 = P_2$, тому:

$$\frac{mg}{S_1} = \rho g\left(h_1 + h_2\right). \qquad (2)$$

Сумісне розв'язування рівняння **(1)** і **(2)** дає:

$$h = \frac{m}{\rho\left(S_1 + S_2\right)} = \frac{80}{1000\cdot\left(0{,}1 + 0{,}01\right)} = 0{,}727\ \text{м}.$$

Задача 6.6

У сполучених посудинах знаходиться ртуть. В одне коліно наливають воду, а в друге – олію так, що верхні рівні води та олії в колінах встановилися на одному рівні (**рис.6**).

Визначити

висоту стовпа $h_в$ води, якщо висота стовпа олії $h_о = 40\,\text{см}$. Густина олії $\rho_о = 0,75\,\text{г}/\text{см}^3$, води – $\rho_в = 1\,\text{г}/\text{см}^3$, ртуті – $\rho_р = 13,6\,\text{г}/\text{см}^3$.

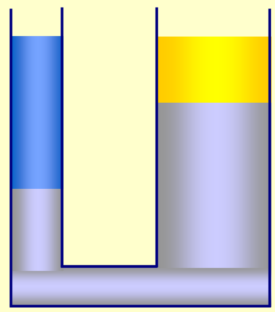


Рис.6

Дано:

$h_о = 40\,\text{см}$

$\rho_о = 0,75\,\text{г}/\text{см}^3$

$\rho_в = 1\,\text{г}/\text{см}^3$

$\rho_р = 13,6\,\text{г}/\text{см}^3$

Визначити: $h_в$

Розв'язання

Оскільки $\rho_в > \rho_о$, то найнижча межа поділу рідин (**рис.6-1**) – це межа "вода-ртуть" (O_1O_2). Тиск у лівому коліні на рівні O_1O_2 зумовлений атмосферним тиском P_0 та гідростатичним тиском води:

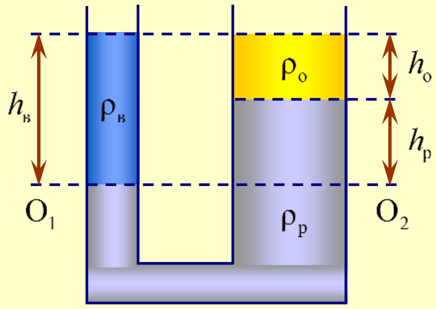


Рис.6-1

$$P_2 = P_0 + \rho_в g h_в.$$

У правому коліні на рівні O_1O_2 тиск визначається атмосферним тиском, гідростатичними тисками стовпа олії висотою $h_о$ та стовпа ртуті висотою $h_р$:

$$P_1 = P_0 + \rho_о g h_о + \rho_р g h_р.$$

У стані рівноваги тиск на нульовому рівні у лівому та правому колінах однаковий. Крім того, оскільки верхні рівні рідин у колінах однакові, висоти стовпів пов'язані співвідношенням $h_р = h_в - h_м$. Таким чином, маємо систему:

$$\begin{cases} \rho_о g h_о + \rho_р g h_р = \rho_в g h_в; \\ h_р = h_в - h_м, \end{cases}$$

розв'язавши яку відносно $h_в$, маємо:

$$h_в = \frac{\rho_р - \rho_о}{\rho_р - \rho_в} h_о.$$

Всі величини, які входять в остаточну формулу, виражені в $\text{г}/\text{см}^3$ та см, тому і результат ми одержимо в сантиметрах:

$$h_в = \frac{13,6 - 0,75}{13,6 - 1} \cdot 40 = 40,79\,\text{см}.$$

Задачі для самостійної роботи

6.5 Малий поршень гідравлічного преса за один хід опускається на $h_1 = 0,2\,\text{м}$, а великий поршень піднімається на $h_2 = 0,01\,\text{м}$. З якою силою прес діє на затиснуте в ньому тіло, якщо на малий поршень діє сила $F_1 = 500\,\text{Н}$? $[10\,\text{кН}]$

6.6 Для піднімання вантажу масою $m = 2\,\text{т}$ за допомогою гідравлічного пресу виконано роботу $A = 40\ \text{Дж}$. При цьому малий поршень зробив $n = 10$ ходів, переміщуючись кожного разу на $h = 10\ \text{см}$. Визначити співвідношення площі більшого поршня до площі меншого. $[\,500\,]$

6.7 У відкриту трубку перерізом $S = 2\ \text{см}^2$, вставлену у воду, наливають $m = 72\ \text{г}$ олію з густиною $\rho = 900\ \text{кг/м}^3$. Визначити різницю верхніх рівнів олії та води. $[\,4\ \text{см}\,]$

Рекомендації до теми "Сила Архімеда. Плавання тіл"

Задачі, в яких розглядається плавання тіл, розв'язують за таким самим загальним планом, як і задачі динаміки та статики твердих тіл, але з урахуванням архімедової сили. При цьому необхідно виконати наступне.

1) Зробити рисунок, на якому показати всі сили, що діють на занурене у рідину (газ) тіло. Тут не слід забувати, що сили тиску рідини (газу) на верхню та нижню поверхні тіла вже враховані у виштовхувальній силі.

Якщо у задачі мова йде про вагу тіла, то зручно вважати, ніби воно висить на нитці або лежить на дні посудини. При цьому вага тіла чисельно дорівнює силі натягу нитки або силі нормальної реакції дна.

Якщо тіло плаває на межі поділу двох рідин, виштовхувальна сила, що діє на тіло, дорівнює:

$$F = \rho_1 g V_1 + \rho_2 g V_2,$$

де V_1 та V_2 – об'єми частин тіла, занурених у рідини, що мають густину ρ_1 і ρ_2 відповідно.

2) Скласти основне рівняння динаміки поступального руху:

$$\sum_{\mathrm{i}} \vec{\mathbf{F}}_{\mathrm{i}} = m\vec{\mathbf{a}}.$$

Якщо занурене тіло знаходиться у спокої, то основне рівняння спрощується, оскільки його права частина обертається на нуль, і задача перетворюється на задачу статики. У деяких випадках для розв'язання такої задачі необхідно ще скласти рівняння для моментів сил.

3) Далі, за загальними правилами розв'язування задач механіки, скласти додаткові рівняння згідно з умовою задачі, перевірити кількість невідомих в одержаній системі рівнянь і розв'язати її відносно шуканих величин.

Тема: Сила Архімеда. Плавання тіл. Приклади

Задача 6.7

Посудина з рідиною рухається вертикально вгору з прискоренням a. В рідині знаходиться кубик, об'ємом V.

Визначити,

на скільки відрізняються сили тиску рідини на верхню та нижню грані кубика, якщо густина рідини дорівнює ρ.

Дано:

a

V

ρ	
Визначити: F	

Розв’язання

Цю задачу зручно розв'язувати відносно неінерціальної системи відліку, яка рухається вгору з прискоренням a. В такій системі рідина знаходиться у спокої, а це означає, що сума сил, діючих на будь-яку частину її об'єму, дорівнює нулю.

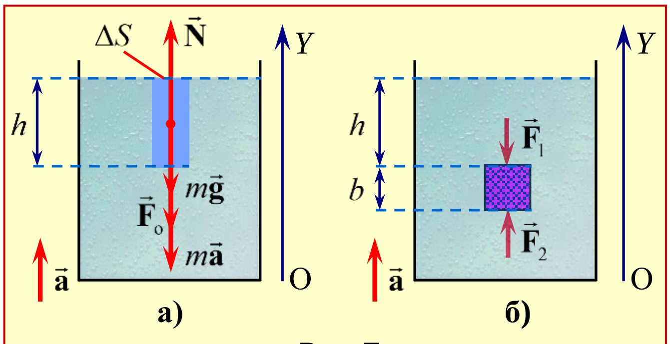


Рис.7

Виділимо стовпчик рідини висотою h і площею ΔS, під яким знаходиться верхня грань кубика (**рис.7а**). На цей стовпчик діють сила тяжіння $m\vec{\mathbf{g}}$, сила інерції $\vec{\mathbf{F}}_{\text{ін}} = -m\vec{\mathbf{a}}$, сила атмосферного тиску $\vec{\mathbf{F}}_0$ та сила реакції верхньої грані кубика $\vec{\mathbf{N}}$.

Умова спокою стовпчика в неінерціальній системі відліку має вигляд:

$$m\vec{\mathbf{g}} + m\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{N}} + \vec{\mathbf{F}}_0 = 0,$$

а у проекціях на вісь OY:

$$N = mg + ma + F_0 = \rho \cdot \Delta S \cdot h \cdot (g + a) + F_0.$$

За третім законом Ньютона на верхню грань кубика з боку рідини діє така сама за величиною і протилежна за напрямком сила $F_1 = N$. Якщо сторона кубика дорівнює b, то $\Delta S = b^2$ і

$$F_1 = N = \rho \cdot b^2 \cdot h \cdot (g + a) + F_0.$$

Так само можна визначити силу F_2, що діє з боку рідини на нижню грань кубика. Відміна буде полягати тільки в тому, що нижня грань розташована на глибині $h + b$, і сила F_2 напрямлена вгору (**рис.7б**):

$$F_2 = \rho \cdot b^2 \cdot (h + b) \cdot (g + a) + F_0.$$

Рівнодійна сил F_1 і F_2 напрямлена вгору (оскільки $F_1 < F_2$), і її модуль становить:

$$F = F_2 - F_1 = \rho \cdot (g + a) \cdot b^3 = \rho \cdot (g + a) \cdot V.$$

Силу F **називають** виштовхувальною силою **(силою Архімеда).**

Задача 6.8

Посудина з водою зрівноважена на терезах.

Чи зміниться

рівновага, якщо у воду занурити палець, не торкаючись при цьому а ні дна, а ні стінок посудини?

Розв’язання

На занурений у воду палець діє виштовхувальна сила з боку води. Рівна за модулем і протилежна за напрямком сила діє на воду і через воду ця сила передається на дно посудини. Таким чином рівновага терезів порушиться.

Пояснити порушення рівноваги можна також тим, що при зануренні пальця рівень води у посудині піднімається, а це призводить до збільшення сили гідростатичного тиску на дно.

Таким чином, правильна відповідь до даної задачі – "Так"**.**

Задача 6.9

Однорідний суцільний сталевий циліндр висотою $h = 5\,\text{см}$ плаває в ртуті, при цьому його основи горизонтальні. На ртуть наливають воду, доки вода не досягне верхньої основи циліндра.

Визначити

товщину шару води x. Густина сталі $\rho_{ст} = 7{,}8\ г/см^3$, води – $\rho_в = 1\ г/см^3$, ртуті – $\rho_р = 13{,}6\ г/см^3$.

Дано:
$h = 5\ см$
$\rho_{ст} = 7{,}8\ г/см^3$
$\rho_в = 1\ г/см^3$
$\rho_р = 13{,}6\ г/см^3$

Визначити: $h_в$

Розв'язання

На бічну поверхню циліндра діють сили тиску рідин, які зрівноважені. У вертикальному напрямі на циліндр діють (**рис.9**) сила тяжіння $m\vec{\mathbf{g}}$ та сили тиску на верхню $\vec{\mathbf{F}}_1$ та нижню $\vec{\mathbf{F}}_2$ основи. Оскільки циліндр плаває, тобто знаходиться у рівновазі, сума проекцій сил на вісь OY дорівнює нулю:

$$F_2 - F_1 - mg = 0. \qquad (1)$$

Сила F_1 визначається тільки атмосферним тиском P_0, тобто $F_1 = P_0 S$, де S – площа основи циліндра, а сила F_2 – атмосферним тиском, гідростатичним тиском шару води та шару ртуті:

$$F_2 = \left(P_0 + \rho_в g x + \rho_р g\left(h - x\right)\right) \cdot S.$$

Врахувавши, що маса циліндра $m = \rho_{ст} S h$, з формули **(1)** отримаємо:

$$\rho_{ст} h = \rho_в x + \rho_р \left(h - x\right) \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{\rho_р - \rho_{ст}}{\rho_р - \rho_в} h.$$

Виконаємо обчислення:

$$x = \frac{13{,}6 - 7{,}8}{13{,}6 - 1} \cdot 5 = 2{,}3\ см.$$

Задача 6.10

Сталева порожниста куля масою $m = 5\ кг$ плаває у воді, занурившись рівно наполовину.

Визначити

об'єм порожнини $V_п$. Густина води $\rho_в = 1000\ кг/м^3$, густина сталі $\rho_{ст} = 7800\ кг/м^3$.

Дано:
$m = 5\ кг$
$\rho_{ст} = 7800\ кг/м^3$
$\rho_в = 1000\ кг/м^3$

Визначити: $V_п$

Розв'язання

На кулю, що плаває у воді, діють сила тяжіння $m\vec{\mathbf{g}}$ та сила Архімеда $\vec{\mathbf{F}}_А$ (**рис.10**).

Оскільки куля знаходиться в рівновазі, сума проекцій сил на вісь OY дорівнює нулю:

$$F_А - mg = 0. \qquad (1)$$

Сила Архімеда $F_А = \rho_{ст} g V/2$ (V – об'єм кулі). Тому $mg = \rho_в g V/2$, а звідки випливає, що $m = \rho_в \left(V/2\right)$.

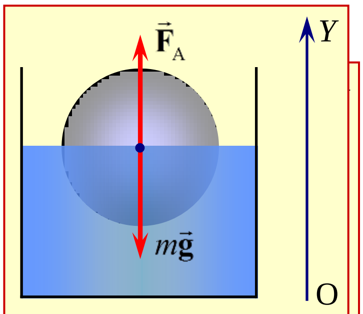


Рис.10

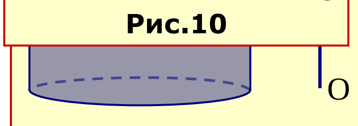


Рис.9

Об'єм кулі складається з об'єму сталі $V_{ст}$ та об'єму порожнини $V_п$: $V = V_{ст} + V_п$. В свою чергу, об'єм сталі дорівнює відношенню маси кулі до густини сталі: $V_{ст} = m/\rho_{ст}$. Таким чином, маємо:

$$\rho_в = \left(\frac{m}{\rho_{ст}} + V_п\right) = 2m \qquad \Rightarrow \qquad V_п = m\left(\frac{2}{\rho_в} - \frac{1}{\rho_{ст}}\right).$$

Виконаємо обчислення:

$$V_п = 5\cdot\left(\frac{2}{1000} - \frac{1}{7800}\right) = 9{,}36\cdot 10^{-3}\ \text{м}^3.$$

Задача 6.11

Шматок сплаву золота та міді важить у повітрі $Q_1 = 0{,}49\ \text{Н}$, а у воді – $Q_2 = 0{,}447\ \text{Н}$.

Визначити

маси золота $m_з$ та міді $m_м$ у сплаві. Густина золота $\rho_з = 19300\ \text{кг}/\text{м}^3$, міді $\rho_м = 8900\ \text{кг}/\text{м}^3$, води $\rho_в = 1000\ \text{кг}/\text{м}^3$.

Дано:
$Q_1 = 0{,}49\ \text{Н}$
$Q_2 = 0{,}447\ \text{Н}$
$\rho_з = 19300\ \text{кг}/\text{м}^3$
$\rho_м = 8900\ \text{кг}/\text{м}^3$
$\rho_в = 1000\ \text{кг}/\text{м}^3$

Визначити: $m_з$, $m_м$

Розв'язання

Вага – це сила, з якою тіло тисне на опору або розтягує вертикальний підвіс і у повітрі вона дорівнює силі тяжіння $Q_1 = mg$, де m – сума мас золота та міді[64]:

$$m = m_з + m_м. \tag{1}$$

Припустимо, що шматок висить на невагомій нитці (**рис.11**).

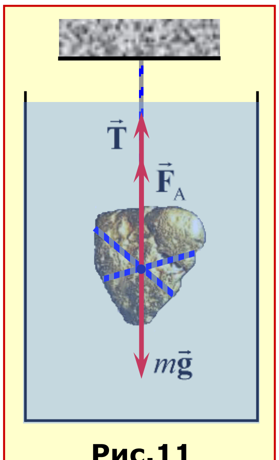


Рис.11

Тоді у воді на нього діють сила тяжіння $m\vec{g}$, сила Архімеда $\vec{F}_A$ та сила натягу нитки $\vec{T}$, напрямлені протилежно. Сила натягу нитки чисельно дорівнює вазі тіла, тому

$$Q_2 = mg - F_A = Q_1 - \rho_в gV.$$

Об'єм сплаву складається з об'ємів золота та міді, які дорівнюють відношенню маси речовини до його густини:

$$V = V_з + V_м = \frac{m_з}{\rho_з} + \frac{m_м}{\rho_м} \qquad \Rightarrow \qquad \rho_в g\left(\frac{m_з}{\rho_з} + \frac{m_м}{\rho_м}\right) = Q_1 - Q_2.$$

Розв'язавши сумісно останнє рівняння та рівняння **(1)** відносно мас компонентів сплаву, одержимо:

$$m_з = \frac{\rho_з\rho_м}{(\rho_з - \rho_м)g}\left(\frac{Q_1}{\rho_м} - \frac{Q_1 - Q_2}{\rho_в}\right),$$

[64] Силою Архімеда, яка діє на сплав у повітрі, знехтуємо.

$$m_м = \frac{\rho_з \rho_м}{(\rho_з - \rho_м) g}\left(\frac{Q_1 - Q_2}{\rho_в} - \frac{Q_1}{\rho_з}\right).$$

Виконаємо обчислення:

$$m_з = \frac{19300 \cdot 8900}{(19300 - 8900) \cdot 9,8} \cdot \left(\frac{0,49}{8900} - \frac{0,49 - 0,447}{1000}\right) = 2,03 \cdot 10^{-2} \text{ кг} = 20,3 \text{ г}.$$

$$m_м = \frac{19300 \cdot 8900}{(19300 - 8900) \cdot 9,8} \cdot \left(\frac{0,49 - 0,447}{1000} - \frac{0,49}{19300}\right) = 2,97 \cdot 10^{-2} \text{ кг} = 29,7 \text{ г}.$$

Задача 6.12

Один кінець тонкого стержня, виготовлений з матеріалу густиною $\rho = 360 \text{ кг/м}^3$, закріплено шарнірно, а другий – опущено у воду і не торкається дна.

Визначити,

яка частина палички k занурена у воді при рівновазі. Густина води $\rho_в = 1000 \text{ кг/м}^3$.

Дано:
$\rho = 360 \text{ кг/м}^3$
$\rho_в = 1000 \text{ кг/м}^3$

Визначити: k

Розв'язання

Припустимо, що довжина палички дорівнює l, кут між паличкою та горизонтом – α, і в рівновазі під водою знаходиться частина палички довжиною x (**рис.12**).

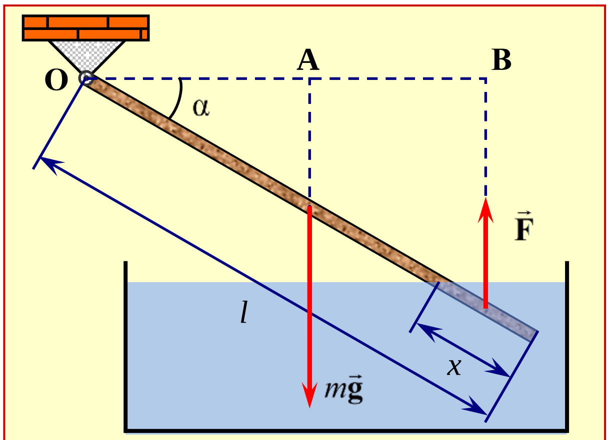


Рис.12

На паличку діють сила тяжіння $m\vec{g}$, прикладена у центрі мас, та сила Архімеда $\vec{F}$, прикладена у центрі зануреної частини. Умовою рівноваги тіла з віссю обертання є рівність нулю суми моментів сил відносно цієї осі (вісь обертання палички проходить через шарнір – точку O на **рис.12**:

$$mg \cdot \text{OA} - F \cdot \text{OB} = 0. \qquad (1)$$

Відрізки OA та OB дорівнюють відповідно:

$$\text{OA} = (l/2) \cdot \cos\alpha; \qquad \text{OB} = \left(l - \frac{x}{2}\right) \cdot \cos\alpha.$$

Тоді:

$$mg\cdot\frac{l}{2}=F\cdot\left(l-\frac{x}{2}\right)\quad\Rightarrow\quad\rho V\frac{l}{2}=\rho_в V'\left(l-\frac{x}{2}\right),$$

де V – об'єм палички, V' – об'єм зануреної частини палички, $\rho_в$ – густина води. Позначивши площу перерізу палички S, одержимо:

$$\rho Sl\frac{l}{2}=\rho_в Sx\cdot\left(l-\frac{x}{2}\right)\quad\Rightarrow\quad\left(\frac{x}{l}\right)^2-2\frac{x}{l}+\frac{\rho}{\rho_в}=0.$$

Підставимо в останню формулу числові дані і розв'яжемо квадратне рівняння. В результаті дістанемо:

$$\frac{x}{l}=1\pm 0,8.$$

Корінь $x/l=1{,}8$ не має фізичного змісту, тому відповідь:

$$k=\frac{x}{l}=\frac{1}{5}=0,2.$$

Задача 6.13

Дерев'яна пластинка має площу $S=36\,\text{см}^2$ і товщину $h=2\,\text{см}$. Натерши парафіном нижню грань пластинки, її поклали на дно посудини. Потім у посудину обережно налили воду, товщина шару якої $H=12\,\text{см}$.

Визначити

найменшу силу F, яку слід прикласти до середини одного з верхніх ребер пластинки, щоб пластинка почала спливати. Густина води $\rho_в=1000\,\text{кг}/\text{м}^3$, густина дерева , атмосферний тиск . Прийняти прискорення вільного падіння $g=10\,\text{м}/\text{с}^2$.

Дано:

$S=36\,\text{см}^2=3,6\cdot10^{-3}\,\text{м}^2$

$h=2\,\text{см}=2\cdot10^{-2}\,\text{м}$

$H=12\,\text{см}=12\cdot10^{-2}\,\text{м}$

$\rho_в=1000\,\text{кг}/\text{м}^3$

$\rho_д=650\,\text{кг}/\text{м}^3$

$P_0=10^5\,\text{Па}$

$g=10\,\text{м}/\text{с}^2$

Визначити: F

Розв'язання

Дерев'яний брусок спочатку лежить на дні і не спливає на поверхню, оскільки він щільно прилягає до дна посудини і вода не проникає між бруском та дном. Це означає, що виштовхувальна сила не виникає і сила тяжіння бруска $m\vec{\mathbf{g}}$, сила гідростатичного тиску $\vec{\mathbf{F}}_г$ та сила атмосферного тиску $\vec{\mathbf{F}}_0$ притискають брусок до дна.

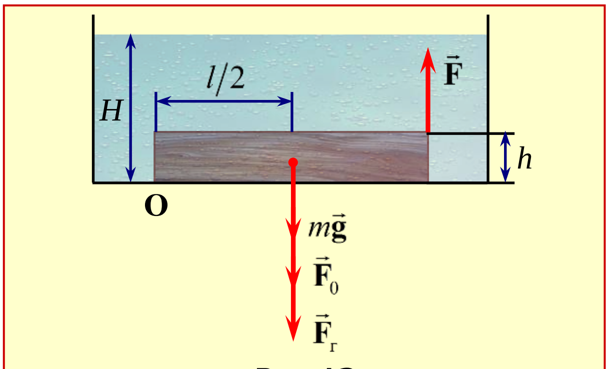


Рис.13

Для того, щоб брусок почав спливати, необхідно відірвати його від дна. Для цього сила $\vec{\mathbf{F}}$ повинна створити момент відносно осі, що проходить через точку O (**рис.13**), який би був не меншим за момент суми сил $m\vec{\mathbf{g}}+\vec{\mathbf{F}}_0+\vec{\mathbf{F}}_г$:

$$F\cdot l \ge \left(mg+F_0+F_г\right)\cdot\frac{l}{2}.$$

де l – сторона бруска.

Врахувавши, що $m=\rho_д Sh$, $F_0=SP_0$, $F_г=\rho_в g\left(H-h\right)$, одержимо:

$$F\ge\frac{1}{2}\cdot\left(\rho_д gh+P_0+\rho_в g\left(H-h\right)\right)\cdot S.$$

Виконаємо обчислення:

$$F\ge\frac{1}{2}\cdot\left(650\cdot10\cdot2\cdot10^{-2}+10^5+10^3\cdot10\cdot\left(12\cdot10^{-2}-2\cdot10^{-2}\right)\right)\cdot3{,}6\cdot10^{-3}=182\text{ Н}.$$

Задача 6.14

Куля об'ємом $V=10\text{ см}^3$ опускається у воді зі сталою швидкістю.

Визначити

силу F, яка повинна діяти на кулю, щоб вона рівномірно рухалась вгору зі швидкістю у $k=3$ рази більшою ніж при опусканні. Сила опору руху кулі у воді прямо пропорційна її швидкості. Густина матеріалу кулі $\rho=2700\text{ кг/м}^3$, густина води $\rho_в=1000\text{ кг/м}^3$.

Дано:
$V=10\text{ см}^3=10^{-5}\text{ м}^3$
$k=3$
$\rho=2700\text{ кг/м}^3$
$\rho_в=1000\text{ кг/м}^3$

Визначити: F

Розв'язання

Рівномірний рух кулі вниз відбувається під дією сили тяжіння $m\vec{\mathbf{g}}$, сили Архімеда $\vec{\mathbf{F}}_А$ та сили опору $\vec{\mathbf{F}}_о$ (**рис.14а**), напрямлених вертикально. Сила опору завжди протилежна напрямку відносної швидкості тому у проекціях на вісь OY рівняння руху має вигляд:

$$F_А+F_о-mg=0.$$

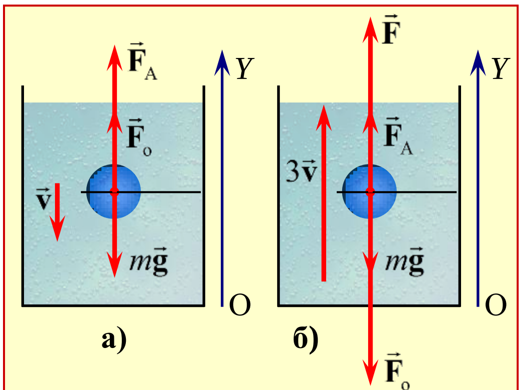


Рис.14

Оскільки сила опору прямо пропорційна швидкості $F_о=\alpha v$, маємо:

$$F_А+\alpha v-mg=0\qquad\Rightarrow\qquad\alpha v=mg-F_А.\qquad(1)$$

При русі кулі вгору під дією сили F на неї діють такі ж самі сили (**рис.14б**), але тут сила опору напрямлена вниз. У проекціях на вісь OY рівняння руху має вигляд:

$$F+F_А-F_о-mg=0\qquad\Rightarrow\qquad F=mg+\alpha kv-F_А.$$

Підставивши сюди величину αv з формули **(1)**, одержимо:

$$F=mg+kmg-kF_А-F_А=\left(k+1\right)\cdot\left(\rho-\rho_в\right)\cdot g\cdot V,$$

де $\rho_в=1000\text{ кг/м}^3$ – густина води. Обчислення дає:

$$F=4\cdot1700\cdot9{,}8\cdot10^{-5}=0{,}67\text{ Н}.$$

Задача 6.15

Алюмінієвий циліндр висотою $h = 1\,\text{м}$ і площею перерізу $S = 0,25\,\text{м}^2$ підіймають у вертикальному положенні з дна озера глибиною $H_1 = 5\,\text{м}$ на причал висотою $H_2 = 3\,\text{м}$ за допомогою тонкого троса.

Визначити

роботу A по підняттю циліндру. Густина алюмінію $\rho_\text{А} = 2700\,\text{кг}/\text{м}^3$, густина води $\rho_\text{в} = 1000\,\text{кг}/\text{м}^3$.

Дано:

$h = 1\,\text{м}$

$S = 0,25\,\text{м}^2$

$H_1 = 5\,\text{м}$

$H_2 = 3\,\text{м}$

$\rho_\text{А} = 2700\,\text{кг}/\text{м}^3$

$\rho_\text{в} = 1000\,\text{кг}/\text{м}^3$

Визначити: A

Розв'язання

Оскільки трос тонкий, роботою по його підніманню знехтуємо. Мінімальна робота виконується при умові, що у кожний момент циліндр рухається рівномірно, а це означає рівність нулю рівнодійної усіх прикладених до циліндра сил.

Визначимо роботу на трьох ділянках підйому:

1) у воді з дна до поверхні;

2) у повітрі від рівня води до висоти причалу;

3) при переході циліндра з води у повітря.

1) У воді на циліндр діють сила натягу троса $\vec{\mathbf{F}}_1$, сила тяжіння $m\vec{\mathbf{g}}$ та сила Архімеда $\vec{\mathbf{F}}_\text{А}$ (**рис.15а**). У проекціях на вісь OY рівняння руху має вигляд:

$$F_\text{А} + F_1 - mg = 0 \qquad \Rightarrow \qquad F_1 = mg - F_\text{А}.$$

Під дією сили F_1 циліндр переміщується з дна озера до поверхні води, при цьому виконується робота:

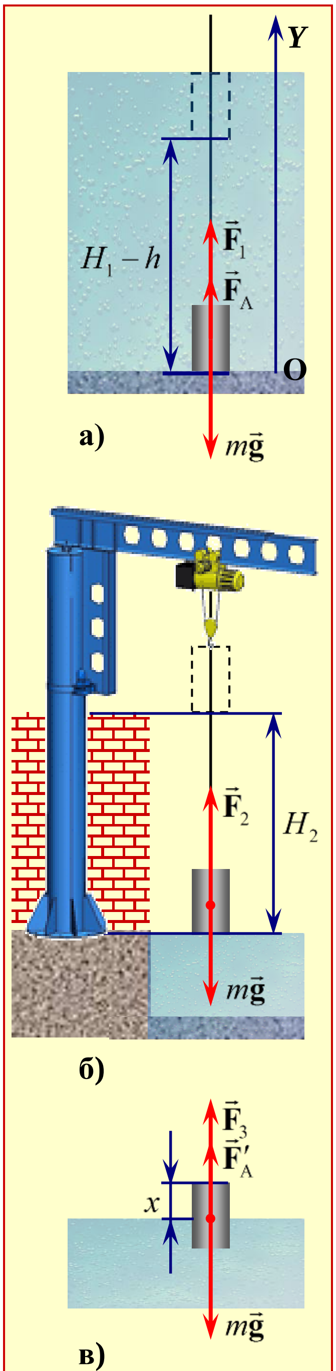


Рис.15

$$A_1 = F_1(H_1 - h) = (mg - F_A)(H_1 - h). \qquad (1)$$

2) У повітрі (**рис.15б**) рух циліндра відбувається під дією сили натягу троса, яка за модулем дорівнює силі тяжіння: $F_2 = mg$. У проекціях на вісь OY рівняння руху має вигляд:

$$F_2 - mg = 0 \qquad \Rightarrow \qquad F_2 = mg.$$

і робота сили F_2 становить:

$$A_2 = F_2 H_2 = mgH_2. \qquad (2)$$

3) Якщо циліндр частково занурений у воду (**рис.15в**), його рух зумовлений силою натягу троса $\vec{\mathbf{F}}_3$, силою тяжіння $m\vec{\mathbf{g}}$ та силою Архімеда $\vec{\mathbf{F}}'_{\text{A}}$, що діє на занурену у воду частину циліндра. Модуль останньої сили дорівнює

$$F'_{\text{A}} = \rho_{\text{в}} g V',$$

де $V' = S(h - x)$ – об'єм зануреної у воду частини. У проекціях на вісь OY рівняння руху має вигляд:

$$F_3 + \rho_{\text{в}} g S(h - x) - mg = 0 \quad \Rightarrow \quad F_3 = mg - \rho_{\text{в}} g S(h - x). \qquad (3)$$

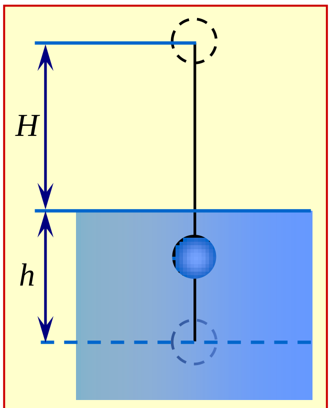


Рис.16

З рівняння **(3)** випливає, що при зміні x від нуля до h сила F_3 лінійно змінюється від F_1 (при $x = 0$) до F_2 (при $x = h$). Графік цієї залежності показаний на **рис.15-1**. Робота змінної сили чисельно дорівнює площі під графіком $F = f(x)$:

$$A_3 = \frac{F_1 + F_2}{2} \cdot h = \frac{mg + mg - F_{\text{A}}}{2} \cdot h = \left(mg - \frac{1}{2} F_{\text{A}}\right) \cdot h.$$

Загальна робота по підніманню циліндра становить:

$$A = A_1 + A_2 + A_3,$$

$$A = mg(H_1 + H_2) - F_{\text{A}}\left(H_1 - \frac{h}{2}\right). \qquad (4)$$

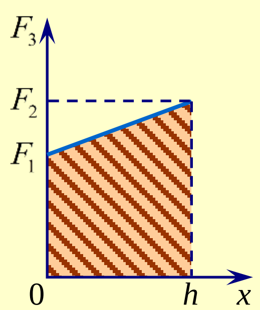


Рис.15-1

Маса циліндра дорівнює $m = \rho_{\text{A}} S h$, сила Архімеда $F_{\text{A}} = \rho_{\text{в}} g S h$, тому остаточно:

$$A = gSh\left(\rho_{\text{A}}(H_1 + H_2) - \rho_{\text{в}}\left(H_1 - \frac{h}{2}\right)\right).$$

Виконаємо обчислення

$$A = 9{,}8 \cdot 0{,}25 \cdot 1 \cdot \left(2700 \cdot (5 + 3) - 1000\left(5 - \frac{1}{2}\right)\right) = 41{,}9 \cdot 10^3 \text{ Дж} = 41{,}9 \text{ кДж}.$$

Зауваження. Зверніть увагу, з формули **(4)** випливає, що зміна потенціальної енергії циліндра дорівнює роботі сили натягу троса та роботі сили Архімеда по підніманню центра мас циліндра з вихідного положення до поверхні води.

Задача 6.16

Визначити

максимальну глибину h занурення кульки, яка падає без початкової швидкості у воду з висоти $H = 10$ см, якщо густина матеріалу кульки у $k = 1{,}5$ менша за густину води. Силою опору руху кульки та виштовхувальною силою у повітрі знехтувати.

Дано:
$H = 10$ см
$k = 1{,}5$

Визначити: h

Розв'язання

Зміна повної механічної енергії W тіла відбувається в результаті роботи діючих на нього сил:

$$W_2 - W_1 = A,$$

де W_1, W_2 – початкова та кінцева механічні енергії. Повна механічна енергія складається з кінетичної $W_к$ та потенціальної $W_п$ ($W = W_к + W_п$), отже:

$$\left(W_{к2} + W_{п2}\right) - \left(W_{к1} + W_{п1}\right) = A. \qquad (1)$$

У вихідному положенні на висоті H кулька знаходилась у спокої, тобто її кінетична енергія $W_{к1} = 0$, тому $W_1 = W_{п1}$. Приймемо за кінцеве положення точку максимального занурення. В ній кулька зупиняється після чого спливає на поверхню (її густина менша за густину води), тому тут $W_{к2} = 0$. Тепер рівняння **(2)** перетвориться на

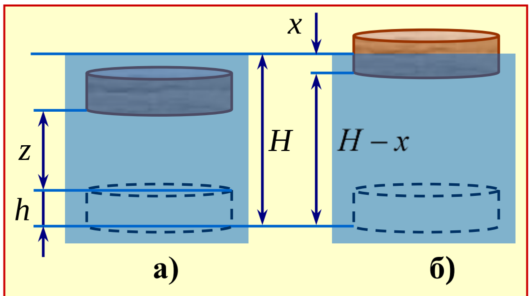


Рис.17

$$W_{п2} - W_{п1} = A. \qquad (2)$$

Різниця потенціальних енергій визначається різницею висот точок над рівнем, який обрано за початок відліку. Цей рівень зручно обрати на глибині максимального занурення кульки h, тоді:

$$W_{п2} - W_{п1} = -mg\left(h + H\right) = -\rho_к Vg\left(h + H\right), \qquad (3)$$

де $\rho_к$ – густина матеріалу кульки, V – її об'єм.

У системі "кулька-Земля" зовнішньою силою, що діє на кульку, є сила Архімеда і її робота визначає зміну механічної енергії. Ця сила напрямлена проти вектора швидкості, тому її робота при переміщенні кульки з поверхні води до максимальної глибини дорівнює

$$A = F_А h \cos 180° = -\rho_в gVh, \qquad (4)$$

де $\rho_в$ – густина води. Підставивши **(3)** та **(4)** у **(2)**, одержимо:

$$-\rho_к Vg\left(h + H\right) = -\rho_в gVh \qquad \Rightarrow \qquad h = \frac{H}{\rho_в/\rho_к - 1} = \frac{H}{k - 1}.$$

Виконаємо обчислення:

$$h = \frac{10}{1,5 - 1} = 20 \text{ см}.$$

Задача 6.17

З дна озера глибиною $H = 1$ м спливає дерев'яний циліндр радіуса $R = 1$ м і висоти $h = 0,2$ м.

Визначити

кількість теплоти Q, яка буде виділена на момент припинення руху води та циліндра. Густина дерева $\rho_д = 800 \text{ кг/м}^3$, води – $\rho_в = 1000 \text{ кг/м}^3$.

Дано:
$H = 1$ м
$R = 1$ м
$h = 0,2$ м
$\rho_д = 800 \text{ кг/м}^3$
$\rho_в = 1000 \text{ кг/м}^3$

Визначити: Q

Розв'язання

При русі циліндра вгору під дією виштовхувальної сили його потенціальна енергія зростає. В той же час, на місце циліндра опуститься вода такого самого об'єму, але її потенціальна енергія зменшиться. Оскільки густина води більша за густину дерева, у системі виділиться кількість тепла, яка дорівнює загальній зміні потенціальної енергії:

$$Q = -\Delta W_п.$$

Нехай циліндр піднявся на висоту z (**рис.17а**). Зміна енергії системи при цьому становить:

$$\Delta W_{\text{п}} = \Delta W_{\text{п}1} - \Delta W_{\text{п}2} = \rho_{\text{д}} Shzg - \rho_{\text{в}} Shzg = (\rho_{\text{д}} - \rho_{\text{в}}) Shzg.$$

Якщо циліндр спливе на поверхню, то під водою залишиться частина його об'єму, яка визначається умовою плавання: $mg = \rho_{\text{в}} g V'$, де $V' = Sx$ – об'єм зануреної частини циліндра. З умови плавання визначимо x:

$$\rho_{\text{д}} Sh = \rho_{\text{в}} Sx \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{\rho_{\text{д}}}{\rho_{\text{в}}} h.$$

Загальне переміщення циліндра при спливанні становить $H - x = H - \dfrac{\rho_{\text{д}} h}{\rho_{\text{в}}}$ (**рис.17б**), отже кількість виділеного тепла дорівнює:

$$Q = -\Delta W_{\text{п}} = (\rho_{\text{в}} - \rho_{\text{д}}) Shg (H - x) = (\rho_{\text{в}} - \rho_{\text{д}}) \left(H - \frac{\rho_{\text{д}}}{\rho_{\text{в}}} h \right) \pi R^2 hg.$$

Розрахунки дають:

$$Q = (1000 - 800) \cdot \left(1 - \frac{800}{1000} \cdot 0,2 \right) \cdot \pi \cdot 1^2 \cdot 0,2 \cdot 9,8 \approx 1034 \text{ Дж} \approx 1 \text{ кДж}.$$

Задача 6.18

На землі стоїть широка посудина, заповнена водою до висоти h (**рис.18**), рівень якої підтримується незмінним.

Визначити:

А) на якій висоті x_{m} слід зробити малий отвір у бічній стінці посудини, щоб витікаючи струмінь падав на землю на максимальній відстані від посудини?

Б) Чому дорівнює ця максимальна відстань l_{m}?

В) площу перерізу S_1 струменя при падінні на землю, якщо площа отвору дорівнює S.

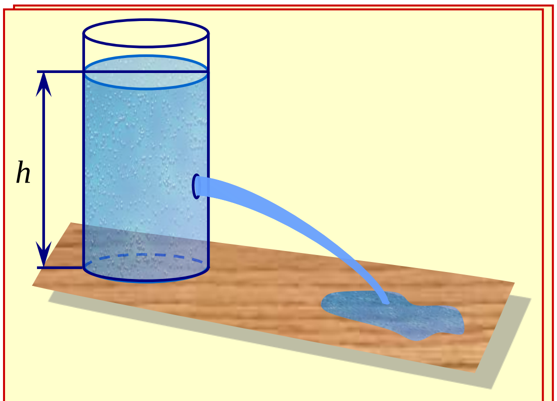


Рис.18

Дано:
h
S
g

Визначити: x_{m}, l_{m}, S_1

Розв'язання

А) Відстань, на якій вода падатиме на землю, залежить від висоти отвору над землею x та від швидкості витікання струменя v. Цю швидкість можна визначити за законом Бернуллі:

$$P_1 + \rho g h_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} = P_2 + \rho g h_2 + \frac{\rho v_2^2}{2},$$

де P_1, P_2 – зовнішній тиск, h_1, h_2 – висоти стовпів води, v_1, v_2 – швидкості руху води, ρ – її густина.

Зовнішній тиск на воду – це атмосферний тиск і його можна вважати однаковим як у посудині так і на рівні отвору $P_1 = P_2$ (зміною тиску з висотою можна знехтувати). Оскільки висота стовпа води підтримується незмінною, швидкість її опускання у посудині $v_1 = 0$. За цих умов закон Бернуллі набуде вигляду:

$$\rho g h = \rho g x + \frac{\rho v^2}{2} \qquad \Rightarrow \qquad v = \sqrt{2g\left(h - x\right)}. \tag{1}$$

Відстань між точкою падіння та посудиною визначається рівнянням рівномірного руху: $l = vt$, де t – час руху. Цей час пов'язаний з висотою x рівнянням рівноприскореного руху: $t = \sqrt{\frac{2x}{g}}$. Тепер маємо:

$$l_{\mathrm{m}} = \sqrt{4x\left(h - x\right)}. \tag{2}$$

Відстань l буде максимальною, якщо функція $f\left(x\right) = x\left(h - x\right)$ матиме максимальне значення. Умовою її максимуму є рівність нулю похідної: $\left[f\left(x_{\mathrm{m}}\right)\right]' = 0$. Взявши похідну, одержимо:

$$x_{\mathrm{m}} = \frac{h}{2}. \tag{3}$$

Підставивши значення x_{m} в **(2)**, маємо: $l_{\mathrm{m}} = h$.

Б) Для струменя, який витікає, справедливе рівняння нерозривності:

$$S v = S_1 v_1. \tag{4}$$

де S_1, v_1 – площа поперечного перерізу та швидкість струменя в момент падіння на землю. Швидкість v_1 визначимо за законом збереження енергії:

$$m g x_{\mathrm{m}} + \frac{m v^2}{2} = \frac{m v_1^2}{2} \qquad \Rightarrow \qquad v_1 = \sqrt{v^2 + g h} = \sqrt{2 g h}. \tag{5}$$

Тепер, підставивши рівняння **(1)** та **(5)** у формулу **(4)**, одержимо:

$$S_1 = S \cdot \frac{v}{v_1} = \frac{S}{\sqrt{2}}.$$

Задачі для самостійної роботи

Рівень А

6.8 Дерев'яний кубик лежить на дні посудини. Чи спливе він, якщо в посудину налити воду, яка не просочується під кубик? [Ні]

6.9 Вага куска заліза у воді $P=1,7\,\text{Н}$. Визначити його об'єм. [$25\,\text{см}^3$]

6.10 Колода, довжина якої $l=3,5\,\text{м}$, а діаметр $d=30\,\text{см}$, плаває на воді. Якої маси людина може стояти на колоді, не замочивши ніг? Густина дерева $\rho=0,7\,\text{г/см}^3$. [$\sim 74\,\text{кг}$]

6.11 Один кінець нитки закріплено на дні, а інший прикріплено до коркового поплавця масою $m=2\,\text{кг}$, у якого $k=75\%$ об'єму занурена у воду. Визначити силу натягу нитки. Густина корки $\rho=0,25\,\text{г/см}^3$. [$40\,\text{Н}$]

6.12 Прямокутна коробочка з жерсті масою $m=76\,\text{г}$ з площею дна $S=38\,\text{см}^2$ і висотою $h=6\,\text{см}$ плаває у воді. Визначити висоту надводної частини коробочки. [$4\,\text{см}$]

Рівень Б

6.13 Для визначення глибини моря з корабля спустили гирю прив'язану до сталевого тросу. Яку найбільшу глибину можна визначити таким чином, щоб трос не розірвався під власною вагою? [$7,5\,\text{км}$]

6.14 Бульбашка газу піднімається від дна озера зі сталою швидкістю. Визначити силу опору води, якщо об'єм бульбашки $V=1\,\text{см}^3$. [$9,8\,\text{мН}$]

6.15 Сталевий кубик плаває у ртуті. На ртуть наливають воду до того часу, доки верхній рівень не досягне верхньої грані кубика. Визначити: **А)** товщину шару води, якщо ребро кубика $a=10\,\text{см}$. **Б)** Визначити тиск на нижню грань кубика. Густина сталі $\rho_{\text{Fe}}=7,8\,\text{г/см}^3$, ртуті – $\rho_{\text{р}}=13,6\,\text{г/см}^3$. [$4,4\,\text{см}$, $7,65\,\text{кПа}$]

6.16 Пустотіла скляна куля радіусом $R=0,1\,\text{м}$ і масою $m=0,5\,\text{кг}$ плаває на поверхні води. Якої маси свинцевий вантаж необхідно приєднати до кулі для того, щоб вона занурилася у воду рівно на половину? Густина свинцю $\rho=11,3\,\text{т/м}^3$. [$1,75\,\text{кг}$]

6.17 Гирю, яка підвішена до динамометра, опускають у воду доки рівень води у посудині не підніметься на $h=5\,\text{см}$. Покази динамометра при цьому змінилися на $\Delta F=0,5\,\text{Н}$. Визначити площу дна посудини. [$10\,\text{см}^2$]

6.18 Зливок, який виготовлено зі сплаву золота та срібла, розтягує пружину динамометра з силою $F_1=14,7\,\text{Н}$. Якщо зливок опустити у воду, то сила зменшується на $\Delta F=1,274\,\text{Н}$. Визначити маси золота та срібла у зливку. Вважати, що при сплавлюванні початкові об'єми золота та срібла не змінилися. [$296\,\text{г}$, $1204\,\text{г}$]

6.19 Вага тіла у воді в три рази менша, ніж у повітрі. Визначити густину матеріалу тіла. [$1,5\,\text{г/см}^3$]

6.20 У посудину з водою опустили залізну відкриту коробочку, при цьому рівень води у посудині піднявся на $h_1=2\,\text{см}$. На скільки знизиться рівень води, якщо коробочка потоне? Густина заліза $\rho_{\text{з}}=7,8\,\text{т/м}^3$, води – $\rho_{\text{в}}=1\,\text{т/м}^3$. [$1,74\,\text{см}$]

6.21 Тонкий стержень шарнірно закріплено за верхній кінець. Його нижній кінець опущено у воду так, що він не торкається дна. Визначити густину матеріалу стержня, якщо у рівновазі $k=1/5$ частина його довжини знаходиться у воді? [$360\,\text{кг/м}^3$]

6.22 Аеростат масою $m = 250\,\text{кг}$ почав опускатися з прискоренням $a = 0,2\,\text{м/с}^2$. Яку масу баласту необхідно викинути, щоб він почав підійматися з тим самим прискоренням? Опором повітря знехтувати. [$10\,\text{кг}$]

6.23 Яку роботу необхідно виконати для повільного підйому каменя об'ємом $V = 0,5\,\text{м}^3$ з дна водойма глибиною $h = 1\,\text{м}$ на поверхню? Густина речовини каменя $\rho_к = 2500\,\text{кг/м}^3$. [$6,35\,\text{кДж}$]

6.24 На скільки зміниться потенціальна енергія м'яча, якщо його занурити у воду на глибину $h = 4\,\text{м}$? Маса м'яча $m = 0,5\,\text{кг}$, його діаметр $d = 24\,\text{см}$. Деформацією м'яча знехтувати. [Зросла на $265\,\text{Дж}$]

6.25 З якої висоти має падати тіло, густина якого $\rho = 0,4\,\text{г/см}^3$, щоб воно занурилось у воду на глибину $h = 6\,\text{см}$? Опір води та повітря рухові тіла до уваги не брати. [$9\,\text{см}$]

Рівень В

6.26 Крижина товщиною $h = 0,4\,\text{м}$ і площею $S = 1\,\text{м}^2$ плаває на поверхні води. Густина льоду $\rho = 900\,\text{кг/м}^3$. Яку мінімальну роботу необхідно виконати, щоб повністю занурити крижину у воду?

6.27 З дна озера глибиною $h = 1\,\text{м}$ спливає дерев'яний циліндр радіуса $R = 1\,\text{м}$ і висотою $h = 0,2\,\text{м}$. Яка кількість теплоти буде виділена на момент припинення руху води і циліндра. Густина деревини $\rho = 800\,\text{кг/м}^3$.[$\sim 1\,\text{кДж}$]