

Міністерство освіти і науки України

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

К. Х. Зеленський

Числово-аналітичні методи в біомедицині

Підручник

*Затверджено Вченою радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як підручник для студентів, які навчаються
за спеціальністю «Комп'ютерні науки»*

Електронне мережеве навчальне видання

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2024

УДК 004.942 (075.8)

3 34

*Затверджено Вченою радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
Протокол № 10 від 09.12.2024 року.*

Автор **Зеленський Кирило Харитонович, д-р техн. наук, доцент**

Рецензенти: С. М. Чумаченко, д-р техн. наук, старший науковий співробітник,
Лауреат державної премії України в галузі науки і техніки,
державний експерт управління з питань екологічної та
енергетичної безпеки служби з питань економічної безпеки Апарату
РНБО України
О. М. Тачиніна, д-р техн. наук, професор, професор кафедри
авіоніки державного авіаційного університету

Відповідальний

редактор В. А. Павлов, канд. техн. наук, доцент
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

Зеленський К. Х.

3 34 Числово-аналітичні методи в біомедицині /[Електронний ресурс]: підруч. для
здобувачів ступеня бакалавра за спец.122 «Комп'ютерні науки» / К. Х. Зеленський; КПІ ім.
Ігоря Сікорського, Електронні текстові дані (1 файл). – Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2024 –
290 с.

Викладено основні поняття стосовно біомедичних явищ та процесів, підходів до
математичного опису та комп'ютерного моделювання цих процесів. Наведено методи пошуку
наближених розв'язків систем нелінійних диференціальних рівнянь. Запропоновано підхід, що
ґрунтується на ітераційних процедурах пошуку наближених розв'язків нелінійних крайових задач
біомедичного спрямування та методи оптимального керування цими процесами.

УДК 004.942 (075.8)

Реєстр. № П **XX/XX-XXX**. Обсяг 24 авт. арк.

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
проспект Берестейський, 37, м. Київ, 03056
<https://kpi.ua>

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру видавців, виготовлювачів
і розповсюджувачів видавничої продукції ДК № 5354 від 25.05.2017 р.

© К. Х. Зеленський, 2024
© КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2024

Зміст

	Передмова	6
I	Математичні моделі фізичних процесів	8
1	Математичні моделі динамічних систем	9
1.1	Основні фізичні субстанції	9
1.1.1	Особливості постановки задач математичної фізики	9
1.1.2	Густина фізичних субстанцій	10
1.1.3	Перенесення фізичних субстанцій	13
1.2	Системний аналіз і динамічні системи	17
1.2.1	Динамічна система та її стан	17
1.2.2	Управління	21
1.2.3	Лінійна динамічна система	25
1.3	Динамічна система, що описується системою звичайних диференціальних рівнянь	308
1.3.1	Гармонійні коливання	30
1.3.2	Рух у полі потенціальних сил	31
1.3.3	Нелінійний осцилятор	32
1.3.4	Маятник зі згасанням	32
1.3.5	Нелінійний осцилятор Ван дер Поля	33
1.3.6	Коливальний електричний контур	33
1.3.7	Малі коливання при взаємодії двох популяцій	34
2	Отримання моделей із законів природи	39
2.1	Збереження маси речовини	39
2.1.1	Потік частинок у трубі	39
2.2	Збереження енергії	42
2.2.1	Виведення закону Фур'є із молекулярно-кінетичних уявлень	43
2.3	Сумісне застосування кількох законів	48
2.3.1	Рівняння нерозривності для газу, що стискається	48
2.3.2	Рівняння руху газу	50
2.3.3	Рівняння енергії	51
2.4	Математичні моделі деяких середовищ	53
2.4.1	Моделі ідеальної рідини (газу)	53
2.4.2	Моделі в'язкої рідини	57
2.4.5	Рівняння перенесення енергії у середовищі	60
3	Математичні моделі у біомедицині	64
3.1	Специфіка моделювання живих систем	65
3.2	Базові моделі	67
3.2.1	Необмежене зростання. Експоненціальне зростання	67
3.2.2	Обмежене зростання. Рівняння Ферхюльста	68
3.2.3	Моделі Моно і Міхаеліса–Ментен	69
3.2.4	Базова модель взаємодії. Конкуренція. Відбір	64

	3.3	Класичні моделі Лотки і Вольтерра	73
	3.3.1	Моделі взаємодії видів	73
	3.4	Просторово–часова самоорганізація біологічних систем	76
	3.5	Моделі реакції–дифузії	76
	3.5.1	Динаміка популяцій	77
	3.5.2	Біологія та біомедицина	78
	3.5.3	Математична теорія штучних нейронних мереж	81
	3.5.4	Розмноження і дозрівання клітинних популяцій	82
	3.5.5	Моделі одновидової популяції	83
	3.6	Моделі імунних систем	84
II		Наближені методи	88
	4	Наближені аналітичні методи	88
	4.1	Загальна схема побудови наближених методів	88
	4.2	Похибки наближених методів	93
	4.3	Метод малого параметра	96
	4.3.1	Загальний випадок методу малого параметра	99
	4.4	Метод ортогональних проєкцій	113
	4.4.1	Коллокації у підобластях та у точках	115
	5	Проекційні методи	125
	5.1	Задачі на власні значення	125
	5.2	Метод Бубнова–Галеркіна	132
	5.2.1	Постановка задачі	132
	5.2.2	Алгоритм методу	132
	5.2.3	Побудова системи пробних і повірочних функцій	134
	5.2.4	Параболічне рівняння	140
	5.3	Варіаційний метод Рітца	145
	5.4	Особливості вибору базисних функцій	151
	6	Числово-аналітичні методи	162
	6.1	Математична модель Хижак–жертва	162
	6.1.1	Розв’язання задачі (6.1.1), (6.1.2)	163
	6.1.2	Урахування просторового переміщення	166
	6.2	Математичні моделі гідродинаміки	169
	6.2.1	Моделі рідинних ідеальних середовищ	170
	6.2.2	Моделі рідинних в’язких середовищ	173
	6.2.3	Стаціонарні течії в’язкої однорідної рідини у трубах	178
	6.2.4	Нестаціонарна течія в’язкої однорідної рідини у трубах	180
III		Оптимальне управління біомедичними процесами	182
	7	Математичне моделювання імунних систем	183
	7.1	Математична модель протиінфекційного захисту	185
	7.2	Керування імунологічними реакціями	189
	7.3	Математичне моделювання лікування інфекційних хворих вакцинацією	192
	7.4	Модель гепатиту В з оптимальним керуванням	195
	7.4.1	Математична модель ВГБ	195

	7.4.2	Регуляція протівірусної відповіді	199
	7.5	Управління лікуванням гепатиту С	205
	7.5.1	Оптимальним управлінням лікуванням ВГС	205
	7.5.2	Алгоритм оптимального керування	213
	7.6	Модель оптимального управління туберкульозу	219
	7.6.1	Модель ТБ із затримкою стану	220
	7.6.2	Задача оптимального управління для моделі ТБ із часовими затримками	223
	8	Математичні моделі комбінованої терапії раку	227
	8.1	Комбінована терапія раку з вакциною та інгібіторами	229
	8.2	Просторово –часова математична модель	230
	8.3	Математична модель кінетики	234
	8.4	Кінетичні моделі	236
	8.4.1	Модель загибелі пухлинних клітин	236
	8.4.2	Оптимальне керування імунно–хімієтерапією пухлинних клітин	238
	8.4.3	Алгоритм оптимального керування	243
		Бібліографічний список	249
		Додатки	252
A		Метричні простори	253
	A1	Поняття метричного простору	253
	A2	Відкриті і замкнуті множини. Збіжність у метричному просторі	254
	A3	Приклади метричних просторів	255
	A4	Повні простори	258
	A.4.1	Компактні множини	258
	A.4.2	Принцип відображень, що стискають	259
	A.5	Нормовані простори	266
B		Оператори у гільбертових просторах	268
	B.1	Гільбертів простір	268
	B.2	Оператори і функціонали у гільбертовому просторі	271
	B.3	Енергетичний простір	275
	B.4	Однорідне операторне рівняння	276
	B.5	Сполучені простори та оператори	277
	B.6	Критерій базисності системи функцій	280
B		Програмний код реалізації задачі Коші.	282
		Показчик	289

Передмова

Підручник написано відповідно навчальній програмі на основі викладання курсу лекцій «Числово-аналітичне моделювання» студентам кафедри біомедичної кібернетики факультету біомедичної інженерії КПІ ім. Ігоря Сікорського. Підручник складається з трьох частин: «Математичні моделі фізичних процесів», в якій викладено підходи до математичного опису систем у вигляді систем лінійних та нелінійних диференціальних рівнянь, наведені поняття систем автоматичного управління, формулювання математичних моделей, що ґрунтуються на законах природи, у тому числі математичних моделей у біомедицині, «Наближені методи», в якій викладаються методи наближеного розв'язання лінійних і нелінійних систем диференціальних рівнянь, що ґрунтуються на використанні проекційних методів, а також методи побудови математичних моделей біомедичних об'єктів. У третій частині «Оптимальне управління біомедичними процесами» викладаються методи вирішення задач стосовно побудови математичних моделей імунних систем, пошуку наближених розв'язків систем нелінійних диференціальних рівнянь та автоматичного керування дозами лікарських препаратів при лікуванні різних вірусних захворювань організму. Додаток містить основні відомості з функціонального аналізу, необхідні для коректного формулювання крайових задач, що описують біомедичні процеси.

В якості одного з найефективніших підходів до побудови оптимальної стратегії з вивчення та прогнозування вірусних захворювань є математичне моделювання, що надає можливість аналізувати вплив різних факторів та їхніх сполучень на індивідуальному і популяційному рівнях. Прикладом моделей такого типу можуть слугувати математичні моделі прогнозування, що описують взаємозв'язок між показниками здоров'я людини та факторами навколишнього середовища.

Побудова математичних моделей фізичних процесів різного спрямування має ґрунтуватися на коректному опису цих моделей. Тому у першій частині підручника розглядаються основні поняття і визначення динамічних систем, що мають описуватися диференціальними рівняннями математичної фізики. Розглядаються підходи до опису цими рівняннями типових фізичних об'єктів, основні чинники, що мають ураховуватися під час побудови математичних моделей. Наводяться приклади таких моделей як лінійних, так і нелінійних. У третьому розділі першої частини підручника розглядаються підходи до математичного опису біомедичних об'єктів.

У другій частині підручника викладено підхід до вирішення задач математичного моделювання фізичними і біомедичними процесами на основі наближених числово-аналітичних методів на противагу використанню традиційних різницевих схем. У першому розділі цієї частини викладаються традиційні наближені аналітичні методи (метод малого параметра, метод ортогональних проекцій). Показано, що незважаючи на їхнє розповсюджене використання для пошуку розв'язків систем диференціальних рівнянь вони мало придатні для дослідження біомедичних процесів.

Другий розділ цієї частини присвячено викладанню проекційних методів, зокрема досить докладно розглянуто методи Галеркіна та Рітца, у тому числі для моделювання диференціальних рівнянь із частинними похідними, якими описується більшість біомедичних процесів. Наводяться приклади застосування методів Галеркіна та Рітца для вирішення практичних задач.

Далі у цьому розділі розглядаються питання застосування наближених

числово-аналітичних методів до моделювання деяких біологічних процесів та коректному формулюванню задач гідродинаміки, які мають безпосередній стосунок до біомедичних процесів.

Третя частина підручника присвячена методам опису імунних систем та числово-аналітичним методам розв'язання систем нелінійних диференціальних рівнянь як зі звичайними так і частинними похідними. У першому розділі цієї частини виконується математичне моделювання задач протиінфекційного захисту та розробка алгоритмів оптимального керування дозами лікарських препаратів для зменшення або знищення наслідків вірусного втручання у живий організм. Докладно розглянуто застосування числово-аналітичного методу для лікування вірусних гепатитів В та С.

Окремий розділ цієї частини присвячено питанням боротьби із раковими захворюваннями як найрозповсюдженішою хворобою (поряд із серцево-судинними захворюваннями). У підручнику розглядаються питання математичного опису ракових захворювань без урахування просторово-часового розповсюдження, тобто кінетичні моделі, що описуються звичайними диференціальними рівняннями. Урахування просторово-часового розподілу ракових утворень надає можливість визначати їхнє розповсюдження у просторі, тобто динаміку розвитку, але у даному підручнику ми обмежуємося кінетичними моделями через складнощі щодо вирішення задач оптимального управління нелінійними об'єктами із розподіленими параметрами. У цьому розділі вирішуються задачі оптимального керування дозами і видами лікарських препаратів, що описуються системами нелінійних диференціальних рівнянь, із використанням числово-аналітичного методу, що, на відміну від використання традиційних різницевих схем, надає можливість отримати розв'язки у квадратурах, і має сприяти прийняттю оперативних рішень лікарями.

Кожний підрозділ підручника супроводжується запитаннями для самоперевірки.

У додатках наведено основні поняття функціонального аналізу, які використовуються під час постановки задач та математичного моделювання цих задач.

Із урахуванням того факту, що питання, які викладаються у підручнику, розглядаються, в основному, у періодичних джерелах (в основному, закордонних), бібліографічний список містить обмежену кількість посилань, в яких висвітлюються основні питання, пов'язані із математичним описом імунних систем, але достатній для ознайомлення із цією складною, але життєво важливою проблемою.

Автор сподівається, що пропонований підручник буде корисним не тільки студентам з напрямку «Комп'ютерні науки», а й науковцям і спеціалістам з біомедичної кібернетики.

Частина I. Математичні моделі фізичних процесів

Розділ 1. Математичні моделі динамічних систем

1.1 Основні фізичні субстанції

1.1.1 Особливості постановки задач математичної фізики

Предметом вивчення математичної фізики є теорія математичних моделей фізичних явищ. Ця теорія перебуває на стику математики і фізики, оскільки вона описує конкретні фізичні процеси, а методи побудови і дослідження цих моделей є математичні.

Але методи, що характерні для математичної фізики, застосовуються для вивчення не тільки фізичних явищ. Ці методи у наш час використовують у хімії, біології, екології, економіці. Застосовуються вони й у техніці при математичному моделюванні різноманітних технічних систем та пристроїв, маючи на увазі адекватну заміну технічного об'єкту, що досліджується, його математичною моделлю та її подальше вивчення методами обчислювальної математики.

Таке широке розповсюдження методів математичної фізики пов'язане із узагальненням математичних моделей, що базуються на фундаментальних законах природи, у тому числі на законах збереження таких фізичних субстанцій, як маса, енергія, заряд, кількість руху і момент кількості руху. Це призводить, зокрема, до того, що одні й ті самі математичні моделі описують явища різної природи.

Для математичної фізики характерне дослідження процесів у системі, яка являє собою деяку просторову область, що заповнена неперервним матеріальним середовищем (так званим суцільним середовищем). У такій області величини, що описують стан середовища та фізичні процеси, що протікають у ньому, залежать, як правило, від просторових координат та часу. Теоретичним підґрунтям побудови математичних моделей таких процесів є механіка та електродинаміка суцільних середовищ. У загальному випадку моделі математичної фізики описують поведінку системи на трьох рівнях: взаємодію системи у цілому із зовнішнім середовищем; взаємодію між елементарними об'єктами системи і властивості окремо взятого елементарного об'єму.

Взаємодія на першому рівні відображається у формулюванні межових умов, тобто умов на межі області вирішення задачі, що містить у загальному випадку межові та початкові умови. Другому рівню відповідає взаємодія елементарних об'єктів на ґрунті законів збереження фізичних субстанцій та їхнього перенесення у просторі, що надає можливість побудови математичних моделей процесів перенесення цих субстанцій. Третій рівень відповідає формулюванню рівнянь стану середовища, тобто побудові математичних моделей поведінки середовища в елементному об'ємі.

У ці математичні моделі входять характерні для задач математичної фізики рівняння у частинних похідних, а у деяких випадках – інтегральні та інтегро-диференціальні рівняння. Такі рівняння належать до класу функціональних, розв'язанням яких є функції. Ці моделі можуть містити також інтегральні функціонали від шуканих функцій. На допустимій множині функцій функціонал досягає так званого стаціонарного значення, якому відповідає стаціонарна точка функціоналу, тобто шукане значення задачі, що розглядається. У деяких випадках це значення може відповідати екстремуму функціоналу, що зазвичай пов'язане із формулюванням задачі на ґрунті деякого варіаційного принципу, що має визначений фізичний зміст.

1.1.2 Густина фізичних субстанцій

Кількісною характеристикою будь-якої фізичної субстанції є її об'ємна густина, тобто кількість цієї субстанції в одиниці об'єму. Розглянемо околицю точки $M \in \Omega \subset R^n$, що має діаметр d і об'єм dV . Нехай у цьому об'ємі міститься маса Δm деякого суцільного середовища. Границю

$$\lim_{d \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \rho(M)$$

називають густиною середовища у цій точці M простору, до якої стягується окіл, що розглядається, за $d \rightarrow 0$.

Основною (стандартною) одиницею вимірювання густини є кг/м^3 .

За аналогією можна запровадити поняття об'ємної густини енергії як границю

$$\varepsilon(M) = \lim_{d \rightarrow 0} \frac{\Delta E}{\Delta V},$$

де ΔE – кількість енергії в об'ємі ΔV . Основною одиницею вимірювання об'ємної густини енергії є Дж/м^3 . Якщо об'єм ΔV містить електричний заряд ΔQ , границю

$$\rho_e(M) = \lim_{d \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta V}$$

називають об'ємною густиною електричного заряду, основною одиницею вимірювання якої є Кл/м^3 .

Нагадаємо, що коли функції $\rho(M)$, $\varepsilon(M)$, $\rho_e(M)$ обмежені в обмеженій замкнутій області $\Omega \subset R^3$ і неперервні в Ω всюди, крім, можливо, деякої множини точок об'єму нуль, ці функції є інтегровні в області Ω . У подальшому просторову область Ω позначатимемо так само, як і її об'єм V . Тоді для маси m , енергії E та електричного заряду Q у цій області можна записати

$$m = \int_V \rho(M) dV, \quad E = \int_V \varepsilon(M) dV, \quad Q = \int_V \rho_e(M) dV. \quad (1.1.1)$$

Поняття об'ємної густини застосовується не тільки до фізичних субстанцій, що виражаються скалярними величинами (маси, енергії, заряду), але й до субстанцій, що виражаються векторними величинами. Нехай векторне поле швидкості руху середовища задане векторною функцією $v = v(t, x)$, що залежить у загальному випадку від часу t і координат x_i , $i = 1, 2, 3$, радіус-вектору $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$, що визначає положення точки простору відносно прямокутної системи координат $Ox_1 x_2 x_3$ із ортами e_i , (рис. 1.1). Тоді добуток ρv можна назвати вектором *об'ємної густини кількості руху середовища*. Аналогічно векторний добуток $x \times (\rho v)$ назовемо вектором *об'ємної густини моменту кількості руху середовища* відносно початку координат. Основними одиницями вимірювання модулів цих векторів є $\text{кг}/(\text{м}^2 \text{с})$ та $\text{кг}/(\text{мс})$, або $H \cdot c / (\text{м}^3)$ та $H \cdot c / (\text{м}^2)$ відповідно.

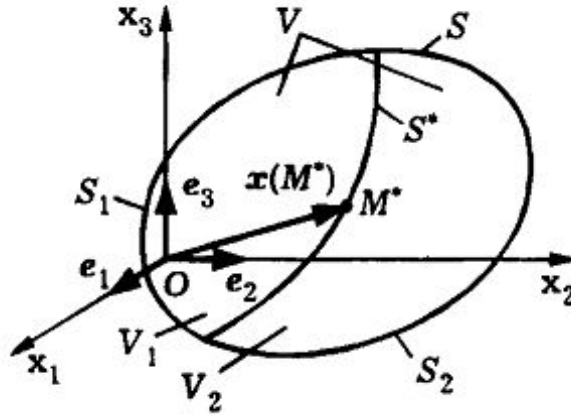


Рис.1.1. Положення точки у прямокутній системі координат

Якщо ρv – неперервна функція координат у просторовій області об'ємом V всюди, крім, можливо, деякої множини точок об'єму нуль, для середовища, що міститься у цій області, вектори кількості руху J і моменту кількості руху K можна представити у вигляді

$$J = \int_V \rho v dV, \quad K = \int_V x \times \rho v dV. \quad (1.1.2)$$

Зауваження 1. Підінтегральні функції в (1.1.1) и (1.1.2) можуть у загальному випадку залежати від часу t . Тоді значення відповідних інтегралів також можуть змінюватися у часі. Нехай дійсна функція $C = C(t, x)$ неперервно диференційовна по t і задає у поточний момент часу залежність від просторових координат об'ємної густини деякої фізичної субстанції. Кількість $\bar{C}(t)$ цієї субстанції у фіксований момент часу t в об'ємі V виражає інтеграл

$$\bar{C}(t) = \int_V C(t, x) dV, \quad (1.1.3)$$

що залежить від параметра t .

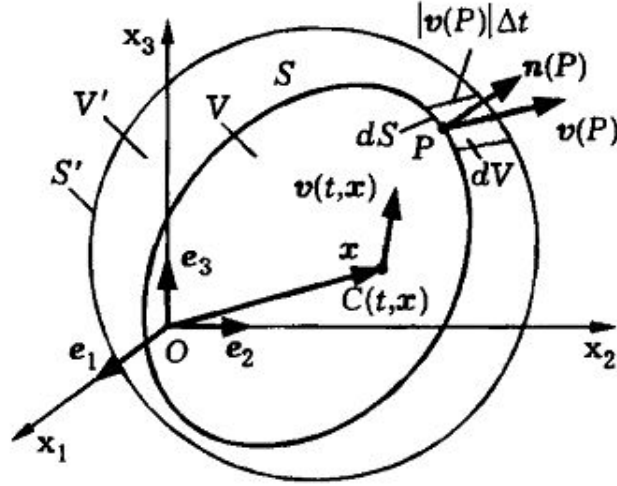


Рис. 1.2. Рух точки поверхні

Нехай точки поверхні S , що обмежує об'єм V , рухаються разом із частинками середовища, що містяться у цих точках, із заданою швидкістю $v(t, x)$ відносно системи координат $Ox_1x_2x_3$ (рис. 1.2). Тоді у момент часу $t + \Delta t$ поверхня переміститься у стан S' і буде обмежувати об'єм V' . Розглянемо спочатку випадок, коли $V \subset V'$. Вважатимемо, що інтеграл в (1.1.3) є диференційовний за параметром t , знайдемо швидкість змінювання кількості субстанції. Згідно визначення похідної,

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{C}(t)}{dt} &= \frac{d}{dt} \int_V C(t, x) dV = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left(\int_{V'} C(t + \Delta t, x) dV - \int_V C(t, x) dV \right) = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left(\int_V (C(t + \Delta t, x) - C(t, x)) dV + \int_V C(t + \Delta t, x) dV \right) = \\ &= \int_V \left(\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{C(t + \Delta t, x) - C(t, x)}{\Delta t} \right) dV + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_V C(t + \Delta t, x) dV, \end{aligned} \quad (1.1.4)$$

де $V^* = V' \setminus V$ – об'єм, що огинає поверхню S при переміщенні у стан S' . Цей об'єм подамо таким, що складається із елементарних циліндрів, кожний із яких має основу dS та твірну довжиною $|v(P)| \Delta t$, що паралельна вектору $v(P) = v(t, x(P))$ швидкості середовища у точці $P \in S$, причому $n(P)$ – одиничний вектор зовнішньої нормалі до поверхні S у точці $P \in S$ (див. рис. (1.2)). Тоді елементарний об'єм у другому інтегралі у правій частині (1.4) запишемо у вигляді $dV = v(t, x)n(P)\Delta t dS \geq 0$, $P \in S$, й отримаємо

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{V^*} C(t + \Delta t, x) dV &= \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_S C(t + \Delta t, x) v(t, x) n(P) \Delta t dS = \int_S C(t, x) v(t, x) n(P) dS, \end{aligned}$$

оскільки $C(t + \Delta t, x) \rightarrow C(t, x)$ при $\Delta t \rightarrow 0$ у силу неперервності функції $C(t, x)$.

Перетворимо інтеграл у правій частині останньої рівності за формулою Остроградського–Гауса.

Формула Остроградського–Гауса зв'язує потік неперервного векторного поля яєрез замкнуту поверхню та інтеграл від цього поля за об'ємом, що обмежений цією поверхнею.

$$\iiint_V \operatorname{div} F dV = \iint_S (F, n dS,$$

або у сучасному запису:

$$\iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) d\Omega = \iint_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS,$$

$\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ – напрямні косинуси до зовнішньої нормалі до поверхні S .

Із урахуванням того, що підінтегральна функція першого інтегралу у правій частині (1.4) дорівнює частинній похідній $\partial C(t, x) / \partial t$, $x \in V$, отримуємо формулу диференціювання за часом t інтегралу, що береться за об'ємом, який змінюється у часі:

$$\frac{d\bar{C}(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V C(t, x) dV = \int_V \left(\frac{\partial C(t, x)}{\partial t} + \nabla(C(t, x) v(t, x)) \right) dV, \quad (1.1.5)$$

де ∇ – диференціальний оператор Гамільтона

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x_1} e_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} e_2 + \frac{\partial}{\partial x_3} e_3,$$

де e_i , $i = 1, 2, 3$ – орти системи координат $Ox_1x_2x_3$ (див. рис. (1.2)). Нагадаємо, що дія цього оператора на векторну функцію відповідає операції *дивергенції*.

Відзначимо, що до (1.1.5) можна прийти й у випадку, коли $V' \subset V$, але при цьому у другому інтегралі у правій частині (1.1.4) $dV = v(t, x) n(P) \Delta t dS \leq 0$, $P \in S$. Можна показати, що (1.1.5) можна застосовувати за довільного змінювання об'єму V у часі. Для фіксованого об'єму V_0 , який обмежено нерухомою відносно системи координат $Ox_1x_2x_3$ поверхнею S_0 , замість (1.1.5) матимемо

$$\frac{d\bar{C}(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{V_0} C(t, x) dV = \int_{V_0} \frac{\partial C(t, x)}{\partial t} dV.$$

1.1.3 Перенесення фізичних субстанцій

Більшість процесів, що вивчаються у математичній фізиці, пов'язані із перенесенням у просторі конкретних фізичних субстанцій: маси, енергії, електричного заряду, кількості руху або його моменту. Інтенсивність перенесення фізичної субстанції визначають *густиною потоку*, що дорівнює кількості субстанції, яка переноситься в одиницю часу через одиничну ділянку, перпендикулярну напрямку перенесення. Механізм перенесення поділяють на конвективний (або молярний) та дифузійний (або молекулярний).

Перший із них пов'язаний із рухом суцільного середовища, який визначається

векторним полем її швидкості $v = v(t, M)$, $M \in \mathcal{R}^3$, у момент часу t . Для фізичної субстанції, що виражається скалярною величиною, густина потоку конвективного перенесення є вектор, колінеарний вектору швидкості v і дорівнює добутку v та *об'ємної густини* цієї субстанції. Так, напрямок та інтенсивність перенесення маси визначає вектор *густини потоку маси* ρv , де ρ – густина середовища. Модуль цього вектора дорівнює кількості маси, що переноситься в одиницю часу через одиничну ділянку, перпендикулярну напрямку вектора швидкості. Основна одиниця вимірювання густини потоку маси (як і модуля вектора *об'ємної густини кількості руху середовища*) – $\text{кг}/(\text{м}^2 \text{ с})$.

Напрямок та інтенсивність конвективного перенесення енергії і заряду визначають векторами εv і $\rho_e v$ *густини потоку енергії* і *густини електричного струму*, де ε і ρ_e – *об'ємні густини енергії* і *електричного заряду* відповідно. Модулі цих векторів вимірюють у $\text{Вт}/\text{м}^2$ і $\text{А}/\text{м}^2$ відповідно.

Дифузійне перенесення фізичних субстанцій може здійснюватися і за відсутності спрямованого руху середовища (наприклад, при хаотичному молекулярному руху у рідині, газі чи плазмі та тепловому руху іонів, атомів та молекул у твердому тілі). За нерівномірного просторового розподілу об'ємної густини C у середовищі деякої фізичної субстанції хаотичний рух мікрочастинок поступово призводить до вирівнювання цього розподілу. В ізотропному середовищі, властивості якої є однакові в усіх напрямках, дифузійне перенесення фізичної субстанції, що викликане нерівномірним просторовим розподілом скалярної величини C , здійснюється у напрямку убутання об'ємної густини, тобто у напрямку, протилежному напрямку градієнта ∇C скалярного поля, яке задається у просторі у поточний момент часу t функцією $C = C(t, M)$.

При побудові математичних моделей у математичній фізиці широко використовують емпіричний закон дифузійного перенесення

$$j^{(C)} = -K^{(C)} \nabla C, \quad (1.1.6)$$

де $j^{(C)}$ – вектор густини потоку фізичної субстанції при дифузійному переносі; $K^{(C)}$ – емпіричний коефіцієнт дифузійного перенесення цієї субстанції. Функцію $C = C(t, x)$ зазвичай вважають неперервно диференційовною за всіма її аргументами. Вона виконує роль *потенціальної функції* відносно векторного поля густини потоку цієї субстанції при її дифузійному перенесенні.

Наприклад, функція $C = C(t, M)$ може задавати розподіл об'ємної густини деякої речовини (домішки у рідині чи газі, іонів у плазмі тощо). У цьому разі $K^{(C)}$ називають коефіцієнтом дифузії даної речовини у цьому середовищі, а (1.1.6) виражає відомий у фізиці закон Фіка.

Інтенсивність дифузійного перенесення фізичної субстанції не завжди пов'язують із градієнтом скалярного поля об'ємної густини цієї субстанції. Ми отримали закон Фур'є

$$q = -\lambda \nabla T,$$

де q – вектор густини теплового потоку, λ – теплопровідність середовища.

Лінійний зв'язок густини потоку фізичної субстанції із градієнтом деякої потенціальної функції використовують і тоді, коли перенесення цієї субстанції здійснюється рухом мікрочастинок під впливом зовнішнього поля. Так, під впливом

електростатичного поля, що описується потенціальною функцією $U = U(M)$ електричної напруги, в електропровідному середовищі виникає електричний струм, вектор густини якого дорівнює

$$j^{(\varepsilon)} = -\sigma \nabla U,$$

де σ – електрична провідність середовища. Якщо запровадити вектор $E = -\nabla U$ напруженості електростатичного поля, отримаємо рівняння

$$j^{(\varepsilon)} = \sigma E,$$

яке узагальнює закон Ома на випадок суцільного середовища (модулі векторів $j^{(\varepsilon)}$ вимірюють в А/м² і В/м відповідно).

За нерівномірного розподілу тиску, який задано функцією $p = p(t, M)$, через пористе середовище може просочуватися рідина або газ. Тоді вектор швидкості частинок рідини або газу підпорядковується закону Дарсі

$$v = -\kappa \nabla p,$$

де κ – коефіцієнт фільтрації.

Потенціальна функція у (1.1.6) може залежати від просторових розподілів кількох фізичних величин. Наприклад, для багатокомпонентної суміші речовин, що хімічно реагує, дифузійне перенесення фізичних субстанцій пов'язане із вирівнюванням нерівномірного просторового розподілу так званого хімічного потенціалу, який залежить від концентрації цих речовин, температури і тиску. У цьому разі вектор густини потоку конкретної субстанції буде лінійною комбінацією векторів, що є колінеарні градієнтам концентрації, температури і тиску відповідно. Тоді кажуть про концентраційну дифузію, її термо- і бародифузію.

У більшості випадків $j^{(C)}$ можна вважати лінійно залежною від градієнту деякої потенціальної функції $\Phi(t, M)$, яка не завжди збігається із об'ємною густиною C цієї субстанції. Цю залежність можна записати у загальній формі

$$j^{(C)} = -K^{(\Phi)} \nabla \Phi,$$

де $K^{(\Phi)}$ – коефіцієнт пропорційності. Якщо середовище є анізотропне, тобто його властивості є різні у різних напрямках, використовують співвідношення

$$j_i^{(C)} = -\sum_{j=1}^3 K_{ij}^{(\Phi)} \frac{\partial \Phi}{\partial x_j}, \quad i = 1, 2, 3,$$

де $j_i^{(C)}$ – проекції вектора $j^{(C)}$ на координатні осі Ox_i прямокутної системи координат $Ox_1x_2x_3$; $K_{ij}^{(\Phi)}$ – компоненти тензора другого рангу коефіцієнтів перенесення конкретної субстанції.

Наведені співвідношення є характерні для дифузійного переносу субстанцій, об'ємна густина яких є скалярна величина. Об'ємні густини кількості руху і моменту кількості руху є векторні величини, що ускладнює вирази для густин потоків цих субстанцій при дифузійному перенесенні.

Запитання для самоперевірки

1. У яких одиницях вимірюються ?:
 - a. густина речовини;
 - b. об'ємн густина кількості руху речовини;
 - c. момент кількості рху речовини.
2. Що визначає формула Остроградського – Гауса?
3. Що описують закони: Фіка, Фур'є, Дарсі, Ома?
4. Як визначається прочес перенесення речовини у середовищі?

1.2 Системний аналіз і динамічні системи

У цьому розділі викладаються основні засади класичного системного аналізу стосовно динамічних систем загального спрямування, які є основа для побудови математичних моделей динамічних систем.

1.2.1 Динамічна система та її стан

Під динамічною системою мають на увазі об'єкт чи процес, для якого однозначно визначено поняття стану як сукупності значень деяких величин у заданий момент часу і задано оператор, який визначає еволюцію початкового стану у часі.

Наприклад, система матеріальних точок із заданим потенціалом взаємодії є типовий приклад динамічної системи, оскільки її стан сповна визначається значенням початкових координат та імпульсів усіх точок, а еволюцію системи визначають класичні рівняння руху (другий закон Ньютона). Складніший приклад – середовище (зокрема атмосфера Землі, вміст хімічного реактора тощо), в якому здійснюються процеси тепло- і масоперенесення, фізичні фазові переходи, хімічні реакції тощо. Стан такої системи у фіксований момент часу визначається концентрацією фаз, температурою та іншими параметрами, що задаються у кожній точці середовища. Прикладами динамічних систем можуть слугувати біологічні системи – організм людини або тварини, або популяції, що взаємодіють. На обчислювальні процеси у комп'ютерах або нейронних мережах також можна дивитися із позицій динамічних систем.

Якщо дослідника цікавлять стани динамічної системи у будь-який момент часу на заданому інтервалі, говорять про системи із неперервним часом і для їхнього опису використовують, як правило, диференціальні рівняння. Якщо для опису поведінки системи досить знати її стан у скінченних моментах часу, говорять про системи із дискретним часом і для їхнього опису використовують дискретні відображення, наприклад, різниці рівняння.

Якщо дані допускають однозначно вказати значення параметрів системи у потрібні моменти часу, говорять про детерміновані динамічні системи. Але еволюцію динамічних систем не завжди вдається визначити однозначно – у цих випадках зазвичай використовують опис системи у термінах про ймовірність або можливість того чи іншого стану. Розповсюдженою моделлю такої динамічної системи є марківські ланцюги або процеси, граfi тощо.

Опис динамічних систем із використанням *теорії систем* передбачає запровадження основних понять і визначень, побудованих на аксіоматичній базі загальної теорії систем. Ми будемо використовувати ці аксіоми для строгого формулювання понять, які надають можливість сформулювати основні задачі, що мають місце при дослідженні динамічних систем.

Розглянемо поняття стану системи як таких даних про її минуле і теперішнє, які необхідні для визначення поточного та майбутнього значень її вихідної величини. Тобто ми маємо припустити, що існують деякі величини (позначимо їх x), що характеризують стан системи у даний момент часу, які залежать від попереднього стану, поточного часу та вхідних впливів. Запишемо цю залежність як

$$x(t_1) = \varphi[t_1; t_0, x(t_0), \omega],$$

t_1 – даний момент часу; t_0 – деякий момент часу, що передує поточному $t_0 < t_1$; $x(t_1)$ – стан системи, що передує даному; ω – вхідний вплив, $\omega \in \Omega$.

Якщо розглядати величини x як елементи деякої множини X , а всі моменти часу такими, що належать множині T , формулу для станів x можна записати у загальнішому вигляді

$$\Phi = \{\varphi : T \times T \times T \times X \times \Omega\}.$$

Множина $T \times T \times T \times X \times \Omega$ містить в якості своїх елементів упорядковані четвірки у вигляді $t_1, t_1, x(t_0), \omega$; отже сполучення (правило) φ встановлює відображення (функціональний зв'язок) цих четвірок на множині X , яка містить елементи x . Отримане відображення φ належить деякій множині Φ і називається *перехідною функцією стану системи*.

Перехідна функція стану має задовольняти низку вимог, що визначають однозначність запровадженого визначення.

По-перше, природно вимагати, щоб перехідна функція стану була визначена для усіх $t \geq t_0$, а за $t = t_0$ виконувалася рівність

$$\varphi[(t_0); t_0, x(t_0), \omega] = x(t_0).$$

для усіх $t \in T$, $x \in X$, $\omega \in \Omega$. Ця рівність визначає узгодженість функції φ із її початковим станом і незалежність початкового значення $x(t_0)$ від даного значення вхідного сигналу ω . Далі, відомий стан $x(t_0)$ системи у момент t_0 і відрізок вхідного сигналу ω на відрізку часу $[t_0, t_1]$ ($\omega[p_{t_0}, t_1]$) має бути необхідною і достатньою умовою для визначення стану системи $x(t_1)$ у момент часу t_1 . Тому має виконуватися співвідношення

$$x(t_1) = \varphi[t_1; t_0, x(t_0), \omega(t_0, t_1)].$$

Система, що задовольняє це співвідношення, називається *динамічною*.

При цьому два однакових впливи на даному відрізку часу та за заданого початкового стану системи $x(t_0)$ мають давати один і той самий результат, тобто має виконуватися рівність

$$\varphi[t_1; t_0, x(t_0), \omega_1] = \varphi[t_1; t_0, x(t_0), \omega_2],$$

коли $\omega_1 = \omega_2$ за $t_0 \leq t \leq t_1$.

Далі, один і той самий вхідний вплив ω має визначати стан системи на кінці заданого проміжку часу $[t_1, t_3]$ незалежно від впливу на проміжках $[t_1, t_2]$ і $[t_2, t_3]$ окремо, чи одразу на всьому проміжку $[t_1, t_3]$, тобто

$$\varphi[t_2; t_1, x(t_1), \omega] = \varphi[t_1; t_3, \varphi[t_2; t_1, x(t_1), \omega], \omega].$$

Властивості перехідної функції стану системи, що задовольняють наведеним співвідношенням, сповна визначають її як основну характеристику системи.

Вихідні величини системи можна визначити, якщо задані вхідні впливи і відома перехідна функція стану системи.

$$y(t) = \eta[t; x(t)].$$

Множина вихідних функцій може бути подана у загальнішій формі

$$\Gamma = \{\eta : T \times X \rightarrow Y\}.$$

Із урахуванням викладеного наведемо повне формулювання динамічної системи за Р. Калманом:

Динамічною системою називається математична модель сукупності взаємопов'язаних елементів, що задовольняють такі аксіоми:

1. Задані множини моментів часу T , множина станів системи X , множина миттєвих значень вхідних впливів U , множина їхніх допустимих значень

$$\Omega = \{\omega : T \rightarrow U\},$$

множина миттєвих значень вихідних величини Y і множина їхніх допустимих значень

$$\Gamma = \{\eta : T \times X \rightarrow Y\}.$$

2. Множина T є деяка упорядкована підмножина чисел (напрямок часу):

$$T \subseteq R.$$

3. Множина вхідних впливів задовольняє умови:

а) множина Ω непорожня;

б) відрізок вхідного впливу ω на проміжку часу $(t_1, t_3]$ має властивість (властивість «зчленування»):

$$\begin{cases} \text{якщо } \omega_1, \omega_2, \omega_3 \in \Omega \text{ і } t_1, t_2, t_3 \in T, \\ \text{то } \omega_3 = \omega_1, t_1 < t < t_2, \\ \omega_3 = \omega_2, t_2 < t < t_3, \end{cases} \quad (1.2.1)$$

3. Існує *перехідна функція стану*

$$\Phi = \{\varphi : T \times T \times X \times \Omega \rightarrow X\},$$

(1.2.2)

значеннями якої є стани системи

$$x(t) = \varphi[t; t_0, x(t_0), \omega] \in X, \quad (1.2.3)$$

в яких вона опиняється у момент $t \in T$, якщо у початковий момент часу $t = t_0$ вона була у початковому стані $x(t_0) \in X$ та якщо на неї впливав вхід $\omega \in \Omega$.

Перехідна функція стану має такі властивості:

а) функція визначена для усіх $t \geq t_0$ і не обов'язково визначена для усіх $t < t_0$ (напрямок часу);

б) функція узгоджена зі своїм початковим значенням, тобто рівність

$$x(t_0) = \varphi[t_0; t_0, x(t_0), \omega] \quad (1.2.4)$$

виконується для будь-яких

$$t \in T, x \in X, \omega \in \Omega;$$

в) для усіх відрізків вхідних впливів $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$ таких, що $\omega_1 = \omega_2$ для усіх $t_0 < t < t_1$

$$\varphi[t_1; t_0, x(t_0), \omega_1] = \varphi[t_2; t_0, x(t_0), \omega_2] \quad (1.2.5)$$

г) функція має *півгрупову властивість*, тобто для будь-яких $t_1 < t_2 < t_3$, $x \in X$, $\omega \in \Omega$ виконується рівність

$$\varphi[t_3; t_1, x(t_1), \omega] = \varphi\{t_3; t_0, \varphi[t_2; t_1, x(t_1), \omega], \omega\} \quad (1.2.6)$$

5. Задане вихідне відображення

$$\Gamma := \{\eta : T \times X \rightarrow Y\}, \quad (1.2.7)$$

що визначає значення вихідних величин системи

$$y(t) = \eta[t; x(t)]. \quad (1.2.8)$$

Наведене визначення у найзагальнішому вигляді описує математичну модель динамічної системи. Ця математична модель може застосовуватися до різних класів фізичних систем, що важливо з теоретичної точки зору.

Стан системи x у момент t , або пара елементів множини $T \times X$, називається *подією* або *фазою* системи. Сама множина $T \times X$ називається *простором подій*, або *фазовим простором*.

У тому випадку коли деяка множина вхідних впливів Ω_1 використовується для управління системою, вона називається *управлінням*. Управління переводить стан $x(t_0)$ у стан $\varphi[t; t_0, x(t_0), \omega]$. При цьому система перебуває у *русі*, й описує у просторі станів *траєкторію*.

Динамічна система називається *вільною* або *автономною*, якщо множина допустимих вхідних впливів Ω містить тільки один елемент. Практично це означає, що вхідні впливи відсутні і система здійснює рух лише через наявність початкових відхилень.

Важливим класом динамічних систем є системи, перехідна функція стану яких задовольняє диференціальне рівняння.

Запровадимо метрики на множинах моментів часу T , вхідних впливів Ω і станів системи X . Тоді ці множини стають метричними просторами. $T = R$, $\Omega = R^m$, $X = R^n$, де m і n – розмірності просторів.

Нехай перехідна функція стану $\varphi : T \times T \times X \times \Omega \rightarrow X$ – неперервне відображення у будь-якій точці $x \in X$ для кожного $t \in T$ у сенсі визначення (1.2.1)–(1.2.8).

Якщо стан системи визначається відповідним значенням перехідної функції стану

$$x(t) = \varphi[t; t_0, x(t_0), \omega],$$

прирошення x за нескінченно малого змінювання t у силу неперервності функції φ можна записати як:

$$dx = \frac{\partial}{\partial x} \varphi[t; t_0, x(t_0), \omega] dt.$$

Нехай, далі, функції $\frac{\partial}{\partial x} \varphi[t; t_0, x(t_0), \omega]$ однозначно відповідає деяка неперервна функція $f(t; x, \omega)$, тоді стан системи визначатиметься диференціальним рівнянням

$$\frac{dx}{dt} = f[t; x, u(t)]$$

де $u(t) = \omega(t)$.

Звичайною динамічною системою називається математична модель сукупності взаємозв'язаних елементів, що задовольняють аксіоми (1.11)–(1.18), в якій:

1. Множина моментів часу T є числова вісь дійсних чисел, а множини миттєвих значень вхідних впливів U , допустимих значень вхідних впливів Ω та станів системи X є векторні простори.

2. Функція $f(t; x, \omega)$, що має назву *функції, що виробляє*, яка задається функцією $\frac{\partial}{\partial x} \varphi[t; t_0, x(t_0), \omega]$, неперервна для кожного значення $t \in T$.

3. Перехідна функція стану системи є розв'язок диференціального рівняння

$$\frac{dx}{dt} = f[t; x, u(t)]$$

із початковими умовами $x(t_0) = x_0$ для усіх $t \in T$, $x \in X$, $u \in \Omega$, де x – вектор стану системи, u – вектор вхідних впливів.

Динамічна система називається *стаціонарною* (або із незалежними від часу параметрами), якщо виконуються такі умови:

1. Простір допустимих вхідних впливів Ω містить усі функції $\omega_1(t) = \omega(t + \tau)$ для будь-яких $t, \tau \in T$.

2. Справджується рівність

$$\varphi[t; t_0, x(t_0), \omega] = \varphi[t + \tau; t_0 + \tau, x, \omega(t + \tau)]$$

для усіх $\tau \in T$.

3. Відображення $\eta; T \times X \rightarrow Y$, що визначає вихідні величини $y(t) = \eta[t; x(t)]$, не залежить від t , тобто

$$y(t) = \eta(x).$$

Динамічна система буде системою із неперервним часом, коли T є множина усіх дійсних чисел. Коли T – множина цілих чисел, система буде із *дискретним часом*.

Найпростіша з точки зору методів дослідження є стаціонарна динамічна система, в якій множини X, U, Y є скінченні, і T є множина цілих чисел. Така система називається *скінченним автоматом*. Для дослідження скінченних автоматів досить апарату сучасної алгебри.

1.2.2 Управління

Якщо динамічна система розглядається як об'єкт управління, вхідні впливи називають *управліннями* $u(t)$.

Системи управління створюються для здійснення цілеспрямованих дій, у результаті яких об'єкт управління здійснює рух відповідно до визначених критеріїв. Це призводить до задачі відшукування вхідних впливів, які приводять вихідні величини до деякого заданого вигляду і установленому критерію ефективності дії системи. Така задача називається задачею оптимального управління, або просто *задачею управління*.

Нехай *об'єктом управління* є динамічна система у відповідності до визначення 1. Об'єкт управління матиме перехідну функцію стану

$$\varphi: T \times T \times X \times \Omega \rightarrow X$$

зі значеннями $x(t) = \varphi[t; t_0, x(t_0), \omega]$ та вихідну функцію

$$\eta: T \times X \rightarrow Y$$

зі значеннями $y(t) = \eta[t; x(t)]$.

За змінювання стану об'єкту $x(t)$ його вихідна величина також змінюватиметься, отже, на множині $T \times X \times Y$ можна визначити пари (x, y) для даного моменту t . Відокремимо на цій множині деяку підмножину $S_0 \subset T \times X \times Y$, елементами якої є задані значення (x, y, t) . Назвемо S_0 *цільовою підмножиною*. На множині Ω відокремимо підмножину Ω_0 – *множину допустимих управлінь*.

Тепер, якщо знайдеться такий вхідний вплив $u(t) = \omega(t)$ із множини допустимих управлінь, що перетворює подію (x_0, t_0) , а отже, і вихідну величину $y(t_0)$ таким чином, що множина значень величин

$$\varphi[t; t_0, x(t_0), u], \quad \eta[t; x(t)]$$

перетинається із множиною S_0 ; час t_1 , за який здійснюється цей процес, називається *часом досяжності*.

Утворимо деяку дійсну функцію, що залежить від значень вхідних і вихідних величин u і y , стану об'єкту x та його властивостей, що визначаються функціями φ і η ,

$$I = I(u, y, x, \varphi, \eta, t).$$

Вочевидь, за наявності управління $u(t)$, яке переводить об'єкт зі стану (x_0, t_0) у стан $[x(t_1), t_1]$, функція I набуде конкретне числове значення

$$I_1 = I_1\{u, y(t_1), x(t_1), \varphi[t_1; t_0, x(t_0), u], \eta[t_1; x(t_1)], t_1\}.$$

Функцію I називають *функцією втрат якості управління*. Належним вибором її вигляду забезпечується зменшення числа I_1 при підвищенні якості управління.

Загальною задачею управління називається математичне поняття, що утворюється за такими умовами:

1. *Об'єктом управління* є динамічна система згідно визначенню 1, яка має перехідну функцію стану $\varphi[t; t_0, x(t_0), u]$ та вихідну функцію $\eta[t; x(t)]$. Для об'єкту управління указана *цільова множина* $S_0 \subset T \times X \times Y$ і множина допустимих управлінь $\Omega_0 \subset \Omega$.

2. Задана *функція втрат якості управління*

$$I = I(u, y, x, \varphi, \eta, t).$$

і отримано *функціонал втрат якості управління*

$$I_1 = I_1\{u, y(t_1), x(t_1), \varphi[t_1; t_0, x(t_0), u], \eta[t_1; x(t_1)], t_1\}.$$

для даного часу досяжності t_1 , початкового моменту часу t_0 , початкового стану $x(t_0)$.

3. Необхідно для кожної даної події (t_0, x_0) визначити допустиме управління $u(t) \in \Omega_0$, яке перетворює подію (t_0, x_0) таким чином, що множина значень $\varphi[t_1; t_0, x(t_0), u]$, $\eta[t_1; x(t_1)]$ перетинається із цільовою множиною S_0 :

$$\{\varphi[t_1; t_0, x(t_0), u], \quad \eta[t_1; x(t_1)]\} \cap S_0.$$

і яка мінімізує функціонал втрат якості управління.

У разі лінійної динамічної системи

$$f[t; x, u(t)] = F(t)x + G(t)u,$$

а вихідна функція –

$$\eta(t, x) = H(t)x.$$

При цьому одним з розповсюджених критеріїв якості управління є *квадратичний критерій*. Функціонал утрат якості управління формується таким чином.

Нехай задано відображення $z: T \rightarrow Y$ зі значеннями $y = z(t)$. Це відображення називають *бажаним вихідним сигналом*. Різниця між бажаним вихідним сигналом та поточним значенням вихідної величини характеризує похибку управління

$$e(t) = z(t) - y(t) = z(t) - H(t)x(t),$$

а функціонал утрат якості управління набуде простий вигляд:

$$I_1 = |e(t)|^2 = \int_{t_1}^{t_2} [|e(t)|^2 + |u(t)|^2] dt.$$

У цьому разі задача управління зводиться до вибору такого управління $u(t)$, яке б мінімізувало похибку управління і витрати енергії органів, що управляють.

Принцип зворотного зв'язку у теорії автоматичного регулювання складає її основу і широко застосовується у технічних прикладаннях.

Запроваджені визначення динамічної системи природним чином приводять до формулювання поняття закону управління.

Дійсно, перехідна функція стану $\varphi[t; t_0, x(t_0), u]$ визначає стан системи, а значить, і значення у момент t , якщо відомий стан системи у момент t_0 і відрізок вхідного впливу ω на проміжку $[t_0, t)$. Отже, уся інформація, що необхідна для визначення потрібного управляючого впливу $u(t) = \omega(t)$, міститься у поточному стані системи.

Законом управління називається відображення

$$k: T \times X \rightarrow U,$$

значеннями якого будуть величини $u(t)k[t; x(t)]$ управлінь.

У загальному випадку визначення функції k утруднено тією обставиною, що співвідношення

$$u(t) = k\{t; \varphi[[t; t_0, x(t_0), u]\}$$

не указує область існування функції k за умов, що накладаються на множину допустимих управлінь Ω .

Крім цього, знання змінних стану $x(t)$ можливе тільки за даними про вихідні величини, що потребує операції визначення зворотного перетворення

$$\eta^{-1}: Y \rightarrow X,$$

значення якого і будуть шукані величини

$$x(t) = \eta^{-1}[y(t)]$$

Крім того, якщо таку операцію можна здійснити, необхідно мати можливість оцінити

точність визначення $x(t)$, тобто отримати оцінку стану $x_0(t)$.

Автоматичним управлінням динамічною системою називається процес, що протікає у часі, який задовольняє умови:

1. Для об'єкту управління, що задовольняє визначення 1, указані цільова множина $S_0 \subset T \times X \times Y$ і множина допустимих управлінь $\Omega_0 \subset \Omega$.

2. Визначене відображення, що називається *законом управління*

$$k: T \times X \rightarrow U,$$

значеннями яких є величини управління

$$u(t) = k\{t; \varphi[t; t_0, x(t_0), u(t)]\}.$$

3. Управління $u(t) \in \Omega_0$ переводить об'єкт управління зі стану $x(t_0) \in T \times X$ у стан $x(t) \in S_0$ за час $t_1 - t_0$ – *час переходу* і мінімізує функціонал втрат якості управління

$$I_1 = I_1\{u, y(t_1), x(t_1), \varphi[t; t_0, x(t_0), u(t)], \eta[t; x(t_1)], t_1\}. \quad (1.2.9)$$

4. Вихідна функція $\eta(t, x)$ визначає попадання вихідної величини y у цільову множину S_0 кожного разу, коли $x(t) \in S_0$, і допускає зворотне відображення

$$\eta^{-1}: Y \rightarrow X$$

із значеннями

$$x(t) = \eta^{-1}[y(t)].$$

5. Існує оцінка $x_0(t)$ стану системи за значеннями вихідної величини $y(t_0): t_0 \leq t$.

Назвемо *регулятором* математичну модель системи, що складається із елемента, який забезпечує оцінку стану об'єкту управління, і елемента, що формує закон управління.

Основні визначення, що сформульовано вище, надають можливість перелічити низку задач загальної теорії систем, що стосуються проблеми управління.

а) *Задача ідентифікації системи.*

У випадку коли множині управлінь $u(t) \in \Omega_0$ однозначно відповідає множина вихідних величин $y(t) \in Y$, можна указати сімейство функцій, що визначаються відображенням

$$f_r: T \times \Omega \rightarrow Y,$$

кожна з яких ставить у відповідність управлінню $u(t)$ вихідну величину $y(t)$:

$$y(t) = f_{ri}[u(t)], \quad (1.2.10)$$

де i – номери даної залежності.

У складнішому випадку відповідність між $u(t)$ та $y(t)$ встановлюється, своєю чергою, через деякі функції F і M цих величин

$$F[y(t)] = f_{ri}[M(u(t))]. \quad (1.2.11)$$

Побудова математичної моделі динамічної системи за цими даними і є *задачею ідентифікації*. Найчастіше задача ідентифікації виникає, коли за набором i -ї кількості експериментальних даних, що визначаються співвідношеннями (1.2.10), (1.2.11), необхідно визначити внутрішні властивості системи, наприклад, перехідну функцію станів $\varphi[t; t_0, x(t_0), \omega]$.

б) *Задача управляємості і спостережуваності системи.*

Розв'язання будь-якої задачі управління вимагає виконання умови, за якої необхідно знайти таке управління $u(t)$, яке б переводило систему зі стану $x(t_0)$ у стан $x(t_1)$. Але виконати цю умову далеко не просто. Тому ставиться задача визначення *управляємості* динамічної системи, що полягає у відшуванні умов, за яких перехідна функція стану $\varphi: T \times T \times X \times \Omega \rightarrow X$ зі значеннями $x(t) = \varphi[t; t_0, x(t_0), \omega]$ існувала і відрізнялася від нуля для всіх управлінь $u(t) \in \Omega_0$.

Виконання однієї з умов управління об'єктом вимагає знання поточного стану $x(t)$ системи за значеннями вихідної величини $y(t)$, тобто існування відображення $\eta: Y \rightarrow X$. Задачею визначення *спостережуваності* динамічної системи і є встановлення умов, за яких це відображення існує і відрізняється від нуля для всіх $y(t) \in Y$ і $x(t) \in X$.

в) *Задача оптимального управління.*

Однією з основних задач теорії систем є відшукування способів побудови закону управління $k: T \times X \rightarrow U$ на заданих множинах X , Y і Ω_0 , який забезпечує мінімізацію функціоналу втрат якості управління

$$I_1 = I_1(u, y, x, \varphi, \eta, t_1).$$

Це – задача оптимального управління.

1.2.3 Лінійна динамічна система

Поняття лінійної динамічної системи на рівні фізичних уявлень зазвичай спирається на принцип суперпозиції, який полягає у тому, що загальний ефект від сукупності вхідних впливів на систему можна отримати підсумовуванням вихідних величин від кожного впливу окремо.

Лінійною динамічною системою називається математична модель сукупності взаємопов'язаних елементів, які задовольняють аксіоми визначення 1 і умови:

1. Задані лінійні (векторні) простори станів X системи, миттєвих вхідних впливів U , їх допустимих значень Ω , миттєвих значень вихідних величин Y та їх допустимих значень Γ .

2. Перехідна функція стану $\varphi: T \times T \times X \times \Omega \rightarrow X$ зі значеннями

$$x(t) = \varphi[t; t_0, x(t_0), \omega]$$

є лінійна на множині $X \times \Omega$ зі значеннями

$$\varphi[t; t_0, x(t_0), \omega] = \varphi[t; t_0, x(t_0), 0] + \varphi[t; t_0, 0, \omega],$$

і задовольняє диференціальне рівняння

$$\frac{dx}{dt} = g[t; x, u(t)]$$

3. Вихідне відображення $\eta: T \times X \rightarrow Y$ лінійне на X

$$y(t) = \eta[t; x(t)] = h(t) \cdot x(t)$$

Лінійна динамічна система описується системою лінійних диференціальних рівнянь

$$\frac{dX}{dt} = F(t)X + B(t)U, \quad Y(t) = C(t)X. \quad (1.2.12)$$

Якщо матриці F, B, C не залежать від часу, лінійна динамічна система буде *стаціонарною*.

Перехідна матриця лінійної системи

Розглядаємо диференціальне рівняння лінійної системи

$$\frac{dX}{dt} = F(t)X,$$

із початковими умовами

$$X(t_0) = \Lambda.$$

що отримано з рівняння стану системи

$$\frac{dX}{dt} = F(t)X + G(t)U$$

за $U = 0$.

Зв'язок між вектором стану системи $X(t)$, вектором початкових умов $X(t_0)$ та вектором вхідних впливів $U(t)$ визначається через перехідну матрицю $\Phi(t, t_0)$:

$$X(t) = \Phi(t, t_0)X(t_0) + \Phi(t, t_0) \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(\tau, t_0)G(\tau)U(\tau)d\tau. \quad (1.2.13)$$

Якщо вхідний вплив відсутній, вектор станів системи визначає *вільний рух* системи.

$$X(t) = \Phi(t, t_0)X(t_0). \quad (1.2.14)$$

Отримане співвідношення свідчить, що матриця $\Phi(t, t_0)$ визначає перехід системи із початкового стану у момент t_0 у стан $X(t)$. Тому $\Phi(t, t_0)$ і називається *перехідною матрицею системи*.

Якщо до надходження вхідного впливу система перебувала у стані спокою $X(t_0) = 0$, вектор стану системи після надходження вхідного впливу визначатиме *вимушений рух*. Тоді формулу (1.2.13) можна записати у такому вигляді

$$X(t) = \Phi(t, t_0)X(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)G(\tau)U(\tau)d\tau. \quad (1.2.15)$$

Ця формула не містить зворотної матриці, тому зручніша для використання.

Імпульсна перехідна функція

Розглянемо лінійну систему, стан якої у момент $t = \xi$ характеризується нульовим

початковим вектором $X(\xi) = 0$. За $t = \xi$ на систему надходить вхідний вплив

$$U(t) = N\delta(t - \xi), \quad N = [n_1, n_2, \dots, n_m]^T.$$

Такий вхідний вплив є набір імпульсних вхідних сигналів у вигляді δ -функцій із «площинами» $n_1, n_2, \dots, n_m$.

$$n_k = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_{\alpha}(t - \xi) dt,$$

де $\delta_{\alpha}(t - \xi)$ – будь-яка неперервна парна функція із параметром α така, що за $\alpha \rightarrow 0$ $\delta_{\alpha}(t - \xi) \rightarrow \delta(t - \xi)$. Має місце співвідношення

$$f(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t - \xi) dt$$

Замістимо цей виразу у (1.2.15).

$$X(t) = \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) G(\tau) N \delta(\tau - \xi) d\tau = \Phi(t, \xi) G(\xi) N. \quad (1.2.16)$$

Покладемо тепер $N = [1 \ 1 \dots 1]^T$. Отримана таким чином множина вихідних сигналів є *матриця імпульсних перехідних функцій*.

$$W(t, \xi) = \Phi(t, \xi) G(\xi).$$

Формулу (1.2.16) із урахуванням (1.2.14) можна записати у вигляді

$$X(t) = W(t, t_0) N.$$

Порівняння цієї формули із (1.2.14) для визначення вектора станів за вільного руху системи свідчить, що матриця імпульсних перехідних функцій відображає вектор «енергій» δ -функцій у поточний стан системи. Ця обставина дозволяє здійснити перерахунок вектора початкових умов $X(t_0)$ в еквівалентний вектор вхідних сигналів $U_{\dot{a}} = N\delta(t - t_0)$. Тим самим вектор станів системи можна визначити як результат вхідних впливів на систему, що перебувала до цього у спокої. Формула (1.2.15) може бути замінена такою:

$$X(t) = \int_{t_0}^t W(t, \tau) [U_{\dot{a}} + U_{\dot{a}}(\tau)] d\tau.$$

Для визначення значень вектора-стовпця N , що відповідає значенням початкових умов $X(t_0)$, скористаємося виразом (1.2.16) та (1.2.14):

$$X(t) = \Phi(t, t_0) G(t_0) N,$$

$$X(t) = \Phi(t, t_0) X(t_0).$$

Прирівнювання правих частин цих співвідношень дає

$$N = G^{-1}(t_0) X(t_0).$$

Приклад 1.1.

Визначити перехідну і вагову функції коливальної ланки із передатною функцією

$$W(p) = \frac{b_1 p + b_0}{T^2 p^2 + 2\xi T p + 1} \quad (0 < \xi < 1).$$

Розв'язання. Диференціальне рівняння має вигляд

$$T^2 \frac{d^2 y}{dt^2} + 2\xi T \frac{dy}{dt} + y = b_1 \frac{du}{dt} + b_0 u.$$

З метою визначення перехідної функції отримаємо розв'язок цього рівняння (нехай $b_1 = 0$) при вхідному впливі $u(t) = 1(t)$ і нульових початкових умовах. $y(0) = 0, dy/dt = 0$.

Характеристичне рівняння:

$$T^2 \lambda^2 + 2\xi T \lambda + 1 = 0 \rightarrow \lambda_{1,2} = -\xi/T \pm i\sqrt{(\xi/T)^2 - 1/T^2} = -\alpha \pm j\eta.$$

$$\alpha = \xi/T, \quad \beta = \sqrt{1 - \xi^2}/T.$$

Загальний розв'язок однорідного диференціального рівняння шукаємо у вигляді

$$y_c(t) = (C_1 \sin \beta t) + C_2 \cos \beta t) e^{-\alpha t}.$$

$$\frac{dy}{dt} = [\beta(C_1 \cos \beta t) - C_2 \sin(\beta t)) - \alpha(C_1 \sin \beta t) + C_2 \cos \beta t)] e^{-\alpha t}.$$

Частинний розв'язок неоднорідного рівняння $y_z = b_0$. Тому загальний розв'язок задачі:

$$y = y_c(t) + y_z = [(C_1 \sin \beta t + C_2 \cos \beta t)] e^{-\alpha t} + b_0$$

Початкові умови: $y(0) = C_2 + b_0$, $y'(0) = \beta C_1 - \alpha C_2 = 0$. , звідси $C_2 = -b_0$, $C_1 = -\alpha k/\beta$. Для перехідної функції (вихідна функція за $u = 1(t)$) маємо

$$h(t) = b_0 \left[1 - \frac{1}{\beta} (\alpha \sin \beta t + \beta \cos \beta t) e^{-\alpha t} \right].$$

Вагову функцію отримуємо з

$$w(t) = \frac{dh(t)}{dt} = b_0 \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{\beta} e^{-\alpha t} [\alpha \sin(\beta t + \varphi_0) - \beta \cos(\beta t + \varphi_0)].$$

$$\varphi_0 = \arctg(\beta/\alpha).$$

Запитання для самоперевірки

1. Навести визначення поняття «динамічна система».
2. У чому полягає різниця між описом динамічної системи у термінах «вхід – вихід» та « простір станів»?
3. Навести визначення поняття «система управління» динамічною системою.
4. Що мається на увазі під висловом «регулятор» динамічної системи?
5. У чому полягає задача ідентифікації динамічної системи?
6. Для якої мети визначаються поняття «управляємость» та «спостережність» динамічної системи?
7. Навести поняття «лінійна динамічна система».
8. Як визначається поняття «перехідна функція» динамічної системи?
9. Як визначається поняття «імпульсна перехідна функція» динамічної системи?
10. Навести формулу вимушеного руху динамічної системи.

1.3 Динамічна система, що описується системою звичайних диференціальних рівнянь

Нехай набір чисел $x = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ у деякий момент часу описує стан динамічної системи, і різним наборам $x = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ відповідають різні стани. Задамо еволюційний оператор, вказавши швидкість змінювання кожного стану системи:

$$\frac{dx_i}{dt} = F_i(x_1, x_2, \dots, x_N), \quad i = \overline{1, N}; \quad (1.2.17)$$

де x – точка (фазова) евклідова простору $\mathcal{R}_N$, що називається *фазовим простором*, системи вигляду (1.2.17), в яких права частина не залежить явно від часу, називають *автономними системами*.

Якщо систему рівнянь доповнюють початковими умовами $x(0) = x_0$, отримують задачу Коші. Її розв'язок – $\{x(t), t > 0\}$, розглядають як множину точок фазового простору. $\mathcal{R}_N$, що утворює фазову траєкторію. У фазовому просторі праві частини системи рівнянь (1.2.17) задають векторне поле швидкостей, що співставляє кожній точці x вектор $F(x)$, який виходить із точки x . Фазові траєкторії і векторне поле швидкостей дають наочне уявлення про характер поведінки системи із часом. Множини фазових траєкторій, що відповідають різним початковим умовам, утворюють *фазовий портрет* динамічної системи.

1.3.1 Гармонічні коливання

Розглянемо задачу Коші для звичайного диференціального рівняння, що описує рух матеріальної точки одиничної маси, яка рухається вздовж прямої під впливом сили, що повертає, яка пропорційна зсуву точки із стану рівноваги $x = 0$:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -x; \quad x(0) = x_0, \quad \frac{dx}{dt} \Big|_{x=0} = v_0;$$

Ця задача приводиться до системи двох рівнянь першого порядку:

$$\frac{dx}{dt} = p; \quad \frac{dp}{dt} = -x; \quad x(0) = x_0, \quad p(0) = v_0. \quad (1.2.18)$$

Значення координати x матеріальної точки й її імпульсу $p = \dot{x}$ сповна визначає стан механічної системи у момент часу t . Фазовими координатами у цьому випадку є пара (x, p) . Прийнято вважати, що у такого роду системах число ступенів свободи дорівнює одиниці (оскільки йдеться про одновимірний механічний рух), а фазовий простір є двовимірний. Вирішуючи задачу Коші, маємо опис еволюції системи у вигляді

$$x = a \sin(t + \varphi), \quad p = a \cos(t + \varphi).$$

На фазовій площині фазові траєкторії є кола, радіуси яких визначаються початковими умовами.

Зазначимо, що із рівнянь (1.2.18) видно, що вектор фазової швидкості $F(x) = dx/dt$ точки $x = (x, p)$ дорівнює $(p, -x)$, є перпендикулярний вектору (x, p) і дорівнює йому за модулем – це забезпечує рівномірне обертання точки $(x(t), p(x))$ у фазовій площині із часом. Оскільки кінетична енергія T матеріальної точки, що коливається, дорівнює $T = \dot{x}^2/2 = p^2/2$, а потенціальна $U = x^2/2$, повна енергія системи $E = T + U = \|x\|^2$ пропорційна квадрату радіуса кола, і всякому значенню енергії відповідає своя фазова крива – коло. Множина кіл, що відповідають різним значенням повної енергії системи, утворюють фазовий портрет.

У цій динамічній системі можна запровадити нові координати на фазовій площині – полярні координати (E, φ) , в якій сімейство фазових траєкторій можна записати у простому вигляді $E = \text{const}$.

1.3.2 Рух у полі потенціальних сил

Нехай еволюція системи описується диференціальним рівнянням

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f(x) \Leftrightarrow \frac{dx}{dt} = p, \quad \frac{dp}{dt} = f(x)$$

рівнянням руху матеріальної точки у полі потенціальних сил; тут $f = -dU/dx$, U – потенціал.

Якщо для деякого значення x_0 фазових координат системи права частина рівняння (1.2.7), тобто швидкість $F(x)$ їхнього змінювання, дорівнює нулю, цей стан системи не може змінитися. Точка x_0 фазового простору, для якої виконана умова $F(x) = 0$, називається стаціонарною точкою, або станом рівноваги. Для даного прикладу положення рівноваги системи визначаються умовами $p = 0$, $f(x) = 0$, тобто стаціонарна точка на фазовій площині міститься на осі Ox . Із $f(x) = 0$ випливає $dU/dx = 0$, і система має три положення рівноваги – x_0, x_1, x_2 . Залежно від повної енергії є той чи інший вид руху, що зображено траєкторією на фазовій площині.

Якщо початковий стан такий, що його енергії не досить для переходу через потенціальний бар'єр, точка коливається навколо одного із стійких станів рівноваги, що зображується замкнутими фазовими траєкторіями на фазовій площині. Якщо початкова енергія досить велика, виникають складні коливання точки навколо обох точок рівноваги. Ці типи руху на фазовій площині, що якісно розрізняються, розділяє крива, яка має назву *сепаратиси* – вона проходить через точку рівноваги системи. Точки рівноваги системи називаються особливими точками.

1.3.3 Нелінійний осцилятор

Розглянемо динамічну систему, що описується нелінійним еволюційним рівнянням

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \sin x = 0.$$

За аналогією із попереднім прикладом рух маятника можна розглядати як рух у полі потенціальних сил із потенціалом $U(x) = -\cos x$.

Стани рівноваги маятника на фазовій площині розташовані на осі Ox у точках $x_k = \pi k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, при цьому $x = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots$ – точки стійкої, а $x = \pm \pi, \pm 3\pi, \dots$ – точки нестійкої рівноваги. Поблизу точок стійкої рівноваги фазові криві являють собою замкнуті криві, близькі до кола, що відображає той факт, що при цьому маятник здійснює коливання, близькі до гармонічних. Через точки нестійкої рівноваги проходить крива, що має назву сепаратиси; вона поділяє фазову площину на області із якісно різною поведінкою. При зростанні енергії системи коливання переходять у обертання.

У прикладах, що розглянуто, повна енергія системи зберігається. Такі системи називають *консервативними*. Якщо ж у системі можливі втрати енергії, то такі системи називають *дисипативними*.

1.3.4 Маятник зі згасанням

Рівняння руху

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + \alpha \frac{dx}{dt} + \beta x = 0, \quad 0 < t \leq T,$$

описує еволюцію системи. Заміною змінних воно приводиться до рівняння

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + 2\delta \frac{dx}{d\tau} + x = 0, \quad 0 < \tau \leq T\sqrt{\beta/m}.$$

Тут, на відміну від попереднього прикладу, енергія не зберігається, це – система із *дисипацією*. Строго кажучи, це не є чисто механічна система, оскільки тут «сила», що дорівнює $-2\delta\dot{x} - x$, залежить не тільки від положення матеріальної точки, а й від її швидкості. За $\delta = 0$ отримуємо випадок консервативної системи, за $\delta > 0$ виникають два випадки – рух періодичний і аперіодичний.

Якщо $0 < \delta < 1$, фазова траєкторія отримується розв'язанням задачі Коші, яке має вигляд $x = Ae^{-\delta\tau} \cos(\omega\tau + \psi)$, $\omega = \sqrt{1 - \delta^2}$, що відповідає згасаючому коливанню. Якщо $\delta > 1$, фазова траєкторія описує рух без переколювань і дається співвідношеннями $x = A_1 e^{\lambda_1 \tau} + A_2 e^{\lambda_2 \tau}$, $\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - 1}$.

Отже, бачимо, що у консервативних системах не існує множин, що притягують, тобто таких підмножин фазового простору $\mathcal{R}_N$, до яких прямують траєкторії, що починаються у деякому їх околі. Якщо у консервативній системі існує періодичний рух,

таких рухів нескінченно багато, і визначаються вони значенням енергії при початкових умовах. Ці особливості є загальні для усіх консервативних систем.

У дисипативних системах можуть існувати так звані множини, що притягують, наприклад, типу стійких положень рівноваги, як у прикладі із коливаннями, що згасають.

Стаціонарні незгасаючі коливання для дисипативних динамічних систем не є характерні (навіть якщо вони й існують, для реалізації такого руху треба спеціальним чином обирати початкові умови), але виявляється, що у нелінійних системах можливе існування періодичного асимптотично стійкого руху, так звані *автоколивання*, математичним образом якого є граничний цикл, що зображується у фазовому просторі замкнутою лінією, до якої із часом стягуються траєкторії із деякого околу. Прикладом системи із граничним циклом є генератор Ван дер Поля.

1.3.5 Нелінійний осцилятор Ван дер Поля

Осцилятор Ван дер Поля описується диференціальним рівнянням

$$\frac{d^2x}{dt^2} - a(1 - bx^2)\frac{dx}{dt} + x = 0, \quad 0 < t \leq T,$$

де a – параметр збудження. Аналітично отримати його розв’язок не вдається. На якісному рівні ясно, що за малих x модулем x коефіцієнт при $\dot{x}$ є від’ємний – у системі виникає «від’ємне тертя», що відкидає точку від початку координат. За великих x тертя стає додатним, що протидіє зростанню координати. Отже, у системі існує стійкий стан автоколивань, до якого прагнуть усі фазові траєкторії.

Дивні атрактори

За значень розмірності фазового простору $N \geq 3$ можливий принципово новий тип фазових траєкторій – це так звані *дивні атрактори*. Фазова траєкторія системи у цьому разі являє собою нескінченну лінію без самопересічень, причому за $t \rightarrow \infty$ траєкторія не залишає задану область і не притягується ні до точок рівноваги, ні до циклічних траєкторій. Прикладом такої системи є атрактор Лоренца. Дивному атрактору відповідає складний аперіодичний рух, схожий із уявленням про хаотичний процес. Але теоретично він (рух) сповна передбачуваний – для початкової задачі, що визначає дивний атрактор, можуть виконуватися умови теореми існування та єдиності. Про таку поведінку динамічних систем говорять як про детермінований динамічний хаос.

1.3.6 Коливальний електричний контур

Цей пристрій являє собою конденсатор, з’єднаний із індуктивною котушкою. У момент $t = 0$ ланцюг замикається, і заряд із конденсатора починає розповсюджуватися по ланцюгу (рис. 1.3)

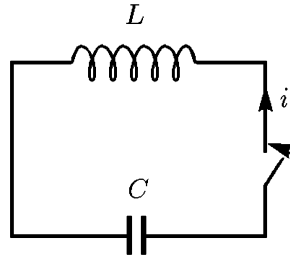


Рис.1.3. Електричний контур

Опір проводів вважатимемо рівним нулю, ємність конденсатора дорівнює C , індуктивність котушки L . Для величини $q(t)$ (заряд на обкладинках конденсатора) необхідно отримати відповідне рівняння. Вочевидь, струм $i(t)$ та напруга $v(t)$ також є функції часу.

Із фізичного сенсу величини C у будь-який момент часу маємо рівність $v(t) = q(t)C$. За змінного струму у котушці виникає електро рухома сила самоіндукції, що дорівнює $\varepsilon = -L di/dt$. Закон Ома для ланцюга за відсутності опору виглядає так:

$$v(t) = -\varepsilon(t),$$

або

$$q(t)C = -\varepsilon(t) = L di/dt.$$

Оскільки за визначенням $i = -dq/dt$ (при змінюванні заряду на конденсаторі виникає струм), із останнього співвідношення отримуємо рівняння

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} = -Cq,$$

що описує процес коливань величиною $q(t)$.

1.3.7 Малі коливання при взаємодії двох біологічних популяцій

Нехай на одній і тій самій території існують дві біологічні популяції із чисельностями $N(t)$ та $M(t)$, причому перша рослинноядна, а друга споживає представників першої популяції.

Швидкість змінювання $N(t)$ складається із швидкості прирощення завдяки народжуваності, що визначається першим членом у рівнянні

$$\frac{dN(t)}{dt} = [\alpha(t) - \beta(t)]N(t),$$

де $\alpha(t) \geq 0$ – народжуваність, $\beta(t) \leq 0$ – смертність, та швидкості убування завдяки наявності другої популяції:

$$\frac{dN}{dt} = (\alpha_1 - \beta_1 M)N, \quad (1.2.20)$$

де $\alpha_1 > 0$, $\beta_1 > 0$, член $\beta_1 M N$ описує вимушене убування.

Чисельність другої популяції зростає тим швидше, чим більше чисельність першої

популяції, а за її відсутності зменшується зі швидкістю, що є пропорційна чисельності $M(t)$ (тобто її народжуваність, як і ефект насиченості, не враховується):

$$\frac{dM(t)}{dt} = [-\alpha_2(t) + \beta_2(t)N]M, \quad (1.2.21)$$

де $\alpha_2 > 0$, $\beta_2 > 0$.

Вочевидь, система перебуває у рівновазі за $M_0 = \alpha_1/\beta_1$ та $N_0 = \alpha_2/\beta_2$, коли $dN/dt = dM/dt = 0$. Розглянемо малі відхилення системи від рівноваги, тобто представимо розв'язок у вигляді $N = N_0 + n$, $M = M_0 + m$, $n \ll N_0$, $m \ll M_0$. Після заміщення N та M у рівняння (1.2.20), (1.2.21) отримаємо

$$\frac{dn}{dt} = -\beta_1 N_0 m, \quad (1.2.22)$$

$$\frac{dm}{dt} = -\beta_2 M_0 n. \quad (1.2.23)$$

Здиференціюємо (1.2.22) по t і замістимо в отримане рівняння функцію dm/dt із (1.2.23). Отримуємо рівняння

$$\frac{d^2 n}{dt^2} = -\beta_1 \beta_2 n.$$

Значить, у системі здійснюються малі коливання чисельності із частотою $\omega = \sqrt{\beta_1 \beta_2}$, що залежать тільки від коефіцієнтів народжуваності та смертності α_1 і α_2 .

Зазначимо, що величина $m(t)$ підпорядковується такому самому рівнянню, причому, якщо відхилення $n(t) = 0$ при $t = 0$, $m(t = 0)$ має максимальну амплітуду, і навпаки. Ця ситуація, коли чисельності $n(t)$ і $m(t)$ знаходяться у протифазі, відтворюється для всіх моментів часу $t_i = iT/4$, $i = 1, 2, \dots$ (T – період коливань) і відображає запізнювання реакції чисельності однієї популяції за змінювання чисельності іншої.

Будемо тепер вважати коефіцієнт народжуваності таким, що залежить від чисельності популяції $N(t)$, тобто $\alpha = \alpha(N)$. Коефіцієнт смертності β також залежить від N . Рівняння динаміки популяції

$$\frac{dN}{dt} = [\alpha(N) - \beta(N)]N. \quad (1.2.24)$$

є нелінійне через змінювання характеристик взаємодії всередині популяції при змінюванні її стану. Покладемо для визначеності $\beta(N) = \beta_0 = \text{const}$, $\alpha(N) = \alpha_0 N$, тобто народжуваність пропорційна чисельності. Тоді рівняння (1.2.24) перетвориться на

$$\frac{dN}{dt} = \alpha_0 N^2 - \beta_0 N \quad (1.2.25)$$

із квадратичною нелінійністю (характерною також для деяких хімічних реакцій). Розглянемо поведінку функції $N(t)$ за різних початкових чисельностях $N(0) = N_0$.

а) При $N_0 < N_{cr} = \beta_0/\alpha_0$ чисельність монотонно зменшується із часом, і прагне до нуля при $t \rightarrow \infty$.

б) За критичного значення $N_0 = N_{cr}$ чисельність популяції не залежить від часу.

в) За $N_0 > N_{cr}$ характер розв'язку принципово змінюється порівняно із випадками а), б): чисельність зростає із часом, причому настільки швидко, що прямує у нескінченність за скінченний час $t = t_f$. Величина t_f тим менша, чим більше N_0 .

Нелінійність рівняння (1.2.25) породжує різновид ефектів, що наявні навіть у найпростішій моделі: три можливих режими змінювання чисельності із часом; нестійкість режиму б) – за малих відхилень в область а) або в) розв'язок віддаляється від лінії $N_{cr} = \beta_0/\alpha_0$; сильну чутливість функції $N(t)$ до початкових даних N_0 ; катастрофічне зростання чисельності популяції за скінченний час при $N_0 > N_{cr}$.

Остання властивість має загальний характер для будь-яких моделей вигляду

$$\frac{dN}{dt} = F(N), \quad t > 0, \quad N(0) > 0, \quad F(N) > 0,$$

якщо за великих N функція $F(N)$ зростає швидше за перший степінь N , точніше, якщо для $F(N)$ справджується критерій

$$\int_{N(0)}^{\infty} \frac{dN}{F(N)} < \infty,$$

який отримують безпосереднім інтегруванням рівняння.

Завдання для самостійної роботи

1. Визначити перехідні функції системи, що описується диференціальним рівнянням:

$$1a) \quad \frac{d^2 y}{dt^2} + 2 \frac{dy}{dt} + 5y = 7 \frac{du}{dt} + Nu;$$

$$1b) \quad \frac{d^3 y}{dt^3} + 2 \frac{dy}{dt} + Ny = \frac{d^2 u}{dt^2} + 7 \frac{du}{dt} + Nu;$$

$$1c) \quad \frac{d^3 y}{dt^3} + 5 \frac{d^2 y}{dt^2} + 3 \frac{dy}{dt} + Ny = 3u;$$

$$1d) \quad \frac{d^3 y}{dt^3} + 4 \frac{d^2 y}{dt^2} + 3 \frac{dy}{dt} + Ny = 2u;$$

$$1e) \quad \frac{d^3 y}{dt^3} + 4 \frac{d^2 y}{dt^2} + 8 \frac{dy}{dt} + Ny = 3 \frac{du}{dt} + Nu;$$

Примітка: N – порядковий номер групи у потоці.

Кожне завдання виконує бригада із 3-х студентів. Звіти надсилати кожному студенту. Отримати розв'язок задачі Коші:

2. Знайти розв'язок задачі Коші:

$$2a) \quad \frac{d^2 y}{dt^2} + 2N \frac{dy}{dt} + 3y = t; \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = \omega;$$

$$2b) \quad \frac{d^2 y}{dt^2} + 3N \frac{dy}{dt} + y = \omega t; \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2;$$

$$2c) \quad 3 \frac{d^2 y}{dt^2} + 6 \frac{dy}{dt} + Ny = t; \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = \omega;$$

$$2d) \quad \frac{d^2 y}{dt^2} + 2 \frac{dy}{dt} + Ny = Nt; \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = \omega;$$

$$2e) \quad \frac{d^2 y}{dt^2} + 4 \frac{dy}{dt} + y = Nt; \quad y(0) = \omega, \quad y'(0) = 0.$$

Запитання для самоперевірки

1. Як визначається нормований простір?
2. У чому полягає різниця між метрикою простору та нормою?
3. Навести визначення динамічної системи.
4. Яка основна кількісна характеристика фізичної субстанції?
5. Для яких фізичних об'єктів використовують закон Фур'є, закон Фіка, закон Дарсі, закон Ома?
6. Дати визначення понять: стан системи, перехідна функція системи, імпульсна функція системи.
7. У чому полягає задача управління системою, оптимального управління динамічною системою?
8. У чому полягає різниця між програмним управлінням та автоматичним управлінням?
9. Як визначається поняття «осцилятор», навести приклади осциляторів.
10. Скласти диференціальне рівняння коливального контуру.
11. У чому полягає різниця між автономною та дисипативною системами?

Розділ 2. Отримання моделей із законів природи

У цьому розділі розглядаються закони збереження маси, енергії, імпульсу субстанції та їхнє сумісне застосування, що мають враховуватися під час побудови математичних моделей фізичних процесів..

2.1 Збереження маси речовини

На основі балансу маси речовини побудуємо моделі потоку частинок, що не взаємодіють, та руху ґрунтових вод у пористому середовищі.

2.1.1 Потік частинок у трубі

У циліндричній трубі із поперечним перерізом S рухаються частинки речовини (наприклад, пилу). Швидкість їхнього руху $u(t) > 0$ вздовж осі x змінюється із часом. Наприклад, заряджені частинки можуть прискорюватися або уповільнюватися під впливом електричного поля. Для побудови найпростішої моделі руху, що розглядається, запровадимо такі припущення:

а) частинки між собою не взаємодіють (не притягуються і не відштовхуються тощо). Для цього густина частинок має бути досить малою (у цьому випадку заряджені частинки не впливають одна на одну через велику відстань між ними);

б) початкова швидкість усіх частинок, що містяться в одному і тому самому поперечному перерізі із координатою x , однакова і спрямована вздовж осі x ;

в) початкова густина частинок також залежить тільки від x ;

г) зовнішні сили, що діють на частинки, спрямовані вздовж осі x .

Припущення а) означає, що швидкість частинок може змінюватися лише під дією зовнішніх сил, припущення б)–г) забезпечують одновимірність процесу перенесення, тобто залежність шуканої густини потоку частинок тільки від координати x та часу $t \geq 0$. Отже, за заданою початковою густиною $\rho(x, t)|_{t=0} = \rho_0(x)$ необхідно знайти густину частинок $\rho(x, t)$ у будь-який момент часу для будь-яких x (швидкість руху $u(t)$ задана).

Застосуємо закон збереження маси, підрахувавши баланс речовини у малому елементі труби від x до $x + dx$ за час dt . (рис. 2.1)

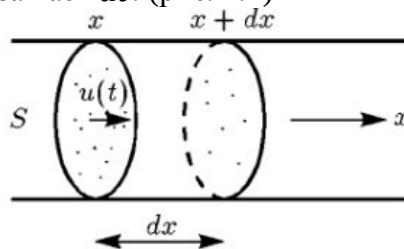


Рис.2.1. До закону збереження маси

Ліворуч в елементарний об'єм входить кількість речовини із масою, що дорівнює

$$Su(t)dt\rho(x, t + \xi dt), \quad 0 \leq \xi \leq 1,$$

де $Su(t)dt$ – об'єм речовини, що увійшла за проміжок часу dt . Через правий переріз елемента за той самий час виходить маса, що дорівнює

$$-Su(t)dt\rho(x + dx, t + \bar{\xi} dt), \quad 0 \leq \bar{\xi} \leq 1,$$

тобто сумарне змінювання маси дорівнює

$$dm = Su(t)[\rho(x, t + \xi dt) - \rho(x + dx, t + \bar{\xi} dt)]dt.$$

Через малість проміжку dt швидкість $u(t)$ вважається сталою.

Величини $\rho(x, t + \xi dt)$ і $\rho(x + dx, t + \bar{\xi} dt)$ – середні за часом значення густини у перерізах x і $x + dx$.

Інший спосіб підрахунку змінювань у фіксованому об'ємі Sdx очевидний із сутності величини $\rho(x, t)$:

$$dm = Sdx[\rho(x + \eta dx, t + dt) - \rho(x + \bar{\eta} dx, t)], \quad 0 < \eta, \bar{\eta} < 1,$$

де $\rho(x + \eta dx, t + dt)$, $\rho(x + \bar{\eta} dx, t)$ – середні за простором значення густини у моменти часу t та $t + dt$.

Прирівняємо обидва вирази для dm і спрямуємо dx і dt до нуля. Приходимо до рівняння для $\rho(x, t)$, яке відповідає закону збереження маси,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x} u(t) = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \quad (2.1.1)$$

із початковою умовою

$$\rho(x, 0) = \rho_0(x), \quad -\infty < x < \infty. \quad (2.1.2)$$

Величина ρu (потік речовини, або потік маси) дорівнює кількості речовини, що проходить в одиницю часу через одиничну поверхню поперечного перетину труби. Як бачимо із рівняння (2.1.1), швидкість змінювання густини речовини із часом у будь-якому перетині визначається «швидкістю» змінювання потоку речовини за координатою x . Схожу властивість мають багато моделей, що відповідають законам збереження і які описують зовсім інші процеси.

У випадку сталої швидкості $u(t) = u_0$ приходимо до найпростішого лінійного рівняння у частинних похідних

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u_0 \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \quad (2.1.3)$$

Його загальний розв'язок неважко знайти, з огляду на те, що рівняння (2.1.3) має характеристики – лінії $x = u_0 t + C$, на яких значення шуканої функції є сталі у часі, тобто $\rho(x = u_0 t + C, t) = \rho_C$, або, в еквівалентному запису,

$$\rho(x, t) = \rho(x + u_0(t - t_0), t_0), \quad t - t_0 \geq 0.$$

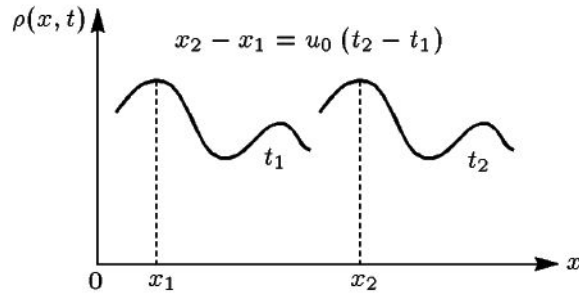


Рис.2.2. До рівняння (2.1.3)

Вибираючи $t_0 = 0$, отримаємо

$$\rho(x, t) = \rho(\xi) = \rho(x + u_0 t). \quad (2.1.4)$$

Інтеграл (2.1.4) і є загальний розв'язок рівняння (2.1.3). Із формули (2.1.4) і початкових даних (2.1.2) легко знайти шукану функцію, причому вона залежить не окремо від змінних x, t , а від їхньої комбінації $\xi = x + u_0 t$ (хвиля, що біжить). Просторовий профіль густини без викривлень переноситься уздовж потоку (рис. 2.2) зі сталою швидкістю (рівняння (2.1.3) називають також *рівнянням перенесення*). Якщо швидкість потоку залежить від густини ($u = u(\rho)$), рівняння (2.1.1) стає нелінійним, і поведінка його розв'язку може мати інший характер.

Запитання для самоперевірки

1. Що визначає рівняння (2.1.3)?
2. Як визначаються характеристичні лінії?
3. Як визначається загальний розв'язок рівняння (2.1.3)?

2.2 Збереження енергії

Закон збереження енергії із певними додатковими обмеженнями можна застосувати для побудови моделей розповсюдження тепла у суцільному середовищі. Сформулюємо типові крайові задачі для рівнянь теплопровідності.

Теплова енергія, або тепло – це енергія хаотичного руху атомів або молекул речовини. Обмін теплом між різними ділянками матеріалу називається теплопередачею, а самі матеріали, що мають властивість теплопередачі, теплопровідними. До них належать, наприклад, метали, у яких теплова енергія переноситься в основному вільними електронами, деякі гази тощо.

Процеси передачі тепла розглядаються в умовах так званої *локальної термодинамічної рівноваги* (ЛТР). Поняття ЛТР для газів запроваджується за $\lambda \ll L$, тобто коли довжина вільного пробігу частинок речовини набагато менша за характерні розміри об'єкту, що розглядається (суцільне середовище). ЛТР припускає також, що процеси вивчаються за часів, більших за τ (час зіткнення частинок), та за розмірів, більших за λ . Тоді у ділянках речовини, розміри яких перевищують величину λ (але набагато менших за L), встановлюється рівновага і для них можна запровадити середні величини густини, швидкості теплового руху частинок тощо. Ці локальні величини (різні у різних точках середовища) перебувають у стані рівноважного максвелівського розподілу частинок. До них належить і температура T , яка визначає середню кінетичну енергію частинок:

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{3}{2}kT,$$

де m – маса частинки, v – середня швидкість хаотичного руху, k – стала Больцмана (у разі так званого больцманівського газу).

Енергія речовини, що пов'язана із хаотичним рухом, визначається через температуру за допомогою величини *питомої теплоємності* $c(\rho, T)$, а саме:

$$c(\rho, T) \frac{\partial \varepsilon(\rho, T)}{\partial T}, \quad c(\rho, T) > 0,$$

де $\rho = mn$ – густина речовини (n – число частинок в одиниці об'єму, $\varepsilon(\rho, T)$ – *внутрішня енергія одиниці маси*). Тобто, теплоємність – це енергія, яку треба надати одиниці маси речовини, щоб збільшити її температуру на один градус.

Найпростіший вираз для теплоємності отримується у випадку ідеального газу (газу, частинки якого взаємодіють лише за безпосереднього зіткнення та без втрат сумарної кінетичної енергії). Якщо у деякому об'ємі ідеального газу міститься N частинок, їхня повна внутрішня енергія є

$$E = N \frac{mv^2}{2} = \frac{3}{2} M k T = \frac{3}{2} M \frac{k}{m} T,$$

де $M = Nm$ – сумарна маса частинок, а питома внутрішня енергія, або енергія на одиницю маси, дається формулою

$$\varepsilon = \frac{E}{M} = \frac{3}{2} \frac{k}{m} T,$$

тобто тепломісткість ідеального газу дорівнює $3k/(2m)$ і не залежить від величин ρ, T .

У загальному випадку зв'язок між внутрішньою енергією і температурою складніша. Наприклад, крім кінетичної енергії частинок, що рухаються, внутрішня енергія містить складову, яка пов'язана із потенціальною енергією їхньої взаємодії, що залежить від середньої відстані r між ними. Своєю чергою $r \approx n^{-1/3} = (\rho/m)^{-1/3}$, де n – число частинок в одиниці об'єму, тобто ε залежить від густини ρ . Тому у теорії теплопередачі величини ε (або, що те саме, c) є функції від ρ і T . Їхній конкретний вигляд визначається властивостями середовища, що розглядається.

2.2.1 Виведення закону Фур'є із молекулярно-кінетичних уявлень

Потоком тепла (теплової енергії) у даній точці називають кількість тепла, що переноситься в одиницю часу через одиничну поверхню, що міститься у даній точці речовини. Вочевидь, що потік тепла – векторна величина (оскільки вона у загальному випадку залежить від орієнтації одиничної поверхні у просторі).

Відокремимо у середовищі точку із координатами x, y, z і обчислимо компоненти потоку W тепла за відповідним осями (величини W_x, W_y, W_z). Розташуємо ділянку одиничної величини (штрихова лінія на рис. 2.4) перпендикулярно осі x . Частинки, що рухаються вздовж осі x , перетинають її справа наліво та зліва направо із рівною ймовірністю. Але, якщо температура частинок (а, значить, й їхні кінетичні енергії) є різні з правого та лівого боку ділянки, то в одиницю часу через неї справа і зліва переносяться різні енергії. Різниця цих енергій і формує потік тепла вздовж осі x . Відокремимо області, що віддалені на відстань $\lambda = v\tau$ від ділянки справа і зліва. Із частинок, що містяться у правій ділянці, приблизно 1/6 доля рухається вліво, оскільки всі шість напрямків (вверх – вниз, вперед – назад, праворуч – ліворуч) є рівноймовірні. За час τ ця доля частинок перетне ділянку і перенесе енергію, що дорівнює

$$\frac{1}{6} n \lambda \frac{m v_r^2}{2},$$

де v_r – швидкість частинок у правій області (величини n, λ вважаються у першому наближенні рівними з обох боків ділянки). Аналогічно, частинки із лівої області переносять енергію

$$\frac{1}{6} n \lambda \frac{m v_l^2}{2},$$

де v_l – швидкість частинок зліва від ділянки. Різниця цих енергій є величина

$$W_x = \frac{1}{6} n v \left(\frac{m v_l^2}{2} - \frac{m v_r^2}{2} \right) = \frac{m n v}{6} (\varepsilon_l - \varepsilon_r),$$

де $\varepsilon_l, \varepsilon_r$ – внутрішня енергія речовини відповідно ліворуч та праворуч від ділянки, а в якості v береться середня між v_l та v_r швидкість частинок. У першому наближенні

величини ε_l , ε_r можна виразити через величину ε (енергію у точці x , тобто на ділянці) таким чином:

$$\varepsilon_r = \varepsilon + \lambda \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = \varepsilon + \lambda c \frac{\partial T}{\partial x},$$

$$\varepsilon_l = \varepsilon - \lambda \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = \varepsilon - \lambda c \frac{\partial T}{\partial x}.$$

Замістивши ці формули у вираз для W_x , отримуємо

$$W_x = -\kappa \frac{\partial T}{\partial x}, \quad \kappa = \frac{1}{3} \rho c \lambda v.$$

За аналогією маємо

$$W_y = -\kappa \frac{\partial T}{\partial y}, \quad W_z = -\kappa \frac{\partial T}{\partial z}.$$

Отже, закон Фур'є має вигляд

$$W = -\kappa \text{grad} T.$$

Величина κ називається *коефіцієнтом теплопровідності*.

Таку саму властивість має близький за сутністю процес дифузії речовини (закон Фіка). Аналогічну інтерпретацію можна придати закону Дарсі.

Рівняння балансу тепла

Застосуємо закон збереження енергії для математичного опису процесу теплопередачі. Вважатимемо, що внутрішня енергія речовини змінюється тільки завдяки механізму теплопровідності (тобто, наприклад, нехтуємо змінюванням енергії за рахунок хімічних реакцій або роботи сил тиску, що стискають деякий об'єм газу тощо).

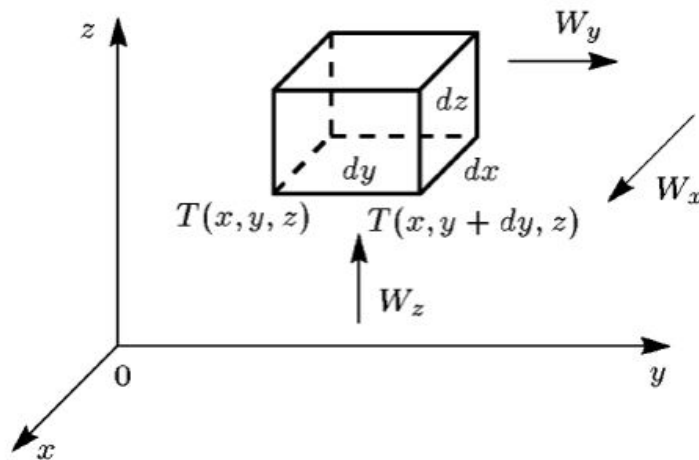


Рис.2.4. До виведення рівняння балансу тепла

Відокремимо елементарний кубик зі сторонами dx, dy, dz (рис. 2.4) і виконаємо підрахунок змінювання теплової енергії, що міститься у ньому за малий проміжок часу dt . За зроблених припущень це змінювання може спонукатися лише різницею потоків тепла,

що входять і виходять через різні грані кубика. Так, потоки вздовж осі x призводять до зменшення або збільшення внутрішньої енергії об'єму на величину

$$[W_x(x, y, z, t) - W_x(x + dx, y, z, t)]dydzdt,$$

де $dydz$ – площа грані, що перпендикулярна осі x . Вважаємо, що W_x як функція часу несуттєво змінюється за проміжок dt , й її можна взяти у момент часу t .

Так само обчислюються змінювання внутрішньої енергії по осям y , z :

$$[W_y(x, y, z, t) - W_y(x, y + dy, z, t)]dxdzdt,$$

$$[W_z(x, y, z, t) - W_z(x, y, z + dz, t)]dxdydt.$$

Сумарне змінювання енергії $\Delta E = E(t + dt) - E(t) \in$

$$\Delta E = -\text{div} W dxdydzdt.$$

З іншого боку, ΔE можна виразити через змінювання температури об'єму і через його теплоємність за формулою

$$\Delta E = [T(t + dt) - T(t)]c(\rho, T)\rho dxdydz,$$

в якій через малість об'єму беруться деякі середні значення температури і густини.

Прирівнюючи два останні вирази за спрямування dt до нуля, отримуємо загальне рівняння, що описує розповсюдження тепла:

$$C \frac{\partial T}{\partial t} = \text{div}(\kappa \text{grad} T),$$

яке у розгорнутій формі має вигляд

$$C \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\kappa \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\kappa \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\kappa \frac{\partial T}{\partial z} \right), \quad (2.2.1)$$

де $C = \rho c$.

Рівняння (2.2.1) – нестационарне, тривимірне рівняння параболічного типу. Воно є неоднорідне, оскільки теплоємність, коефіцієнт теплопровідності і густина можуть бути різними у різних точках речовини, та нелінійне, оскільки функції c і κ можуть залежати від температури T .

За додаткових припущень про характер процесу теплопередачі рівняння (2.2.1) може спроститися. Так, якщо процес є стаціонарний, тобто температура не залежить від часу, (2.2.1) перетворюється у рівняння еліптичного типу

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\kappa \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\kappa \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\kappa \frac{\partial T}{\partial z} \right) = 0,$$

а якщо функції c, κ не залежать від T , (2.2.1) стає лінійним параболічним рівнянням, яке у випадку однорідного середовища (κ, c, ρ не залежать від x, y, z) набуває вигляду

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k_0 \Delta T, \quad (2.2.2)$$

де $k_0 = \kappa / C$ називають коефіцієнтом температуропровідності.

Для рівняння (2.2.2) неважко виписати загальний розв'язок.

Як й у випадку рівняння Бусінеска, із основного рівняння (2.2.1) можна отримати

різні узагальнення, що відповідають складнішим механізмам теплопередачі. Так, для неізотропного середовища (тобто, коли коефіцієнти теплопровідності є різні за різних напрямків) із енерговиділенням замість (2.2.1) маємо

$$C \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\kappa_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\kappa_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\kappa_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) + f(x, y, z, t, T),$$

де $\kappa_x, \kappa_y, \kappa_z$ – коефіцієнти у законі Фур'є, а функція f – потужність виділення (поглинання) енергії. Неізотропність, наприклад, у випадку електронної теплопровідності, може спонукатися досить сильним електромагнітним полем, що утруднює рух переносників тепла поперек силових ліній поля, а виділення тепла може бути пов'язане із хімічними реакціями у речовині або проходженням електричного струму.

Усі рівняння у даному підрозділі отримано за допомогою фундаментального закону збереження енергії і закону Фур'є (порівняйте із виведенням рівняння Бусінеска). Разом із заданими функціями C, κ, ρ і межовими умовами вони являють собою замкнуті математичні моделі процесу теплопередачі.

Постановка типових межових умов

Для простоти розглядатимемо одновимірні процеси теплопровідності. Наприклад, це має місце у довгому і тонкому металевому стрижні (рис. 2.5),

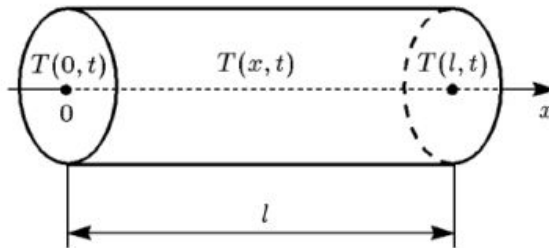


Рис.2.5. Нагрівання тонкого стрижня

що нагрівається із одного торця, за умови його ізотропності, його початкова температура у будь-якому поперечному перетині не залежить від y, z , а втратами тепла із бічної поверхні можна знехтувати. Вважатимемо також, що теплоємність стрижня є стала. Тоді температура залежить тільки від x і t , й її розподіл вздовж стрижня описується рівнянням

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(T) \frac{\partial T}{\partial x} \right), \quad 0 < x < l, \quad t > 0. \quad (2.2.3)$$

Для визначення функції $T(x, t)$, тобто розв'язку, досить задати початкову температуру стрижня:

$$T(x, t) = T_0(x), \quad 0 < x \leq l, \quad (2.2.4)$$

і знайти температуру на кінцях стрижня у будь-який момент часу:

$$T(x, t)|_{x=0} = T_1(t), \quad T(x, t)|_{x=l} = T_2(t), \quad t > 0. \quad (2.2.5)$$

Задача (2.2.3)–(2.2.5) має назву першої крайової задачі для параболічного рівняння

(2.2.1) на відрізку $x \in [0, l]$. Фізично умова (2.2.5) відповідає тому, що на кінцях стрижня за допомогою деяких зовнішніх джерел тепла підтримується визначена температура, що залежить, у загальному випадку, від часу.

Якщо ж на торцях стрижня задаються замість (2.2.5) потоки тепла як функції часу:

$$-k[T(x, t)] \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = W_1(t), \quad k[T(x, t)] \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=l} = W_2(t), \quad t > 0, \quad (2.2.6)$$

така задача називається *другою крайовою задачею* на відрізку $[0, l]$. Така ситуація реалізується, наприклад, коли торці стрижня нагріваються променями лазерного світла відомої потужності.

Складніший (нелінійний) варіант умов на торцях відповідає сильно нагрітому і тому випромінюючому енергію стрижню, що не контактує із будь-якими тілами. Тоді в одиницю часу стрижень втрачає на своїх межах (торцях) енергію, що дорівнює $\sigma T^4(0, t)$, $\sigma T^4(l, t)$ відповідно, і замість (2.2.5) або (2.2.6) отримуються умови

$$\left[\sigma T^4(x, t) = k[T(x, t)] \frac{\partial T}{\partial x} \right] \Big|_{x=0}, \quad \left[\sigma T^4(x, t) = k[T(x, t)] \frac{\partial T}{\partial x} \right] \Big|_{x=l}, \quad t > 0,$$

де $\sigma > 0$.

Можливі також й інші види межових умов, що відповідають іншим фізичним ситуаціям. Наприклад, на лівому кінці відома температура, а на правому потік тепла тощо.

Для багатовимірних рівнянь теплопровідності постановка крайових задач порівняно із одновимірним випадком суттєво не змінюється: на межах області задаються або температура, або потік тепла, або деякі складніші їх комбінації, а також (у момент $t = 0$) початковий розподіл температури.

Запитання для самоперевірки

1. Дати визначення поняття локальної термодинамічної рівноваги.
2. Як визначається кінетична енергія частинок речовини, повна внутрішня енергія системи?
3. Дати поняття коефіцієнта теплопровідності, теплоємності, температуропровідності.
4. Навести рівняння розповсюдження тепла: у векторній формі, по координатній формі.
5. Перелічіть основні види межових умов для рівняння теплопровідності.

2.3 Сумісне застосування кількох законів

Закони збереження маси, імпульсу, енергії використаємо для побудови математичної моделі, що описує течію газу, що стискається.

Помітне змінювання густин рідин та твердих тіл може досягатися лише за великих тисків у десятки і сотні тисяч атмосфер. Газоподібні суміші значно легше підпорядковуються стиску: при перепаді тиску в одну атмосферу густина газу, що початково перебувала під атмосферним тиском, зменшується або збільшується на величину, що порівнянна із його початковою густиною.

У газовій динаміці, яка вивчає рух середовищ, що стискаються, під впливом зовнішніх сил або сил тиску самої речовини, вважається виконаною нерівність $\lambda \ll L$, де λ – довжина вільного пробігу, L – характерні розміри області течії, що розглядається (суцільне середовище). В умовах ЛТР середовище, що стискається, можна розглядати як сукупність великої кількості рідинних частинок із розмірами, набагато більшими за λ , але набагато меншими за L . Для кожної такої частинки, що пов'язана із невеликою фіксованою масою середовища, запроваджуються її середні величини, що її характеризують, густина ρ , тиск p , температура T , внутрішня енергія ε тощо, а також швидкість v її макроскопічного руху як єдиного цілого. Усі ці величини у загальному випадку залежать від трьох просторових змінних x, y, z та часу t .

У подальшому будемо також припускати відсутність у середовищі процесів теплопередачі, в'язкого тертя, джерел та стоків енергії, наприклад, випромінювання, і, крім того, відсутність зовнішніх об'ємних сил та джерел (стоків) маси у речовині.

2.3.1 Рівняння нерозривності для газу, що стискається

Застосуємо міркування, які аналогічні тим, що використовувалися для виведення рівнянь нерозривності для течії ґрунтових вод і процесу теплопередачі. Розглянемо у деякій області простору, що займає рухомий газ, елементарний кубик зі сторонами dx, dy, dz і підрахуємо у ньому баланс маси за час dt . (рис. 2.6).

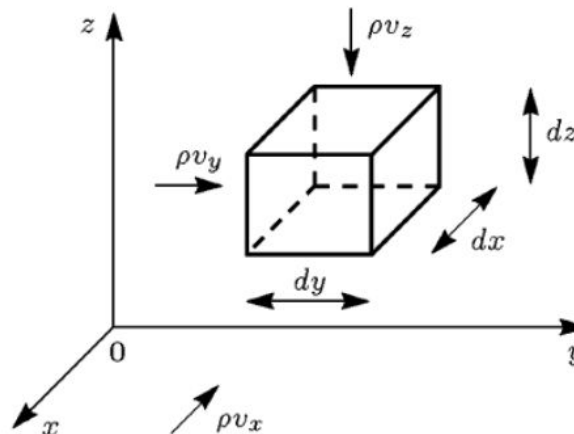


Рис.2.6. До виведення рівняння нерозривності

На рис. 2.6 v_x, v_y, v_z – компоненти швидкості за відповідними осями.

По осі x через грань із координатою x у кубик за час t надходить маса газу

$$\rho v_x dydzdt,$$

оскільки величина ρv_x є потік маси за напрямком осі x . За той самий час з грані із координатою $x + dx$ витікає маса

$$[\rho v_x + d(\rho v_x)]dydzdt,$$

де $d(\rho v_x)$ – прирощення потоку маси під час переходу від координати x до координати $x + dx$. Підсумовування цих виразів і враховуючи, що

$$d(\rho v_x) = \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x)dx,$$

дає величину змінювання маси у кубикі за час dt завдяки руху газу вздовж осі x :

$$dm_x = -\frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x)dxdydzdt.$$

Таким самим чином знаходимо змінювання маси за рахунок руху по осям y, z :

$$dm_y = -\frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y)dxdydzdt.$$

$$dm_z = -\frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z)dxdydzdt.$$

У фіксованому об'ємі кубика змінювання маси газу, що міститься у ньому, виражається через змінювання його густини із часом:

$$dm = \frac{\partial \rho}{\partial t}dxdydzdt.$$

Підсумуємо dm_x , dm_y , dm_z і прирівняємо результат до dm . Отримаємо шукане рівняння нерозривності

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{v} = 0, \quad (2.3.1)$$

яке виражає закон збереження маси речовини стосовно руху газу, що стискається. За своєю формою і змістом (швидкість змінювання величини визначається дивергенцією потоку цієї величини) воно аналогічне рівнянням нерозривності, що отримані раніше.

У разі, якщо рідина не стискається, рівняння нерозривності набуває особливо простий вигляд

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0.$$

Але аналогія із течією ґрунтових вод на цьому і закінчується. За вільного руху газу його динаміка визначається лише силами тиску самого газу, на відміну від руху рідини, що витримує спротив частинок ґрунту.

2.3.2 Рівняння руху газу

Застосуємо другий закон Ньютона до елементарної частинки рідини у формі кубика у деякий час t із гранями dx, dy, dz (рис. 2.7).

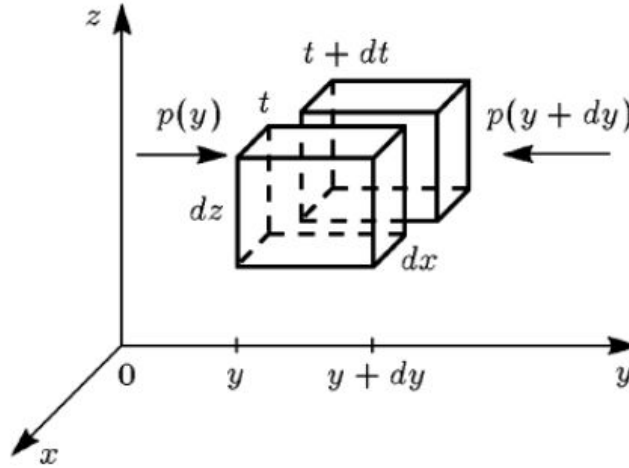


Рис. 2.7. До виведення рівняння руху

Рідинна частинка – це об’єм, що рухається у просторі та змінює свою форму, який містить у різні моменти часу t одні й ті самі атоми та молекули газу. Тим самим його маса dm є стала. Для простоти виведення вважатимемо, що за короткий час dt кубик не змінює своєї форми і зсувається за всіма напрямками на відстань, що є набагато меншою за його розміри.

Визначимо спочатку силу, що діє на кубик, наприклад, у напрямку осі y . Вона, вочевидь, дорівнює різниці тисків на лівій та правій гранях, помноженій на їхні площини (інших сил, за припущенням немає):

$$F_y = [p(x, y, z, t) - p(x, y + dy, z, t)] dx dz.$$

Сила F_y дорівнює прискоренню рідинної частинки у напрямку y , помноженому на її масу $dm = \rho dx dy dz$:

$$F_y = \frac{dv_y}{dt} \rho dx dy dz. \quad (2.3.2)$$

Замінюючи у першому виразі для F_y різницю тисків через похідну від тиску по y і прирівнюючи її до (2.3.2), приходимо до рівняння, що описує рух газу вздовж осі y :

$$\rho \frac{dv_y}{dt} = - \frac{\partial p}{\partial y}. \quad (2.3.3)$$

Так саме отримуємо рівняння руху за напрямками x, z :

$$\rho \frac{dv_x}{dt} = - \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (2.3.4)$$

$$\rho \frac{dv_z}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial z}. \quad (2.3.5)$$

У векторній формі ці рівняння мають вигляд

$$\rho \frac{dv}{dt} = -gradp. \quad (2.3.6)$$

У (2.3.3)–(2.3.6) через df/dt позначено повну (субстанціональну, тобто таку, що зв'язана із фіксованими частинками газу) похідну за часом будь-якої величини, що характеризує дану незмінну масу газу.

Якщо розкрити df/dt через частинні похідні по x, y, z, t відповідно до правила $df/dt = \partial f/\partial t + (vgradf)$, прийдемо до *рівняння руху Ейлера*

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (vgradv) = -\frac{1}{\rho} gradp. \quad (2.3.7)$$

У покоординатній формі вони приймають вигляд

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (2.3.8)$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad (2.3.9)$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}. \quad (2.3.10)$$

Градiєнти тиску у рівняннях руху газу визначають компоненти прискорення речовини, а не компоненти його швидкості. Оскільки рівняння (2.3.1), (2.3.8)–(2.3.10) містять п'ять невідомих величин – ρ , p , v_x , v_y , v_z , для їхнього замикання природно використати закон збереження енергії.

2.3.3 Рівняння енергії

Використаємо ту саму спрощену схему, що й у попередньому пункті: будемо розглядати змінювання внутрішньої енергії фіксованої маси газу dm за короткий проміжок часу dt . Оскільки за припущеннями у речовині відсутня теплопровідність, в'язкість і джерела (стоки) енергії, це змінювання викликається лише роботою сил тиску на гранях кубика при його стисканні або розтягуванні.

Робота тиску, що пов'язана із рухом граней об'єму вздовж осі x , дорівнює

$$dA_x = p[v_x(x) - v_x(x + dx)]dtdydz,$$

де складові у дужках можна переписати через похідну $\partial v_x/\partial x$ і отримати

$$dA_x = -p \frac{\partial v_x}{\partial x} dx dy dz dt.$$

Тут p – середній тиск в елементарному об'ємі. Аналогічно,

$$dA_y = -p \frac{\partial v_y}{\partial y} dx dy dz dt,$$

$$dA_z = -p \frac{\partial v_z}{\partial z} dx dy dz dt.$$

Повна робота над газом за час dt дорівнює

$$dA = dA_x + dA_y + dA_z = -p \operatorname{div} v dx dy dz dt.$$

Вона дорівнює змінюванню внутрішньої енергії об'єму, тобто

$$dA = \rho d\varepsilon dx dy dz.$$

Прирівнюючи обидва вирази для dA і спрямувавши dt до нуля, отримаємо

$$\rho \frac{d\varepsilon}{dt} + p \operatorname{div} v = 0, \quad (2.3.11)$$

де

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + (\mathbf{v} \operatorname{grad} \varepsilon)$$

– повна (субстанціональна) похідна внутрішньої енергії.

За допомогою рівнянь нерозривності і руху це рівняння приводиться до дивергентного вигляду

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \varepsilon + \frac{\rho v^2}{2} \right) = -\operatorname{div} \left[\rho v \left(\varepsilon + \frac{v^2}{2} \right) + p v \right]. \quad (2.3.12)$$

Оскільки термодинамічні властивості речовини вважаються відомими, то ε – відома функція величин ρ і p , і рівняння (2.3.11) або (2.3.12) дає зв'язок, який не вистачало для визначення шуканих газодинамічних величин.

Запитання для самоперевірки

1. Навести рівняння нерозривності для газу, для рідини..
2. Навести рівняння руху Ейлера.
3. Навести рівняння енергії для газу.

2.4 Математичні моделі деяких середовищ

2.4.1 Моделі ідеальної рідини (газу)

До рідини (або газу) відносять таке середовище, вектор напружень у будь-якій точці якої у стані спокою завжди колінеарний вектору нормалі до будь-якої ділянки, що проходить через цю точку. Для твердих тіл це має місце лише в умовах всебічного стискання або розтягування.

Ідеальною (не в'язкою) рідиною (або ідеальним газом) вважають середовище, для якого указана властивість зберігається під час руху. При цьому у будь-якій точці такого середовища тензор напружень із компонентами σ_{ij} , $i, j = 1, 2, 3$, є *кульовий*, тобто $\sigma_{ij} = \sigma^\circ$ при $i = j$ та $\sigma_{ij} = 0$ при $i \neq j$. У цьому випадку величину σ° , що взята зі зворотним знаком, називають тиском рідини (або газу) й позначають p , тобто $p = -\sigma^\circ$. Тоді замість *рівнянь руху*

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = b_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}, \quad i, j = 1, 2, 3,$$

отримаємо у декартовій системі координат $Ox_1x_2x_3$ співвідношення

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = b_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad (2.4.1)$$

що мають назву *рівнянь Ейлера*. Вони встановлені Л. Ейлером у 1755 році. Їх можна представити у векторній формі:

$$\rho \frac{dv}{dt} = b - \nabla p. \quad (2.4.2)$$

Із урахуванням того, що

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + (v \nabla) v = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla v^2 - v \times (\nabla \times v),$$

можна записати (2.4.2) також у вигляді

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla v^2 + \frac{\nabla p}{\rho} = \frac{b}{\rho} + v \times (\nabla \times v) \quad (2.4.3)$$

За помірних тисків рідина зазвичай вважається такою, що не стискається. Якщо рідина, що не стискається, є однорідна, тобто $\rho = \rho^\circ = \text{const}$, за даного значення ρ° (2.4.1) та рівняння нерозривності $\nabla v = 0$ утворюють замкнуту систему чотирьох рівнянь відносно чотирьох невідомих функцій v_i , $i = 1, 2, 3$ та p . Рідина, що не стискається, може бути неоднорідною, тобто складатися із частинок, які мають різну густину, але зберігають її у процесі руху незмінною, (тобто $d\rho/dt = 0$). Тоді до вказаних чотирьох слід додати ще рівняння (2.3.1)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho v) = 0.$$

Воно надає можливість знайти функцію $\rho = \rho(t, x)$, що описує розподіл густини неоднорідної рідини, що не стискається, у просторі у різні моменти часу t , якщо у момент часу $t = 0$, який приймається за початковий, задано початковий розподіл

$$\rho_0(x) = \rho(0, x).$$

Нехай при $\rho = \rho^\circ - \text{const}$ векторні поля швидкості однорідної рідини, що не стискається, та об'ємних сил є потенціальні, тобто

$$\nabla \times v = 0, \quad v = \nabla \varphi, \quad b = \nabla B,$$

де φ і B – дійсні функції, що залежать у загальному випадку від часу і просторових координат. Тоді (2.4.3) набуває вигляд

$$\nabla \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 + \frac{p - B}{\rho^\circ} \right) = 0.$$

Звідси випливає **інтеграл Коші –Лагранжа**

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 + \frac{p - B}{\rho^\circ} = g(t), \quad (2.4.4)$$

причому для відшукування функції $g(t)$ досить мати залежність від t лівої частини (2.4.4) у будь-якій одній точці області руху рідини. Із (2.3.1) отримуємо, що *потенціал швидкості* φ задовольняє рівняння Лапласа $\nabla^2 \varphi = 0$, тобто є *гармонічною функцією*.

За усталеного руху $\partial \varphi / \partial t = 0$ і (2.31) переходить у відомий *інтеграл Бернуллі*

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p - B}{\rho^\circ} = \text{const}.$$

Це рівняння Д. Бернуллі визначив у 1738 році для течії рідини у полі сили тяжіння, тобто при $B = -\rho^\circ g_0 x_3$, де g_0 – прискорення вільного падіння, а x_3 – координата, що відлічується вертикально вгору. Якщо густина середовища залежить тільки від тиску, процес у такому середовищі називають *баротропним*. Газ називають довершеним, якщо він підпорядковується рівнянню стану

$$p = \rho R T,$$

де R – питома газова стала для даного газу. Рух довершеного газу є баротропний процес за відомою температурою T газу або ж за відсутності теплообміну частинок газу між собою та зовнішнім середовищем, тобто у випадку адіабатичної течії. Дійсно, у цьому разі для одиниці маси газу

$$c_v dT + p d(1/\rho) = 0, \quad (2.4.5)$$

де c_v – питома теплоємність газу за сталого об'єму. В (2.4.5) перший доданок характеризує змінювання внутрішньої енергії газу, а другий – роботу тиску за змінювання об'єму $1/\rho$ одиниці маси газу. Із (2.4.4) знаходимо

$$dT = \frac{dp}{\rho R} - \frac{p d\rho}{\rho^2 R}$$

та, підставляючи у (2.4.5), отримаємо диференціальне рівняння зі змінними, що розділяються

$$\frac{c_v dp}{\rho R} - \left(\frac{c_v}{R} + 1 \right) \frac{p d\rho}{\rho^2} = 0,$$

інтегрування якого призводить до залежності

$$p = C \rho^\gamma, \quad C = \text{const},$$

де $\gamma = 1 + R/C_v = c_p/c_v$ – показник адіабати; c_p – питома теплоємність газу за сталого тиску.

Отже, у разі баротропного руху газу залежність $p = f(\rho)$, рівняння Ейлера (2.4.1) та рівняння нерозривності утворюють замкнуту систему відносно п'яти невідомих функцій v_1, v_2, v_3, ρ та p . Якщо векторне поле густини $b_\rho = b/\rho$ об'ємних сил, що припадають на одиницю маси газу, є потенціальне, тобто $b_\rho = \nabla B_\rho$, де B_ρ – дійсна функція, що залежить у загальному випадку від часу і просторових координат, за потенціального руху газу, коли $v = \nabla \varphi$, можна отримати інтеграл Коші–Лагранжа (2.4.4). Для цього запровадимо функцію тиску

$$P = \int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho},$$

де p_0 – деяке задане значення тиску за припущення, що густина газу зростає із ростом тиску, тобто

$$\frac{d\rho}{dp} = \frac{1}{f'(\rho)} > 0.$$

Тоді $\nabla p/\rho = \nabla P$, так що із (2.4.3) при $\nabla \times v = 0$ випливає

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla \varphi)^2 + P - B_\rho = h(t), \quad (2.4.6)$$

причому функцію $h(t)$ можна знайти тем самим шляхом, що й функцію $g(t)$ в (2.4.4).

Диференціал функції тиску можна подати у вигляді

$$dP = \frac{dp}{\rho} = \frac{a^2 d\rho}{\rho}, \quad a^2 = \frac{dp}{d\rho} = f'(\rho) > 0.$$

Звідси випливає, що

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{a^2} \frac{dP}{dt}.$$

Із використанням рівняння нерозривності у вигляді (2.16) та залежності $v = \nabla \varphi$, маємо

$$\frac{1}{a^2} \frac{dP}{dt} + \nabla^2 \varphi = 0. \quad (2.4.7)$$

Система (2.4.6), (2.4.7) замкнута відносно невідомих дійсних функцій P та φ , оскільки a^2 можна також подати як функцію P . Наприклад, у разі адіабатичної течії отримаємо

$$a^2 = \frac{dp}{d\rho} = \gamma C \rho^{\gamma-1} = \gamma \frac{p}{\rho}.$$

Звідси випливає лінійна залежність

$$a^2 = (\gamma - 1)P + C \rho_0^{\gamma-1} = (\gamma - 1)P + C^{1/\gamma} p_0^{1-1/\gamma}.$$

У низці прикладних задач аеродинаміки та акустики течію газу можна розглядати як збурену відносно відомого руху або стану спокою. Так, за малих збурень біля стану спокою систему (2.4.6), (2.4.7) можна лінеаризувати й привести до вигляду

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + P = 0, \quad \frac{1}{a_0^2} \frac{\partial P}{\partial t} + \nabla^2 \varphi = 0,$$

де $a_0^2 = \text{const}$ – значення $dp/d\rho$, що обчислено для незбуреного стану. Виключимо звідси P . Отримуємо так зване хвильове рівняння

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = a_0^2 \nabla^2 \varphi, \quad (2.4.8)$$

що є диференціальне рівняння гіперболічного типу. Значення a має сенс швидкості розповсюдження хвиль у газі і називається швидкістю звуку. Якщо у незбуреному стані газ має температуру T , для адіабатичної течії із (2.4.4) та (2.4.7) впливає відома формула $a_0 = \sqrt{\gamma RT}$. Ньютон припускав, що при розповсюдженні звукових хвиль течія газу є ізотермічна, й отримав для швидкості звуку вираз $\sqrt{RT}$. Ця похибка була виправлена П. Лапласом.

За усталених коливань із певною частотою ω функцію φ можна подати добутком періодичної функції вигляду $\sin \omega t$ або $\cos \omega t$ (або лінійної комбінації цих функцій), що залежать тільки від часу і функції u , що залежить тільки від просторових координат, що описує форму хвилі. Тоді (2.4.8) переходить у рівняння еліптичного типу

$$\nabla^2 u + \frac{\omega^2}{a_0^2} u = 0,$$

що має назву *рівняння Гельмгольца*.

При взаємодії ідеальної рідини (ідеального газу) із непроникною межею області течії внаслідок того, що вектор напруження колінеарен вектору нормалі до межі, можливе прослизання частинок, тобто відсутнє їх прилипання до межі. Тому на таких межах збігаються проекції векторів швидкості рідини (газу) та заданої швидкості межі на напрямок нормалі, тобто $vn = v^\circ n$, або (у разі потенціального поля швидкості) $(\nabla \varphi)n = v^\circ n$. На вільній межі області має бути заданий тиск, а на проникних межах – вектор швидкості або тиск.

2.4.2 Моделі в'язкої рідини

На відміну від ідеальної (не в'язкої) рідини під час руху в'язкої рідини компоненти тензору напружень у обраній прямокутній системі координат $Ox_1x_2x_3$ у загальному випадку можуть набувати довільних значень. Розглянемо найпростішу модель ізотропної в'язкої рідини, що зв'язує компоненти тензору напружень із компонентами *тензора швидкостей деформацій*

$$\xi_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right), \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (2.4.9)$$

лінійними співвідношеннями

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + k(\nabla v)\delta_{ij} + 2\eta\xi_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (2.4.10)$$

де коефіцієнти k і η характеризують в'язкий опір під час руху середовища, а $\delta_{ij} = 1$ при $i = j$ *тензор другого рангу* із компонентами δ_{ij} називають одиничним. У цій моделі припускають відсутність прослизання частинок рідини на межі із твердим тілом, тобто вектори швидкостей рідини і твердого тіла у точках такої межі збігаються (у точках нерухомої межі швидкість рідини дорівнює нулю).

Із (2.4.10) випливає, що середнє *нормальне напруження* дорівнює

$$\sigma^\circ = \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) = -p + \left(k + \frac{2}{3}\eta \right) \nabla v. \quad (2.4.11)$$

Оскільки ∇v характеризує швидкість змінювання одиниці об'єму середовища в околі точки із радіус-вектором x , $k + 2/3\eta$ називають коефіцієнтом об'ємної в'язкості.

Тензор напружень, для якого $\sigma^\circ = 0$, називають *девіатором напружень*. Будь-який тензор напружень можна представити сумою *шарового тензора* і девіатора із компонентами $s_{ij}\sigma_{ij} - \sigma^\circ\delta_{ij}$. Із (2.4.10) випливає, що

$$s_{ij} = 2\eta\tilde{\xi}_{ij}, \quad \tilde{\xi}_{ij} = \xi_{ij} - \frac{1}{3}(\nabla v)\delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3,$$

де $\tilde{\xi}_{ij}$ — компоненти *девіатора швидкостей деформацій*. Вони характеризують швидкість змінювання форми частинки середовища сталого об'єму шляхом зсувних деформацій. Тому η називають коефіцієнтом зсувної в'язкості.

Якщо замістити (2.4.10) у рівняння руху (2.3.12), із урахуванням підсумовування за індексом j , що повторюється, отримаємо

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = b_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial k \nabla v}{\partial x_i} + 2 \frac{\partial \eta \xi_{ij}}{\partial x_j}, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (2.4.12)$$

Звідси за сталих k і η із урахуванням (2.4.10) приходимо до векторної форми **рівнянь Нав'є–Стокса**

$$\rho \frac{dv}{dt} = b - \nabla p + (k + \eta) \nabla(\nabla v) + \eta \nabla^2 v. \quad (2.4.13)$$

Рівняння руху в'язкої рідини за спрощуючих припущень вивів у 1822 році французький інженер і механік А. Нав'є (1785–1836). Ці рівняння у вигляді, що відповідає (2.4.13), було отримано у 1845 році англійським фізиком і математиком Дж. Г. Стоксом (1819–1903).

На відміну від ідеальної рідини при контакті в'язкої рідини із твердим тілом відсутнє прослизання, виникає ефект прилипання. Тому при завданні межових умов мають збігатися вектори швидкості частинок рідини і точок такої межі (а не тільки їхні проекції на напрямки нормалі до межі).

Для неоднорідної в'язкої рідини, що не стискається, ($\nabla v = 0$) зі сталим значенням η рівняння нерозривності та рівняння (2.4.13) у вигляді

$$\rho \frac{dv}{dt} = b - \nabla p + \eta \nabla^2 v \quad (2.4.14)$$

утворюють замкнуту систему відносно невідомих функцій $\rho(t, x)$, $v(t, x)$ та $p(t, x)$. Неоднорідність рідини, що не стискається, може спонукатися залежністю її густини від температури або концентрації домішки, що розчинений у рідині. У полі тяжіння така неоднорідність призводить до змінювання векторного поля об'ємних сил. Якщо рідина, що не стискається, однорідна, тобто $\rho = \text{const}$, в указаній системі рівняння (2.4.13), (2.3.14) є рівносильні і система (2.3.6), (2.4.14) буде замкнутою відносно функцій $v(t, x)$ та $p(t, x)$. Розглянемо один із шляхів модифікації математичної моделі, що містить (2.3.6), (2.4.14), на відносно простому прикладі двовимірної течії.

Приклад 2.1.

За досить повільного руху в'язкої рідини можна знехтувати у (2.4.14) інерційними силами, прирівнявши праву частину до нуля. Тоді у частинному випадку течії однорідної рідини, що не стискається, паралельно координатній площині $x_1 O x_2$ отримаємо систему рівнянь

$$\begin{aligned} b_1 - \frac{\partial p}{\partial x_1} + \eta \left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} \right) &= 0, \\ b_2 - \frac{\partial p}{\partial x_2} + \eta \left(\frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2^2} \right) &= 0, \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} &= 0. \end{aligned} \quad (2.4.15)$$

Ясно, що останнє рівняння у (2.4.15) перетворюється у тотожність, якщо запровадити функцію ψ , що задовольняє співвідношення

$$v_1 = \frac{\partial \psi}{\partial x_2}, \quad v_2 = \frac{\partial \psi}{\partial x_1}. \quad (2.4.16)$$

(її називають *функцією току*). Фізичний сенс цієї функції полягає у тому, що вона є стала уздовж кожної лінії току, що за усталеної течії збігається із траєкторією частинок рідини, а розхід рідини між двома будь-якими лініями току пропорційний різниці значень ψ , що відповідають цим лініям.

Функцію

$$\zeta = \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2},$$

що характеризує кутову швидкість обертання частинок рідини під час руху у площині, називають *завихреністю*. Із урахуванням (2.4.16) отримаємо рівняння

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2} = -\zeta, \quad (2.4.17)$$

що зв'язує функцію току і завихреність. Якщо здиференціювати перше рівняння у (2.4.15) по x_2 , а друге – по x_1 й із другого результату відняти перший, отримаємо рівняння Пуассона

$$\frac{\partial b_2}{\partial x_1} - \frac{\partial b_1}{\partial x_2} + \eta \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_2^2} \right) = 0, \quad (2.4.18)$$

яке не містить тиску p .

За знайденої із (2.4.18) функції ζ із (2.4.17) можна знайти функцію току ψ й із (2.4.16) обчислити проекції v_i вектору швидкості на координатні осі Ox_1 , Ox_2 . Якщо треба знайти поле тиску, диференціюванням першого рівняння (2.4.15) по x_1 , другого – по x_2 і додаванням результатів із урахуванням третього рівняння (2.4.15) приходимо до рівняння Пуассона

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial x_2^2} = \frac{\partial b_1}{\partial x_1} + \frac{\partial b_2}{\partial x_2}. \quad (2.4.19)$$

Зазвичай контур Γ , що обмежує двовимірну область F , в якій розглядають течію рідини, містить ділянки, що відповідають твердим стінкам. На таких ділянках не вдається задати у коректній формі межові умови для завихреності і тиску і при вирішенні прикладних задач ці умови зазвичай отримують послідовними наближеннями із (2.4.17) та перших двох рівнянь (2.4.15) відповідно. Зазначені труднощі можна частково здолати, якщо із (2.4.17) і (2.4.18) виключити завихреність й отримати рівняння 4-го порядку

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1^2} + \frac{\partial}{\partial x_2^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2} \right) = \frac{1}{\eta} \left(\frac{\partial b_2}{\partial x_1} - \frac{\partial b_1}{\partial x_2} \right). \quad (2.4.20)$$

відносно функції току.

Для лівої частини (2.4.20) використовують запис $\nabla^2(\nabla^2 \psi)$ (іноді $\nabla^4 \psi$ або $\Delta^2 \psi$, якщо оператор Лапласа позначають Δ), маючи на увазі, що у даному випадку оператор Лапласа діє у площині. При цьому оператор $\nabla^2 \nabla^2$ називають **бігармонічним**.

Якщо векторне поле об'ємних сил є потенціальне, тобто $b \nabla B$, $\partial b_2 / \partial x_1 = \partial b_1 / \partial x_2$, (2.4.20) переходить у **бігармонічне рівняння** $\nabla^2(\nabla^2 \psi) = 0$. Функцію, що задовольняє таке рівняння, називають бігармонічною.

2.4.3 Рівняння перенесення енергії у середовищі

Моделі ідеальної рідини, в'язкої рідини (газу) і лінійно пружного твердого тіла надають можливість формувати задачі математичної фізики у тих випадках, коли поведінка середовища не зв'язана суттєво із теплофізичними та електромагнітними явищами. Необхідність урахування впливу теплофізичних явищ при постановці задач математичної фізики викликається тим, що процеси у реальному середовищі часто супроводжуються перетворенням одного виду енергії в інший. Це призводить до змінювання температури, від якої можуть суттєво залежати властивості середовища. Вивчення процесів перетворення енергії потребує залучення відомостей із термодинаміки. Обмежимося розглядом рівняння переносу енергії.

Із закону збереження енергії випливає, що швидкість змінювання повної енергії E будь-якого тіла дорівнює потужності, що підводиться до нього від зовнішніх джерел енергії. Нехай тіло має об'єм $V(t)$, що змінюється у часі та обмежений рухомою поверхнею S , точки якої переміщуються разом із частинками тіла. Поле швидкості частинок тіла описує векторна функція $v = v(t, M)$ часу і координат x_i точки $M \in R^3$ у прямокутній системі координат $Ox_1x_2x_3$ із ортами e_i , а розподіл в V густини середовища – функція $\rho = \rho(t, M)$.

Об'ємну густину ε енергії середовища в $V(t)$ подамо як суму об'ємних густин ρv^2 і ρu кінетичної та внутрішньої енергій відповідно, де $u = u(t, M)$ – внутрішня енергія одиниці маси середовища. Тоді повна енергія тіла буде

$$E = \int_{V(t)} \varepsilon dV = \int_{V(t)} \rho(v^2/2 + u) dV.$$

Заміна C_m на $v^2/2 + u$ дає

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho(v^2/2 + u) dV = \int_{V(t)} \rho \frac{d(v^2/2 + u)}{dt} dV.$$

Потужність, що підводиться від зовнішніх джерел енергії, враховує роботу, що здійснюється в одиницю часу,

$$W = \int_{V(t)} b v dV + \int_S p v dS$$

об'ємних b і поверхневих p сил, потік енергії

$$Q_S = - \int_S q^{(E)} n dS,$$

що передається через поверхню S ($q^{(E)}$) – вектор густини потоку енергії, n – одиничний вектор зовнішньої нормалі до цієї поверхні), та кількість повної енергії

$$Q_V = \int_{V(t)} I_V^{(E)} dV, \quad (2.4.21)$$

що виділено в об'ємі V в одиницю часу джерелами із об'ємною потужністю $I_V^{(E)}$. Тоді у силу закону збереження енергії маємо

$$\frac{dE}{dt} = W + Q_S + Q_V,$$

звідки із урахуванням (2.4.21) отримуємо

$$\begin{aligned} \int_{V(t)} \rho \frac{(v^2/2 + u)}{dt} dV &= \int_{V(t)} \rho v \frac{dv}{dt} dV + \int_{V(t)} \rho \frac{du}{dt} dV \\ &= \int_{V(t)} b v dV + \int_S p v dS - \int_S q^{(E)} n dS + \int_V I_V^{(E)} dV. \end{aligned} \quad (2.4.22)$$

Запишемо за правилом підсумовування за індексами, що повторюються, $i, j = 1, 2, 3$

$$p v = p_i e_i v = n_j \sigma_{ji} v_i = \sigma_{ji} v_i e_j n,$$

де σ_{ij} – компоненти тензора напружень. Тоді, за формулою Остроградського–Гауса, отримуємо

$$\int_S p v dS = \int_S \sigma_{ji} v_i e_j n dS = \int_{V(t)} \nabla (\sigma_{ji} v_i e_j) dV = \int_{V(t)} \frac{\partial \sigma_{ji} v_i}{\partial x_j} dV. \quad (2.4.23)$$

Із використанням тієї самої формули маємо

$$\int_S q^{(E)} n dS = \int_{V(t)} \nabla q^{(E)} dV. \quad (2.4.24)$$

$$\int_{V(t)} \rho v \frac{dv}{dt} dV = \int_{V(t)} b v dV + \int_{V(t)} \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} v_i dV. \quad (2.4.25)$$

Замістимо (2.4.23)–(2.4.25) у (2.4.22):

$$\int_{V(t)} \left(\rho \frac{du}{dt} + \nabla q^{(E)} - I_V^{(E)} - \sigma_{ji} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) dV = 0. \quad (2.4.26)$$

Із використанням подання (2.4.19) компонентів σ_{ij} тензора швидкостей деформацій отримуємо

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) = \xi_{ij} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right).$$

Звідси із урахуванням правила підсумовування по індексам, що повторюються, та симетрії тензора напружень знаходимо

$$\sigma_{ji} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \sigma_{ij} \xi_{ij},$$

оскільки

$$\sigma_{ij} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) = \sigma_{ji} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \sigma_{ij} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} = 0.$$

Отже, замість (2.4.26) приходимо до інтегральної форми закону збереження енергії в об'ємі V :

$$\int_{V(t)} \left(\rho \frac{du}{dt} + \nabla q^{(E)} - I_V^{(E)} - \sigma_{ji} \xi_{ij} \right) dV = 0. \quad (2.4.27)$$

У разі неперервності підінтегральної функції в (2.4.27) міркування, аналогічні виконаним при отриманні (2.3.6) та (2.3.7), призводять до локальної форми цього закону, що є рівняння перенесення енергії

$$\rho \frac{du}{dt} = \sigma_{ji} \xi_{ij} - \nabla q^{(E)} + I_V^{(E)}. \quad (2.4.28)$$

Наявність у правій частині (2.4.28) доданку $\sigma_{ij} \xi_{ij}$, що характеризує об'ємну потужність джерел енергії, які пов'язані із роботою напружень, спонукає у загальному випадку розглядати це рівняння разом із рівнянням перенесення кількості руху.

Якщо у нерухомому середовищі здійснюється перенесення тільки теплової енергії, тобто $\xi_{ij} = 0$, $q^{(E)} = q$, $I_V^{(E)} = I_V^{(q)}$ і масова густина внутрішньої енергії залежить лише від температури T , (2.4.28) переходить у диференціальне рівняння нестационарної теплопровідності. У загальнішому випадку u може залежати не тільки від температури, $I_V^{(q)}$ може характеризувати об'ємну потужність виділення не тільки теплової енергії, а бути сумою векторів густини потоків різних видів енергії (наприклад, теплової та енергії електромагнітного випромінювання). Але при цьому можуть виникати розподілені за об'ємом та поверхнею моменти (зокрема, при взаємодії середовища із електромагнітним полем, що може порушити симетрію тензора напружень і потребувати уточнення рівняння (2.4.28).

Запитання для самоперевірки

1. Навести диференціальну та інтегральну форми закону збереження маси.
2. Навести диференціальну та інтегральну форми закону збереження енергії.
3. Дати визначення субстанціональної (повної) похідної. Навести приклад для одновимірної задачі.
4. Що визначає коефіцієнт теплопровідності, коефіцієнт температуропровідності?
5. У чому полягає різниця між крайовою задачею та задачею Коші?
6. Які види межових умов найчастіше використовуються при формулюванні крайових задач?
7. У якому випадку крайова задача є лінійною, нелінійною?
8. Навести приклад рівняння руху субстанції (одновимірний випадок).
9. У чому полягає сутність дифузійного процесу?
10. У чому полягає різниця між гармонічними коливаннями та бігармонічними коливаннями?
11. Як визначається девіатор напружень?

Розділ 3. Математичні моделі у біомедицині

У цьому розділі розглянемо підходи до дослідження живих систем та до побудови математичних моделей таких систем. Природно, що з огляду на багатогранність живих систем, складність їхнього дослідження, будемо розглядати їх наближений опис за допомогою абстрактних математичних моделей, які надають можливість для дослідження й узагальнення різноманітних моделей конкретних живих систем.

Біофізика являє собою науку про фундаментальні закони, що є основа структури, функціонування та розвитку живих систем. Поряд із експериментальними методами вона активно використовує математичні моделі для опису процесів у живих системах різного рівня організації, починаючи від біомакромолекул, на клітинному та субклітинному рівні, на рівні органів, організмів, популяцій і біогеоценозів і біосфери у цілому. Ступінь математизації тієї чи іншої області біофізики залежить від рівня експериментального вивчення об'єктів та можливостей математичної формалізації процесів, що вивчаються.

Усі живі системи далекі від термодинамічної рівноваги, є відкриті для потоків речовини і енергії системи, мають складну неоднорідну структуру та ієрархічну систему регуляції процесів як внутрішньої, так і при змінюванні умов зовнішнього середовища. Потому математична формалізація уявлень про процеси у живих системах являє суттєві труднощі. При описі процесів у біомакромолекулах часто використовують підходи фізики, квантової хімії, термодинаміки. Математичне моделювання внутрімолекулярних взаємодій атомів і структурних фрагментів таких молекул, їхніх взаємодій із водним оточенням та низькомолекулярними сполученнями, можливе лише завдяки використанню комп'ютерної техніки (методи молекулярної динаміки).

Інший великий клас моделей – моделі біохімічних реакцій, у тому числі ферментативних. До них належать добре розроблені та досліджені аналітично реакції ферментативного каталізу (Михаеліс–Ментен, Хіггінс, Райх, Сельков) та інші локальні моделі, що описуються звичайними диференціальними рівняннями, аналітичний і комп'ютерний аналіз яких дозволив сформулювати умови виникнення якісно важливих режимів: мультистаціонарних, автоколивальних, квазістохастичних у ланцюгах метаболічних реакцій. До цього класу належать моделі процесів в активних середовищах, локальні елементи яких являють собою біохімічні реакції, що враховують також процеси просторового перенесення (моделі типу «реакція-дифузія»).

Математична біофізика складних систем, що виникла раніше за інші, містить моделі, які пов'язані із системними механізмами, що визначають поведінку складних систем. До таких моделей належать моделі популяційної динаміки, які стали «математичним полігоном» усієї математичної біології і біофізики. Базові моделі популяційної динаміки лягли в основу моделей клітинної біології, мікробіології, імунітету, теорії епідемій, математичної генетики, теорії еволюції та інших галузей математичної біології.

Іншим напрямом моделювання складних біологічних систем є імітаційне моделювання багатокомпонентних систем з метою прогнозування їхньої поведінки та пошуків оптимального управління. До таких моделей належать моделі кровотворення, моделі шлунково-кишкового тракту та інших систем життєзабезпечення організму, моделі морфогенезу, а також моделі продукційного процесу рослин, моделі водних і суходутних екосистем.

3.1 Специфіка моделювання живих систем

Незважаючи на різноманітність живих систем, усім їм властиві такі специфічні риси, які необхідно враховувати при побудові моделей.

1. *Складні системи.* Усі біологічні системи є багатокомпонентні, просторово структуровані, їхні елементи мають індивідуальність. При моделюванні таких систем можливі два підходи. Перший – агрегований, феноменологічний. Відповідно до цього підходу відокремлюються характеристики системи, що є визначальні (наприклад, загальна чисельність видів) й розглядаються якісні властивості поведінки цих величин у часі (стійкість стаціонарного стану, наявність коливань, існування просторової неоднорідності). Такий підхід властивий динамічній теорії популяцій. Інший підхід – докладний розгляд елементів системи та їх взаємодій, побудова імітаційної моделі, параметри якої мають ясний фізичний і біологічний сенс. Така модель не допускає аналітичного дослідження, але за гарної експериментальної вивченості фрагментів системи може дати кількісний прогноз її поведінки за різних зовнішніх впливів.
2. *Системи, що розмножуються* (здатні до авторепродукції). Ця найважливіша властивість живих систем визначає їхню здатність переробляти неорганічні та органічні речовини для біосинтезу біологічних макромолекул, клітин, організмів. У феноменологічних моделях ця властивість виражається у наявності у рівняннях автокаталітичних членів, що визначають можливість росту (в нелімітованих умовах – експоненціального), можливість нестійкості стаціонарного стану у локальних системах (необхідна умова виникнення коливальних та квазістохастичних режимів) і нестійкості гомогенного стаціонарного стану у просторово-розподілених системах (умова неоднорідних у просторі розподілів та автохвильових режимів).
Важливу роль у розвитку складних просторово-часових режимів відіграють процеси взаємодії компонентів (біохімічні реакції) і процеси перенесення, як хаотичного (дифузія), так й зв'язаного із напрямком зовнішніх сил (гравітація, електромагнітні поля) або із адаптивними функціями живих організмів (наприклад, рух цитоплазми у клітинах під впливом мікрофіламентів).
3. *Відкриті системи,* що постійно пропускають через себе потоки речовини й енергії. Біологічні системи далекі від термодинамічної рівноваги і тому описуються нелінійними рівняннями. Лінійні співвідношення Онзагера, що зв'язують сили та потоки, справедливі тільки поблизу термодинамічної рівноваги.
4. *Біологічні об'єкти* мають складну многорівневу систему регуляції. У біохімічній кінетиці це виражається у наявності у схемах петель зворотного зв'язку, як додатного, так і від'ємного. У рівняннях локальних взаємодій зворотні зв'язки описуються нелінійними функціями, характер яких визначає можливість виникнення та властивості складних кінетичних режимів, у тому числі коливальних та квазістохастичних. Такого типу нелінійності з погляду на просторову розподіленість і процесів перенесення обумовлюють паттерни стаціонарних структур (плями різної форми, періодичні дисипативні структури) і типи автохвильової поведінки (рухомі фронти, хвилі, що біжать, спіральні хвилі тощо).
5. *Живі системи* мають складну просторову структуру. Жива клітина та органели, що містяться у ній, мають мембрани, будь-який живий організм містить велику кількість мембран, загальна площа яких складає десятки гектарів. Природно, що

середовище всередині живих систем не можна розглядати як гомогенне. Само виникнення такої просторової структури і закони її формування являють собою одну із задач теоретичної біології. Один із підходів вирішення такої задачі – математична теорія морфогенезу.

Мембрани не тільки виділяють різні реакційні об'єми живих клітин, відокремлюють живе від неживого (середовища). Вони відіграють ключову роль у метаболізмі, вони селективно пропускають потоки неорганічних іонів та органічних молекул. У мембранах хлоропластів здійснюються первинні процеси фотосинтезу – накопичення енергії світла у вигляді енергії високоенергетичних хімічних сполук, що використовуються у подальшому для синтезу органічної речовини та інших внутріклітинних процесів. У мембранах мітохондрій зосереджені ключові стадії процесу дихання, мембрани нервових клітин визначають їх спроможність до нервової провідності. Математичні моделі процесів у біологічних мембранах складають суттєву частину математичної біофізики.

Існуючі моделі в основному являють собою системи диференціальних рівнянь. Але очевидно, що неперервні моделі не здатні описати у деталях процеси, що здійснюються у таких індивідуальних та структурованих складних системах, якими є живі системи. У зв'язку із розвитком обчислювальних, графічних та інтелектуальних можливостей комп'ютерів все більшу роль у математичній біофізиці відіграють імітаційні моделі, що будуються на ґрунті дискретної математики, у тому числі моделі клітинних автоматів.

6. *Імітаційні моделі* конкретних складних живих систем, як правило, максимально враховують наявну інформацію про об'єкт. Імітаційні моделі застосовують для опису об'єктів різного рівня організації живої матерії – від біомакромолекул до моделей біогеоценозів. У цьому разі моделі мають містити блоки, що описують як живі, так і «косні» компоненти. Класичним прикладом імітаційних моделей є моделі молекулярної динаміки, в яких задаються координати та імпульси всіх атомів, що складають біомакромолекулу, та закони їх взаємодії. Картина «життя» системи, що обчислюється на комп'ютері, дозволяє відстежити, як фізичні закони проявляються у функціонуванні найпростіших біологічних об'єктів – біомакромолекул та їхнього оточення. Схожі моделі, в яких елементами (цеглинками) уже є не атоми, а групи атомів, використовуються у сучасній техніці комп'ютерного конструювання біотехнологічних каталізаторів і лікарських препаратів, що впливають на визначені активні групи мембран мікроорганізмів, вірусів.

Імітаційні моделі створено для опису фізіологічних процесів, що здійснюються у життєво важливих органах: нервовому волокні, серці, мозку, шлунково-кишковому тракті, кровоносному руслі [10]. На них моделюються «сценарії» процесів, що протікають у нормі та за різних патологій, досліджується вплив на процеси різних зовнішніх впливів, у том числі лікарських препаратів. Імітаційні моделі широко використовуються для опису продукційного процесу рослин і застосовуються для розробки оптимального режиму вирощування рослин з метою отримання максимального врожаю або отримання найбільш рівномірно розподіленого у часі дозрівання плодів. Особливо важливі такі розробки для коштовного й енергомісткого тепличного господарства.

Запитання для самоперевірки

1. Сформулюйте визначення складної систем. Наведіть приклад.
2. Дайте визначення відкритої і закритої системи. Наведіть приклади.
3. У чому полягає сутність імітаційних моделей?

3.2 Базові моделі

У математичній біофізиці, як й у будь-якій науці, існують прості моделі, які піддаються аналітичному дослідженню й мають властивості, що надають можливість описувати цілий спектр природних явищ. Такі моделі називають базовими. У фізиці класичною базовою моделлю є гармонічний осцилятор (шарик – матеріальна точка – на пружинці без тертя). Після того як докладно математично вивчено сутність процесів на базовій моделі та її модифікаціях, за аналогією стають зрозумілими явища, що мають місце у складніших реальних системах. Наприклад, релаксація конфірмаційних станів біомакромолекули розглядається за аналогією осцилятору у в'язкому середовищі.

Можна відокремити деякі найважливіші якісні властивості, що притаманні живим системам: зростання, самообмеження росту, здатність до переключень – існування двох або кількох стаціонарних режимів, автоколивальні режими (біоритми), просторова неоднорідність, квазістохастичність. Усі ці властивості можна продемонструвати на порівняно простих нелінійних динамічних моделях, які й виступають у ролі базових моделей математичної біології.

3.2.1 Необмежене зростання. Експоненціальне зростання

Одне із фундаментальних припущень, що лежить в основі усіх моделей – пропорціональність швидкості росту чисельності популяції. Для багатьох одноклітинних організмів або клітин, що наявні у складі кліткових тканин, розмноження – це просто ділення, тобто подвоєння числа клітин через визначений інтервал часу, що зветься характерним часом поділу. Для рослин, які складно організовано, та тварин розмноження здійснюється за складнішим законом, але у найпростішій моделі можна припустити, що швидкість розмноження виду пропорційна чисельності цього виду.

Математично це записується за допомогою диференціального рівняння, лінійного відносно змінної x , що характеризує чисельність (концентрацію) особин у популяції:

$$\frac{dx}{dt} = Rx. \quad (3.2.1)$$

Тут R у загальному випадку може бути функцією як самої чисельності, так і часу, або залежати від інших зовнішніх та внутрішніх факторів.

Закон (3.2.1) було сформульовано Томасом Робертом Мальтусом (1766-1834) у книзі «О росте народонаселения» (1798). Згідно (3.2.1), якщо коефіцієнт пропорційності $R = r = \text{const}$ (як це припускав Мальтус), чисельність буде зростати необмежено за експонентою:

$$x = x_0 e^{rt}; x_0 = x|_{t=0}.$$

Для більшості популяцій існують обмежуючі фактори, й з тієї чи іншої причини ріст

популяції зупиняється. Єдиний виняток являє собою людинна популяція, яка упродовж усього історичного часу зростає навіть швидше, ніж за експонентою. Дослідження Мальтуса суттєво вплинули як на економістів, так й на біологів, зокрема, теорію Мальтуса докладно аналізує у своїх щоденниках Чарльз Дарвін. Одну із причин порушення закону Мальтуса у реальній живій природі Дарвін бачить у боротьбі за існування.

Закон експоненціального росту справедливий на визначеній стадії росту для популяцій клітин у тканині, водоростей або бактерій у культурі. У моделях математичний вираз, що описує збільшення швидкості змінювання величини із ростом самої цієї величини, називають *автокаталітичним членом* (авто – само, каталіз – модифікація швидкості реакції, зазвичай, прискорення, за допомогою речовин, що не задіяні у реакції), автокаталіз – «самоприскорення» реакції.

3.2.2 Обмежене зростання. Рівняння Ферхюльста

Базовою моделлю, що описує обмежене зростання, є модель Ферхюльста (1848):

$$\frac{dx}{dt} = rx \left(1 - \frac{x}{K} \right). \quad (3.2.2)$$

Параметр K носить назву «ємності популяції», виражається в одиницях чисельності (або концентрації) і має системний характер, тобто визначається низкою різних обставин, серед них – обмеження на кількість субстрату для мікроорганізмів доступного обсягу для популяції клітин тканини, їстівної бази або сховищ для вищих тварин.

Графік залежності правої частини рівняння (3.2.2) від чисельності x і чисельності популяції за часом наведено на рис. 3.1.

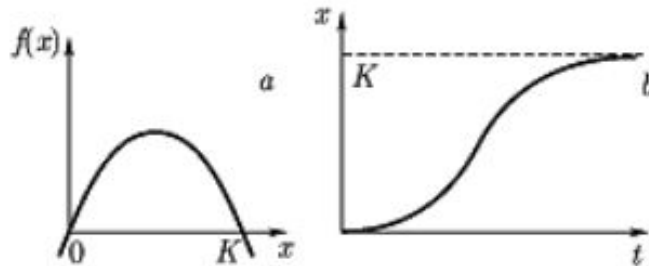


Рис. 3.1. Обмежене зростання. Залежність величини швидкості росту від чисельності (а) і чисельності від часу (б) для логістичного рівняння

Вивчення дискретного аналогу рівняння (3.2.2) у другій половині XX століття виявило зовсім нові його властивості. Розглянемо чисельність популяції у послідовні моменти часу, що відповідає реальній процедурі перерахунку особин (або клітин) у популяції. Залежність чисельності на кроці $n + 1$ від чисельності на попередньому кроці n можна записати у вигляді

$$x_{n+1} = rx_n (1 - x_n).$$

Поведінка у часі змінної x_n залежно від величини параметра r може носити характер не тільки обмеженого зростання, як це було для неперервної моделі (3.2.2), але також бути коливальним або квазістохастичним, як це зображено на рис. 3.2 справа. Зверху вниз

значення параметра власної швидкості зростання r збільшується.

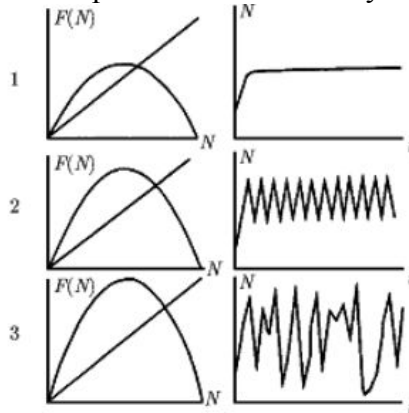


Рис.3.2. Вид функції залежності чисельності на наступному кроці від чисельності на попередньому кроці та поведінка чисельності у часі (правий стовпець) за різних значень r : 1) обмежене зростання; 2) коливання; 3) хаос

Дискретний опис виявився продуктивним для систем самої різної природи. Апарат подання динамічної поведінки системи на площині в координатах $[x_t, x_{t+T}]$ надає можливість визначити, чи є система, що спостерігається, коливальна чи квазістохастична. Наприклад, подання даних електрокардіограми дало можливість установити, що скорочення серця людини у нормі мають нерегулярний характер, а в період приступів стенокардії або у передінфарктному стані ритм скорочення серця стає строго регулярним. Така «жорсткість» режиму є захисна реакція організму у стресовій ситуації й свідчить про загрозу життю системи.

3.2.3 Моделі Моно і Міхаеліса –Ментен

Однією з причин обмеження росту може бути нестача їжі (лімітування за субстратом мовою мікробіології). З мікробіологічних досліджень відомо, що в умовах лімітування за субстратом швидкість росту зростає пропорційно концентрації субстрату, а при надлишку субстрату виходить на сталу величину, яка визначається генетичними можливостями популяції. Упродовж деякого часу чисельність популяції зростає експоненціально, доки швидкість росту не почне лімітуватися деякими іншими факторами. Залежність швидкості росту R у формулі (3.1) від субстрату може бути описана у вигляді

$$R(S) = \frac{\mu_0 S}{K_s + S}. \quad (3.2.3)$$

Тут K_s – константа, що дорівнює концентрації субстрату, за якої швидкість росту дорівнює половині максимальної, μ_0 – максимальна швидкість росту, що дорівнює величині r у формулі (3.2.3). Рівняння (3.2.3) вперше запропоновано французьким біохіміком Жаком Моно (1912–1976).

Модель Моно (3.2.3) за формою збігається із рівнянням Міхаеліса –Ментен (1913), яке описує залежність швидкості ферментативної реакції від концентрації субстрату за умови, коли загальна кількість молекул ферменту є стала і суттєво менша за кількість

молекул субстрату:

$$\mu(S) = \frac{\mu_0 S}{K_M + S}.$$

Тут K_M – константа Міхаеліса, одна із найважливіших для ферментативних реакцій величина, що визначається експериментально, й має сенс та розмірність концентрації субстрату, за якої швидкість реакції дорівнює половині максимальної.

Закон Міхаеліса –Ментен виводиться на основі рівнянь хімічної кінетики й описує швидкість утворення продукту відповідно до схеми:



3.2.4 Базова модель взаємодії. Конкуренція. Відбір

Біологічні системи вступають у взаємодію одна із одною на всіх рівнях, будь то взаємодія біомакромолекул у процесі біохімічних реакцій, чи взаємодія видів у популяціях. Кінетика процесів у структурах в математичних моделях, як правило, описується за допомогою систем рівнянь для ймовірностей станів комплексів.

У разі, коли взаємодія здійснюється випадково, її інтенсивність визначається концентрацією компонентів, що взаємодіють, та їхньою рухливістю – узагальненою дифузиею. Саме такі уявлення прийнято у базових моделях взаємодії видів. Класичною книгою, в якій розглядаються математичні моделі взаємодії видів, стала книга Віто Вольтерра «Математическая теория борьбы за существование» (1931). У ній постульовано у математичній формі властивості біологічних об'єктів та їх взаємодій, які потім досліджуються як математичні об'єкти. Віто Вольтерра (1860-1940) став всесвітньо відомим завдяки своїм працям у галузі інтегральних рівнянь та функціонального аналізу. Крім чистої математики його цікавили питання застосування математичних методів у біології, фізиці, соціальних науках.

Вольтерра за аналогією із статистичною фізикою, припустив, що інтенсивність взаємодії пропорційна ймовірності зустрічі (ймовірності зіткнення молекул), тобто добутку концентрацій. Найпростіша із моделей – модель відбору на основі конкурентних відношень – працює при розгляді конкурентних взаємодій будь-якої природи: біохімічних сполук, різного типу оптичної активності, конкуруючих клітин, особин, популяцій. Її модифікації застосовуються для опису конкуренції в економіці. Нехай є два однакових види із однаковою швидкістю розмноження, які є антагоністи, тобто при зустрічі вони пригнічують один одного. Модель їхньої взаємодії може бути записана у вигляді (Чернавский, 1984):

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= ax - bxy, \\ \frac{dy}{dt} &= ay - bxy.\end{aligned}$$

Згідно такій моделі, симетричний стан співіснування обох видів є нестійкий, один із видів обов'язково помре, а інший розмножиться до нескінченності. Запровадження обмеження на субстрат (типу 4) або системного фактору, що обмежує чисельність кожного із видів (типу

2), дозволяє побудувати моделі, в яких один із видів виживає і досягає визначеної стабільної чисельності. Вони описують відомий в експериментальній екології принцип конкуренції Гаузе, відповідно із яким у кожній екологічній ніші виживає тільки один вид.

У разі, коли види мають різну власну швидкість росту, коефіцієнти при автокаталітичних членах у правих частинах рівнянь будуть різні, а фазовий портрет системи стає не симетричним. За різних співвідношень параметрів у такій системі можливе як виживання одного із двох видів та вимирання другого (якщо взаємне пригнічення інтенсивніше, ніж саморегуляція чисельності), так і співіснування обох видів у разі, коли взаємне пригнічення менше за самообмеження чисельності кожного із видів.

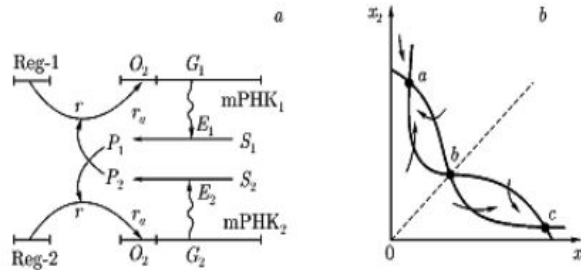


Рис.3.3. Схема синтезу двох ферментів Жакоба і Моно (а) та фазовий портрет тригерної системи (б), [19]

Ще однією класичною бістабільною системою є модель альтернативного синтезу двох ферментів Жакоба і Моно. Схема синтезу наведена на рис. 3.3а. Ген-регулятор кожної системи синтезує неактивний репресор. Цей репресор, сполучається із продуктом протилежної системи синтезу ферментів й утворює активний комплекс. Активний комплекс обротно реагує із ділянкою структурного гена – опероном і блокує синтез мРНК. Отже, продукт другої системи P_2 є корепресор першої системи, а P_1 – корепресор другої. При цьому у процесі корепресії можуть бути задіяні одна, дві і більше молекул продукту. Вочевидь, за такого характеру взаємодій при інтенсивній роботі першої системи друга буде заблокована, й навпаки. Модель такої системи запропонована і докладно вивчена у школі проф. Д. С. Чернавського. Після відповідних спрощень рівняння, що описують синтез продуктів P_1 і P_2 мають вигляд:

$$\frac{dP_1}{dt} = \frac{A_1}{B_1 + P_2^m} - q_1 P_1,$$

$$\frac{dP_2}{dt} = \frac{A_2}{B_2 + P_1^m} - q_2 P_2.$$

Тут P_1, P_2 – концентрації продуктів, величини A_1, A_2, B_1, B_2 виражаються через параметри своїх систем.

Показник степеню m показує, скільки молекул активного репресора (сполучень молекул продукту із молекулами неактивного репресора, який вважається із надлишком) сполучається із опероном для блокування синтезу мРНК. Фазовий портрет системи (зображення траєкторій системи за різних початкових умов на координатній площині, по осям якої відкладено величини змінних системи) для $m = 2$ і визначеному

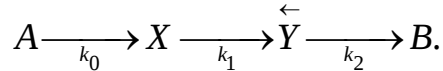
співвідношенні решти параметрів зображено на рис. 3.3b. Як і фазовий портрет системи двох конкуруючих видів, він має тригерний характер. Похожість свідчить про те, що в основі здатності системи до переключень лежить конкуренція – видів, ферментів, станів. Важливим для моделей клітинного циклу, диференціювання та інших є питання про можливість переключення тригера із одного у другий стійкий стаціонарний стан. Систему можна «перекинути» через сепаратрису двома способами: додати досить велику кількість речовини, що у первісному стані перебувала у мінімумі; або параметрично шляхом змінювання характеру фазового портрета таким чином, що первісний стан системи стає нестійким (перехід через біфуркацію сідло-вузол) й система набуває лише один стійкий стаціонарний стан, який було відокремлено від первісного сепаратрисою. Саме такий тип регуляції пропонується у моделях клітинного циклу. Змінювання параметрів системи при цьому може бути обумовлено генетичною програмою, наприклад, у випадку клітинного циклу, здійснюється у процесі росту клітини.

Запитання для самоперевірки

1. Який біологічний процес описує рівняння Ферхлюста?
2. У чому полягає різниця між моделлю Ферхлюста і Моно?
3. Які процеси описує модель Міхаеліса –Ментен?

3.3 Класичні моделі Лотки і Вольтерра

Перше розуміння, що власні ритми можливі у багатій енергією системі завдяки специфіці взаємодії її компонентів, прийшло після появи найпростіших нелінійних моделей взаємодії хімічних речовин у рівняннях Лотки та взаємодії видів – у моделях Вольтерра.



У деякому об'ємі міститься із надлишком речовина A . Молекули A зі сталою швидкістю (константа k_0) перетворюються у молекули речовини X (реакція нульового порядку). Речовина X може перетворюватися у речовину Y , причому швидкість цієї реакції тим більша, чим більша концентрація речовини Y – реакція другого порядку. У схемі це позначено зворотною стрілкою над символом Y . Молекули Y , своєю чергою, необоротно розпадаються, у результаті утворюється речовина B (реакція першого порядку). Система рівнянь, що описує реакцію, має вигляд:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= k_0 - k_1xy, \\ \frac{dy}{dt} &= k_1xy - k_2y, \\ \frac{dB}{dt} &= k_2y.\end{aligned}$$

Тут x, y, B – концентрації хімічних компонентів. Перші два рівняння системи не залежать від B , тому їх можна розглядати окремо. За певних значень параметрів у системі можливі згасаючі коливання.

Базовою моделлю незгасаючих коливань є класичне рівняння Вольтерра, що описує взаємодію видів типу хижак-жертва. Взаємодія видів описується відповідно до принципів хімічної кінетики: швидкість убуття кількості жертв (x) і швидкість прибутку кількості хижаків (y) вважаються пропорційними їхньому добутку

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= ax - bxy, \\ \frac{dy}{dt} &= cxy - dy.\end{aligned}$$

Модель Вольтерра має один суттєвий недолік: параметри коливань її змінних змінюються при флуктуаціях параметрів та змінних системи (не груба система).

3.3.1 Моделі взаємодії видів

Із середини XX сторіччя, у зв'язку із швидким удосконаленням комп'ютерів, які надали можливість використовувати числові методи для вирішення і дослідження систем нелінійних рівнянь, почав розвиватися напрям популяційної динаміки, спрямований на

розробку загальних критеріїв із метою визначення можливості моделей описувати ті чи інші особливості поведінки популяцій, що взаємодіють, зокрема, стійкі коливання.

Прикладом слугує робота А.Н. Колмогорова (1935, перероблена у 1972), в якій розглянута узагальнена модель взаємодії біологічних видів типу хижак–жертва або паразит–хазяїн. Модель являє собою систему двох рівнянь загального вигляду:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= k_1(x)x - L(x)y, \\ \frac{dy}{dt} &= k_2(x)y.\end{aligned}\tag{3.3.1}$$

У моделі передбачено такі припущення:

- 1) Хижаки не взаємодіють один із одним, тобто коефіцієнт розмноження хижаків k_2 і число жертв L , що винищуються в одиницю часу одним хижаком, не залежить від y .
- 2) Приріст числа жертв за наявності хижаків дорівнює приросту за відсутності хижаків мінус число жертв, що винищуються хижаками. Функції $k_1(x)$, $k_2(x)$, $L(x)$ неперервні і визначені на додатній півосі $x, y \geq 0$.
- 3) $dk_1/dx < 0$. Це означає, що коефіцієнт розмноження жертв за відсутності хижака монотонно убыває зі зростанням чисельності жертв, що відображає обмеженість харчових та інших ресурсів.
- 4) $dk_2/dx > 0$, $k_2(0) < 0 < k_2(\infty)$. Із ростом чисельності жертв коефіцієнт розмноження хижаків монотонно убыває зі зростанням чисельності жертв, переходячи від від'ємних значень (коли нема чого їсти) до додатних.
- 5) Число жертв, що знищується одним хижаком в одиницю часу, $L(x) > 0$ при $N > 0$; $L(0) = 0$.

Дослідження моделі (3.3.1) та її частинних випадків призвело до висновку, що регулярні коливання у системі наявні, коли чисельність хижака обмежується наявністю жертви. Якщо чисельність жертви обмежується кількістю необхідних їй ресурсів або чисельність хижака обмежується не кількістю жертви, а іншим фактором, це призводить до згасаючих коливань. До згасання коливань призводить також наявність сховищ для жертв, що роблять їх недосяжними для хижаків. Амплітуда коливань зростатиме, й це призведе до вимирання одного або обох видів, якщо хижак може прохарчуватися за такої густини популяції жертв, що значно нижче за допустиму ємність середовища (див. логістичне рівняння (3.2.2)).

У рамках другого напряму послідовно розглядалися різні модифікації системи Вольтерра, що отримують включенням у вихідну систему різних додаткових факторів та закономірностей, які описуються явними функціями. Модифікація моделі Вольтерра із урахуванням обмеженості субстрату у формі Моно та урахування самообмеженості чисельності (як у рівнянні (3.2.2)) призводить до моделі, яка вивчена А. Д. Базикіним у книзі «Биофизика взаимодействующих популяций» (1985):

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= Ax - \frac{Bxy}{1+px} - Ex^2, \\ \frac{dy}{dt} &= -Cy + \frac{Dxy}{1+px} - My^2.\end{aligned}\tag{3.3.2}$$

Система (3.3.2) об'єднує властивості базових рівнянь (3.2.1), (3.2.2), (3.2.2). За малих чисельностей та відсутності хижака жертва (x) буде розмножуватися за експоненціальним законом (3.2.1); хижак (y) за відсутності жертв буде вимирати також за експонентою; якщо особин того або іншого виду багато, відповідно до базової моделі (3.2.2) діє системний ферхюльстовський фактор (член $-Ex^2$ у першому рівнянні та $-My^2$ – у другому). Інтенсивність взаємодії видів вважається пропорційною добутку їхніх чисельностей (як у моделі (3.3.1)) й описується у формі Моно (модель 4), роль субстрату відіграє вид-жертва, а роль мікроорганізмів – вид-хижак. Параметричний простір моделі (3.3.2) розділено на низку областей із різним характером фазового портрету, за її допомогою можна описати складні типи поведінки видів, що взаємодіють: наявність двох стійких стаціонарних станів, згасаючі коливання чисельностей, автоколивання тощо. Теоретичний аналіз моделей взаємодії видів наведено у книгах Свирежева, Логофета (1978), Заславского, Полуэктова (1988), Ризниченко (2002).

Використання комп'ютерної техніки дало можливість застосовувати результати, отримані на моделях типу (3.3.1), (3.3.2), до конкретних популяцій, зокрема, до задач оптимального промислу та розробки біологічних методів боротьби із комахами-шкідниками. Особливу цікавість для практики являє розробка критеріїв близькості системи до небезпечних меж, при переході через які система перестає існувати або переходить в якісно новий стан. При цьому характер динаміки популяції різко змінюється, наприклад, популяція переходить від монотонного росту до різких коливань чисельності або просто вмирає. Такі межі називаються біфуркаційними. Дослідження властивостей моделей свідчить, що однією із ознак близькості до небезпечної межі є дуже повільне відновлення чисельності після впливу несприятливого фактору. Індикатором небезпеки слугує також змінювання форми коливань чисельностей хижака і жертви.

Запитання для самоперевірки

1. До якого класу моделей належить модель Лоттки?
2. Навести модель взаємодії «хижак–жертва» Колмогорова.
3. Навести модель незгасаючих коливань біологічної популяції.

3.4 Просторово-часова самоорганізація біологічних систем

Усі біологічні системи: біологічні макромолекули, клітини, ткани, спільноти організмів є активні розподілені системи. Перетворення речовин і трансформація енергії у них здійснюється в окремих елементарних об'ємах, що пов'язані між собою переносом речовини, дифузійним і спрямованим під дією зовнішніх сил, або за допомогою спеціальних адаптаційних механізмів, властивих живим організмам. Кожний елементарний об'єм є відкрита за масою та речовиною система, далека від термодинамічної рівноваги, причому багаті енергією речовини або інші джерела енергії розподілені у просторі і зв'язані між собою потоками речовини й енергії. У таких системах можливе розповсюдження імпульсів і хвиль збудження, утворення стаціонарних просторових неоднорідних розподілів речовин й інші явища самоорганізації, які отримали назву *автохвильових* процесів.

Краще за інші вивчено процеси у мембранах нервового волокна, що збуджуються: нервові імпульси, хвилі у нейронних мережах мозку, хвилі збудження у м'язах. Хвилі електричних потенціалів розповсюджуються по волокнам серцевого м'язу. Патологічні стани у вигляді аритмії і фібриляції визначаються виникненням автономних джерел хвиль – ревербераторів.

Інші типи автохвильових процесів проявляються у процесах морфогенезу при диференціюванні тканин. Локальними реакційними елементами таких систем є генетичні системи біосинтезу білку, а процеси перенесення здійснюються системами активного трансмембранного транспорту. У спільнотах деяких організмів (колективних амеб) взаємодія клітин здійснюється за рахунок виділення речовин–атрактантів (циклічна АМФ). Взаємний рух клітин до джерела сигналів та їхня агрегація носять хвильовий характер. Автохвильові процеси лежать також в основі руху у стінках каналів кровоносних судин, скорочень стінок кишечника та інших відділів шлунково-кишкового тракту, механічних переміщеннях клітин на пласкій поверхні та інших процесів.

3.5 Моделі реакції-дифузії

Системи, що характеризуються залежністю швидкості змінювання шуканих величин від стану у даний момент часу та попередньої еволюції процесу, описуються рівняннями реакції-дифузії із затримкою. Такі системи моделюються реакційно-дифузійними рівняннями вигляду

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(u, w), \quad w = u(x, t - \tau), \quad (3.5.1)$$

де τ – час затримки (запізнення), $a > 0$. Кінетична функція F (швидкість протікання хімічних або біохімічних реакцій) залежить від запізнення. Окремий випадок $F(u, w) \equiv F(w)$ допускає просту фізичну інтерпретацію: процес перенесення субстанції у локально-нерівноважному середовищі має інерційні властивості, тобто система реагує не миттєво, а на час τ запізнення. Запізнення трапляється у процесах різної природи. Багато

моделей є узагальненням диференціальних рівнянь із запізненням і надають можливість точно описати явища, що розглядаються.

Для коректної постановки крайових задач для диференціальних рівнянь із запізненням треба задавати початкові умови на відрітку $-\tau \leq t \leq 0$ (або $0 \leq t \leq \tau$).

Аналіз і розв'язання звичайних диференціальних рівнянь із запізненням порівняльний за складністю із аналізом і розв'язанням рівнянь у частинних похідних без запізнення.

3.5.1 Динаміка популяцій

У динаміці популяцій час запізнення τ зазвичай відповідає за період старіння, впродовж якого особини не здатні до розмноження і можуть бути нерухомими. Наприклад, у комах це стадії яйця, личинки або лялечки. Ріст популяції у момент часу t може залежати як від густини популяції $u = u(x, t)$, так і від густини дорослих особин $w = u(x, t - \tau)$ у попередній момент часу $t - \tau$.

Розглянемо, наприклад, задачу для дифузійного логістичного рівняння із запізненням

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + bu(1 - w) + f(u, t), \quad w = u(x, t - \tau), \quad 0 < x < l, t > 0, \quad (3.5.2)$$

із межовими і початковими умовами

$$\begin{aligned} u(0, t) &= g_1(t), \quad u(l, t) = g_2(t); \\ u(x, t) &= \varphi(x, t), \quad 0 \leq x \leq l, \quad -\tau \leq t \leq 0. \end{aligned}$$

Тут моделюється залежність власної швидкості росту популяції u_t від поточної густини популяції $u(x, t)$, ріст якої стримується ефектами насиченості, що, своєю чергою, залежать від густини популяції у минулому $w(x, t) = u(x, \tau)$. Коефіцієнт дифузії a є досить малий і відповідає за ефективність переходу зі стану із високою густиною особин у стан із низькою густиною. Під виразом «особина» мається на увазі не тільки жива сутність, але й, наприклад, клітина крові.

За досить великого часу запізнення τ розв'язки дифузійного рівняння із запізненням стають нестійкими й існує послідовність значень параметра τ , за яких виникає бифуркація Хопфа.

У літературі трапляються різні назви рівняння (3.5.2): дифузійне логістичне рівняння із запізненням, рівняння Фішера із запізненням, дифузійне рівняння Хатчинсона. Рівняння (Кобаяші)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + w(1 - u),$$

описує залежність швидкості росту популяції від густини популяції у момент $t - \tau$, а ефекти насиченості – від поточної густини популяції. Дифузійне логістичне рівняння із запізненням і рівняння Кобаяші – це узагальнення як класичного рівняння Фішера, або рівняння Колмогорова–Петровського–Піскунова (КПП), без затримки

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u(1-u),$$

а, з іншого боку, рівняння Хатчинсона

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = u(1-w).$$

Існування розв'язків типу хвилі, що біжить, для моделі Лотки–Вольтерри із 4-ма запізненнями описується рівняннями

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_1(x,t)}{\partial t} &= a_1 \frac{\partial^2 u_1(x,t)}{\partial x^2} + r_1 u_1(x,t)[1 - b_1 u_1(x,t - \tau_1) + c_1 u_2(x,t - \tau_2)], \\ \frac{\partial u_2(x,t)}{\partial t} &= a_2 \frac{\partial^2 u_2(x,t)}{\partial x^2} + r_2 u_2(x,t)[1 + c_2 u_1(x,t - \tau_3) - b_2 u_2(x,t - \tau_4)],\end{aligned}$$

де $r_i, b_i, c_i, \tau_j > 0$, за $c_1 = c_2 = 0$ розпадається у два незалежні логістичні рівняння із запізненням. Ця модель узагальнює рівняння Фішера без запізнення і рівняння Хатчинсона на випадок кооперативного впливу кількох видів особин.

Рівняння вигляду

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + ru \frac{1-bu}{1+cu}, \quad r, b, c > 0,$$

описує ріст популяції великої дафнії.

Ще однією із розповсюджених моделей динаміки популяцій є дифузійне рівняння Ніколсона із запізненням для опису популяції мух

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - bu + pe^{-qw},$$

де $b > 0$ – смертність дорослих особин за один день у перерахунку на одну особину, $p > 0$ – максимальна кількість яєць, що продукується за один день у перерахунку на одну особину, $1/q > 0$ – розмір популяції, за якого вона відтворюється із максимальною швидкістю.

3.5.2 Біологія та біомедицина

Процес кровотворення описується реакційно–дифузійним рівнянням із запізненням

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \delta u + \frac{\beta \theta^n w}{\theta^n + w^n}, \quad w = u(x, t - \tau),$$

де $u(x, t)$ – густина зрілих стовбурних клітин у потоці крові, τ – час запізнення між початком виробництва стовбурних клітин у кістковому мозку та виходом зрілих клітин у кров. Складніша модель

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \delta u - \frac{\beta \theta^n u}{\theta^n + u^n} + \frac{2\beta \theta^n w}{\theta^n + w^n} e^{-\gamma \tau}, \quad w = u(x, t - \tau),$$

містить експоненціальну складову, що відповідає за потік клітин із кісткового мозку у кров і залежить від густини клітин у момент часу $t - \tau$.

Запровадження у рівняння дифузійної складової надає можливість урахувати переміщення клітин у просторі із області з високою концентрацією в область із низькою.

Модель із двома запізненнями описує динаміку протікання інфекційної хвороби, а саме, гепатиту В:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \lambda - bu(x, t) - f[u(x, t), w(x, t), v(x, t)]v(x, t),$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = f[u(x, t - \tau_1), w(x, t - \tau_1), v(x, t - \tau_1)]v(x, t - \tau_1)e^{-\gamma_1\tau_1} - cw(x, t),$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a\Delta v + kw(x, t - \tau_2)e^{-\gamma_2\tau_2} - mv(x, t).$$

Тут $u = u(x, t)$, $w = w(x, t)$, $v = v(x, t)$ – густини неінфікованих клітин, інфікованих клітин та вільних вірусів, відповідно; λ – швидкість мобілізації неінфікованих клітин; k – швидкість відтворення вірусів інфікованими клітинами; b, c, m – швидкості загибелі неінфікованих клітин, інфікованих клітин і вільних вірусів; a – коефіцієнт дифузії; Δ – оператор Лапласа. Час запізнення τ_1 – час із моменту зараження клітини до початку виробництва віріонів (вірусних частинок). Множник $e^{-\gamma_1\tau_1}$ відповідає за ймовірність виживання клітини за час від $t - \tau_1$ до t , γ_1 – швидкість загибелі інфікованих, але ще не продукуючих вірус клітин. Час запізнення τ_2 – час з моменту утворення віріону до моменту, коли він стане інфікованою частинкою; $e^{-\gamma_2\tau_2}$ відповідає за ймовірність виживання віріону, а середня тривалість його життя дорівнює $1/\gamma_2$. Функція захворюваності $f(u, w, v)$ є неперервно диференційовна за своїми аргументами і задовольняє трьом гіпотезам:

- 1) $f(0, w, v) = 0$ за $w, v > 0$,
- 2) $f_u(u, w, v) > 0$ за $u > 0$, $w, v \geq 0$;
- 3) $f_w(u, w, v) \leq 0$, $f_v(u, w, v) \leq 0$ за $u, w, v \geq 0$.

Початкові і межові умови:

$$u(x, t) = \varphi_1(x, t), \quad w(x, t) = \varphi_2(x, t), \quad v(x, t) = \varphi_3(x, t),$$

$$x \in \Omega, \quad -\tau_m \leq t \leq 0, \quad \tau_m = \max\{\tau_1, \tau_2\}.$$

$$\frac{\partial v}{\partial n} = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad t > 0,$$

де $\Omega \subset R^3$ із гладкою межею $\partial\Omega$, $\varphi_j(x, t) \geq 0$ – задані функції.

Ця модель узагальнює дифузійні моделі динаміки протікання інфекції гепатиту В. За $\tau_1 = \tau_2 = 0$, $f(u, w, v) = \beta u$, $\beta > 0$ – деяка стала інфекційного процесу, отримуємо модель без запізнення, в якій припускається, що клітини печінки що розглядаються, нерухомі, а віруси вільно пересуваються згідно закону дифузії Фіка. За $\gamma_1 = 0$, $\tau_2 = 0$,

$f(u, w, v) = \beta u$ отримують дифузійну модель із запізненням, яке відповідає за урахування часу між зараженням клітини і початком виробництва віріонів. За $\tau_2 = 0$, $f(u, w, v) = \beta u/(u + w)$ отримують дифузійну модель

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= L - du(x, t) - \frac{\beta u(x, t)v(x, t)}{u(x, t) + w(x, t)}, \\ \frac{\partial w}{\partial t} &= \frac{\beta e^{-m\tau} u(x, t - \tau)v(x, t - \tau)}{u(x, t - \tau) + w(x, t - \tau)} - aw(x, t), \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= D\Delta v + kw(x, t) - pv(x, t), \\ \frac{\partial v}{\partial \eta} &= 0,\end{aligned}$$

$$u(x, \theta) = \phi_1(x, \theta) \geq 0, w(x, \theta) = \phi_2(x, \theta) \geq 0, v(x, \theta) = \phi_3(x, \theta) \geq 0, \\ \theta \in [-\tau, 0], x \in \bar{\Omega}.$$

Вибір функції

$$f(u, w, v) = \frac{\beta u}{1 + \delta_1 u + \delta_2 v + \delta_3 uv},$$

де $\delta_{1,2,3} \geq 0$ – деякі сталі, призводить до моделі

Моделі епідемій є ще одним класом реакційно-дифузійних моделей із запізненням.

Час запізнення у цих моделях відповідає за інкубаційний період – час з моменту зараження до перших ознак прояву хвороби. Інкубаційний, або латентний період також характеризується тим, що захворівший уже є носієм вірусу, але ще не є його розповсюджувачем. З точки зору біології упродовж цього періоду патогенний мікроорганізм розмножується всередині носія до обсягів, необхідних для того, щоб зробити носія заразним для інших суб'єктів.

Одна з моделей епідемії із запізненням має вигляд:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= a_1 \Delta u + v R_d (u + w)(1 - (u + w)) - v v - \frac{R_0 \bar{u} \bar{w}}{\bar{u} + \bar{w}}, \\ \frac{\partial w}{\partial t} &= a_2 \Delta w + \frac{R_0 \bar{u} \bar{w}}{\bar{u} + \bar{w}} - w, \quad \bar{u} = u(x, t - \tau), \bar{w} = w(x, t - \tau),\end{aligned}$$

де u, w – густини популяції сприйнятливих і заразних особин; $x = (x_1, x_2) \in \Omega$: $\omega \in R^2$ – деяка обмежена зв'язна область із гладкою межею $\partial\Omega$; Δ – двовимірний оператор Лапласа; a_1, a_2 – коефіцієнти дифузії; τ – час запізнення, що моделює інкубаційний період. Базове демографічне репродуктивне число R_d , коефіцієнт v , що дорівнює відношенню середніх тривалостей життя сприйнятливих і заразних особин, та базове репродуктивне число R_0 визначаються за формулами:

$$R_d = \frac{b}{\delta + m}, \quad v = \frac{\delta + m}{\delta + d}, \quad R_0 = \frac{\beta}{\delta + d},$$

де b – внутрішня швидкість природного росту популяції; δ – природна смертність; m – швидкість еміграції сприйнятливих особин у перерахунку на одну особину; d – смертність за причини хвороби; β – швидкість розповсюдження інфекції. Початкові і межові умови мають стандартний вигляд

$$\begin{aligned} u(x, t) = \varphi_1(x, t) \geq 0, \quad w(x, t) = \varphi_2(x, t) \geq 0, \quad v(x, t) = \varphi_3(x, t) \geq 0, \\ x \in \Omega, \quad -\tau_m \leq t \leq 0, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial w}{\partial n} = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad t > 0. \end{aligned}$$

За $R_d > 1$ здійснюються зростання популяції, за $R_d \leq 1$ популяція гине. Динамічне розповсюдження хвороби здійснюється завдяки взаємодії сприйнятливих та заразних особин, які рухаються випадковим чином.

3.5.3 Математична теорія штучних нейронних мереж

Реакційно-дифузійні рівняння із запізненням та системи таких рівнянь широко використовуються у математичній теорії ШНМ, результати якої застосовуються для обробки сигналів і зображень, у задачах розпізнавання образів тощо. Запізнення виникає в ШНМ через скінченну швидкість перемикавання підсилювачів та скінченну швидкість розповсюдження сигналу між нейронами.

Багато моделей ШНМ ґрунтуються на звичайних диференціальних рівняннях із запізненням. Але у деяких випадках потрібно запровадження дифузійного члену, який надає можливість урахувати рух електронів в асиметричному магнітному полі.

Модель, що об'єднує нейронну мережу Хопфілда і клітинні нейронні мережі, описується системою реакційно-дифузійних рівнянь

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial t} = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} \left(a_{ik} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) - b_i u_i + \sum_{k=1}^3 c_{ik} f_k(u_k) + \sum_{k=1}^n d_{ik} g_k(\bar{u}_{ki}) + I_i(t), \\ \bar{u}_{ik} = u_k(x, t - \tau_{ik}(t)), \quad x \in \Omega, \quad t > 0, \end{aligned}$$

де $u_i(x, t)$ – функція стану i -го нейрону мережі ($i = \overline{1, n}$), $a_{ik}(x, t, u) \geq 0$ – гладкі функції, що моделюють дифузійні оператори трансмісії вздовж i -го нейрону, $b_i > 0$ – швидкість, з якою потенціал i -го нейрону, що ізольований від мережі та зовнішнього впливу, досягає стану спокою; c_{ij}, d_{ij} – сталі, які характеризують взаємодію нейронів; $f_j(u_j)$, $g_j(\bar{u}_{ji})$ – функції активації j -го нейрону; $I_i(t)$ – функції зовнішнього впливу на i -й нейрон; $\tau_{ij}(t)$ – часи запізнення; $\Omega \subset R^3$ – замкнута обмежена область із межею $\partial\Omega$. Початкові умови мають вигляд:

$$u_i(x, t) = \varphi_i(x, t), \quad x \in \Omega, \quad \tau_m \leq t \leq 0, \quad \tau_m = \max\{\tau_{ij}\}.$$

Клас нейронних мереж двоспрямованої асоціативної пам'яті описується реакційно-дифузійною системою із запізненням

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_i}{\partial t} &= \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} \left(a_{ik} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) - b_i u_i + \sum_{j=1}^m c_{ji} f_j(\bar{w}_{ji}) + I_i(t), \quad i = \overline{1, n}; \\ \frac{\partial w_i}{\partial t} &= \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} \left(a_{ik}^* \frac{\partial w_i}{\partial x_k} \right) - b_i^* w_i + \sum_{j=1}^n d_{ji} g_j(\bar{u}_{ji}) + I_i(t), \quad i = \overline{1, m}; \\ \bar{w}_{ji} &= w_j(x, t - \tau_{ji}), \quad \bar{u}_{ji} = u_j(x, t - \tau_{ji}^*), \quad x \in \Omega, \quad t > 0.\end{aligned}$$

3.5.4 Розмноження і дозрівання клітинних популяцій

Процес розмноження і дозрівання клітинних популяцій описується рівнянням гіперболічного типу

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + r \frac{\partial}{\partial x} (xu(x, t)) = -\gamma U(x, t) + \lambda u(t - \tau, \alpha x) [1 - u(t\tau, \alpha x)]. \quad (3.5.4)$$

Рівняння – гіперболічне диференціальне рівняння із затримкою $\tau > 0$ і стислим аргументом ($0 < \alpha < 1$). Це рівняння описує динаміку, клітинної популяції, де здійснюється одночасне розмноження і дозрівання. Функція $u(t, x)$ – загальна кількість проліферуючих клітин у момент t та рівень дозрівання x , $x \in [0, 1]$.

Для цієї моделі передбачається, що вік τ на момент цитокінезу між клітинами ідентичний. Також передбачається, що клітини гинуть зі швидкістю $\gamma > 0$ незалежно від віку або рівня дозрівання і дозрівають зі швидкістю, яка пропорційна зрілості x , тобто $V(x) = rx$, $r > 0$ – стала пропорційності. За цих припущень $\alpha = e^{-r\tau}$, $\lambda = e^{(\gamma+r)\tau}$.

Початкові і межові умови.

$$u(t, x) = u_0(t, x), \quad -\max\{\tau_1, \tau_2\} \leq t \leq 0, \quad 0 < x < 1, \quad (3.5.5)$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0, \quad t \geq 0, \quad (3.5.6)$$

де u_0 – відома початкова функція. Ці умови проілюстровано на рис.1 синім прямокутником (початковий набір) і червоними сегментами (межі). Початкова функція u_0 визначена на синьому прямокутнику. Отже, значення

$$u(t_0 - \tau_1, x_0) = u_0(t_0 - \tau_1, x_0), \quad u(t_0 - \tau_2, x_0) = u_0(t_0 - \tau_2, x_0)$$

відомі і можуть використовуватися для (3.5.4) для визначення $u(t_0, x_0)$. Значення $u(t_1, x_1)$ поєднуються із (3.5.4) з $u(t_1 - \tau_1, x_1) = u_0(t_1 - \tau_1, x_1)$, що відомі з (3.5.5) і з $u(t_1 - \tau_2, x_1)$, які не визначено в (3.5.5), але можуть бути визначені за аналогією з $u(t_0, x_0)$. Значення $u(t_2, x_2)$ поєднуються із (3.5.6) з $u(t_2 - \tau_1, x_2)$, $u(t_2 - \tau_2, x_2)$, що невідомі з (3.5.6) і мають визначатися з (3.5.4).

3.5.5 Моделі одновидової популяції

Динаміка одно видової популяції описується інтегро-диференціальним рівнянням

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} + ru(t, x) \left(1 - \int_{-\tau}^0 u(t + s, x) d\eta(s) \right). \quad (3.5.7)$$

Це рівняння є рівнянням параболічного типу із затримкою з інтегралом за минулі інтервали часу $[t - \tau, t]$ і описує процес одновидової популяції, де види можуть дифундувати. D і r додатні і визначають швидкості дифузії та зростання відповідно.

Рівняння узагальнює модель Хатчінсона, яку можна отримати з (3.5.7), замінивши інтеграл на одне значення $u(t - \tau)$ і поклавши $D = 0$ (дифузія відсутня), або за допомогою одного загальмованого значення $u(t - \tau, x)$ для $D \neq 0$ (рівняння Хатчінсона з дифузією).

Початкові і межові умови.

$$u(t, x) = \varphi(x), \quad -\tau \leq t \leq 0, \quad 0 < x < 1, \quad u(0, t) = \psi(t), \quad t \geq 0. \quad (3.5.8)$$

Значення $u(t_0 - \tau, \alpha x_0) = u_0(t_0 - \tau, \alpha x_0)$ відоме із (3.5.8) і може використовуватися для визначення $u(t_0, x_0)$. З іншого боку, $u(t_1 - \tau, \alpha x_1)$ не задано в (3.5.8) і обидва значення $u(t_1, \alpha x_1)$ та $u(t_1 - \tau, \alpha x_1)$ визначають із рівняння (3.5.7).

Запитання для самоперевірки

1. Чим відрізняється рівняння біологічної моделі із запізненням від рівняння без запізнення?
2. Яким рівнянням описується процес кровотворення?
3. Які основні компоненти (популяції) визначають систему рівнянь перебігу інфекційної хвороби?
4. Сформулювати крайову задачу для системи рівнянь інфекційної хвороби.
5. Навести математичну модель одно видової популяції.

3.6 Моделі імунних систем

Сутність сучасної імунології полягає у тому, що імунна система розпізнає *антигени*, тобто вона розпізнає генетично чужерідний матеріал, а також свій, але змінений (наприклад, ракові пухлини). Основним інструментом здійснення цієї функції є створення груп клітин, які «налагоджені» на визначення певного антигену. Існує безліч таких клонів, що «розпізнають» будь-які антигени крім власних, які знищуються, щоб не почати боротьбу із власними здоровими клітинами. Крім цього, в організмі існує система *вродженого*, або *природного імунітету*.

У якості класифікації відокремлюють дві основні форми імунітету: клітинну та гуморальну. Основними компонентами клітинної відповіді є специфічні *Тс-лімфоцити* (або $CD8^+$ Т-кілерні клітини), знищують заражені клітини. Основними дійовими особами гуморального імунітету є *В-лімфоцити*, або *плазмоцити*, що секретують *антитіла* – білки, що знищують клітини, які мають антиген, або сприяють їх знищенню засобами вродженого імунітету. У цілому, усіма процесами імунітету керують специфічні *Th-лімфоцити*, або $CD4^+$ Т-хелперні клітини. Вони визначають тип імунної відповіді і координують розвиток імунної відповіді за допомогою сигнальних молекул – *цитокинів*, або *інтерлейкінів*.

Цитокіни – маленькі молекули білкової природи. Будь-яка клітина організму, особливо імунокомпетентна клітина, містить на своїй мембрані безліч різних рецепторів до цитокинів.

Усі процеси імунної відповіді зв'язані із поняттями *проліферації* (поділ клітин) і *диференціювання*, тобто у певному сенсі «дозрівання» і набування визначеного фенотипу.

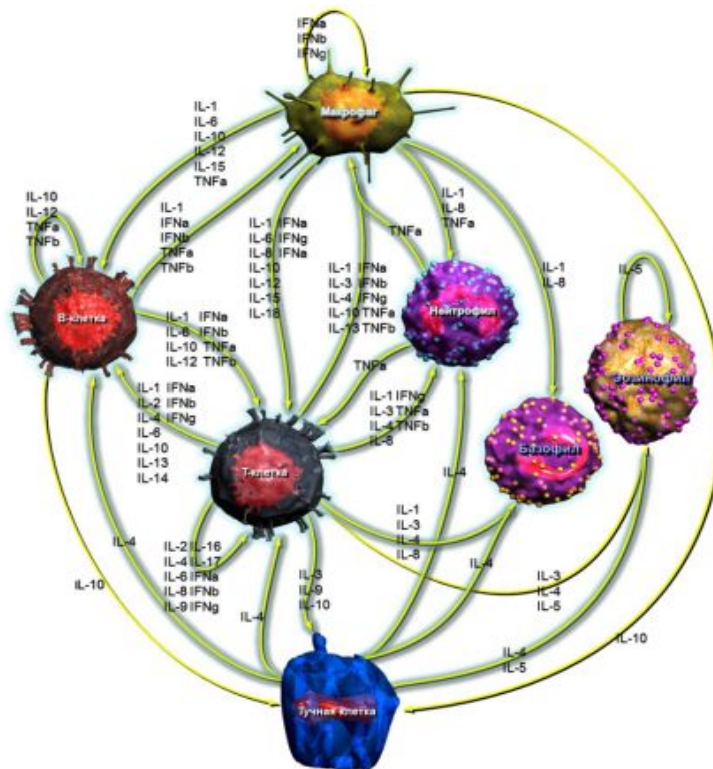


Рис. 3.4. Сучасні дані про побудову цитокинової мережі [SABiosciences Corporation. Cytokine Network]

Підґрунтям для досліджень вірусних інфекцій слугує досить проста математична модель вірусної інфекції, але вона відображає основні риси імунного захворювання:

$$\begin{aligned}\frac{dT}{dt} &= \lambda - dT - kTV, \\ \frac{dI}{dt} &= kTV - \delta I, \\ \frac{dV}{dt} &= pI - cV.\end{aligned}$$

Тут T – чисельність незаражених клітин; I – чисельність заражених клітин; V – чисельність віріонів (вільних вірусних частинок). Клітини заражаються зі швидкістю, пропорційною чисельності віріонів і самих клітин kTV , k – коефіцієнт ефективності цього процесу. Інфіковані клітини продукують нові віріони зі швидкістю, пропорційною їхній чисельності pI . Незаражені клітини продукуються організмом зі швидкістю λ і помирають зі швидкістю dT (середній час життя клітини $1/d$). Заражені клітини умирають зі швидкістю δI (середній час життя $1/\delta$), а вірусні частинки видаляються із організму зі швидкістю cV (середній час життя $1/c$). Кількість частинок, вироблених однією інфікованою клітиною, дорівнює p/δ .

Модель надає можливість визначити реальні параметри вірусної інфекції. Найважливіша – швидкість виведення вірусу (c).

Модифікацію базової моделі використовують для аналізу ефективності терапії інгібіторами зворотної транскриптази.

Процеси проліферації та диференціювання клітин є ключові фактори у реалізації імунної відповіді на патоген та формування імунної пам'яті. Зазвичай проліферація та диференціювання являють собою єдиний процес, досить протяжний у часі.

Рівняння динаміки Т-лімфоцитів, що проліферують, можна описати рівнянням відносно їхньої концентрації

$$\frac{\partial C(z,t)}{\partial t} = -\hat{p}(tz) \frac{\partial C}{\partial z} - \hat{w}C$$

із межевою умовою

$$C(t,0) = k(t)C_0(t)/\hat{p}(0).$$

Тут $C_0(t)$ – концентрація Т-лімфоцитів.

$$\frac{dC_0(t)}{dt} = -k(t)C_0 - w(t)C_0.$$

Початкові умови для цих рівнянь:

$$C(0,z) = 0, \quad C_0(0) = \text{const.}$$

Загальну кількість N лімфоцитів, що отримано у ході проліферації за проміжок часу T можна обчислити за формулою

$$N = \int_0^n 2^x C(T, x) dx.,$$

де n – кількість ділень клітини.

Дослідження динаміки імунної відповіді на вірусний гепатит (В,С) і засоби лікування на ґрунті відповідних математичних моделей докладно розглядаються у розділі 7.

Запитання для самоперевірки

1. Назвіть основні популяції, що входять у будь-яку модель імунної системи.
2. Що означає вислів «проліферація»?
3. Які функції виконують Т-хелпери, Т-кіллери?
4. Яким рівнянням описується процес визначення концентрації лімфоцитів?

Частина II. Наближені методи

Розділ 4. Наближені аналітичні методи

Існує багато підходів до побудови наближених аналітичних методів розв'язання задач математичної фізики. У цьому розділі розглянуто загальну схему такої побудови та оцінки похибок, які при цьому виникають, а також проєкційні методи, та методи, що пов'язані із поданням шуканого розв'язання у вигляді розкладання за малим параметром.

4.1 Загальна схема побудови наближених методів

Властивості функціональних просторів та операторів, які діють у цих просторах, що розглянуто у попередньому розділі, надають можливість намітити досить загальну схему побудови наближених методів розв'язання операторного рівняння

$$A(u) = f, \quad u \in D(A) \subset H,$$

(4.1.1)

до якого можна звести формулювання більшості задач математичної фізики. Для визначеності припустимо, що існує єдиний розв'язок u° . Цей розв'язок може бути або класичним, тобто належати області $D(A)$ оператора A і тому безпосередньо задовольняти (4.1.1), або узагальненим (зокрема, слабким), тобто $u^\circ \notin D(A)$.

Сутність наближеного методу відшукування $u^\circ \in D(A)$ зазвичай полягає у побудові для (4.1.1) послідовності $\{u_n\}$ наближених розв'язків $u_n \in D(A)$, $n \in N$, які збігаються за нормою до u° . При практичній реалізації такого підходу приходиться обмежуватися скінченною послідовністю $\{u_n\}_N$, при цьому важливо знати, що послідовність $\{u_n\}$ збігається до елементу u° . Крім того, бажано отримати оцінки для величини $\alpha_n = \|u_n - u^\circ\|_{D(A)}$ (наприклад, у вигляді нерівності $\alpha_n \leq C\beta_n$, де C – деяка стала, а β_n – елементи послідовності, що збігається до нуля). Якщо при відшуванні u_n використовують елемент u_{n-1} (при $n=1$ цей елемент буде нульовим наближенням), говорять про метод ітерацій, або метод послідовних наближень. Наявність оцінок може подекуди за заданою похибкою наближеного розв'язання u_N вказати необхідну кількість ітерацій N .

Щоб знайти u_n , замінимо (4.1.1) наближеним рівнянням

$$A_n(x_n) = y_n, \quad x_n \in D(A_n), \quad y_n \in R(A_n) \subset H, \quad (4.1.2)$$

де оператор A_n у певному сенсі апроксимує оператор A , y_n – елемент f (у будь-якому разі для спрощення пошуку u_n бажано, щоб A_n був лінійним оператором, у якого існує зворотний оператор A_n^{-1}). При цьому простори $D(A_n)$ і $R(A_n)$ можуть бути й скінченно-вимірними. У цьому разі існування у лінійного оператора A_n зворотного

означає, що матриця оператора A_n є квадратна, а розмірності $D(A_n)$ та $R(A_n)$ однакові.

Запровадимо оператори X_n та Y_n , які здійснюють відображення

$X_n: D(A) \rightarrow D(A_n)$ та $Y_n: R(A) \rightarrow R(A_n)$, причому $y_n = Y_n(f)$. Ці оператори можуть, наприклад, відображати нескінченно-вимірний функціональний простір у скінченно-вимірний або формувати сітку скінченних елементів чи скінченно-різницеву сітку. Нехай рівняння (4.1.1) має єдиний розв'язок $x_n^\circ \in D(A_n)$.

Взагалі кажучи, $x_n^\circ \notin D(A)$, тому x_n° не можна ототожнювати із $u_n \in D(A)$ і вважати наближеним розв'язанням (4.1.1). Але за допомогою оператора U_n можна перейти до цього розв'язання $u_n = U_n(x_n^\circ)$. Зокрема, U_n може бути оператором інтерполювання, який за дискретним поданням елементу $x_n^\circ \in D(A_n)$ відновлює його образ $u_n \in D(A)$. На рис. 4.1 умовно показаний зв'язок просторів, що розглядаються, та їхніх елементів.

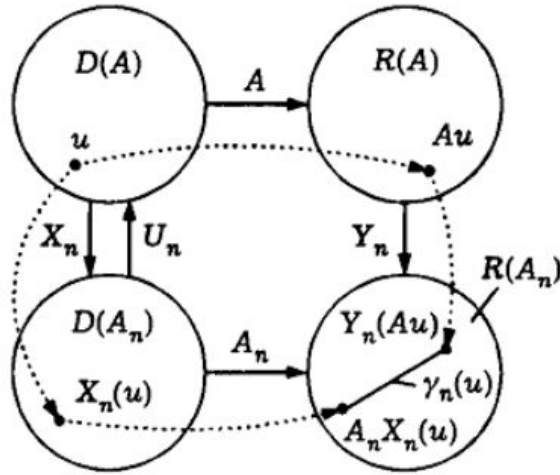


Рис. 4.1. Апроксимація просторів визначення та значень

Будемо говорити, що послідовність $\{x_n^\circ\}$ збігається, коли виконується умова $\|x_n^\circ - X_n u^\circ\|_{D(A_n)} \rightarrow 0$ за $n \rightarrow \infty$, причому елементи $X_n(u^\circ)$ у певному сенсі наближають елемент u° . За припущення, що A_n є лінійний оператор, який має зворотний оператор A_n^{-1} , приймемо, що A_n апроксимує оператор A на елементі $u \in D(A)$, якщо

$$\gamma_n(u) = \|A_n X_n(u) - Y_n(Au)\|_{R(A_n)} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

(4.1.3)

Значення $\gamma_n(u)$ – це відстань в $R(A_n)$ між елементами $A_n X_n(u)$ та $Y_n(Au)$ (рис. 4.1). Наведемо теореми про збіжність наближених методів.

Теорема 4.1. Якщо

$$v_n = \|A_n^{-1}\| \gamma_n(u^\circ) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \quad (4.1.4)$$

послідовність $\{x_n^\circ\}$ збігається, причому

$$\|x_n^\circ - X_n(u^\circ)\|_{D(A_n)} \leq v_n, \quad n \in N. \quad (4.1.5)$$

Зокрема, якщо оператори A_n , $n \in N$, апроксимують оператор A на елементі u° й оператори A_n^{-1} є обмежені, послідовність $\{x_n^\circ\}$ збігається. Але, згідно теореми 4.1, якщо виконується умова (4.1.4), послідовність може збігатися й у випадку, коли існує апроксимація, або оператор A_n^{-1} не є обмежений.

Теорема 4.2. Якщо при $v_n \rightarrow 0$ і $U_n(X_n(u^\circ)) \rightarrow u^\circ$ при $n \rightarrow \infty$, а оператор U_n є лінійний та обмежений, послідовність $\{u_n\}$ елементів $u_n = U_n(x_n^\circ)$ збігається до шуканого елементу u° , причому

$$\|u_n - u^\circ\|_{D(A_n)} \leq \|U_n\| v_n + \|U_n X_n(u^\circ) - u^\circ\|_{D(A)}, \quad n \in N. \quad (4.1.6)$$

Нехай оператор U_n , не будучи лінійним, може бути поданий у вигляді $U_n(x) = V_n x + B(f)$, де $V_n : D(A_n) \rightarrow D(A)$ – лінійний обмежений оператор і $B : R(A) \rightarrow D(A)$ – деякий оператор. Тоді неважко перевірити, що теорема 4.2 зберігає силу після заміни у (4.1.6) $\|U_n\|$ на $\|V_n\|$. Практичне застосування теорем 4.1 и 4.2 зазвичай утруднене, оскільки елемент u° невідомий, але вони виявляються корисними при побудові наближених методів.

Приклад 4.1.

Розглянемо інтегральне рівняння II роду

$$u(\xi) - \int_a^b K(\xi, t) u(t) dt = f(\xi), \quad (4.1.7)$$

де $\xi \in [a, b]$, $u(\xi), f(\xi) \in C[a, b]$, $K(\xi, t)$ – ядро цього рівняння, неперервне у квадраті $[a, b]^2$, має єдиний розв'язок $u^\circ(\xi)$ при заданні дійсної функції $f(\xi)$

$$q = (b - a) \max_{\xi, t \in [a, b]} |K(\xi, t)| < 1, \quad (4.1.8)$$

Один із методів наближеного розв'язання (4.1.7) полягає у розбитті відрізка $[a, b]$ на $n-1$ частин точками ξ_i , $i = \overline{1, n}$ та наближеній заміні визначеного інтегралу квадратурною сумою. Тоді замість (4.1.7) отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР)

$$x_i - \sum_{j=1}^n D_j K(\xi_i, \xi_j) x_j = y_i, \quad i, j = \overline{1, n}, \quad y_i = f(\xi_i), \quad (4.1.9)$$

відносно значень $x_i = u(\xi_i)$ шуканої функції $u(\xi)$ у вузлах ξ_i відповідної квадратурної формули (тут D_j – вагові коефіцієнти цієї формули).

У даному випадку лінійні оператори A і A_n визначені лівими частинами (4.1.7) і (4.1.9) відповідно. Із (4.1.7) витікає, що $D(A) = R(A) = C[a, b]$. Оператори X_n та Y_n збігаються, й відображають нескінченно-вимірну множину $C[a, b]$ неперервних на відрізку $[a, b]$ функцій на підмножину $D(A_n) = R(A_n)$ n -вимірного арифметичного простору R^n значень $x_i = X_n(u_i)$ та $y_i = Y_n(f_i)$ у вузлах ξ_i квадратурної формули, де $u_i = u(\xi_i)$, $f_i = f(\xi_i)$, $i = \overline{1, n}$.

Запишемо СЛАР (4.1.9) у вигляді

$$A_n x_n = y_n, \quad A_n = I - B_n,$$

де x_n і y_n – вектори із координатами x_i та y_i , $i = \overline{1, n}$, I – тотожний оператор, а B_n – оператор, матриця B_{ij} якого має елементи $B_{ij} = D_j K(\xi_i, \xi_j)$, $i, j = \overline{1, n}$. Норму цієї матриці, що відповідає кубічній нормі векторів x_n та y_n , знайдемо як найбільшу суму абсолютних значень елементів B_{ij} у рядку, тобто

$$\|B_{ij}\| = \max_{i=1, n} \sum |D_j K(\xi_i, \xi_j)| \leq \sum_{j=1}^n |D_j| \max_{i, j=1, n} |K(\xi_i, \xi_j)|.$$

Для більшості квадратурних формул, що застосовуються, вагові коефіцієнти є додатні, й їхня сума дорівнює $b - a$. Тому із урахуванням (4.1.8) отримаємо таку оцінку для норми оператора B_n :

$$\|B_n\| = \|(B_{ij})\| \leq (b - a) \max_{\xi, t \in [a, b]} |K(\xi, t)| = q < 1.$$

Якщо простір $\mathcal{W}$ банахів, простір лінійних обмежених операторів $L(U, W)$ також банахів.

Нехай $A \in L(U, W)$ – лінійний обмежений оператор і $\mathcal{W}R(A)$. Тоді для існування та обмеженості оператора A^{-1} досить, щоб для деякої сталої $\tau > 0$ для всіх $u \in \mathcal{U}$ виконувалася нерівність

$$\|Au\|_{\mathcal{W}} \geq \tau \|u\|_{\mathcal{U}}.$$

Тоді для норми зворотного оператора справджується оцінка

$$\|A^{-1}\| \leq 1/\tau.$$

Теорема 4.3. Якщо $A \in L(B)$, $\|A_n^{-1}\| < 1/(1 - q)$ і $\|A\| \leq q < 1$, оператор $I - A \in \mathcal{L}(B)$ має зворотний обмежений оператор $S = (I - A)^{-1}$, причому

$$\|S\| \leq \frac{1}{1-q}.$$

Згідно з цією теоремою робимо висновок, що оператор $A_n = I - B_n$ має зворотний оператор A_n^{-1} , причому $\|A_n^{-1}\| \leq 1/(1-q)$. Це означає, що існує вектор x_n° із координатами x_i° , $i = \overline{1, n}$, який є єдиний розв'язок СЛАР (4.1.9).

Практичне застосування цих теорем залежить від конкретної задачі, що має вирішуватися.

4.2 Похибки наближених методів

Під час пошуку наближеного розв'язку операторного рівняння вигляду (4.1.1) виникають похибки. Їхні джерела пов'язані із такими основними причинами: неточностями у завданні оператора та правої частини (4.1.1) при постановці задачі, похибками методу розв'язання (4.1.1) та обчислювальними похибками.

Розглянемо спочатку причину виникнення похибок, записавши замість (4.1.1) рівняння

$$(A + \Delta A)u = f + \Delta f, \quad u \in D(A) \subset H, \quad f \in R(A) \subset H, \quad (4.2.1)$$

де ΔA та $\Delta f \in R(\Delta A)$ – викривлення в операторі та правій частині (4.1.1) відповідно, причому $D(\Delta A) \supset D(A)$ та $R(\Delta A) \subset R(A)$. Припустимо, що оператори A та ΔA є лінійні обмежені й існує зворотний оператор A^{-1} , а викривлення в операторі A досить малі, тобто $\|A^{-1}\Delta A\| \leq q < 1$. Тоді оператор $A + \Delta A$ має зворотний оператор $S = (A + \Delta A)^{-1} = A^{-1}(I + A^{-1}\Delta A)^{-1}$, причому $\|S\| \leq \|A^{-1}\|/(1 - q)$. Це означає, що існує єдиний розв'язок u^* , що задовольняє (4.2.1):

$$(A + \Delta A)u^* = f + \Delta f. \quad (4.2.2)$$

Із (4.2.2) віднімемо рівність $Au^\circ = f$:

$$A(u^* - u^\circ) = -\Delta Au^* + \Delta f.$$

Звідси, із урахуванням нерівності трикутника і оцінки для норми оператора S отримуємо

$$\|u^* - u^\circ\| \leq \|A^{-1}\Delta A\| \|u^*\| + \|A^{-1}\| \|\Delta f\| \leq q \|u^*\| + \|A^{-1}\| \|\Delta f\|. \quad (4.2.3)$$

Таку оцінку похибки $\|u^* - u^\circ\|$ називають *апостеріорною*, оскільки її можна отримати лише після розв'язання (4.2.1), маючи у наявності елемент u^* .

Із (4.2.1) із урахуванням оцінки норми оператора $S = (A + \Delta A)^{-1}$ маємо

$$u^* = S(f + \Delta f), \quad \|u^*\| \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1 - q} \|f + \Delta f\|.$$

Тоді після підстановки $\|u^*\|$ в (4.2.3), знаходимо *апріорну оцінку похибки*

$$\|u^* - u^\circ\| \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1 - q} (q \|f\| + \|\Delta f\|). \quad (4.2.4)$$

Для практичного застосування оцінок (4.2.2), (4.2.4) необхідні значення $\|A^{-1}\|$ і q , пошук яких часто є не проста самостійна задача. Із (4.2.2) та рівності $Au^\circ = f$ отримуємо

$$(A + \Delta A)(u^* - u^\circ) = -\Delta Au^* + \Delta f.$$

Звідси із урахуванням нерівності трикутника та оцінки для норми оператора S знаходимо

$$\|u^* - u^\circ\| \leq \|(A + \Delta A)^{-1}\Delta A\| \|u^\circ\| + \|(A + \Delta A)^{-1}\| \|f\|$$

$$\leq \frac{\|A^{-1}\|}{1-q} (\|\Delta A\| \|u^\circ\| + \|f\|). \quad (4.2.5)$$

Позначимо $\mu(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$ (у скінченновимірному випадку $\mu(A)$ називають *числом обумовленості матриці* оператора A). Тоді, якщо $\|A^{-1}\| \|\Delta A\| < 1$, прийнявши $q = \|A^{-1}\| \|\Delta A\|$, із (4.2.5) отримаємо

$$\|u^* - u^\circ\| \leq \mu(A) \frac{\|\Delta A\| / \|A\| \|u^*\| + \|\Delta f\| / \|A\|}{1 - \mu(A) \|\Delta A\| / \|A\|}.$$

Оскільки $\|f\| \leq \|A\| \cdot \|u^\circ\|$, приходимо до апіорної оцінки для відносної похибки

$$\frac{\|u^* - u^\circ\|}{\|u^\circ\|} \leq \frac{\mu(A)}{1 - \mu(A) \|\Delta A\| / \|A\|} \left(\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\Delta f\|}{\|f\|} \right). \quad (4.2.6)$$

Зазначимо, що оцінка (4.2.6) залежить від відносних похибок в операторі і правій частині (4.2.1).

Перед тим, як розглядати решту причин виникнення похибок, припустимо, що ми маємо наближений розв'язок u_n рівняння (4.1.1), що отримано у дійсності як підсумок наближеного розв'язання рівняння (4.2.1). Нехай за підстановки u_n в (4.2.1) виникає нев'язка $\delta = (A + \Delta A)u_n - f + \Delta f$ тобто u_n задовольняє не (4.2.1), а рівняння $(A + \Delta A)u_n = f + \Delta f + \delta$. Тому, знаючи нев'язку δ , можна отримати апостеріорну оцінку відносної похибки наближеного розв'язання u_n , якщо в (4.2.6) замінити $\|f\|$ на $\|\Delta f\| + \|\delta\|$:

$$\frac{\|u^* - u^\circ\|}{\|u^\circ\|} \leq \frac{\mu(A)}{1 - \mu(A) \|\Delta A\| / \|A\|} \left(\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\Delta f\| + \|\delta\|}{\|f\|} \right). \quad (4.2.7)$$

Похибку методу наближеного розв'язання (4.1.1) шляхом заміни цього рівняння на (4.1.2) можна оцінити за допомогою теореми 1. Але у дійсності при заміні (4.1.1) на (4.1.2) виникають додаткові похибки, так що замість (4.1.2) приходиться вирішувати «збурене» рівняння

$$(A_n + \Delta A_n)x_n = y_n + \Delta y_n, \quad \Delta y_n \in R(A_n), \quad (4.2.8)$$

причому $D(\Delta A_n) \subset D(A_n)$ і $R(\Delta A_n) \subset R(A_n)$. Порівнюючи (4.2.8) із (4.2.1), приходимо до висновку, що за аналогією із (4.2.6) матимемо апіорну оцінку відносної похибки розв'язання (4.1.2) у вигляді

$$\frac{\|x^* - x^\circ\|}{\|x^\circ\|} \leq \frac{\mu(A_n)}{1 - \mu(A_n) \|\Delta A_n\| / \|A_n\|} \left(\frac{\|\Delta A_n\|}{\|A_n\|} + \frac{\|\Delta y_n\|}{\|y_n\|} \right). \quad (4.2.9)$$

де x_n° і x_n – розв'язання (4.1.1.) та (4.2.8) відповідно, а $\mu(A_n) = \|A_n\| \|A_n^{-1}\|$.

У дійсності за рахунок обчислювальних похибок при розв'язанні (4.2.8) замість x_n отримаємо елемент $x_n \in D(A_n)$, підстановка якого в (4.2.8) призведе до нев'язки $\tilde{\delta}_n$.

Заміна в (4.2.9) $\|y_n\|$ на $\|\Delta y_n\| + \|\tilde{\delta}_n\|$ надає можливість отримати апостеріорну оцінку відносної похибки $\|x_n - x_n^\circ\| / \|x_n^\circ\|$, що зумовлена разом як другою так і третьою причинами.

Насамкінець, слід оцінити похибку Δu_n , що виникає при переході від розв'язання x_n° рівняння (4.1.2) до наближеного розв'язання $u_n = U_n(x_n^\circ)$ рівняння (4.1.1). Із урахуванням можливого викривлення Δu_n оператора U_n та похибку $\Delta x_n^\circ = x_n - x_n^\circ$ розв'язання (4.1.2), знаходимо

$$u_n + \Delta u_n = U_n(x_n^\circ) + \Delta u_n = (U_n + \Delta U_n)(x_n^\circ + \Delta x_n^\circ),$$

або, якщо вважати U_n та ΔU_n лінійними,

$$\Delta u_n = (U_n + \Delta U_n)\Delta x_n^\circ + \Delta U_n x_n^\circ.$$

Звідси із урахуванням нерівності трикутника отримуємо апріорну оцінку абсолютної похибки

$$\begin{aligned} \|\Delta u_n\| &= \|(U_n + \Delta U_n)\Delta x_n^\circ + \Delta U_n x_n^\circ\| \leq \\ &\leq \left[\left(1 + \frac{\|\Delta U_n\|}{\|U_n\|} \right) \frac{\|\Delta x_n^\circ\|}{\|x_n^\circ\|} + \frac{\|\Delta U_n\|}{\|U_n\|} \right] \|U_n\| \|x_n^\circ\|. \end{aligned}$$

Щоб урахувати ще й обчислювальну похибку, досить до $\|\Delta x_n^\circ\|$ додати норму нев'язки $\|\delta_n\|$, де

$$\delta_n = u_n - (U_n + \Delta U_n)(x_n^\circ + \Delta x_n^\circ),$$

а $u_n \in D(A)$ – елемент, що обчислено у результаті переходу від розв'язання (4.1.2) до наближеного розв'язання (4.1.1). Тоді прийдемо до апостеріорної оцінки абсолютної похибки

$$\|u_n - u_n\| \leq \left[\left(1 + \frac{\|\Delta U_n\|}{\|U_n\|} \right) \frac{\|\Delta x_n^\circ\| + \|\delta_n\|}{\|x_n^\circ\|} + \frac{\|\Delta U_n\|}{\|U_n\|} \right] \|U_n\| \|x_n^\circ\|.$$

Запитання для самоперевірки

1. У чому полягає сутність наближених методів?
2. Наведіть умову збіжності наближених методів.
3. Що мається на увазі під висловами апріорна оцінка, апостеріорна оцінка похибки?
4. Як позначається число, яке називають числом обумовленості матриці?

4.3 Метод малого параметра

Нехай у банаховому просторі $\mathcal{B}$ задано операторне рівняння $Bu = f$, $u, f \in \mathcal{B}$, де B – лінійний обмежений оператор із банахова простору $\mathcal{L}(\mathcal{B})$ лінійних обмежених операторів. Нехай оператор можна представити у вигляді $B = B_0 - \lambda A$, $\lambda \neq 0$, де B_0 має зворотний, що є відомий, або зворотний оператор, який можна досить просто отримати, $B_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{B})$. Оскільки в $\mathcal{L}(\mathcal{B})$ визначений добуток операторів, запишемо

$$Bu = (B_0 - \lambda A)u = B_0(I - \lambda B_0^{-1}A)u = f, \quad f \in \mathcal{B}, \quad (4.3.1)$$

де I – тотожний оператор.

Оператор $I - \lambda B_0^{-1}A \in \mathcal{L}(\mathcal{B})$ при $\|\lambda\| \|B_0^{-1}A\| \leq q < 1$ має зворотний оператор

$$S = (I - \lambda B_0^{-1}A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k (B_0^{-1}A)^k, \quad (4.3.2)$$

причому $(B_0^{-1}A)^0 = I$. Отже, якщо обирати параметр λ досить малим за абсолютною величиною, можна забезпечити існування зворотного оператора $S \in \mathcal{L}(\mathcal{B})$.

Із урахуванням (4.3.2) знаходимо розв'язання рівняння (4.3.1) у вигляді

$$u = SB_0^{-1}f = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k (B_0^{-1}A)^k B_0^{-1}f = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \tilde{A}^k u, \quad (4.3.3)$$

де $\tilde{A} = B_0^{-1}A$ та $u = B_0^{-1}f$. З умови існування зворотного оператора S отримуємо, що ряд в (4.3.3) збігається, якщо $|\lambda| < 1/\|B_0^{-1}A\|$.

Із (4.3.3) отримаємо наближений розв'язок

$$u_N(\lambda) = \sum_{k=0}^N \lambda^k \tilde{A}^k u. \quad (4.3.4)$$

Відніmemo (4.3.4) із (4.3.3) та оцінимо різницю за нормою. Знаходимо оцінку похибки наближеного розв'язку (4.3.4):

$$\|u - u_N\|_{\mathcal{B}} \leq \sum_{k=N+1}^{\infty} |\lambda|^k \|\tilde{A}^k u\|_{\mathcal{B}} = \frac{(\|\lambda\| \|\tilde{A}\|)^{N+1}}{1 - \|\lambda\| \|\tilde{A}\|} \|u\|_{\mathcal{B}}. \quad (4.3.5)$$

Приклад 4.2.

Нехай для інтегрального рівняння II роду

$$u(\xi) - \lambda \int_a^b K(\xi, t) u(t) dt = f(\xi), \quad (4.3.6)$$

де $\lambda \neq 0$, $u, f \in C[a, b]$, ядро $K(\xi, t)$ є неперервна у квадраті $[a, b]^2$ функція і виконана умова

$$q = |\lambda| (b-a) \max_{\xi, t \in [a, b]} |K(\xi, t)| < 1. \quad (4.3.7)$$

Представимо (4.3.6) у вигляді операторного рівняння $(B_0 - \lambda A)u = f$, де $B_0 = I$, а A – оператор, що ставить у відповідність функції $u \in C[a, b]$ функцію $v \in C[a, b]$ і за правилом

$$v(\xi) = \int_a^b K(\xi, t) u(t) dt.$$

Отже, $A: C[a, b] \rightarrow C[a, b]$.

Із урахуванням (4.3.7) маємо

$$\begin{aligned} \|Au\|_{C[a, b]} &= \max_{\xi \in [a, b]} |v(\xi)| = \max_{\xi \in [a, b]} \left| \int_a^b K(\xi, t) u(t) dt \right| \\ &\leq \int_a^b \max_{\xi \in [a, b]} |K(\xi, t) u(t)| dt \leq \frac{q \|u\|_{C[a, b]}}{|\lambda|}. \end{aligned}$$

Звідси, $\|A\| \leq q/|\lambda|$, або $|\lambda| \|B_0^{-1}A\| \leq q < 1$, оскільки у даному разі $B_0 = I$. Отже, поклавши в (4.3.3) $\tilde{A} = A$ та $\tilde{u} = B_0^{-1}f = If = f$, для шуканої функції отримуємо

$$u = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k A^k f, \quad (4.3.8)$$

причому у даному разі $A^0 f = f$, $Af = \varphi_1$,

$$\varphi_1(\xi) = \int_a^b K(\xi, t) f(t) dt.$$

Представимо в явному вигляді оператор A^k , $k > 1$. Позначимо $K_1(\xi, t) = K(\xi, t)$.

Тоді можна записати $A^2 f = \varphi_2$, де

$$\begin{aligned} \varphi_2(\xi) &= \int_a^b K(\xi, \tau) \varphi_1(\tau) d\tau = \int_a^b K(\xi, \tau) d\tau \int_a^b K_1(\tau, t) f(t) dt = \\ &= \int_a^b f(t) dt \int_a^b K(\xi, \tau) K_1(\tau, t) d\tau. \end{aligned}$$

Якщо позначити

$$K_2(\xi, t) = \int_a^b K(\xi, \tau) K_1(\tau, t) d\tau,$$

приходимо до рівності

$$\varphi_2(\xi) = \int_a^b K_2(\xi, t) f(t) dt.$$

За методом математичної індукції неважко показати, що $A^k f = \varphi_k$, де

$$\varphi_k(\xi) = \int_a^b K_k(\xi, t) f(t) dt,$$

причому для відшукування ядра $K_k(\xi, t)$ маємо рекурентну формулу

$$K_k(\xi, t) = \int_a^b K(\xi, \tau) K_{k-1}(\tau, t) d\tau, \quad k = 2, 3, \dots$$

Оскільки збіжність послідовності функцій як елементів банахова простору $C[a, b]$ еквівалентна збіжності цієї функціональної послідовності на відрізку $[a, b]$, (4.3.8) рівносильне рівності

$$u(\xi) = f(\xi) + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k \varphi_k(\xi), \quad \xi \in [a, b], \quad (4.3.9)$$

причому ряд у правій частині цієї рівності збігається до функції $u(\xi)$ рівномірно на відрізку $[a, b]$.

Розглянемо деякі частинні випадки.

У рівнянні (4.3.9) покладемо $a = 0$, $b = 1$, $K(\xi, t) = e^{\xi-t}$.

Оскільки $\max_{\xi, t \in [a, b]} |K(\xi, t)| = e$, умова (4.3.7) справджується при $|\lambda| < 1/e$. У даному випадку $K(\xi, t) = e^{\xi-t}$ і

$$K_2(\xi, t) = \int_0^1 K(\xi, \tau) K_1(\tau, t) d\tau = \int_0^1 e^{\xi-\tau} e^{\tau-t} d\tau = e^{\xi-t}.$$

Значить, для будь-якого номера k маємо $K_k(\xi, t) = e^{\xi-t}$ і $A^k = A$. Відповідно до (4.3.9) і формули для суми членів геометричної прогресії отримуємо

$$u(\xi) = f(\xi) + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k \int_0^1 e^{\xi-t} f(t) dt = f(\xi) + \frac{\lambda e^{\xi}}{1-\lambda} \int_0^1 e^{-t} f(t) dt.$$

Нехай тепер в (4.3.6) $K(\xi, t) = 2\xi - t$. Тоді умова (4.3.7) буде виконана при $|\lambda| < 1/2$. Знайдемо наближений розв'язок рівняння (4.3.6) для $f(\xi) \equiv 1$. У (4.3.3) обмежимося значенням $N = 2$ й у відповідності до (4.3.9) обчислимо

$$\varphi_1(\xi) = \int_0^1 (2\xi - t) df = 2\xi - 1/2,$$

$$K_2(\xi, t) = \int_0^1 (2\xi - \tau)(3\tau - t) d\tau = 2\xi - 2\xi t - 2/3 + t/2,$$

$$\varphi_2(\xi) = \int_0^1 (2\xi - 2\xi t - 2/3 + t/2) dt = 2\xi - \xi - 2/3 + 1/4 = \xi - 5/12.$$

Тоді наближений розв'язок набуде вигляд

$$u_2(\xi) = 1 + (2\xi - 1/2)\lambda + \xi - 5/12)\lambda^2.$$

Точним розв'язком рівняння (4.3.6) у випадку, що розглядається, є функція

$$u(\xi) = 1 + \lambda \frac{2\xi - 1/2 - \lambda/6}{1 - \lambda/2 + \lambda^2/6} = \frac{1 + 2\xi\lambda - \lambda}{1 - \lambda/2 + \lambda/6},$$

яка також є лінійна. При $\lambda = 1/2$ відмінність наближеного і точного розв'язань є суттєва: $u_2(\xi) = 5/4\xi + 32/48 \approx 1,2500\xi + 0,6456$, $u(\xi) = 24/17\xi + 2/17 \approx 1,4118\xi + 0,7059$, але вже за $\lambda = 1/4$ маємо $u_2(\xi) = 9/16\xi + 163/192 \approx 0,5625\xi + 0,8490$ і $u(\xi) = 48/83\xi + 72/83 \approx 0,5782\xi + 0,8675$, тобто коефіцієнти відрізняються не більше, за 2%.

Відносно проста процедура побудови наближеного розв'язку має назву *методу малого параметру*. Але, якщо в операторному рівнянні $Bu = f$ оператор B не є лінійний обмежений, цей метод стає громіздкішим. Модифікація методу потребує запровадження низки додаткових понять.

4.3.1 Загальний випадок методу малого параметра

Нехай Λ – деякий проміжок числової прямої, $\mathcal{U}$ – нормований простір, а $u: \Lambda \rightarrow \mathcal{U}$ – функція дійсної змінної λ , що має область визначення Λ і область значень в $\mathcal{U}$. У нормованому просторі $\mathcal{U}$ із нормою $\|\cdot\|$ елемент $a \in \mathcal{U}$ називають границею функції $u(\lambda)$ у точці $\lambda_0 \in \Lambda$, якщо $\|u(\lambda) - a\| \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow \lambda_0$, і записують

$$a = \lim u(\lambda), \quad u(\lambda) \rightarrow a \Rightarrow \lambda \rightarrow \lambda_0$$

Функцію $u(\lambda)$ називають **неперервною** у точці $\lambda_0 \in \Lambda$, якщо $\|u(\lambda) - u(\lambda_0)\| \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow \lambda_0$. Зазначимо, що функція u є відображення метричних просторів. Тому поняття границі та неперервності функції у точці, що запроваджено вище, відповідають поняттям границі і неперервності відображення метричних просторів у точці.

Якщо існує границя

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \frac{u(\lambda) - u(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} = u'(\lambda_0) \in \mathcal{U},$$

елемент $u'(\lambda_0)$ називають похідною функції $u(\lambda)$ у точці λ_0 . Похідні вищих порядків визначають (як і для дійсної функції дійсної змінної) послідовно. Якщо $u(\lambda)$ має у точці λ_0 похідні будь-якого порядку, говорять, що функція $u(\lambda)$ є нескінченно диференційовна у точці λ_0 .

Нехай $\{u_n(\lambda)\}$ – послідовність функцій $u_n: R \rightarrow \mathcal{U}$. Тоді можна розглядати функціональний ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(\lambda), \quad (4.3.10)$$

елементами якого є функції дійсної змінної $\lambda \in \Lambda$ із областю значень у нормованому просторі $\mathcal{U}$.

Нагадаємо, що за фіксованого $\lambda \rightarrow \Lambda$ ряд (4.3.10) як ряд елементів нормованого простору $\mathcal{U}$ збігається до деякого елементу $u(\lambda) \in \mathcal{U}$, якщо до цього елементу збігається послідовність частинних сум

$$S_k(\lambda) = \sum_{n=1}^k u_n(\lambda)$$

цього ряду, тобто

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left\| \sum_{n=1}^k u_n(\lambda) - u(\lambda) \right\| = 0.$$

Якщо за деякого $\lambda \in \Lambda$ збігається числовий ряд із елементами $\|u_n(\lambda)\|$, ряд (4.3.10) називають абсолютно збіжним у точці $\lambda \in \Lambda$. Зазначимо, що якщо $\mathcal{U}$ – банаховий простір, абсолютно збіжний ряд збігається до деякого елементу $u(\lambda) \in \mathcal{U}$.

Множину всіх точок $\lambda \in \Lambda$, для яких ряд (4.3.10) збігається, називають областю збіжності цього ряду, а множину всіх λ , для яких він збігається абсолютно – областю абсолютної збіжності. Говорять, що ряд (4.3.10) збігається до функції $u_n(\lambda)$ рівномірно на множині $\Lambda \subset \mathcal{R}$, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться номер N , що залежить тільки від ε , такий, що для всіх $\lambda \in \Lambda$ і $k > N$ справджується нерівність $\|S_k - u(\lambda)\| < \varepsilon$.

Для рядів вигляду (4.3.10) у банаховому просторі $\mathcal{U}$ справедлива теорема, що аналогічна ознаці Веєрштрасса рівномірної збіжності функціонального ряду: якщо для усіх

$\lambda \in \Lambda$ справедливі нерівності $\|u_n(\lambda)\| \leq \alpha_n$, $n \in \mathcal{N}$, і $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n < \infty$, ряд (4.3.10)

рівномірно та абсолютно збігається на множині Λ . У подальшому цю теорему також будемо називати ознакою Веєрштрасса рівномірної збіжності ряду. Ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k(\lambda - \lambda_0)^k, \quad u_k \in \mathcal{U}, \quad \lambda, \lambda_0 \in \mathcal{R}, \quad (4.3.11)$$

елементів нормованого простору $\mathcal{U}$ назвемо степеневим рядом із коефіцієнтами із нормованого простору $\mathcal{U}$.

Визначення 1. Функцію $u(\lambda) \in \mathcal{U}$ називають *аналітичною у точці* $\lambda_0 \in \mathcal{R}$, якщо її можна подати у деякому околі цієї точки збіжним (за нормою $\|\cdot\|$) рядом вигляду (4.3.11), тобто

$$u(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(\lambda - \lambda_0)^n. \quad (4.3.12)$$

Оскільки в (4.3.12) можна запровадити нову змінну $\lambda - \lambda_0 \mu$, у подальшому без обмеження узагальнення приймаємо $\lambda_0 = 0$ і замість (4.3.12) будемо розглядати ряд

$$u(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \lambda^n. \quad (4.3.13)$$

Як й у випадку дійсних рядів, тут справджується теорема Абеля, яку можна сформулювати таким чином: якщо степеневий ряд (4.3.13) із коефіцієнтами із банахова простору $\mathcal{U}$ збігається у деякій точці $\lambda_0 \neq 0$, він збігається *абсолютно* у кожній точці інтервалу $(-|\lambda_0|, |\lambda_0|)$ і збігається *рівномірно* на будь-якому відрізку $[-r, r]$, де $r < |\lambda_0|$; якщо ж цей ряд розбігається у деякій точці λ_1 , він розбігається й у будь-якій точці λ , для якої $|\lambda| > |\lambda_1|$. Звідси витікає, що для всякого степеневого ряду (4.3.13) із коефіцієнтами із банахова простору існує таке число $R \geq 0$, що:

- 1) при $|\lambda| < R$ цей ряд збігається, причому абсолютно;
- 2) при $|\lambda| \leq r < R$ він збігається абсолютно і рівномірно;
- 3) при $|\lambda| > R$ цей ряд розбігається.

Число R при цьому називають радіусом збіжності цього ряду, а проміжок $(-R, R)$ – інтервалом збіжності. Із теореми Абеля витікає, що радіус збіжності можна визначити співвідношенням

$$R = \sup_{\lambda \in \Omega} |\lambda| \geq 0.$$

За $R = 0$ ряд (4.3.13) збігається в єдиній точці $\lambda = 0$, а при $R = \infty$ цей ряд збігається за будь-яких значень λ . Оцінку знизу для радіуса збіжності дає лема 1.

Для радіусу збіжності степеневого ряду (4.3.13) із коефіцієнтами із банахова простору $\mathcal{U}$ справедлива оцінка $R \geq 1/k$, якщо існують такі сталі $M > 0$ і $k > 0$, що в (4.3.13), починаючи із деякого номера $n \in \mathbb{N}$, $\|u_n\| \leq Mk^n$.

Степеневі ряди вигляду (4.3.13) із коефіцієнтами із банахова простору $\mathcal{H}$, як і ряди із дійсними членами, можна нескінченно багато разів диференціювати почленно в інтервалі збіжності. Справедлива така теорема.

Теорема 4.4. Сума степеневого ряду (4.3.13) із коефіцієнтами із банахова простору $\mathcal{H}$, із радіусом збіжності R , є нескінченно диференційовна функція у будь-якій точці інтервалу $(-R, R)$, причому для будь-якого $k \in \mathbb{N}$ маємо

$$u(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) \cdots (n-k+1) u_n \lambda^{n-k}, \quad \lambda \in (-R, R). \quad (4.3.14)$$

де $u^{(n)}(\lambda)$ – похідна k -го порядку функції $u(\lambda)$.

Нехай функція $u(\lambda)$ зі значеннями у банаховому просторі $\mathcal{U}$ нескінченно диференційовна функція у точці $\lambda = 0$. Тоді степеневий ряд

$$u(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^{(n)}(0)}{n!} \lambda^n. \quad (4.3.15)$$

де $u^{(n)}(0)$ – похідна n -го порядку функції $u(\lambda)$ у точці $\lambda = 0$, причому $u^{(0)}(0) = u(0)$, називають рядом Тейлора функції $u(\lambda)$.

Теорема 4.5. Степеневий ряд (4.3.8) із коефіцієнтами із банахова простору $\mathcal{U}$, що збігається в інтервалі $(-R, R)$, є ряд Тейлора своєї суми $u(\lambda)$.

Наступна теорема, що відіграє важливу роль стосовно до *методу малого параметра*, є очевидний наслідок теореми 6.

Теорема 4.6. Якщо у нормованому просторі $\mathcal{U}$ два степеневих ряди

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n \lambda^n = \sum_{n=0}^{\infty} v_n \lambda^n, \quad u_n, v_n \in \mathcal{U}, \quad (4.3.16)$$

є рівні при $|\lambda| < R$ для деякого числа $R > 0$, рівні й їхні коефіцієнти при однакових степенях λ , тобто $u_k = v_k$ для будь-якого k .

Нехай $L(B, W)$ – банаховий простір лінійних обмежених операторів, що діють із банахова простору $\mathcal{B}$ у банахів простір $\mathcal{W}$. Відображення $B: \Lambda \subset \mathbb{R} \rightarrow L(B, W)$ називатимемо *оператор-функцією*. Відмітимо деякі властивості оператор-функцій, що пов'язані із поняттям аналітичності.

1. Якщо оператор-функції $B_1(\lambda)$, $B_2(\lambda)$, $\lambda \in \Lambda$, зі значеннями в $L(B, W)$ є аналітичні у точці $\lambda_0 \in \Lambda$, оператор-функція $B_1(\lambda) + B_2(\lambda)$ також є аналітична у цій точці.

2. Якщо оператор-функції $B_1(\lambda)$, $B_2(\lambda)$, $\lambda \in \Lambda$, зі значеннями в $L(B, W)$ відповідно аналітичні у точці $\lambda_0 \in \Lambda$, оператор-функція $B_1(\lambda) \circ B_2(\lambda)$ також аналітична у цій точці. $\circ$ – операція композиції операторів.

3. Якщо оператор-функція $B(\lambda)$, $\lambda \in \Lambda$, зі значеннями в $L(B, W)$ аналітична у точці $\lambda_0 \in \Lambda$ и $\|B(\lambda)\| < 1$ у деякому околі цієї точки, оператор-функція $(I - B(\lambda))^{-1}$, де I – тотожний оператор в $\mathcal{B}$, аналітична у точці λ_0 .

4. Якщо оператор-функція $B: \Lambda \subset \mathbb{R} \rightarrow L(B, W)$ і функція $u: \Lambda \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{B}$ аналітичні у точці $\lambda_0 \in \Lambda$, функція $B(\lambda)u(\lambda)$ аналітична у цій точці. Більше того, якщо у деякому околі точки λ_0 справедливі розкладання

$$B(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} B_k \lambda^k, \quad u(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k \lambda^k,$$

у цьому околі справедливе розкладання

$$B(\lambda)u(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} (B_n u_0 + B_{n-1} u_1 + \dots + B_0 u_n) \lambda^n. \quad (4.3.17)$$

Нехай задано операторне рівняння

$$B(\lambda)u = f(\lambda), \quad u \in \mathcal{B}, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad (4.3.18)$$

причому $B(\lambda) \in L(B, W)$, $f(\lambda) \in \mathcal{W}$ – банаховий простір. Якщо $B(\lambda)$ и $u(\lambda)$ аналітичні у точці $\lambda = 0$, а оператор $B_0 = B(0)$ має обмежений зворотний оператор, у

деякому околі точки $\lambda = 0$ в оператора $B(\lambda)$ існує обмежений зворотний $B^{-1}(\lambda)$, що є аналітична оператор-функція. При цьому рівняння (4.3.18) має єдиний розв'язок $u(\lambda) = B^{-1}(\lambda)f(\lambda)$, який також є аналітична функція у точці $\lambda = 0$.

Покажемо, як можна знайти коефіцієнти u_k в (4.3.13), якщо відомі представлення оператор-функції $B(\lambda)$ і функції $f(\lambda)$ у вигляді степеневих рядів із коефіцієнтами із банахова простору. Нехай при $|\lambda| < \rho$

$$B(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} B_k \lambda^k, \quad f(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \lambda^k. \quad (4.3.19)$$

Тоді $R = \min\{\rho, r\}$. Якщо підставити (4.3.9) у (4.3.8) і врахувати (4.3.5), прийдемо при $|\lambda| < R$ до тотожності

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} B_k \lambda^k \right) \sum_{k=0}^{\infty} u_k \lambda^k = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \lambda^k,$$

або відповідно до (4.3.17)

$$\sum_{n=0}^{\infty} (B_n u_0 + B_{n-1} u_1 + \dots + B_0 u_n) \lambda^n = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \lambda^k.$$

Прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях λ . Отримаємо систему операторних рівнянь

$$B_0 u_0 = f_0, \quad \sum_{k=0}^n B_k u_{n-k} = f_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Розв'яжемо ці рівняння послідовно. Маємо

$$\begin{aligned} u_0 &= B_0^{-1} f_0^{-1}, \\ u_1 &= B_0^{-1} \circ (f_1^{-1} - B_1 u_0), \\ u_2 &= B_0^{-1} \circ (f_2^{-1} - B_1 u_1 - B_2 u_0), \\ &\dots \\ u_n &= B_0^{-1} \circ (f_n^{-1} - B_1 u_{n-1} - B_2 u_{n-2} - \dots - B_{n-1} u_1 - B_n u_0), \end{aligned}$$

Після обчислення $n+1$ перших елементів u_k , $k = 0, n$, знайдемо n -у частинну суму ряду, яку можна прийняти за наближений розв'язок

$$\tilde{u}(\lambda) = u_0 + \sum_{k=1}^n u_k \lambda^k, \quad |\lambda| < R = \min\{\rho, r\}$$

рівняння (4.3.8).

Нехай $B(\lambda)$ та $f(\lambda)$ в (4.3.8) такі, що для коефіцієнтів B_k та f_k у розкладаннях (4.3.15), починаючи із деякого номера $k \geq 1$, справедливі оцінки $\|f_k\|_{\mathcal{W}} \leq M_1 \alpha^k$ і $\|B_k \circ B_0^{-1}\| \leq M \beta^{k-1}$. Тоді (4.3.14) має єдиний розв'язок у вигляді степеневого ряду із радіусом збіжності

$$R \geq \min \left\{ \frac{1}{\alpha}, \frac{1}{M + \beta} \right\}.$$

Отже, за $r = \frac{1}{M + \beta}$ (4.3.8) має єдиний розв'язок, який при $|\lambda| < r$ можна подати у вигляді степеневого ряду із радіусом збіжності

$$R \geq \min \left\{ \frac{1}{\alpha}, \frac{1}{M + \beta} \right\}.$$

Приклад 4.3.

У якості ілюстрації застосування методу малого параметра до розв'язання крайової задачі розглянемо відшукування наближеного усталеного розподілу температури $T(r, z)$ у тонкій оптичній лінзі (рис. 4.2). Неоднорідне температурне поле, що виникає під дією на лінзу різних енергетичних факторів, викликає термопружні напруження, які впливають на якість зображення в оптичній системі у зв'язку із появою термооптичних аберацій.

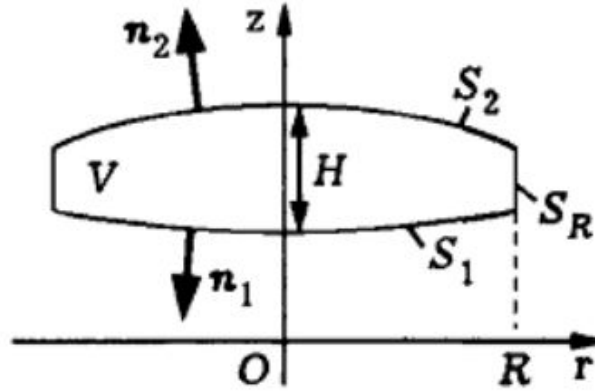


Рис. 4.2. Схема тонкої оптичної лінзи

Нехай об'єм V осесиметричної лінзи завтовшки H обмежено ділянкою S_R кругової циліндричної поверхні радіусу R і двома гладкими поверхнями, що переломлюють, S_1 та S_2 , утвореними обертанням навколо осі лінзи кривих, заданих залежностями $z = f_1(r)$, $z = f_2(r)$ відповідно (рис. 4.2). За сталих значень коефіцієнту λ теплопровідності лінзи і об'ємної потужності $I_V^{(q)}$ енерговиділення усталений осесиметричний розподіл температури у лінзі, що описується функцією $T(r, z)$, залежить від двох координат: радіальної r та осьової z . Ця функція задовольняє рівняння Пуассона

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = - \frac{I_V^{(q)}}{\lambda}. \quad (4.3.20)$$

Температуру на поверхні S_R приймемо рівною T_R , тобто межова умова на цій поверхні має вигляд

$$T(R, z) = T_R. \quad (4.3.21)$$

На поверхнях, що переломлюють, здійснюється теплообмін із навколишнім середовищем зі сталою температурою T_* . Його інтенсивність на поверхнях S_1 та S_2 характеризують коефіцієнти теплообміну α_1 та α_2 , що входять у межові умови третього роду

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial n_1} \Big|_{S_1} = \alpha_1 (T_* - T) \Big|_{S_1}, \quad \lambda \frac{\partial T}{\partial n_2} \Big|_{S_2} = \alpha_2 (T_* - T) \Big|_{S_2}. \quad (4.3.22)$$

Похідні функції $T(r, z)$ за напрямками n_1 і n_2 , які визначаються одиничними векторами n_1 та n_2 зовнішніх нормалей у точках поверхонь S_1 і S_2 відповідно, можна виразити через похідні за координатами r і z із використанням напрямних косинусів цих нормалей відносно осей Or і Oz :

$$\begin{aligned} \cos(n_1, r) &= \frac{f_1'(r)}{\sqrt{1 + f_1'^2(r)}}, & \cos(n_1, z) &= \frac{1}{\sqrt{1 + f_1'^2(r)}}, \\ \cos(n_2, r) &= \frac{f_2'(r)}{\sqrt{1 + f_2'^2(r)}}, & \cos(n_2, z) &= \frac{1}{\sqrt{1 + f_2'^2(r)}}. \end{aligned}$$

Запровадимо безрозмірні координати $\rho = r/R$ і $\zeta = z/H$ та позначимо $\varepsilon = H/R$, $Q = I_V^{(q)} \cdot R^2/\lambda$. Тоді крайова задача (4.3.20)–(4.3.22) буде еквівалентна такій крайовій задачі для функції $T(\rho, \zeta)$. Рівняння (4.3.20) набуде вигляд:

$$\frac{\varepsilon^2}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial T}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial^2 T}{\partial \zeta^2} = -\varepsilon^2 Q, \quad (4.3.23)$$

умова (4.3.21) $-T(1, \zeta) = T_R$, а замість (4.3.18) отримаємо

$$\left(\varepsilon^2 \tilde{f}_1'^2(\rho) \frac{\partial T}{\partial \rho} - \frac{\partial T}{\partial \zeta} \right) \Big|_{\zeta \tilde{f}_1'^2(\rho)} = Bi_1 (T_* - T) \Big|_{\zeta \tilde{f}_1'^2(\rho)} \sqrt{1 + \varepsilon^2 \tilde{f}_1'^2(\rho)} \quad (4.3.24)$$

і

$$\left(\varepsilon^2 \tilde{f}_2'^2(\rho) \frac{\partial T}{\partial \rho} - \frac{\partial T}{\partial \zeta} \right) \Big|_{\zeta \tilde{f}_2'^2(\rho)} = Bi_2 (T_* - T) \Big|_{\zeta \tilde{f}_2'^2(\rho)} \sqrt{1 + \varepsilon^2 \tilde{f}_2'^2(\rho)} \quad (4.3.25)$$

де $\tilde{f}_1(\rho) = f_1(R\rho)/H$, $\tilde{f}_2(\rho) = f_2(R\rho)/H$, $Bi_1 = \alpha_1 H/\lambda$, $Bi_2 = \alpha_2 H/\lambda$.

Зазначимо, що безрозмірний параметр $Bi = \alpha H/\lambda$ є відношення термічного опору H/λ пластини завтовшки H , що вироблена із матеріалу лінзи, до термічного опору $1/\alpha$ теплообміну із навколишнім середовищем. У даному випадку (4.3.19) відповідає операторному рівнянню $B(\varepsilon)T = f(\varepsilon)$, де $f(\varepsilon) = -\varepsilon^2 Q$ і $B: C^2(V) \rightarrow C(V)$, причому $B = (B_0 + \varepsilon^2 B_2) \in \mathcal{L}(C^2(V), C(V))$, де

$$\tilde{T}_0(\rho, \zeta) \quad \tilde{T}_0(\rho, \zeta) \quad B_0 = \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2}, \quad B_2 = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right).$$

Для тонкої лінзи параметр $\varepsilon = (H/R)^2 \ll 1$, тобто є малий. Тому в (4.3.20), (4.3.21)

прийmemo

$$\sqrt{1 + \varepsilon^2 \tilde{f}_1'^2(\rho)} \approx 1 + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \tilde{f}_1'^2(\rho) - \frac{1}{8} \varepsilon^4 \tilde{f}_1'^4(\rho), \quad (4.3.26)$$

$$\sqrt{1 + \varepsilon^2 \tilde{f}_2'^2(\rho)} \approx 1 + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \tilde{f}_2'^2(\rho) - \frac{1}{8} \varepsilon^4 \tilde{f}_2'^4(\rho), \quad (4.3.27)$$

Розв'яжемо спочатку задачу (4.3.19)–(4.3.21) без урахування межевої умови на поверхні S_R . Розподіл температури із урахуванням вигляду функцій $B(\varepsilon)$ та $f(\varepsilon)$ шукатимемо у вигляді

$$\tilde{T}(\rho, \zeta) = \varepsilon^2 \tilde{T}_0(\rho, \zeta) + \varepsilon^4 \tilde{T}_1(\rho, \zeta) + \dots, \quad (4.3.28)$$

при цьому вважатимемо, що числа Біо мають порядок одиниці. Замістимо (4.3.24) у (4.3.23) і врахуємо наближені рівності (4.3.22) та (4.3.23) у рівняннях (4.3.20), (4.3.21). Після прирівнювання нулю виразів біля кожного степеню параметру ε отримаємо послідовно сукупність крайових задач відносно функцій $\tilde{T}_0(\rho, \zeta)$, $\tilde{T}_1(\rho, \zeta)$ тощо. Так, для відшукування першої із цих функцій маємо рівняння

$$\frac{\partial^2 \tilde{T}_0}{\partial \zeta^2} = -Q \quad (4.3.29)$$

із межевими умовами

$$-\frac{\partial \tilde{T}_0}{\partial \zeta} = Bi_1(T_* - \tilde{T}_0), \quad \frac{\partial \tilde{T}_0}{\partial \zeta} = Bi_2(T_* - \tilde{T}_0) \quad (4.3.30)$$

при $\zeta = \tilde{f}_1(\rho)$ та $\zeta = \tilde{f}_2(\rho)$ відповідно. Функція $\tilde{T}_1(\rho, \zeta)$ має задовольняти рівняння

$$\frac{\partial^2 \tilde{T}_1}{\partial \zeta^2} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \tilde{T}_0}{\partial \rho} \right)$$

та межеві умови

$$\begin{aligned} \left[-\frac{\partial \tilde{T}_1}{\partial \zeta} + Bi_1 \tilde{T}_1 \right] \Big|_{\zeta=\tilde{f}_1(\rho)} &= -f_1'^2(\rho) \frac{\partial \tilde{T}_0}{\partial \rho} - \frac{Bi_1}{2} f_1'^2(\rho) \tilde{T}_0, \\ \left[-\frac{\partial \tilde{T}_1}{\partial \zeta} + Bi_1 \tilde{T}_1 \right] \Big|_{\zeta=\tilde{f}_2(\rho)} &= -f_2'^2(\rho) \frac{\partial \tilde{T}_0}{\partial \rho} - \frac{Bi_1}{2} f_2'^2(\rho) \tilde{T}_0, \end{aligned}$$

Зинтегруємо двічі рівняння (4.3.29). Отримаємо

$$\tilde{T}_0(\rho, \zeta) = \frac{Q}{2} \zeta^2 + C_1(\rho) \zeta + C_0(\rho). \quad (4.3.31)$$

Підстановка цього подання у межеві умови (4.3.26) призводить до системи алгебраїчних рівнянь відносно функцій $C_1(\rho)$ і $C_2(\rho)$. Розв'язання цієї системи дає

$$C_1(\rho) = Q \frac{\tilde{f}_1 Bi_2 + Bi_1 \tilde{f} + 1/2 Bi_1 Bi_2 (\tilde{f}_2^2 - \tilde{f}_1^2)}{Bi_1 + Bi_1 + Bi_1 Bi_2 (\tilde{f}_2 - \tilde{f}_1)}$$

$$C_0(\rho) = Q\tilde{f}_2\tilde{f}_1 \frac{1/2Bi_1Bi_2(\tilde{f}_2 - \tilde{f}_1) - Bi_1 - Bi_2}{Bi_1 + Bi_2 + Bi_1Bi_2(\tilde{f}_2 - \tilde{f}_1)} + \\ + \frac{\tilde{f}_2 - \tilde{f}_1 + 1/2(Bi_2(\tilde{f}_1^2 + Bi_2\tilde{f}_2^2))}{Bi_1 + Bi_2 + Bi_1Bi_2(\tilde{f}_2 - \tilde{f}_1)}.$$

У цих формулах у функцій $\tilde{f}_1$ та $\tilde{f}_2$ опущено аргумент ρ . Далі можна перейти до пошуку функції $\tilde{T}_1(\rho, \zeta)$ тощо.

Підкреслимо, що функції $\tilde{T}_0(\rho, \zeta)$, $\tilde{T}_1(\rho, \zeta)$ знайдено без урахування межевої умови на поверхні S_R . Тому й розв'язок $\tilde{T}(\rho, \zeta)$ у вигляді (4.3.28) не обов'язково задовольняє цю умову.

Знайдемо тепер розв'язок $\bar{T}(\rho, \zeta)$ крайової задачі для однорідного рівняння, що відповідає (4.3.23), із однорідними межевими умовами, які відповідають (4.3.24), (4.3.25), але вимагатимемо, щоб виконувалася умова $\tilde{T}_1(1, \zeta) + \bar{T}(1, \zeta) = T_R$ на поверхні S_R . При вирішенні цієї задачі використаємо безрозмірні координати $\xi = (1 - \rho)/\varepsilon$ та ζ . Тоді розв'язок $u(\xi, \zeta) = \bar{T}(1 - \varepsilon\xi, \zeta)$ на поверхні S_R має задовольняти рівність

$$u(0, \zeta) + T(1, \zeta) = T_R. \quad (4.3.32)$$

Розв'язок $u(\xi, \zeta)$ знову шукатимемо у вигляді

$$\tilde{u}(\xi, \zeta) = \varepsilon^2 \tilde{u}_0(\xi, \zeta) + \varepsilon^4 \tilde{u}_1(\xi, \zeta) + \dots \quad (4.3.33)$$

причому $u_n(\xi, \zeta) \rightarrow 0$ при $\xi \rightarrow \infty$ для $n = 0, 1, 2, \dots$, і відповідно до (4.3.28) та (4.3.32)

$u_0(0, \zeta) = T_R - T_0(1, \zeta)$, $u_1(0, \zeta) = -T_1(1, \zeta)$ тощо. Крім того, функція $u(\xi, \zeta)$ має задовольняти однорідне рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon\xi} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} = 0, \quad (4.3.34)$$

яке відповідає неоднорідному рівнянню (4.3.23) після заміни $\xi = (1 - \rho)/\varepsilon$ і однорідним межевим умовам

$$\bar{f}_1(\xi) \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \zeta} + Bi_1 \sqrt{1 + \varepsilon^2 \bar{f}_1^2(\xi)} = 0, \quad (4.3.35)$$

$$\bar{f}_2(\xi) \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \zeta} + Bi_2 \sqrt{1 + \varepsilon^2 \bar{f}_2^2(\xi)} = 0, \quad (4.3.36)$$

при $\varsigma = \bar{f}_1(\varsigma) = \tilde{f}_1(1 - \varepsilon\varsigma)$ і $\varsigma = \bar{f}_2(\varsigma) = \tilde{f}_2(1 - \varepsilon\varsigma)$ відповідно, які витікають із умов (4.3.24), (4.3.25) після вказаної заміни.

Якщо замістити (4.3.33) у (4.3.34), прирівнюючи до нуля вирази біля кожного степеню параметра ε , для відшукування функції $u_0(\xi, \zeta)$ отримаємо рівняння Лапласа

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial \zeta^2} = 0. \quad (4.3.37)$$

Запровадження безрозмірної координати ξ призвело до розтягування області, що прилегла до поверхні S_R , у напрямку змінювання цієї координати. Потому цю область можна наближено подати півнескінченною смугою, що задана нерівностями

$$0 \leq \xi < \infty, \quad \bar{f}_1(0) \leq \zeta \leq \bar{f}_2(0),$$

і (4.3.37) розглядати у такій смузі. Підстановка розкладання (4.3.33) у рівняння (4.3.35) та (4.3.36), та прирівнювання до нуля виразу при ε дозволяє покласти $\bar{f}_1(\xi) = \bar{f}_2(\xi) = 0$ та отримати для функції $u_0(\xi, \zeta)$ однорідні межові умови

$$\left[-\frac{\partial u}{\partial \zeta} + Bi_1 u_0 \right]_{\zeta=\bar{f}_1(0)} = 0, \quad \left[\frac{\partial u}{\partial \zeta} + Bi_2 u_0 \right]_{\zeta=\bar{f}_2(0)} = 0 \quad (4.3.38)$$

Крайова задача для (4.3.37) із межовими умовами (4.3.38), $u_0(0, \zeta) = T_R - T_0(1, \zeta)$ та $u_0(\xi, \zeta) \rightarrow 0$ при $\xi \rightarrow \infty$ може бути розв'язана за методом Фур'є (розділення змінних) або за допомогою інтегрального перетворення на відрізьку $[\bar{f}_1(0), \bar{f}_2(0)]$, або у півобмеженому проміжку $[0, \infty)$. Формулювання крайових задач для відшукування функцій $u_n(\xi, \zeta)$, $n \in \mathbb{N}$, що входять у праву частину (4.3.33), є громіздкішими, але розв'язання цих задач можна отримати тими самими методами.

Як наслідок, згідно принципу суперпозиції розв'язків, функція

$$T(\rho, \zeta) = \tilde{T}(\rho, \zeta) + \bar{T}(\rho, \zeta) = \tilde{T}(\rho, \zeta) + u(1 - \rho)/\varepsilon, \zeta)$$

буде розв'язком вихідної крайової задачі (4.3.20)–(4.3.22).

Розкладання у ряд по параметру нелінійності

Осцилятор

Почнемо із осцилятора із квадратичною нелінійністю

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0 x + \alpha x^2 = 0. \quad (4.3.39)$$

Нехай відомий деякий характерний масштаб коливань A . Запровадимо безрозмірний час та координату:

$$t' = \omega_0 t, \quad x' = x/A. \quad (4.3.40)$$

Рівняння (4.3.39) (штрихи опускаємо) набуде вигляду

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + x + \varepsilon x^2 = 0, \quad (4.3.41)$$

де $\varepsilon = \alpha A / \omega_0^2$.

Розглянемо випадок слабкої нелінійності, коли $\varepsilon \ll 1$, тобто рівняння (4.3.41)

містить малий параметр. Наявність такого параметра є умовою застосування асимптотичного методу.

Побудуємо наближений розв'язок цього рівняння. Найпростіший спосіб полягає у пошуку розв'язку у вигляді ряду за степенями малого параметра ε :

$$x(t) = x_1(t) + \varepsilon x_2(t) + \varepsilon^2 x_3(t) + \dots, \quad (4.3.42)$$

вважаючи $x_{1,2,\dots}$ величинами порядку одиниці. Такий підхід називають методом розкладання за малим параметром, або прямим розкладанням. Замістимо цей ряд у (4.3.41). Отримаємо

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} + \varepsilon \frac{d^2 x_2}{dt^2} + \varepsilon^2 \frac{d^2 x_3}{dt^2} + \dots + x_1 \varepsilon x_2 + \varepsilon^2 x_3 + \dots + \varepsilon x_1^2 + 2\varepsilon^2 x_1 x_2 + \dots = 0. \quad (4.3.43)$$

Прирівняємо до нуля члени при однакових степенях ε , приходимо до такої системи рівнянь:

$$\varepsilon^0 : \ddot{x}_1(t) + x_1 = 0, \quad (4.3.44)$$

$$\varepsilon^1 : \ddot{x}_2(t) + x_2 + x_1^2 = 0, \quad (4.3.45)$$

$$\varepsilon^2 : \ddot{x}_3(t) + x_3 + 2x_1 x_2 = 0, \dots \quad (4.3.46)$$

Рівняння (4.3.44) є рівняння гармонічного осцилятора, розв'язок якого має вигляд

$$x_1 = a \cos(t + \varphi), \quad (4.3.47)$$

де амплітуда a і початкова фаза φ сталі, що визначаються із початкових умов. Тепер для отримання виразу x_2 замістимо розв'язок (4.3.47) у рівняння (4.3.45):

$$\ddot{x}_2(t) + x_2 = -x_1^2 = -\frac{a^2}{2}(1 + \cos 2(t + \varphi)). \quad (4.3.48)$$

Це рівняння формально збігається із рівнянням лінійного консервативного осцилятора під зовнішнім впливом. Його розв'язок слід шукати у вигляді

$$x_2 = x_2^{(o)} + x_2^{(n)},$$

де

$$x_2^{(o)} = a_1 \cos(t + \varphi_1),$$

– розв'язок однорідного рівняння, що описує власні коливання осцилятора. Його амплітуда a_1 і початкова фаза φ_1 також визначаються із початкових умов. Друга складова $x_2^{(n)}$ є частинний розв'язок неоднорідного рівняння. Він являє собою вимушені коливання осцилятора, тобто відгук на зовнішнє збурення. У спектрі вимушених коливань містяться ті частоти, які наявні у спектрі сили, що вимушує коливання. У даному випадку це нульова (стала складова) та друга гармоніки. Отже,

$$x_2^{(n)} = -\frac{a^2}{2} \left(1 - \frac{1}{3} \cos 2(t + \varphi) \right),$$

$$x_2 = a_1 \cos(t + \varphi_1) - \frac{a^2}{2} \left(1 - \frac{1}{3} \cos 2(t + \varphi) \right), \quad (4.3.52)$$

Зазначимо, що отриманий розв'язок містить чотири незалежних сталих $(a, \varphi, a_1, \varphi_1)$,

для визначення яких наявні тільки дві початкові умови. Тому дві з цих сталих можна вибирати довільним чином. Нехай $a_1 = 0$. Тоді

$$x \approx a \cos(t + \varphi) + \varepsilon \left[-\frac{a^2}{2} \left(1 - \frac{1}{3} \cos 2(t + \varphi) \right) \right] + \dots, \quad (4.3.50)$$

Бачимо, що у спектрі коливань з'являються вищі гармоніки (нульова і друга), амплітуди яких мають порядок εa^2 , тобто набагато менші за амплітуду основної складової.

Залишилося обчислити сталі a і φ . Нехай початкові умови мають вигляд:

$$x(0) = x_0 \quad \frac{dx}{dt} \Big|_{t=0} = y_0.$$

Із використанням виразу (4.3.50) маємо

$$a \cos(t + \varphi) + \varepsilon \left[-\frac{a^2}{2} \left(1 - \frac{1}{3} \cos 2(t + \varphi) \right) \right] = x_0 \quad (4.3.51)$$

$$a \sin \varphi + \frac{\varepsilon a^2}{3} \sin 2\varphi = y_0.$$

Маємо систему трансцендентних рівнянь відносно φ . Але із урахуванням наявності малого параметра ε^0 можна представити

$$\begin{aligned} a &= a_0 + \varepsilon a_1 + \dots, \\ \varphi &= \varphi_0 + \varepsilon \varphi_1 + \dots \end{aligned} \quad (4.3.52)$$

Замістимо (4.3.52) у систему (4.3.51) та відокремимо члени однакових порядків малості. При ε^0 матимемо

$$a_0 \cos \varphi_0 = x_0, \quad a_0 \sin \varphi_0 = -y_0.$$

Звідси

$$a_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}, \quad \varphi_0 = \arg(x - iy) = -2 \frac{y_0}{x_0 + \sqrt{x_0^2 + y_0^2}}.$$

Члени порядку ε^1 дають

$$\begin{aligned} a_1 \cos \varphi_0 - a_0 \varphi_1 \sin \varphi_0 - \frac{a_0^2}{2} + \frac{a_0^2}{6} \cos 2\varphi_0 &= 0, \\ a_1 \sin \varphi_0 + a_0 \varphi_1 \cos \varphi_0 + \frac{a_0^2}{3} \sin 2\varphi_0 &= 0. \end{aligned}$$

Розв'язок цієї системи рівнянь має вигляд:

$$a_1 = \frac{a_0^2}{12} (3 \cos \varphi_0 + \cos 3\varphi_0); \quad \varphi_1 = \frac{-\sin \varphi_0}{a_0 \cos \varphi_0} \left(a_1 + \frac{2a_0^2}{3} \cos \varphi_0 \right).$$

Осцилятор Дуффінга

Пряме розкладання за степенями малого параметра не завжди призводить до успіху. Розглянемо осцилятор із кубічною нелінійністю – осцилятор Дуффінга)

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x + \beta x^3 = 0.$$

Знову скористаємося заміною (4.3.44). Тоді

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x + \varepsilon x^3 = 0,$$

де $\varepsilon = \beta A^2 / \omega_0^2$. Знову розглянемо випадок слабкої нелінійності, тобто $\varepsilon \ll 1$. Шукаємо розв'язання у вигляді (4.3.42). Замість рівнянь (4.3.44)–(4.3.46) матимемо

$$\varepsilon^0 : \ddot{x}_1(t) + x_1 = 0,$$

$$\varepsilon^1 : \ddot{x}_2(t) + x_2 + x_1^3 = 0.$$

Після заміщення виразу для (4.3.43) рівняння (4.3.41) приводиться до вигляду

$$\frac{d^2x_2}{dt^2} + x_2 = -x_1^3 = -a^3 \cos^3(t + \varphi) = -\frac{a^3}{4} [3\cos(t + \varphi) + \cos 3(t + \varphi)] \quad (4.3.54)$$

Треба відшукати розв'язок цього рівняння, що відповідає вимушеним коливанням у членах вищого порядку. Оскільки нелінійність кубічна, у спектрі містяться перша і третя гармоніки. Розв'язок шукаємо у вигляді суперпозиції відгуків на ці впливи.

$$x_2 = x_2^{(1)} + x_2^{(3)}, \quad (4.3.55)$$

де $x_2^{(1)}$, $x_2^{(3)}$ задовольняють рівняння

$$\frac{d(x^2)_2^{(1)}}{dt^2} + x_2^{(1)} = -\frac{3a^3}{4} \cos(t + \varphi), \quad (4.3.56)$$

$$\frac{d(x^2)_2^{(3)}}{dt^2} + x_2^{(3)} = -\frac{a^3}{4} \cos 3(t + \varphi). \quad (4.3.57)$$

Розв'язок цього рівняння має вигляд гармонічних коливань на частоті сили, що вимушує:

$$x_2^{(3)} = -\frac{a^3}{32} \cos 3(t + \varphi). \quad (4.3.58)$$

Що стосується рівняння (4.3.56), то у ньому зовнішній вплив має частоту, що дорівнює частоті власних коливань осцилятора. Виникає резонанс, що виражається у необмеженому зростанні амплітуди коливань за лінійним законом. Відповідний розв'язок має вигляд

$$x_2^{(1)} = -\frac{3a^3 t}{8} \sin(t + \varphi). \quad (4.3.59)$$

Це – так званий секулярний, або віковий член. Розв'язок із точністю до членів другого порядку набуває вигляду

$$x \approx a \cos(t + \varphi) + \varepsilon \left[-\frac{3a^3 t}{8} \sin(t + \varphi) + \frac{a^3}{32} \cos 3(t + \varphi) \right]. \quad (4.3.60)$$

Бачимо, що яким би малим не був параметр ε , із плином часу другий член у (4.3.60) необмежено зростає і стає більшим за перший. У цьому випадку говорять, що розкладання не є рівномірно припадним за t . Річ у тому, що коливання осцилятора Дуффінга є неізохронні, тобто їх період залежить від амплітуди. Розкладання (4.3.42) принципово не враховує неізохронність: у спектрі коливань можуть з'являтися власна частота лінійних коливань та її гармоніки.

Для осцилятора із квадратичною нелінійністю (4.3.41) ми прийшли б до того самого результату, якщо б додали ще один порядок розкладання. Із рівняння (4.3.46) за спроби знайти розв'язок для x_3 у правій частині з'явиться добуток $x_1 x_2$.

Запитання для самоперевірки

1. У чому різниця між інтегральним рівнянням першого та другого роду?
2. У чому різниця між інтегральним рівнянням Фредгольма та інтегральним рівнянням Вольтерра?
3. Який вираз називають ядром інтегрального рівняння?
4. У чому полягає сутність методу малого параметра?
5. Яка функція має назву аналітичної?
6. У чому різниця між рівняннями Лапласа та Пуассона?
7. Як визначається напрямок нормалі до поверхні?
8. Наведіть рівняння нелінійного осцилятора.
9. У чому полягає різниця між рівнянням осцилятора та рівнянням Дуффінга?

4.4 Метод ортогональних проєкцій

Нехай шукана функція u задовольняє операторне рівняння

$$Au = f, \quad (4.4.1)$$

де A – лінійний неперервний оператор, області визначення $D(A)$ і значень $R(A)$ якого є всюди щільні підмножини гільбертова простору $\mathcal{H}$ зі скалярним добутком $(\cdot, \cdot)$. Якщо перенести заданий елемент f у ліву частину цього рівняння, отримаємо рівність

$$Au - f = 0.$$

Виберемо у $\mathcal{H}$ обліковуваний базис $\{v_k\}$. Тоді цю рівність можна замінити системою еквівалентних рівностей

$$(Au - f, v_k), \quad k \in \mathbb{N}. \quad (4.4.2)$$

Нехай послідовність $\{u_k\}$ утворює в $D(A)$ обліковуваний базис. Тоді шуканий елемент $u \in D(A)$ можна однозначно подати у вигляді

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n, \quad a_n \in \mathbb{R}, \quad u_n \in D(A). \quad (4.4.3)$$

Замістивши (4.4.3) у (4.4.2) і враховуючи властивості скалярного добутку і оператора A , отримаємо

$$\begin{aligned} (Au, v_k) &= \left(A \sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n, v_k \right) = \left(A \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N a_n u_n, v_k \right) = \left(\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N a_n A u_n, v_k \right) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N a_n (A u_n, v_k) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (A u_n, v_k) = (f, v_k), \quad k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Отже, система рівностей (4.4.2) рівносильна системі

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n (A u_n, v_k) = (f, v_k), \quad k \in \mathbb{N}, \quad (4.4.4)$$

що являє собою нескінченну систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно координат a_n елементу u та у базисі u_k . Якщо у (4.4.3) обмежитися першими N елементами u_n базису, тобто наближено прийняти

$$u \approx u_N = \sum_{n=1}^N a_n u_n, \quad u_n \in D(A), \quad (4.4.5)$$

та у (4.4.4) обмежитися першими N рівностями, в яких підсумовування виконується від 1 до N , отримаємо скінченну систему N лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР)

$$\sum_{n=1}^N a_n (A u_n, v_k) = (f, v_k), \quad k = \overline{1, N}, \quad (4.4.6)$$

відносно N перших координат a_n . Елементами матриці такої системи будуть скалярні добутки $(A u_n, v_k)$.

Розв'язки СЛАР (4.4.6) за різних N природно розглядати як наближення

невідомого розв'язку рівняння (4.4.1). Зокрема, якщо $\{v_k\}$ є ортонормований базис у $\mathcal{H}$, розв'язку СЛАР (4.4.6) відповідає розв'язок $\tilde{u}_N$ вигляду (4.4.5) рівняння

$$A_N u = \tilde{f}_N,$$

де A_N – оператор, що діє із N -вимірного підпростору $D_N(A)$, що збігається із лінійною оболонкою $\{u_n\}_N$ системи, у N -вимірний підпростір $R_N(A)$, що збігається із лінійною оболонкою системи $\{v_n\}_N$. При цьому $A_N u$ збігається із N -ю частинною сумою розкладання елементу Au по базису $\{v_k\}$, а $\tilde{f}_N \in N$ -ю частинною сумою ряду

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} f_k v_k, \text{ де } f_k = (f, v_k).$$

Але у випадку довільного базису $\{v_k\}$, навіть якщо визначник матриці СЛАР (4.4.6) не дорівнює нулю, не можна стверджувати, що послідовність $\{u_N\}$ наближених розв'язків вигляду (4.4.5) при $N \rightarrow \infty$ збігається до класичного u_0 або слабкого u_* розв'язкам рівняння (4.4.1). За деяких обмежень відповідь на питання про збіжність $\{u_N\}$ до u_0 або до u_* вдається отримати теоретичним шляхом. Але на практиці часто приходится обмежуватися лише порівнянням між собою кількох наближених розв'язків.

Схема побудови наближеного розв'язання рівняння (4.4.1), що описана, яка призводить до СЛАР (4.4.6), є основа великої групи наближених аналітичних методів, які зазвичай об'єднують під загальною назвою *метод ортогональних проєкцій*. Така назва пояснюється тим, що рівності (4.4.6) являють собою умови ортогональності елементу $Au_N - \tilde{f}$ всім базисним елементам v_k N -вимірного підпростору $R_N(A)$. При цьому функції u_n , $n = \overline{1, N}$, що використовують представлення наближеного розв'язку (4.4.5), називають **базисними**, а функції v_k в СЛАР (4.4.6) – **проєкційними**.

Метод ортогональних проєкцій є частинний випадок *проєкційного методу*, в якому умови рівності нулю проєкцій **нев'язки** $Au_N - \tilde{f}$ **операторного рівняння** на елементи v_k , $k = \overline{1, N}$ базису N -вимірного підпростору $\mathcal{H}_N \subset R(A)$ мають загальніший вигляд. Якщо $R(A) \subset L_2(\mathbb{R})$, частіше метод ортогональних проєкцій називають методом **зважених невязок**. У цьому разі обліковуваний базис в $R(A)$ утворюватиметься послідовністю $\{v_k\}$ дійсних функцій v_k , $k \in \mathbb{N}$, так що (4.4.6) можна розглядати як N умов рівності нулю визначеного у $L_2(\mathbb{R})$ скалярного добутку невязки операторного рівняння і **вагових функцій** v_k , $k = \overline{1, N}$. Іноді процедуру застосування (4.4.6) називають **методом моментів**, або методом Галеркіна – Петрова.

Особливості кожного конкретного методу у групі методів, що визначаються умовами (4.4.6), залежать від вибору лічильних базисів в $D(A)$ та $R(A)$. Такі методи розглядаються нижче.

4.4.1 Коллокації у підобластях та у точках

Розглянемо один із найпростіших способів відшукування наближеного розв'язку операторного рівняння (4.4.1). Нехай області визначення $D(A)$ і значень $R(A)$ оператора A , що входить у (4.4.1), є всюди щільні підмножини гільбертова простору $L_2(V)$ функцій, що є підсумовувані (інтегровні за Лебегом) із квадратом в області $V \subset \mathbb{R}^m$.

Розіб'ємо V на N підобластей V_k , $k = \overline{1, N}$ так, щоб виконувалася рівність

$$\bigcup_{k=1}^N V_k = V_0,$$

де $V_k \cap V_l = \emptyset$ при $k \neq l$, причому міра Лебега множини $V \setminus V_0$ дорівнює нулю. Для будь-якого $k = \overline{1, N}$ приймемо

$$v_k(x) = \begin{cases} 1, & x \in V_k; \\ 0, & x \in V \setminus V_k. \end{cases} \quad (4.4.7)$$

Із використанням схеми побудови *методу ортогональних проєкцій* наближений розв'язок рівняння $Au = f$ шукатимемо у вигляді (4.4.5)

$$u_N = \sum_{n=1}^N a_n u_n,$$

де u_n , $n = \overline{1, N}$ – перші N елементів лічильного базису у $D(A)$, а N коефіцієнтів a_n є розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь вигляду (4.4.6):

$$\sum_{n=1}^N a_n \int_{V_k} A u_n dV = \int_{V_k} f dV, \quad k = \overline{1, N}, \quad (4.4.8)$$

оскільки у $L_2(V)$ із урахуванням (4.4.7)

$$\begin{aligned} (A u_n, v_k) &= \int_V A u_n v_k dV = \int_{V_k} A u_n dV, \\ (f, v_k) &= \int_V f v_k dV = \int_{V_k} f dV. \end{aligned}$$

Описану процедуру пошуку наближеного розв'язання рівняння $Au = f$ називають *методом коллокації у підобластях* V_k , $k = \overline{1, N}$ (по латині collocatio – розміщення, розстановка), або *методом розділення області* V .

Приклад 4.5.

Особливості застосування методу коллокації у підобластях розглянемо на прикладі відомої задачі із курсу опору матеріалів, яка має точне вирішення. Нехай балка, що шарнірно закріплена на кінцях, має сталу за довжиною l шорсткість EI_* на згин (E – модуль пружності матеріалу балки, I_* – геометричний момент інерції її поперечного

перетину) та навантажена рівномірно розподіленим за довжиною поперечним навантаженням $q = \text{const}$ (рис. 4.4). Залежність поперечного прогину $w(x)$ балки від поздовжньої координати x задовольняє звичайному диференціальному рівнянню (ЗДР) четвертого порядку

$$EI_* \frac{d^4 w(x)}{dx^4} = q, \quad x \in (0, l), \quad (4.4.10)$$

та межовим умовам

$$w(0) = w(l) = \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \Big|_{x=0} = \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \Big|_{x=l} = 0.$$

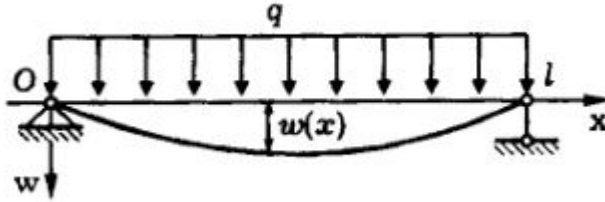


Рис.4.4. Балка, що закріплена на шарнірах

Перейдемо у (4.4.10) та межових умовах до безрозмірних величин, позначивши $\xi = x/l$ та $u(\xi) = \frac{EI_* w(\xi)}{ql^4}$:

$$\begin{cases} \frac{d^4 u(\xi)}{d\xi^4} = 1, & \xi \in (0, 1), \\ u(0) = u(1) = \frac{d^2 u(\xi)}{d\xi^2} \Big|_{\xi=0} = \frac{d^2 u(\xi)}{d\xi^2} \Big|_{\xi=1} = 0. \end{cases} \quad (4.4.11)$$

Розв'язання крайової задачі (4.4.11) можна отримати послідовним інтегруванням і відшукуванням довільних сталих із межових умов.

Двічі зінтегрувавши диференціальне рівняння у задачі (4.4.11), отримаємо

$$\frac{d^2 u(\xi)}{d\xi^2} = \frac{1}{2} \xi^2 + C_1 \xi + C_2$$

та із умови $\frac{d^2 u(\xi)}{d\xi^2} \Big|_{\xi=0}$ знаходимо $C_2 = 0$, а потім із умови $\frac{d^2 u(\xi)}{d\xi^2} \Big|_{\xi=1}$ обчислюємо

$C_1 = -1/2$, так що можна записати проміжний результат у вигляді ЗДР другого порядку

$$\frac{d^2 u(\xi)}{d\xi^2} = \frac{\xi^2}{2} - \frac{\xi}{2}, \quad \xi \in (0, 1), \quad (4.4.12)$$

із межовими умовами $u(0) = u(1) = 0$. Своєю чергою, двохкратне інтегрування (4.4.12) дає

$$u(\xi) = \frac{\xi^4}{24} - \frac{\xi^3}{12} + C_3\xi + C_4.$$

Із умови $u(0) = 0$ випливає, що $C_4 = 0$, а потім із умови $u(l) = 0$ обчислюємо $C_3 = 1/24$. Отримуємо

$$u(\xi) = \frac{\xi^4}{24} - \frac{\xi^3}{12} + \frac{\xi}{24}. \quad (4.4.13)$$

Знайдемо тепер наближений розв'язок крайової задачі (4.4.11) методом коллокації і порівняємо його із точним розв'язком. Точність наближення будемо оцінювати за відмінністю наближеного розв'язку від точного у точці максимального прогину балки. Для точного розв'язку із необхідної умови екстремуму функції $u(\xi)$

$$\frac{du(\xi)}{d\xi} = \frac{\xi^3}{6} - \frac{\xi^2}{4} + \frac{1}{24} = 0$$

знаходимо стаціонарну точку $\xi = 1/2$, в якій ця функція має максимум, оскільки із (4.4.12)

витікає, що $\frac{d^2u(\xi)}{d\xi^2} < 0$ при $\xi \in (0,1)$. У цій точці максимальне значення безрозмірного прогину балки відповідно до (4.4.13) дорівнює

$$u^* = \frac{5}{384} \approx 0,01302. \quad (4.4.14)$$

Оцінимо тепер це значення за допомогою методу коллокації.

В (4.4.11) операторне рівняння містить лінійний оператор $A = d^4/d\xi^4$, що визначений на всюди щільному лінійному многовиді $X \subset L_2[0,1]$ чотири рази неперервно диференційовних на відрізку $[0,1]$ функцій. У якості базису у цьому підпросторі виберемо систему функцій $\sin n\pi\xi \in D(A)$, $n \in \mathbb{N}$, що задовольняють однорідні межові умови крайової задачі (4.4.11).

У методі коллокації спочатку обмежимося випадком $N = 1$. Тоді у поданні (4.4.5) маємо $u(\xi) \approx u_1(\xi) = a_1 \sin \pi\xi$, а в (4.4.8) $V_1 = V = [0,1]$ та $dV = d\xi$, так що із (4.4.8) отримаємо

$$a_1 \int_0^1 \frac{d^4 \sin \pi\xi}{d\xi^4} d\xi = \int_0^1 d\xi,$$

або

$$a_1 \int_0^1 \frac{d^3 \sin \pi\xi}{d\xi^3} \Big|_0^1 = -a_1 \pi^3 \cos \pi\xi \Big|_0^1 = 1.$$

Звідси $a_1 = 1/(2\pi^3) \approx 0,01613$, тобто у цьому наближенні максимальний безрозмірний прогин $u_1^* = 1/(2\pi^3)$ балки приблизно на чверть перевищує його точне значення u^* у (4.4.13).

При $N = 2$ маємо $u_2(\xi) = a_1 \sin \pi \xi + a_2 \sin 2\pi \xi$. Точкою $\xi = 1/2$ розіб'ємо відрізок $[0,1]$ на два проміжки $V_1 = [0, 1/2]$ та $V_2 = (1/2, 1]$ і відповідно до (4.4.8) запишемо СЛАР відносно коефіцієнтів a_1 та a_2 :

$$\begin{aligned} a_1 \int_0^{1/2} \frac{d^4 \sin \pi \xi}{d\xi^4} d\xi + a_2 \int_0^{1/2} \frac{d^4 \sin 2\pi \xi}{d\xi^4} d\xi &= \int_0^{1/2} d\xi, \\ a_1 \int_{1/2}^1 \frac{d^4 \sin \pi \xi}{d\xi^4} d\xi + a_2 \int_{1/2}^1 \frac{d^4 \sin 2\pi \xi}{d\xi^4} d\xi &= \int_{1/2}^1 d\xi. \end{aligned}$$

Із урахуванням того, що

$$\frac{d^3 \sin \pi \xi}{d\xi^3} = -\pi^3 \cos \pi \xi, \quad \frac{d^3 \sin 2\pi \xi}{d\xi^3} = -8\pi^3 \cos \pi \xi,$$

визначимо коефіцієнти СЛАР:

$$\begin{aligned} \int_0^{1/2} \frac{d^4 \sin \pi \xi}{d\xi^4} d\xi &= \pi^3, \quad \int_0^{1/2} \frac{d^4 \sin 2\pi \xi}{d\xi^4} d\xi = 16\pi^3, \\ \int_{1/2}^1 \frac{d^4 \sin \pi \xi}{d\xi^4} d\xi &= \pi^3, \quad \int_{1/2}^1 \frac{d^4 \sin 2\pi \xi}{d\xi^4} d\xi = -16\pi^3. \end{aligned}$$

Оскільки праві частини обох рівнянь дорівнюють $1/2$, отримуємо СЛАР

$$a_1 + 16a_2 = \frac{1}{2\pi^3}, \quad a_1 - 16a_2 = \frac{1}{2\pi^3},$$

із якої випливає, що $a_2 = 0$ і знову $a_1 = 1/(2\pi^3)$. Отже, за рівномірного розбиття відрізка на дві частини ($N = 2$) отримано той самий розв'язок, що й за $N = 1$. Такий результат не є випадковий. Річ у тім, що функція $\sin 2\pi \xi$ порушує симетрію прогину симетрично навантаженої балки (рис. 4.4).

За $N = 3$ використовуємо рівномірне розбиття відрізка $[0,1]$ на три проміжки $V_1 = [0, 1/3]$, $V_2 = (1/3, 2/3]$, $V_3 = [2/3, 1]$. У цьому разі

$$u_3(\xi) = a_1 \sin \pi \xi + a_2 \sin 2\pi \xi + a_3 \sin 3\pi \xi, \quad (4.4.15)$$

Після обчислення інтегралів отримуємо СЛАР

$$a_1 + 24a_2 + 108a_3 = \frac{2}{3\pi^3},$$

$$a_1 - 54a_3 = \frac{1}{3},$$

$$a_1 - 24a_2 + 108a_3 = \frac{2}{3\pi^3},$$

розв'язанням якої є $a_1 = 4/(9\pi^3)$, $a_2 = 0$, $a_3 = 1/(486\pi^3)$. При $\xi = 1/2$ обчислимо

максимальний безрозмірний прогин балки

$$u_3^* = a_1 - a_3 = \frac{4}{9\pi^3} - \frac{1}{486\pi^3} = \frac{215}{486\pi^3} \approx 0,01427,$$

який перевищує приблизно на 10% його точне значення u^* .

Тепер застосуємо метод коллокації у підобластях до розв'язання ЗДР (4.4.12) другого порядку. При $N = 1$ маємо $\tilde{u}_1(\xi) = \tilde{a}_1 \sin \pi \xi$ і відповідно до (4.4.8) запишемо

$$\tilde{a}_1 \int_0^1 \frac{d^2 \sin \pi \xi}{d\xi^2} d\xi = \frac{1}{2} \int_0^1 (\xi^2 - \xi) d\xi, \quad \tilde{a}_1 \frac{d \sin \pi \xi}{d\xi} \Big|_0^1 = -\frac{1}{12}.$$

Звідси $-2\pi \tilde{a}_1 = -1/12$, $\tilde{a}_1 = 1/(24\pi) \approx 0,01326$. У цьому наближенні максимальний безрозмірний прогин $\tilde{u}_1^* \approx 0,01326$ балки лише на 2% вище його точного значення u^* . У разі $N = 2$ виникає ситуація, аналогічна до розглянутої вище.

При $N = 3$ наближений розв'язок має вигляд

$$\tilde{u}_3(\xi) = a_1 \sin \pi \xi + \tilde{a}_2 \sin 2\pi \xi + \tilde{a}_3 \sin 3\pi \xi, \quad (4.4.16)$$

Тоді, якщо розбити відрізок $[0,1]$ рівномірно на три проміжки і використати (4.4.8), приходимо до СЛАР

$$\tilde{a}_1 + 6\tilde{a}_2 + 128\tilde{a}_3 = \frac{7}{162\pi},$$

$$\tilde{a}_1 - 6\tilde{a}_3 = \frac{13}{324\pi},$$

$$\tilde{a}_1 - 6\tilde{a}_2 + 12\tilde{a}_3 = \frac{7}{162\pi}.$$

Звідси спочатку знаходимо $\tilde{a}_2 = 0$, а потім $\tilde{a}_1 = 10/(243\pi)$, $\tilde{a}_3 = 1/(5832\pi)$. Максимальний безрозмірний прогин балки

$$\tilde{u}_3^* = \tilde{a}_1 - \tilde{a}_3 = \frac{10}{243\pi} - \frac{1}{5832\pi} \approx 0,0305,$$

що всього на 0,23% відрізняється від його точного значення u^* .

Отже, застосування методу коллокації по підобластям до розв'язання однієї й тієї самої задачі про прогин балки, але такої, що описується ЗДР різних порядків, дає точніший результат у випадку рівняння нижчого порядку.

Перейдемо до розгляду другого шляху побудови наближеного розв'язання операторного рівняння $Au = f$. Коефіцієнти a_n у поданні (4.4.5) шукатимемо із умови рівності нульовому елементу нев'язки $Au - f$ цього операторного рівняння у заданій системі N точок $x_k \in V$, $k = \overline{1, N}$. Тоді замість (4.4.8) отримаємо СЛАР

$$\sum_{n=1}^N a_n A u_n(x_k) = f(x_k), \quad k = \overline{1, N}. \quad (4.4.17)$$

Таку процедуру пошуку наближеного розв'язання рівняння $Au = f$ називають *методом коллокації у точках*, а точки $x_k \in V$ – *точками коллокації*.

Приклад 4.6.

Застосуємо метод коллокації у точках до розв'язання крайової задачі (4.4.11). При $N = 1$ прийнявши, як і в прикладі 5, $u_1(\xi) = a_1 \sin \pi \xi$, для точки в середині відрізка $[0,1]$ запишемо

$$a_1 \frac{d^4 \sin \pi \xi}{d\xi^4} \Big|_{\xi=1/2} = 1,$$

або $a_1 \pi^4 = 1$. У цьому разі максимальний безрозмірний прогин $u_1^* = a_1$ балки приблизно на 20% нижче його точного значення u^* в (4.1.13). Зазначимо, що результат вельми чутливий до вибору точки коллокації. Так, якщо вибрати $\xi_1 = 1/4$, отримаємо $u_1^* = \sqrt{2}/(\pi^4)$, а при $\xi_1 = 1/6$ отримаємо $u_1^* = 2/\pi^4 \approx 0,02053$. Ясно, що існує точка $\xi_1 \in (0,1)$, яка забезпечує збіжність значення u_1^* із u^* , але її можна знайти лише тоді, коли відоме заздалегідь значення u^* . Але й у цьому випадку наближений розв'язок $u_1(\xi)$ не буде збігатися на відрізку $[0,1]$ із точним розв'язком.

Неважко перевірити, що за $N = 2$ та симетрично розташованих на відрізку $[0,1]$ точках коллокації $\xi_1 = t$, $\xi_2 = 1-t$ у наближеному розв'язку $u_2(\xi) = a_1 \sin \pi \xi + a_2 \sin 2\pi \xi$ завжди $a_2 = 0$ і $a_1 = 1/(\pi^4 \sin \pi t)$. Так, при $\xi_1 = 1/3$, $\xi_2 = 2/3$ маємо $a_1 = 2/(\sqrt{3}\pi^4) \approx 0,01185$.

У випадку $N = 3$ функція $u_3(\xi)$ має вигляд (4.4.13) і при виборі рівномірно розташованих на відрізку $[0, 1]$ точок коллокації $\xi_1 = 1/4$, $\xi_2 = 1/2$, $\xi_3 = 3/4$, використовуючи (4.4.15), приходимо до СЛАР

$$\frac{a_1}{\sqrt{2}} + 16a_2 + \frac{81}{\sqrt{2}}a_3 = \frac{1}{\pi^4},$$

$$a_1 - 81a_3 = \frac{1}{\pi^4},$$

$$\frac{a_1}{\sqrt{2}} - 16a_2 + \frac{81}{\sqrt{2}}a_3 = \frac{1}{\pi^4},$$

із якої знаходимо $a_1 = \frac{\sqrt{2}+1}{2\pi^4}$, $a_2 = 0$, $a_3 = \frac{\sqrt{2}-1}{16\pi^4}$. Наближене значення максимального безрозмірного прогину балки дорівнює

$$u_3^* = a_1 - a_3 = \frac{\sqrt{2}+1}{2\pi^4} - \frac{\sqrt{2}-1}{16\pi^4} = \frac{40\sqrt{2}+41}{81\pi^4} \approx 0,01237,$$

що на 5% менше його точного значення u^*

Застосуємо тепер метод колокації у точках до розв'язання ЗДР (4.4.11) другого порядку. Використовуючи за $N = 1$ наближений розв'язок у вигляді $\tilde{u}_1(\xi) = \tilde{a}_1 \sin \pi \xi$ і точку колокації $\xi = 1/2$, відповідно до (4.4.17) запишемо

$$\tilde{a}_1 \frac{d^2 \sin \pi \xi}{d\xi^2} \Big|_{\xi=1/2} = \frac{1}{2}(\xi^2 - \xi) \Big|_{\xi=1/2}.$$

Звідси $-\pi^2 \tilde{a}_1 = -1/8$ або $\tilde{a}_1 = 1/(8\pi^2) \approx 0,01267$. У цьому наближенні максимальний безрозмірний прогин балки $\tilde{u}_1 \approx 0,01267$ лише на 2,7% нижче за його точне значення u^* в (4.113). При $N = 2$ ситуація аналогічна розглянутій вище. Зокрема, за рівномірно розташованих на відріжку $[0,1]$ точках колокації $\xi = 1/3$ і $\xi = 2/3$ $\tilde{a}_2 = 0$, $\tilde{a}_1 = \tilde{a}_3 = 2/(9\sqrt{3}\pi^3) \approx 0,01300$.

Приклад 4.7.

Розглянемо застосування методу колокації для розв'язання рівнянь у частинних похідних. Зупинимося на порівняно простому прикладі лінійної одновимірної задачі нестационарної теплопровідності у пластині завтовшки h . Нехай залежність температури $T(t, x)$ задовольняє рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \tilde{a} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad t > 0, \quad x \in [0, h], \quad (4.4.19)$$

із початковою умовою $T(0, x) = T_0$ та межевими умовами

$$\frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad T(t, h) = T^*, \quad (4.4.20)$$

де $\tilde{a}$ – коефіцієнт температуропровідності матеріалу пластини, а T^* – задана температура поверхні пластини при $x = h$. Відзначимо, що перша умова в (4.4.20) за фізичним змістом означає ідеальну теплову ізоляцію поверхні пластини при $x = 0$.

Наближений розв'язок задачі будемо шукати у вигляді

$$\tilde{T}(t, x) = T^* - D(t) \left(1 - (x/h)^2\right), \quad (4.4.21)$$

що задовольняє (4.4.20). Невідому функцію $D(t)$ спочатку знайдемо наближено методом колокації в підобластях при $N = 1$. Для цього після підстановки (4.4.21) у (4.4.20) проведемо усереднення по всій товщині пластини:

$$\begin{aligned} \left[-\frac{\partial \tilde{T}_1}{\partial \zeta} + Bi_T \tilde{T}_1 \right] \Big|_{\zeta=\tilde{f}_1(\rho)} &= -\tilde{f}_1(\rho) \frac{\partial \tilde{T}_0}{\partial \rho} - \frac{Bi_1}{2} \tilde{f}_1^2(\rho) \tilde{T}_0, \\ + \int_0^h \tilde{a} D(t) \frac{d}{dt} \left(-\frac{2x}{h^2} \right) dx &= -\frac{2h}{3} \frac{dD(t)}{dt} - \frac{2\tilde{a}}{h} D(t) = 0. \end{aligned}$$

В результаті приходимо до однорідного ЗДР

$$\frac{dD(t)}{dt} + \frac{3\tilde{a}}{h^2} D(t) = 0, \quad (4.4.22)$$

розв'язання якого має вигляд

$$D(t) = D(0) \exp\left(-3\frac{\tilde{a}t}{h^2}\right) = D(0)e^{-3Fo}, \quad (4.4.23)$$

де $Fo = \tilde{a}t/h^2$ – число Фур'є, що має сенс безрозмірного часу, а $D(0)$ – поки невідоме початкове значення функції $D(t)$.

Відзначимо, що у даному випадку осереднення (4.4.19) по товщині пластини відповідає виконанню закону збереження теплової енергії для цієї пластини. Тому стосовно задач теплопровідності метод коллокації у підобластях за $N = 1$ іноді називають інтегральним методом теплового балансу.

Для відшукування значення $D(0)$ в (4.4.23) можна вимагати, щоб розподіл $\bar{T}(t, x)$ (4.4.21) температури за $t = 0$ задовольняв у середньому за товщиною пластини початкову умову:

$$\frac{1}{h} \int_0^h \bar{T}(0, x) dx = T^* - \frac{D(0)}{h} \int_0^h \left(1 - \frac{x^2}{h^2}\right) dx = T^* - \frac{2}{3} D(0) = T_0.$$

Звідси $D(0) = 3/2(T^* - T_0)$ після заміщення (4.123) у (4.121) отримуємо наближений розв'язок

$$\bar{T}(t, x) = T^* - \frac{3}{2}(T^* - T_0) \left(1 - \frac{x^2}{h^2}\right) e^{-3Fo}.$$

Запровадимо нову функцію

$$\tilde{\Theta}(Fo, \xi) = \frac{T^* - \tilde{T}(t, x)}{T^* - T_0},$$

де $\xi = x/h$, і подамо отриманий наближений розв'язок у безрозмірній формі:

$$\bar{T}(t, x) = 3/2(1 - \xi^2)e^{-3Fo}, \quad \xi \in [0, 1]. \quad (4.4.24)$$

Відомий точний розв'язок задачі, що розглядається. Цей розв'язок у безрозмірній формі має вигляд

$$\begin{aligned} \Theta(Fo, \xi) &= \frac{T^* - \bar{T}(t, x)}{T^* - T_0} \\ &= \frac{4}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{2m-1} \cos \frac{2m-1}{2} \pi \xi \exp\left(-\frac{(2m-1)^2 \pi^2}{4} Fo\right). \end{aligned} \quad (4.4.25)$$

Похибку наближеного розв'язку можна зменшити удвічі, якщо значення $D(0)$ у (4.4.23) знайти, виходячи із умови, що середньоквадратичне відхилення

$$\Delta R = \frac{1}{h} \int_0^h (T(0, x) - T_0)^2 dx$$

розподілу температури у момент часу $t = 0$ від заданого початкового значення T_0 досягає мінімуму. Обчислимо це відхилення із використанням подання (4.4.21) розподілу температури:

$$\begin{aligned} \Delta R &= \frac{1}{h} \int_0^h \left[T^* - T_0 - D(0) \left(1 - \frac{x^2}{h^2} \right) \right]^2 dx = \\ &= (T^* - T_0)^2 - \frac{4}{3} (T^* - T_0) D(0) + \frac{8}{15} D^2(0). \end{aligned}$$

Із умови $\frac{d\Delta R}{dD(0)} = 0$ отримаємо $D(0) = 5/4(T^* - T_0)$. Але й у цьому випадку

значна відмінність коефіцієнта 3 біля числа Фур'є у від'ємному показнику експоненти наближеного розв'язку (4.4.24) від відповідного коефіцієнту $\pi^2/4 \approx 2,4674$ у першому доданку точного розв'язку (4.4.25) призводить до суттєвої похибки.

Тепер для відшукування функції $D(t)$ у наближеному поданні (4.4.21) розподілу температури використаємо метод коллокації у точках. Вимагатимемо, щоб воно задовольняло рівняння (4.4.19) і початкову умову в одній точці коллокації із координатою $x_1 \in [0, h)$. Тоді, якщо підставити (4.4.21) у (4.4.19) та покласти $x = x_1$, тримаємо однорідне ЗДР

$$\left(1 - \frac{x_1^2}{h^2} \right) \frac{dD(t)}{dt} + \frac{2\tilde{a}}{h^2} D(t) = 0.$$

Звідси

$$D(t) = D(0) \exp \left(-2 \frac{\tilde{a}t/h^2}{1 - x_1^2/h^2} \right) = D(0) \exp \left(-2 \frac{Fo}{1 - x_1^2/h^2} \right).$$

Початкову умову $D(0)$ знаходимо, використовуючи (4.4.21) при $t = 0$, із умови $\tilde{T}(0, x_1) = T_0$:

$$T_0 = T^* - D(0)(1 - x_1^2/h^2), \quad \text{для } D(0) = \frac{T^* - T_0}{1 - x_1^2/h^2}.$$

Отримуємо

$$\Theta_2(Fo, \xi) = \frac{1 - \xi^2}{1 - \xi_1^2} \exp \left(-2 \frac{Fo}{1 - \xi_1^2} \right), \quad \xi_1 = x_1/h. \quad (4.4.26)$$

Ясно, що кращі результати (4.4.26) дасть при розрахунку змінювання температури у часі у точці коллокації, тобто при $\xi = \xi_1$. Якщо значення ξ_1 обрати із умови рівності показників експонент в (4.4.26) та у першому доданку точного розв'язку (4.4.25),

отримаємо $\xi_1^* = \sqrt{1 - 8/\pi^2} \approx 0,4352$, що призводить до задовільних результатів розрахунків по цим формулам при $Fo > 0,1$ не тільки у точці $\xi = \xi_1^*$, але й на поверхні пластини при $\xi = 0$

Запитання для самоперевірки

1. Які властивості має система базисних функцій?
2. Що називається лінійною оболонкою системи рівнянь?
3. У чому полягає сутність методу ортогональних проекцій?
4. Яка система функцій має назву проекційної?
5. У чому полягає сутність методу коллокації?

Розділ 5. Проекційні методи

5.1 Задачі на власні значення

Вирішення задач на власні значення і власні вектори є один із підходів до побудови систем базисних функцій для проекційних методів, зокрема методу Бубнова–Галеркіна.

Розглянемо однорідне операторне рівняння

$$Au - \lambda Bu = 0, \quad u, 0 \in D(A) \subset \mathcal{H}, \quad (5.1.1)$$

де A і B – лінійні оператори, що діють у гільбертовому просторі $\mathcal{H}$, причому $D(A) \subset D(B)$ та $D(A)$ – всюди щільна в $\mathcal{H}$ підмножина. Нагадаємо, що число λ називають власним значенням цього операторного рівняння, якщо (5.1) при цьому λ має розв’язок, що відрізняється від тривіального розв’язку $u = 0$. Якщо A – симетричний оператор, а B – додатно визначений, при розв’язанні задачі на власні значення в (5.1.1) можна прийняти оператор A також додатно визначеним. Припустимо, що усі власні значення операторного рівняння (5.1.1) є прості, утворюють обліковувану множину й їх можна подати у вигляді елементів зростаючої послідовності $\{\lambda_m\}$. Тоді кожному із цих власних значень λ_m відповідає власний елемент w_n , $\|w_n\| = 1$, й одновимірний власний підпростір S_m , що збігається із лінійною оболонкою цього елементу.

У прикладаннях задачі на власні значення рівняння (5.1.1) виникають, наприклад, при аналізі коливань різних динамічних систем. У цьому разі власні значення є пропорційні квадрату частот власних коливань. При дослідженні умов переходу системи із одного стану в інший власні значення характеризують рівень зовнішніх впливів на систему, за якого можливий такий перехід. Зокрема, власні значення можуть мати сенс критичних навантажень, що викликають втрату стійкості рівноваги або руху системи.

Наближений розв’язок задачі на власні значення рівняння (5.1.1) можна знайти за допомогою методу Бубнова–Галеркіна. Шуканий власний елемент наближено подамо у вигляді

$$\tilde{u}_N = \sum_{n=1}^N a_n u_n, \quad a_n \in \mathbb{R}, \quad u_n \in D(A), \quad (5.1.2)$$

де $u_n \in D(A)$ – елементи послідовності $\{u_n\}$, яка утворює у $D(A)$ лічильний базис. Замістимо (5.1.2) у (5.1.1) й використаємо (4.4.12) при $v_k = u_k$, $k = \overline{1, N}$. Приходимо до однорідної системи лінійних відносно коефіцієнтів a_n алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{n=1}^N a_n (Au_n - \lambda Bu_n, u_k) = 0, \quad k = \overline{1, N}, \quad (5.1.3)$$

яка містить невідоме число λ . Ця СЛАР має нетривіальний розв’язок відносно коефіцієнтів a_n за умови $|G_N| = 0$, де G_N – симетрична матриця порядку N із елементами $(Au_n - \lambda Bu_n, v_k)$. Кожне значення $\lambda_m^{(N)}$, $m = \overline{1, N}$, що задовольняє

рівняння $|G_N| = 0$, прийемо у якості наближення до власного значення λ_m рівняння (5.1.1) за умови, що $\lambda_m^{(N)}$ (як й λ_m) занумеровано у порядку зростання m . Ясно, що за фіксованого N можна знайти наближені значення лише для власних значень рівняння (5.1.1).

Зауваження 2. Можна показати, що за будь-якого $m \leq N$ справджується нерівність $\lambda_m^{(N)} \leq \lambda$ й при зростанні N значення $\lambda_m^{(N)}$ для фіксованих m не зростають, причому при $\lambda_m^{(N)} \rightarrow \lambda_m$ та $\|w_m^{(N)} - w_m\|_{\mathcal{H}} \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$, де відповідно до (5.1.2)

$$w_m^{(N)} = \sum_{n=1}^N a_n^{(m)} u_n, \quad u_n \in D(A),$$

$a_n^{(m)}$ – координати одиничного вектора $w_m^{(N)}$, що задовольняє СЛАР (5.1.3) при $\lambda = \lambda_m^{(N)}$.

Зазначимо, що у частинному випадку $B = I$, де I – тотожний оператор в $\mathcal{H}$, числа $\lambda_m^{(N)}$, $m = \overline{1, N}$, є власні значення симетричної матриці $\tilde{A}$ із елементами (Au_n, v_k) , $k, n = \overline{1, N}$, й слугують наближенням до власних значень симетричного оператора A . При цьому $w_m^{(N)}$ буде одиничним власним вектором матриці $\tilde{A}$, що відповідає її власному значенню $\lambda_m^{(N)}$.

Отже, із розв'язку рівняння можна отримати значення, які дають оцінку зверху для власних значень рівняння (5.1.1). У низці прикладних задач важливим також є отримання для λ_m оцінок знизу (зокрема, для виявлення можливої похибки наближеного розв'язку варіаційної задачі). Таку оцінку для λ_1 неважко отримати, якщо відоме або легко обчислюється власне значення λ_1' операторного рівняння $A'u = \lambda'B'u$, де A' – симетричний оператор із областю визначення $D(A') \subset D(A)$, B' – додатно визначений оператор, для якого $D(B') \supset D(B)$, причому

$$\frac{(A'u, u)}{(B'u, u)} \leq \frac{(Au, u)}{(Bu, u)}, \quad u_n \in D(A'),$$

У цьому разі маємо $\lambda_1' \leq \lambda_1$. Ясно, що аналогічний шлях можна використати із метою отримання для λ_1 оцінки зверху. Для цього необхідно мати власне значення λ_1'' операторного рівняння $(A''u, u) = \lambda''(B''u, u)$, де A'' – симетричний оператор, для якого $D(A'') \supset D(A)$, B'' – додатно визначений оператор із областю визначення $D(B'') \subset D(B)$, причому $D(A'') \subset D(B'')$ і

$$\frac{(A''u, u)}{(B''u, u)} \geq \frac{(Au, u)}{(Bu, u)}, \quad u_n \in D(A), \quad (5.1.4)$$

тоді отримаємо, що $\lambda_1'' \geq \lambda_1$.

Приклад 5.1.

Із умови рівноваги шарнірно опертого пружного стрижня довжиною l , що стиснутий уздовж осі Ox силою P (рис. 5.1.1), витікає звичайне диференціальне рівняння

$$EI_*(x) \frac{d^2 u(x)}{dx^2} + Pu(x) = 0, \quad x \in (0, l) \quad (5.1.5)$$

із межовими умовами $u(0) = u(l) = 0$, де E – модуль пружності матеріалу стрижня; $I_*(x) = \pi/4r^4(x)$ – момент інерції кругового поперечного перетину стрижня радіусом $r(x)$, що залежить від координати x ; $u(x)$ – відхилення точок осі стрижня від осі Ox (за відсутності сили P ось стрижня збігається із віссю Ox).

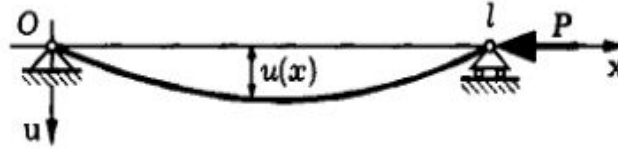


Рис. 5.1. Стрижень, що стиснутий вздовж осі x

Прийmemo $r(x) = a\sqrt{1+x/l}$ та, позначивши $\xi = x/l$ і $\lambda = Pl^2/(\pi Ea^4)$, від (5.1.5) перейдемо до крайової задачі

$$\begin{aligned} -\frac{d^2 u(\xi)}{d\xi^2} - \lambda \frac{4u(\xi)}{(1+\xi)^2} &= 0, \quad \xi \in (0, 1); \\ u(0) = u(1) &= 0 \end{aligned} \quad (5.1.6)$$

Нехай $A = -d^2/d\xi^2$, $Bu = 4u/((1+\xi)^2) > 0$.

Оператор A є додатно визначений на лінійному многовиді $D(A)$ двічі неперервно диференційовних на $[0, 1]$ функцій, що перетворюються у нуль на кінцях цього відрізка. Оператор B також додатно визначений, але на множині $D(B)$ функцій, що неперервні на $[0, 1]$, оскільки

$$(Bu, u) = 4 \frac{\|u\|^2}{(1+\xi)^2} > \|u\|^2.$$

Отже, $D(A) \subset D(B)$, і задача (5.1.6) є задача на власні значення операторного рівняння (5.1.1).

При заданих межових умовах поряд із тривіальним розв'язком $u(\xi) = 0$, $\xi \in [0, 1]$ крайова задача (5.1.6) може мати розв'язки $u_n(\xi) \neq 0$, що відповідають власним значенням λ_n . У даному випадку важливо оцінити найменше власне значення λ_1 , що є пропорційне найменшій силі, що стискає, яка викликає втрату стійкості прямолінійної форми рівноваги стрижня.

Для оцінки значення λ_1 зверху використаємо функцію $\tilde{u}(\xi) = \xi(1-\xi)$, що є двічі

неперервно диференційовна на $[0,1]$ і задовольняє межові умови $u(0) = u(1) = 0$, та обчислимо

$$(A\tilde{u}, \tilde{u}) = -\int_0^1 \frac{d^2 \tilde{u}(\xi)}{d\xi^2} \tilde{u} d\xi = 2 \int_0^1 \xi(1-\xi) d\xi = \frac{1}{3},$$

$$(B\tilde{u}, \tilde{u}) = 4 \int_0^1 \frac{\xi^2(1-\xi)^2}{(1+\xi)^2} d\xi = \frac{4}{3}(25 - 36 \ln 2).$$

Отримаємо

$$\lambda_1 \leq \frac{(A\tilde{u}, \tilde{u})}{(B\tilde{u}, \tilde{u})} = \frac{1}{4(25 - 36 \ln 2)} \approx 5,3532. \quad (5.1.7)$$

Оцінку знизу значення λ_1 можна отримати, якщо розглянути стрижень із круговим поперечним перетином сталого радіусу $R' = a \leq r(x)$. Для такого стрижня замість задачі (5.1.6) маємо

$$-\frac{d^2 u(\xi)}{d\xi^2} = 4\lambda u(\xi), \quad \xi \in (0,1);$$

$$u(0) = u(1) = 0 \quad (5.1.8)$$

Неважко перевірити, що власними функціями задачі (5.1.8) є $u_n(\xi) = \sin n\pi\xi$. Цим функціям відповідають власні значення

$$\lambda'_n = \frac{(n\pi)^2}{4},$$

причому найменше із них (за $n=1$) дорівнює $\lambda'_1 = \pi^2/4 \approx 2,4674$ і відповідає значенню *ейлеровій* (або першій критичній) сили

$$P_{kr} = \frac{\lambda'_1 \pi E a^4}{l^2} = \frac{\pi^3 E a^4}{4l^2},$$

що викликає втрату стійкості прямолінійної форми рівноваги стрижня зі сталим круговим поперечним перетином.

Із порівняння (5.1.8) із (5.1.6) випливає, що $a' = A = -d^2/d\xi^2$ та $B' = 4 > 0$, причому $(A'u, u) = (Au, u)$ и $(B'u, u) \geq (Bu, u)$ для будь-якого елемента $u \in D(A)$, тобто виконується нерівність (5.1.4). Тоді із урахуванням (5.1.7) отримуємо двобічну оцінку

$$\lambda'_1 = \frac{\pi^2}{4} \leq \lambda_1 \leq \frac{1}{4925 - 36 \ln 2} \approx 5,3532. \quad (5.1.9)$$

Оцінка (5.1.9) є досить груба, оскільки верхня межа перевищує нижню у два рази. Відзначимо, що для стрижня із круговим поперечним перетином сталого радіусу $R'' = \sqrt{2}a \geq r(x)$ отримаємо $A'' = A = -d^2/d\xi^2$ та $B'' = 1 > 0$, причому $(A''u, u) = (Au, u)$ і $(B''u, u) \leq (Bu, u)$, $u \in D(A)$, тобто виконуватиметься нерівність

(5.5). Але для такого стрижня $\lambda_1'' = \pi^2$, що майже у два рази вище верхньої межі у (5.1.9).

Розглянемо частинний випадок методу ортогональних проекцій наближеного розв'язання операторного рівняння $Au = f$.

Нехай області визначення $D(A)$ і значень $R(A)$ оператора A є всюди щільні підмножини сепарабельного гільбертова простору $\mathcal{H}$, а система $\{u_k\}$ – лічильний базис в $D(A)$ та $R(A)$. Наближений розв'язок $\tilde{u}_N$ вигляду (4.4.5) рівняння $Au = f$ згідно методу ортогональних проекцій для випадку, коли *проекційні функції збігаються із базисними*, тобто $v_k = u_k$, $k = \overline{1, N}$, знаходимо шляхом розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР), що отримується із (4.4.6),

$$\sum_{n=1}^N a_n (Au_n, u_k) = (f, u_k), k = \overline{1, N}, \quad (5.1.10)$$

відносно коефіцієнтів a_n .

Таку процедуру відшукування наближеного розв'язку операторного рівняння $Au = f$ називають **методом Бубнова–Галеркіна**. Оскільки метод ортогональних проекцій є, своєю чергою, одним із варіантів проекційного методу, умови існування розв'язку СЛАР (5.1.10) та збіжності наближеного розв'язку впливають із теорем 4.7, 4.8.

Метод Бубнова–Галеркіна можна використати без суттєвих обмежень на оператор: він може не бути додатно визначеним оператором, симетричним і навіть лінійним.

Розглянемо детальніше практично важливий випадок, коли оператор A є додатно визначений. У цьому разі елементи лічильного базису $\{u_n\}$, що використовують при побудові наближеного розв'язку u_N , можуть і не належати області визначення оператора A , тобто $u_n \notin D(A)$. Це суттєво розширює можливості методу Бубнова–Галеркіна порівняно із методами коллокації та найменших квадратів.

Нехай $\mathcal{H}_A$ – *енергетичний простір*, що є поповнення нормованого простору $D(A)$ по енергетичній нормі

$$\|u\|_A = \sqrt{(u, u)_A}, \quad (5.1.11)$$

що індукована енергетичним скалярним добутком

$$(u, v)_A = (Au, v).$$

Тепер наближений розв'язок операторного рівняння $Au = f$ із додатно визначеним оператором A замість (4.4.5) можна шукати у вигляді

$$\tilde{u}_N = \sum_{n=1}^N a_n u_n, \quad u_n \in \mathcal{H}_A, \quad (5.1.12)$$

де функції u_n утворюють лічильний базис в енергетичному просторі $\mathcal{H}_A$. При цьому коефіцієнти a_n , $n = \overline{1, N}$, отримують із розв'язання СЛАР (5.1.10), яка набуває вигляд

$$\sum_{n=1}^N a_n (u_n, u_k)_A = (f, u_k), \quad k = \overline{1, N}. \quad (5.1.13)$$

Елементи $(u_n, u_k)_A$ в (5.1.13) складають *матрицю Грама* системи функцій $\{u_n\}_N$, що у силу властивостей лічильного базису $\{u_n\}$ є лінійно незалежна в енергетичному просторі $\mathcal{H}_A$. Отже, визначник цієї матриці відрізняється від нуля, а СЛАР має єдиний розв'язок відносно коефіцієнтів a_n , $n = \overline{1, N}$.

Розглянемо ще один метод наближеного розв'язання рівняння $Au = f$ із додатно визначеним оператором A , який знову призводить до розв'язання СЛАР (5.1.13). Узагальнений розв'язок u_* цього рівняння є єдиний й мінімізує квадратичний функціонал $J[u] = (Au, u) - 2(f, u)$, який називають також *функціоналом енергії*. Нагадаємо, є скалярний добуток у гільбертовому просторі. Якщо елементи послідовності $\{\tilde{u}_N\}$, що мінімізує, шукати у вигляді (5.1.12), при відшукуванні коефіцієнтів a_n прийдемо до СЛАР, що збігається із (5.1.13).

Таку процедуру відшукування коефіцієнтів прийнято називати **методом Рітца**.

Отже, методи Рітца і Бубнова–Галеркіна наближеного розв'язання рівняння $Au = f$ у разі додатно визначеного оператора A призводять до розв'язання однієї й тієї самої СЛАР (5.1.13). Але метод Бубнова–Галеркіна на відміну від метода Рітца можна застосовувати й для розв'язання рівняння $Au = f$ із довільним оператором A .

Нехай $\{u_n\}$ – базис в $\mathcal{H}_A$, ортонормований відносно енергетичного скалярного добутку. У цьому разі наближений розв'язок (5.1.12) із коефіцієнтами $a_n = (f, w_n)_A$, що отримано за методом Рітца, буде частковою сумою ряду Фур'є

$$u_* = \sum_{n=1}^N \alpha_n u_n, \quad \alpha_n = (f, w_n)_A, \quad u_n \in \mathcal{H}_A, \quad (5.1.14)$$

узагальненого розв'язку u_* рівняння $Au = f$. Це означає, що у разі ортонормованого в $\mathcal{H}_A$ базису $\{u_n\}$ наближений розв'язок (5.1.12) рівняння із додатно визначеним оператором A збігається в $\mathcal{H}_A$ до узагальненого розв'язку (5.1.14) цього рівняння по енергетичній нормі, причому у силу властивостей ряду Фур'є

$$\|u_* - \tilde{u}_N\|_A^2 = \sum_{n=N+1}^{\infty} \alpha_n^2. \quad (5.1.15)$$

Але для додатно визначеного оператора A узагальнений розв'язок u_* рівняння $Au = f$ збігається із *слабим розв'язком* цього рівняння, що задовольняє рівність $(u_*, v)_A = (f, v)$ для будь-якого $v \in \mathcal{H}_A$. Тому наближений розв'язок $\tilde{u}_N$ збігається при $N \rightarrow \infty$ до слабого розв'язку $u_* \in \mathcal{H}_A$ рівняння $Au = f$ по енергетичній нормі. Оскільки для енергетичної норми $\|u\|_A \geq \gamma \|u\|$, $\tilde{u}_N$ збігається до u_* і по нормі $\|\cdot\|$ у гільбертовому просторі.

Приклад 5.2.

Використаємо метод Бубнова–Галеркіна для наближеного розв'язання крайової

задачі (4.4.11), рівняння якої містить додатно визначений оператор $A = d^4/d\xi^4$. Розв'язання шукатимемо у всюдї щільній підмножині $X \subset L_2[0,1]$ функцій, що є чотири рази неперервно диференційовні на відрізку $[0, 1]$, яка є *лінійний многовид*. У якості базиса в X оберемо систему функцій $u_n(\xi) = \sin n\pi\xi \in D(A)$, $n = \overline{1, N}$, що задовольняє межевї умови у (4.4.11).

Оскільки функції $u_n(\xi) \in D(A)$ ортогональні на відрізку $[0,1]$ (див. приклад 8), при $n \neq k$

$$(Au_n, u_k) = \int_0^1 (Au_n(\xi))u_k(\xi)d\xi = (n\pi)^4 \int_0^1 \sin n\pi\xi \sin k\pi\xi d\xi = 0.$$

У разі $n = k$ знаходимо

$$(Au_n, u_n) = \int_0^1 (Au_n(\xi))u_n(\xi)d\xi = (n\pi)^4 \int_0^1 \sin^2 n\pi\xi d\xi = \frac{(n\pi)^4}{2}.$$

Із урахуванням того, що у задачі (4.4.11) права частина f диференціального рівняння дорівнює одиниці, для непарних $k = 2m - 1$ маємо

$$(f, u_k) = \int_0^1 \sin n\pi\xi d\xi = \frac{2}{k\pi}$$

й відповідно до (5.1.11) для непарних $n = 2m - 1$ отримуємо

$$a_n = a_{2m-1} = \frac{4}{(2m-1)^5 \pi^5}, \quad a_n = a_{2m} = 0$$

Це означає, що для задачі, яка розглядається, метод Бубнова–Галеркіна і метод найменших квадратів призводять до однакового результату. Не важко перевірити, що до такого самого результату призведе й розв'язок рівняння (4.4.12) із межевими умовами $U(0) = u(1) = 0$.

Метод Бубнова–Галеркіна широко застосовують й для наближеного розв'язання тих операторних рівнянь, в яких оператор не є додатно визначений.

Запитання для самоперевірки

1. У чому полягає сутність проекційного методу?
2. Наведіть приклади побудови системи базисних функцій.
3. Як будується матриця Грама?
4. У чому полягає різниця між метолами Гальоркіна та Рітца?
5. У чому полягає різниця між базисними та проекційними (повір очними) функціями?

5.2. Метод Бубнова–Галеркіна

5.2.1 Постановка задачі

Розглянемо таку крайову задачу: знайти на відрізку $[a, b]$ розв'язок $y(x)$ диференціального рівняння

$$L[y] = \frac{d^2 y}{dx^2} + p(x) \frac{dy}{dx} + q(x)y = f(x), \quad (5.2.1)$$

або

$$L[y] = \frac{d}{dx} \left(K(x) \frac{dy}{dx} \right) - \beta(x)y = g(x), \quad (5.2.2)$$

що задовольняє умови

$$a_0 y(a) + a_1 \frac{dy(a)}{dx} = a_2, \quad b_0 y(b) + b_1 \frac{dy(b)}{dx} = b_2. \quad (5.2.3)$$

Рівняння (5.2.1) можна звести до вигляду (5.2.2) після множення рівняння (5.2.1) на додатний множник

$$K(x) = e^{\int_a^x p(t) dt} \quad (5.2.4)$$

і тоді $\beta(x) = -K(x)q(x)$, $g(x) = K(x)f(x)$.

5.2.2 Алгоритм методу

У методі Бубнова–Галеркіна для пошуку наближеного розв'язку задачі (5.2.1), (5.2.2) будується функціональна послідовність $\{y_n(x)\}$ з пробних розв'язків $y_n(x)$ таким чином:

На відрізку $[a, b]$ задають деяку систему двічі неперервно диференційовних функцій $u_0(x), u_1(x), \dots, u_n(x)$ таких, що $u_0(x)$ задовольняє межові умови (5.2.3), а функції $u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)$, що мають назву пробних функцій, лінійно незалежні на $[a, b]$ і задовольняють однорідні межові умови (5.2.3) ($a_2 = 0, b_2 = 0$).

Створюємо функцію

$$y_n(x) = u_0(x) + \sum_{k=1}^n C_k u_k(x) \quad (5.2.5)$$

із невідомими поки сталими коефіцієнтами $C_1, C_2, \dots, C_n$.

Після заміщення функції $y_n(x)$ у рівняння (5.2.1) замість $y(t)$ отримуємо функцію

$$R(C_1, C_2, \dots, C_n; x) = L[u_0] + \sum_{k=1}^n C_k L[u_k] - f(x),$$

яку називають нев'язкою.

У загальному випадку нев'язка відрізняється від нуля. Тому підбирають значення параметрів $C_1, \dots, C_n$ так, щоб нев'язка у певному сенсі була найменшою. В

узагальненому методі Галеркіна значення параметрів $C_1, \dots, C_n$ визначаються із системи рівнянь

$$(R(C_1, C_2, \dots, C_n; x), W_k(x)) = 0, k = \overline{1, n}. \quad (5.2.6)$$

де

$$(\varphi(x), g(x)) = \int_a^b \varphi(x)g(x)dx. \quad (5.2.7)$$

$W_1(x), \dots, W_n(x)$ – задані неперервні і лінійно незалежні на $[a, b]$ функції, що мають назву *півірочні функції*. Якщо узяти в якості півірочних функцій пробні, отримаємо метод Галеркіна в авторському варіанті.

Запишемо умову (5.2.5) у розгорнутому вигляді. Тоді для визначення значень параметрів $C_1, \dots, C_n$ отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{j=1}^n a_{kj} C_j = b_k, k = \overline{1, n}, \quad (5.2.8)$$

де

$$a_{kj} = (L[u_j], W_k(x)) = \int_a^b (u_j'' + pu_j + qu_j)W_k(x)dx; \quad (5.2.9)$$

$$b_k = (f(x) - L[u_0], W_k(x)) = \int_a^b (f(x) - u_0'' + pu_0 - qu_0)W_k(x)dx. \quad (5.2.10)$$

Можливий алгоритм наближеного розв'язання задачі (5.2.1), (5.2.3) за методом Галеркіна полягає у такому:

1. Підготовчий крок алгоритму.

Вибираємо функцію $u_0(x)$, пробні функції $u_1(x), \dots, u_n(x)$ та півірочні функції $W_1(x), \dots, W_n(x)$. Знаходимо нев'язку від заміщення $u_0(x)$ у рівняння (5.2.1), функцію $R_0(x) = L[u_0] - f(x)$. Якщо $\forall x \in [a, b] \quad R_0(x) = 0$, $Y(x) = u_0(x)$ і обчислення закінчуються. Якщо $R_0 \neq 0$:

2. Перший крок алгоритму. Будуємо $y_1(x) = u_0(x) + C_1 u_1(x)$. C_1 визначається з системи (5.2.8), $n = 1$. Знаходимо нев'язку

$$R(C_1, x) = L[u_0] - f(x) + C_1 L[u_1] = R_0(x) + C_1 L[u_1].$$

Якщо $R(C, x) \neq 0$, знаходимо

$$\max_{[a, b]} |y_1(x) - u_0(x)| = \Delta_{11} \hat{=} \max_{[a, b]} |R_1(C_1, x)| = \Delta_{12}.$$

Якщо $\Delta_{11} \leq \varepsilon_1$ або $\Delta_{12} \leq \varepsilon_2$, $Y(x) = y_1(x)$ і обчислення закінчуємо, якщо ні, переходимо на наступний крок тощо.

Отже, на m -му кроці будемо функцію

$$y_m(x) = u_0(x) + \sum_{i=1}^m C_i u_i(x),$$

визначаючи значення $C_1, \dots, C_m$ із розв'язання системи рівнянь (5.2.8), і визначаємо нев'язку

$$R(C_1, \dots, C_m, x) = R_0(x) + \sum_{i=1}^m C_i L[u_i].$$

5.2.3 Побудова системи пробних і повірочних функцій

1. Відомо, що функції $1, x, x^2, \dots, x^n, \dots$ є лінійно незалежні на усій числовій прямій R . Звідси можна зробити висновок про лінійну незалежність поліномів послідовних степенів як узагальнення.

Для побудови $u_0(x)$ та лінійно незалежної на $[a, b]$ системи пробних функцій $u_1(x), \dots, u_n(x)$, що є поліноми, можна застосувати метод невизначених коефіцієнтів. Наприклад, нехай $u_0 = A = P_0(x)$. Із умови (5.2.2) отримуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно A :

$$a_0 A = A_2, \quad b_0 A = b_2.$$

Якщо система не сумісна, шукаємо $u_0(x) = A + Bx = P_1(x)$, тощо, доки не знайдемо $u_0(x) = P_{k_0}(x)$, що задовольняє (5.2.5).

Далі, із умови (5.2.5) методом невизначених коефіцієнтів визначаються послідовно

$$u_1 = P_{r_1}(x), \quad r_1 > 0,$$

$$u_2 = P_{r_2}(x), \quad r_2 > r_1,$$

$$\dots = \dots\dots\dots$$

$$u_n = P_{r_n}(x), \quad r_n > r_{n-1}.$$

Приклад 5.3.

Побудувати систему з п'яти пробних функцій для задачі (5.16), (5.18) із межовими умовами

$$y(0) + y'(0) = 1, \quad y(1) + y'(1) = -4. \quad (5.2.11)$$

Нехай $u_0(x) = A$, тоді $u'_0 = 0$ і умови (5.2.8) дають несумісну систему рівнянь: $A = 1$, $A = -4$. Нехай $u_0(x) = A + Bx$, тоді $u'_0 = B$ і умови (5.2.11) дають $A = 6$, $B = -5$. Отже, $u_0(x) = 6 - 5x$.

Визначимо $u_1(x)$. Якщо $u_1 = A$ або $u_1 = A + Bx$, однорідні умови, що відповідають умовам (5.2.11), виконуються, якщо $u_1 = 0$, що протирічить умовам лінійної незалежності пробних функцій.

Нехай $u_1(x) = A + Bx + Cx^2$ ($C \neq 0$), тоді $u'_1(x) = B + 2Cx$ із однорідних умов, що відповідають (5.2.3), отримуємо систему рівнянь

$$A + B = 0, \quad A + 2B + 3C = 0 \rightarrow A = 3\alpha, \quad B = -3\alpha, \quad C = \alpha, \quad \alpha \in R.$$

Для однозначності розв'язку обираємо $\alpha = 1/3$, тоді

$$u_1(x) = 1 - x + \frac{1}{3}x^2.$$

Аналогічно, використовуючи

$$u_k = A_0 + A_1x + \dots + A_{k+1}x^{k+1}$$

знаходимо

$$u_2(x) = 1 - x + \frac{1}{4}x^3, u_3 = 1 - x + \frac{1}{5}x^4, u_4 = 1 - x + \frac{1}{6}x^5, u_5 = 1 - x + \frac{1}{7}x^6.$$

Приклад 5.4.

Побудувати $u_0(x)$ і систему з трьох пробних функцій для задачі (5.2.1), (5.2.3) із межовими умовами

$$y(0) + y'(0) = 1, \quad y(2) - y'(2) = 2. \quad (5.2.12)$$

Вочевидь, за $u_0(x) = A$ або $u_0(x) = A + Bx$ матимемо несумісні системи рівнянь відносно A та A, B . Шукаємо $u_0(x) = A + Bx + Cx^2$, тоді $u'_0 = B + 2Cx$ і маємо також несумісну систему рівнянь.

Шукаємо $u_0(x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3$, тоді $u'_0 = B + 2Cx + 3Dx^2$ і маємо

$$\begin{cases} A + B = 1, \\ A + 2B + 4C + 8D - B - 4C - 12D = 2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A + B = 1, \\ A + B - 4D = 2. \end{cases}$$

Оскільки ця система рівнянь перевизначена, задамо двом невідомим C і B довільні значення $a = -\alpha_1$, $B = \alpha_1$, $C = \alpha_2$, $D = -1/4$. За $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ маємо

$$u_0(x) = 1 - \frac{1}{4}x^3.$$

Визначимо $u_1(x)$. Нехай $u_1(x) = A + Bx$, $u'_1(x) = B$. Із однорідних умов, що відповідають (5.2.12), маємо

$$\begin{cases} A + B = 0, \\ A + B = 0, \end{cases} \Leftrightarrow A + B = 0$$

Із множини розв'язків $A = -\alpha$, $B = \alpha$ обираємо один ненульовий: $\alpha = -1$, тоді

$$u_1(x) = 1 - x.$$

Шукаємо $u_2(x)$. Нехай $u_2(x) = A + Bx + Cx^2$, тоді $u'_2 = B + 2Cx$. Із множини розв'язків $A = -\alpha_1$, $B = \alpha_1$, $C = \alpha_2$ обираємо один ненульовий при $\alpha_1 = \alpha_2 = -1$. Маємо

$$u_2(x) = 1 - x - x^2.$$

Шукаємо $u_3(x)$. Якщо $u_3(x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3$, $u'_3(x) = B + 2Cx + 3Dx^2$, із однорідних умов маємо

$$\begin{cases} A+B=0, \\ A+2B+0C-4D=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A+B=0, \\ D=0, \end{cases}$$

що протирічить умові $D \neq 0$.

Нехай тепер

$$u_3(x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4, \quad u'(x) = B + 2Cx + 3Dx^2 + 4Ex^3.$$

Із однорідних умов отримуємо систему рівнянь

$$\begin{cases} A+B=0, \\ A+2B+4C+8D+16E-B-4C-12D-32E=0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A+B=1, \\ A+B+0C-4D-16E=0. \end{cases}$$

Розв'язуючи цю систему рівнянь, отримуємо множину розв'язків:

$$A = -\alpha_1, B = \alpha_1, C = \alpha_2, D = -4\alpha_3, E = \alpha_3.$$

Обираємо один ненульовий розв'язок при $\alpha_1 = -1, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = 1$ і маємо

$$u_3(x) = 1 - x + x^2 - 4x^3 + x^4.$$

2. Можна будувати системи базисних функцій, використовуючи інші системи лінійно незалежних на R функцій:

$$e^{\alpha_1 x}, e^{\alpha_2 x}, \dots, e^{\alpha_n x}, \dots,$$

$$e^{\alpha x}, xe^{\alpha x}, \dots, x^n e^{\alpha x}, \dots,$$

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots$$

3. Важливим джерелом для побудови ортогональних на $[a, b]$ пробних функцій є множина розв'язків задачі на власні значення і вектори для диференціального оператора $L[y] = y''$.

Приклад 5.5.

Знайти дійсні значення параметра λ , за яких існує не тривіальний розв'язок диференціального рівняння

$$y'' + \lambda y = 0, \tag{5.2.13}$$

що задовольняє однорідні умови

$$y(0) + y'(0) = 0,$$

$$y(1) + y'(1) = 0.$$

$$(5.2.14)$$

Нехай $\lambda = 0$, тоді загальний розв'язок рівняння (5.2.13) матиме вигляд $y = C_1 x + C_2$. Спроба задовольнити межові умови (5.2.14) призводить до тривіального розв'язку $C_1 = C_2 = 0$, тобто $\lambda = 0$ не є власне значення, оскільки йому відповідає єдиний розв'язок $y = 0$. Така сама ситуація й за $\lambda < 0$. Отже, нехай $\lambda > 0$, тоді

$$y = C_1 \sin \gamma x + C_2 \cos \gamma x, \gamma = \sqrt{\lambda},$$

і межові умови (5.2.14) дають:

$$\begin{cases} C_1 + \gamma C_2 = 0, \\ C_1 \cos \gamma + C_2 \sin \gamma - C_1 \gamma \sin \gamma + C_2 \gamma \cos \gamma, \\ C_1 = -\gamma C_2. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = -\gamma C_2, \\ C_1 (\cos \gamma - \gamma \sin \gamma) + C_2 (\sin \gamma + \gamma \cos \gamma) = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = -\gamma C_2, \\ C_2 (1 + \lambda) \sin \gamma = 0 \end{cases}$$

Якщо $\gamma = n\pi$, $n = 1, 2, \dots$, існують нетривіальні розв'язки задачі (5.2.13), (5.2.14), тобто $\lambda_n = n^2 \pi^2$, а множина власних функцій, які відповідають власному значенню λ_n , має базисну функцію

$$y_n = \sin(\sqrt{\lambda_n} x) - \sqrt{\lambda_n} \cos(\sqrt{\lambda_n} x) = \sin(n\pi x) - n\pi \cos(n\pi x).$$

Отже, пробні функції можна обирати із власних функцій відповідної задачі на власні значення та функції

$$u_k(x) = A_k \sin(\sqrt{\lambda_k} x) + B_k \cos(\sqrt{\lambda_k} x) \quad (5.2.15)$$

Приклад 5.6.

Побудувати систему пробних функцій для крайової задачі із умовами

$$y'(0) = 2, \quad y(1) = 4.$$

Нехай $u_0(x) = A + Bx$. Із межових умов маємо

$$B = 2, \quad A + B = 4, \rightarrow A = 2, \quad B = 2,$$

$$u_0(x) = 2 + 2x.$$

Задамо

$$u_k(x) = A_k \sin(\sqrt{\lambda_k} x) + B_k \cos(\sqrt{\lambda_k} x).$$

Згідно однорідним межовим умовам маємо

$$B_k = 0, \quad \cos(\sqrt{\lambda_k} x) = 0 \rightarrow \lambda_k = (k - 1/2)\pi, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Звідси

$$u_k(x) = C_k \cos((k - 1/2)\pi x), \quad k = 1, (C_k = A_k).$$

Тоді

$$y_n(x) = 2 + 2x + \sum_{k=1}^n C_k \cos((k - 1/2)\pi x).$$

Приклад 5.7.

Побудувати систему пробних функцій для крайової задачі із умовами

$$2y'(0) - y(0) = -1, \quad y(1) = 3.$$

Нехай $u_0(x) = A + Bx$. Із межових умов маємо

$$2B = A - 1, A + B = 3, \rightarrow A = -7/3, B = 2/3,$$

$$u_0(x) = -\frac{7}{3} + \frac{2}{3}x.$$

Задамо

$$u_k(x) = A_k \sin(\sqrt{\lambda_k} x) + B_k \cos(\sqrt{\lambda_k} x).$$

Із відповідних однорідних умов знаходимо

$$2\sqrt{\lambda_k} B_k - A_k = 0, A_k \sin(\sqrt{\lambda_k} 1) + B_k \cos(\sqrt{\lambda_k} 1) = 0.$$

Звідси отримуємо $2\sqrt{\lambda_k} B_k = A_k$ і трансцендентне рівняння

$$\sqrt{\lambda_k} = -2\sqrt{\lambda_k} \quad (5.2.16)$$

для визначення власних значень.

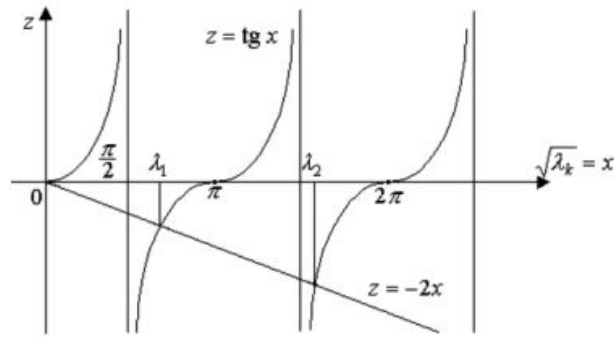


Рис. 5.2. Геометрична ілюстрація розв'язків рівняння (5.2.16)

Отже, позначивши C_k норми власних функцій, матимемо

$$u_k(x) = C_k \left(\cos(\sqrt{\lambda_k} x) + \frac{1}{2\sqrt{\lambda_k}} \sin(\sqrt{\lambda_k} x) \right).$$

Тоді

$$y_n(x) = -\frac{7}{3} + \frac{2}{3}x + \sum_{k=1}^n C_k \left(\cos(\sqrt{\lambda_k} x) + \frac{1}{2\sqrt{\lambda_k}} \sin(\sqrt{\lambda_k} x) \right).$$

Завдання для самостійної роботи

Знайти найточніший наближений розв'язок крайової задачі

$$y'' + \frac{d_0 + d_1 x}{x^2 - 1} y' + \frac{d_2}{\sqrt{1 - x^2}} y = 0,$$

$$a_0 y(a) + a_1 y'(a) = a_2,$$

$$b_0 y(b) + b_1 y'(b) = b_2,$$

що побудовано:

- 1) методом Галеркіна за допомогою системи із n пробних функцій – поліномів та двох систем повірочних функцій, одна з яких складається із пробних функцій, а інша – із поліномів Лежандра.
- 2) методом Рітца за допомогою системи із n пробних функцій – поліномів та системи із n пробних функцій вигляду (5.2.15).
- 3) інтегральним МНК за допомогою системи із n пробних функцій – поліномів.

За мірило точності обрати або

$$\max_{[a,b]} |y_m(x) - y_{m-1}(x)| \leq \varepsilon,$$

або

$$\max_{a,b} |R(C_1, \dots, C_m, x)| \leq \varepsilon.$$

В табл. 5.1 наведені варіанти завдань.

Таблиця 5.1 Значення коефіцієнтів

N	a	b	a_0	a_1	a_2	b_0	b_1	b_2	d_0	d_1	d_2
1	0	0,8	1	0	-0,5	1	0	0,5	2	0	6
2	0	0,8	1	0	0	1	0	0,1	2	0	12
3	0	0,8	0	1	0,5	1	0	0,2	2	0	6
4	0	0,8	0	1	0	1	0	0,1	2	0	8
5	0	0,8	1	0	-0,4	0	1	-0,2	2	0	20
6	0	0,8	1	0	-0,5	1	0	0,5	0	2	6
7	0	0,8	1	0	0	1	0	0,1	0	2	12
8	0	0,8	0	1	-0,4	0	1	-0,2	0	2	6
9	0	0,8	0	1	-0,1	0	1	-0,2	0	2	6
10	0	0,6	0	1	-0,1	1	0	0,4	2	0	18
11	0	0,6	0	1	-0,1	1	0	0,8	2	0	10
12	0	0,6	0	1	0,15	0	1	0,2	2	0	15
13	0	0,6	0	1	-0,1	1	0	0,4	2	0	18
14	0	0,4	1	0	0	1	0	0,2	0	2	15
15	0	0,4	1	0	1	1	0	-0,2	0	2	20

5.2.4 Параболічне рівняння

Розглянемо крайову задачу. Треба в області

$$D = \{(x, t) \in R^2; a \leq x \leq b, t > 0\}$$

знайти розв'язок $u(x, t)$ диференціального рівняння

$$L[u] \equiv \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial k}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} - k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \beta(x, t)u + g(x, t), \quad (5.2.17)$$

що задовольняє межові умови

$$\begin{aligned} a_0 u(a, t) + a_1 \frac{\partial u}{\partial x} &= a_2(t), \\ b_0 u(b, t) + b_1 \frac{\partial u}{\partial x} &= b_2(t) \end{aligned} \quad (5.2.18)$$

та початкову умову

$$u(x, 0) = f(x), \quad (5.2.19)$$

де $K(x, t) > 0, K'(x, t), \beta(x, t), g(x, t), a_2(t), b_2(t)$ – задані неперервні на D функції; a_0, a_1, b_0, b_1 – задані дійсні числа. $f(x)$ – задана функція, що неперервна на $[a, b]$ разом зі своїми похідними така, що

$$\begin{aligned} a_0 f(a) + a_1 f'(a) &= a_2(0), \\ b_0 f(b) + b_1 f'(b) &= b_2(0). \end{aligned} \quad (5.2.20)$$

Задамо в області D деяку систему функцій $v_k(x, t)$, $k = \overline{0, n}$ таких, що $v_0(x, t)$ задовольняє межові умови (5.2.18), а пробні функції $v_i(x)$ – лінійно незалежні на $[a, b]$ і задовольняють однорідні межові умови (5.2.20).

Складаємо функцію

$$u_n(x, t) = u_0(x, t) + \sum_{k=1}^n \varphi_k(t) v_k(x) \quad (5.2.21)$$

із невідомими поки функціями $\varphi_k(t)$, $k = \overline{1, n}$.

Треба визначити $\varphi_k(t)$ та кількість n цих функцій, щоб $u_n(x, t)$ задовольняла рівняння (5.2.18) і початкову умову (5.2.19) із заданою точністю.

Замість $u_n(x, t)$ замість $u(x, t)$ у рівняння (5.2.17). Отримуємо нев'язку

$$\begin{aligned} R_1(\varphi_1, \dots, \varphi_n, x, t) &= \sum_{k=1}^n v_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial t} - \sum_{k=1}^n \left(k \frac{\partial^2 v_k}{\partial x^2} + \frac{\partial k}{\partial x} \frac{\partial v_k}{\partial x} + \beta v_k \right) \varphi_k \\ &\quad - \left(k \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + \frac{\partial k}{\partial x} \frac{\partial v_0}{\partial x} + \beta v_0 + g - \frac{\partial v_0}{\partial t} \right). \end{aligned} \quad (5.2.22)$$

Після заміщення $u_n(x, 0)$, що отримуємо із (5.2.21) за $t = 0$, у (5.2.19) отримаємо нев'язку

$$R_2(\varphi_1(0), \dots, \varphi_n(0), x) = v_0(x, 0) + \sum_{k=1}^n \varphi_k(0) v_k(x) - f(x). \quad (5.2.23)$$

Ці нев'язки є характеристики відхилення функції (5.2.21) від точного розв'язку $u(x, t)$ задачі (5.2.17)–(5.2.19).

У загальному випадку ці нев'язки виявляються відмінними від нуля. Тому накладаємо додаткові умови на функції $\varphi(t)$ та їхні початкові значення $\varphi_k(0)$ так, щоб нев'язки у певному сенсі були найменшими.

В узагальненому методі Галеркіна ці умови визначаються системою рівнянь

$$(R_1(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t), x, t), w_k(x)) = 0, \quad k = \overline{1, n}; \quad (5.2.24)$$

$$(R_2(\varphi_1(0), \dots, \varphi_n(0), x), w_k(x)) = 0, \quad k = \overline{1, n}; \quad (5.2.25)$$

де $w_1(x), \dots, w_n(x)$ – задані повірочні лінійно незалежні функції і

$$(V(x), W(x)) = \int_a^b V(x) W(x) dx.$$

У розгорнутому вигляді умова (5.2.19) має вигляд

$$\sum_{j=1}^n a_{kj} \frac{d\varphi_j}{dt} - \sum_{j=1}^n c_{kj}(t) \varphi_j = b_k(t), \quad k = \overline{1, n}, \quad (5.2.26)$$

$$a_{kj} = (v_j, w_k) = \int_a^b v_j(x) w_k(x) dx,$$

$$c_{kj} = \left(\frac{\partial k v_j'}{\partial x} + \beta v_j, w_k \right) = \int_a^b \left(k v_j'' + \frac{\partial k}{\partial x} v_j' + \beta v_j \right) w_k dx, \quad (5.2.28)$$

$$b_k(t) = \int_a^b \left(k \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + \frac{\partial k}{\partial x} \frac{\partial v_0}{\partial x} + \beta v_0 + g - \frac{\partial v_0}{\partial t} \right) w_k(x) dx, \quad k, j = \overline{1, n}.$$

Позначимо

$$A = [a_{kj}]_n; \quad C = [c_{kj}]_n; \quad B = [b_k]_n; \quad V = [v_j]_n,$$

тоді система (5.2.26) запишеться як

$$A \frac{dV}{dt} = CV + B.$$

$$\frac{dV}{dt} = A^{-1}(CV + B). \quad (5.2.27)$$

Якщо $k(x, t), \beta(x, t)$ не залежать ввід t , система (5.2.27) – система зі сталими коефіцієнтами. Якщо в якості пробних функцій вибрати систему ортогональних функцій, матриця A і A^{-1} – діагональні.

Запишемо у розгорнутому вигляді умову (5.2.25).

$$\sum_{j=1}^n (\varphi_j(x), w_k(x)) v_j(0) = (f(x) - \varphi_0(x, 0), w_k(x)), \quad k = \overline{1, n}$$

або

$$\sum_{j=1}^n a_{kj} v_j(0) = d_k, \quad k = \overline{1, n}, \quad (5.2.28)$$

$$d_k = (f(x) - \varphi_0(x, 0), w_k(x)) = \int_a^b (f(x) - \varphi_0(x, 0) w_k(x)) dx.$$

$$V(0) = A^{-1} D, \quad D = [d_k]_n.$$

Отже, для відшукування функцій $V_k(t)$, $k = \overline{1, n}$, що визначають пробне рішення (5.2.21), отримуємо задачу Коші. Після заміщення отриманого розв'язку $v_k(t)$ цієї задачі у (5.2.21) маємо пробний розв'язок $u_n(x, t)$.

Алгоритм побудови наближеного розв'язку задачі (5.2.17)–(5.2.19) за методом Галеркіна, вважаючи, що послідовність $\{u_n(x, t)\}_0^\infty$ збігається рівномірно до точного розв'язку $U(x, t)$.

1. Вибираємо функцію $\varphi_0(x, t)$, підставляємо її у рівняння (5.2.21) і знаходимо нев'язку $R_{10}(x, t) = L[\varphi_0] - g(x, t)$. Знаходимо нев'язку $R_{20}(x) = \varphi_0(x, 0) - f(x)$ для умови (5.2.19). Визначаємо

$$\max_D |R_{10}(x, t)| = \Delta_{10}, \quad \max_{[a, b]} |R_{20}(x)| = \Delta_{20}.$$

2. Визначаємо функцію $v_1(t)$ із розв'язання задачі Коші (5.2.34), (5.2.36) при $n = 1$ і будуємо функцію

$$u_1(x, t) = \varphi_0 + v_1(t) \varphi_1(x).$$

Знаходимо за формулами (5.2.24), (5.2.25) нев'язки $R_{11}(v_1(t), x, t)$, $R_{21}(v_1(0))$ і визначаємо

$$\max_D |R_{11}(v_1, x, t)| = \Delta_{11}, \quad \max_{[a, b]} |R_{21}(v_1(0), x)| = \Delta_{21}.$$

Якщо $\Delta_{11} \leq \varepsilon_1$ і $\Delta_{21} \leq \varepsilon_2$, покладаємо $U(x, t) = u_1(x, t)$. Інакше переходимо до п.2 тощо.

Отже, на m -му кроці алгоритму будуємо функцію

$$u_m(x, t) = \varphi_0 + \sum_{k=1}^m v_k(t) \varphi_k(x),$$

визначивши спочатку функції $v_k(t)$, $k = \overline{1, m}$, із розв'язання задачі Коші (5.2.17), (5.2.18).

Побудова функції $u_0(x, t)$.

Приклад 5.7.

Побудуємо $u_0(x)$ і систему з п'яти пробних функцій для задачі з межовими умовами

$$y(0) + y'(0) = 1; \quad y(1) + y'(1) = -4.$$

Нехай $u_0(x) = A$, тоді $u'_0 = 0$ і межові умови дають несумісну систему рівнянь $A = 1$ і $A = -4$. Нехай $u_0 = A + Bx$, тоді $u'_0 = B \rightarrow$

$$A + B = 1, \quad A + 2B = -4 \rightarrow A = 6, \quad B = -5. \text{ Отже, } u_0 = 6 - 5x.$$

Визначаємо $u_1(x)$. Шукаємо $u_1(x) = A + Bx + Cx^2$; $u'_1 = B + 2Cx$, й із однорідних межових умов отримуємо систему

$$A + B = 0, \quad A + 2B + 3C = 0 \rightarrow A + B = 0, \quad B + 3C = 0.$$

Ця система має множину розв'язків: $A = 3\alpha$, $B = -3\alpha$, $C = \alpha$. Обираємо один розв'язок при $\alpha = 1/3$. Тоді

$$u_1(x) = 1 - x + \frac{1}{3}x^2.$$

Аналогічно, із використанням формули

$$u_k(x) = A_0 + A_1x + \dots + A_{k-1}x^{k-1},$$

отримуємо

$$u_2(x) = 1 - x + \frac{1}{4}x^3, \quad u_3(x) = 1 - x + \frac{1}{5}x^4, \quad u_4(x) = 1 - x + \frac{1}{6}x^5, \quad u_5(x) = 1 - x + \frac{1}{7}x^6.$$

Важливим джерелом для побудови ортогональних на $[a, b]$ пробних функцій є множина розв'язків задачі на власні значення для диференціального оператора $L[y] = y'' + py' + qy$.

Приклад 5.8.

Побудуємо $u_0(x, t)$ для задачі із межовими умовами

$$u(0, t) + \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = e^{-t}, \quad u(2, t) - \frac{\partial u(2, t)}{\partial x} = e^{-2t}. \quad (5.2.30)$$

Візьмемо $u_0(x, t) = A(t) + B(t)x + C(t)x^2 + D(t)x^3$, оскільки вибір $u_0(x, t)$ із меншою кількістю доданків призводить до несумісної систем рівнянь.

Із умов (5.2.30) маємо

$$\begin{aligned} A(t) + B(t) &= e^{-t}, \\ A(t) + B(t) - 4D(t) &= 2e^{-2t} \end{aligned} \rightarrow \begin{aligned} A(t) + B(t) &= e^{-t}, \\ -4D(t) &= 2e^{-2t} - e^{-t}. \end{aligned}$$

Одним із її розв'язків буде, наприклад, така сукупність функцій: $A(t) = e^{-t}$, $B(t) = C(t) = 0$, $D(t) = -0,5e^{-2t} + 0,25e^{-t}$. Отже,

$$u_0(x, t) = e^{-t} + \frac{1}{4}(e^{-t} + 2e^{-2t})x^3.$$

Важливим джерелом для побудови ортогональних на $[a, b]$ пробних функцій є множина розв'язків задачі на власні значення для диференціального оператора

$$L[y] = y'' + py' + qy.$$

Приклад 5.9.

Побудуємо $u_0(x, t)$ для задачі із межовими умовами

$$u(0, t) + \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = e^{-t}, \quad u(2, t) - \frac{\partial u(2, t)}{\partial x} = e^{-2t}. \quad (5.2.31)$$

Візьмемо $u_0(x, t) = A(t) + B(t)x + C(t)x^2 + D(t)x^3$, оскільки вибір $u_0(x, t)$ із меншою кількістю доданків призводить до несумісної системи рівнянь.

Із умов (5.2.31) маємо

$$\begin{aligned} A(t) + B(t) &= e^{-t}, & A(t) + B(t) &= e^{-t}, \\ A(t) + B(t) - 4D(t) &= 2e^{-2t} & \rightarrow & -4D(t) = 2e^{-2t} - e^{-t}. \end{aligned}$$

Одним із її розв'язків буде, наприклад, така сукупність функцій: $A(t) = e^{-t}$, $B(t) = C(t) = 0$, $D(t) = -0,5e^{-2t} + 0,25e^{-t}$. Отже,

$$u_0(x, t) = e^{-t} + \frac{1}{4}(e^{-t} + 2e^{-2t})x^3.$$

Запитання для самоперевірки

1. Наведіть фізичну інтерпретацію крайової задачі (5.2.17)–(5.2.19).
2. Отримайте розв'язок задачі (5.2.17)–(5.2.19) методом розділення змінних.
3. Знайдіть розв'язок задачі (5.2.17)–(5.2.19) із використанням інтегрального перетворення Лапласа.
4. Яким умовам мають задовольняти пробні функції?
5. Як будуються в алгоритмі методу Галеркіна функції R_1 і R_2 ?
6. Як будується система лінійних алгебраїчних рівнянь у методі Галеркіна?
7. Як будується система лінійних диференціальних рівнянь для визначення коефіцієнтів $\varphi_k(t)$ пробного розв'язку?
8. Як визначаються початкові умови у задачі Коші відносно функцій $\varphi_k(t)$?
9. Як нормувати пробну або повірочну функції на відріzkі $[a, b]$?
10. Як перевірити ортогональність функцій на $[a, b]$?

5.3 Варіаційний метод Рітца

Ідея методу полягає у заміні крайової задачі (5.2.1), (5.2.2) рівносильною задачею про відшукування двічі неперервної на $[a, b]$ функції $Y(x)$, яка доставляє екстремум функціоналу

$$J(y) = \int_a^b [K(x)(y')^2 + \beta(x)y^2 + 2g(x)y]dx + \alpha_b[y^2(b) - 2T_b y(b)] + \alpha_a[y^2(a) - 2T_a y(a)] + 2q_b y(b) - 2q_a y(a), \quad (5.3.1)$$

причому значення параметрів $\alpha_a, \alpha_b, q_a, q_b, T_a, T_b$ визначаються залежно від значень $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2$ згідно з наведеною нижче таблицею.

Таблиця 5.2 Значення параметрів функціоналу

a_0	a_1	b_0	b_1	T_a	T_b	α_a	α_b	q_a	q_b
$\neq 0$	0	$\neq 0$	0	a_2/a_0	b_2/b_0	0	0	0	0
$\neq 0$	0	0	$\neq 0$	a_2/a_0	0	0	0	0	$-K(b)\frac{b_2}{b_1}$
$\neq 0$	0	$\neq 0$	$\neq 0$	a_2/a_0	b_2/b_0	0	$K(b)\frac{b_0}{b_1}$	0	0
0	$\neq 0$	$\neq 0$	0	0	b_2/b_0	0	0	$-K(a)\frac{a_2}{a_1}$	0
0	$\neq 0$	0	$\neq 0$	0	0	0	0	$-K(a)\frac{a_2}{a_1}$	$-K(b)\frac{b_2}{b_1}$
0	$\neq 0$	$\neq 0$	$\neq 0$	0	b_2/b_0	0	$K(b)\frac{b_2}{b_1}$	$-K(a)\frac{a_2}{a_1}$	0
$\neq 0$	$\neq 0$	$\neq 0$	0	a_2/a_0	b_2/b_0	$-K(a)\frac{a_0}{a_1}$	0	0	0
$\neq 0$	$\neq 0$	0	$\neq 0$	a_2/a_0	0	$-K(a)\frac{a_0}{a_1}$	0	0	$-K(b)\frac{b_2}{b_1}$
$\neq 0$	$\neq 0$	$\neq 0$	$\neq 0$	a_2/a_0	b_2/b_0	$-K(a)\frac{a_0}{a_1}$	$K(b)\frac{b_0}{b_1}$	0	0

У методі Рітца для відшукування наближеного розв'язку крайової задачі (5.2.1), (5.2.2) будується функціональна послідовність $\{y_n(x)\}_0^\infty$ з пробних розв'язків $y_n(x)$ таким чином.

Як й у методі Галеркіна, задаємося на $[a, b]$ функцією $u_0(x)$ та пробними

функціями $u_1(x), \dots, u_n(x)$ такими, що $u_0(x)$ задовольняє умови (5.2.2), а $u_1(x), \dots, u_n(x)$ задовольняють однорідним межовим умовам (5.2.5).

$$y_n(x) = u_0(x) + \sum_{j=1}^n C_j u_j(x), \quad (5.3.2)$$

де C_i , $i = \overline{1, n}$ – деякі сталі, що підбираються так, щоб (5.3.2) доставляла екстремум функціоналу (5.3.1). Після заміщення (5.3.2) у (5.3.1) отримуємо квадратичну функцію змінних $C_1, \dots, C_n$.

$$\begin{aligned} J[y_n(x)] = & \int_a^b [K(x) \left(u'_0(x) + \sum_{i=1}^n C_i u'_i(x) \right)^2 + \beta(x) \left(u'_0(x) + \sum_{i=1}^n C_i u'_i(x) \right)^2 \\ & + 2g(x) \left(u'_0(x) + \sum_{i=1}^n C_i u'_i(x) \right)] dx + \alpha_b \left[\left(u'_0(b) + \sum_{i=1}^n C_i u'_i(b) \right)^2 \right. \\ & \left. - T_b \left(u'_0(b) + \sum_{i=1}^n C_i u'_i(b) \right) \right] \\ & + \alpha_a \left[\left(u'_0(a) + \sum_{i=1}^n C_i u'_i(a) \right)^2 - T_a \left(u'_0(a) + \sum_{i=1}^n C_i u'_i(a) \right) \right] \\ & + 2q_b \left(u'_0(b) + \sum_{i=1}^n C_i u'_i(b) \right)^2 - 2q_a \left(u'_0(a) + \sum_{i=1}^n C_i u'_i(a) \right)^2 = \varphi(C_1, \dots, C_n). \end{aligned} \quad (5.3.3)$$

Необхідні умови екстремуму функції (5.3.2) мають вигляд

$$\frac{\partial \varphi}{\partial C_k} = 0, \quad k = \overline{1, n}. \quad (5.3.4)$$

Ці умови призводять до системи СЛАР

$$\sum_{i=1}^n a_{ki} C_i = b_k, \quad k = \overline{1, n}, \quad (5.3.5)$$

де

$$\begin{aligned} a_{kj} = & \int_a^b [K(x) u'_k u'_j + \beta(x) u_k u_j] dx + \alpha_b u_k(b) u_j(b) + \alpha_b u_k(b) u_j(b) + \alpha_a u_k(a) u_j(a); \\ b_k = & - \int_a^b [K(x) u'_k u'_j + (\beta(x) u_0 + g(x) u_k)] dx \\ & - [\alpha_b (u_0(b) - T_b) + q_b] u_k(b) - [\alpha_a (u_k(a) - T_a) - q_a] u_k(a). \end{aligned} \quad (5.3.6)$$

Опишемо можливий алгоритм наближеного розв'язку задачі (5.2.1), (5.2.2) методом Рітца за припущення, що $\{y_n(x)\}_0^n$ збігається до $Y(x)$ при $n \rightarrow \infty$.

1. Визначаємо значення параметрів функціоналу (5.2.10) відповідно до табл. 5.2.

Вибираємо функції $u_1(x), u_1(x), \dots, u_n(x)$ знаходимо функцію

$$R_0(x) = L[u_0] - g(x) = K(x)u_0'' + K'(x)u_0'(x) - \beta(x)u_0(x) - g(x),$$

тобто нев'язку від заміщення $u_0(x)$ у рівняння (5.2.1). Якщо $R_0(x) \neq 0$, переходимо до наступного кроку алгоритму.

2. Перший крок алгоритму. Будуємо функцію $y_1(x) = u_0(x) + u_1(x)$, визначаючи C_1 із системи (5.3.5) при $n = 1$. Знаходимо нев'язку

$$\begin{aligned} R(C_1, x) &= L[y_1] - g(x) \\ &= K(x)(u_0'' + C_1 u_1'') + K'(x)(u_0' + C_1 u_1') - \beta(x)(u_0 + C_1 u_1) - g(x). \end{aligned}$$

Якщо $R(C_1, x) \neq 0$ на $[a, b]$ відшукуємо

$$\max_{[a, b]} |y_1(x) - u_0(x)| = \Delta_{11}, \quad \max_{[a, b]} |R(C_1, x)| = \Delta_{12}$$

тощо.

На m -му кроці будуємо функцію

$$y_m(x) = u_0(x) + \sum_{j=1}^m C_j u_j(x),$$

і знаходимо нев'язку

$$\begin{aligned} R(C_1, \dots, C_m, x) &= L[y_m] - g(x) = K(x) \left(u_0'' + \sum_{j=1}^m C_j u_j'' \right) \\ &+ K'(x) \left(u_0' + \sum_{j=1}^m C_j u_j' \right) - \beta(x) \left(u_0 + \sum_{j=1}^m C_j u_j \right) - g(x). \end{aligned}$$

Приклад 5.10.

Нехай треба мінімізувати функціонал

$$V[y] = \int_0^1 [y'(x)^2 + \pi^2 y^2(x) - 4\pi^2 y(x) \sin(\pi x)] dx$$

на множині $C_{[0,1]}^2$ за заданих початкових умовач $y(0) = y(1) = 0$.

Розв'язання.

Базисні функції $\varphi(x)$ обираємо у вигляді

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq x_{i-1}, \\ \frac{1}{h_{i-1}}(x - x_{i-1}), & x_{i-1} \leq x \leq x_i, \\ \frac{1}{h_i}(x_{i+1} - x), & x_{i+1} \leq x \leq 1, \end{cases}$$

Покладемо $h_i = h = 0,1$, тобто маємо $x_i = i \cdot h = 0,1i$, $i = \overline{1,9}$, обчислимо інтеграли:

$$\begin{aligned}
 I_{1,i} &= 100 \int_{0,1}^{0,1i+0,1} (0,1i + 0,1 - x)(x - 0,1i) \pi^2 dx = \frac{\pi^2}{60}; \\
 I_{2,i} &= 100 \int_{0,1i-0,1}^{0,1i} (x - 0,1i + 0,1 - x)^2 \pi^2 dx = \frac{\pi^2}{30}; \\
 I_{3,i} &= 100 \int_{0,1}^{0,1i+0,1} (0,1i + 0,1 - x)^2 \pi^2 dx = \frac{\pi^2}{30}; \\
 I_{4,i} &= 100 \int_{0,1}^{0,1i} dx = 10; \quad I_{5,i} = 10 \int_{0,1i-0,1}^{0,1i} (x - 0,1i + 0,1) 2\pi^2 \sin \pi x dx \\
 &= -2\pi \cos(0,1\pi i) + 20[\sin(\pi i) - \sin(0,1i - 0,1)\pi]; \\
 I_{6,i} &= 10 \int_{0,1}^{0,1i+0,1} (0,1i + 0,1 - x) 2\pi^2 \sin \pi x dx \\
 &= 2\pi \cos(0,1\pi i) - 20[\sin(0,1i + 0,1)\pi i - \sin(0,1i\pi)].
 \end{aligned}$$

Діагональні елементи матриці системи дорівнюють:

$$\begin{aligned}
 a_{i,i} &= 20 + \pi^2/15, \quad i = \overline{1,9}; \\
 a_{i,i+1} &= -10 + \pi^2/60, \quad i = \overline{1,8}; \\
 a_{i,i+1} &= -10 + \pi^2/60, \quad i = \overline{2,9}; \\
 b_i &= 40 \sin(0,1\pi i)[1 - \cos(0,1\pi)], \quad i = \overline{1,9}.
 \end{aligned}$$

Розв'язання трьохдіагональної матриці дає:

$$\begin{aligned}
 c_9 &= 0,3103, \quad c_8 = 0,5902, \quad c_7 = 0,8123, \quad c_6 = 0,9550, \quad c_5 = 1,00141, \\
 c_4 &= 0,9550, \quad c_3 = 0,8123, \quad c_2 = 0,5902, \quad c_1 = 0,3103.
 \end{aligned}$$

Отже, отримано наближений розв'язок варіаційної задачі у вигляді лінійної комбінації

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^9 c_i \varphi_i(x).$$

Базис з B -сплайнів

Кусково-лінійна апроксимація розв'язку варіаційної задачі, що наведена у цьому прикладі, є неперервна, але не диференційовна на проміжку $[0,1]$. Тому слушно обирати базисні функції із класу $C_{[a,b]}^2$.

B -сплайни мають задовольняти умови

$$S(x_j) = f(x_j), \quad j = 0, 2, 4;$$

та умови на кінцях:

$$S''(x_0) = S''(x_4) = 0; \quad S'(x_0) = S'(x_4) = 0.$$

$$S(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -2, \\ \frac{1}{4}(2+x)^3, & -2 \leq x \leq -1, \\ \frac{1}{4}[(2+x)^3 - 4(1+x)^3], & -1 \leq x \leq 0, \\ \frac{1}{4}[(2-x)^3 - 4(1-x)^3], & 0 \leq x \leq 1, \\ \frac{1}{4}(2-x)^3, & 1 \leq x \leq 2, \\ 0, & x > 2. \end{cases}$$

Ця функція використовується для побудови базисних функцій. Задамо n і визначимо крок рівномірного розбиття $h = 1/(n+1)$ і розіб'ємо відрізок $[0,1]$ так, що $x_i = ih$, $i = \overline{0, n+1}$. Базисні функції визначаються як:

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} S\left(\frac{x}{h}\right) - 4S\left(\frac{x+h}{h}\right), & i = 0, \\ S\left(\frac{x-h}{h}\right) - S\left(\frac{x+h}{h}\right), & i = 1, \\ S\left(\frac{x-ih}{h}\right), & 2 \leq i \leq n-1, \\ S\left(\frac{x-nh}{h}\right) - S\left(\frac{x-(n+2)h}{h}\right), & i = n, \\ S\left(\frac{x-(n+1)h}{h}\right) - 4S\left(\frac{x-(n+2)h}{h}\right), & i = n+1. \end{cases}$$

Отримана система функцій $\{\varphi_i(x)\}_{i=0}^{n+1}$ є лінійно незалежна і кожна функція задовольняє однорідні межові умови.

Оскільки кожна функція $\varphi_i(x)$ разом зі своєю похідною $\varphi'_i(x)$ відрізняється від нуля лише на $[x_{i-2}, x_{i+2}]$, матриця системи для відшукування коефіцієнтів лінійної комбінації має стрічковий вигляд:

$$A = \begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \ddots & \dots & \dots & \vdots \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & \ddots & \dots & \vdots \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & a_{n-2,n+1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n+1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & a_{n,n+1} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & a_{n+1,n-2} & a_{n+1,n-1} & a_{n+1,n} & a_{n+1,n+1} \end{bmatrix}.$$

Коефіцієнти a_{ij} визначаються за формулою

$$a_{ij} = \int_0^1 [p(x)\varphi_i'(x)\varphi_j'(x) + q(x)\varphi_i(x)\varphi_j(x)]dx, \quad i, j = \overline{0, n+1}.$$

Елементи стовпця правої частини:

$$b_i = \int_0^1 f(x)\varphi_i(x)dx.$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \ddots & \dots & \dots & \vdots \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & \ddots & \dots & \vdots \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & a_{n-2,n+1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n+1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & a_{n,n+1} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & a_{n+1,n-2} & a_{n+1,n-1} & a_{n+1,n} & a_{n+1,n+1} \end{bmatrix}.$$

Коефіцієнти a_{ij} визначаються за формулою

$$a_{ij} = \int_0^1 [p(x)\varphi_i'(x)\varphi_j'(x) + q(x)\varphi_i(x)\varphi_j(x)]dx, \quad i, j = \overline{0, n+1}.$$

Елементи стовпця правої частини:

$$b_i = \int_0^1 f(x)\varphi_i(x)dx.$$

Завдання для самостійної роботи

Отримати розв'язок крайової задачі

$$y'' - 3y' + 2y = 2x^2 - 6x - 2,$$

$$y(0) + y'(0) = 1,$$

$$y(1) + y'(1) = -4.$$

аналітичним методом.

Запитання для самоперевірки

1. Опишіть алгоритм розв'язання крайової задачі для лінійного диференціального рівняння другого порядку аналітичним методом.
2. Яким чином рівняння (5.2.1) можна привести до (5.2.2)
3. У чому різниця між крайовою задачею та задачею Коші?
4. Які умови має задовольняти пробні функції у методі Галеркіна?
5. Як відшукується функція нев'язки у методі Галеркіна?
6. Як у методі Галеркіна будується система лінійних алгебраїчних рівнянь?
7. Опишіть алгоритм наближеного розв'язку крайової задачі для лінійного диференціального рівняння методом Галеркіна.
8. У чому полягає основна ідея варіаційного підходу до розв'язання крайової задачі (5.2.1), (5.2.2)?
9. Якими властивостями мають володіти пробні функції у методі Рітца?
10. Як у методі Рітца відшукується нев'язка пробного розв'язку?
11. Як у методі Рітца будується система алгебраїчних рівнянь для визначення коефіцієнтів пробного розв'язку?
12. Як в інтегральному МНК будується система алгебраїчних рівнянь для визначення параметрів пробного розв'язку?
13. Опишіть алгоритм наближеного розв'язку крайової задачі (5.2.1), (5.2.2) інтегральним МНК.
14. Напишіть рівняння і межові умови задачі на власні значення.

5.4 Особливості вибору базисних функцій

Сформулюємо деякі вимоги до базисних функцій. Припустимо, що шукається наближений розв'язок вигляду

$$\tilde{u}_N = \sum_{n=1}^N a_n u_n. \quad (5.4.1)$$

1. Скінченна система $\{u_n\}_N$ функцій, що використовуються, має бути лінійно незалежною. Тоді така система функцій утворює базис в N -вимірному підпросторі $\mathcal{H}_N \subset \mathcal{H}$, яке є лінійною оболонкою цієї системи, а $\tilde{u}_N \in \mathcal{H}_N$.

2. Для збіжності наближеного розв'язку $\tilde{u}_N \in \mathcal{H}_N$ до слабого розв'язку $u_* \in \mathcal{H}$ рівняння $Au = f$ можна вимагати, щоб система $\{u_n\}_N$ функцій входила у систему $\{u_n\}$, яка є ортонормований (або ортогональний) базис в $\mathcal{H}$. Для того, щоб гарантувати, що норма нев'язки операторного рівняння при $N \rightarrow \infty$ прямує до нуля, можна вимагати виконання деяких додаткових умов.

3. Базисні функції u_n мають належати області визначення $D(A)$ оператора A , оскільки для відшукування коефіцієнтів A_n у (5.4.1) необхідно спочатку обчислити значення (Au_n, v_k) , де v_k , $k = \overline{1, N}$, – проєкційні функції, а це можливе лише при виконанні вимоги, що сформульовано.

Приклад 5.10.

Розглянемо крайову задачу

$$\begin{aligned} -(p(x)u'(x))' + q(x)u(x) &= f(x), \quad x \in (0,1); \\ u(0) = u(1) &= 0. \end{aligned} \quad (5.4.2)$$

Нехай $0 < p_0 \leq p(x) \leq \bar{p}$, $|p'(x)| \leq p_1$, і $0 < q(x) \leq \bar{q}$ за будь-яких $x \in (0,1)$, p_0 , $\bar{p}$, p_1 , $\bar{q}$ – додатні сталі. Оператор Штурма–Ліувілля A , що запроваджується рівністю $Au = -(pu')' + qu$, визначений на множині $D(A)$ двічі неперервно диференційовних на $[0, 1]$ функцій, які перетворюються у нуль на кінцях цього відрізка. Ця множина є лінійний многовид гільбертова простору $L^2[0,1]$ функцій, що є підсумовувані із квадратом на $[0,1]$.

На множині $D(A)$ оператор A додатно визначений, але крайова задача (5.4.2) не матиме класичного розв'язання у класі функцій із $D(A)$, коли функція $f(x)$ не належить області $R(A)$ значень цього оператора (наприклад, має в інтервалі $(0,1)$ точки розриву). Для відшукування слабого розв'язку операторного рівняння $Au = f$ необхідно поповнити множину $D(A)$. Поповнення цієї множини можна побудувати по енергетичній нормі, що індукована енергетичним скалярним добутком, який визначається для функцій $u, v \in D(A)$ рівністю

$$(u, v)_A = (Au, v) = \int_0^1 (-(p(x)u'(x))' + q(x)u(x))v(x)dx.$$

Звідси інтегруванням частинами із урахуванням межових умов знаходимо

$$(u, v)_A = \int_0^1 (p(x)u'(x)v'(x) + q(x)u(x)v(x))dx.$$

У результаті для енергетичної норми і оцінок функцій $p(x)$ та $q(x)$ отримаємо

$$\begin{aligned} \|u\|_A^2 &= (u, u)_A = \int_0^1 (p(x)u'(x)^2 + q(x)u^2(x))dx \leq \\ &\leq \bar{p} \int_0^1 u'^2(x)dx + \bar{q} \int_0^1 u^2(x)dx \leq \left(\bar{p} + \frac{\bar{q}}{\pi^2} \right) \int_0^1 (u'(x))^2 dx. \end{aligned} \quad (5.4.3)$$

Оператор $B = -d^2/dx^2$ також додатно визначений на множині $D(A)$. Вона всюди щільна в енергетичному просторі $\mathcal{H}_B$, що є поповнення множини $D(A)$ за нормою $\|\cdot\|_B$, індукованою енергетичним скалярним добутком, який для функцій $u, v \in D(A)$ визначається співвідношенням

$$(u, v)_B = (Bu, v) = \int_0^1 (-u''(x))v(x)dx.$$

Звідси інтегруванням частинами із урахуванням межових умов знаходимо

$$(u, v)_B = \int_0^1 u'(x)v'(x)dx, \quad \|u\|_B^2 = \int_0^1 (u'(x))^2 dx. \quad (5.4.4)$$

Функції $u_n = \sin n\pi x$, $x \in [0, 1]$, $n \in \mathbb{N}$, є власні елементи оператора B й утворюють в $D(A)$ ортогональний базис. Тому система цих функцій є замкнута в $D(A)$, а значить, й у $\mathcal{H}_B$, оскільки множина $D(A)$ є всюди щільна в $\mathcal{H}_B$. Але із (5.4.3), (5.4.4) та оцінок для функції $p(x)$ випливає, що

$$p_0 \|u\|_B^2 \leq \|u\|_A^2 \leq \left(\bar{p} + \frac{\bar{q}}{\pi^2} \right) \|u\|_B^2.$$

Отже, $\mathcal{H}_A$ складається із тих самих елементів, що й $\mathcal{H}_B$, так що система функцій $u_n(x)$ є замкнута й у $\mathcal{H}_A$.

Систему функцій $u_n(x) = \sin n\pi x$, $n \in \mathbb{N}$, можна ортонормувати на $[0, 1]$, але ж використання цих функцій в якості базисних функцій при наближеному розв'язанні крайової задачі (5.4.3) методами Бубнова–Галеркіна або Рітца не забезпечить прямування до нуля при $N \rightarrow \infty$ нев'язки у відповідному операторному рівнянні $Au = f$. Справа у тому, що ці функції, будучи власними елементами оператора B , не є власними елементами оператора A (див. зауваження 1).

Для диференціального оператора A умова $u_n \in D(A)$, $n = \overline{1, N}$, що враховується при виборі базисних функцій, означає, що функції u_n мають задовольняти не тільки вимогу диференційовності, але й межові умови на поверхні S , яка обмежує область V задачі. Нагадаємо, що в основі більшості диференціальних рівнянь математичної фізики лежать локальні форми законів збереження фізичних субстанцій, які для процесів, що не залежать від часу, можна подати у вигляді

$$Au = -\nabla(A_1 u) + B_1 u = f, \quad D(A) \subset R(A) \subset \mathbb{R}, \quad (5.4.5)$$

де $u \in D(A)$ и $f \in R(A)$ – шукана та задана функції просторових координат, A_1 , B_1 – лінійні диференціальні оператори, відносно яких припускаємо, що порядок похідних за просторовими координатами не вищий, ніж в A_1 (тоді порядок похідних в A на одиницю вищий за A_1). Ясно, що $A_1 u$ у даному випадку буде векторною функцією (часто градієнтом шуканої функції u).

Якщо в якості проекційних вибрати функції $v_k \in L^2(V)$, $k \in \mathbb{N}$, що утворюють у гільбертовому просторі $L^2(V)$ лічильний базис, замість (5.4.5) можемо записати $(Au, v_k) = (f, v_k)$, $k \in \mathbb{N}$, або

$$\int_V (-\nabla(A_1 u) + B_1 u) v_k dV = \int_V f v_k dV, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (5.4.6)$$

Рівності (5.4.6) разом із межовими умовами складають *інтегральне формулювання задачі*, що описується операторним рівнянням (5.4.5).

Нехай наближений розв'язок рівняння (5.4.5) визначається за методом ортогональних проекцій у вигляді

$$\tilde{u}_N = \sum_{n=1}^N a_n u_n. \quad (5.4.7)$$

Тоді після підстановки (5.4.7) у ліву частину (5.4.6), отримаємо рівняння, ліва частина якого представлена у вигляді лінійної комбінації N складових

$$(Au_n, v_k) = \int_V (-\nabla(A_1 u_n) + B_1 u_n) v_k dV, \quad k, n = \overline{1, N}, \quad (5.4.8)$$

із невідомими коефіцієнтами a_n . В результаті отримаємо СЛАР

$$\sum_{n=1}^N a_n (Au_n, v_k) = (f, v_k), \quad k = \overline{1, N}, \quad (5.4.9)$$

відносно невідомих коефіцієнтів a_n . Якщо $u_n \in D(A)$, відповідно до *першої формули Гріна* замість (5.4.8) при $k, n = \overline{1, N}$ отримаємо

$$(Au_n, v_k) = \int_V v_k B_1 u_n dV + \int_V (A_1 u_n) \nabla v_k dV - \int_S v_k (A_1 u_n) n dS, \quad (5.4.10)$$

де n – одиничний вектор зовнішньої нормалі до поверхні S .

Із (5.4.10) випливає, що вимоги до диференційовності базисних функцій u_n можна

було б частково перекласти на проекційні функції v_k , тобто вибрати в (5.4.7) $u_n \in D_1 = D(A_1) \cup D(B_1)$, $n = \overline{1, N}$, неперервно подовживши оператор A на $D_1 \subset L_2(V)$, а від функцій v_k вимагати неперервної диференційовності в V .

Отже, із урахуванням (5.4.10), СЛАР (5.4.9) можна записати у вигляді

$$\sum_{n=1}^N G_{nk} a_n = f_k, \quad k = \overline{1, N}, \quad (5.4.11)$$

де при $k, n = \overline{1, N}$

$$G_{nk} = \int_V v_k B_1 u_n dV + \int_V (A_1 u_n) \nabla v_k dV - \int_S (A_1 u_n) n dS, \quad (5.4.12)$$

а значення $f_k = (f, v_k)$, $k = \overline{1, N}$, дорівнюють інтегралам у правій частині (5.4.9).

Припустимо тепер, що функції u_n , $n = \overline{1, N}$, в (5.4.12) вибрані так, що на поверхні S^* , яка розділяє область V на дві підобласті V_1 та V_2 ($V = V_1 \cup V_2 \cup S^*$), проекція $(A_1 u)_n^*$ має розрив, порушено умову

$$(A_1 u_n(P^*))_1 = (A_1 u_n(P^*))_2, \quad P^* \in S^*. \quad (5.4.13)$$

Нехай функції v_k також є розривні на цій поверхні, тобто границі $v_k^{(1)}(P^*)$ та $v_k^{(2)}(P^*)$ кожної функції $v_k(P)$ за прямування точки P до $P^* \in S^*$ з боку підобластей V_1 і V_2 можуть не бути рівними. Тоді матимемо

$$\begin{aligned} (A u_n, v_k) = & \int_V v_k B_1 u_n dV + \int_{V_1} (A_1 u_n) \nabla v_k dV + \int_{V_2} (A_1 u_n) \nabla v_k dV - \\ & - \int_S v_k (A_1 u_n) n dS - \int_{S^*} (v_k^{(1)} (A_1 u_n)_1 n^* - v_k^{(2)} (A_1 u_n)_2 n^*) dS. \end{aligned} \quad (5.4.14)$$

Але для збіжності наближеного розв'язку необхідно, щоб виконувалася умова (5.4.7). Для цього скористаємося *методом зважених нев'язок*, та виберемо в якості *вагових функцій* $1/2(v_k^{(1)} + v_k^{(2)})$:

$$\int_{S^*} ((A_1 u_n)_1 n^* - (A_1 u_n)_2 n^*) \frac{1}{2} (v_k^{(1)} + v_k^{(2)}) dS = 0. \quad (5.4.15)$$

Відніmemo ліву частину (5.4.15) із правої частини (5.4.14):

$$\begin{aligned} (A u_n, v_k) = & \int_V v_k B_1 u_n dV + \int_{V_1} (A_1 u_n) \nabla v_k dV + \int_{V_2} (A_1 u_n) \nabla v_k dV - \\ & - \int_S v_k^{(1)} (A_1 u_n) n dS - \int_{S^*} ((A_1 u_n)_1 n^* + (A_1 u_n)_2 n^*) \frac{1}{2} (v_k^{(1)} - v_k^{(2)}) dS. \end{aligned}$$

Звідси випливає, що для зникнення інтегралу по поверхні S^* досить неперервності

функцій v_k , $k = \overline{1, N}$, у точках поверхні S^* .

Тепер розглянемо питання про межові умови на поверхні S , що обмежує область V . Нехай на ділянках $S_1 \subset S$ цієї поверхні задана межа умова

$$u(P) = f_1(P), \quad P \in S_1, \quad (5.4.16)$$

а на ділянках $S_2 = S \setminus S_1$ — межа умова

$$(A_1 u(P))n(P) + \beta(P)u(P) = f_2(P), \quad P \in S_2, \quad (5.4.17)$$

де f_1 , β і f_2 — задані функції. Тоді наближений розв'язок у вигляді (5.4.9) має задовольняти (5.4.16) у кожній точці $P \in S_1$, а для виконання (5.4.17) можна вимагати рівність нулю у зваженої нев'язки, що виникає при підстановці (5.4.17) у (5.4.16). При виборі функцій v_k в якості вагових матимемо

$$\int_{S_2} ((A_1 \tilde{u}_N)n + \beta \tilde{u}_N - f_2)v_k dS = 0, \quad k = \overline{1, N} \quad (5.4.18)$$

У цьому разі замість (5.4.7) доцільно шукати наближений розв'язок у вигляді

$$\tilde{u}_N = u_0 + \sum_{n=1}^N a_n u_n, \quad (5.4.19)$$

де $u_0(P) = f_1(P)$ при $P \in S_1$, а функції u_n, v_k вибрати так, щоб $u_n(P) = v_k(P) = 0$, $P \in S_1$, $k, n = \overline{1, N}$. Підставимо (5.4.19) у (5.4.4) і виконаємо перетворення, аналогічні перетворенням, що призвели до СЛАР (5.4.11). Тоді із урахуванням (5.4.18) отримаємо систему рівнянь (5.4.11), в якій при $k, n = \overline{1, N}$

$$G_{nk} = \int_V (v_k B_1 u_n + (A_1 u_n) \nabla v_k) dV + \int_{S_2} \beta u_n v_k dS, \\ f_1 = \int_V (f v_k - (A_1 u_0) \nabla v_k - v_k B_1 u_0) dV + \int_{S_2} (f_2 - \beta u_0) v_k dS.$$

Описаний підхід надає можливість не накладати на вибір функцій $u_n \in D_1 = D(A_1) \subset D(B_1)$, $n = \overline{0, N}$, обмежень, що витікають із умови (5.4.18). У зв'язку з цим така межа умова зазвичай зветься природною. На противагу цьому межа умова (5.4.16), якій має задовольняти (5.4.19), зветься головною, а іноді попередньою у тому сенсі, що вона має враховуватися ще до відшукування коефіцієнтів a_n при побудові наближеного розв'язку (5.4.19). Хоч наближений розв'язок можна будувати без врахування межових умов, функції u_n все-таки краще обирати із урахуванням цих умов, оскільки за їхнім виконанням послідовність наближених розв'язків матиме вищу збіжність, особливо в околі точок $P \in S_2$.

Якщо у варіаційне формулювання задачі входить функціонал, що мінімізується, який допустимо розглядати на множині функцій, що задовольняють головній межовій умові вигляду (5.4.17), це обмеження можна зняти **методом штрафу**. Сутність цього методу полягає у додаванні до функціоналу додатної складової, яка швидко зростає, коли

наближений розв'язок $\tilde{u}_N$ не задовольняє умову (5.4.17). При мінімізації такого функціоналу $\tilde{u}_N(P) \rightarrow f_1(P)$ при $N \rightarrow \infty$, причому швидкість збіжності до $f_1(P)$ у випадку $P \in S_1$ залежатиме від коефіцієнту, що встановлює «тариф штрафу» за порушення умови (5.98).

Приклад 5.11.

Розглянемо крайову задачу для рівняння Пуассона

$$-\nabla^2 u(M) = f(M), \quad M \in V, \quad (5.4.20)$$

із заданими на кусково гладкій поверхні S , що обмежує область V , межевими умовами

$$u(P) = g(P), \quad P \in S_1 \subset S, \quad (5.4.21)$$

$$\nabla u(P)n(P) + \alpha(P)u(P) = \alpha(P)h(P), \quad P \in S_2 = S \setminus S_1, \quad (5.4.22)$$

де $n(P)$ – одиничний вектор зовнішньої нормалі до поверхні S у точці $P \in S$. Однією із інтерпретацій цієї задачі може бути відшукування усталеного розподілу температури $u(M)$ в області V при заданому розподілі $g(P)$ температури на ділянках S_1 поверхні S та заданих на ділянках S_2 умов теплообміну із навколишнім середовищем, що має температуру $h(P)$ (функція $\alpha(P) > 0$ характеризує інтенсивність теплообміну).

Крайовій задачі (5.4.20)–(5.4.22) відповідає варіаційне формулювання, що містить функціонал, який мінімізується

$$J[u] = \int_V \left(\frac{1}{2} (\nabla u)^2 - fu \right) dV + \frac{1}{2} \int_{S_2} \alpha(u - h)^2 dS, \quad (5.4.23)$$

який розглядають на множині функцій $u(M)$, неперервних на замиканні $\bar{V} = V \cup S$ області V , й що мають в V кусково неперервні похідні по координатам точки $M \in V$ та набувають значення $u(P) = g(P)$ у точках $P \in S_1$. Ці функції можуть не задовольняти межову умову (5.4.22), яка є для цього функціоналу природна. Якщо головну межову умову (5.4.21) замінити природною

$$\nabla u(P)n(P) + \beta u(P) = \beta g(P), \quad P \in S_1, \quad \beta > 0, \quad (5.4.24)$$

замість (5.104) отримаємо функціонал

$$J_\beta[u] = \int_V \left(\frac{1}{2} (\nabla u)^2 - fu \right) dV + \frac{1}{2} \int_{S_2} \alpha(u - h)^2 dS + \frac{\beta}{2} \int_{S_1} (u - g)^2 dS, \quad (5.4.25)$$

який можна розглядати на множині функцій $u(M)$, що не задовольняють межові умови на усій поверхні S .

Останній інтеграл в (5.4.25) дорівнює середньоквадратичній нев'язці, що викликана порушенням головної межової умови (5.4.21). При цьому значення параметру β в (5.4.25) визначає «тариф штрафу» за порушення цієї умови, а за фізичним змістом характеризує в (5.4.24) інтенсивність теплообміну на ділянках S_1 поверхні S із умовним навколишнім середовищем, що має температуру $g(P)$, $P \in S_1$. Оскільки функція $\nabla u(P)n(P)$,

$P \in S_1$, обмежена, то із (5.4.24) випливає, що $u(P) \rightarrow g(P)$ при $\beta \rightarrow \infty$, тобто за граничного переходу буде задовільнена головна межова умова (5.4.21) вихідної крайової задачі. Ясно, що при мінімізації (5.4.22) із фіксованим кінцевим значенням β отриманий наближений розв'язок $u\beta(M)$, $M \in \bar{V}$, не буде задовольняти (5.4.21), але зі зростанням β значення останнього інтеграла в (5.4.25) буде прагнути до нуля і $u_\beta(P) \rightarrow g(P)$, $P \in S_1$.

Зазначимо, що побудувати базисні функції u_n та проєкційні функції v_k так, щоб $u_n(P) = v_k(P) = 0$, $P \in S_1$, можна таким чином. Якщо підібрано таку функцію $\omega \in D_1 = D(A_1) \cup D(B_1)$, що $\omega(P) = 0$ при $P \in S_1$, а $\bar{u}_n \in D_1$ і функції $\bar{v}_k$ мають в області V кусково неперервні похідні, функції $u_n = \omega \bar{u}_n$ та $v_k = \omega \bar{v}_k$ будуть задовольняти усі необхідні вимоги.

При розв'язанні багатовимірних задач функції $u_n(M)$ і $v_k(M)$ можна подати у вигляді добутків співмножників, що залежать тільки від однієї координати точки $M \in V$. Якщо область V у напрямку однієї із координатних осей (наприклад, осі Ox_1) обмежена площинами, перпендикулярними до цієї осі, для спрощення підбору таких співмножників можна прийняти коефіцієнти a_n в (5.4.19), що залежать від цієї координати. Тоді замість СЛАР (5.4.11) отримаємо систему N звичайних диференціальних рівнянь відносно N невідомих $a_n = a_n(x_1)$, $n = \overline{1, N}$, причому порядок цих ЗДР збігатиметься із порядком старшої похідної по x_1 у диференціальному операторі A . Для розв'язання такої системи ЗДР необхідно використати межові умови, що задані на указаних площинах.

Описаний спосіб побудови наближеного розв'язку багатовимірної задачі, відомий як **метод Канторовича**, аналогічний методу розділення змінних (методу Фур'є). Цей спосіб можна використати й у випадку, коли у вибраній системі криволінійних координат область V у напрямку однієї із них обмежена координатними поверхнями.

Розглянемо випадок, коли фізичні процеси, що описуються операторним рівнянням вигляду (5.4.7), залежать від часу. Тоді оператор B_1 в (5.4.5) буде містити диференціювання за часом. При цьому в (5.4.2) та у межові умови (5.4.18), (5.4.19) можуть входити функції $f(t, M)$, $f_1(t, M)$, $f_2(t, M)$. Тоді, із використанням методу Канторовича, наближений розв'язок $\tilde{u}_N$ можна шукати у вигляді

$$\tilde{u}_N(t, M) = u_0(t, M) + \sum_{n=1}^N a_n(t) u_n(M), \quad t > 0, \quad M \in V, \quad (5.4.26)$$

де функції u_0 і u_n задовольняють умови $u_0(t, P) = f_1(t, P)$ та $u_n(P) = 0$ при $P \in S_1$. У цьому випадку після підстановки (5.4.18) у (5.4.8) і виконання перетворень, за умови $v_k(P) = 0$, $P \in S_1$, аналогічних попереднім, отримаємо систему N ЗДР

$$\sum_{n=1}^N \left(\int_V v_k B_1(a_n u_n) dV + a_n \int_V (A_1 u_n) \nabla v_k dV + a_n \int_{S_2} \beta u_n v_k dS \right) =$$

$$= \int_V (f v_k - (A_1 u_0) \nabla v_k - v_k B_1 u_0) dV + \int_{S_2} (f_2 - \beta u_0) v_k dS, \quad (5.4.27)$$

де $k = \overline{1, N}$, відносно функцій $a_n(t)$, $n = \overline{1, N}$. Тепер оператор B_1 діє не тільки на функції u_n , які залежать від просторових координат, але й на функції $a_n(t)$.

Для розв'язання системи ЗДР (5.4.27) необхідно задати початкові розподіли

$$\bar{u}^{(r)}(M) = u^{(r)}(0M), \quad M \in V,$$

шуканої функції (при $r = 0$) та її похідних за часом до порядку R включно, якщо в операторі B_1 старша похідна за часом має порядок $R+1$. Наприклад, при $R = 0$ початкові значення $a_n(0)$ можна знайти із умов рівності нулю зваженої нев'язки, що виникає при підстановці (5.4.26) при $t = 0$ у початкову умову $u(0, M) = \bar{u}^{(0)}(M)$. Це призведе до СЛАР

$$\sum_{n=1}^N a_n(0) \int_V u_n(M) v_k(M) dV = \int_V (\bar{u}^{(0)}(M) - u_0(0, M) v_k(M) dV, \quad k = \overline{1, N}. \quad (5.4.28)$$

Приклад 5.12.

Розглянемо задачу нестационарної теплопровідності у твердому тілі, яка описується диференціальним рівнянням (при $t > 0$, $M \in V$)

$$c(M) \frac{\partial T(t, M)}{\partial t} - \nabla(\lambda(M) \nabla T(t, M)) = I_V^{(q)}(t, M), \quad (5.4.29)$$

де $c(M)$ та $\lambda(M)$ – об'ємна теплоємність і коефіцієнт теплопровідності матеріалу тіла, а $I_V^{(q)}(t, M)$ – об'ємна потужність джерел енерговиділення. Нехай шукана функція $T(t, M)$, що описує розподіл температури на ділянках $S_1 \subset S$ та $S_2 = S \setminus S_1$ кусково гладкої поверхні S , що обмежує область V , задовольняє межові умови вигляду

$$T(t, P) = f_1(t, P), \quad P \in S_1, \quad (5.4.30)$$

$$\lambda(P) \nabla T(t, P) n(P) + \beta(t, P) T(t, P) = f_2^*(t, P), \quad P \in S_2, \quad (5.4.31)$$

і початкову умову

$$T(0, M) = f_0(M), \quad M \in V \cup S_2, \quad (5.4.32)$$

В (5.4.29)–(5.4.31) усі функції за винятком шуканої $T(t, M)$ вважаємо заданими.

Зіставимо (5.4.29) із (5.4.7). Бачимо, що у даному випадку права частина (5.4.7) відповідає функції $I_V^{(q)}$, оператор B_1 визначений першим доданком у лівій частині (5.4.29), а оператор A_1 визначений рівністю $A_1 u = \lambda \nabla u$. Межові умови (5.4.16), (5.4.17) та (5.4.30), (5.4.21) збігаються за формою. Тому якщо наближений розв'язок задачі (5.4.29)–(5.4.32) представити аналогічно (5.4.28) у формі

$$\square T_N(t, M) = T_0(t, M) + \sum_{n=1}^N a_n(t) u_n(M), \quad t > 0, \quad M \in V, \quad (5.4.33)$$

де функції T_0 і u_n задовольняють умови $T(t, P) = f_1(t, P)$ та $u_n(P) = 0$ при $P \in S_1$, система ЗДР (5.4.27) для відшукування функцій $a_n(t)$ прийме вигляд

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^N \left(\frac{da_n}{dt} \int_V c v_k u_n dV + a_n \int_V \lambda (\nabla u_n) \nabla v_k dV + a_n \int_{S_2} \beta u_n v_k dS \right) = \\ & = \int_V \left(I_V^{(q)} v_k - \lambda ((\nabla T_0) \nabla v_k - c \frac{\partial T_0}{\partial t} v_k) \right) dV + \int_{S_2} (f_2 - \beta T_0) v_k dS, \end{aligned}$$

де $k = \overline{1, N}$. Необхідні для вирішення цієї системи початкові значення $a_n(0)$ отримаємо із СЛАР вигляду (5.4.28) при $k = \overline{1, N}$

$$\sum_{n=1}^N a_n(0) \int_V u_n(M) v_k(M) dV = \int_V (f_0(M) - T_0(0, M)) v_k(M) dV.$$

Завдання для самостійної роботи

1. Одновимірний усталений розподіл температури у стінці завтовшки h задовольняє звичайне диференціальне рівняння

$$\frac{d}{dx} \left(F(x) \frac{dT(x)}{dx} \right) = 0, \quad x \in [0, h],$$

$$F(x) = F_0 \left(1 + \frac{x}{R_1} \right) \left(1 + \frac{x}{R_2} \right), \quad x \in [0, h],$$

а R_1 та R_2 – головні радіуси кривизни однієї із поверхонь стінки. На цій поверхні вибрано ділянку площиною F_0 і початок відліку координатної осі Ox , що спрямована за нормаллю до поверхонь стінки, на яких задані значення температур $T(0) = T_0$ та $T(h) = T_h$. За умов $h/|R_1| \ll 1$ та $h/|R_2| \ll 1$ методом малого параметра знайти розподіл $T(x)$ і порівняти його із точним розв’язком задачі.

За тих самих умов методом малого параметра розв’язати одновимірну нестационарну крайову задачу

$$F(x) \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = \tilde{a} \frac{\partial}{\partial x} \left(F(x) \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} \right), \quad x \in [0, h], \quad t > 0,$$

$$T(x, 0) = T(0, t) = T_0, \quad T(h, t) = T_h,$$

де $\tilde{a}$ – температуропровідність матеріалу стінки.

2. Методами коллокації у підобластях та у точках знайти одновимірний стаціонарний розподіл температури за товщиною стінки труби із внутрішнім та зовнішнім радіусами, що описується звичайним диференціальним рівнянням

$$\frac{d^2 T(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT(r)}{dr} + \frac{I_V^{(q)} r^2}{\lambda r^2} = 0,$$

$I_V^{(q)}$ – об’ємна потужність енерговиділення у стінці при $r = R_2$; λ – теплопровідність матеріалу труби. На поверхнях труби прийняти $T(R_1) = T(R_2) = T_0$. Результати порівняти із точним розв’язком задачі.

3. Методами коллокації у підобластях та у точках знайти одновимірний усталений розподіл температури $T(x)$ у стінці із поверхнею двоякої кривизни (см. задачу 1).

4. Розв’язати задачу 1 методом найменших квадратів і методом Бубнова—Галеркіна і порівняти результати із точним розв’язком.

Розділ 6. Числово-аналітичні методи

У цьому розділі розглядатимемо підходи до розв'язання систем нелінійних диференціальних рівнянь математичної фізики, які ґрунтуються на застосуванні наближених числово-аналітичних методів розв'язання цих систем на відміну від широко розповсюджених наближених методів, що ґрунтуються на застосуванні різницевого схем [3] і при цьому отримують розв'язання у вигляді набору числових даних. Це не надає можливості використовувати ці дані до вирішення інших задач, наприклад, до систем оптимального керування цими процесами.

Почнемо цей розділ з розгляду типових математичних моделей біофізики.

6.1 Математична модель «Хижак–жертва»

У природних умовах змінювання чисельності популяції носить коливальний характер. Коливання чисельності пов'язані із реакцією популяції на зовнішні впливи та внутрішні змінювання у біоценозі. Період та амплітуда коливань залежать від механізму регуляції чисельності популяції, особливостей виду та умов його існування.

Математична модель, що описує динаміку чисельності двох популяцій, що взаємодіють за принципом хижак–жертва, запропонована Лоткою і Вольтерра.

$$\frac{du}{d\tau} = a_1 u + a_{12} uv - c_1 u^2, \quad \frac{dv}{d\tau} = a_2 v + a_{21} uv - c_2 v^2. \quad (6.1.1)$$

у цих рівняннях u, v – чисельності популяцій жертви та хижака, a_1 – питома швидкість росту популяції жертви за відсутності хижака, a_{12} – стала, що характеризує швидкість споживання популяцією хижака особин популяції жертви, a_2 – питома швидкість смертності хижака, a_{21} – стала, що характеризує швидкість збільшення чисельності хижака за рахунок поїдання їм жертви. Знаки цих коефіцієнтів визначають тип взаємодії. Якщо $a_{12} > 0$, $a_{21} > 0$ маємо симбіоз, якщо $a_{12} > 0$, $a_{21} < 0$ – хижак–жертва, якщо $a_{12} < 0$, $a_{21} < 0$ – конкуренція. Сталі c_1, c_2 – сталі самообмеження чисельності (внутрішньовидової конкуренції).

Модель Вольтерра – еталонна (базова) для математичної екології тією самою мірою, як модель точкового осцилятора є базова для класичної і квантової механіки.

За допомогою цієї моделі на ґрунті спрощених уявлень про характер закономірностей, що описують поведінку системи, за допомогою математичних засобів було виведено висновок про якісний характер поведінки системи – про наявність у такій системі коливань чисельності популяцій.

Стационарною точкою системи рівнянь є $u_* = c_2/a_{21}$, $v_* = c_1/a_{21}$. Ця стационарна точка є стійка, є центр, в її околі здійснюються гармонійні коливання чисельності обох популяцій із частотою $\omega = \sqrt{c_1 c_2}$.

Модель Вольтерра пояснює одну із причин коливань у системі хижак–жертва, але вона погано узгоджується із експериментальними даними.

Задамо початкові умови

$$u(0) = u_0, \quad v(0) = v_0. \quad (6.1.2)$$

6.1.1 Розв'язання задачі (6.1.1), (6.1.2)

Система рівнянь (6.1.1) із початковими умовами (6.1.2) нелінійна. Для пошуку її розв'язання застосуємо ітераційну процедуру, сутність якої полягає у такому.

Застосуємо до (6.1.1), (6.1.2) інтегральне перетворення Лапласа за змінною t , [3]/Лінійні частини системи рівнянь відносно шуканих змінних $u(t)$, $v(t)$ незалежні, отже, можна шукати розв'язок цієї системи у такому вигляді:

$$\mathcal{L}_t \left\{ \frac{du}{d\tau} = a_1 u + a_{12} uv - c_1 u^2 \right\} \quad (6.1.3)$$

$$\mathcal{L}_t \left\{ \frac{dv}{d\tau} = a_2 v + a_{21} uv - c_2 v^2 \right\} \quad (6.1.4)$$

Оскільки перетворення Лапласа є лінійне за своєю сутністю, будуємо ітераційну процедуру у такому вигляді. Спочатку відшукуємо розв'язок лінійних частин системи рівнянь.

Позначимо $U^{(0)}(p) = \mathcal{L}_t \{u^{(0)}(t)\}$. Тоді маємо

$$U^{(0)}(p) = \frac{u_0}{p - a_1} \rightarrow u^{(0)}(t) = u_0 e^{a_1 t}. \quad (6.1.5)$$

Аналогічно,

$$V^{(0)}(p) = \frac{v_0}{p - a_2} \rightarrow v^{(0)}(t) = v_0 e^{a_2 t}. \quad (6.1.6)$$

Позначимо $u^{(1)}(t) = u^{(0)}(t) + \Delta u^{(0)}(t)$.

$$\Delta u^{(0)}(t) = \mathcal{L}_t^{-1} \left[\mathcal{L}_t \{a_{12} u^{(0)} v^{(0)} - c_1 [u^{(0)}]^2\} \right].$$

Замістимо у цей вираз отримані вирази для лінійних частин (6.1.5), (6.1.6).

$$\begin{aligned} \Delta u^{(0)}(t) &= u^{(0)}(t) [a_{12} v^{(0)}(t) - c_1 u^{(0)}(t)] = \\ &= u_0 e^{a_1 t} [a_{12} v_0 e^{a_2 t} - c_1 u_0 e^{a_1 t}] = u_0 v_0 a_{12} e^{(a_1 + a_2)t} - u_0^2 c_1 e^{2a_1 t} = eu_1 e^{(a_1 + a_2)t} + eu_2 e^{2a_1 t}. \end{aligned}$$

$$eu_1 = u_0 v_0 a_{12}, \quad eu_2 = -u_0^2 c_1; \quad fu_1 = a_1 + a_2, \quad fu_2 = 2a_1.$$

Тепер до цього виразу можна застосувати інтегральне перетворення Лапласа:

$$\mathcal{L}_t \{\Delta u^{(0)}(t)\} = \frac{eu_1}{p - fu_1} + \frac{eu_2}{p - fu_2} = \frac{bu_4 p + bu_3}{p^2 + bu_1 p + bu_0}.$$

$$bu_2 = 1, \quad bu_1 = -fu_1 - fu_2, \quad bu_0 = fu_1 \cdot fu_2,$$

$$bu_3 = -eu_1 fu_2 - eu_2 fu_1, bu_4 = eu_1 + eu_2.$$

Запишемо вираз для першого наближення:

$$U^{(1)}(p) = U^{(0)}(p) + \Delta U^{(0)}(p) = \frac{u_0}{p - a_1} + \frac{bu_4 p + bu_3}{p^2 + bu_1 p + bu_0}. \quad (6.1.7)$$

Вочевидь, йому відповідає оригінал у вигляді доданку трьох експонент. Ясно також, що збереження виразу для першої ітерації у такому вигляді на другій ітерації призведе до появи, як мінімум, шести експонент тощо. Тому необхідно привести його до стандартного вигляду – ланцюга другого порядку. Тобто,

$$U^{(1)}(p) = \frac{cu_4^{(1)} p + cu_3^{(1)}}{p^2 + cu_1^{(1)} p + cu_0^{(1)}}.$$

Це досягається застосуванням процедури YPRV2 (u0, au, bu, cu).

Тоді у просторі оригіналів матимемо

$$\begin{aligned} u^{(1)}(t) &= e^{au^{(1)}t} [du_1^{(1)} g_1(t) + du_2^{(1)} g_2(t)]. \quad (6.1.8) \\ au^{(1)} &= -cu^{(1)}/2, [omu^{(1)}]^2 = [au^{(1)}]^2 - cu_0^{(1)}; \\ du_1^{(1)} &= cu_4^{(1)}, du_2^{(1)} = [cu_3^{(1)} - au^{(1)} * du_1^{(1)}] / omu^{(1)}. \\ g_1(t) &= \begin{cases} \cos(omu^{(1)}t), & [omu^{(1)}]^2 < 0, \\ \cosh(omu^{(1)}t), & [omu^{(1)}]^2 \geq 0, \end{cases} \\ g_2(t) &= \begin{cases} \sin(omu^{(1)}t), & [omu^{(1)}]^2 < 0, \\ \sinh(omu^{(1)}t), & [omu^{(1)}]^2 \geq 0, \end{cases} \end{aligned}$$

За аналогічним алгоритмом відшукуємо розв'язок у першому наближенні рівняння (6.1.4).

Позначимо $v^{(1)}(t) = v^{(0)}(t) + \Delta v^{(0)}(t)$.

$$\Delta v^{(0)}(t) = \mathcal{L}_t^{-1} \left[\mathcal{L}_t \{ a_{21} u^{(0)} v^{(0)} - c_2 [v^{(0)}]^2 \} \right].$$

Замістимо у цей вираз отримані вирази для лінійних частин (6.1.5), (6.1.6).

$$\begin{aligned} \Delta v^{(0)}(t) &= v^{(0)}(t) [a_{21} u^{(0)}(t) - c_2 v^{(0)}(t)] = \\ v_0 e^{a_2 t} [a_{21} u_0 e^{a_1 t} - c_2 v_0 e^{a_2 t}] &= u_0 v_0 a_{21} e^{(a_1 + a_2)t} - v_0^2 c_2 e^{2a_2 t} = ev_1 e^{(a_1 + a_2)t} + ev_2 e^{2a_1 t}. \end{aligned}$$

$$ev_1 = u_0 v_0 a_{21}, \quad ev_2 = -v_0^2 c_2; \quad fv_1 = a_1 + a_2, \quad fv_2 = 2a_2.$$

Тепер до цього виразу можна застосувати інтегральне перетворення Лапласа:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_t \{ \Delta v^{(0)}(t) \} &= \frac{ev_1}{p - fv_1} + \frac{ev_2}{p - fv_2} = \frac{bv_4 p + bv_3}{p^2 + bv_1 p + bv_0}. \\ bv_2 &= 1, \quad bv_1 = -fv_1 - fv_2, \quad bv_0 = fv_1 \cdot fv_2, \\ bv_3 &= -ev_1 fv_2 - ev_2 fv_1, \quad bv_4 = ev_1 + ev_2. \end{aligned}$$

Запишемо вираз для першого наближення:

$$V^{(1)}(p) = V^{(0)}(p) + \Delta V^{(0)}(p) = \frac{v_0}{p - a_2} + \frac{bv_4 p + bv_3}{p^2 + bv_1 p + bv_0}. \quad (6.1.9)$$

Приведемо цей вираз до стандартного вигляду – ланцюга другого порядку. Тобто,

$$V^{(1)}(p) = \frac{cv_4^{(1)} p + cv_3^{(1)}}{p^2 + cv_1^{(1)} p + cv_0^{(1)}}. \quad (6.1.10)$$

Тоді у просторі оригіналів матимемо

$$\begin{aligned} v^{(1)}(t) &= e^{av^{(1)}t} \left[dv_1^{(1)} gv_1(t) + dv_2^{(1)} gv_2(t) \right]. \\ av^{(1)} &= -cv^{(1)}/2, \quad [omv^{(1)}]^2 = [av^{(1)}]^2 - cv^{(1)0}; \\ dv_1^{(1)} &= cv_4^{(1)}, \quad dv_2^{(1)} = [cv_3^{(1)} - av^{(1)} * cv^{(1)}] / omv^{(1)}. \end{aligned} \quad (6.1.11)$$

Реалізація подальших ітерацій

Отримані на першій ітерації вирази у вигляді (6.1.8) і (6.1.11), на відміну від (6.1.5) і (6.1.16) отримано у вигляді ланцюгів другого порядку, отже, перетворення, що виконано вище, не підходять для отримання розв'язань на другій та подальших ітераціях. Ми маємо справу із добутками двох функцій вигляду

$$h_1(t) = e^{au^{(1)}t} [du_1^{(1)} gu_1(t) + du_2^{(1)} gu_2(t)] e^{av^{(1)}t} [dv_1^{(1)} gv_1(t) + dv_2^{(1)} gv_2(t)]. \quad (6.1.12)$$

$$h_2(t) = e^{2au^{(1)}t} [du_1^{(1)} gu_1(t) + du_2^{(1)} gu_2(t)]^2. \quad (6.1.13)$$

$$h_3(t) = e^{2av^{(1)}t} [dv_1^{(1)} gv_1(t) + dv_2^{(1)} gv_2(t)]^2. \quad (6.1.14)$$

Задача полягає у визначенні виразів вигляду

$$H_k(p) = \mathcal{L}_t \{h_k(t)\} = \frac{r_4 p + r_3}{p^2 + r_1 p + r_0}, \quad (6.1.15)$$

визначення доданків вигляду $G_1(p) = c_1 H_1(p) + c_2 H_2(p)$, $G_2(p) = c_3 H_1(p) + c_4 H_3(p)$, де коефіцієнти c_i визначаються відповідно із наведеними виразами для коефіцієнтів eu_i, ev_i , що визначено вище.

Для перетворення виразів вигляду (6.1.12)–(6.1.14) до (6.1.15) використовується процедура `ftgtp(d,q1,q2)` із аргументами у вигляді, наприклад, для $h_1(t)$:

$$q_1 = [0, du_1^{(1)}, du_2^{(1)}, au^{(1)}, omu^{(1)}],$$

$$q_2 = [0, dv_1^{(1)}, dv_2^{(1)}, av^{(1)}, omv^{(1)}].$$

Після цього обчислення виконуються за формулами (6.1.12).

Оцінка похибки

Обчислимо інтеграл різниці між сусідніми наближеннями:

$$E = \int_0^T \{ e^{au^{(m)}t} [du_1^{(m)}gu_1^{(m)}(t) + du_2^{(m)}gu_2^{(m)}(t)] - \\ - e^{au^{(m-1)}t} [du_1^{(m-1)}gu_1^{(m-1)}(t) + du_2^{(m-1)}gu_2^{(m-1)}(t)] \}^2 dt. \\ E = I_1 - I_2 + I_3.$$

У випадку $gu^{(m)}(t) = \cos(omu^{(m)}t)$, $gu^{(m-1)}(t) = \cos(omu^{(m-1)}t)$ маємо:

$$I_1 = \frac{1}{2} e^{2\alpha T} [(b_1^2 + b_2^2) + (b_1^2 - b_2^2) \cos(2\omega T) + 2b_1b_2 \sin(2\omega T)] - b_1^2;$$

$$I_3 = \frac{1}{2} e^{2\alpha T} [(c_1^2 + c_2^2) + (c_1^2 - c_2^2) \cos(2\gamma T) + 2c_1c_2 \sin(2\gamma T)] - c_1^2;$$

$$I_2 = e^{(\alpha+\beta)T} [(b_1c_1 \mp b_2c_2) \cos(\omega \pm \gamma)T + (b_2c_1 \pm b_1c_2) \sin(\omega \pm \gamma)T] - 2b_1c_1.$$

У цих виразах для скорочення викладок позначено:

$$\alpha = au^{(m)}; \quad b_1 = du_1^{(m)}, \quad b_2 = du_2^{(m)}; \quad \omega = omu^{(m)};$$

$$\beta = au^{(m-1)}; \quad c_1 = du_1^{(m-1)}, \quad c_2 = du_2^{(m-1)}; \quad \gamma = omu^{(m-1)}.$$

Ітерації тривають доти, доки $E > \varepsilon$.

6.1.2 Урахування просторового переміщення

Розглянемо найпростішу вольтерівську модель (6.1.1). Вважатимемо, що міграція як хижаків, так і жертв має характер випадкових блукань (типу дифузії). Тоді поведінку системи можна описати за допомогою диференціальних рівнянь параболічного типу

$$\frac{\partial x_1}{\partial t} = c_1x_1 - a_{12}x_1x_2 + D_1 \frac{\partial^2 x_1}{\partial r^2}, \quad (6.1.16)$$

$$\frac{\partial x_2}{\partial t} = c_2x_2 - a_{21}x_1x_2 + D_2 \frac{\partial^2 x_2}{\partial r^2}. \quad (6.1.17)$$

Тут x_1, x_2 – густина популяцій жертв та хижаків, D_1, D_2 – відповідні коефіцієнти «дифузії», r – просторова змінна.

Розв'язання задачі (6.1.16), (6.1.17) спрощується, якщо вважати, що задача є одновимірною, і прийняти $D_1 = 0$ (тобто відсутня міграція жертв). Цей випадок реально відповідає ситуації, коли рухливість жертв суттєво менша за рухливість хижаків.

Запровадимо нові змінні

$$\varphi_1 = c_2x_1/a_{21}, \quad \varphi_2 = c_1x_2/a_{12}.$$

Рівняння для просторової моделі хижак–жертва без міграції жертв можна записати у вигляді

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} = c_1 \varphi_1 (1 - \varphi_2), \quad (6.1.18)$$

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial t} = c_2 \varphi_2 (\varphi_1 - 1) + D_2 \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial r^2}. \quad (6.1.19)$$

Інтегрування рівняння (6.1.18) дає

$$\varphi_1(t, r) = f_1(r) \exp \left[c_1 t - c_1 \int_0^t \varphi_2(\tau, r) d\tau \right]. \quad (6.1.20)$$

де $f_1(r)$ – початковий розподіл жертв.

Для пошуку асимптотичного розв’язання системи рівнянь (6.1.18), (6.1.19) запровадимо змінну

$$z = r - vt,$$

де v – швидкість розповсюдження «хвилі». Нехай початковий розподіл жертв має вигляд

$$f_1(r) = a e^{-b|r|}, \quad a, b > 0.$$

Тоді для функції φ_1 маємо вираз

$$\varphi_1(t, r) = a \exp \left[-b \left(r - \frac{c_1}{b} t \right) + \frac{c_1}{v} \int_z^r \varphi_2 \left(\frac{r - z'}{v}, r \right) dz' \right], \quad (6.1.21)$$

а для φ_2 – інтегро-диференціальне рівняння

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial t} = D_2 \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial r^2} - c_2 \varphi_2 \left\{ 1 - a \exp \left[-b \left(r - \frac{c_1}{b} t \right) + \frac{c_1}{v} \int_z^r \varphi_2 \left(\frac{r - z'}{v}, r \right) dz' \right] \right\}, \quad (6.1.22)$$

Асимптотичні розв’язання у вигляді хвилі, що розповсюджується зі швидкістю v , можна отримати, якщо покласти $v = c_1/b$. Нехай функції $\theta_1(z)$, $\theta_2(z)$ – асимптотичні розв’язки задачі, тобто

$$\varphi_1(r, t) \rightarrow \theta_1(z); \quad \varphi_2(r, t) \rightarrow \theta_2(z), \quad t \rightarrow \infty, \quad r \rightarrow \infty.$$

За великих z рівняння (6.1.21), (6.1.22) можна наближено записати у вигляді

$$\theta_1(z) = a e^{-bz}, \quad (6.1.23)$$

$$D_2 \frac{d^2 \theta_2}{dz^2} + v \frac{d\theta_2}{dz} - c_2 \theta_2 (1 - a e^{-bz}) = 0. \quad (6.1.24)$$

Запровадимо позначення

$$\kappa = \frac{2}{b} \sqrt{\frac{D_2}{c_2}}, \quad m = \frac{b - c_2}{b D_2}$$

і нову змінну

$$\eta = \frac{2}{b} \sqrt{\frac{a c_2}{D_2}} e^{-bz/2},$$

отримаємо рівняння

$$\eta_2 \frac{d^2 \theta_2}{d\eta^2} + m\eta \frac{d\theta_2}{d\eta} + (\eta^2 - \kappa^2) \theta_2 = 0. \quad (6.1.25)$$

Коли $m = 1$ і $b^2 = \frac{2\alpha_1}{1-D_2} > 0$, рівняння (6.1.25) є рівняння Бесселя і його розв'язок має вигляд

$$\theta_2(\eta) = kJ_\kappa(\eta),$$

де J_κ – функція Бесселя першого роду κ -порядку. Для великих z можна скористатися виразом функції Бесселя

$$\theta_2(z) = \frac{k}{\Gamma(\kappa+1)} \left(\frac{ac_2}{b^2 \kappa^2} \right)^{\kappa/2} e^{-\sqrt{c_2} z / \kappa}. \quad (6.1.26)$$

Тут Γ – гамма-функція

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt.$$

Вирази (6.1.23), (6.1.26) визначають наближений асимптотичний розв'язок, що має вигляд хвилі жертв і хижаків, яка розповсюджується у просторі зі швидкістю v .

Вихідні дані:

$$D_1 = 0,2; 0,25; 0,3; D_2 = 0,1; 0,3; 0,35; \gamma = 0,05; 0,015; 0,2$$

Запитання для самоперевірки

1. Якою системою диференціальних рівнянь описується математична модель «хижак–жертва»?
2. У чому полягає сутність пропонованого методу розв'язання системи рівнянь Лоттки–Вольтерри?
3. Як оцінюється похибка розв'язання цієї системи рівнянь?

6.2 Математичні моделі гідродинаміки

Рух рідинного середовища змінюється під впливом взаємодії частинок та з тілами, що є зовнішні відносно об'єму, що розглядається, із рідиною. У результаті такої взаємодії виникають *масові і поверхневі* сили. Розподілені за об'ємом та пропорційні масам частинок сили називають *масовими* (сила тяжіння, сила інерції тощо). Якщо $F = \{X, Y, Z\}$ – вектор питомих масових сил на елемент об'єму dV діє сила $F \rho dV$, $\rho(x, y, z, t)$ – густина рідини. Отже, масова сила, що діє на об'єм V , дорівнює

$$\int_V F \rho dV = \left\{ \int_V X \rho dV, \int_V Y \rho dV, \int_V Z \rho dV \right\}.$$

Поверхневі сили, на відміну від масових, розподілені по поверхні. Це сили взаємодії частинок об'єму, що розглядається, із навколишнім середовищем, що прикладено до поверхні поділу, або сили, із якими частинки взаємодіють всередині об'єму через уявні поверхні. Нехай ds – елемент поверхні S , що обмежує V , n – зовнішня нормаль до S . Вектор поверхневих сил p_n , що віднесений до одиниці площини, називається *напруженням*. У загальному випадку p_n залежить від розташування та орієнтації перетину у просторі і часі. Оскільки ds – елемент двобічної поверхні, до ds можна задати дві нормалі n і $-n$. З боку зовнішніх відносно V частинок буде прикладена сила $p_n ds$. З боку внутрішніх частинок цього самого елемента поверхні прикладена сила $p_{-n} ds$. За 3-м законом Ньютона $p_{-n} ds = -p_n ds$. Коли кут між нормаллю до поверхні із напруженням $p_n ds$ є гострий, нормальна складова вектору $p_n ds$ називається *нормальним напруженням*; коли кут – тупий, нормальна складова вектору $p_n ds$ називається *тиском*. Дотична до поверхні складова вектору $p_n ds$ називається *дотичним напруженням* або *силою внутрішнього тертя (силою в'язкості)*.

Згідно з другим законом Ньютона

$$F + I_d = 0,$$

де F – рівнодіюча сила, що прикладена до матеріальної точки маси m , $I_d = -ma$ – *даламберова сила інерції*, яку слід інтерпретувати як опір, що інертної маси змінюванню свого руху, тобто прискоренню, викликаному іншим об'ємом. Отже, у кожний момент руху усі сили, що прикладено до матеріальної точки, взаємно урівноважуються. У цьому полягає принцип Даламбера. Застосування принципу Даламбера до рідинного об'єму V дає загальне рівняння руху рідинного об'єму

$$\int_V (F - w) \rho dV + \oint_S p_n ds = 0, \quad (6.2.1)$$

де w – прискорення рідинного об'єму одиничної маси.

Маса M рідини в об'ємі V дорівнює

$$M = \int_V \rho(x, y, z, t) dV$$

і залишається із часом сталою. Відомо, якщо $B(x, y, z, t)$ – деяка гідродинамічна величина, справджується формула

$$\frac{d}{dt} \int_V B(x, y, z, t) dV = \int_V \left(\frac{dB}{dV} + B \operatorname{div} v \right) dV. \quad (6.2.2)$$

Тоді для маси рідини M маємо:

$$\frac{dM}{dt} = \int_V \left(\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} v \right) dV = 0.$$

Звідси маємо *рівняння неперервності*

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \operatorname{div} v = 0. \quad (6.2.3)$$

6.2.1 Моделі рідинних ідеальних середовищ

Рівняння Ейлера

Ідеальною рідиною називається рідина, в якій відсутні сили внутрішнього тертя, й отже, дотичні складові напружень дорівнюють нулю. Значить, в ідеальній рідині присутні тільки нормальні напруження, які при деформації рідини запобігають її розриву. Тому нормальні напруження завжди спрямовано у глибину об'єму рідини і є сили тиску, що має назву *гідродинамічного тиску ідеальної рідини*.

Скористаємося перетвореннями Гауса, що формулюються для неперервної скалярної функції $u(x, y, z)$, що визначена в об'ємі V , обмеженої кусково-гладкою поверхнею S із зовнішньою нормаллю n :

$$\int_V \frac{\partial u}{\partial x} dV = \oint_S u \cos(u, e_x) ds,$$

$$\int_V \frac{\partial u}{\partial y} dV = \oint_S u \cos(u, e_y) ds,$$

$$\int_V \frac{\partial u}{\partial z} dV = \oint_S u \cos(u, e_z) ds.$$

Помножимо перший вираз на e_x тощо і додамо отримані результати, отримаємо

$$\int_V \operatorname{grad} u dV = \oint_S u \operatorname{grad} u ds.$$

Застосування цього перетворення до рівняння

$$\int_V (F - w) \rho dV + \oint_S p ds = 0, \quad (6.2.4)$$

де $p = -np$, призводить до *основного рівняння руху ідеальної рідини (рівняння Ейлера)*

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (v, \nabla) v = F - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p. \quad (6.2.5)$$

Моделі рідинних ідеальних середовищ

Загальну задачу про рух ідеальної рідини можна сформулювати так: за заданого розподілу зовнішніх масових сил визначити координати окремої частинки у кожний момент часу, швидкості руху у кожній точці рідини у кожний момент часу, а також сили внутрішньої взаємодії, тобто гідродинамічні тиски.

Найчастіше трапляються однорідні середовища. Густина однорідної рідини, що характеризує середовище, як правило, відома: $\rho(x, y, z, t) = \text{const}$. Відповідну систему рівнянь гідродинаміки можна отримати, якщо до рівняння Ейлера у покомпонентній формі додати рівняння неперервності:

$$\begin{aligned}\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} &= X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}; \\ \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} &= Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}; \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} &= Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}; \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} &= 0.\end{aligned}\tag{6.2.6}$$

Припустимо, що знайдено такі функції:

$$p = f_1(x, y, z, t), \quad v_x = f_2(x, y, z, t), \quad v_y = f_3(x, y, z, t), \quad v_z = f_4(x, y, z, t).$$

Ці функції містять невідомі сталі, й отже, система має нескінченну кількість розв'язків. Для відокремлення єдиного розв'язку, що має відповідати реальному фізичному процесу, треба задати додаткові умови. Наприклад, для того, щоб у кожний момент часу визначити координати частинки, що у початковий момент $t = 0$ перебуває у точці (x_0, y_0, z_0) , треба розв'язати задачу Коші для системи рівнянь

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= f_2(x, y, z, t), \quad \frac{dy}{dt} = f_3(x, y, z, t), \quad \frac{dz}{dt} = f_4(x, y, z, t); \\ x(t_0) &= x_0, \quad y(t_0) = y_0, \quad z(t_0) = z_0.\end{aligned}$$

Для неоднорідної рідини, що не стискається, (наприклад, рідина із домішками у полі сили тяжіння) кількість невідомих функцій збільшується на одну: $\rho(x, y, z, t)$. Рівняння, аналогічне (6.2.3) у цьому випадку має вигляд

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -(\mathbf{v}, \nabla) \rho.\tag{6.2.7}$$

Додавання цього рівняння до (6.2.6) замикає систему.

Для середовищ, що стискаються, характерна визначена залежність між густиною і тиском. У зв'язку з цим розрізняють баротропні та барокліні середовища.

Баротропним середовищем називають середовище, в якому густина залежить тільки від тиску. Оскільки залежність $\rho = \Phi(p)$, як правило, відома, для баротропних середовищ система рівнянь гідродинаміки виявляється замкненою.

Бароклінним середовищем називають середовище, густина якого залежить не тільки від тиску. Тому кількість невідомих функцій збільшується на одне: v_x, v_y, v_z, p і ρ . Для замикання системи необхідне ще одне рівняння. Щоб його отримати запишемо диференціальне рівняння закону збереження енергії для ідеальної рідини, що стискається. Повна енергія U рухомого рідинного об'єму V є сума кінетичної енергії K та внутрішньої $\tilde{U}$: $U = K + \tilde{U}$, де

$$K = \frac{1}{2} \int_V \rho v^2 dV.$$

$$\tilde{U} = \int_V \rho E dV.$$

$$U = \int_V \rho \left(\frac{v^2}{2} + E \right) dV.$$

Приріст ΔU за час $\Delta t = t_2 - t_1$ складається із роботи масових сил A_r , роботи поверхневих сил A_s , притоку тепла Q_s та притоку тепла Q_r від джерел, що розподілені в об'ємі рідини:

$$\Delta U = A_r + A_s + Q_r + Q_s. \quad (6.2.8)$$

$$A_r = \int_{t_1}^{t_2} \int_V F v \rho dV dt.$$

$$A_s = \int_{t_1}^{t_2} \oint_S p_n v ds dt.$$

Якщо q_n – кількість тепла, що надходить в одиницю часу через одиницю поверхні в об'єму V ,

$$Q_s = \int_{t_1}^{t_2} \oint_S q_n ds dt, \quad q_n = k \frac{\partial T}{\partial n}.$$

$$Q_r = \int_{t_1}^{t_2} \int_V \varepsilon dV dt.$$

Закон збереження енергії для теплопровідного середовища, що стискається (із урахуванням рівняння Ейлера):

$$\rho \frac{dE}{dt} = \varepsilon + \operatorname{div}(k \operatorname{grad} T) - p \operatorname{div} v. \quad (6.2.9)$$

За адіабатичного руху ідеальної рідини маємо рівняння

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{p}{\rho} \operatorname{div} v.$$

Якщо ідеальною рідиною є ідеальний газ,

$$\frac{dE}{dt} = c_p \frac{dT}{dt},$$

c_p – питома теплоємність в ізохронному процесі. Нехай залежність $E = \Psi(T, p)$ відома. Тоді додавання до рівнянь (6.2.3), (6.2.5), (6.2.9) рівняння стану

$$\Theta(p, \rho, T) = 0, \quad (6.2.10)$$

отримаємо замкнену систему рівнянь, яка відповідає руху ідеальної теплопровідної бароклінної рідини.

Початкові та межові умови

Початкові умови:

$$v_x(x, y, z, t_0) = \varphi_1(x, y, z), v_y(x, y, z, t_0) = \varphi_2(x, y, z), v_z(x, y, z, t_0) = \varphi_3(x, y, z). \quad (6.2.11)$$

Умови на межах області, залежать від характеристик межі. Якщо рідина межує із нерухомою твердою стінкою S_T , із рівнянням поверхні $G(x, y, z) = 0$ межева умова має вигляд

$$v_n = (v, n) = 0, \quad r \in S_T, \quad (6.2.12)$$

де $n = \{\partial G/\partial x, \partial G/\partial y, \partial G/\partial z\}$ – нормаль до поверхні межі S_T , r – радіус-вектор із початку координат у точку, що розглядається. Цю умову можна переписати у вигляді

$$v_x \frac{\partial G}{\partial x} + v_y \frac{\partial G}{\partial y} + v_z \frac{\partial G}{\partial z} = 0, \quad r \in S_T.$$

За умови вільної поверхні рівняння поверхні залежить від часу: $G(x, y, z, t) = 0$. Частинки рідини на вільній поверхні S_p рухаються разом із поверхнею.

Кінематична умова на вільній поверхні:

$$\frac{\partial G}{\partial t} + v_x \frac{\partial G}{\partial x} + v_y \frac{\partial G}{\partial y} + v_z \frac{\partial G}{\partial z} = 0, \quad r \in S_p.$$

6.2.2 Моделі рідинних в'язких середовищ

Взаємодія частинок рідини характеризується напруженнями поверхневих сил, тобто силами взаємодії. Що віднесено до одиниці площі рідинних частинок, що дотикаються. Під час руху в'язкої рідини поряд із нормальною складовою напруження виникає дотична складова, що має назву *силою внутрішнього тертя (силою в'язкості)*, що виявляє себе у вигляді спротиву рідини процесу деформації.

Тензор швидкостей деформації має вигляд

$$\Phi = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & \theta_3/2 & \theta_2/2 \\ \theta_3/2 & \varepsilon_2 & \theta_1/2 \\ \theta_2/2 & \theta_1/2 & \varepsilon_3 \end{bmatrix}$$

Тензор Φ сповна описує динаміку деформаційного процесу, що здійснюється у малому околі обраного у рідині полюсу. Якщо усі дев'ять компонентів тензору

перетворюються у нуль, й отже, швидкість будь-якої частинки із околу точки О подається відомою формулою для твердих тіл: $v = v_0 + \omega \times \rho$, де $\omega = 1/2 \text{rot} v \times \rho$ – вектор кутової швидкості.

В основу моделі в'язкої рідини покладено такі припущення:

- складові тензору напружень за прагнення в'язкості до нуля мають прагнути до складових тензору напружень в ідеальній рідині;
- рідина ізотропна (фізичні властивості однакові за всіма напрямками);
- компоненти тензору напружень є лінійні функції компонентів тензору швидкостей деформації.

За першим твердженням тензор напружень можна подати у вигляді

$$\Pi = \Pi^0 + \Pi' = -pE + \Pi', \quad (6.2.13)$$

Π' є в'язкий тензор напружень, компоненти якого прагнуть до нуля. Компоненти тензору Π' вважаються лінійними функціями компонентів тензору Φ .

$$\Pi' = \lambda E \text{div} v + 2\mu \Phi, \quad (6.2.14)$$

де λ і μ – скалярні характеристики середовища, наявність яких відображає властивість ізотропного середовища. Коефіцієнт μ називають *першим коефіцієнтом в'язкості*, λ – *другим коефіцієнтом в'язкості*. Останні співвідношення (6.2.13), (6.2.14) являють собою *закон Нав'є–Стокса*. Подамо (6.2.14) у вигляді

$$\begin{aligned} p_{xx} &= -p + \lambda \text{div} v + 2\mu \varepsilon_1, & p_{xy} &= p_{yx} = \mu \theta_3, \\ p_{yy} &= -p + \lambda \text{div} v + 2\mu \varepsilon_2, & p_{xz} &= p_{zx} = \mu \theta_2, \\ p_{zz} &= -p + \lambda \text{div} v + 2\mu \varepsilon_3, & p_{yz} &= p_{zy} = \mu \theta_1. \end{aligned} \quad (6.2.15)$$

У рамках моделі, що розглядається, часто вважають $\mu = \text{const}$, $\lambda = -2/3\mu$, вважаючи, що гідродинамічний тиск p дорівнює середньому арифметичному від трьох нормальних тисків p_{xx} , p_{yy} , p_{zz} , взятому зі знаком -.

$$p = -\frac{1}{3}(p_{xx} + p_{yy} + p_{zz}).$$

Рівняння Нав'є–Стокса

Розглянемо рівняння Даламбера

$$\int_V (F - w) \rho dV + \oint_S p_n ds = 0.$$

Шляхом застосування перетворення Ейлера отримаємо рівняння

$$F - w + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p_x}{\partial x} + \frac{\partial p_y}{\partial y} + \frac{\partial p_z}{\partial z} \right) = 0 \quad (6.2.16)$$

або покомпонентно

$$\begin{aligned}
\frac{dv_x}{dt} &= X + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zx}}{\partial z} \right), \\
\frac{dv_y}{dt} &= Y + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zy}}{\partial z} \right), \\
\frac{dv_z}{dt} &= Z + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zz}}{\partial z} \right)
\end{aligned} \tag{6.2.17}$$

Перетворимо ці рівняння із урахуванням подання (6.2.15) компонентів тензору напружень.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zx}}{\partial z} &= -\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{div} v + 2\mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \\
&= -\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{div} v + \mu \Delta v_x + \mu \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{div} v = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{3}\mu \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{div} v + \mu \Delta v_x.
\end{aligned}$$

Аналогічно перетворюється решта рівнянь. Замість цих співвідношень у (6.2.17) і врахуємо, що $\nu = \mu/\rho$ (кінематичний коефіцієнт в'язкості). Отримаємо *рівняння Нав'є–Стокса*

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} &= X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\nu}{3} \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{div} v + \nu \Delta v_x, \\
\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} &= Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\nu}{3} \frac{\partial}{\partial y} \operatorname{div} v + \nu \Delta v_y, \\
\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} &= Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\nu}{3} \frac{\partial}{\partial z} \operatorname{div} v + \nu \Delta v_z,
\end{aligned} \tag{6.2.18}$$

або

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (v, \nabla v) = F - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \frac{\nu}{3} \operatorname{grad} \operatorname{div} v + \nu \Delta v. \tag{6.2.19}$$

Рівняння Нав'є–Стокса широко застосовуються для математичного опису різноманітних фізичних процесів. Наприклад, для побудови математичних моделей кровообігу.

Моделі рідинних в'язких середовищ

Якщо середовище однорідне і $\mu = \text{const}$, рівняння Нав'є–Стокса набувають вигляду

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} &= X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \Delta v_x, \\
\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} &= Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \Delta v_y, \\
\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} &= Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \Delta v_z, \\
\text{div } \mathbf{v} &= 0.
\end{aligned} \tag{6.2.20}$$

Отримуємо замкнуту систему з 4-х скалярних рівнянь відносно функцій v_x, v_y, v_z, p . Якщо рідина, що не стискається, є неоднорідна, до цієї системи рівнянь слід додати рівняння (6.2.7).

У загальному випадку рівняння Нав'є–Стокса (6.2.18) разом із рівнянням неперервності (6.2.3) можна замкнути, якщо скористатися законом збереження енергії, щоб отримати ще одне рівняння.

Інтегральна форма закону збереження енергії для рухомого об'єму рідини:

$$\begin{aligned}
\int_V \rho \left(v \frac{dv}{dt} + \frac{dE}{dt} \right) dV &= \int_V F v \rho dV + \int_F \varepsilon dV \\
+ \int_V \left[\frac{\partial}{\partial x} (p_x v) + \frac{\partial}{\partial y} (p_y v) + \frac{\partial}{\partial z} (p_z v) \right] dV &+ \int_V \text{div}(k \text{grad } T) dV.
\end{aligned} \tag{6.2.21}$$

Із урахуванням рівняння руху (6.2.16) отримуємо шукане рівняння притоку тепла

$$\rho \frac{dE}{dt} = \varepsilon + \text{div}(k \text{grad } T) + p_x \frac{\partial v}{\partial x} + p_y \frac{\partial v}{\partial y} + p_z \frac{\partial v}{\partial z}. \tag{6.2.22}$$

Якщо у систему рівнянь (6.2.18), (6.2.22) включити рівняння стану середовища (6.39), із урахуванням того, що густина внутрішньої енергії $E = \Psi(T, p)$ сповна визначається параметрами T, p , приходимо до замкненої системи рівнянь.

У цій системі рівнянь передбачається стале значення коефіцієнту в'язкості. Для багатьох рідинних середовищ таке припущення є задовільне.

У загальному випадку залежність коефіцієнту в'язкості газів від температури задається *формулою Сатерленда*

$$\mu = \frac{C_1}{T + T_0} \sqrt{T^3}, \quad T_0 = 114 \text{ K},$$

або степеневим законом вигляду

$$\mu = C_2 (T/T_0)^\omega, \quad 0,5 \leq \omega \leq 1,$$

де C_1, C_2 – деякі сталі.

Отже, *модель в'язкої теплопровідної рідини, що стискається*, яка підпорядковується закону Фур'є, містить такі елементи:

- рівняння Нав'є–Стокса (6.2.18);
- рівняння неперервності (6.2.3);

- рівняння притоку тепла (6.2.4);
- рівняння стану (6.2.10);
- вираз для густини внутрішньої енергії через параметри T, p
- значення коефіцієнту в'язкості μ і коефіцієнтів теплопровідності k .

Густина масових сил F та інтенсивність внутрішніх джерел тепла ε – зовнішні параметри і мають задаватися.

Крайові задачі

Зовнішня задача гідроаеродинаміки.

Одна із основних проблем механіки рідин є задача обтікання тіла однорідним необмеженим потоком. Нехай S_T – поверхня тіла, D_e – зовнішня частина простору відносно до тіла. Треба знайти розв'язок системи (6.2.20), що відповідає течії, яка переходить з нескінченності в однорідний потік, що рухається зі швидкістю U_∞ вздовж осі X . На нескінченності маємо умову

$$v \rightarrow e_x U_\infty, \quad r \rightarrow \infty.$$

Оскільки рідина в'язка, на поверхні S_T виконується умова прилипання частинок рідини до поверхні:

$$v = V_T, \quad r \in S_T, \quad t \geq t_0.$$

Якщо тіло, що обтікається, нерухоме, вочевидь, справджується умова

$$v = 0, \quad r \in S_T, \quad t \geq t_0.$$

Початковий розподіл швидкостей

$$v = v_0(x, y, z), \quad r \in S_T \cup D_e, \quad t = t_0.$$

Внутрішня задача.

Внутрішня задача формулюється для течії всередині замкнутої області D . Нехай ∂D – непроникна межа області D . Тоді треба знайти розв'язок задачі (6.2.22) із додатковими умовами

$$v = V_T, \quad r \in \partial D, \quad t \geq t_0;$$

$$v = v_0(x, y, z), \quad r \in \partial D \cup D, \quad t = t_0.$$

Умови на поверхні розділу.

Розглянемо уявну поверхню S_p , що поділяє рідини із різними фізичними властивостями, які утворюють єдиний потік. Тоді на поверхні S_p виконуються умови

$$v_1 = v_2, \quad r \in S_p;$$

$$(p_1, n_1) = (p_2, n_2), \quad |p_1| = |p_2|, \quad r \in S_p,$$

де n_1 – нормаль до однієї зі сторін поверхні S_p , p_1, v_1 – напруження і швидкість частинок на відповідному боці поверхні S_p , $n_2 = -n_1$.

Умови

$$p_{n_s} = 0, \quad r \in S_p,$$

де p_{n_s} – проекція напруження на будь-який дотичний до вільної поверхні S_p напрямком. Якщо n – нормаль до вільної поверхні, напруження p на вільній поверхні дорівнює $p = -p_0 n$, p_0 – атмосферний тиск. Тому

$$(p, n) = -p_0, \quad r \in S_p.$$

Ці умови являють собою *динамічну умову на вільній поверхні в'язкої рідини*. Кінематична умова на вільній поверхні формулюється так: швидкість рідинних частинок на вільній поверхні збігається із швидкістю переміщення на вільній поверхні.

6.2.3 Стаціонарні течії в'язкої однорідної рідини у трубах

Розглянемо ламінарну течію однорідної в'язкої рідини у трубі із гладким перетином, що викликане поздовжнім градієнтом тиску, яке не залежить від часу: $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial p}{\partial y} = 0$,

$\frac{\partial p}{\partial z} \neq 0$. Вважатимемо, що вісь Z спрямована вздовж осі труби за течією рідини. Типова властивість ламінарних течій є змінювання характеру течії тільки у разі зміни зовнішніх умов і сил. У решті випадків течія зберігає свій спокійний характер. За зміни параметрів труби швидкості течії або фізичних характеристик рідини рух може стати турбулентним.

Для визначення розподілу швидкостей у трубі маємо систему рівнянь гідродинаміки, яке впливає із (6.2.20):

$$\mu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial p}{\partial z}; \quad \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial z} \neq 0 \quad (6.2.23)$$

із межовими умовами

$$v = 0, \quad r \in S_T, \quad |v| < \infty, \quad r \in D. \quad (6.2.24)$$

D – область всередині поверхні труби S_T .

Найважливішим частинним випадком є течія по трубі із круговим перетином радіусу a . Перехід у полярну систему координат (r, φ) дає крайову задачу Діріхле для рівняння Пуассона у крузі

$$\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial \varphi^2} = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dz}, \quad 0 \leq r < a, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad (6.2.25)$$

$$v_z|_{r=a} = 0, \quad |v_z| < \infty. \quad (6.2.26)$$

Оскільки $p = p(z)$, $v_z = v_z(r, \varphi)$, виконання рівняння можливе коли $dp/dz = \text{const}$. Розв'язок задачі

$$v_z(r, \varphi) = w(r, \varphi) + \frac{r^2}{4\mu} \frac{dp}{dz}, \quad (6.2.27)$$

де функція $w(r, \varphi)$ задовольняє крайову задачу Діріхле для рівняння Лапласа

$$\Delta w = 0, \quad 0 \leq r < a, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad w|_{r=a} = -\frac{a^2}{4\mu} \frac{dp}{dz}, \quad |w| < \infty.$$

Розв'язок крайової задачі Діріхле для рівняння Лапласа всередині круга, що обмежено за $r = 0$, дається формулою

$$w(r, \varphi) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^n (A_n \cos(n\varphi) + B_n \sin(n\varphi)), \quad A_n, B_n = \text{const.}$$

Із урахуванням межевої умови при $r = a$ отримуємо

$$A_0 = -\frac{a^2}{2\mu} \frac{dp}{dz}, \quad A_n = 0, \quad n \neq 0, \quad B_n = 0.$$

Отже,

$$v_z(r) = -\frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dz} (a^2 - r^2). \quad (6.2.28)$$

Ця функція є класичний розв'язок задачі (6.2.25), (6.2.26), й отже, єдиним її розв'язком.

Течія із профілем швидкості (6.2.28) називається *пласкопаралельною течією Пуазейля*. Якщо p_1, p_2 – тиск у двох точках, що віддалені на відстань l одна від одної,

$$\frac{dp}{dz} = -\frac{p_1 - p_2}{l}.$$

Тому розподіл (6.2.28) можна переписати у вигляді

$$v_z(r) = \frac{p_1 - p_2}{4\mu} (a^2 - r^2).$$

Інший частинний розв'язок задачі (6.2.23), (6.2.24) шукатимемо у вигляді

$$v_z(x, y) = Ax^2 + By^2 + C. \quad (6.2.29)$$

Після заміщення (6.2.29) у (6.2.23) отримаємо

$$(2A + 2B) \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dz}. \quad (6.2.30)$$

Умова на поверхні труби

$$v_z|_{S_T} = (Ax^2 + By^2 + C)|_{l_T} = 0$$

означає, що перетином l_T , для якого розподіл швидкостей можна подати формулою (6.2.29), є еліпс

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

$a^2 = -C/A$, $b^2 = -C/B$. Тому відповідно до (6.2.20)

$$\frac{C}{a^2} + \frac{B}{b^2} = -\frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dz}$$

або

$$C = \frac{1}{2\mu} \frac{p_1 - p_2}{l} \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}.$$

Отже, розподіл швидкостей при ламінарній течії у трубі із еліптичним перетином має вигляд

$$v_z(x, y) = \frac{1}{2\mu} \frac{p_1 - p_2}{l} \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right).$$

6.2.4 Нестационарна течія в'язкої однорідної рідини у трубах

Нехай у горизонтальній циліндричній трубі радіусу a із рідиною всередині, що не рухається у момент часу $t = 0$ задається сталий поздовжній градієнт тиску $-\partial p / \partial z = \gamma$, що залишається сталим у наступні моменти часу. Якщо ось Z декартової системи координат збігається із віссю труби, $v_z \neq 0$, $v_x = v_y = 0$, $\partial p / \partial x = \partial p / \partial y = 0$.

Нехтуючи дією сили тяжіння, із (6.2.20) із урахуванням умов (6.2.25) отримуємо модельну крайову задачу у крузі K^a з межею ∂K^a :

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} = \nu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} \right) + \frac{1}{\rho} \gamma, \quad |v_z| < \infty, \quad (x, y) \in K^a, \quad (6.2.32)$$

$$v_z(x, y, t) = 0, \quad (x, y) \in \partial K^a, \quad t \geq 0, \quad (6.2.33)$$

$$v_z(x, y, 0) = 0, \quad 0 \leq r \leq a. \quad (6.2.34)$$

Перейдемо у полярну систему координат (r, φ) і запровадимо нову невідому функцію

$$u(r, \varphi, t) = \frac{\gamma}{4\mu} (a^2 - r^2) - v_z(r, \varphi, t).$$

Тоді із системи (6.2.32)–(6.2.34) для визначення функції $u(r, \varphi, t)$ отримуємо задачу:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}, \quad 0 \leq r < a, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \\ u(a, \varphi, t) &= 0, \quad t \geq 0, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \\ u(r, \varphi, 0) &= \frac{\gamma}{4\mu} (a^2 - r^2), \quad 0 \leq r < a. \end{aligned} \quad (6.2.35)$$

Часткові розв'язки цього рівняння, що задовольняють межеву умову за $r = a$, шукаємо відповідно до методу розділення змінних

$$u(r, \varphi, t) = \bar{u}(r, \varphi) T(t).$$

Тоді маємо:

$$\frac{T'}{\nu T} = \frac{\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \varphi^2}}{\bar{u}} = -\frac{\lambda}{a^2},$$

де λ – довільна стала величина.

Для відшукування функції $\bar{u}(r, \varphi)$ отримуємо рівняння

$$\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \varphi^2} + \frac{\lambda}{a^2} \bar{u} = 0, \quad 0 \leq r < a, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad \bar{u}(a, \varphi) = 0; |\bar{u}| < \infty. \quad (6.2.36)$$

Розв'язок цього рівняння шукаємо у вигляді

$$\bar{u}(r, \varphi) = R(r)\Phi(\varphi).$$

Заміщення його у рівняння і поділяючи змінні, маємо

$$\frac{r \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial R}{\partial r} \right) + \frac{\lambda}{a^2} r^2 R}{R} = -\frac{\Phi''}{\Phi} = \nu,$$

де ν – довільна стала. Для визначення функції $\Phi(\varphi)$ отримуємо задачу

$$\Phi'' + \nu \Phi = 0, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad \Phi(\varphi) = \Phi(\varphi + 2\pi).$$

Розв'язок цієї задачі:

$$\nu_n = n^2; \quad \Phi(\varphi) = \begin{bmatrix} \cos n\varphi \\ \sin n\varphi \end{bmatrix}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Для кожного $\nu_n = n^2$ маємо задачу Штурма–Ліувілля для рівняння Бесселя

$$r \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) + \left(\frac{\lambda}{a^2} r^2 - n^2 \right) R = 0, \quad 0 \leq r < a, \quad R(a) = 0, \quad |R| < \infty.$$

$$R_n(r) = J_n(\sqrt{\lambda_k^n/a} \cdot r) = J_n(\beta_k^n r),$$

де J_n – функція Бесселя n -го порядку, λ_k^n – k -й корінь рівняння

$$J_n(\sqrt{\lambda_k^n}) = 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

Загальний розв'язок рівняння

$$T' + \frac{\nu \lambda_k^n}{a^2} T = 0$$

має вигляд

$$T_{nk}(t) = A e^{-\nu \lambda_k^n / a^2 \cdot t}.$$

Розв'язок задачі (6.2.35) шукаємо у вигляді

$$u(r, \varphi, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} J_n(\beta_k^n r) [A_{nk} \cos(n\varphi) + B_{nk} \sin(n\varphi)] e^{-n^2 (\beta^2)_k^n t}.$$

Запитання для самоперевірки

1. У чому полягає різниця між масовими та поверхневими силами?
2. Як визначається сила внутрішнього тертя?
3. У чому полягає принцип Даламбера?
4. Яке середовище має назву парокінного, баротропного?
5. Наведіть рівняння збереження енергії для теплопровідного середовища.
6. Як визначається тензор швидкостей деформації?
7. Які величини мають назву першого та другого коефіцієнтів в'язкості?
8. Наведіть систему рівнянь Нав'є–Стокса у векторному вигляді.
9. Яка система диференціальних рівнянь має назву стаціонарної?
10. Яка течія рідини має назву течії Пуазейля?

Частина III Оптимальне крування біомедичними процесами

Розділ 7 Математичне моделювання імунних систем

Одним із найефективніших підходів до побудови оптимальної стратегії з вивчення та прогнозування вірусних захворювань є математичне моделювання, що надає можливість аналізувати вплив різних факторів та їхніх сполучень на індивідуальному і популяційному рівнях. Прикладом моделей такого типу можуть слугувати математичні моделі прогнозування, що описують взаємозв'язок між показниками здоров'я людини та факторами навколишнього середовища.

Структурна схема моделі представлена на рис. 7.1 і складається із сукупності взаємопов'язаних елементів імунної системи, які є найважливіші складові у реакції організму на вірусну інфекцію. У моделі враховується функціональний стан органів, що розглядаються. Зважаючи складність взаємодії складових імунної системи запроваджено низку спрощуючих припущень.

Що стосується побудови математичних моделей імунних систем з метою виявлення закономірностей їхньої поведінки та оптимального керування дозами лікарських препаратів, то враховуючи складність взаємодії складових імунної системи, запроваджено низку спрощуючих припущень.

Популяції клітин і вірусів вважаються рівномірно розподіленими по епітеліальному шару органу–мішені у будь-який момент часу. Швидкість змінювання змінних визначається поточним значенням усіх змінних. Вважається, що основні процеси регуляції імунного захисту здійснюються у трьох локальних об'ємах: головному мозку (гіпофізі, гіпоталамусі), черевної порожнини та об'ємі органу–мішені. Взаємодія між цими об'ємами здійснюється із запізненням у часі.

Структурна схема моделі, що наведена на рис. 7.1, складається з сукупності взаємопов'язаних елементів імунної і нейроендокринної систем, які є найважливішими складовими у реакції організму на вірусну інвазію.

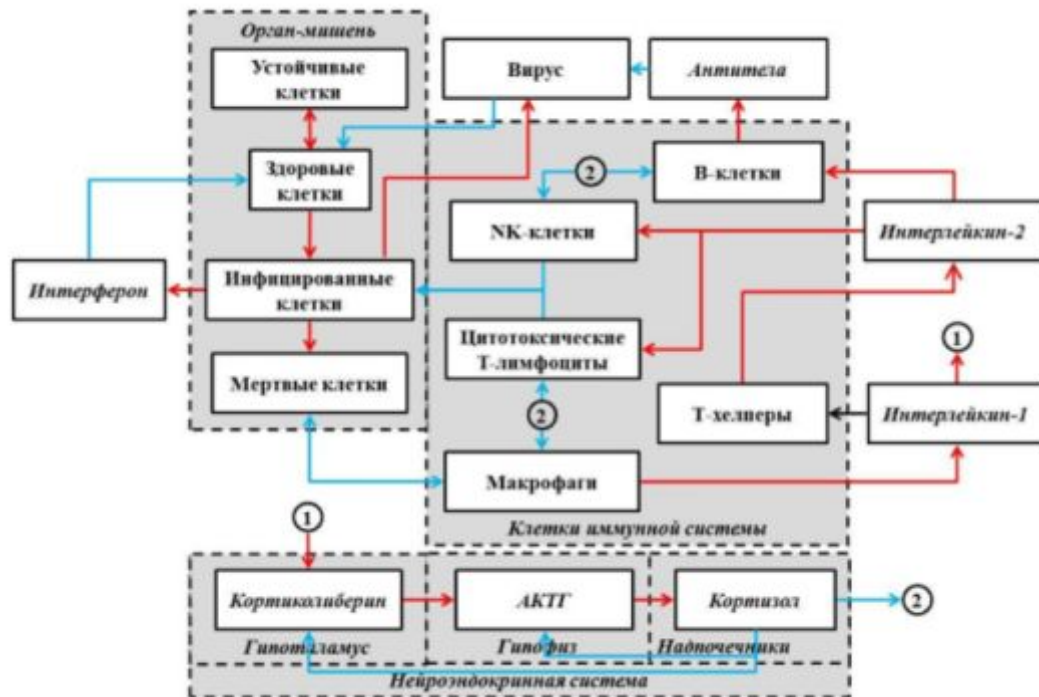


Рис. 7.1. Схема функціонування імунної системи у випадку вірусної інвазії

Запуск захисних механізмів здійснюється після взаємодії макрофагів із клітинами органу–мішені, що відмерли, які зруйновано внаслідок життєвого циклу вірусу. Видалення макрофагами клітин, уражених вірусом, супроводжується синтезом інформаційних молекул (цитокіну) інтерлейкіну-1 [22].

Поява у крові підвищеного вмісту інтерлейкіну-1 сприяє виробленню інтерлейкіну-2 Т-хелперами і стимулює специфічні рецептори гіпоталамусу на вироблення релізінг–гормону кортиколиберину.

Метою регуляторного впливу інтерлейкіну-2 є НК-клітини, цитотоксичні Т-лімфоцити і В-клітини [15]. Основна функція НК-клітин пов'язана із знищенням інфікованих клітин на ранніх етапах захисту організму проти вірусних інфекцій. Продукція НК-клітин здійснюється кістковим мозком.

Ще одним механізмом первинного противірусного захисту є вироблення зараженими клітинами інтерферону. Інтерферон діє на сусідні незаражені клітини і викликає у них несприятливість до зараження вірусами.

Основними механізмами специфічно набутої імунної відповіді є вироблення В-клітинами антитіл, що зв'язують вільні віруси, та знищення заражених клітин цитотоксичними Т-лімфоцитами.

При математичному запису описаних процесів використано закон діючих мас, згідно якому швидкості реакцій пропорційні добутку концентрації речовин, а також використано характеристики взаємодії та марківських процесів загибелі та відродження.

Дослідження фундаментальних і модельних результатів надає можливість на ґрунті моделей взаємодії антигенів та антитіл побудувати математичні моделі підтримки здоров'я людини. Основну роль у такому підході відіграє імунна система як комплекс програм з управління біонанооб'єктами в організмі людини.

Необхідність створення систем програмного забезпечення супроводу лікувального

процесу тісно пов'язана із розумінням стратегії імунної відповіді.

В організмі існує визначений рівень імунокомпетентних клітин (ІКК) зі своїми рецепторами – антитілами, які є специфічні до всіляких антигенів. Незначна кількість антигенів коли опиняється в організмі людини, починає розмножуватися у клітинах органу-мішені; частина антигенів скидається у кров, де взаємодіє із рецепторами ІКК – із антитілами, утворюючи комплекси антитіло–антиген, які поглинаються антитіло–утворюючими клітинами. Через певний час після стимуляції в організмі формуються плазматичні клітини, які виробляють антитіла. Уражена частина органу не стимулює вихід плазматичних клітин, у результаті чого запускається процес регенерації тканин органу–мішені у відповідь на пошкодження. Механізм імунної відповіді зображено на рис. 7.2. На ньому позначено: ІКК+РА – імунокомпетентні клітини із рецепторами–антитілами; КАА – комплекси антиген–антитіло; ССОМ – сигнал про стан органу–мішені (сигнал запуску програми формування плазматичних клітин); СРОМ – сигнал про регенерацію органу–мішені (сигнал запуску програми регенерації органу–мішені); ПО-М – уражений орган–мішень; ПК – плазматичні клітини.

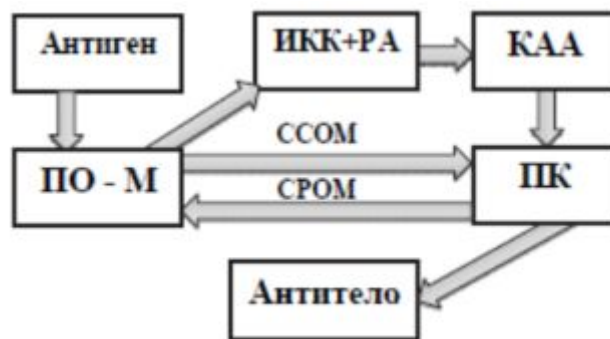


Рис. 7.2. Схема функціонування імунної відповіді

7.1. Математична модель протиінфекційного захисту

Розглянемо математичну модель функціонування імунної системи організму людини [Марчук]. Ця модель описує фундаментальні механізми імунного захисту.

Для формування базової моделі імунного захисту розглянемо такі положення імунології:

- В організмі існує ненульовий рівень імунокомпетентних клітин зі своїми рецепторами – антитілами, що є специфічні до всіляких антигенів, які вільно циркулюють як всередині клітин, так і за межами клітин;
- Мала доза антигенів, опиняючись в організмі, починає розмножуватися у клітинах органу-мішені;
- Частина антигенів скидається у кров, де взаємодіє із рецепторами імунокомпетентних клітин – із антитілами, утворюючи комплекси антитіло–антиген, які поглинаються клітинами, що утворюють антитіла і стимулюють імунну систему;
- Через час τ після стимуляції пропорційно до числа антитіло–антиген в організмі формуються плазматичні клітини, які виробляють антитіла, специфічні до відповідних

антигенів

- Зменшення числа плазматичних клітин та антитіл здійснюється також за рахунок їхнього старіння;
- Процес регенерації тканин органу–мішені запускається у відповідь на пошкодження.

Перелічимо змінні моделі як неперервні функції:

- $V(t)$ – концентрація антигенів, що розмножуються (патогенів) в ураженій частині органу–мішені [част./мл];
- $C(t)$ – концентрація антиген–специфічних лімфоцитів (носіїв і продуцентів антитіл) у лімфоїдній тканині [част./мл];
- $F(t)$ – концентрація антитіл (імуноглобулінів, рецепторів імуно–компетентних клітин тощо, що нейтралізують антигени) у крові, [кліт/мл];
- $m(t)$ – частка зруйнованих антигеном клітин в ураженій частині органу–мішені, що впливає на послаблення життєздатності організму у ході захворювання, яке пов'язане із зменшенням активності органів, що забезпечують надходження імунологічного матеріалу: лейкоцитів, лімфоцитів, антитіл тощо, які необхідні для боротьби із антигенами, що розмножуються.

Математична модель будується на ґрунті балансу для кожної із залежних змінних за припущення, що «організм» описується однорідним замкнутим об'ємом, в якому рівномірно змішані усі компоненти процесу. Змінювання чисельності клітинних популяцій, що задіяні у процесі імунної відповіді, розглядається на відрізок часу $[t_0, T]$, де $t_0 = 0$ – момент інфікування, враховується пошкодження і регенерація органів.

Таблиця 7.1 Біологічний зміст параметрів

Параметр	Біологічний зміст
γ	Коефіцієнт, що враховує ймовірність зустрічі антигенів із антитілами
α	Коефіцієнт стимуляції імунної системи
	Стала швидкості
β	розмноження антигенів
μ_c	природного старіння плазматичних клітин
ρ	виробництва антитіл 1-ю плазматичною клітиною
η	розходу антитіл на знешкодження одиниці антигену
μ_f	природного руйнування антигену
σ	руйнування клітин органу–мішені антигеном
μ_m	регенерації органу–мішені
C^*	Передіснуючий рівень плазматичних клітин
τ	Час формування каскаду плазматичних клітин

Таблиця 7.2 Значення за різних форм захворювань

Пар.	субкл.	гостра	хрон.	летал.	Розмірність
β	8	2	1	2	1/доба
γ	10	0,8	0,8	0,8	мл/частдоба
α	10000	10000	1000	10000	$\frac{\text{мл. кл.}}{\text{част.мол.доба}}$
μ_c	0,5	0,5	0,5	0,5	1/доба
ρ	0,17	0,17	0,17	0,17	$\frac{\text{мол.}}{\text{кліт.доба}}$
η	10	10	10	10	$\frac{\text{мол.}}{\text{част..}}$
μ_f	0,17	0,17	0,17	0,5	1/доба
σ	10	10	10	700	мл/частдоба
μ_m	0,12	0,12	0,12	0,12	1/доба
C^*	1	1	1	1	кліт\мл.
τ	0,5	0,5	0,5	0,5	доба

Рівень концентрації антигенів слугує основним показником динаміки хвороби і працездатності імунної системи. Маємо систему нелінійних диференціальних рівнянь із аргументом, що запізнюється, і розривною правою частиною, записані у нормальній формі Коші:

$$\begin{aligned}
 \frac{dV}{dt} &= \beta V - \gamma FV, \\
 \frac{dF}{dt} &= \rho C - \eta \gamma FV - \mu_f F, \\
 \frac{dC}{dt} &= \xi(m) \alpha F(t - \tau) V(t - \tau) - \mu_c (C - C^*), \\
 \frac{dm}{dt} &= \sigma V - \mu_m m,
 \end{aligned}
 \tag{7.1.1}$$

із початковими умовами

$$V(0) = V^0, \quad F(0) = F^0, \quad C(0) = C^0, \quad m(0) = m^0, \tag{7.1.2}$$

та фазовими обмеженнями:

$$V(t) \geq 0, \quad F(t) \geq 0, \quad C(t) \geq 0, \quad m(t) \geq 0, \tag{7.1.3}$$

де $\beta > 0$ – швидкість (темп) розмноження антигенів; $\gamma > 0$ – коефіцієнт, що враховує ймовірність зустрічі вірусів із антитілами та силу їх взаємодії; $\alpha > 0$ – коефіцієнт стимулювання імунної системи; $\rho > 0$ – швидкість продукування антитіл однією

плазмоклітиною; $\mu_c, \mu_f > 0$ – величини, зворотні до тривалості життя плазмоклітин та антитіл відповідно; $\eta > 0$ – кількість антитіл, що необхідна для нейтралізації одного вірусу; $\sigma > 0$ – швидкість (темп) ураження органу; $\mu_m > 0$ – швидкість відновлення маси ураженого органу; $C^* > 0$ – попередній рівень імунокомпетентних клітин (плазмоклітин); $\tau > 0$ – час, необхідний для формування каскаду плазмоклітин; $\xi(m)$ – невід’ємна функція, що не зростає, яка враховує порушення нормальної роботи імунної системи внаслідок суттєвого ураження органу

$$\xi(m) = \begin{cases} 1, & 0 \leq m < 0,1 \\ (1-m) \cdot 10/9, & 0,1 \leq m \leq 1. \end{cases}$$

Модель (7.1.1)–(7.1.3) описує загальні закономірності, властиві усім інфекційним захворюванням. Фактично ця модель визначає вигляд залежності важкості інфекції від характеристик імунітету та властивостей антигену.

7.2 Керування імунологічними реакціями

Запровадимо у розгляд критерій якості J , що відображає імунний захист за рахунок мінімізації середньої швидкості пошкодження організму за фіксований час T :

$$J = \frac{1}{T} \int_0^T \sigma V(t) dt \rightarrow \min, \quad (7.2.1)$$

де $\sigma > 0$ – швидкість (темп) ураження організму за рахунок антигенів.

Досягнення цієї мети пов'язане із проблемою управління імунологічними реакціями.

На ґрунті базової моделі інфекційного захворювання (7.1.1) побудуємо модель, що управляється, виходячи із таких припущень:

1. Керуванням є медичні препарати, що використовуються при лікуванні, тобто здійснюється зовнішнє управління шляхом введення додаткових членів у праві частини рівнянь моделі (7.1.1).

2. Визначений вид управління характерний для конкретної форми захворювання.

Для управління функціонуванням імунної системи при хронічних формах захворювання застосовується біостимуляція $u_1(t)$, що ґрунтується на введенні непатогенних антигенів. На рівні моделі, що визначає поведінку імунної системи, отримаємо модифікацію системи рівнянь (7.1.1) шляхом додавання трьох диференціальних рівнянь, що відображають характер процесу лікування:

$$\begin{aligned} \frac{dV_1}{dt} &= -\gamma_1 F_1 V_1 + u_1, \\ \frac{dF_1}{dt} &= \rho_1 C_1 - \eta_1 \gamma_1 F_1 V_1 - \mu_{f1} F_1, \\ \frac{dC_1}{dt} &= \frac{F_1 V_1}{FV + F_1 V_1} \alpha_1 F_1(t - \tau) V_1(t - \tau) - \mu_{c1} (C_1 - C_1^*). \end{aligned} \quad (7.2.2)$$

Ефективність лікування гострих форм захворювання і захворювання із можливим летальним витоком визначається за допомогою реалізації імунотерапії ($u_2(t)$), що ґрунтується на введенні готових імуноглобулінів або донорських антитіл, які надають можливість змінити динаміку хвороби на користь одужання. У результаті запровадження управляючої функції $u_2(t)$ модель, що визначає поведінку імунної системи, складається із рівнянь (7.1.1) із урахуванням модифікації динаміки функції $F(t)$, яка відображає характер лікування:

$$\frac{dF}{dt} = \rho C - \eta \gamma FV - \mu_f F + u_2 \quad (7.2.3)$$

Дослідження закономірностей протиінфекційного захисту виконується із залученням варіаційного принципу, що ґрунтується на припущенні, що поміж допустимих варіантів імунного захисту організму реалізуються ті, які мінімізують середню швидкість його пошкодження за фіксований час T .

$$I = \frac{1}{T} \int \sigma V(t) dt \rightarrow \min, \quad (7.2.4)$$

В якості керування, що регулює інтенсивність процесів імунної відповіді і сприяє прискореному відновленню уражених органів і тканин, виступають засоби, що використовують при лікуванні (зовнішнє управління), а також різні гормони і медіатори, що виробляються самим організмом (внутрішнє управління).

Модель, що визначає поведінку імунної системи, складається із системи рівнянь (лив. (7.1.1))

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \beta V - \gamma FV, \\ \frac{dF}{dt} &= \rho C - \eta \gamma FV - \mu_f F + u_2, \\ \frac{dC}{dt} &= \begin{cases} G(t) \alpha F(t - \tau) V(t - \tau) - \mu_c (C - C^*), & 0 \leq m < 0,1 \\ \xi(m) G(t) \alpha F(t - \tau) V(t - \tau) - \mu_c (C - C^*), & 0,1 \leq m \leq 1 \end{cases}, \\ \frac{dm}{dt} &= \sigma V - \mu_m m, \end{aligned} \quad (7.2.5)$$

Модель, що визначає керування (лікування) імунної системи, складається із системи рівнянь

$$\begin{aligned} \frac{dV_1}{dt} &= -\gamma_1 F_1 V_1 + u_1, \\ \frac{dF_1}{dt} &= \rho_1 C_1 - \eta_1 \gamma_1 F_1 V_1 - \mu_{f1} F_1, \\ \frac{dC_1}{dt} &= \begin{cases} G(t) \alpha_1 F_1(t - \tau) V_1(t - \tau) - \mu_{c1} (C_1 - C_1^*), & 0 \leq m < 0,1 \\ \xi(m) G(t) \alpha_1 F_1(t - \tau) V_1(t - \tau) - \mu_{c1} (C_1 - C_1^*), & 0,1 \leq m \leq 1, \end{cases} \\ G(t) &= \frac{F_1 V_1}{FV + F_1 V_1}. \end{aligned} \quad (7.2.6)$$

Отже, оптимізаційна керована модель динаміки імунного захисту спрямована на мінімізацію функціоналу (7.2.1) при динамічних умовах, заданих системою диференціальних рівнянь (7.2.5).

Початкові умови:

$$\begin{aligned} V(0) &= V^0, F(0) = F^0, C(0) = C^0, \\ V_1(0) &= V_1^0, F_1(0) = F_1^0, C_1(0) = C_1^0, m(0) = m^0. \end{aligned} \quad (7.2.7)$$

$$\begin{aligned} V(t) &\geq 0, F(t) \geq 0, C(t) \geq 0, \\ V_1(t) &\geq 0, F_1(t) \geq 0, C_1(t) \geq 0, m(t) \geq 0. \end{aligned} \quad (7.2.8)$$

Функції управління $u_1(t), u_2(t)$ характеризують швидкість введення біостимуляції і реалізації імунотерапії в одиницю часу відповідно і задовольняють обмеження:

$$0 \leq u_i(t) \leq b_i, \quad i = 1, 2, t \in [0, T], \quad (7.2.9)$$

де $b_i > 0$ – максимальне число людей, що схильні до біостимуляції, імунотерапії в одиницю часу, що залежать від обмежених технічних і фінансових засобів.

Система рівнянь (7.2.6) є система із розривною правою частиною та з аргументом, що запізнюється, загальний вигляд якої

$$\frac{dx(t)}{dt} = \begin{cases} f_1(t, x(t), x(t-\tau), u(t)), & S(t, m) < 0, \\ f_2(t, x(t), x(t-\tau), u(t)), & S(t, m) \geq 0, \end{cases}$$

де $x = (V, F, C, m, V_1, F_1, C_1)$ – абсолютно неперервна на $[0, T]$ вектор-функція стану; $u = (u_1, u_2)$ – кусково-неперервна на $[0, T]$ вектор-функція управління. Поверхня перемикання $S(t, m)$ – неперервно диференційовна скалярна функція, що має вигляд $S(t, m) = m - m^*$, де $m^* = 0, 1$ – граничний рівень ураження, за якого ще можлива нормальна робота імунної системи. Розглянемо випадок однократного «протикання» траєкторією поверхні переключення у точці τ_α (момент переключення), тобто точка, в якій $S(x(\tau_\alpha)) = 0$.

Для побудови оптимального управління використовується принцип максимуму.

Оскільки у задачі наявні фазові обмеження (7.2.8), забезпечимо їх виконання шляхом запровадження штрафного доданку у функціонал (7.2.1) і перейдемо до послідовності задач, в якій відсутні фазові обмеження, а функціонал має вигляд

$$I = \frac{1}{T} \int_0^T \sigma V(t) dt + A, \quad (7.2.10)$$

$$A = A_k \int_0^T [(\max\{-V, 0\})^2 + (\max\{-C, 0\})^2 + (\max\{-F, 0\})^2 + (\max\{-m, 0\})^2 + (\max\{-V_1, 0\})^2 + (\max\{-C_1, 0\})^2 + (\max\{-F_1, 0\})^2] dt,$$

$k = 1, 2, \dots, A_k > 0$ – параметри штрафу.

Функція Понтрягіна для задачі (7.2.5), (7.2.7), (7.2.10) має вигляд

$$H(t, x(t), x(t-\tau), \psi(t), \lambda_0) = \begin{cases} H_1(t, x(t), x(t-\tau), \psi(t), \lambda_0), & S(x) < 0, \\ H_2(t, x(t), x(t-\tau), \psi(t), \lambda_0), & S(x) > 0, \end{cases}$$

$$\begin{aligned} H_i(t, x(t), x(t-\tau), \psi(t), \lambda_0) = \\ -\lambda_0 \{ 1/T \sigma V(t) + A_k [(\max\{-V(t), 0\})^2 + (\max\{-C(t), 0\})^2 + (\max\{-F(t), 0\})^2 + \\ + (\max\{-V_1(t), 0\})^2 + (\max\{-C_1(t), 0\})^2 + (\max\{-F_1(t), 0\})^2] \\ + (\psi_i(t), f_i(t, x(t), x(t-\tau), u(t))) \}, \\ i = 1, 2; k = 1, 2 \dots A_k > 0, \lim_{k \rightarrow \infty} A_k = \infty. \end{aligned}$$

Функція $\psi(t) = (\psi_1(t), \psi_2(t))$ – сполучена вектор-функція, що визначена на $[0, \tau_\alpha] = T_1$ та $[\tau_\alpha, T] = T_2$ відповідно, неперервна і майже всюди неперервно

диференційовна на цих відрізках.

Початкові умови:

$$V(0) = 10^{-6}, C(0) = 1, F(0) = 1, m(0) = 0, V_1(0) = 0, C_1(0) = 1;$$

$$F_1(0) = 1, u_1(0) = 10^{-3}, \gamma_1 = 0,5, \alpha_1 = 80,$$

$$\mu_{f_1} = 0,17, \rho_1 = 0,17, \mu_{c_1} = 0,5, \eta_1 = 20$$

при хронічній формі захворювання, та

$$V(0) = 10^{-6}, C(0) = 1, F(0) = 1, m(0) = 0, u_2(0) = 5$$

за гострої форми захворювання.

Запитання для самоперевірки

1. Як визначається ефективність лікування?
2. Які популяції враховуються у моделі імунної системи?
3. Що характеризують керування імунною системою?
4. Як визначається функція Понтрягіна з метою керування імунною системою?

7.3 Математичне моделювання лікування інфікованих хворих вакцинацією

Зв'язок між дозою гепатиту В та інкубаційним періодом хвороби, [27]

Вірусний гепатит В має інкубаційний період, який у більшості випадків становить 45—120 днів. Фактори, які можуть бути причиною цих екстремальних показників захворювання вірусом гепатиту В включають:

- (i) розмір посівного матеріалу;
- (ii) шлях зараження;
- (iii) зміна вірусної патогенності хімічними або фізичними засобами;
- (iv) адміністрування специфічних антитіл.

Інкубаційний період для моделі оцінювався за час, необхідний для досягнення $V_f(t)$ свого максимального значення за 200 днів, тоді як тяжкість захворювання вважалася піковою величиною $m(t)$ за той самий інтервал часу. Відносні варіації $V_f(t_0)$ були в діапазоні від $1 \div 10^{-7}$.

Розрахунки показали, що значення $m_{\max}$ не залежить від $V_f(t_0)$ у досліджуваних межах $V_f(t_0)$ в діапазоні від $10^3 \div 10^{10}$ HBsAg част./мл і тому $1 \div 10^7$ HBV 1/мл

Оцінка динамічного внеску окремих процесів в моделі гострого гепатиту

Метою наступного дослідження є отримання часової картини основних процесів, які починають діяти у різні проміжки часу під час гострого гепатиту В. Ідентифікація меж, як

часових, так і кількісних, для процесів, які визначають, загалом, хід характеристик захворювання, надає додаткове уявлення про динамічний зв'язок між вірусологічними препаратами та імуно–логічними процесами.

Наприклад, шляхом додавання рівнянь для допоміжних змінних до системи рівнянь моделі можна оцінити загальну кількість вірусних частинок, які секретують гепатоцити, частину антитіл, витрачених на нейтралізацію вірусних частинок, тощо. На жаль, експериментальні дані щодо цих характеристик дуже погані.

Ознайомимося з загальними характеристиками гострого гепатиту В і зв'яжемо їх з моделлю у такий спосіб:

$$V^C = \int_{t_0}^{t_0 + T} v C_v dt,$$

загальна кількість $HBsAg$, що виділяється гепатоцитами, інфікованими вірусом, за час T

$$V^E = \int_{t_0}^{t_0 + T} n b_{CE} C_v E dt,$$

загальна кількість $HBsAg$, що вивільняється з гепатоцитів, зруйнованих за час T цитотоксичними Т-клітинами

$$V^M = \int_{t_0}^{t_0 + T} \gamma_{VM} V_f M dt,$$

загальна кількість $HBsAg$, що поглинається організмами моноклеарною системою фагоцитів за час T

$$V^F = \int_{t_0}^{t_0 + T} \gamma_{VF} V_f F dt,$$

загальна кількість $HBsAg$, нейтралізованого антитілами, специфічними до $HBsAg$ за час T

$$F^P = \int_{t_0}^{t_0 + T} \rho_F P dt,$$

загальна кількість антитіл, вироблених плазматичними клітинами за час T

$$F^V = \int_{t_0}^{t_0 + T} \gamma_{FV} V_f F dt,$$

загальна кількість антитіл, зв'язаних з $HBsAg$ за час T

$$C^V = \int_{t_0}^{t_0 + T} \sigma V_f (C^* - C_v - m) dt,$$

загальна кількість інфікованих вірусом гепатоцитів за час T

$$C^E = \int_{t_0}^{t_0 + T} nb_{CE} C_v E dt,$$

загальна кількість інфікованих гепатоцитів, зруйнованих цитотоксичними Т-клітинами за час T

$$H_E^D = \int_{t_0}^{t_0 + T} b_p^E [M_v(t) H_E(t) - H(t - \tau_H^E) M_v(t - \tau_H^E)] dt.$$

Оцінка цих характеристик виконана із використанням розрахункових параметрів, наведених в табл. 7.3 впродовж інтервалів часу від початку зараження: $0 \leq t \leq 120$ днів, $110 \leq t \leq 120$ днів. Перший відповідає всьому періоду захворювання, тоді як другий характеризує фазу вираженої протівірусної імунної відповіді. Аналізуючи отримані дан, можна зробити наступні висновки:

- частка *HBsAg* -частинок, що вивільняються з гепатоцитів, інфікованих вірусом руйнується цитотоксичними Т-клітинами, є незначна і стає значущою лише в період вираженої імунної відповіді (110-120-й день після початку інфекції);

- зважаючи на період захворювання (110–120 днів), можна легко помітити, що частинки *HBsAg* в основному нейтралізуються неспецифічними механізмами, але внесок гуморального імунітету, здається, стає помітним наступним розвитком імунної відповіді;

- провідний механізм звільнення організму від уражених вірусом гепатоцитів у перебігу гострого гепатиту В є Т-клітинна опосередкована цитотоксичність, а не цитофатична дія вірусу гепатиту В.

- враховуючи період захворювання від 110–120 днів, можна побачити, що частка антитіл, зв'язаних з частинками *HBsAg*, дуже мала, тоді як за інтервал 0–120 днів фракція антитіл, зв'язаних з *HBsAg*, розмір часток досягає 0,91;

- із порівняння кількості Н° на десятій і сто двадцятий день після початку зараження видно, що період імунної відповіді на розвиток гострого гепатиту В характеризується значною кількістю Т-клітин, наявних у циклі поділу, при цьому сто двадцятий день характеризується повним припиненням поділу Т-клітин.

Тим часом, такий аналіз на основі допоміжних характеристик моделі має виявити деякі проблеми: було виявлено, що одна цитотоксична Т-клітина індукує в середньому знищення близько 100 клітин–мішеней.

7.4 Модель гепатиту В з оптимальним керуванням

Збудником гепатиту В є вірус (ВГБ), здатний загрожувати життю. Наслідком впливу ВГБ на організм людини є цироз і рак печінки. Печінка є оптимальним місцем для розмноження вірусу гепатиту В, вона виробляє велику кількість його копій, потрапляє у кров. У разі гострої інфекції імунна система організму здатна знищити сам вірус, і здоров'я людини повністю відновлюється за кілька місяців після зараження. У осіб з хронічною стадією хвороби відсутні симптоми гепатиту В, навіть якщо наявне потомство вірусу гепатиту В виступає переносником вірусу, що може призвести до поширення інфекції.

Найрозповсюдженішими шляхами розповсюдження вірусу гепатиту В є статевий контакт, переливання крові або пов'язані з переливанням крові продукти. Передача вірусу гепатиту В від матері до плода належить до категорії вертикальної передачі. Після появи інфекції найважливішим фактором вірусу гепатиту В є вік особи. 15–25% дорослих, які інфікувалися вірусом ВГБ у ранньому віці, помирають від гепатиту В, раку або цирозу печінки.

В анамнезі у хронічних пацієнтів гостре захворювання не спостерігається, але у них може виникнути цироз (рубцювання печінки), що може призвести до утворення раку у печінці. Природне очищення від вірусу спостерігається у дуже малої частки пацієнтів. У деяких людей, інфікованих гепатитом В, вірус може розвивати симптоми, подібні до інфекцій, спричинених іншими вірусами.

У більшості людей у дорослому віці виробляється спонтанний імунітет проти інфекції ВГБ, і, як правило, не потребує жодного лікування. Лікування є обов'язкове, щоб знизити ризик інфікування ВГБ, пов'язаного з серйозними проблемами, такими як рак печінки або цироз. Лікування ВГБ значною мірою залежить від генотипу та типу ліків, що використовуються проти нього.

Під час дослідження вірусної інфекції гепатиту В одна з головних проблем полягає у виборі стратегії керування рівнем захворювання та викорінення інфекції.

7.4.1 Математична модель ВГБ

Модель динаміки розповсюдження ВГБ та керування лікуванням складається з 5-х звичайних диференціальних рівнянь (ЗДР). Позначимо сукупну популяцію людей у будь-який момент часу t як $N(t)$, що поділяється на п'ять різних класів, а саме $S(t)$ – чутливі особи, $L(t)$ – латентно інфіковані ВГБ, $I(t)$ – особи з гострим перебігом ВГБ-інфекції, $C(t)$ – хронічно інфіковані особи, і $R(t)$ – особи, які видужали. На рис. 7.1 наведена структурна схема моделі, яка представляє потокові відділи всіх змінних, взятих із загальної сукупності. За припущення, що кількість новонароджених носіїв загалом менша за суму померлих носіїв, популяція переходить від стану носія до стабільного імунного стану. У цьому випадку ми маємо $\mu\omega\nu < \mu_0 + \mu_1 + \gamma_2$. У випадку, коли $dC/dt > 0$, коли $C \neq 0$, або $I \neq 0$ та $t \geq 0$, є ймовірність постійного зростання інфекції.

Тому

$$N(t) = S(t) + L(t) + C(t) + R(t).$$

Популяцію, що може інфікуватися, формують новонароджені діти з показником μ ,

народжена частка без вакцинації з показником ω . Параметр ν – частка дітей, які не імунізовані, народжених від тих матерів, які мають хронічну хворобу. Через ефективні контакти з вірусом гепатиту В люди заражаються із швидкістю $(\mu_0 + \beta I + \varepsilon \beta C + \gamma_3)$, де ε та β – коефіцієнти передачі захворювання від інфікованих осіб до неінфікованих в $I(t)$ і $C(t)$ класах відповідно. Далі ця популяція зменшується завдяки вакцинації за рівнем γ_3 , із коефіцієнтом природної смертності μ_0 . Динаміка осіб, чутливих до інфекції, описується рівнянням

$$\frac{dS}{dt} = \mu\omega(1 - \nu C(t)) - [a_s + \beta I(t) + \varepsilon \beta C(t)]S(t). \quad (7.4.1)$$

Ця популяція зменшується за рахунок швидкості перенесення σ до гострого (інфікованого) класу та швидкості природної смерті μ_0 . Отже, для динаміки латентного стану маємо таке рівняння:

$$\frac{dL}{dt} = [\beta I(t) + \varepsilon \beta C(t)]S(t) - a_L L(t). \quad (7.4.2)$$

Приховані особи переходять у гостру (інфекційну) стадію зі швидкістю σ . Кількість активного населення зменшується на коефіцієнт природної смертності μ_0 , і цей клас далі зменшується за рахунок переміщення осіб у хронічний стан зі швидкістю $q\gamma_1$ та клас, який відновлюється зі швидкістю $(1 - q\gamma_1)$, де $0 < q < 1$. Отже, для гострої стадії

$$\frac{dI}{dt} = \sigma L(t) - a_I I(t). \quad (7.4.3)$$

У гостро інфікованих вірусом гепатиту В осіб розвивається хронічна стадія, а потім переходить у хронічний стан зі швидкістю $q\gamma_1$. А коли діти народжуються від інфікованої матері, що не імунізовані, цей клас ще більше збільшується зі швидкістю $\mu\omega\nu C$, зменшується завдяки природній смерті зі швидкістю μ_0 . Отже, щоб описати динаміку хронічного гепатиту В, сформулюємо таке рівняння:

$$\frac{dC}{dt} = \mu\omega\nu C(t) + q\gamma_1 I(t) - a_C C(t). \quad (7.4.4)$$

Нарешті, відновлений клас зменшується на той самий рівень природної смертності:

$$\frac{dR}{dt} = \gamma_2 C(t) + (1 - q\gamma_1)I(t) - \mu_0 R(t). \quad (7.4.5)$$

У цих рівняннях запроваджено позначення: $a_s = \mu_0 + \gamma_3$, $a_L = \mu_0 + \sigma$, $a_I = \mu_0 + \gamma_1$, $a_C = \mu_0 + \mu_1 + \gamma_2$.

Початкові умови задаються як:

$$S(0) > 0, L(0) \geq 0, I(0) \geq 0, C(0) \geq 0, R(0) \geq 0.$$

Швидкість народження позначається як μ , ν – частка перинатальних інфікованих (від хронічних матерів).

Запровадимо позначення:

$$z(t) = [(S, L, I, C, R)]^T, \quad z_0 = (S(0), L(0), I(0), C(0), R(0))^T \in R^5. \text{ Праві частини}$$

рівнянь (7.4.1)–(7.4.5) позначимо $F = [F_1, F_2, F_3, F_4, F_5]^T$.

Подано модель (7.4.1)–(7.4.5) у вигляді

$$\frac{dz}{dt} = F[z(t)]. \quad (7.4.6)$$

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = \mu\omega(1-\nu C(t)) - [a_s + \beta I(t) + \varepsilon\beta C(t)]S(t) - (1-u_1(t))S, \\ \frac{dL}{dt} = (\beta I(t) + \varepsilon\beta C(t))S(t) - (a_L L(t) - (1-u_1(t))L, \\ \frac{dI}{dt} = \sigma L(t) - (a_I I(t) - (1-u_2(t))I, \\ \frac{dC}{dt} = \mu\omega\nu C(t) + q\gamma_1 I(t) - (a_C C(t) - (1-u_2(t))C + (1-u_3(t))C, \\ \frac{dR}{dt} = \gamma_2 C(t) + (1-q\gamma_1)I(t) - \mu_0 R(t) + (1-u_1(t))S + (1-u_3(t))S + \\ + (1-u_3(t))I + (1-u_2(t))C - (1-u_3(t))C \end{cases} \quad (7.4.7)$$

з початковими умовами

$$S(0), L(0), I(0), C(0), R(0). \quad (7.4.8)$$

Визначимо функціонал для максимізації концентрації неінфікованих осіб:

$$J(u_1(t), u_2(t), u_3(t)) = \int_0^t \left[\sum_{k=1}^5 w_k z_k(t) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 w_{k+5} u_k(t) \right] dt, \quad (7.4.9)$$

де w_k , $k = \overline{1, 8}$ – вагові коефіцієнти.

Далі, для мінімізації функціоналу треба отримати оптимальне керування $u_1^*(t), u_2^*(t), u_3^*(t)$, які оптимізують функціонал (7.4.9).

$$J(u_1^*(t), u_2^*(t), u_3^*(t)) = \min\{J(u_1(t), u_2(t), u_3(t)), u_1(t), u_2(t), u_3(t) \in B\}. \quad (7.4.10)$$

Керуючі впливи змінюються в інтервалі $0 \leq u_k \leq 1$.

Для визначення оптимального рішення розглянемо задачу оптимального керування (7.4.9) і (7.4.10). Отже, для задач оптимального керування (7.4.1)–(7.4.5), дослідження лагранжіана і гамільтоніана є обов'язковим. Задача оптимального управління в лагранжіані представлена таким рівнянням:

Для пошуку мінімального значення функціоналу (7.4.9) визначимо гамільтоніан H

:

$$H = \sum_{k=1}^5 w_k z_k(t) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 w_{k+5} u_k(t) + \sum_{k=1}^5 p_k \frac{dz_k(t)}{dt}. \quad (7.4.11)$$

Вектор-функція $p(t) = (p_1, p_2, p_3, p_4, p_5)$ – це допоміжні множники Лагранжа,

визначення яких разом із змінними стану $z_k(t)$, $k = \overline{1,5}$ забезпечує отримання оптимальних керуючих впливів.

Із використанням умов оптимальності маємо:

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial u_1} &= w_6 u_1(t) + p_1 S + p_2 L - p_5(L + S); \\ \frac{\partial H}{\partial u_2} &= w_7 u_2(t) + p_3 I + p_4 C - p_5(I + C); \\ \frac{\partial H}{\partial u_3} &= w_8 u_3(t) + p_1 S + p_4 C - p_5(S - C).\end{aligned}\quad (7.4.12)$$

Розв'язання цієї системи рівнянь дає оптимальні значення:

$$\begin{aligned}u_1^*(t) &= \frac{1}{w_6}[-p_1 S - p_2 L + p_5(L + S)]; \\ u_2^*(t) &= \frac{1}{w_7}[-p_3 I - p_4 C + p_5(I + C)]; \\ u_3^*(t) &= \frac{1}{w_8}[-p_1 S - p_4 C + p_5(S - C)].\end{aligned}\quad (7.4.13)$$

Для оптимального управління $u^*(t)$ та розв'язків $z^*(t)$ відповідної системи у просторі станів (7.4.7) існують приєднані змінні $p_k^*(t)$, $k = \overline{1,5}$:

$$\begin{aligned}\frac{dp_1(t)}{dt} &= -[w_1 - p_1(a_s + \beta I + \varepsilon \beta C - u_1 - u_3 + 2) + \\ &\quad + p_2(\beta I + \varepsilon \beta C) + p_5(2 - u_1 - u_3)], \\ \frac{dp_2(t)}{dt} &= -[w_2 - p_2(\mu_0 + \mu_1 + \sigma - 1) + \sigma p_3(t) + p_5(1 - u_1)], \\ \frac{dp_3(t)}{dt} &= -[w_3 - \beta S(p_1 - p_2) - p_3(\mu_0 + \gamma_1 + u_2 - 1) + \\ &\quad + p_4 q \gamma_1 + p_5(\gamma_1 - 1) q \gamma_1 - u_2 + 1)]; \\ \frac{dp_4(t)}{dt} &= -[w_4 - p_1(\mu \nu \omega + \varepsilon \beta S) + p_2 \beta S + p_4(\mu \nu \omega - \mu_0 - \mu_1 - \gamma_2 \\ &\quad + u_2 + u_3 - 2) + p_5(\gamma_2 - u_2 + u_3)]; \\ \frac{dp_5(t)}{dt} &= -[w_5 - p_5 \mu_0].\end{aligned}$$

із умовами трансверсальності $p_m(t) = 0$, $m = \overline{1,5}$.

Розв'язок системи рівнянь (7.4.14) та розв'язання системи рівнянь стану (7.4.1)—(7.4.5) при оптимальних значеннях (7.4.10) із урахуванням початкових і межових умов дає вирази для стану системи та вирази для оптимального управління.

Початкові умови для системи рівнянь стану:

$$S(0) = 100, L(0) = 30, i(0) = 20, C(0) = 5, R(0) = 1.$$

$$q = 1, \beta = 0,091, \mu = 0,0121, \mu_1 = 0,01, \mu_0 = 0,0693, \omega = 0,85, \nu = 0,46;$$

$$\varepsilon = 0,00003, \sigma = 0,2, \gamma_1 = 0,003, \gamma = 0,01, \gamma_2 = 1,02.$$

Вагові коефіцієнти обиралися як:

$$w_1 = 0,091, w_2 = 100000, w_3 = 1, w_4 = 0,005, w_5 = 91, w_6 = 2000, w_7 = 70, w_8 = 5.$$

На рис. 7.3 наведено результати математичного моделювання системи рівнянь (7.4.7) з визначення концентрації компонент вірусної інфекції. Алгоритм математичного моделювання наведений у [11].

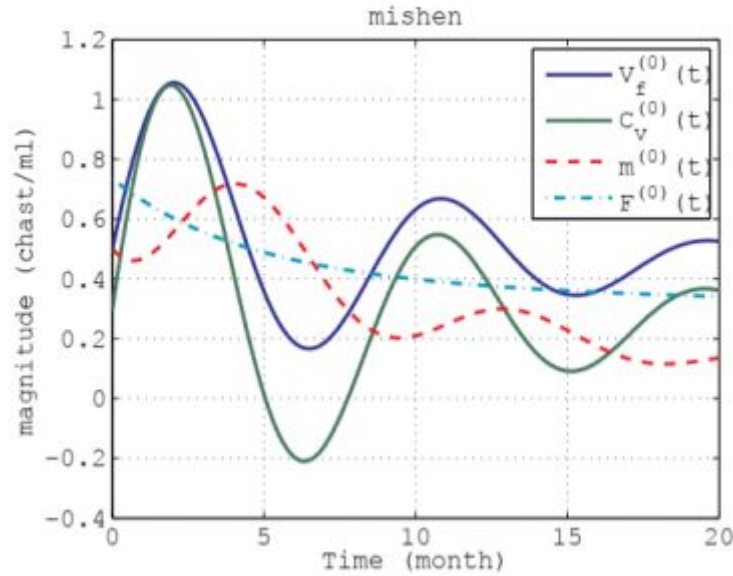


Рис. 7.3. Концентрація змінних в органі-мішені

7.4.2 Регуляція протівірусної відповіді

У цьому підрозділі розглядаються математичні моделі вірусних інфекцій у загальному випадку. Для моделювання конкретних варіантів вірусної інфекції з цих рівнянь обирають ті популяції, які властиві окремим її випадкам.

Математична модель

1. Здорові клітини C_Z .

Рівняння, що визначає швидкість змінювання кількості здорових клітин при вірусній інфекції та імунній відповіді:

$$\frac{dC_Z}{dt} = -k_1(C_Z + C_R)C_I + k_2C_R - k_3C_ZC_{IFN} - k_4C_ZC_V, \quad (7.4.15)$$

де C_Z – кількість здорових клітин органу-мішені; C_R – кількість стійких (резистентних) клітин органу-мішені; C_D – кількість мертвих клітин органу-мішені; C_{IFN} – концентрація інтерферону; C_V – концентрація вірусів.

Коефіцієнти відновлення (регенерації) клітин епітелію респіраторного тракту: $k_1 = 4$ [1/доба]; $k_2 = 1$ [1/доба]; $k_3 = 0,01$ [1/доба]; $k_4 = 0,34$ [1/доба].

Середня тривалість життя клітин епітелію респіраторного тракту складає 14 діб.

2. *Інфіковані клітини* C_I .

$$\begin{aligned} \frac{dC_I}{dt} + k_7 C_I = k_4 C_Z C_V - k_5 C_{NK} C_I C_{IL2} (1 - k_8 F(C_K)) \\ - k_6 C_{CTL} C_I (1 - k_9 F(C_K)) 1(C_{CNL} - k_{46}), \end{aligned} \quad (7.4.16)$$

де C_{NK} – концентрація НК-клітин (природні кіллери); C_I – кількість інфікованих клітин органу-мішені; C_{IL2} – концентрація інтерлейкіну-2; C_K – концентрація кортизолу; C_{CTL} – концентрація цитотоксичних Т-лімфоцитів.

$$F(C_K) = \frac{C_K(t - T)}{1 + C_K(t - T)}.$$

Член $k_5 C_{NK} C_I C_{IL2} (1 - k_8 F(C_K))$ описує руйнування інфікованих клітин органу-мішені за допомогою НК-клітин без утворення нових вірусів. Руйнування здійснюється під час зустрічі інфікованої клітини з НК-клітиною. Інтерлейкін-2 стимулює вплив на активність НК-клітин. Кортизол пригнічує активність НК-клітин, вплив кортизолу має характер запізнення, оскільки необхідний час для його доставки із нирок до органу-мішені $T = 0,0132$ [доба]. Коефіцієнт $k_5 = 0,05$ [1/доба] відображає руйнування інфікованих клітин НК-клітинами, що стимульовані інтерлейкіном-2. Ступінь пригнічення кортизолом НК-клітин визначається коефіцієнтом $k_8 = 0,5$.

Член $k_6 C_{CTL} C_I (1 - k_9 F(C_K)) 1(C_{CNL} - k_{46})$ описує процес руйнування інфікованих клітин за допомогою цитотоксичних Т-лімфоцитів. Для опису ефекту накопичення даного типу клітин у лімфатичних вузлах до досягнення визначеного рівня використовується функція Хевісайда $1(t)$, $k_{46} = 1$. Коефіцієнт $k_6 = 0,066(0,02 \div 0,1)$ [1/доба] відображає швидкість руйнування інфікованих клітин цитотоксичними Т-лімфоцитами. Чим вище значення коефіцієнту, тим коротша протяжність захворювання і пошкодження органу-мішені.

Ступінь пригнічення кортизолом цитотоксичних Т-лімфоцитів визначається коефіцієнтом $k_9 = 0,5$. Коефіцієнт $k_7 = 1,5$ [1/доба] визначає швидкість переходу інфікованої клітини у мертвий стан.

Стійкі клітини C_R .

$$\frac{dC_R}{dt} + k_2 C_R = k_3 C_Z C_{IFN}, \quad (7.4.17)$$

Перехід здорових клітин у стійкий стан внаслідок впливу на них інтерферону описується членом $k_3 C_Z C_{IFN}$.

Інтерферон C_{IFN} .

$$\frac{dC_{\text{IFN}}}{dt} + k_{12}C_{\text{IFN}} = k_{10}C_I - k_{11}C_ZC_{\text{IFN}} \quad (7.4.18)$$

Інфіковані клітини стимулюють уроджений імунітет за рахунок виділення молекул інтерферону α і β , що взаємодіють зі здоровими клітинами, які набувають властивість стійкості до інфекції. Цей механізм надає організму необхідний час для вироблення адаптивної імунної відповіді та повної ліквідації вірусу. $k_{10} = 2000$ [1/доба], $k_{11} = 17$ [1/доба], $k_{12} = 8$ [1/доба].

Мертві клітини C_D

$$\begin{aligned} \frac{dC_D}{dt} = & k_7C_I + k_5C_{\text{NK}}C_{\text{IL2}}(1 - k_8F(C_K)) + k_6C_{\text{CTL}}C_I(1 - k_9F(C_K)) \\ & \times 1(C_{\text{CTL}} - k_{46}) - k_{13}C_DC_M, \end{aligned} \quad (7.4.19)$$

де C_M – концентрація макрофагів (моноцитів).

Час затримки пригнічуючої дії кортизолу на активність НК-клітин складає 19 хвилин ($T = 0,0132$ [доба]. $k_5 = 0,05$ [1/доба]. Ступень пригнічення кортизолом НК-клітин задається коефіцієнтом $k_8 = 0,5$.

Опис процесу руйнування інфікованих клітин за допомогою цитотоксичних Т-лімфоцитів задається членом $k_6C_{\text{CTL}}C_I(1 - k_9F(C_K))1(C_{\text{CTL}} - k_{46})$. Для опису ефекту затримки даного типу клітин у лімфатичних вузлах до досягнення визначеної кількості використовується функція Хевісайда $1(C_{\text{CTL}} - k_{46})$, $k_{46} = 1$. $k_6 = 0,066$, $k_9 = 0,5$, коефіцієнт $k_{13} = 10$ [1/доба] характеризує знищення мертвих клітин макрофагами.

Антиген C_V

$$\frac{dC_V}{dt} + k_{17}C_V = k_{14}C_I - k_{15}C_VC_A - k_{16}C_VC_Z, \quad (7.4.20)$$

де C_A – концентрація антитіл.

Вироблення вірусів інфікованими клітинами описується членом $k_{14}C_I$, $k_{14} = 510$ [1/доба] – коефіцієнт виділення вірусів інфікованими клітинами органу-мішені. Значення k_{14} визначається із того факту, що одна інфікована клітина виділяє порядку $10^3 \div 10^4$ вірусів за добу.

$k_{15}C_VC_A$ описує процес нейтралізації вірусів специфічними антитілами.

Швидкість взаємодії вірусів та антитіл – $k_{15} = 619,2$ [1/доба]. Значення коефіцієнту ґрунтується на тому факті, що для нейтралізації одного вірусу необхідно 10 антитіл. $k_{16} = 1,02$ [1/доба], $k_{17} = 1,7$ [1/доба].

Макрофаги C_M

$$\frac{dC_M}{dt} + k_{19}C_M = k_{18}F_b, \quad (7.4.21)$$

F_b – функціональна здатність кісткового мозку, синтезуюча функція. Коефіцієнт вироблення макрофагів із урахуванням зниження інтенсивності кровотворної функції кісткового мозку $k_{18} = 0,03$ [1/доба]. $k_{19} = 0,03$ [1/доба]. Життєвий цикл макрофагів складає від 14 до 60 діб, після чого вони руйнуються і видаляються печінкою.

Інтерлейкін-1 C_{IL1}

$$\frac{dC_{IL1}}{dt} + k_{22}C_{IL1} = k_{20}C_M C_D (1 - k_{21}F(C_K)), \quad (7.4.22)$$

Під час взаємодії із мертвими клітинами макрофаги виділяють у кров інтерлейкін-1. Коефіцієнт $k_{20} = 0,145$ [1/доба]. Ступінь пригнічення кортизолом функції макрофагів визначається коефіцієнтом $k_{21} = 0,5$. Коефіцієнт природного розпаду інтерлейкіну-1 – $k_{22} = 0,1245$ [1/доба].

T-хелпери C_{TH}

$$\frac{dC_{TH}}{dt} + k_{24}C_{TH} = k_{23}F_b, \quad (7.4.23)$$

Коефіцієнт $k_{23} = 0,0058$ [1/доба] визначає інтенсивність вироблення кістковим мозком T-хелперів. Життєвий цикл макрофагів складає близько 170 діб, після чого вони руйнуються. Коефіцієнт $k_{24} = 0,0058$ [1/доба] визначає природне виведення T-хелперів.

NK-клітини $C_N K$

$$\frac{dC_{NK}}{dt} + k_{28}C_{NK} = k_{27}F_b, \quad (7.4.24)$$

NK-клітини задіяні у захисті організму проти вірусних внутрікліткових патогенів. Вони знищують усі клітини, які не проходять розпізнавання за принципом «свій-чужий». Коефіцієнт $k_{27} = 0,11$ [1/доба] визначає вироблення кістковим мозком NK-клітин. Коефіцієнт $k_{28} = 0,11$ [1/доба] характеризує природну загибель NK-клітин.

Інтерлейкін-2 C_{IL2}

Запуск активного ділення клітин імунної відповіді здійснюється після перших сигналів організму про наявність вірусної інфекції через стимулюючий вплив інтерлейкіну-2.

$$\frac{dC_{IL2}}{dt} + k_{26}C_{IL2} = k_{25}C_{TN}C_{IL1}, \quad (7.4.25)$$

$k_{25} = 0,328$ [1/доба] характеризує вироблення T-хелперами інтерлейкіну-2. Коефіцієнт $k_{26} = 0,248$ [1/доба] визначає швидкість природного розпаду інтерлейкіну-2.

Цитотоксичні T-лімфоцити C_{CTL}

$$\frac{dC_{CTL}}{dt} + k_{32}C_{CTL} = k_{29} + k_{30}C_{CTL}C_{IL2} - k_{31}C_{CTL}C_I(1 - k_9F(C_K))1(C_{CTL} - k_{46}). \quad (7.4.26)$$

Коефіцієнт $k_{29} = 0,4$ [1/доба] характеризує механізм природного (фонового) вироблення

цитотоксичних Т-лімфоцитів, що необхідний для підтримки мінімального рівня клітин за відсутності інфекції. Коефіцієнт $k_{30} = 8,3$ [1/доба] – ділення цитотоксичних Т-лімфоцитів за наявності інтерлейкіну-2. Коефіцієнт $k_{31} = 2,72$ [1/доба] відображає руйнування цитотоксичних Т-лімфоцитів при взаємодії із інфікованими клітинами. Коефіцієнт $k_{32} = 0,4$ [1/доба] характеризує природу загибель цитотоксичних Т-лімфоцитів.

Рівняння, що описує змінювання концентрації В-клітин, можна записати як

$$\frac{dC_B}{dt} + k_{34}C_B = k_{46} + k_{33}C_B C_{IL2}. \quad (7.4.27)$$

Коефіцієнт ділення В-клітин за наявності інтерлейкіну-2 береться рівним $k_{33} = 11,5$ [1/доба]. Коефіцієнт $k_{34} = 0,4$ [1/доба] характеризує природну загибель В-клітин.

Антитіла.

Рівняння, що характеризує змінювання концентрації антитіл, можна подати у вигляді

$$\frac{dC_A}{dt} + k_{38}C_A = k_{35}C_B(1 - k_{36}F(C_K))1(C_B - k_{45}) - k_{37}C_V C_A. \quad (7.4.28)$$

Антитіла відіграють ключову роль у боротьбі із вірусом. Вони нейтралізують його до того, як він інфікує клітини органу-мішені, а НК-клітини і цитотоксичні Т-лімфоцити відповідають за видалення інфікованих клітин і запобігають розмноженню вірусу.

$k_{35}C_B(1 - k_{36}F(C_K))1(C_B - k_{45})$ характеризує вироблення антитіл В-клітинами. Коефіцієнт $k_{35} = 0,043$ [1/доба] – ступінь пригнічення кортизолом В-клітин задається коефіцієнтом $k_{36} = 0,5$. Нейтралізація вірусів антитілами визначається коефіцієнтом $k_{37} = 0,043$ [1/доба]. Коефіцієнт природного розпаду антитіл дорівнює $k_{38} = 0,043$ [1/доба].

Кортизол.

$$\frac{dC_K}{dt} + k_{44}C_K = k_{49}F_a C_{ACTH}(t - T).$$

Коефіцієнт $k_{44} = 0,1972$ [1/доба] природного виведення адренокортикотропного гормону.

Система рівнянь імунної відповіді:

$$\begin{aligned} \frac{dC_Z}{dt} &= -k_1(C_Z + C_R)C_I + C_Z[k_2C_R - k_3C_{IFN} - k_4C_V], \\ \frac{dC_I}{dt} + k_7C_I &= k_4C_ZC_V - C_I k_6 C_{CTL}(1 - k_9F(C_K))1(C_{CTL} - k_{46}), \\ \frac{dC_R}{dt} + k_2C_R &= k_3C_ZC_{IFN}, \\ \frac{dC_{IFN}}{dt} + k_{12}C_{IFN} &= k_{10}C_I - k_{11}C_ZC_{IFN} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{dC_V}{dt} + k_{17}C_V &= k_{14}C_I - C_V[k_{15}C_A - k_{16}C_Z], \\ \frac{dC_{CTL}}{dt} + k_{32}C_{CTL} &= k_{29} + C_{CTL}[k_{30}C_{IL2} - k_{31}C_I(1 - k_9F(C_K))1(C_{CTL} - k_{46})], \\ \frac{dC_A}{dt} + k_{38}C_A &= k_{35}C_B(1 - k_{36}F(C_K))1(C_B - k_{45}) - k_{37}C_VC_A; \\ F(C_K) &= \frac{C_K(t - T)}{1 + C_K(t - T)}.\end{aligned}$$

Рівняння нейроендокринної системи при вірусній інфекції:

$$\begin{aligned}\frac{dC_B}{dt} + k_{34}C_B &= k_{46} + k_{33}C_BC_{IL2}, \\ \frac{dC_{IL1}}{dt} + k_{22}C_{IL1} &= -k_{20}C_MC_I(1 - k_{21}F(C_K)), \\ \frac{dC_{IL2}}{dt} + k_{26}C_{IL2} &= k_{25}C_{TN}C_{IL1}, \\ \frac{dC_M}{dt} + k_{19}C_M &= k_{18}F_b, \\ \frac{dC_{TH}}{dt} + k_{24}C_{TH} &= k_{23}F_b, \\ \frac{dC_{NK}}{dt} + k_{28}C_{NK} &= k_{27}F_b, \\ \frac{dC_K}{dt} + k_{44}C_K &= k_{49}F_aC_{ACTH}(t - T).\end{aligned}$$

Наведені системи диференціальних рівнянь доповнюються початковими умовами:

$$\begin{aligned}C_Z(0) = C_Z^0, C_I(-T, 0) = C_I^0, C_V(0) = C_V^0, C_{IFN}(0) = C_{IFN}^0, C_D(-T, 0) = C_D^0, \\ C_M(0) = C_M^0, C_{IL1}(0) = C_{IL1}^0, C_{IL2}(0) = C_{IL2}^0, C_{CTL}(-T, 0) = C_{CTL}^0, \\ C_B(0) = C_B^0, C_A(-T, 0) = C_A^0, C_K(-T, 0) = C_K^0.\end{aligned}\quad)$$

Отже, моделювання цих систем рівнянь полягає у розв'язанні задач Коші для кожної із систем нелінійних рівнянь. Приклади розв'язання задачі Коші для систем нелінійних диференціальних рівнянь розглядаються у наступних розділах.

Запитання для самоперевірки

1. Які популяції при вірусному захворюванні на гепатит Б враховуються у системі диференціальних рівнянь?

2. Як визначається Лагранжіан, Гамільтоніан для оптимізації?
3. Яку роль виконують допоміжні змінні у задачі оптимального керування?
4. Як визначаються оптимальні керування?

7.5 Управління лікуванням вірусу гепатиту С

Гепатит С є найпоширенішою вірусною інфекцією печінки зазвичай викликається вірусом гепатиту С. Вірус гепатиту С (ВГС) вперше визначений у 1989 році. Приблизно 170 мільйонів людей у всьому світі (3% населення світу). тепер вважаються хронічними носіями ВГС. Також оцінюється, що у 85% осіб, які зазнали впливу ВГС, розвивається хронічний гепатит С, з яких близько 15% мають можливість очиститися від вірусу спонтанно упродовж кількох місяців після інфікування.

Найпоширенішими шляхами поширення ВГС є незахищений секс, спільне використання заражених голочок наркоманами та хворих на інші ЗПСШ. Деякі люди також можуть заразитися цим вірусом у салонах татуювань і пірсингу. Гепатитом С можна заразитися також при народженні, оскільки він може передаватися від матері до дитини.

Теорія керування широко застосовується в біологічних та екологічних проблемах [10]. У біомедичних проблемах теорія управління дуже корисна для розробки оптимальних терапевтичних стратегій. Схема лікування зазвичай береться за управляючу змінну з метою мінімізації шкідливих наслідків захворювання. Наприклад, у моделюванні раку досліджують математичну модель пухлинно-імунних взаємодій і визначення оптимальної хіміотерапії з метою мінімізації густини пухлини, а також терапевтичних побічних ефектів.

7.5.1 Оптимальне управління лікуванням ВГС

Математична модель кінетики.

Модель враховується поділ загальної популяції людей $N(t)$ на субпопуляції осіб $S(t)$, що піддаються впливу вірусу, $E(t)$, гостро інфікованих осіб $A(t)$, хронічно інфікованих осіб $C(t)$ і відновлених осіб $R(t)$. Загальна чисельність популяції у момент часу t визначається як

$$N(t) = S(t) + E(t) + A(t) + C(t) + R(t). \quad (7.5.1)$$

Взаємодію між класами будемо вважати: експозиційні (E), гостро інфіковані (I) та хронічно інфіковані (V) іммігранти входять до популяції із частками p_1, p_2, p_3 відповідно. Сприйнятливі особи контактують із гостро і хронічно інфікованими особами із рівнем β_1, β_2 відповідно. Особи, що піддаються впливу вірусу, набувають ВГС-інфекцію після контакту із активним інфекційним збудником у розмірі

$$v = \gamma_1 A + \gamma_2 C, \quad \gamma_1 = \frac{\beta_1}{N}, \quad \gamma_2 = \frac{\beta_2}{N}.$$

Заражені особи переходять у групу гостро інфікованих зі швидкістю θ , а гострі

інфіковані переходять у хронічну групу із рівнем k_1 і особи, які зазнали впливу, переходять до класу хронічних при рівні k_2 . Інфіковані особи одужували зі швидкістю ρ , а видужала особа втрачає імунітет і стає сприйнятливою знову зі швидкістю σ . Гостро і хронічно інфіковані особи зазнають смерті внаслідок захворювання зі швидкістю a і d відповідно.

На рис. 7.4 наведена схема взаємодії компонентів моделі

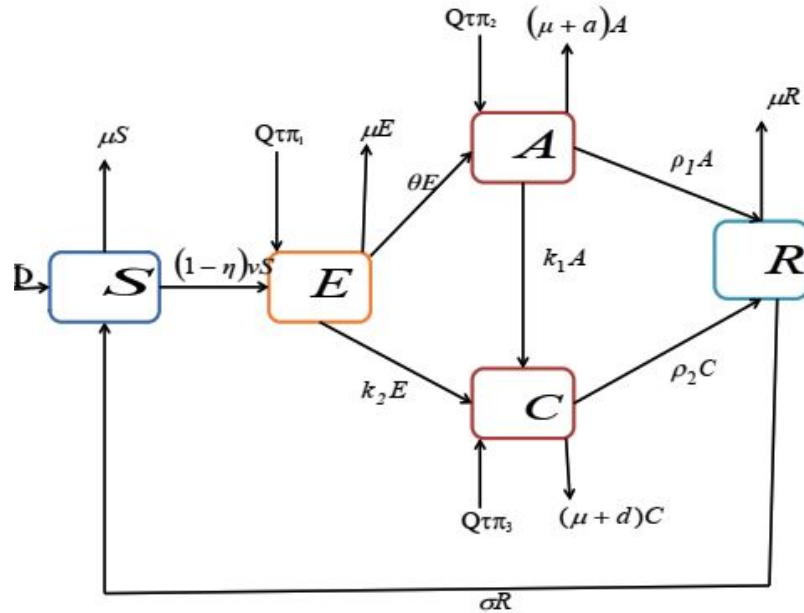


Рис. 7.4. Схема взаємодії компонентів моделі гепатиту С

Передбачається, що швидкість контакту сприйнятливих осіб із хронічними особами значно менше за таких із гостро інфікованими ($\beta_1 \ll \beta_2$), оскільки на хронічній стадії люди усвідомлюють їхню інфікованість та можуть вибрати заходи контролю і змінюють свою поведінку і, отже, мало сприяють поширенню інфекції.

З урахуванням викладених міркувань модель описується такою системою рівнянь:

$$\begin{aligned}
 \frac{dS}{dt} + \mu S &= \Phi + \sigma R - vS, \\
 \frac{dE}{dt} + (\theta + k_2 + \mu)E &= Q\tau p_1 + vS, \\
 \frac{dA}{dt} + (k_1 + \rho_1 + a + \mu)A &= Q\tau p_2 + \theta E, \\
 \frac{dC}{dt} + (\rho_2 + d + \mu)C &= Q\tau p_3 + k_2 E + k_1 A, \\
 \frac{dR}{dt} + (\sigma + \mu)R &= \rho_1 A + \rho_2 C,
 \end{aligned} \tag{7.5.2}$$

із невід'ємними початковими умовами $N(0) \geq 0$, де $\Phi = Q(1 - p_1 - p_2 - p_3)$.

β_i ($i = 1, 2$) – ефективні частоти контактів осіб з гострим та ВГС відповідно;

p_i – швидкість, з якою іммігранти, що піддавалися контакту з гостро та хронічно інфікованими особами, потрапляють до населення. відповідно;

Q – коефіцієнт набору персоналу;

θ – швидкість прогресування до класу гостро інфікованих з класу, що піддавався впливу;

k_i – швидкість, з якою гостро та експозиційно інфіковані переходять у хронічну стадію відповідно,

ρ_i – швидкість одужання пацієнтів із гострим та хронічним захворюваннями відповідно,

α – смертність гостро інфікованої групи від захворювання,

σ – швидкість, з якою інфіковані люди після одужання одразу знову стають чутливими,

μ – природна смертність,

d – смертність групи хронічно інфікованих від захворювання,

τ – рівень скринінгу інфікованих іммігрантів.

Алгоритм розв'язання системи рівнянь (7.5.2)

Спочатку отримаємо розв'язок лінійної частини цієї задачі. Позначимо:
 $x_1(t) = S(t)$, $x_2(t) = E(t)$, $x_3(t) = A(t)$, $x_4(t) = C(t)$, $x_5(t) = R(t)$.

$$b = [\Phi, Q\rho_1, Q\rho_2, Q\rho_3, 0]$$

$$c_1 = \mu, c_2 = \theta + k_2 + \mu, c_3 = k_1 + \rho_1 + \alpha + \mu, c_4 = \rho_2 + d + \mu, c_5 = \sigma + \mu.$$

Почнемо із рівняння

$$\frac{dx_2(t)}{dt} + c_2 x_2(t) = b_2.$$

Замість пошуку розв'язку цього рівняння за методом варіації довільних змінних, застосуємо до нього інтегральне перетворення Лапласа (не враховуємо нелінійну складову $v(t)S(t)$, оскільки перетворення Лапласа є лінійне):

$$\bar{x}_2(p) = \frac{b_2}{p(p + c_2)} \rightarrow x_2^{(0)}(t) = \frac{b_2}{c_2} (1 - e^{-c_2 t}).$$

Третє рівняння системи (7.5.2) запишемо у вигляді (із урахування розв'язання лінійної частини другого рівняння цієї системи)

$$\frac{dx_3(t)}{dt} + c_3 x_3 = b_3 + \theta x_2^{(0)}(t).$$

Перетворення за Лапласом цього рівняння дає:

$$\bar{x}_3(p) = \frac{b_3}{p(p + c_3)} + \frac{1}{p + c_3} \frac{b_2}{p(p + c_2)}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{b_3}{c_3} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+c_3} \right) + b_2 \left[\frac{1}{c_2 c_3} \frac{1}{p} + \frac{1}{c_3(c_2-c_3)} \frac{1}{p+c_3} + \frac{1}{c_2(c_3-c_2)} \frac{1}{p+c_2} \right]. \\
&= \frac{d_{2,1}}{p} + \frac{d_{2,2}}{p+c_3} + \frac{d_{2,3}}{p+c_2} \\
&\rightarrow x_3(t) = d_{2,1} + d_{2,2} e^{-c_3 t} + d_{2,3} e^{-c_2 t}. \\
r_1 &= \frac{b_2 \theta}{c_2}, d_{2,1} = \frac{b_3 + r_1}{c_3}, d_{2,2} = \frac{b_3}{c_3} + \frac{r_1 c_2}{c_3(c_2-c_3)}, d_{2,3} = \frac{r_1}{c_2(c_3-c_2)}.
\end{aligned}$$

Для $x_4(t)$ маємо:

$$\begin{aligned}
&\frac{dx_4(t)}{dt} + c_4 x_4 = b_4 + k_2 x_2(t) + k_1 x_3(t). \\
\bar{x}_4(p) &= \frac{b_4}{p(p+c_4)} + \frac{k_2 b_2}{p(p+c_4)(p+c_2)} + \frac{k_1}{p+c_4} \left[\frac{d_{2,1}}{p} + \frac{d_{2,2}}{p+c_3} + \frac{d_{2,3}}{p+c_2} \right]. \\
&= \frac{d_{4,1}}{p} + \frac{d_{4,2}}{p+c_4} + \frac{d_{4,3}}{p+c_2} + \frac{d_{4,4}}{p+c_3};
\end{aligned}$$

Формули для коефіцієнтів $d_{4,k}$, $k = \overline{1,4}$:

$$\begin{aligned}
d_{4,1} &= \frac{b_2 k_2}{c_2 c_4} + \frac{b_4 + k_1}{c_4}, d_{4,2} = \frac{k_1 d_{2,3}}{c_2 - c_4} + \frac{b_2 k_2}{c_2(c_4 - c_2)} = \frac{k_1 d_{2,2}}{c_3 - c_4}, \\
d_{4,3} &= \frac{b_2 k_2}{c_4(c_2 - c_4)} - \frac{k_1 d_{2,3}}{c_2 - c_4}, d_{4,4} = \frac{b_2 k_1}{c_4 - c_3}.
\end{aligned}$$

У просторі оригіналів отримуємо

$$x_4(t) = d_{4,1} + d_{4,2} e^{-c_4 t} + d_{4,3} e^{-c_2 t} + d_{4,4} e^{-c_3 t}.$$

Аналогічний підхід застосуємо до п'ятого рівняння системи диференціальних рівнянь (7.5.2).

$$\begin{aligned}
&\frac{dx_5(t)}{dt} + c_5 x_5(t) = \rho_1 x_3(t) + \rho_2 x_4(t). \\
\bar{x}_5(p) &= \frac{1}{p+c_5} \left[\frac{\rho_1 d_{4,1} + \rho_2 d_{2,1}}{p} + \frac{\rho_1 d_{4,2}}{p+c_4} + \frac{\rho_1 d_{4,3} + \rho_2 d_{2,3}}{p+c_2} + \frac{\rho_1 d_{4,4} + \rho_2 d_{2,2}}{p+c_3} \right] \\
&= \frac{1}{p+c_5} \left[\frac{e_1}{p} + \frac{e_4}{p+c_4} + \frac{e_2}{p+c_2} + \frac{e_3}{p+c_3} \right]. \\
&= \frac{d_{5,1}}{p} + \frac{d_{5,5}}{p+c_5} + \frac{d_{5,2}}{p+c_2} + \frac{d_{5,3}}{p+c_3} + \frac{d_{5,4}}{p+c_4}.
\end{aligned}$$

$$d_{5,1} = \frac{e_1}{c_5}, d_{5,5} = \frac{e_4}{c_4 - c_5} + \frac{e_2}{c_2 - c_5} + \frac{e_3}{c_3 - c_5} - \frac{e_1}{c_5};$$

$$d_{5,2} = \frac{e_2}{c_2 - c_5}, d_{5,3} = \frac{e_4}{c_3 - c_5}, d_{5,4} = \frac{e_4}{c_4 - c_5}$$

$$e_1 = \rho_1 d_{4,1} + \rho_2 d_{2,1}, e_2 = \rho_1 d_{4,3} + \rho_2 d_{2,3}, e_3 = \rho_1 d_{4,4} + \rho_2 d_{2,3}, e_4 = \rho_1 d_{4,2};$$

У просторі оригіналів отримуємо:

$$x_5(t) = d_{5,1} + \sum_{k=2}^5 d_{5,k} e^{-c_k t}.$$

Тепер можна визначати розв'язок першого рівняння системи.

$$\frac{dx_1(t)}{dt} + c_1 x_1(t) = b_1 + \sigma x_5(t) + [\gamma_1 x_3(t) + \gamma_2 x_4(t)] x_1(t).$$

Застосуємо до цього рівняння інтегральне перетворення Лапласа (із урахуванням лінійності цього перетворення):

$$\bar{x}_1(p) = \frac{b_1}{p(p + c_1)} + \frac{1}{p + c_1} [\sigma \bar{x}_3(p) + \mathcal{L}\{[\gamma_1 x_3(t) + \gamma_2 x_4(t)] x_1(t)\}].$$

Оскільки це рівняння містить нелінійну складову

$$v(t)S(t) = [\gamma_1 x_3(t) + \gamma_2 x_4(t)] x_1(t), \quad (7.5.3)$$

спочатку отримаємо розв'язок лінійної частини рівняння

$$\bar{x}_1^{(0)}(p) = \frac{b_1}{p(p + c_1)} + \frac{1}{p + c_1} \sigma \left[\frac{d_{2,1}}{p} + \frac{d_{2,2}}{p + c_3} + \frac{d_{2,3}}{p + c_2} \right]$$

$$= \frac{b_1 + \sigma d_{2,1}}{p(p + c_1)} + \frac{\sigma d_{2,2}}{(p + c_1)(p + c_3)} + \frac{\sigma d_{2,3}}{(p + c_1)(p + c_2)}$$

$$\rightarrow x_1^{(0)}(t) = d_{1,1} + d_{1,2} e^{-c_1 t} + d_{1,3} e^{-c_2 t} + d_{1,4} e^{-c_3 t};$$

$$d_{1,1} = b_1/c_1 + \sigma d_{2,1}/c_1, d_{1,2} = -d_{1,1} + \sigma(d_{2,2}/(c_1 - c_3) + d_{2,3}/(c_1 - c_2)),$$

$$d_{1,3} = \sigma d_{2,2}/(c_3 - c_1), d_{1,4} = \sigma d_{2,3}/(c_2 - c_1),$$

Використання отриманих розв'язків відносно решти змінних дає такий вираз:

$$\begin{aligned} [\gamma_1 x_3(t) + \gamma_2 x_4(t)] x_1^{(0)}(t) &= [\gamma_1 (d_{2,1} + d_{2,2} e^{-c_3 t} + d_{2,3} e^{-c_2 t}) \\ &\quad + \gamma_2 (d_{4,1} + d_{4,2} e^{-c_4 t} + d_{4,3} e^{-c_2 t} + d_{4,4} e^{-c_3 t})] \\ &\quad \times [d_{1,1} + d_{1,2} e^{-c_1 t} + d_{1,3} e^{-c_2 t} + d_{1,4} e^{-c_3 t}]; \\ &= [g_1 + g_2 e^{-c_2 t} + g_3 e^{-c_3 t} + g_4 e^{-c_4 t}] \times [d_{1,1} + d_{1,2} e^{-c_1 t} + d_{1,3} e^{-c_2 t} + d_{1,4} e^{-c_3 t}]; \quad (7.5.4) \\ g_1 &= \gamma_1 d_{2,1} + \gamma_2 d_{4,1}, g_2 = \gamma_1 d_{2,3} + \gamma_2 d_{4,3}, g_3 = \gamma_1 d_{2,2} + \gamma_2 d_{4,4}, g_4 = \gamma_2 d_{4,2}. \end{aligned}$$

Щоб застосувати до цього виразу інтегральне перетворення Лапласа, потрібно виконати операції добутку експоненціальних виразів, що призведе до появи у цьому виразі

дванадцяти складових. Якщо не задіяти додаткових алгоритмів апроксимації цих виразів, у наступних ітераціях кількість с доданків такого виду зростатиме у геометричній прогресії. Тому далі застосуємо алгоритм еквівалентного спрощення цих виразів, [3]:

$$\begin{aligned}
 p(t) &= [g_1 + g_2 e^{-c_2 t} + g_3 e^{-c_3 t} + g_4 e^{-c_4 t}] \rightarrow \frac{r_0}{p} + \frac{r_1 + r_2 p}{(p + r_4)^2 \pm r_5^2} \\
 &\approx r_0 + e^{-r_4 t} [r_1 f_1(r_5 t) + r_2 f_2(r_5 t)], \\
 q(t) &= [d_{1,1} + d_{1,2} e^{-c_1 t} + d_{1,3} e^{-c_2 t} + d_{1,4} e^{-c_3 t}] \rightarrow \frac{q_0}{p} + \frac{q_1 + q_2 p}{(p + q_4)^2 \pm q_5^2} \\
 &\approx q_0 + e^{-q_4 t} [q_1 f_1(q_5 t) + q_2 f_2(q_5 t)],
 \end{aligned}$$

Добуток $p(t)q(t)$ також апроксимуємо ланцюгом другого порядку:

$$p(t)q(t) \rightarrow \frac{a_1 + a_2 p}{(p + a_4)^2 \pm a_5^2} \approx [a_0 + e^{-a_4 t} [a_1 f_1(a_5 t) + a_2 f_2(a_5 t)],$$

Із урахуванням цих перетворень

$$\bar{x}^{(1)}(p) = \frac{b_1}{c_1} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p + c_1} \right) + \frac{1}{p + c_1} \frac{a_1 + a_2 p}{(p + a_4)^2 \pm a_5^2}$$

$$x_1(t) \approx d_{1,0} + e^{-d_{1,4} t} [d_{1,1} f_1(d_{1,5} t) + d_{1,2} f_1(d_{1,5} t)].$$

$$f_1(at), f_2(at) \rightarrow (at), (at) \vee \sin(at), \cos(at).$$

Отже, виконано математичне моделювання системи рівнянь (7.5.2), що описує динаміку гепатиту С без оптимального керування.

Результати моделювання викладеного алгоритму наведено на рис. 7.5–7.9.

На рис. 7.6–7.9 наведено графіки густини без урахування нелінійних складових за різних значень параметрів моделі

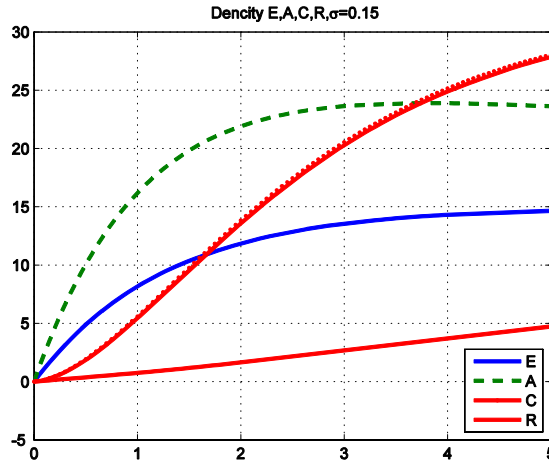
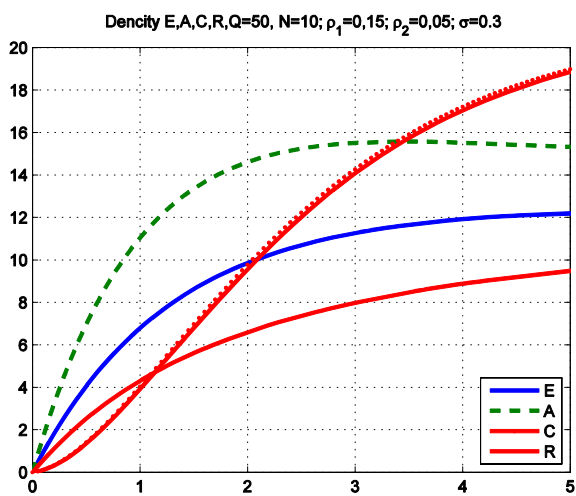
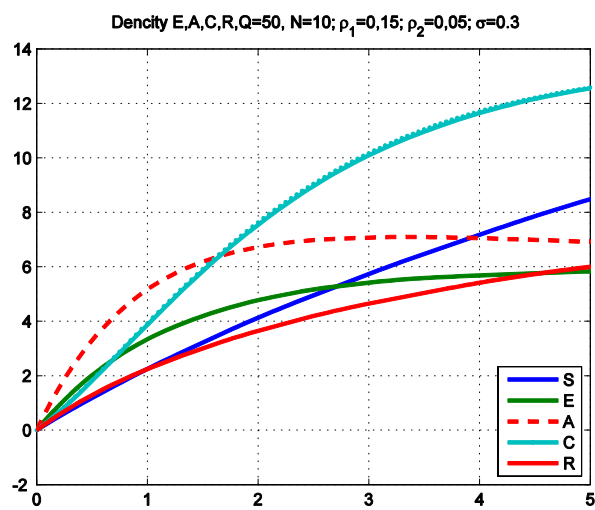
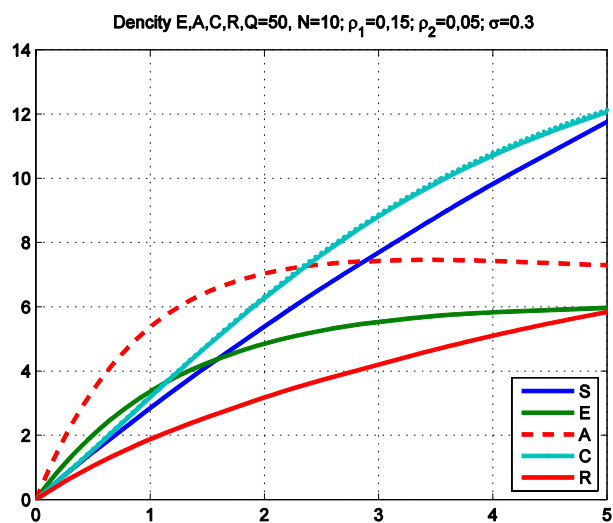
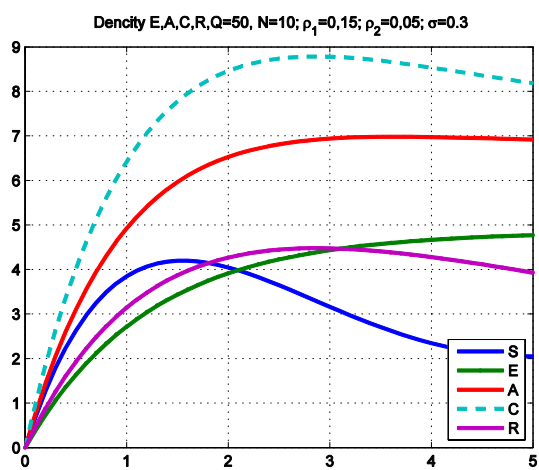
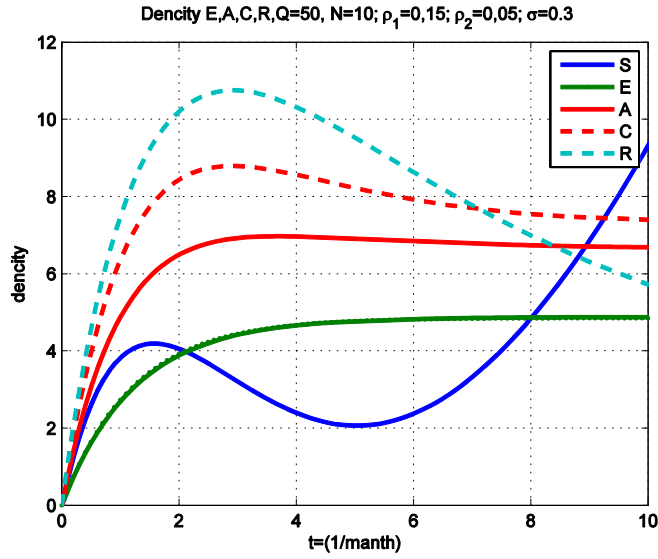


Рис. 7.5. Густина E, A, C, R за $\sigma = 0,15$

Рис. 7.6. Густина E, A, C, R за $\sigma = 0,3$ Рис. 7.7. Густина S, E, A, C, R за $\sigma = 0,2$

Рис. 7.8. Густина S, E, A, C, R за $\sigma = 0,3$ Рис. 7.9. Густина S, E, A, C, R за $\sigma = 0,15$

На рис 7.10 наведено графіки густин нелінійних складових.

Рис. 7.10. Густина S, E, A, C, R за $\sigma = 0,15$

7.5.2 Алгоритм оптимального керування

Виконане моделювання свідчить про зростання заражених клітин печінки, якщо не застосовувати засобів протидії у вигляді лікарських препаратів, тобто без засобів регулювання.

Запровадимо у модель (7.5.2) імунізацію (u_1), скринінг іммігрантів (u_2), що надходять ззовні, і лікування (u_3) як залежні від часу керування для скорочення або знешкодження поширення хвороби ВГС. Модель (7.5.2) стає

$$\begin{aligned}
 \frac{dS}{dt} + \mu S &= \sigma R + Q[1 - u_2(p_1 + p_2 + p_3)] + (1 - u_1)vS, \\
 \frac{dE}{dt} + (\theta + k_2 + \mu)E &= Qu_2p_1 + (1 - u_1)vS, \\
 \frac{dA}{dt} + (k_1 + a + \mu)A &= Qu_2p_2 + \theta E - u_3\rho_1A, \\
 \frac{dC}{dt} + (d + \mu)C &= Qu_2p_3 + k_2E + k_1A - u_3\rho_2C, \\
 \frac{dR}{dt} + (\sigma + \mu)R &= u_3(\rho_1A + \rho_2C),
 \end{aligned} \tag{7.5.5}$$

де $0 \leq u_2 \leq 1$ – скринінгове управління, $0 \leq u_1 \leq 1$ – управління імунізацією та $0 \leq u_3 \leq 1$ – управління лікуванням для $t \in [0, T]$.

Для дослідження оптимального рівня зусиль для управління захворюванням,

сформуємо цільову функцію J , яка полягає у мінімізації поширення хвороби та вартості, застосовуючи керування u_1, u_2, u_3 .

$$J = \min \int_0^T \left[B_1 E + B_2 A + B_3 C + \frac{A_1 u_1^2}{2} + \frac{A_2 u_2^2}{2} + \frac{A_3 u_3^2}{2} \right] dt, \quad (7.5.6)$$

де B_1, B_2, B_3 і A_1, A_2, A_3 – додатні ваги.

Отже, задача полягає у відшуванні таких управляючих впливів u_1^*, u_2^*, u_3^* , щоб

$$J(u_1^*, u_2^*, u_3^*) = \min \{ J(u_1, u_2, u_3) \mid u_1, u_2, u_3 \in U \}, \quad (7.5.7)$$

Необхідні умови, що має задовольняти задача оптимального керування, випливають із принципу максимуму Понтрягіна [10]. Цей принцип перетворює (7.5.2)–(7.5.6) на проблему мінімізації гамільтоніану H відносно u_1, u_2, u_3 .

Сутність цього принципу полягає у тому, що існують приєднані змінні $\lambda_S, \lambda_E, \lambda_A, \lambda_C, \lambda_R$ такі, що мінімізують функціонал $J(u_1, u_2, u_3)$:

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda_S}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial S} = ((1-u_1)v + \mu)\lambda_S - (1-u_1)v\lambda_E, \\ \frac{d\lambda_E}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial E} = -\beta_1 + (\theta + k_2 + \mu)\lambda_E - \theta\lambda_A - k_2\lambda_C, \\ \frac{d\lambda_A}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial A} = -\beta_2 + (u_3\rho_1 + k_1 + a + \mu)\lambda_A - k_1\lambda_C \\ &\quad - u_3\rho_1\lambda_R + (1-u_1)\frac{\beta_1}{N}S(\lambda_S - \lambda_E); \\ \frac{d\lambda_C}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial C} = -\beta_3 + (u_3\rho_2 + d + \mu)\lambda_C \\ &\quad + (1-u_1)\frac{\beta_2}{N}S(\lambda_S - \lambda_E) - u_3\rho_2\lambda_R, \\ \frac{d\lambda_R}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial R} = -\sigma\lambda_S + (\sigma + \mu)\lambda_R, \end{aligned} \quad (7.5.9)$$

із умовами поперечності

$$\lambda_S(T) = \lambda_S(T) = \lambda_S(T) = \lambda_S(T) = \lambda_S(T) = 0 \quad (7.5.10)$$

та умовами оптимальності

$$\begin{aligned} u_1^* &= \max\{0, \min(1, \bar{u}_1)\}, \\ u_2^* &= \max\{0, \min(1, \bar{u}_2)\}, \\ u_3^* &= \max\{0, \min(1, \bar{u}_3)\}, \end{aligned}$$

Запишемо систему рівнянь (7.5.10) як:

$$\begin{aligned}
\frac{d\lambda_S}{dt} - c_1\lambda_S &= (1-u_1)v\lambda_S - (1-u_1)v\lambda_E, \\
\frac{d\lambda_E}{dt} - c_2\lambda_E &= -\beta_1 - \theta\lambda_A - k_2\lambda_C, \\
\frac{d\lambda_A}{dt} - c_3\lambda_A &= -\beta_2 + u_3\rho_1\lambda_A - k_1\lambda_C - u_3\rho_1\lambda_R + (1-u_1)\frac{\beta_1}{N}S(\lambda_S - \lambda_E); \\
\frac{d\lambda_C}{dt} - c_4\lambda_C &= -\beta_3 + u_3\rho_2\lambda_C + (1-u_1)\frac{\beta_2}{N}S(\lambda_S - \lambda_E) - u_3\rho_2\lambda_R, \\
\frac{d\lambda_R}{dt} - c_5\lambda_R &= -\sigma\lambda_S,
\end{aligned} \tag{7.5.11}$$

Умови трансверсальності (поперечності):

$$\lambda_S = \lambda_E = \lambda_A = \lambda_C = \lambda_R = 0.$$

Система рівнянь (7.5.11) сформульована у зворотному часі $t \in [t_f, 0]$. Щоб привести її до стандартної задачі Коші, запровадимо заміну змінної $\tau \in [0, t_f]$. Система рівнянь (7.5.11) набуває вигляду

$$\begin{aligned}
\frac{d\lambda_S}{d\tau} + c_1\lambda_S &= [(u_1 - 1)\lambda_S - (u_1 - 1)\lambda_E]v(t_f - \tau), \\
\frac{d\lambda_E}{d\tau} + c_2\lambda_E &= \beta_1 + \theta\lambda_A + k_2\lambda_C, \\
\frac{d\lambda_A}{d\tau} + c_3\lambda_A &= \beta_2 - u_3\rho_1\lambda_A + k_1\lambda_C + u_3\rho_1\lambda_R + (u_1 - 1)\frac{\beta_1}{N}S(t_f - \tau)(\lambda_S + \lambda_E); \\
\frac{d\lambda_C}{d\tau} + c_4\lambda_C &= \beta_3 - u_3\rho_2\lambda_C + (u_1 - 1)\frac{\beta_2}{N}S(t_f - \tau)(\lambda_S + \lambda_E) + u_3\rho_2\lambda_R, \\
\frac{d\lambda_R}{d\tau} + c_5\lambda_R &= \sigma\lambda_S,
\end{aligned} \tag{7.5.12}$$

із нульовими початковими умовами.

Рівняння системи є нестационарні (відносно змінної t) Тому шукатимемо розв'язки цих рівнянь за ітераційною схемою, визначаючи на першій ітерації розв'язки лінійних складових із застосуванням до цієї задачі інтегрального перетворення Лапласа..

Перетворення Лапласа цих рівнянь дає

$$\begin{aligned}
\bar{\lambda}_E(p) &= \frac{\beta_1}{p(p + c_2)} + \frac{1}{p + c_2} \mathcal{L}[\theta\lambda_A^{(0)}(t)] + k_2 \mathcal{L}[\lambda_C^{(0)}(t)]; \\
\bar{\lambda}_A(p) &= \frac{\beta_2}{p(p + c_3 - u_3\rho_1)} - \frac{1}{p + c_3 - u_3\rho_1} \left[k_1 \mathcal{L}[\lambda_C^{(0)}(t)] + u_3\rho_1 \mathcal{L}[\lambda_R^{(0)}(t)] \right];
\end{aligned}$$

$$\bar{\lambda}_C(p) = \frac{\beta_3}{p(p + c_4 - u_3\rho_2)} + \frac{u_3\rho_3}{p + c_4 - u_3\rho_2} \mathcal{L}[\lambda_R(t)];$$

$$\bar{\lambda}_R(p) = \frac{1}{p + c_5} \sigma \mathcal{L}[\lambda_S(t)].$$

У просторі оригіналів цим виразам відповідають:

$$\lambda_E^{(0)}(\tau) = \frac{\beta_1}{c_2} \left(1 - e^{-c_2\tau} \right).$$

Для спрощення запису позначимо $l_A = c_3 - u_2\rho_1$, $l_C = c_4 - u_2\rho_2$. Тоді

$$\lambda_A^{(0)}(\tau) = \frac{\beta_2}{l_A} \left(1 - e^{-l_A\tau} \right); \quad \lambda_C^{(0)}(\tau) = \frac{\beta_3}{l_C} \left(1 - e^{-l_C\tau} \right).$$

Із урахуванням цих виразів маємо для $\lambda_E^{(1)}$:

$$\bar{\lambda}_E^{(1)}(p) = r_{2,0} \frac{1}{p} + r_{2,1} \frac{1}{p + c_2} + r_{3,2} \frac{1}{p + l_A} + r_{3,3} \frac{1}{p + l_C};$$

$$r_{2,0} = \frac{\beta_1}{c_2} + \theta \frac{\beta_2}{l_A} + k_1 \frac{\beta_3}{l_C};$$

$$r_{2,2} = \frac{k_1\beta_2}{l_A(c_2 - l_A)}; r_{2,3} = \frac{k_2\beta_3}{l_C(c_2 - l_C)}; r_{2,1} = -(r_{2,0} + r_{2,2} + r_{3,3}).$$

У просторі оригіналів йому відповідає вираз:

$$\lambda_E^{(1)}(\tau) = r_{2,0} + r_{2,1}e^{-c_2\tau} + r_{2,2}e^{-l_A\tau} + r_{2,3}e^{-l_C\tau}. \quad (7.5.13)$$

$$\bar{\lambda}_A^{(1)}(p) = \frac{\beta_2}{p(p + l_A)} + \frac{1}{p + l_A} \frac{k_1\beta_3}{p(p + l_C)} =$$

$$= r_{3,0} + r_{3,1} \frac{1}{p + l_A} + r_{3,2} \frac{1}{p + l_C}.$$

$$r_{3,0} = \frac{\beta_2}{l_A} + \frac{k_1\beta_3}{l_A l_C}, r_{3,1} = \frac{k_1\beta_3}{l_C(l_A - l_C)} - \frac{\beta_2}{l_A}, r_{3,2} = \frac{k_1\beta_3}{l_A(l_A - l_C)}.$$

У просторі оригіналів маємо

$$\lambda_A^{(1)}(\tau) = r_{3,0} + r_{3,1}e^{-l_A\tau} + r_{3,2}e^{-l_C\tau}. \quad (7.5.14)$$

Повернемося до першого рівняння системи, тобто до рівняння для $\lambda_S(t)$.

Але спочатку скористаємося виразами для $v(t)$ та $S(t)$, що отримано як результат розв'язання системи рівнянь динаміки (7.5.2).

$$v(t) = g_1 + g_2 e^{-c_2(t_f - \tau)} + g_3 e^{-c_3(t_f - \tau)} + g_4 e^{-c_4(t_f - \tau)}$$

$$= g_1 + \bar{g}_2 e^{c_2\tau} + \bar{g}_3 e^{c_3\tau} + \bar{g}_4 e^{c_4\tau} \rightarrow$$

$$g_1 \frac{1}{p} + \frac{\bar{g}_2}{p - c_2} + \frac{\bar{g}_3}{p - c_3} + \frac{\bar{g}_4}{p - c_4};$$

(7.5.15)

$$\bar{g}_k = g_k e^{-c_k t_f}, k = \overline{2, 4}; \quad \bar{d}_{1,k} = d_{1,k} e^{-c_k t_f}, k = \overline{0, 5};$$

$$S(t) = x_1^{(1)}(t) = d_{1,0} + \sum_{k=1}^5 \bar{d}_{1,k} e^{-c_k(t_f - \tau)} \rightarrow \sum_{k=0}^5 \frac{\bar{d}_{1,k}}{p - c_k}, \quad c_0 = 0; \quad (7.5.16)$$

Замістимо вираз (7.5.15) у

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda_s}{d\tau} + (c_1 - 1 + u_1)\lambda_s &= \frac{d\lambda_s}{d\tau} + l_s \lambda_s = (1 - u_1)\bar{v}(\tau); \\ \bar{\lambda}_s(p) &= \frac{1 - u_1}{p + l_s} \left[\frac{g_1}{p} + \sum_{k=2}^4 \frac{\bar{g}_k}{p + c_k} \right]. \\ &= (1 - u_1) \left[\frac{g_1}{l_s} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p + l_s} \right) + \sum_{k=2}^4 \left(\frac{\bar{g}_k}{c_k - l_s} \right) \frac{1}{p + l_s} - \sum_{k=2}^4 \frac{\bar{g}_k}{c_k - l_s} \frac{1}{p + c_k} \right]. \end{aligned}$$

Звідси маємо:

$$\lambda_s(\tau) = (1 - u_1) \left[g_1/l_s + r_{1,1} e^{-l_s \tau} + \sum_{k=2}^4 r_{1,k} e^{-c_k \tau} \right]. \quad (7.5.17)$$

Щоб знайти $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3$, спочатку розв'яжемо умови оптимальності, що задаються як:

$$\frac{\partial H}{\partial u_1} = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial u_2} = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial u_3} = 0. \quad (7.5.18)$$

Здиференціюємо (7.5.8) по u_1, u_2, u_3 , отримаємо:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial u_1} &= A_1 u_1 + (\lambda_s - \lambda_E) \frac{v}{A_1} S = 0, \\ \frac{\partial H}{\partial u_2} &= A_2 u_2 - \lambda_s Q(p_1 + p_2 + p_3) + \lambda_E p_1 Q + \lambda_A p_2 Q + \lambda_C p_3 Q = 0, \\ \frac{\partial H}{\partial u_3} &= A_3 u_3 - \rho_1 A \lambda_A - \rho_2 C \lambda_C + \rho_1 A \lambda_R + \rho_2 C \lambda_R = 0. \end{aligned} \quad (7.5.19)$$

Маємо:

$$\begin{aligned} u_1 &= (\lambda_E - \lambda_s) \frac{v}{A_1} S, \\ u_2 &= \frac{Q}{A_2} [\lambda_s(p_1 + p_2 + p_3) - \lambda_E p_1 - \lambda_A p_2 Q - \lambda_C p_3], \\ u_3 &= \frac{1}{A_3} [\rho_1 A \lambda_A + \rho_2 C \lambda_C - \rho_1 A \lambda_R - \rho_2 C \lambda_R]. \end{aligned} \quad (7.5.20)$$

Із системи рівнянь (7.5.20) при $\bar{u}_1 = u_1$, $\bar{u}_2 = u_2$, $\bar{u}_3 = u_3$, отримуємо оптимальні керування

$$u_1^* = \max\{0, \min(1, \bar{u}_1)\}, \quad u_2^* = \max\{0, \min(1, \bar{u}_2)\}, \quad u_3^* = \max\{0, \min(1, \bar{u}_3)\},$$

Отже, оптимальні керування:

$$u_1^* = \begin{cases} 0 & \bar{u}_1 < 0, \\ \bar{u}_1 & 0 < \bar{u}_1 < 1, \\ 1 & \bar{u}_1 \geq 1 \end{cases}, \quad u_2^* = \begin{cases} 0 & \bar{u}_2 < 0, \\ \bar{u}_2 & 0 < \bar{u}_2 < 1, \\ 1 & \bar{u}_2 \geq 1 \end{cases}, \quad u_3^* = \begin{cases} 0 & \bar{u}_3 < 0, \\ \bar{u}_3 & 0 < \bar{u}_3 < 1, \\ 1 & \bar{u}_3 \geq 1. \end{cases} \quad (7.5.21)$$

Відповідно до попередньої обмеженості системи рівнянь стану приєднана система та результуюча ліпшицева структура ЗДР отримуємо єдиність оптимального керування для маленьких T . З цього випливає єдиність оптимального управління від унікальності системи оптимальності, яка складається рівнянь (7.5.7) і (7.5.11) та умови трансверсальності (7.5.18) характеристиками (7.5.20).

Існує обмеження по тривалості інтервалу часу, щоб гарантувати єдиність системи оптимальності. Це малість обмеження довжини за часом через протилежні часові орієнтації (7.5.7) і (7.5.11); задача станів має початкові значення, а суміжна задача має кінцеві значення.

Завдання для самостійної роботи

1. Розробити програмний продукт реалізації алгоритму розв'язання системи диференціальних рівнянь динаміки (7.5.2). Можна використати програмний код, що реалізує алгоритми розв'язання задачі Коші за методом Ейлера, Крилова—Адамса, які наведено у доданку 2.
2. Розробити програмний продукт реалізації алгоритму розв'язання системи рівнянь відносно множників Лагранжа.
3. Побудувати графіки отриманих результатів.
4. Побудувати графіки оптимальних керувань процесом (7.5.20), (7.5.21).
5. Числові значення для моделювання:
 $\beta_1 = 0,38; \beta_2 = 0,001; \theta = 0,5; k_1 = 0,5; k_2 = 0,34; \rho_1 = [0,02 - 0,5];$

$$\rho_2 = [0,001 - 0,45]; \sigma = [0,13 - 0,5];$$

$$a = 0,0034; d = 0,5; \mu = [0,0001 - 0,09];$$

$$Q = [5 - 85]; p_1 = [0,4 - 0,6]; p_2 = 0,2; p_3 = 0,03; N = [2 - 15].$$

7.6 Модель оптимального управління туберкульозу

У цьому розділі розглядаються питання, пов'язані із дуже небезпечним захворюванням – туберкульозом, що є одним із найрозповсюдженіших захворювань у світі із призводить до значних летальних витоків.

Мета – ознайомити із цим захворюванням і засобами його лікування. Ми не будемо у цьому розділі розглядати математичне і комп'ютерне моделювання відповідних задач, що пов'язані із цим захворюванням, а залишаємо реалізацію задачі автоматичного керування як самостійну роботу під час виконання можливих дипломних і дисертаційних робіт.

Вірус туберкульозу (ТБ) є другою основною причиною смерті від інфекційних захворювань у всьому світі. Активний туберкульоз належить до захворювання, яке виникає внаслідок зараження *Mycobacterium tuberculosis*. Він характеризується ознаками або симптомами активного захворювання, або обох, і відрізняється від латентної туберкульозної інфекції, яка протікає без ознак або симптомів активного захворювання. Передати інфекцію можуть тільки особи з активним туберкульозом. Багато людей з активним туберкульозом не відчувають типових симптомів туберкульозу на ранніх стадіях захворювання.

Затримка діагностики активного туберкульозу є основною перешкодою для контролю над епідемією туберкульозу, це може погіршити хворобу, збільшити ризик смерті та посилити передачу туберкульозу суспільству. І пацієнт, і здоров'я система може відповідати за затримку діагностики. Слід докласти зусиль знань/обізнаності пацієнтів про туберкульоз і системи охорони здоров'я мають покращитися стратегії пошуку випадків для зменшення затримки діагностики активного ТБ.

Математичні моделі є важливим інструментом для аналізу поширення та контролю інфекційних захворювань. Запроваджується дискретна затримка часу, яка представляє затримку на діагностику осіб з активним туберкульозом і початком лікування. Стабільність вільних від захворювань та ендемічних рівноваг аналізується для будь-якої затримки у часі.

Теорія оптимального керування була успішно застосована до математичних моделей ТБ. Аналізується задача оптимального керування, де система керування є математичною моделлю, але з часовою затримкою у змінній стану, яка представляє індивідуумів з активним туберкульозом та запроваджуються дві функції управління. Функції управління представляють собою частку ранніх і стійких латентних осіб, які лікуються від туберкульозу. Лікування латентної туберкульозної інфекції значно знижує ризик прогресування туберкульозної інфекції в активне захворювання на туберкульоз. Певні групи мають дуже високий ризик розвитку захворювання активного туберкульозу після інфікування. Необхідно докласти всіх зусиль, щоб почати відповідне лікування та забезпечити завершення повного курсу лікування латентної туберкульозної інфекції. Лікування латентної туберкульозної інфекції слід розпочинати після того, як з'явиться можливість виключити захворювання на туберкульоз. Для організму може знадобитися від 2 до 8 тижнів після зараження туберкульозом імунна система реагує на туберкулін і для виявлення інфікованого, що виправдовує введення тимчасової затримки на контроль, пов'язаний з лікуванням ранні латентні особи. З іншого боку, зволікання з лікуванням латентного туберкульозу також може виникнути через клінічні та демографічні дані пацієнтів і медичних послуг характеристики. З цих причин ми розглядаємо дискретні затримки часу в обох системах керування функції. Наскільки нам відомо, у цій роботі вперше застосована теорія оптимального управління до моделі ТБ із затримкою часу в

змінних стану та керування.

Матеріал цього розділу викладається як постановка задачі оптимального керування лікування хворих на ТБ і може розглядатися як постановку відповідної задачі для виконання досліджень магістерської дисертації.

7.6.1 Модель ТБ із затримкою стану

Модель, [34], поділяє загальну популяцію на п'ять категорій: чутливі (S); ранній латентний (L_1), тобто особи, нещодавно інфіковані (менше двох років), але не інфекційні; інфіковані (I), тобто особи, які мають активну туберкульозні та інфекційні; стійкі латентні (L_2), тобто особи, які були інфіковані і залишаються латентними; та одужали (R), тобто особи, які були раніше інфіковані і пройшли лікування. Нехай загальна чисельність населення, $N = S(t) + L_1(t) + I(t) + L_2(t) + R(t)$ постійна в часі. Іншими словами, ми припускаємо що народжуваність і смертність були рівними і не було смертей від туберкульозу. Ми вводимо дискретну затримку часу в змінній стану I , позначену як d_I , яка представляє затримку діагностики та початку лікування активної туберкульозної інфекції,

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = \mu N - \frac{\beta}{N} I(t)S(t) - \mu S(t), \\ \frac{dL_1(t)}{dt} = \frac{\beta}{N} I(t)(S(t) + \sigma L_2(t) + \sigma_R R(t)) - (\delta + \tau) + \mu L_1(t), \\ \frac{dI(t)}{dt} = \phi \delta L_1(t) + \omega L_2(t) + \omega_R R(t) - \tau_0 I(t - d_I) - \mu I(t), \\ \frac{dL_2(t)}{dt} = (1 - \phi) \delta L_1(t) - \sigma \frac{\beta}{N} I(t) L_2(t) - (\omega + \tau_2 + \mu) L_2(t), \\ \frac{dR(t)}{dt} = \tau_0 I(t - d_I) + \tau_1 L_1(t) + \tau_2 L_2(t) - \sigma_N \frac{\beta}{N} I(t) R(t) - (\omega_R + \mu) R(t). \end{cases} \quad (7.6.2)$$

Початкові умови для системи (7.6.3) такі

$$S(\theta) = \varphi_1(\theta), L_1(\theta) = \varphi_2(\theta), L_2(\theta) = \varphi_4(\theta), I(\theta) = \varphi_3(\theta), R(\theta) = \varphi_5(\theta), \quad (7.6.3)$$

$-d_i \leq \theta \leq 0$, $\varphi = [\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5]^T \in C$ C банаховим простором $C([-d_1, 0], R^5)$ неперервних функцій, що відображають інтервал $[-d_1, 0] \rightarrow R^5$. З біологічних значень, ми далі припускаємо, що $\varphi_i(0) > 0$, $i = \overline{1, 5}$.

Обмежимося розв'язками (7.6.2) в області

$$\Omega = \{(S, L_1, I, L_2, R) \in R_{+0}^5 \mid 0 \leq S + L_1 + I + L_2 + R = N\}.$$

У цій області діють звичайні локальні результати існування, унікальності та продовження. Отже, єдиний розв'язок (S, L_1, I, L_2, R) (7.6.2) з початковими умовами (7.6.3) існує для всього часу $t \geq 0$. Розглянемо розв'язки (7.6.2) з $(\varphi(\theta), \dots, \varphi_5(\theta)) \in \text{Int}\Omega$

, для усіх $\theta \in [-d_I, 0]$. Потім приймається рішення залишатися всередині області Ω весь час $t \geq 0$, тобто область Ω позитивно інваріантна відносно системи (7.5.2).

Математична модель має рівновагу без захворювання, якщо вона має точку рівноваги, за якої популяція залишається за відсутності захворювання. Модель (7.6.2) має рівновагу, вільну від хвороби, задану $E_0 = (N, 0, 0, 0, 0)$.

Базове число відтворення R_0 являє собою очікувану середню кількість нових туберкульозних інфекцій, викликаних одним інфікованим активним туберкульозом під час інфікування у контакті із повністю сприйнятливим населенням. Для моделі (7.6.2) воно задається формулою

$$R_0 = \frac{\beta}{\mu} \frac{\omega_R(\omega + \tau_2 + \mu)\tau_1 + \delta[(\omega_R + \mu)(\phi\mu + \omega) + (\omega_R + \phi\mu)\tau_2]}{(\tau_0 + \mu + \omega_R)(\omega + \tau_2 + \mu)(\delta + \tau_1 + \mu)} = \frac{N}{D}. \quad (7.6.4)$$

Стійкість безхворобної рівноваги

Важливо проаналізувати стабільність рівноваги без захворювання, оскільки вона показує, чи популяція залишатиметься за відсутності хвороби, або хвороба буде зберігатися назавжди. Система (7.6.2) еквівалентна

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = \mu N - \frac{\beta}{N} I(t)S(t) - \mu S(t), \\ \frac{dL_1(t)}{dt} = \frac{\beta}{N} I(t)(S(t) + \sigma L_2(t) + \sigma_R(N - S(t) - L_1(t) - I(t) - L_2(t)) \\ \quad - (\delta + \tau_1 + \mu)L_1(t), \\ \frac{dI(t)}{dt} = \phi\delta L_1(t) + \omega L_2(t) + \omega_R(N - S(t) - L_1(t) - I(t) - L_2(t)) \\ \quad - \tau_0 I(t - d_I) - \mu I(t), \\ \frac{dL_2(t)}{dt} = (1 - \phi)\delta L_1(t) - \sigma \frac{\beta}{N} I(t)L_2(t) - (\omega + \tau_2 + \mu)L_2(t), \end{cases} \quad (7.6.5)$$

де $R(t) = N - S(t) - L_1(t) - I(t) - L_2(t)$. Безхворобна рівновага системи (7.6.5) задана як $(S_0, L_{10}, I_0, L_{20}) = (N, 0, 0, 0)$. Розглянемо перетворення координат

$$s(t) = S(t) - \bar{S}, l_1(t) = L_1(t) - \bar{L}_1, i(t) = I(t) - \bar{I}, l_2(t) = L_2(t) - \bar{L}_2,$$

де $(\bar{S}, \bar{L}_1, \bar{I}, \bar{L}_2)$ позначає будь-яку рівновагу (7.6.5). Отже, маємо відповідну лінеаризовану систему (7.6.5) у вигляді

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{ds(t)}{dt} &= -\frac{\beta \bar{I} + \mu N}{N} s(t) - \frac{\beta}{N} \bar{S} i(t), \\ \frac{dl_1(t)}{dt} &= -\frac{\beta}{N} \bar{I} (\sigma_R - 1) s(t) - \frac{\beta}{N} (\sigma_R \bar{I} + (\delta + \tau_1 + \mu) N) l_1(t), \\ &\quad -\frac{\beta}{N} [-\bar{S} - \sigma \bar{L}_2 - \sigma_R (N + \bar{S} + \bar{L}_1 + 2\bar{I} + \bar{L}_2)] i(t) + \frac{\beta \bar{I} (\sigma - \sigma_R)}{N} l_2(t), \\ \frac{di(t)}{dt} &= -\omega_R s(t) + (\phi \delta - \omega_R) l_1(t) - (\omega_R - \mu) i(t) + (\omega - \omega_R) l_2(t) - \tau_0 i(t - d_I), \\ \frac{dl_2(t)}{dt} &= (1 - \phi) \delta l_1(t) - \sigma \frac{\beta}{N} \bar{L}_2 i(t) - \frac{\beta}{N} [\sigma \bar{I} + (\omega + \tau_2 + \mu) N] l_2(t), \end{aligned} \right. \quad (7.6.6)$$

Тоді виразимо систему (7.6.6) у матричній формі наступним чином:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} s(t) \\ l_1(t) \\ i(t) \\ l_2(t) \end{bmatrix} = A_1 \begin{bmatrix} s(t) \\ l_1(t) \\ i(t) \\ l_2(t) \end{bmatrix} + A_2 \begin{bmatrix} s(t - d_I) \\ l_1(t - d_I) \\ i(t - d_I) \\ l_2(t - d_I) \end{bmatrix},$$

де $c_1 = \delta + \tau_1 + \mu$, $c_2 = \omega + \tau_2 + \mu$, $A_2 = \text{diag}[0, 0, -\tau_0, 0]$.

$$c_3 = \bar{S} + \sigma \bar{L}_2 + \sigma_R (N + \bar{S} + \bar{L}_1 + 2\bar{I} + \bar{L}_2).$$

Трансцендентне характеристичне рівняння системи (7.5.6) таке

$$\Delta(\lambda) = |\lambda I - A_1 - e^{-\lambda d_I} A_2| = 0$$

і визначається як

$$\Delta(\lambda) = P(\lambda) + Q(\lambda) = 0, \quad (7.6.7)$$

де

$$P(\lambda) = \lambda^4 + a_3 \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0,$$

$$a_2 = c_4 c_5 + 3\mu(c_1 + c_2 + c_4) + c_6(c_4 + c_5) - \beta \phi \delta, \quad a_3 = c_1 + c_2 + c_7 + \mu,$$

$$c_7 = \omega_R + \tau_0 + \mu, \quad c_4 = \tau_0 + \omega_R, \quad c_5 = \tau_2 + \omega, \quad c_6 = \delta + \tau_1.$$

Зауваження 1. Для будь-якого $d_I \geq 0$, $a_3 > 0$ якщо $R_0 < 1$, $a_0 > 0$.

Нагадаємо, що точка рівноваги є асимптотично стійкою, якщо всі корені відповідного характеристичного рівняння мають від'ємні дійсні частини.

Якщо $R_0 > 1$, безхворобна рівновага E_0 є нестійкою для будь-якого $d_I \geq 0$.

Якщо, а) $R_0 < 1$, б) $a_1 > 0$, в) $a_2 > 0$, г) $a_2 a_3 > 0$ і д) $a_3 a_2 a_1 > a_1^2 + a_3^2 a_0$ рівновага без хвороби E_0 є локально асимптотично стійка для $d_I = 0$.

У випадку $d_I > 0$ якщо нестійкість має місце для певного значення затримки d_I , корінь (7.5.7) має перетинати уявну вісь. Наша мета – довести, що поліном (7.6.7) не має

чисто уявного кореню для всіх позитивних затримок. Комплексне ib , $b > 0$ є коренем (7.6.7), якщо і тільки якщо

$$b_i^4 a_3 b^3 - a_2 b^2 + i a_1 b + a_0 + \tau_0 (ib + \mu)(ib + c_1)(ib + c_2)(e^{-ibd_I} - 1) = 0.$$

Оскільки $e^{-ibd_i} = \cos(bd_i) - i \sin(bd_i)$, відокремимо дійсну та уявну частини, матимемо

$$b^8 + \alpha_3 b^6 + \alpha^2 b^4 + \alpha_1 b^2 + \alpha_0 = 0,,$$

де

$$\alpha_0 = a_0(a_0 - 2\mu\tau_0 c_1 c_2),$$

$$\alpha_1 = 2\tau_0[\mu(a_0 + a_2 c_1 c_2 - a_1(c_1 + c_2)) + a_0(c_1 + c_2) - a_1 c_1 c_2] - 2a_2 a_0 + a_1^2,$$

$$\alpha_2 = 2\tau_0[\mu(a_3(c_1 + c_2) - a_2 - c_1 c_2) - a_2(c_1 + c_2) + a_3 c_1 c_2 + a_1] + 2a_0 + a_1^2 - 2a_3 a_1,$$

$$\alpha_3 = 2\tau_0(\mu + c + 1 + c_2) + a_3^2 - 2(a_3 \tau_0 + a_2).$$

7.6.2 Задача оптимального керування для моделі ТБ із часовими затримками

Позначимо:

S -- пацієнти, не заражені ТБ; E -- латентний період; I -- не діагностовані пацієнти; T -- пацієнти із ТБ, із лікуванням; L -- протестовані хворі, без лікування; R -- пацієнти, що перехворіли, але знову захворіли на ТБ.

μ -- стала швидкості летального витоку, d_I, d_T, d_L -- швидкість смерті внаслідок відповідних компонентів. $\beta_1 S/N$, $\beta_2 T S/N$, $\beta_3 L S/N$ -- успішна передача ТБ, β_i -- швидкість ефективного контакту в відповідних складових.

Нова інфекція утворюється зі швидкістю

$$\beta_1 S/N + \beta_2 T S/N + \beta_3 L S/N = \lambda S/N, \lambda = \beta_1 + \beta_2 T + \beta_3 L.$$

Модель динаміки описується рівняннями []

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = \Lambda - (1-v_1)\lambda \frac{S}{N} - \mu S, \\ \frac{dE}{dt} = (1-v_1)\lambda \frac{S}{N} - \mu E - kE_{\tau_1}, \\ \frac{dI}{dt} = kE_{\tau_1} - (\mu + d_I + (1+v_2)\delta_1 + \delta_2)I, \\ \frac{dT}{dt} = (1+v_2)\delta_1 I + \gamma_1 L - (\mu + d_T + (1-v_3)\gamma_2)T - \alpha_2 T_{\tau_2}, \\ \frac{dL}{dt} = \delta_2 I - (\mu + d_L + \gamma_1 + \alpha_1)L + (1-v_3)\gamma_2 T, \\ \frac{dR}{dt} = \alpha_1 L \alpha_2 T_{\tau_2} - \mu R, \end{cases} \quad (7.6.8)$$

Тут $X_{\tau_i} = X(t - \tau_i)$, $i = 1, 2$.

Початкові умови для цієї системи рівнянь:

$$\begin{aligned} S(\theta) &= \phi_1(\theta), \quad E(\theta) = \phi_2(\theta), \quad I(\theta) = \phi_3(\theta), \quad T(\theta) = \phi_4(\theta), \\ L(\theta) &= \phi_5(\theta), \quad R(\theta) = \phi_6(\theta), \quad \phi_i(\theta) \geq 0, \quad \theta \in [-\tau, 0], \quad \tau = \max\{\tau_1, \tau_2\}. \end{aligned}$$

Позначимо $N = S + E + I + T + L + R$ загальна популяція. Траєкторії системи (7.6.8) обмежено.

$$N(t) \leq \frac{A}{\mu} + N(t)e^{-\mu t},$$

і

$$0 \leq N(t) \leq A/\mu, \quad t \rightarrow \infty.$$

Задача оптимального керування

Оскільки R не міститься у перших п'яти рівняннях системи (7.6.8), тому обмежимося дослідженням системи без рівняння відносно R .

Стратегія керування полягає у мінімізації (E) , I та L разом із мінімізацією коштовності цієї стратегії.

Для фіксованого t_f необхідно мінімізувати функціонал

$$\begin{aligned} J(v_1, v_2, v_3) &= E(t_f) + I(t_f) + I(t_f) + L(t_f) \\ &+ \int_0^{t_f} \left\{ E(t) + I(t) + L(t) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 A_i v_i^2(t) \right\} dt, \end{aligned} \quad (7.6.9)$$

де $A_i \geq 0$ – ваги, що збалансовують розміри членів. Тобто

$$J(v_1^*, v_2^*, v_3^*) = \min\{J(v_1, v_2, v_3) \mid (v_1, v_2, v_3) \in \mathcal{U}\}. \quad (7.6.10)$$

$$\mathcal{U} = \{(v_1(\cdot), v_2(\cdot), v_3(\cdot)) \in (L_{[0, t_f]}^\infty)^3 \mid 0 \leq v_1(t), v_2(t), v_3(t) \leq 1, \forall t \in [0, t_f]\}. \quad (7.6.11)$$

Для з'ясування необхідних умов оптимального керування використовується принцип максимуму Понтрягіна, згідно з яким задача (7.6.8), (7.6.9) зводиться до мінімізації гамільтоніану H :

$$\begin{aligned} H = & E(t) + I(t) + L(t) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 A_i v_i^2(t) + \lambda_1 \left(\Lambda - (1 - v_1) \lambda \frac{S}{N} - \mu S \right) \\ & + \lambda_2 \left((1 - v_1) \lambda \frac{S}{N} - \mu E - k E_{\tau_1} \right) + \lambda_3 (k E_{\tau_1} - (\mu + d_I + (1 + v_2) \delta_1 + \delta_2) I) \\ & + \lambda_4 ((1 + v_2) \delta_1 I + \gamma_1 L - (\mu + d_T + (1 - v_3) \gamma_2) T - \alpha_2 T_{\tau_2}) \\ & + \lambda_5 (\delta_2 I - (\mu + d_L + \gamma_1 + \alpha_1) L + (1 - v_3) \gamma_2 T) \end{aligned} \quad (7.6.12)$$

Відповідно до принципу максимуму для визначення допоміжних параметрів λ_k , $k = \overline{1, 5}$, маємо систему диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda_1}{dt} &= \lambda_1 \left((1 - v_1) \frac{\lambda}{N} + \mu \right) - \lambda_2 (1 - v_1) \frac{\lambda}{N}, \\ \frac{d\lambda_2}{dt} &= -1 + \lambda_2 \mu - \chi_{[0, t_f - \tau_1]}(t) (\lambda_3^{\tau_1} - \lambda_2^{\tau_1}) k; \\ \frac{d\lambda_3}{dt} &= -1 + (\lambda_1 - \lambda_2) (1 - v_1) \beta_1 \frac{S}{N} \\ &+ \lambda_3 (\mu + d_I + (1 + v_2) \delta_1 + \delta_2) - \lambda_4 (1 + v_2) \delta_1 - \lambda_5 \delta_2; \\ \frac{d\lambda_4}{dt} &= (\lambda_1 - \lambda_2) (1 - v_1) \frac{S}{N} + \lambda_4 (\mu + d_T + (1 - v_3) \gamma_2) \\ &- \lambda_5 (1 - v_3) \gamma_2 + \chi_{[0, t_f - \tau_2]}(t) \alpha_2 \lambda_4^{\tau_2}; \\ \frac{d\lambda_5}{dt} &= -1 + (\lambda_1 - \lambda_2) (1 - v_1) \beta_3 \frac{S}{N} - \lambda_4 \gamma_1 + \lambda_5 (\mu + d_L + \alpha_1 + \gamma_1) \end{aligned}$$

із умовами трансверсальності

$$\lambda_1(t_f) = 0, \lambda_2(t_f) = 1, \lambda_3(t_f) = 1, \lambda_4(t_f) = 0, \lambda_5(t_f) = 1$$

$$\lambda_k^{\tau_j} = \lambda_k(t + \tau_j), i = \overline{1, 5}, j = 1, 2.$$

Оптимальне керування v_i^* , $i = 1, 2, 3$, визначається як

$$\begin{aligned}
 v_1^*(t) &= \min \left[1, \max \left(0, \frac{(\lambda_2 - \lambda_1) \lambda S}{N A_1} \right) \right], \\
 v_2^*(t) &= \min \left[1, \max \left(0, \frac{(\lambda_3 - \lambda_4) \delta_1 I}{A_2} \right) \right], \\
 v_3^*(t) &= \min \left[1, \max \left(0, \frac{(\lambda_5 - \lambda_4) \gamma_2 T}{A_3} \right) \right],
 \end{aligned} \tag{7.6.13}$$

Значення параметрів:

$$\begin{aligned}
 \mu &= 1/70, \lambda = \mu N, \beta_1 = 4, \beta_2 = 0,5, \beta_3 = 3, k = 0,1, \\
 d_I &= 0,1; d_T = 0,083, d_L = 0,071, \delta_1 = 0,3; \delta_2 = 0,5; \\
 \gamma_1 &= 0,2; \gamma_2 = 0,298; \alpha_1 = 0,25; \alpha_2 = 0,53.
 \end{aligned}$$

Початкові умови:

$$N = 1 \cdot 10^6; S_0 = 8 \cdot 10^5; E_0 = 1,4 \cdot 10^5; I_0 = 2 \cdot 10^4; T_0 = 10^5; L_0 = 10^5.$$

Запитання для самоперевірки

1. Які популяції враховуються під час формулювання математичної моделі, що описує захворювання на туберкульоз
2. Що визначають затримки часу у моделі?
3. Як визначається стійкість безхворобної рівноваги?
4. У чому полягає задача оптимального керування ТБ із затримками?

Розділ 8 Математичні моделі терапії раку

Рак — це клас захворювань, що характеризується неконтрольованим ростом клітин. Наше тіло складається з багатьох типів клітин.

Ракові пухлини виникають, коли клітини втрачають свою здатність припинити поділ. Це призводить до утворення пухлин. Злоякісні пухлини можуть стати перешкодою для операції бічних органів або атаки інших органів шляхом ангіогенезу [30]. Онкологічні захворювання вважаються одними з найбільш смертельних. Підходи до лікування включають хірургію, хіміотерапію, імунотерапію, віротерапію, променеву терапію та ін.

Одним із таких напрямів досліджень є математичне моделювання і систем керування. Проблема лікування розповсюдження ракових пухлин з точки зору теорії систем дає змогу дослідникам виявити різні взаємодії між різними типами клітин і клітинами з ліками. Це також допомагає використовувати переваги методів керування, щоб запропонувати ефективні протоколи лікування та перевірити їх на комп'ютері симуляції замість клінічних випробувань і помилок.

Зазвичай ці клітини ростуть і діляться контрольованим способом, щоб виробляти більше клітин, оскільки вони необхідні для підтримки здоров'я організму. Коли клітини старіють або пошкоджені, вони гинуть і замінюються новими клітинами. Втім, іноді цей звичайний процес йде не так. Генетичний матеріал (ДНК) клітини може бути пошкоджений або змінений, виробляються мутації, які впливають на нормальний ріст і поділ клітин. Коли це відбувається, клітини не вмирають, коли повинні, і пошкоджені клітини неконтрольовано діляться, утворюючи грудки або маси тканини, які називаються пухлинами. Пухлини можуть рости і заважати травленню, нервовій системі і кровообігу, і вони можуть виділяти гормони, які змінюють функції організму. Не всі пухлини ракові. Пухлини можуть бути доброякісними і злоякісними. Доброякісні пухлини не є раковими. Їх часто можна видалити, і в більшості випадків вони не повертаються. Клітини в доброякісних пухлинах не поширюються на інші частини тіла. Злоякісні пухлини є раковими. Клітини в цих пухлинах можуть вражати майже тканини та успішно поширюватися на інші частини тіла та рости, захоплювати та руйнувати інших здорові тканини. Поширення раку з однієї частини тіла в інший називається *метастазуванням*. Деякі види раку не утворюють пухлин. Наприклад, лейкемія це рак кісткового мозку та крові. Існує понад 100 різних видів раку та кожен класифікується за типом клітини, яка спочатку уражена.

Наша імунна система відіграє важливу роль в обмеженні розвитку цих ракових захворювань клітини. Т-клітини-хелпери $CD^{+}4$, які зазвичай допомагають іншим клітинам імунної системи під час інфекції та Т-клітини-кіллери $CD^{+}8$, які безпосередньо атакують інфіковані клітини та знищують їх, найважливіші імунні клітини організму для захисту від ракових клітин. У випадку раку імунна система самостійно часто не може ефективно боротися з пухлиною через наступні причини:

(i) Нормальна імунна система «сліпа» до пухлинних клітин, тому що пухлинні клітини отримані з власних клітин організму. Імунна система «думає» про пухлини як про «я» і може не розпізнавати їх як «чужі», що створює феномен, відомий як «толерантність до пухлини».

(ii) Імунна система може розпізнати певні ракові клітини, але може не бути досить сильною реакції, щоб знищити рак.

(iii) Пухлина має здатність захищатися.

Отже, імунна система може потребувати посилення, щоб потенційно стати ефективнішою у боротьбі з раком.

Рак можна лікувати за допомогою хімієтерапії, імунотерапії, променевої терапії, хірургічного втручання, терапії моноклональними антитілами тощо. Вибір терапії залежить від локалізації та ступеню пухлини і стадії захворювання, а також стан і віку хворих. Метою лікування є повне видалення раку без пошкодження решти тіла. Але, на жаль, більшість методів лікування раку негативно впливають на нормальний організм клітини.

Хімієтерапія – це лікування раку одним або кількома цитотоксичними протипухлинними препаратами («хімієтерапевтичні засоби») як частину стандартизованої схеми. У більшості форм хімієтерапії ліки діють, вбиваючи клітини, які швидко діляться, що є однією з основних властивостей більшості ракових клітин. Це означає, що хімієтерапія також шкодить клітинам, які швидко діляться за нормальних обставин: клітинам кісткового мозку, травного тракту та волосяних фолікулів. Це призводить до найпоширеніших побічних ефектів хімієтерапії: мієлосупресія (зменшення вироблення крові клітин), імуносупресія, мукозит (запалення слизової оболонки тракту травної системи), алопеція (випадіння волосся) тощо. Це шкідливі побічні ефекти хімієтерапії.

Імунотерапія є одним з найновіших підходів до лікування раку. Вона заснована на загально прийнятій гіпотезі: «імунна система є найкращим інструментом для людини у боротьбі з хворобою». Імунотерапія діє на лейкоцити, першу лінію захисту організму проти хвороби. Для посилення імунної відповіді організму на рак лейкоцити можна стимулювати різними способами з невеликим впливом або без нього на здорові тканини. Імунотерапія може також використовуватися для зменшення побічних ефектів інших методів лікування раку. Імунотерапія має потенційно використовуватися для боротьби з раком шляхом зовнішнього стимулювання імунітету системи, щоб змусити її діяти сильніше, або забезпечуючи імунну систему антропогенними або специфічними білками природного походження, створених поза організмом, щоб імунна система могла розпізнати пухлину як чужорідне утворення і знищити її. Іноді для лікування раку використовується імунотерапія сама по собі, але найчастіше використовується у поєднанні з традиційним лікуванням (хімієтерапія, променева терапія, хірургія тощо), щоб посилити їхні ефекти. Одна з можливих переваг імунотерапії полягає у тому, що вона має потенціал не бути настільки токсичною, як хімієтерапія, променева терапія та хірургія.

Теоретичне вивчення раку за допомогою математичного моделювання є дуже корисний підхід, щоб сформувати наше розуміння пухлино-імунної динаміки.

8.1 Комбінована терапія раку з вакциною та інгібіторами

Коли ракові клітини піддаються некрозу, вони вивільняють *бокс-1 групи високої мобільності* (HMGB-1), який активує дендритні клітини. Активовані дендритні клітини (ДК) дозрівають як клітини APC (антиген презентовані клітини) і відіграють важливу роль у зв'язку між вродженою та адаптивною імунними реакціями. Активовані дендритні клітини виробляють IL-12, який активує ефекторні Т-клітини $CD4^+$ Th1 і $CD8^+$ Т-клітини. Th1 продукує IL-2, який додатково сприяє проліферації ефекторних Т-клітин. Обидві Т-клітини $CD4^+$ Th1 і $CD8^+$ вбивають ракові клітини. $CD8^+$ Т-клітини ефективніші у знищенні ракових клітин, але допоміжна функція клітин $CD4^+$ Th1 покращує ефективність пухлинно-реактивних $CD8^+$ Т-клітин.

Вакцини проти раку слугують для збільшення кількості пухлиноспецифічних наявних Т-клітин, а також для активації пухлиноспецифічних Т-клітин, які перебувають у стані спокою. GM-CSF може активувати дендритні клітини, і зазвичай використовується як вакцина проти раку. GVAX – це вакцина проти раку, що складається з пухлинних клітин, генетично модифікованих для виділення GM-CSF, а потім опромінених для запобігання подальшому поділу клітин. PD-1 є імуноінгібіторним рецептором, переважно вираженим на активованих Т-клітинах. Його ліганд PD-L1 посилюється на тих самих активованих Т-клітинах, але він також виражається деякими людськими раковими клітинами, такими як меланома, рак легенів, рак товстої кишки та лейкоз.

У результаті аналітичного огляду численних публікацій стосовно математичного опису процесів виникнення і розповсюдження ракових захворювань зупинимося на найзагальнішій, на наш погляд, математичній моделі [19], що враховує такі змінні: ракові клітини (T), дендритні клітини (ДК), $CD4^+$ і $CD8^+$ Т-клітини, вакцини GM-CSF, яка активує ДК, антитіл PD-1, PD-L1, цитокіни IL-12 та IL-2.

Таблиця 8.1 Список параметрів моделі

Пар.	Опис	Розмірність
	Густина	
D	DCs	г/см ³
T_1	активованих $CD4^+$ Т-клітин	г/см ³
T_8	активованих $CD8^+$ Т-клітин	г/см ³
C	ракових клітин	г/см ³
N_C	некротичних ракових клітин	г/см ³
	Концентрація	
H	Н ГМГБ-1	г/см ³
G	GM-CSF	г/см ³
I_{12}	IL-12	г/см ³
I_2	IL-2	г/см ³
P	PD-1	г/см ³
Q	PD-1--PD-L1	г/см ³

L	PD-L1	г/см^3
A	анти-PD-1	г/см^3

8.2 Просторово-часова математична модель

Необхідність дослідження просторово-часових моделей є важливим для вивчення динаміки росту пухлин та розробки засобів запобігання цьому явищу. Цей напрям досліджень ракових захворювань виходить за межі спрямованості підручника, тому наведемо тільки формулювання загальної математичної моделі росту ракових пухлин та засобів лікування згідно з результатами публікації [30].

В табл. 8.1 приведено список параметрів моделі.

Нехай загальна густина ракових клітин (C), активних дендритних клітин (D), $CD4^+$ Т-клітин (T_1) і $CD8^+$ Т-клітин (T_8) у пухлині залишаються сталими у просторі та часі:

$$C + D + T_1 + T_8 = \text{const.} \quad (8.2.1)$$

Проліферація ракових клітин і міграція імунних клітин у пухлину викликає внутрішній тиск, який призводить до руху клітин (із однаковою швидкістю $u = u(x, t)$). Нехай також всі клітини зазнають дифузії, і що всі цитокіни та ліки дифундують усередині пухлини.

Взаємодія дендритних клітин-хелперів, клітин-вбивць ракових клітин, та ракових клітин описується такими рівняннями:

1. **Рівняння для ДК (D).** Коли ракові клітини піддаються некрозу, вони вивільняють HMGB-1 (білок, що взаємодіє із ДНК ядра клітини). Моделювати динаміку некротичних клітин і HMGB-1 можна за такими рівняннями:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_C}{\partial t} + \nabla \cdot (uN_C) &= \delta_{N_C} \Delta N_C + \lambda_{N_C} C - d_{N_C} N_C; \\ \frac{\partial H}{\partial t} &= \delta_H \Delta H + \lambda_{HN_C} N_C - d_H H, \end{aligned}$$

Динаміка ДК описується як

$$\frac{\partial D}{\partial t} + \nabla \cdot (uD) = \delta_D \Delta D + \lambda_{DC} D_0 \frac{C}{K_C + C} + \lambda_{DG} D_0 \frac{G}{K_G + G} - d_D D, \quad (8.2.2)$$

2. **Рівняння для $CD4^+$ Т-клітин (T_1).**

Наявні $CD4^+$ Т-клітини активуються IL-12, а IL-2 індукує проліферацію активованих T_1 -клітин.

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} + \nabla \cdot (uT_1) = \delta_T \Delta T_1 + \frac{1}{1 + Q/K_{TQ}} \left(\lambda_{T_1 I_{12}} \frac{T_{10} I_{12}}{K_{I_{12}} + I_{12}} + \lambda_{T_1 I_2} \frac{T_1 I_2}{K_{I_2} + I_2} \right) - d_{T_1} T_1, \quad (8.2.3)$$

3. **Рівняння для активованих $CD8^+$ Т-клітин (T_8).**

IL-12 активує $CD8^+$ Т- клітини, а IL-2 індукує проліферацію. $CD8^+$ Т-клітин. T_8 задовольняє рівняння

$$\frac{\partial T_8}{\partial t} + \nabla \cdot (uT_8) = \delta_T \Delta T_8 + \frac{1}{1 + Q/K_{TQ}} \left(\lambda_{T_8 I_{12}} \frac{T_{80} I_{12}}{K_{I_{12}} + I_{12}} + \lambda_{T_8 I_2} \frac{T_8 I_2}{K_{I_2} + I_2} \right) - d_{T_8} T_8, \quad (8.2.4)$$

4. Рівняння для пухлинних клітин (C).

Ракові клітини гинуть завдяки T_1 і T_8 . Щоб врахувати конкуренцію ракових клітин за простір між собою, припускаємо логістичне зростання з пропускну здатністю (C_M).

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \nabla \cdot (uC) = \delta_c \Delta C + \lambda_c C \left(1 - \frac{C}{C_M} \right) - (\eta_1 T_1 + \eta_8 T_8) C - d_C C, \quad (8.2.5)$$

Рівняння для ліків

5. Рівняння для GM-CSF (G).

Нехай GVAX вводять внутрішньошкірно кожні 3 дні упродовж 30 днів (як в експериментах на мишах), забезпечуючи джерело $\hat{G}(t)$ GM-CSF

$$\hat{G}(t) = \begin{cases} \gamma_G & t \leq 30, \\ \gamma_G \frac{33-t}{3} & 30 < t \leq 33, \\ 0 & t > 33, \end{cases}$$

$$\frac{\partial G}{\partial t} = \delta_G \Delta G + \lambda_G + \hat{G}(t) - d_G G, \quad (8.2.6)$$

де d_G – швидкість розпаду GM-CSF.

Без ліків рівноважна концентрація GM-CSF у плазмі становить $G = \hat{K}_G = 1:74101_0$ г/см³ [60]. Період піврозпаду GM-CSF становить 13 годин, тобто 0,54 дня, так що $d_G = \ln 2/0,54 = 1,28$ 1/доба.

6. Рівняння для IL-12 (I_{12}). IL-12 продукується активованими DCs:

$$\frac{\partial I_{12}}{\partial t} = \delta_{I_{12}} \Delta I_{12} + \lambda_{I_{12} D} D - d_{I_{12}} I_{12}. \quad (8.2.7)$$

7. Рівняння для IL-2 (I_2). IL-2 продукується активованими $CD4^+$ Т-клітинами (T_1) [4, 5]. Отже,

$$\frac{\partial I_2}{\partial t} = \delta_{I_2} \Delta I_2 + \lambda_{I_2 T_1} T_1 - d_{I_2} I_2. \quad (8.2.8)$$

8. Рівняння для PD-1 (P), PD-L1 (L) і PD-1--PD-L1 (Q).

PD-1 виявляється на поверхні активованих $CD4^+$ та $CD8^+$ Т-клітин. Будемо вважати, що рівень PD-1 однаковий для активованих $CD4^+$ і $CD8^+$ Т-клітин. Отже, P задається як

$$P = \rho_p(T_1 + T_8),$$

де ρ_p – відношення маси одного білка PD-1 до маси однієї Т-клітини.

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \nabla(uP) = \delta_T \Delta P + \rho_p \left[\frac{\partial T_1 + T_8}{\partial t} + \nabla \cdot (u(T_1 + T_8)) - \delta_T \Delta(T_1 + T_8) \right]. \quad (8.2.9)$$

10. Рівняння для клітинної швидкості (u):

Вважається, що більша частина пухлини складається з позаклітинного матриксу, ЕСМ, (приблизно $0,6 \text{ г/см}^3$) і ракових клітин (приблизно $C = 0,4 \text{ г/см}^3$), і що густини D, T_1, T_8 становлять приблизно $4 \cdot 10^{-4}$, $2 \cdot 10^{-2}$ і $1 \cdot 10^{-3}$ відповідно. Далі припускаємо, що все клітини приблизно однакового об'єму і площі поверхні, так що їх коефіцієнти дифузії однакові. Для певності візьмемо константу в рівнянні (8.1) рівною 0,4034. Додавши рівняння (8.2)–(8.5), ми тоді отримуємо

$$0,4034 \times \nabla \cdot u = \sum_{j=2}^5 [\text{RHS}(j)]. \quad (8.2.10)$$

Рівняння (8.2.2)–(8.2.5) описують взаємодію пухлинних, ефекторних, дендритних клітин. Рівняння (8.2.6)–(8.2.9) – засоби лікування тієї чи іншої форми захворювання.

$$\frac{\partial X}{\partial t} + \nabla \cdot (uX) = \delta_x \Delta X - d_x X + N_x(X), \quad (8.2.11)$$

$$X = [D, T_1, T_8, C, G, I_{12}, I_2].$$

Для спрощення обчислень будемо вважати пухлину сферичною і позначати її рухому межу (тобто її радіус) $r = R(t)$. Ми також припускаємо, що всі густини та концентрації радіально симетричні, тобто є функціями (r, t) , де $0 \leq r \leq R(t)$.

Зокрема, $u = u(r, t)e_r$, де e_r – одиничний радіальний вектор, а кожне з рівнянь має вигляд із $X = X(r, t)$ набуває вигляд

$$\frac{\partial X}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial r^2 u X}{\partial r} = \delta_x \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial X}{\partial r} \right) - d_x X + N_x(X).$$

11. Рівняння для вільної межі (R): За припущення, що вільна межа $r = R(t)$ рухається зі швидкістю клітин, маємо

$$\frac{dR(t)}{dt} = u(R(t), t). \quad (8.2.12)$$

12. Межові умови Нехай $CD4^+$ Т-клітини та $CD8^+$ Т-клітини, які мігрували з лімфатичних вузлів у мікрооточення пухлини, мають постійні густини T_1 , T_8 на межі пухлини, і що вони активуються IL-12 при вході у пухлину. Представимо цей процес

умовами потоку на межі $r = R(t)$

$$\frac{\partial T_1}{\partial n} + \sigma_T(I_{12})(T_1 - \hat{T}_1) = 0, \quad \frac{\partial T_8}{\partial n} + \sigma_T(I_{12})(T_8 - \hat{T}_8) = 0, \quad (8.2.13)$$

де $\sigma_T(I_{12}) = \sigma_0 \frac{I_{12}}{K_{I_{12}} + I_{12}}.$

Початкові умови ($t = 0$):

$$R(0) = 0.01 \text{ cm}, C = 0,3583, T_1 = 3 \cdot 10^{-3}, T_8 = 1,5 \cdot 10^{-3}, M = 0,24, \\ D = 6 \cdot 10^{-4}, I_2 = 3,5 \cdot 10^{-11}, I_{12} = 1,2 \cdot 10^{-9}, P = 1,2 \cdot 10^{-9}, g/\text{cm}^3. \quad (8.2.14)$$

Система диференціальних рівнянь із частинними похідними описує динаміку захворювання разом із засобами боротьби із раковими утвореннями. Вона враховує просторову динаміку (дифузійні складові та взаємодію різних компонент.

Запитання для самоперевірки

1. Які переваги надає просторово-часова модель порівняно із короткочасною моделлю (кінетичною)?
2. Як визначається швидкість руху клітин (із взаємопроникненням однієї популяції в іншу)?
3. Яка роль коефіцієнтів дифузії у визначенні густин популяцій?
4. Навести рівняння динаміки популяцій у випадку їхньої сферичної форми.
5. Як визначається радіус пухлини як функція часу?

8.3 Математична модель кінетики

У переважній кількості літературних джерел розглядаються математичні моделі, в яких не враховується просторово-часова розподіленість процесів, тобто ігноруються процеси дифузії (взаємопроникнення клітин) і, відповідно конвективні члени. Математичні моделі у такому випадку описують кінетичні явища і на відміну від наведеної вище системи нелінійних диференціальних рівнянь із частинними похідними описують кінетичні явища взаємодії у вигляді систем звичайних диференціальних рівнянь.

Система рівнянь, що приводиться нижче, запропонована в [19], є загальна математична кінетична модель, яка урахує усі можливі копоненти, що впливають на розвиток захворювання:

$$\frac{dN_C}{dt} = \lambda_{N_C} C - d_{N_C} N_C; \quad (5/3/1)$$

$$\frac{dH}{dt} = \lambda_{HN_C} N_C - d_H H, \quad (8/3/2)$$

$$\frac{dC}{dt} = \lambda_C C \left(1 - \frac{C}{C_M}\right) - (\eta_1 T_1 + \eta_8 T_8) C - d_C C, \quad (8/3/3)$$

$$\frac{dD}{dt} = \lambda_{DC} D_0 \frac{C}{K_C + C} + \lambda_{DG} D_0 \frac{G}{K_G + G} - d_D D, \quad (8.3.4)$$

$$\frac{dT_8}{dt} = \frac{1}{1 + Q/K_{TQ}} \left(\lambda_{T_8 I_{12}} \frac{T_{80} I_{12}}{K_{I_{12}} + I_{12}} + \lambda_{T_8 I_2} \frac{T_8 I_2}{K_{I_2} + I_2} \right) - d_{T_8} T_8, \quad (8.3/5)$$

$$\frac{dG}{dt} = \lambda_G + \hat{G}(t) - d_G G,$$

$$\frac{dI_{12}}{dt} = \lambda_{I_{12} D} D - d_{I_{12}} I_{12}.$$

$$\frac{dI_2}{dt} = \lambda_{I_2 T_1} T_1 - d_{I_2} I_2.$$

$$\frac{dT_1}{dt} = \frac{1}{1 + Q/K_{TQ}} \left(\lambda_{T_1 I_{12}} \frac{T_{10} I_{12}}{K_{I_{12}} + I_{12}} + \lambda_{T_1 I_2} \frac{T_1 I_2}{K_{I_2} + I_2} \right) - d_{T_1} T_1,$$

$$\frac{dP}{dt} = \frac{P}{T_1 + T_8} [(\lambda_{T_1 I_{12}} T_{10} + \lambda_{T_8 I_{12}} T_{80}) \frac{I_{12}}{K_{I_{12}} + I_{12}}$$

$$+ (\lambda_{T_1 I_2} T_1 + \lambda_{T_8 I_2} T_8) \frac{I_2}{K_{I_2} + I_2}] \frac{1}{1 + Q/K_{TQ}} - \frac{P}{T_1 + T_8} (d_{T_1} T_1 + d_{T_8} T_8) - \mu_{PA} PA,$$

$$L = \rho_L (T_1 + T_8) + \varepsilon C,$$

$$\frac{dA}{dt} = \hat{A}(t) - \mu_{PA}PA - d_A A$$

Частинні випадки цієї моделі висвітлюються у наступному розділі.

8.4 Кінетичні моделі

Процесам виникнення і розповсюдження ракових захворювань, які описуються системами нелінійних звичайних диференціальних рівнянь, присвячено значну кількість публікацій.

Загальна схема формулювання таких моделей подібна до наведеної схеми у першому розділі, тобто ігноруються процеси дифузії (взаємопроникнення) клітин і їхній рух.

Залежно від конкретної задачі (вид ракового захворювання) ці рівняння мають той чи інший рівень складності.

Недоліком такого підходу є ігнорування взаємопроникнення заражених і здорових клітин. Перевага – у відносній простоті і можливості застосування методів оптимального керування для визначення оптимальних доз ліків для лікування хворих.

8.4.1 Модель загибелі пухлинних клітин

Розглядається математична модель кінетики, що описує процеси загибелі пухлинних клітин *після застосування вірусної вакцини*. Особливість цієї моделі полягає у тому, що вона враховує «передісторію», тобто затримку у часі дії вакцини після її введення.

Математична модель двохетапної загибелі пухлинних клітин після введення вірусної вакцини описується рівнянням вигляду

$$\frac{dN_V}{dt} = \lambda(t)N(t)1(t_V - t) + [\lambda(t - t_V) - K_V V(\tau_1 - t) - K_{AV} A_V(t - t_V)] \cdot N_V(t - t_V)1(t_N - t) + [\lambda(t - t_N) - K_{AN} A_N(t - t_N)]N_V(t - t_N),$$

де $N(t)$ – чисельність популяції пухлинних клітин до введення вакцини; $\lambda(t)$ – темп розмноження популяції пухлинних клітин в експериментальній пухлині без введення вакцини; $N_V(t)$ – чисельність популяції швидко проліферуючих інфікованих пухлинних клітин після введення вакцини; $P(t)$ – функція для оцінки частки швидко проліферуючих клітин у момент введення вакцини; $A_V(t - t_V)$ – чисельність антитіл проти вірусу; $A_N(t - t_N)$ – чисельність антитіл проти інфікованих пухлинних клітин; $t_V = \tau_1 + Z_{CV}$ – момент початку імунної реакції проти вірусу; $t_N = \tau_1 + Z_{CN}$ – момент початку імунної реакції проти інфікованих пухлинних клітин; τ_1 – момент введення вакцини; Z_{CV} і Z_{CN} – час запізнення імунної реакції проти вірусу та інфікованих пухлинних клітин; K_{AN} , K_{AV} , K_V – розмірні коефіцієнти, що враховують взаємодію різних популяцій (компонентів моделі).

Динаміка чисельності вірусів описується рівнянням

$$\frac{dV(t)}{dt} = \alpha_V V(t) - \beta_V A_V(t)V(t),$$

де α_V – темп розмноження вірусів всередині клітини; β_V – темп загибелі вірусів при їх взаємодії з антитілами $A_V(t)$; $V_0 = V(\tau_1)$ – початкова доза вірусної вакцини; τ_1 – момент першого введення вірусної вакцини.

У моделі вакцинотерапії початкова умова $V_0 = V(\tau_1)$ розглядається як параметр керування, що характеризує дозу вірусної вакцини, що вводиться.

Імунна відповідь на введення вірусу та клон інфікованих пухлинних клітин, що утворюються, визначається чисельністю антитіл і плазматичних клітин. Їхня чисельність розраховується для кожного з двох етапів стимуляції імунної системи на вірус і на інфіковані пухлинні клітини за такими рівняннями:

- рівняння динаміки чисельності антитіл проти вірусу $A_V(t)$:

$$\frac{dA_V(t)}{dt} = \alpha_A C_V(t - t_V) - \beta_{AV} A_V(t - t_V) V(t - t_V) - \beta_V A_V(t - \tau_1),$$

де α_A – темп утворення антитіл із однієї плазматичної клітини; β_{AV} – темп убування антитіл через взаємодію із вірусами $A_V(t)$; β_V – темп зменшення чисельності антитіл шляхом природного руйнування; $t_V = \tau_1 + Z_{CV}$ – момент початку імунної реакції проти вірусів.

- Рівняння динаміки утворення плазматичних клітин $C_V(t)$:

$$\frac{dC_V(t)}{dt} = \alpha_C V(t - \tau_1) A_V(t - t_V) - \beta_{CV} [C_V(t - \tau_1) - C_{VN}], C_V(\tau_1) = C_{VN},$$

де α_C – темп утворення плазматичних клітин; β_{CV} – розмірний коефіцієнт; C_{VN} – вихідна чисельність плазматичних клітин у нормі.

- Рівняння динаміки чисельності антитіл $A_N(t)$, що діють на інфіковані пухлинні клітини:

$$\frac{dA_N(t)}{dt} = \alpha_{AN} C_N(t - t_N) - \beta_{AN} A_N(t - t_N) N_V(t - t_N) P(t_N) - \beta_{NN} A_N(t - t_N),$$

де α_{AN} – темп утворення антитіл з однієї плазматичної клітини; β_{AN} – темп убування антитіл $A_N(t)$ через взаємодію із зараженими пухлинними клітинами $N_V(t)$; β_{NN} – темп зменшення чисельності антитіл шляхом природного руйнування.

- Рівняння динаміки утворення плазматичних клітин $C_N(t)$:

$$\frac{dC_N(t)}{dt} = \alpha_{CN} N_V(t) A_N(t - t_N) - \beta_{CN} [C_N(t - t_N) - C_{NN}], C_{AN}(\tau_1) = C_{NN},$$

α_{CN} – темп утворення плазматичних клітин; β_{CN} – розмірний коефіцієнт; Z_{CN} – час запізнення імунної реакції для утворення клону плазматичних клітин проти інфікованих пухлинних клітин; $N_V(t) = N(t)P(t)$ – чисельність швидко проліферуючої фракції на момент початку утворення антитіл проти інфікованих пухлинних клітин $t_N = \tau_1 + Z_{CN}$; C_{NN} – початкова чисельність плазматичних клітин у нормі.

Для адекватного опису динаміки зниження частки швидко проліферуючих клітин із

збільшенням розміру пухлини запроваджено функцію

$$P(t) = 1 - \frac{1}{\pi K_p} \frac{2\alpha_p \beta_p t}{1 - \beta_p^2 t^2},$$

Кількість інфікованих клітин в обсязі, що вимірюється, обчислюється як

$$N_V(t_N) = N(t_N)P(t_N),$$

$$t_N = \tau_1 + Z_{CN}.$$

$$N(t) = N_0 \exp[\alpha(1 - e^{-\beta t})]$$

N_0 — початкова чисельність пухлинних клітин; α , β — параметри функції Гомпертца [23].

8.4.2 Оптимальне керування імунно-хімієтерапією пухлинних клітин

Розглянемо математичну модель імунно-хімієтерапії пухлинних клітин, запропоновану в [35], як типову модель кінетики, що описує процеси комбінованої терапії пухлин.

Загальний вигляд рівнянь

Модель описує кінетику чотирьох популяцій (пухлинних клітин і трьох типів імунних клітин), а також дві концентрації препарату у крові.

- $T(t)$ — популяція пухлинних клітин;
- $L(t)$ — пухлино-специфічна популяція $CD8^+$ Т-клітин;
- $N(t)$ — популяція неспецифічних ефекторно-імунних клітин;
- $C(t)$ — популяція циркулюючих лімфоцитів;
- $I(t)$ — концентрація IL-2 (МО на літр, $0,033 \cdot \text{мг/л}$);
- $M(t)$ — концентрація хімієпрепарату (мг/л).

Рівняння, що визначають кінетику популяції, мають враховувати члени зростання для кожної популяції, часткове знищення клітин, розповсюдження клітин, клітинну інактивацію та зовнішнє медикаментозне втручання.

Система рівнянь, що описує ріст, смерть і взаємодію цих популяцій з лікуванням має вигляд

$$\frac{dT}{dt} - aT = -T[abT + c_I N + d \frac{L}{sT + L} + K_T M], \quad (8.4.1)$$

$$\frac{dN}{dt} + fN = \alpha_1 + N \left[\frac{gT}{h + T} - pT - K_N M \right], \quad (8.4.2)$$

$$\frac{dL}{dt} + mL = V_L(t) + L \left[\frac{p_I I}{g_I + I} - K_L M - uL - qT \right], \quad (8.4.3)$$

$$\frac{dC}{dt} + \beta C = \alpha_2 - K_C M C, \quad (8.4.4)$$

$$\frac{dM}{dt} + \gamma M = V_M(t), \quad (8.4.5)$$

$$\frac{dI}{dt} + \mu_I I = V_I(t) + wLI + \frac{p_T T}{g_T + T} L, \quad (8.4.6)$$

Рівняння (8.4.1)–(8.4.6) доповнюються початковими додатними умовами

$$T(0) = T_0, \quad N(0) = N_0, \quad L(0) = L_0, \quad C(0) = C_0, \quad M(0) = M_0, \quad I(0) = I_0. \quad (8.4.7)$$

За твердженнями авторів публікацій стосовно цієї проблеми пошук розв'язку системи шести нелінійних рівнянь із шістьма змінними практично не може бути реалізовано і розглядається тільки перше рівняння цієї системи відносно густини пухлинних клітин, і щоб таким чином отримати уявлення про певні динамічні характеристики, такі як можлива кількість точок рівноваги у системі. Весь аналіз не залежить від конкретного вибору значень параметрів.

Розв'язання рівнянь динаміки

Поставимо задачу відшукування розв'язку цієї системи рівнянь числово-аналітичним методом, підґрунтям якого є побудова ітераційної процедури на основі використання інтегрального перетворення Лапласа.

Перепишемо систему рівнянь (8.4.1)–(8.4.6), відокремивши лінійні та нелінійні складові.

$$\frac{dT}{dt} - aT = N_T(t); \quad (8.4.8)$$

$$N_T(t) = -T[abT + c_1 N + D + K_T M]; \quad (8.4.9)$$

$$\frac{dN}{dt} + e_N N = \alpha_1 + N_N(t); \quad e_N = f - g; \quad (8.4.10)$$

$$N_N(t) = -N(t)[p_1 T + K_N M], \quad (8.4.11)$$

$$\frac{dL}{dt} + e_L L = V_L(t) + N_L(t), \quad e_L = m - p_I; \quad (8.4.12)$$

$$N_L(t) = -L(uL + qT + K_L M) + r_L CT; \quad (8.4.13)$$

$$\frac{dI}{dt} + \mu_I I = V_I(t) + N_I(t), \quad (8.4.14)$$

$$N_I(t) = L[wI + p_T]; \quad (8.4.15)$$

$$\frac{dC}{dt} + \beta C = \alpha_2 - K_C MC, \quad (8.4.16)$$

$$\frac{dM}{dt} + \gamma M = V_M(t), \quad (8.4.17)$$

Запровадимо безрозмірні змінні, тобто виконаємо масштабування задачі.

$$x_1 = T(t)/T_0; \quad x_2 = N(t)/N_0; \quad x_3 = L(t)/L_0;$$

$$x_4 = I(t)/I0; x_5 = C(t)/C0; x_6 = M(t)/M0.$$

Замість системи рівнянь (8.4.8)—(8.4.17) отримуємо:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} - ax_1 &= N_{x_1}(t); \\ N_{x_1}(t) &= -x_1(t)[d_0/2x_1(t) + d_1x_2(t) + d_2x_6(t)]; \end{aligned} \quad (8.4.18)$$

$$\begin{aligned} \frac{dx_2}{dt} + e_N x_2 &= \alpha_1 + N_{x_2}(t); \\ N_{x_2}(t) &= -x_2(t)[d_3x_1(t) + d_4x_6(t)]; \end{aligned} \quad (8.4.19)$$

$$\begin{aligned} \frac{dx_3}{dt} + e_L x_3 &= \frac{1}{L0} V_L(t) + N_{x_3}(t); \\ N_{x_3}(t) &= -x_3(t)[d_5x_3(t) + d_6x_1(t) + d_7x_6(t)] + d_8x_1(t)x_5(t); \end{aligned} \quad (8.4.20)$$

$$\frac{dx_4}{dt} + \mu_I x_4 = \frac{1}{I0} V_I(t) + N_{x_4}(t); \quad N_{x_4}(t) = x_3(t)[d_9 + d_{10}x_4(t)]; \quad (8.4.21)$$

$$\frac{dx_5}{dt} + \beta x_5 = d_{11} + N_{x_5}; \quad N_{x_5} = -d_{12}x_6(t)x_5(t); \quad (8.4.22)$$

$$\frac{dx_6}{dt} + \gamma x_6 = \frac{1}{M0} V_M(t). \quad (8.4.23)$$

Коефіцієнти d_k дорівнюють:

$$\begin{aligned} d_0 &= 2a \cdot bT0, d_1 = c_1N0, d_2 = K_T M0; d_3 = p_1T0, \\ d_4 &= K_N M0; d_5 = (dp/s) \cdot (L0/T0); \\ d_6 &= qT0, d_7 = K_L M0, d_8 = r_2C0 \cdot T0/L0; d_9 = p_T L0/I0, d_{10} = w \cdot L0/I0; \\ d_{11} &= \alpha_2/C0, d_{12} = K_C M0. \end{aligned}$$

Початкові умови для цієї системи рівнянь (після масштабування):

$$x_k(0) = 1, \quad k = \overline{1, 6}. \quad (8.4.24)$$

Рівняння (8.4.18)—(8.4.23) можна записати у такому вигляді

$$\frac{dx}{dt} + sl \cdot x(t) = d + \mathbb{N}_x(x). \quad (8.4.25)$$

де вектор d — праві частини лінійних частин рівнянь, $\mathbb{N}_x$ — нелінійні частини рівнянь.

Загальна схема розв'язання наведеної системи нелінійних рівнянь полягає у такому.

Згідно із загальною методикою побудови ітераційних процедур розв'язання нелінійних рівнянь на першому етапі відокремлюється лінійна частина рівняння, тобто

$$\frac{dx}{dt} + sl \cdot x(t) = d \quad (8.4.26)$$

із початковими умовами (8.4.24). Розв'язок векторного рівняння (8.4.26) (задача Коші) запишемо у загальному вигляді як

$$x^{(0)}(p) = \frac{q_0}{p} + \frac{1-q_0}{p+sl}, \quad (8.4.27)$$

або у просторі оригіналів:

$$x^{(0)}(t) = q_0 + q_1 e^{-slt}. \quad (8.4.28)$$

Застосуємо до векторного рівняння (8.4.26) перетворення Лапласа і побудуємо ітераційний процес

$$x^{(m)}(p) = \mathcal{L}\{x^{(0)}(t)\} \left(= \frac{q_0}{p} + \frac{1-q_0}{p+sl} \right) + \frac{1}{p+sl} \mathcal{L}_t\{N_x(x^{(m-1)}(t))\}. \quad (8.4.29)$$

На першій ітерації

$$x^{(1)}(p) = \mathcal{L}\{x^{(0)}(t)\} + \frac{1}{p+sl} \mathcal{L}_t\{N_x(x^{(0)}(t))\}. \quad (8.4.30)$$

Згідно зі схемою (8.4.30) треба відшукати вираз для $\mathcal{L}_t\{N_x(x^{(0)}(t))\}$ шляхом заміщення у нелінійну частину отриманих виразів для $x^{(0)}(t)$ (8.4.30). Ця задача вирішується за допомогою відповідного програмного модуля. У результаті виконаних перетворень із застосуванням алгоритмів еквівалентного спрощення виразів у просторі зображень матимемо

$$\mathcal{L}_t\{N_x(x^{(0)}(t))\} = \frac{b_0}{p} + \frac{b_1 + b_2(p + b_4)}{(p + b_4)^2 \pm b_5^2},$$

або у просторі оригіналів:

$$N_x(x^{(0)}(t)) = b_0 + e^{-b_4 t} (b_1 f_1(b_5 t) + b_2 f_2(b_5 t)),$$

де f_1, f_2 – тригонометричні або гіперболічні функції залежно від знаку $b_3 = \pm 1$

Щоб отримати вираз для шуканих функцій $x_k(t)$, $k = \overline{1, 6}$, треба обчислити інтеграл згортки

$$N_t = \int_0^t e^{-sl(t-\tau)} N_x[x^{(0)}(\tau)] d\tau.$$

Після деяких нескладних перетворень отримуємо вирази для шуканих змінних у просторі оригіналів

$$x^{(1)}(t) = a_0 + e^{-a_4 t} (a_1 f_1(a_5 t) + a_2 f_2(a_5 t)),$$

На другій ітерації у вирази для нелінійних складових системи рівнянь) заміщуємо $x^{(1)}(t)$ і виконуємо аналогічні дії.

Оцінка опохибки триманого розв'язку здійснюється за простою нерівністю

$$\|x^{(m)}(t) - x^{(m-1)}(t)\| < \varepsilon \quad (8.4.31)$$

Ми виконали одну ітерацію, щоб продемонструвати підхід до розв'язання систем нелінійних диференціальних рівнянь із початковими умовами. Подальші ітерації принципіально не відрізняються від наведеного алгоритму і виконуються для визначених

форм захворювання.

Розв'язання системи рівнянь (8.4.18)–(8.4.23) виконано для випадку, коли процеси у системі здійснюються без оптимізації доз лікувальних препаратів.

Результати моделювання системи диференціальних рівнянь (8.4.18)–(8.4.23) наведені на рис. 8.1, 8.2,

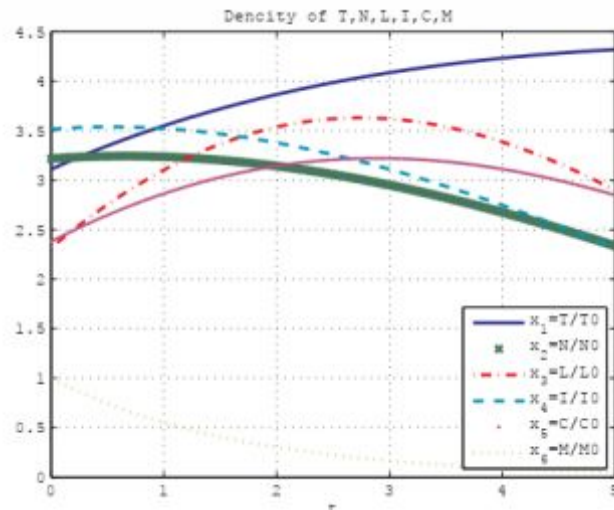


Рис. 8.1. Результати моделювання системи рівнянь (8.4.18)–(8.4.23) після першої ітерації

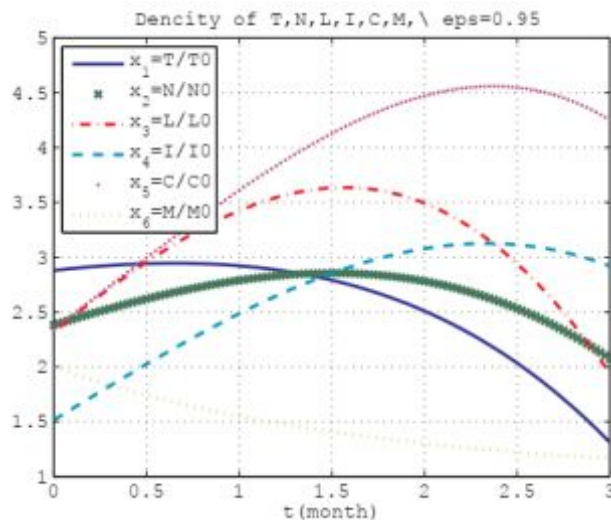


Рис. 8.2. Результати моделювання системи рівнянь (8.4.18)–(8.4.23) після другої ітерації

Моделювання системи рівнянь динаміки виконано для двох ітерацій. Хоча похибка перших наближень перевищує бажане значення, ми не наводимо результати наступних ітерацій, які отримуються за аналогічним алгоритмом.

8.4.3 Алгоритм оптимального керування

Для вирішення задачі оптимального динамічними процесами сформулюємо критерій якості керування, тобто функціонал, що підлягає мінімізації (максимізації). Використовуються, в основному, два підходи до формулювання функціоналу. Перший ґрунтується на квадратичному функціоналі, що враховує динаміку системи керування (тобто рівняння стану)

$$J(x, u) = x(t_f)F x^T(t_f) + \int_0^{t_f} [x(t)Q x^T(t) + u R u^T(t)] dt.$$

Другий підхід ґрунтується на використанні принципу максимуму Понтрягіна, який полягає у формуванні лагранжіану

$$\mathcal{L} = H + \sum_{i=1}^l w_i u_i(t).$$

Тут w – приєднані параметри лагранжіану, u – керуючі впливи.

Отримаємо необхідні умови для оптимального керування мінімізації розміру пухлини з часом, а також мінімізації кількості введених ліків. Ми мінімізуємо дози ліків, оскільки припускаємо, що токсичні побічні ефекти викликають занепокоєння, і чим менша доза, тим краще. Ми мінімізуємо функціонал у формі, яка відображає потрібний компроміс для мінімізації як розміру пухлини, так і дози ліків:

$$J(V_L, V_I, V_M) = \int_0^{t_f} \left[T(t) + \frac{c_L}{2} V_L^2(t) + \frac{c_I}{2} V_I^2(t) + \frac{c_M}{2} V_M^2(t) \right] dt. \quad (8.4.32)$$

Для зручності позначимо $V(t) = [V_L(t), V_I(t), V_M(t)]$.

Необхідні умови оптимальності

Лагранжіан:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = H &+ w_1(t)V_L(t) - w_2(t)(1 - V_L(t)) + w_3(t)V_M(t) \\ &- w_4(t)(1 - V_M(t)) - w_5(t)V_I(t) - w_6(t)(1 - V_I(t)). \end{aligned}$$

Гамільтоніан:

$$\mathcal{H} = \mathcal{L} + \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k(t),$$

де $\lambda_k(t)$ – приєднані множники Лагранжа.

Отже, система оптимального керування складається із n рівнянь стану $x_k(t)$ та n рівнянь відносно множників Лагранжа $\lambda_k(t)$. Допоміжні множники Лагранжа після вирішення задачі мінімізації гамільтоніану видаляються із розв'язку.

Оскільки квадратичний критерій якості пристосований до вирішення лінійних задач, до його застосування необхідно лінеаризувати систему рівнянь стану в околі стаціонарного стану, розв'язати отриману систему алгебраїчних рівнянь і таким чином отримати

наближення до лінійної системи рівнянь стану із подальшим застосуванням квадратичного критерія якості.

Тому, як і у більшості літературних джерел, для вирішення задачі оптимального керування нелінійними рівняннями динаміки будемо використовувати критерій, що ґрунтується на принципі максимуму Понтрягіна.

Для системи рівнянь (8.4.18)–(8.4.23) гамільтоніан записується у такому вигляді.

$$\begin{aligned} H = & x_1(t) + \frac{1}{2} [c_L V_L^2(t) + c_I V_I^2(t) + c_M V_M^2(t)] \\ & + \lambda_1 [ax_1(t) - x_1(t)[d_0/2x_1(t) + d_1x_2(t) + d_2x_6(t)]] \\ & + \lambda_2 [\alpha_1 - e_N x_2(t) - x_2(t)[d_3x_1(t) + d_4x_6(t)]] \\ & + \lambda_3 [-e_L x_3(t) - x_3(t)[d_5x_3(t) + d_6x_1(t) + d_7x_6(t)] + d_8x_1(t)x_5(t)] \\ & + \lambda_4 [-\mu_I x_4(t) + x_3(t)(d_9 + d_{10}x_4(t))] \\ & + \lambda_5 [d_{11} - \beta x_5(t) - d_{12}x_6(t)x_5(t)] + \lambda_6 [-\gamma x_6 + \frac{1}{M0} V_M(t)]. \end{aligned}$$

$w_i(t) \geq 0$ – штрафні функції:

$$\begin{aligned} w_1(t)V_L(t) = 0, \quad w_2(t)(1-V_L(t)) = 0 \text{ коли } V_L(t) = V_L^*(t); \\ w_3(t)V_M(t) = 0, \quad w_4(t)(1-V_M(t)) = 0 \text{ коли } V_M(t) = V_M^*(t); \\ w_5(t)V_I(t) = 0, \quad w_6(t)(1-V_I(t)) = 0 \text{ коли } V_I(t) = V_I^*(t); \end{aligned}$$

Запровадимо Лагранжіан

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & H + w_1(t)V_L(t) - w_2(t)(1-V_L(t)) - w_3(t)V_M(t) \\ & - w_4(t)(1-V_M(t)) - w_5(t)V_I(t) - w_6(t)(1-V_I(t)). \end{aligned} \quad (8.4.33)$$

Функціонал мінімізуємо у формі, яка відображає потрібний компроміс для мінімізації як розміру пухлини, так і дози ліків:

$$J(V_L, V_I, V_M) = \int_0^{t_f} \left[T(t) + \frac{c_L}{2} V_L^2(t) + \frac{c_I}{2} V_I^2(t) + \frac{c_M}{2} V_M^2(t) \right] dt. \quad (8.4.34)$$

Оскільки задача оптимального керування сформульована у зворотному часі (із урахуванням умов трансверсальності), запровадимо заміну $\tau = t_f - t$.

Враховуючи оптимальну трійку керування,

$$V(t_f - \tau) = (V_L^*(t_f - \tau), V_I^*(t_f - \tau), V_M^*(t_f - \tau))$$

розв'язків відповідної системи стану, існують приєднані змінні λ_i , $i = \overline{1,6}$, що задовольняють:

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda_i}{d\tau} &= -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} \\ &= [1 + \lambda_1 [a - d_0x_1(t_f - \tau) - d_1x_2(t_f - \tau) - d_5x_3(t_f - \tau) - d_2x_6(t_f - \tau)]] \end{aligned}$$

$$+\lambda_2 d_3 x_2(t_f - \tau) - \lambda_3 [-d_6 x_3(t_f - \tau) + d_8 x_5(t_f - \tau)] + \lambda_4 d_9 x_3(t_f - \tau)]; \quad (8.4.35)$$

$$\frac{d\lambda_2}{d\tau} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = -\lambda_1 d_1 x_1(t_f - \tau) + \lambda_2 [-e_N - d_3 x_1(t_f - \tau) - d_4 x_6(t_f - \tau)]; \quad (8.4.36)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda_3}{d\tau} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_3} = & -\lambda_1 d_5 x_1(t_f - \tau) - \lambda_3 [e_L + d_6 x_1(t_f - \tau) \\ & + d_7 x_6(t_f - \tau)] + \lambda_4 (d_9 + d_{10} x_4(t_f - \tau)); \end{aligned} \quad (8.4.37)$$

$$\frac{d\lambda_4}{d\tau} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_4} = \lambda_3 d_{10} x_3(t_f - \tau) + \lambda_4 (d_{10} x_3(t_f - \tau) - \mu_I) \quad (8.4.38)$$

$$\frac{d\lambda_5}{d\tau} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_5} = -\beta \lambda_5 + \lambda_3 d_8 x_1(t_f - \tau) + \lambda_5 [\beta + d_{13} x_6(t_f - \tau)]; \quad (8.4.39)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda_6}{d\tau} = & -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial M} \\ = & -[\lambda_1 d_2 x_1(t_f - \tau) + \lambda_2 d_4 x_2(t_f - \tau) + \lambda_3 d_7 x_3(t_f - \tau) + \lambda_5 d_{13} x_5(t_f - \tau) + \gamma \lambda_6], \end{aligned} \quad (8.4.40)$$

де $\lambda_i(0) = 0$, $i = \overline{1, 6}$.

Перетворення $x_k(t_f - \tau)$ відносно змінної τ дає такі вирази:

$$\begin{aligned} x_k^{(1)}(t_f - \tau) &= e^{b_4^{(k)}(t_f - \tau)} [b_1^{(k)} q_1(b_5^{(k)}(t_f - \tau)) + b_2^{(k)} q_2(b_5^{(k)}(t_f - \tau))] \\ &= \bar{x}_k^{(1)}(\tau) = c_0^{(k)} (= b_0^{(k)}) + e^{c_4^{(k)} \tau} [c_1^{(k)} q_1(c_5^{(k)} \tau) + c_2^{(k)} q_2(c_5^{(k)} \tau)], \end{aligned} \quad (8.4.41)$$

$$\begin{aligned} c_1^{(k)} &= e^{-b_4^{(k)} t_f} [-b_1^{(k)} q_2(b_5^{(k)} t_f) + b_3^{(k)} \cdot b_2^{(k)} q_1(b_5^{(k)} t_f)], \\ c_2^{(k)} &= e^{-b_4^{(k)} t_f} [b_1^{(k)} q_1(b_5^{(k)} t_f) + b_2^{(k)} q_2(b_5^{(k)} t_f)]; \quad c_4^{(k)} = -b_4^{(k)}, \quad c_5^{(k)} = b_5^{(k)}. \end{aligned}$$

За аналогічним алгоритмом перетворюється решта функцій. Після реалізації ітераційної процедури пошуку наближених розв'язків системи рівнянь (8.4.35)–(8.4.40) отримуємо вирази (8.4.41) із такими коефіцієнтами:

$$\bar{x}_k^{(1)}(\tau) = \begin{bmatrix} 0,9939 & 0,01998 & -0,329 & 1 & 0,3344 & 0,2657 \\ 1,269 & -0,099 & 0,1467 & 1 & 0,307 & 0,1265 \\ -0,0054 & 0,016 & -0,0257 & 1 & 0,3219 & 0,1072 \\ -0,4638 & -0,1786 & 0,1607 & 1 & 0,1969 & 0,09563 \\ 0,01 & 0,0064 & -0,0015 & -1 & 0,612 & 0,08485 \\ 0 & 0,04979 & 0,04979 & 1 & 0 & 0,7746 \end{bmatrix} \quad (8.4.42)$$

Система рівнянь (8.4.35)–(8.4.40) набуває вигляд

$$\frac{d\lambda_1}{d\tau} + sl_1 \lambda_1 = 1 + S_{\lambda_1}^{(0)}(\lambda(\tau))$$

$$= -\lambda_1 \left[d_0 \bar{x}_1(\tau) + d_1 \bar{x}_2(\tau) + d_5 \frac{x_3^2(\tau)}{(s1x_1^2(\tau) + x_3(\tau))^2} + d_2 \bar{x}_6(\tau) \right] + \lambda_2 d_3 \bar{x}_2(\tau) + \lambda_3 [-d_6 \bar{x}_3(\tau) + d_8 \bar{x}_5(\tau)] - \lambda_4 d_9 \bar{x}_3(\tau); \quad (8.4.43)$$

$$\frac{d\lambda_2}{d\tau} + sl_2 \lambda_2 = S_{\lambda_2}^{(0)}(\lambda(\tau)) = -\lambda_1 d_1 \bar{x}_1(\tau) - \lambda_2 [d_3 \bar{x}_1(\tau) + d_4 \bar{x}_6(\tau)]; \quad (8.4.44)$$

$$\frac{d\lambda_3}{d\tau} + sl_3 \lambda_3 = S_{\lambda_3}^{(0)}(\lambda(\tau)) = -\lambda_1 d_5 \frac{s1 \cdot x_1^2(\tau)}{(s1x_1^2(\tau) + x_3(\tau))^2} - \lambda_3 [d_6 \bar{x}_1(\tau) + d_7 \bar{x}_6(\tau)] + \lambda_4 d_{10} \bar{x}_4(\tau); \quad (8.4.45)$$

$$\frac{d\lambda_4}{d\tau} + sl_4 \lambda_4 = S_{\lambda_4}^{(0)}(\lambda(\tau)) = \lambda_3 d_9 \bar{x}_3(\tau) + \lambda_4 d_{10} \bar{x}_3(\tau) \quad (8.4.46)$$

$$\frac{d\lambda_5}{d\tau} + sl_5 \lambda_5 = S_{\lambda_5}^{(0)}(\lambda(\tau)) = \lambda_3 d_8 \bar{x}_1(\tau) + \lambda_5 d_{13} \bar{x}_6(\tau); \quad (8.4.47)$$

$$\frac{d\lambda_6}{d\tau} + \gamma \lambda_6 = S_{\lambda_6}^{(0)}(\lambda(\tau)) = -[\lambda_1 d_2 \bar{x}_1(\tau) + \lambda_2 d_4 \bar{x}_2(\tau) + \lambda_3 d_7 \bar{x}_3(\tau) + \lambda_5 d_{13} \bar{x}_5(\tau)], \quad (8.4.48)$$

із початковими умовами $\lambda_i(0) = 0$, $i = \overline{1, 6}$.

$$sl_1 = d_0 c_0^{(1)} + d_1 c_0^{(2)} + d_2 c_0^{(6)} - a; \quad sl_2 = e_N + d_3 c_0^{(1)} + d_4 c_0^{(6)}; \\ sl_3 = e_L + d_6 c_0^{(1)} + d_7 c_0^{(6)}; \quad sl_4 = \mu_I + d_9; \quad sl_5 = \beta - d_{13} c_0^{(6)}. \quad sl_6 = \gamma. \quad (8.4.49)$$

Алгоритм розв'язання

Ця система диференціальних рівнянь нестационарна й її розв'язання пов'язане з такими самими проблемами, що і система рівнянь динаміки. Тому застосуємо для її розв'язання також ітераційний метод.

Маємо:

$$\lambda_1^{(0)}(\tau) = \frac{1}{sl_1} (1 - e^{-sl_1 \tau}).$$

Решта $\lambda_k^{(0)}(\tau) = 0$, $k = \overline{2, 6}$, оскільки початкові умови для стаціонарних частин системи рівнянь дорівнюють нулю (умови трансверсальності).

Згідно з ітераційною схемою маємо у просторі зображень:

$$\bar{\lambda}_k^{(1)}(p) = \bar{\lambda}_k^{(0)}(p) + \frac{1}{p + sl_k} \mathcal{L} \left[S_{x_k}^{(0)}(t) \right].$$

Зокрема,

$$\bar{\lambda}_3^{(1)}(p) = -d_5 \frac{1}{p + sl_3} \bar{\lambda}_1^{(1)}(p).$$

Після виконання відповідних перетворень, аналогічних перетворенням, що

виконано для отримання розв'язків системи рівнянь динаміки, матимемо:

$$\bar{\lambda}_k^{(1)}(\tau) = bl_0^k + e^{-bl_4^k t} \left[bl_1^k q_1(bl_5^k t) + bl_2^k q_2(bl_5^k t) \right].$$

Коефіцієнти bl_j^k обчислюються реалізацією відповідних програмних кодів.

Умови трансверсальності надають термінальні умови для кожної з приєднаних змінних і

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial V_L} &= \frac{c_L}{L0} V_L(t) + \lambda_3 = 0, \rightarrow V_L^* = -\lambda_3 L0 / c_L; \\ \frac{\partial H}{\partial V_I} &= \frac{c_I}{I0} V_I(t) + \lambda_4 = 0, \rightarrow V_I^* = -\lambda_4 I0 / c_I; \\ \frac{\partial H}{\partial V_M} &= \frac{c_M}{M0} V_M(t) + \lambda_6 = 0, \rightarrow V_M^* = -\lambda_6 M0 / c_M. \end{aligned}$$

$V_L^*(t), V_I^*(t), V_M^*(t)$ можна подати як

$$\begin{aligned} V_L^* &= \min \left[1, \left(\frac{-\lambda_3 L0}{c_L} \right)^+ \right]; \\ V_M^* &= \min \left[1, \left(\frac{-\lambda_6 M0}{c_M} \right)^+ \right]; \\ V_I^* &= \min \left[1, \left(\frac{-\lambda_4 I0}{c_I} \right)^+ \right]; \end{aligned}$$

де $r^+ = 1(r) \cdot r$.

У результаті реалізації описаного алгоритму оптимального керування отримано оптимальні траєкторії допоміжних функцій $\lambda_k(t)$, за допомогою яких визначаються оптимальні дози лікарських препаратів V_M^* , V_L^* , V_I^* .

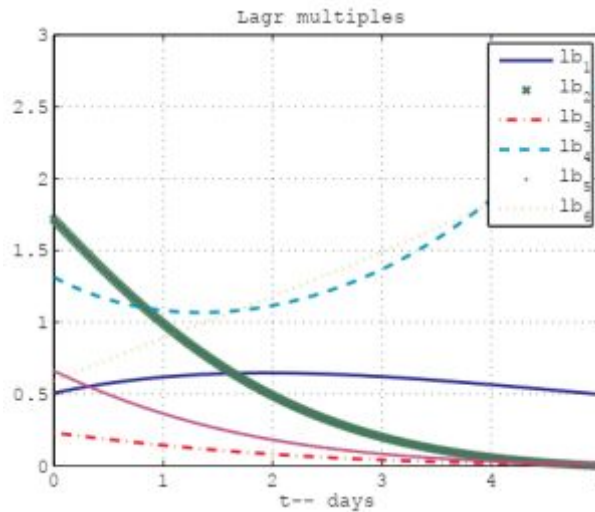


Рис. 8.3. Результати моделювання системи рівнянь (8.50)–(8.55) після другої ітерації

На рис. 8.3 наведено графіки траєкторій множників Лагранжа. Ми не наводимо графіки оптимальних доз лікування, оскільки ці функції лінійно залежать від відповідних множників Лагранжа.

Наприклад, керування V_M^* показує, що кандидат на оптимальний курс хімієтерапії набагато складніший за поточний стандарт схеми лікування, які проводяться у клініці. Ці стандартні режими, як правило, дотримуються шаблону із кількох днів увімкнення, потім кількох вихідних, залежно від того, яку кількість ліків може перенести пацієнт, і чи перервуть лікування вихідні. Однак оптимальним режимом, згідно з нашим аналізом, був би не тільки залежність від часу, але його буде додатково модифіковано як функцію сили та активності усіх чотирьох популяцій клітин у моделі.

Завдання для самостійної роботи

Запитання для самоперевірки

1. У чому полягає принцип максимуму Понтрягіна?
2. Наведіть вираз для функції Лагранжа.
3. Наведіть вираз для функціоналу якості, що застосовується для програмного керування.
4. У чому полягає різниця між програмним керуванням та керуванням за принципом зворотного зв'язку?
5. У чому полягає сутність ітераційного підходу до розв'язання систем нелінійних ЗДР?

Бібліографічний список

Базова література:

1. Андерсон Д. Вычислительная гидромеханика и теплообмен / Д. Андерсон , Дж. Таннехилл, Р. Плеттиер; Пер. с англ. в 2 т.—Мир. . —1990.—728 с.
2. Зеленський К.Х. Комп'ютерні методи прикладної математики/ К. Х. Зеленський, В. М. Ігнатенко, О. П. Коц.—Київ: Академперіодика, .—2003.—560 с.
3. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. / С. Г. Михлин.—1970.—513 с.
4. Моделювання систем, навч посіб [для студентів ВНЗ] Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського [Електронний ресурс]: /упоряд. К. Х. Зеленський, Є. А. Настенко., В. А. Павлов, – Електронні текстові дані (1 файл: 3 670 Мбайт). – Київ: 2022.—361 с.
5. Моделювання систем. Практикум, навч посіб [для студентів ВНЗ] Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського [Електронний ресурс]: /упоряд. –К. Х. Зеленський, К. С. Бовсуновська, – Електронні текстові дані (1 файл: 22,34 Мбайт). – Київ: 2022.—78 с.
6. Моисеев Н.Н. Асимптотические методы нелинейной механики,/ Н. Н. Моисеев.—1983.—423 с.
7. Ректорис К. Вариационные методы в математической физике и технике/ К. Ректорис— Мир.—1985 – 346 с.
8. Рид М., Саймон Б. Методі математическої фізики /М. Рид., Б. Саймон, Том 1 – Мир.—1977.—358 с.
9. Флетчер К. Численные методы на основе метода Галеркина. / К. Флетчер— Мир.—1988.—287 с.

Додаткова література:

10. Андерсон Д. Вычислительная гидромеханика и теплообмен/ Д. Андерсон , Дж. Таннехилл, Р. Плеттиер; Пер. с англ. в 2 т. – Мир, 1990 – 728 с.
11. Зеленський К.Х. Mathematical modeling of of vaccination effects to the antiviral immune response./К. Х. Зеленський, Д. Кузьменко //Modern engineering and innovative technologies. –2022.—Issue 20/Part 1,—pp. 67–75. : DOI:10.30890/2567-5273-2022-20-01-036.
12. Зеленський К.Х. Modeling the dynamics of hepatitis C with combined treatment./ К. Х. Зеленський, В. М. Парулін // SWorldJournal—Issue16, 2022. – р. 23–29. DOI: 10.30888/2663-5712-2022-16-01-035
13. Зеленський К.Х. Mathematical modeling of infectious disease/ К. Х. Зеленський, Я. В. Фомін, С. В. Кочкарев //Научный взгляд в будущее.— 2021.—Вип. 23.—С. 31–38. DOI: 10.30888/2115-7538.2021-23-01-002.
14. Зеленський К.Х. Mathematical modeling of hiv with delay/ К. Х. Зеленський, Є. Г. Самоловов //Modern engineering and innovative technologies.—2022.—Issue 24.—pp. 119–124.

- DOI: 10.30890/2567-5273-2022-24-02-014.
15. Alzahrani T. Multiscale Modelling of Cancer Response to Oncolytic Viral Therapy, /T. Alzahrani, R. Eftimie, D. Trucu // Mathematical Biosciences, 2019.— 22 p.
 16. Chaplain M. Mathematical modelling of cancer cell invasion of tissue: the role of the urokinase plasminogen activation system, /M. Chaplain, G. Lolas// Math. Model. Meth. Appl. Sci.—2005.— 15 (11).— pp. 1685–1734.
 17. De Pillis L. Optimal Control of mixed immunotherapy and chemotherapy of tumor. /L. De Pillis, K. Fister, W. Gu //Journal of Biological Systems, 2009.— 16(1).— p. 51–80.
 18. Diabate B. Optimal control analysis of a COVID-19 and Tuberculosis (TB) co-infection model with an imperfect vaccine for COVID-19 / B. Diabate, O. Sangare, O. Koutou //SeMA Journal.—2023.—38.P.
DOI: /10.1007/s40324-023-00330-8
 19. Hao W. The role of exosomes in pancreatic cancer microenvironment. / W. Hao, A. Friedman // Bull Math Biol.— 2017.—pp. 1–23.
 20. Hethcote H, The mathematics of infectious diseases / H. Hethcote //SIAM Rev., 42, –2000.—pp. 599–653.
 21. Gao N. Optimal Control Analysis of a Tuberculosis Model,/N. Gao, S. Huang //Appl. Math. Model.—2018.—вип.. 23.—pp. 47–64.
 22. Gollmann L. Theory and applications of optimal control problems with multiple time-delays, Special Issue on Computational Methods for Optimization and Control, / I. Gollmann, H. Maurer // J. Ind. Manag. Optim., 2014.—№ 10.—pp. 413–441.
 23. Hethcote H. The mathematics of infectious diseases, / H. Hethcote //SIAM Rev.— 2000.—№10.—pp. 599–653.
 24. Knodel M. Multigrid analysis of spatially resolved hepatitis C virus protein simulations./ M. Knodel, A. Nagel, S. Reiter //Comput. Vis. Sci.—2015. – pp. 235–253.
 25. Marchuk G.I. Mathematical modeling of immune response in infectious diseases. / G. Marchuk.– Dordrecht: Springer Science & Business Media, 2013.—350 P
 26. Monfared M.The Application of Power Series Expansion to Optimal Control of an Immune-Oncology Nonlinear Dynamic Problem / M. Monfared, A. Fakharian, M. Menhaj.//AUT J. Model. Simul.— 2020.— 52(1). – pp. 117–128.
 27. Lai X. Combination therapy of cancer with braf inhibitor and immune checkpoint inhibitor: A mathematical model, / X. Lai, A. Friedman // BMC System Biology.—2017.— 11 (70).—pp. 1–18.
 28. Peng L. A multiscale mathematical model of tumour invasive growth, / L. Peng, D. Trucu, M. Chaplain //Bulletin of Mathematical Biology.—2017. – 79 (3).—pp. 389–429.

29. Pitchaimani M. Global stability analysis of HIV-1 infection model with three time delays. / M. Pitchaimani, C. Monica // J. Appl. Math. Comput., 2015.
30. — V. 48.—pp. 293–319.
31. The Mathematical Theory of Optimal Process./L. Pontryagin, V. Boltyanskii, R. Gamkrelidze, E. Mishchenko//Gordon and Breach, New York, 1962—460
32. Silva C. Optimal control of a tuberculosis model with state and control delays./ C. Silva, H. Maurer, D. Torres //Mathematical biosciences and engineering.—2017.—V.14, N.1.— pp. 321–337.
DOI:10.3934/mbe.2017021
33. Sharma S. Analysis of the dynamics of a tumor-immune system with chemotherapy and immunotherapy and quadratic optimal control./ S. Sharma, G. Samanta //Differential Equation Dynamical System.—2016. — 24(2).—pp. 149-171. DOI: 10.1007/s12591-015-0250-1
34. Шуи Т.Е. Прикладные численные методы в физике и технике./ Т. Е. Шуи . Пер. с англ. М.:Высшая школа.—1990.—256 с.
35. Jarrar. Complex Adapt Syst Model (2020) 8:3
36. <https://doi.org/10.1186/s40294-020-0069-7>
37. Yusuf T. Optimal control strategy for improved cancer biochemotherapy outcome./ T. Yusuf // International Journal of Scientific and Engineering Research, 2018.—V. 9, Issue 12.—pp. 583 –602.

Додатки

А Метричні простори

А.1 Поняття метричного простору

Нехай X – довільна множина, а $\rho : X \times X \rightarrow \mathcal{R}$ – відображення декартова добутку $X \times X$ у множину $\mathcal{R}$ дійсних чисел. Відображення ρ називається метрикою на X , якщо воно задовольняє такі умови (аксіоми метрики):

- $\rho(x, y) \geq 0$; $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (аксіома тотожності);
- $\rho(x, y) = \rho(y, x)$, $\forall x, y \in X$ (аксіома симетрії);
- $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$, $\forall x, y, z \in X$ (аксіома трикутника).

Множина X разом із заданою у ній метрикою ρ , називається *метричним простором*, елементи $x, y, z, \dots \in X$ – точками цього простору, а число $\rho(x, y)$ – відстанню між точками x та y .

Оскільки в одній й тій самій множині X часто можна задавати різні метрики ρ , щоб розрізняти простори, які при цьому отримуються, іноді запроваджують позначення (X, ρ) .

Множина Y із метричного простору X із тією самою відстанню між елементами, що й в X , також є метричний простір. Вона називається підпростором простору X .

Відстанню між двома множинами M і N метричного простору X називається число

$$\rho(M, N) = \inf_{\substack{x \in M \\ y \in N}} \rho(x, y).$$

Якщо одна із цих множин, наприклад N , складається із однієї точки a , отримуємо відстань $\rho(a, M)$ від точки до множини M , що визначається формулою

$$\rho(a, M) = \inf_{x \in M} \rho(a, x).$$

Нехай на множині X визначені метрики $\rho_1(x, y)$ і $\rho_2(x, y)$. Вони називаються еквівалентними, якщо для довільної послідовності $\{x_n\} \subset X$ із того, що $\rho_1(x_n, x) \rightarrow 0$ ($x \in X$), випливає $\rho_2(x_n, x) \rightarrow 0$ і навпаки. Для еквівалентності метрик ρ_1 і ρ_2 досить існування таких додатних сталих c_1, c_2 , що

$$c_1 \rho_1(x, y) \leq \rho_2(x, y) \leq c_2 \rho_1(x, y).$$

Такі метрики називаються топологічно еквівалентними.

А.2 Відкриті і замкнуті множини. Збіжність у метричному просторі

Нехай $x_0 \in X$ – фіксована точка метричного простору X , а $r > 0$. Сукупність $B(x_0, r)$ тих точок x простору X , які задовольняють умову $\rho(x, x_0) < r$, називається *відкритою кулею*. Точка x_0 називається при цьому *центром*, а r – радіусом кулі. Відкриту кулю радіусу ε із центром x_0 будемо називати *ε -околом точки x_0* . Замкнутою кулею $B[x_0, r]$ у метричному просторі X називається сукупність точок $x \in X$, для яких $\rho(x, x_0) \leq r$.

Сукупність $\overline{M}$ всіх точок, що торкаються до множини M називається *замиканням* цієї множини. Точка $x \in X$ називається *граничною точкою* множини $M \subset X$, якщо у будь-якому її околі міститься нескінченно багато точок із M . Кожна гранична точка множини M є її точкою торкання. Вона може належати множині M , або ні. Якщо точка $x \in M$, й у деякому її околі відсутні точки із M , що відрізняються від x , її називають *ізолюваною точкою* цієї множини.

Замикання $\overline{M}$ множини M складається із точок трьох типів: 1) ізолюваних точок M ; 2) граничних точок множини M , що належать M ; 3) граничних точок множини M , що не належать M .

Множина M , що міститься у метричному просторі X , називається *замкнутою*, якщо $\overline{M} = M$ (тобто воно містить усі свої граничні точки).

Перетин будь-якого числа й об'єднання будь-якого скінченного числа замкнутих множин є замкнута множина.

Точка $x \in M$ називається *внутрішньою точкою* цієї множини, якщо вона належить M разом із деяким своїм околом. Їхня сукупність позначається через M^0 .

Точка $x_0 \in X$ називається *межовою точкою* множини $M \subset X$, якщо у довільному її околі містяться як точки із M , так і точки, що множині M не належать. Сукупність межових точок множини M позначається через ∂M і називається *межею* цієї множини. Справджується співвідношення $\overline{M} = M^0 \cup \partial M$.

Множина M називається *обмеженою* у метричному просторі X , якщо вона міститься у деякій кулі.

Нехай $x_1, x_2, \dots$ – послідовність точок метричного простору X . Будемо говорити, що вона збігається до точки x , якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, x) = 0$, тобто $x_n \rightarrow x$ при $n \rightarrow \infty$ або

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$. Це рівносильно тому, що

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : x_n \in B(x, \varepsilon) \text{ для } n > n_0.$$

Нехай M і N – дві множини у метричному просторі X . Множина M називається *щільною* в N , якщо $N \subset \overline{M}$. Множина M називається *скрізь щільною* (у

просторі X), якщо $\overline{M} = X$.

Простори, в яких наявні лічильні всюди щільні множини, називаються *сепарабельними*.

А.3 Приклади метричних просторів

1. *Простір ізольованих точок* (або дискретний метричний простір) – це довільна множина, для якої

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y, \\ 1, & x \neq y. \end{cases}$$

2. *Евклідовий простір* $\mathcal{R}^n$ – це множина упорядкованих наборів із n дійсних чисел $x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ із відстанню

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^n (\eta_k - \xi_k)^2} \quad (y = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)).$$

Аксіома трикутника є тут наслідком відомої із курсу математичного аналізу *нерівності Коші–Буняковського*

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k b_k \right)^2 \leq \sum_{k=1}^n a_k^2 \cdot \sum_{k=1}^n b_k^2 \quad (\forall a_k, b_k \in \mathcal{R}).$$

Іноді замість $(\mathcal{R}^n, \rho)$ розглядають простір $(\mathcal{R}^n, \rho_1)$, де

$$\rho_1(x, y) = \sum_{k=1}^n |\eta_k - \xi_k|,$$

або $(\mathcal{R}^n, \rho_0)$, де

$$\rho_0(x, y) = \max_{1 \leq k \leq n} |\eta_k - \xi_k|.$$

У цих просторах лічильною всюди щільною множиною є, наприклад, сукупність «векторів» із раціональними компонентами. Збіжність у просторі $\mathcal{R}^n$ є збіжність за координатами.

3. *Простір m усіх обмежених послідовностей* складається із усіх точок $x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots)$, що

$$\forall x \exists K_x = \text{const} : |\xi_k| \leq K_x \quad (i = 1, 2, \dots).$$

Тут $\rho(x, y) = \sup_i |\xi_i - \eta_i|$, якщо $x = \{\xi_i\}$, $y = \{\eta_i\}$, а збіжність в m – це збіжність за координатами, рівномірна відносно номерів координат. Простір m не є сепарабельний.

4. *Простір c збіжних числових послідовностей* складається із елементів $x = \{\xi_i\}$, для яких існує $\lim_{i \rightarrow \infty} \xi_i = \xi$. якщо покласти

$$\rho(x, y) = \sup_i |\xi_i - \eta_i|,$$

то C – підпростір простору m із тією самою збіжністю (тобто збіжністю за координатами, рівномірною відносно номерів координат). Відзначимо, що підпростір C не сепарабельного простору m уже є сепарабельний.

Сукупність тих $x = \{\xi_i\} \in C$, для яких $\lim_{i \rightarrow \infty} \xi_i = 0$, утворює метричний простір C_0 цього простору.

5. Простір l_p ($p \geq 1$) складається із усіх послідовностей $x = \{\xi_i\}$ дійсних чисел, для яких $\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^p < +\infty$, а відстань у ньому визначається за формулою

$$\rho(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i - \eta_i|^p \right)^{1/p}.$$

Лічильна множина елементів вигляду $(r_1, r_2, \dots, r_n, 0, 0, \dots)$, де r_i – довільні раціональні числа, а n – довільне натуральне число, утворює в l_p всюди щільну множину. Значить, l_p – сепарабельний простір.

6. Простір S усіх числових послідовностей. Метрику у ньому визначає функція

$$\rho(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|\xi_i - \eta_i|}{2/(1 + |\xi_i - \eta_i|)},$$

а збіжність в S – покоординатна (але, взагалі кажучи, нерівномірна відносно номерів координат).

Цей простір є сепарабельний, у якості лічильної всюди щільної у ньому множини можна взяти також множину елементів вигляду $(r_1, r_2, \dots, r_n, 0, 0, \dots)$, де r_i довільні раціональні числа, а n – довільні натуральні числа.

7. Простір $C[a, b]$ усіх неперервних дійсних функцій, що визначені на сегменті $[a, b]$, із відстанню

$$\rho(x, y) = \max_{t \in [a, b]} |x(t) - y(t)|.$$

Простір $C[a, b]$ є сепарабельний, оскільки всюди щільну множину у ньому утворює лічильна сукупність усіх поліномів із раціональними коефіцієнтами. Збіжність у цьому просторі є рівномірна збіжність на відрізку $[a, b]$.

Іноді розглядають і простір $C(-\infty; +\infty)$, елементами якого є неперервні та обмежені на всій числовій осі функції. Відстань у ньому визначається аналогічною формулою

$$\rho(x, y) = \max_{t \in \mathbb{R}} |x(t) - y(t)|.$$

8. Простір $L_p[a, b]$. Розглянемо множину усіх вимірюваних за Лебегом на $[a, b]$ функцій $x(t)$, для яких

$$\int_a^b |x(t)|^p dt < +\infty,$$

і покладемо

$$\rho(x, y) = \left(\int_a^b |x(t) - y(t)|^p dt \right)^{1/p}, (p \geq 1).$$

(Міри Лебега, вимірювані функції розглядаються у наступному розділі).

У цьому просторі функції, що збігаються одна із одною майже всюди, ототожнюються.

Аксіома трикутника випливає із відомої *нерівності Мінковського для інтегралів*

$$\left(\int_a^b |x(t) + y(t)|^p dt \right)^{1/p} \leq \left(\int_a^b |x(t)|^p dt \right)^{1/p} + \left(\int_a^b |y(t)|^p dt \right)^{1/p}, \quad (\text{A.1})$$

а послідовність $\{x_n\} \subset L_p[a, b]$ збігається до $x \in L_p[a, b] \Leftrightarrow$

$$\int_a^b |x_n(t) - x(t)|^p dt \rightarrow 0 \text{ і } n \rightarrow \infty.$$

Ця збіжність називається *збіжністю у середньому* із показником p .

Як й у просторі $C[a, b]$, множина поліномів із раціональними коефіцієнтами є всюди щільна в $L_p[a, b]$, тобто цей простір сепарабельний.

9. *Простір $M[a, b]$ всіх обмежених вимірюваних на $[a, b]$ функцій.*

Нехай $\alpha(t)$ – вимірювана за Лебегом на $[a, b]$ функція. Через $\mathcal{E}$ позначимо клас усіх множин E міри нуль, що містяться в $[a, b]$, і розглянемо на $\mathcal{E}$ таку функцію:

$$\beta(E) = \sup_{[a, b] \setminus E} \alpha(t).$$

Нехай $\beta_0 = \inf_{E \in \mathcal{E}} \beta(E)$. Число β_0 називається *суттєвим максимумом функції $\alpha(t)$ на $[a, b]$* і позначається

$$\text{vrai max}_{[a, b]} \alpha(t) = \min_{E \in \mathcal{E}} \left\{ \sup_{[a, b] \setminus E} \alpha(t) \right\}.$$

Нехай $M[a, b]$ – множина усіх вимірюваних на $[a, b]$ функцій, суттєві максимуми яких є скінченні, причому дві функції із цієї множини вважаються тотожними, якщо вони рівні майже всюди. Покладемо

$$\rho(x, y) = \text{vrai max}_{[a, b]} |x(t) - y(t)|.$$

збіжність в $M[a, b]$ є рівномірна збіжність майже всюди.

10. *Простір $S[a, b]$ збіжності за мірою.* Це – сукупність усіх вимірюваних за Лебегом на $[a, b]$ функцій. Дві функції, що збігаються майже всюди, також вважаються тотожними. Метрика запроваджується рівністю

$$\rho(x, y) = \int_a^b \frac{|x(t) - y(t)|}{1 + |x(t) - y(t)|} dt.$$

збіжність у ньому є збіжність за мірою.

11. Простір A_R складається із усіх однозначних і аналітичних у крузі $|z| < R$ ($0 < R, +\infty$) функцій, а метрика визначається за формулою

$$\rho(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{\max_{|z| < r_n} |x(t) - y(t)|}{1 + \max_{|z| < r_n} |x(t) - y(t)|},$$

де r_n – деяка монотонно зростаюча до R послідовність невід’ємних чисел.

Послідовність $\{x_n\}$ збігається у цьому просторі до x , якщо $x_n(z)$ збігається до $x(z)$ рівномірно на кожній компактній (тобто обмеженій і замкнутій) множині точок круга $|z| < R$.

А.4 Повні простори

Послідовність $\{x_n\}$ елементів метричного простору X називається *фундаментальною* (або збіжною у собі), якщо $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0$ таке, що $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$ за усіх $n, m \geq n_0$.

Якщо у метричному просторі X будь-яка фундаментальна послідовність збігається до елемента даного простору, простір X називається *повним*. Повний метричний простір називають ще простором Фреше.

Якщо метрики ρ_1 та ρ_2 топологічно еквівалентні, простори (X, ρ_1) і (X, ρ_2) одночасно або повні, або ні.

Повертаючись до наведених прикладів метричних просторів, відзначимо, що простори $\mathcal{R}$, $C[a, b]$, m , c , $M_{[a, b]}^p$, $L_{[a, b]}^p$ ($p \geq 1$), l_p ($p \geq 1$), A_R є повні.

А.4.1 Компактні множини

Множина K метричного простору X називається *компактною*, якщо всяка послідовність елементів цієї множини містить збіжну підпослідовність.

Якщо границі указаних послідовностей належать K , множина K називається *компактною у собі* (як відрізок $[a, b]$); якщо ж ці границі належать X , але, можливо, не належать K , K називається *компактною у просторі X* (як інтервал $(a; b)$). Множина K компактна у собі, коли вона компактна в X і є замкнута. Компактний метричний простір називають також *компактом*. Компакт є повний метричний простір.

Теорема (критерій Хаусдорфа). Для компактності множини M метричного простору X необхідно, а у випадку повноти X і достатньо, щоб для будь-якого $\varepsilon > 0$

існувала скінченна ε -мережа для множини M . Компактний простір є сепарабельний.

Компактна множина метричного простору є обмежена.

Теорема (Арцела). Для компактності множини $K \subset C[a, b]$ необхідно і достатньо, щоб функції $x(t) \in K$ були рівномірно обмежені і рівностепенево неперервні.

Рівномірна обмеженість означає існування такої константи $\mu > 0$, що $|x(t)| \leq \mu$ ($t \in [a, b]$) для всіх $x(t) \in K$ (тобто обмеженість множини K у просторі $C[a, b]$), а рівностепенева неперервність означає, що для кожного $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$ таке, що $|x(t_1) - x(t_2)| < \varepsilon$ для будь-яких $t_1, t_2 \in [a, b]$ при $|t_1 - t_2| < \delta$ і для будь-якої функції $x(t) \in K$.

Теорема (критерій Рісса). Множина $K \subset L_p[a, b]$ ($p \geq 1$) є компактна тільки тоді, коли вона обмежена в $L_p[a, b]$ і для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta > 0$, що

$$\int_a^b |x(t+h) - x(t)|^p dt < \varepsilon$$

при $|h| < \delta$.

А.4.2 Принцип відображень, що стискають

Нехай (X, ρ_1) і (Y, ρ_2) , — два метричних простори і f — деяке відображення X в Y , тобто кожному елементу $x \in X$ ставиться у відповідність деякий елемент $y = f(x) \in Y$ (у подальшому такі відображення називаються операторами). Це відображення називається *неперервним у точці* $x_0 \in X$, якщо

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in X : \rho_1(x, x_0) < \delta \Rightarrow \rho_2(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

Якщо відображення f неперервне в усіх точках простору X , його називають *неперервним в X* .

Коли відображення f метричного простору X на простір Y взаємно однозначне, існує зворотне відображення $x = f^{-1}y$ простору Y на X . Якщо f — взаємно неперервне (тобто неперервні f і f^{-1}), воно називається *гомеоморфним відображенням* або гомеоморфізмом, а відповідні простори X і Y гомеоморфними.

Взаємно однозначне відображення f метричного простору (X, ρ_1) на простір (Y, ρ_2) є ізометричне, якщо $\rho_2(f(x_1), f(x_2)) = \rho_1(x_1, x_2)$. Просторам X і Y , між якими можна встановити ізометричне відображення, називаються ізометричними між собою.

Нехай X_c — метричний простір, а A — деяке відображення простору X у себе. Воно називається *стискаючим*, якщо існує таке число $\alpha < 1$, що для будь-яких двох точок $x, y \in X$ виконується нерівність

$$\rho(Ax, Ay) \leq \alpha \rho(x, y).$$

Теорема (принцип відображень, що стискають). Будь-яке відображення, що стискає, визначене у повному метричному просторі X , містить одну і тільки одну нерухому точку x^* (тобто рівняння $Ax = x$ має один і тільки один розв'язок x^*).

Нерухома точка x^* може бути знайдена як границя послідовності $\{x_n\}$, що визначається рекурентним співвідношенням $x_n = A^n x_0$, де x_0 – довільна фіксована точка із X , причому для n -го наближення x_n справедлива оцінка

$$\rho(x_n, x^*) \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} \rho(x_n, Ax_0) \quad (n=1, 2, \dots). \quad (A.2)$$

Принцип відображень, що стискають, вперше доведений С. Банахом, має багаточисельні прикладання.

Теорема. Нехай $k(t, s)$ – дійсна функція, що визначена і вимірювана у квадраті $a \leq t, s \leq b$ і така, що

$$\int_a^b \int_a^b k^2(t, s) dt ds < +\infty,$$

і нехай $f(t) \in L_2[a, b]$. Тоді для інтегрального рівняння

$$x(t) = f(t) + \lambda \int_a^b k(t, s) x(s) ds$$

існує за кожного досить малого значення параметру λ єдиний розв'язок $x(t) \in L_2[a, b]$. Цей розв'язок можна відшукати за допомогою методу послідовних наближень.

Теорема (Пікара). Нехай дано диференціальне рівняння $y' = f(x, y)$ із початковою умовою $y(x_0) = y_0$, причому функція f визначена і неперервна у деякій пласкій області G , що містить точку (x_0, y_0) , і задовольняє умову Ліпшиця по y :

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq C |y_1 - y_2| \quad (C = \text{const}) \quad (A.3)$$

Тоді на деякому сегменті $|x - x_0| \leq d$ існує, і при тому тільки один, розв'язок $y = \varphi(x)$ цього рівняння, що задовольняє початкову умову.

Ця теорема узагальнюється і на випадок системи диференціальних рівнянь.

Приклади

1. Перевірити, що простір A_R всіх однозначних і аналітичних у крузі $|z| < R$ ($0 < R < \infty$) функцій із відстанню

$$\rho(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{\max_{|z| \leq r_k} |x(z) - y(z)|}{1 + \max_{|z| \leq r_k} |x(z) - y(z)|},$$

де r_n – монотонно зростаюча до R послідовність додатних чисел, є метричний.

Розв'язання.

Аксіома тотожності у цьому випадку рівносильна тому, що $\max_{|z| \leq r_n} |x(z) - y(z)| = 0$

($\forall k \geq 0$). Значить, зі збіжності функцій $x(z)$ і $y(z)$ на кожному замкнутому крузі $|z| \leq r_k$ за теоремою єдиності для аналітичних функцій випливає, що $x(z) \equiv y(z)$ ($\forall z : |z| < R$).

Оскільки аксіома симетрії очевидна, то зупинимося на перевірці аксіоми трикутника.

Нехай x, y, u – довільні елементи простору A_R . Оскільки у довільній точці z : $|z| < R$

$$|x(z) - y(z)| \leq |x(z) - u(z)| + |u(z) - y(z)|.$$

то, очевидно, і

$$\max_{|z| \leq r_n} |x(z) - y(z)| \leq \max_{|z| \leq r_n} |x(z) - u(z)| + \max_{|z| \leq r_n} |u(z) - y(z)|$$

за будь-якого $k \geq 0$.

Оскільки функція $\varphi(t) = \frac{t}{1+t}$ монотонно зростає для $t > 0$ ($\varphi'(t) = \frac{1}{(1+t)^2}$

> 0), то за будь-якого $k \geq 0$

$$\begin{aligned} \frac{\max_{|z| \leq r_k} |x(z) - y(z)|}{1 + \max_{|z| \leq r_k} |x(z) - y(z)|} &\leq \frac{\max_{|z| \leq r_k} |x(z) - u(z)| + \max_{|z| \leq r_k} |u(z) - y(z)|}{1 + \max_{|z| \leq r_k} |u(z) - y(z)|} \leq \\ &\leq \frac{\max_{|z| \leq r_k} |x(z) - u(z)|}{1 + \max_{|z| \leq r_k} |x(z) - u(z)|} + \frac{\max_{|z| \leq r_k} |u(z) - y(z)|}{1 + \max_{|z| \leq r_k} |u(z) - y(z)|}. \end{aligned}$$

Тому $\rho(x, y) \leq \rho(x, u) + \rho(u, y)$.

$$\frac{a+b}{1+a+b} \leq \frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b}$$

2. Довести повноту простору A_R .

Розв'язання.

Нехай $\{x_n(z)\}$ – деяка фундаментальна у A_R послідовність функцій, тобто для всякого $\varepsilon > 0$ існує n_0 таке, що за всіх $n, m \geq n_0$

$$\rho(x_n, x_m) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{\max_{|z| \leq r_k} |x(z) - y(z)|}{1 + \max_{|z| \leq r_k} |x(z) - y(z)|} < \varepsilon$$

Звідси випливає, що послідовність $\{x_n(z)\}$ рівномірно збігається у кожному крузі $|z| \leq r_n$ (оскільки вона задовольняє умовам критерію Коші). Те, що гранична функція $x(z)$ є аналітична у кожному крузі $|z| \leq r_n$ і не залежить від k , випливає відповідно із теореми Вєрштраса і теореми єдиності для аналітичних функцій, а співвідношення $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, x) = 0$ отримується шляхом почленного переходу до границі під знаком суми ряду

$$\rho(x_n, x) = \frac{1}{2_k} \frac{\max_{|z| \leq r_k} |x_n(z) - x(z)|}{1 + \max_{|z| \leq r_k} |x_n(z) - x(z)|}$$

(через його рівномірну збіжність по n). Твердження доведено.

3. Довести, що:

1) простір S всіх числових послідовностей із метрикою

$$\rho(x, y) = \sup_n \frac{|\xi_n - \eta_n|}{1 + |\xi_n - \eta_n|}$$

не є сепарабельний метричний простір;

2) простір S із метрикою

$$\rho(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\xi_n - \eta_n|}{1 + |\xi_n - \eta_n|}$$

є сепарабельний.

Розв'язання.

1) Розглянемо множину $E_{0,1}$ послідовностей $x = (\xi_1, \xi_2, \dots)$, елементи яких дорівнюють 0 або 1. Ця множина потужності континуум, оскільки між точками множини $E_{0,1}$ і точками відрізка $[0;1]$ існує взаємно однозначна відповідність. Оскільки при $x \neq y$ $\rho(x, y) = 1/2$ ($x, y \in E_{0,1}$), звідси випливає, що наблизити кожен елемент із $E_{0,1}$ елементами облікуваної множини не можна: множина кульок із центрами у точках множини $E_{0,1}$ та радіусів $1/3$ є множина потужності континууму, причому ці кулі не перетинаються. Якщо ж деяка множина B щільна в S , то кожна із кульок має містити бодай одну точку із цієї множини. Значить, B не може бути підрахуваною. Із включення $E_{0,1} \subset S$ випливає, що S – не сепарабельний простір.

2) Нехай M – множина елементів $(r_1, r_2, \dots, r_n, 0, 0, \dots)$, де r_i – довільні раціональні числа, а n – довільне натуральне число. M – лічильна множина. Покажемо, що вона всюди щільна в S . Для цього візьмемо довільний елемент $x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots) \in S$ і довільне $\varepsilon > 0$. Нехай n таке, що

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|\xi_k|}{1+|\xi_k|} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Візьмемо елемент $x^0 = (r_1, r_2, \dots, r_n, 0, \dots)$ таким, що $\sum_{k=1}^n |\xi_k - r_k| < \varepsilon/2$ (у силу

щільності множини раціональних точок в R). Тоді

$$\begin{aligned} \rho(x, x^0) &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} \frac{|\xi_k - r_k|}{1+|\xi_k - r_k|} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|\xi_k|}{1+|\xi_k|} \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^n |\xi_k - r_k| + \varepsilon/2 < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon. \end{aligned}$$

Значить, $\overline{M} = S$.

- Нехай X – множина всіх алгебраїчних поліномів степеню n на відрізку $[0;1]$, і якщо

$$P(t) = \sum_{k=0}^n \alpha_k t^k, Q(t) = \sum_{k=0}^n \beta_k t^k,$$

то

$$\rho_1(P, Q) = \max_{t \in [0;1]} |P(t) - Q(t)|,$$

а

$$\rho_2(P, Q) = \sum_{k=0}^n |\alpha_k - \beta_k|.$$

Довести, що ці дві метрики топологічно еквівалентні.

Розв'язання.

Нехай

$$g(t) = P(t) - Q(t) = \sum_{k=0}^n (\alpha_k - \beta_k) t^k = \sum_{k=0}^n \gamma_k t^k.$$

Тоді

$$\rho_1(P, Q) = \max_{t \in [0;1]} |g(t)| \leq \sum_{k=0}^n |\gamma_k| = \rho_2(P, Q).$$

Візьмемо тепер на відрізку $[0;1]$ точки $t_0 < t_1 < \dots < t_n$ і розглянемо систему $n+1$ рівнянь із $n+1$ невідомими.

$$\sum_{k=0}^n \gamma_k t_i^k = g(t_i) \quad (i = \overline{1, n}).$$

Визначник цієї системи (визначник Вандермонда) відрізняється від нуля і тому

$\gamma_k = \sum_{i=0}^n c_{ki} g(t_i)$, де числа c_{ki} залежать від вибраних точок t_i , але не залежать від

поліному $g(t)$. Тому

$$\rho_2(P, Q) = \sum_{k=0}^n |\gamma_k| \leq \sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^n |c_{ki}| \cdot \rho_1(P, Q).$$

і твердження доведено.

5. Довести, що якщо відображення $A: X \rightarrow X$ повного метричного простору X у себе таке, що за деякого $n \in \mathbb{N}$ його степінь (n -а ітерація) A^n є відображення, що стискає, то A має єдину нерухому точку.

Розв'язання.

Нехай існує $\alpha: 0 < \alpha < 1$ таке, що $\rho(A^n x, A^n y) \leq \alpha \rho(x, y)$. тоді відображення A^n має єдину нерухому точку $x^*: A^n x^* = x^*$. Покажемо, що x^* також є єдиний розв'язок рівняння $Ax = x$.

Дійсно,

$$\rho(x^*, A^n x^*) = \rho(A^n x^*, A^n(Ax^*)) \leq \alpha \rho(x^*, Ax^*),$$

звідки випливає, що $\rho(x^*, Ax^*) = 0$, тобто $Ax^* = x^*$.

Якщо x_1 – інша нерухома точка для A , ця ж точка нерухома і для A^n . Тому

$$\rho(x^*, x_1) = \rho(A^n x^*, A^n x_1) \leq \alpha \rho(x^*, x_1).$$

Значить, $x_1 = x^*$.

Користуючись доведеним твердженням, перевіряємо, що рівняння

$$\int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} \varphi(t) dt = \varphi(x)$$

за кожного $n \in \mathcal{N}$ мають у просторі $C_{0;\alpha}$ лише тривіальний розв'язок. Дійсно, визначимо відображення (оператор) $A: C_{[0;\alpha]} \rightarrow C_{[0;\alpha]}$ за формулою

$$(A\varphi)(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{m-1}}{(m-1)!} \varphi(t) dt \quad (m \in \mathcal{N}),$$

і тому при $\frac{\alpha^{pn}}{(pn)!} < 1$ ($p \in \mathcal{N}$) оператор A^{pn} є відображення, що стискає.

Нехай $\varphi_0(x)$ – нерухома точка відображення A^n , тобто розв'язок даного рівняння. Із доведеного випливає, що $\varphi_0(x)$ є розв'язок і рівняння $\int_0^x \varphi(t) dt$. Звідси

$\varphi \in C_{[0;\alpha]}^{(1)}$, $\varphi(0) = 0$ і $\varphi'(x) = \varphi(x)$. Значить, $\varphi(x) \equiv 0$.

6. Довести, що послідовність $\{x_n\}$ ланцюгових дробів

$$2, 2 + \frac{1}{2}, 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}, \dots$$

є збіжна, і знайти її границю.

Розв'язання.

Оскільки послідовність $\{x_n\}$ визначається рекурентно:

$$x_1 = 2, \quad x_n = 2 + \frac{1}{x_{n-1}} \quad (n \geq 2),$$

то із співвідношення

$$x_n = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{x_{n-2}}} \quad (n \geq 3)$$

та оцінок $x_1 \leq \frac{5}{2}$, $x_2 \leq \frac{5}{2}$ випливає, що $x_n \leq \frac{5}{2}$ ($\forall n \geq 1$). Крім того, $x_n \geq 2$. Розглянемо

відображення $f(x) = 2 + \frac{1}{x}$ відрізка $[2; 5/2]$ у себе.

$$\rho(f(x), f(y)) = |f(y) - f(x)| = \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right| \leq \frac{1}{4} |x - y| = \frac{1}{4} \rho(x, y),$$

і тому має єдину нерухому точку x^* , причому $x^* = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, де

$$x_n = f(x_{n-1}) = 2 + \frac{1}{x_{n-1}} \quad (n \geq 2), \quad x_1 = 2.$$

Вирішуючи рівняння $x^* = 2 + \frac{1}{x^*}$, знаходимо, що $x^* = 1 + \sqrt{2}$. Це число і є границя даної послідовності ланцюгових дробів.

A.5 Нормовані простори

Множина L у лінійному просторі E називається *лінійним многовидом*, якщо для довільних елементів $x, y \in L$ та довільних скалярів α, β лінійна комбінація $\alpha x + \beta y \in L$. Оскільки L є частина лінійного простору E , то із визначення лінійного многовиду випливає, що L також є лінійний простір.

В аналізі часто приходиться мати справу із просторами, в яких запроваджені як операції додавання і множення їх на числа, так і деяка топологія, тобто розглядати так звані топологічні лінійні простори. Серед останніх найважливіший клас утворюють нормовані простори.

Визначення нормованого простору. Лінійний простір E над полем дійсних або комплексних чисел зветься нормованим, якщо кожному елементу $x \in E$ поставлено у відповідність невід'ємне число $\|x\|$, що називають нормою x , так, що виконуються такі три аксіоми:

- $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
- $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ для довільного $x \in E$ і для довільного дійсного або комплексного числа λ ;
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ для будь-яких $x, y \in E$.

Всякий нормований простір стає метричним простором, якщо запровадити у ньому відстань за формулою $\rho(x, y) = \|x - y\|$. Справедливість аксіом метричного простору випливає із властивостей 1)–3) норми. На нормовані простори, таким чином, переносяться всі ті поняття і факти, що були викладені для метричних просторів. Зокрема, нормовані простори є топологічні простори.

Нормований простір, що є повний відносно збіжності по метриці $\rho(x, y) = \|x - y\|$, що визначається його нормою, називається банаховим простором.

Вочевидь, що $\mathcal{R}^1$ – банахів простір ($\|x\| = |x|, \forall x \in \mathcal{R}^1$); при цьому справджується нерівність: $\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$.

Аналогічна нерівність справджується і для норми у довільному нормованому просторі E , а саме:

$$\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|, \forall x, y \in E.$$

Прикладами інших банахових просторів можуть слугувати метричні простори $\mathcal{R}^n$, $C_{[a,b]}$, $M_{[a,b]}$, $L_{[a,b]}^p (p \geq 1)$, $l_p (p \geq 1)$, c_0 , c , m , в яких норма елементу x визначається як його відстань до нуля, тобто $\|x\| = \rho(x, 0)$.

Лінійними нормованими, але не банаховими, просторами є простори $C_{[a,b]}^1$, $C_{[a,b]}^2$ усіх неперервних на відрізку $[a, b]$ функцій, норми в яких визначаються відповідно формулами:

$$\|x\|_1 = \rho(x, 0) = \int_a^b |x(t)| dt, \quad \|x\|_2 = \rho(x, 0) = \sqrt{\int_a^b |x(t)|^2 dt}.$$

Важливо підкреслити, що не кожний метричний простір може бути нормованим із нормою, узгодженою із метрикою. Наприклад, можна показати, що у метричних просторах S , A_R не можна запровадити норму так, щоб $\|x\| = \rho(x, 0)$.

Найпростіші властивості збіжності у нормованих просторах виражаються такими твердженнями:

- Якщо $x_n \rightarrow x$ (у сенсі збіжності по нормі $\|x - y\| = \rho(x, y)$), то $\|x_n\| \rightarrow \|x\|$ ($x_n, x \in E$).
- Якщо $x_n \rightarrow x$, $y_n \rightarrow y$, то $x_n + y_n \rightarrow x + y$ ($x, y, x_n, y_n \in E$).
- Якщо $x_n \rightarrow x$, $\alpha_n \rightarrow \alpha$, то $\alpha_n x \rightarrow \alpha x$ ($\alpha_n, \alpha \in \mathcal{C}$; $x_n, x \in E$).
- Якщо $x_n \rightarrow 0$ ($x_n \in E$), а послідовність $\{\alpha_n\} \subset \mathcal{C}$ обмежена, то $\alpha_n x_n \rightarrow 0$.
- Якщо $\alpha_n \rightarrow 0$ ($\alpha_n \in \mathcal{C}$), а послідовність $\{x_n\} \in E$ обмежена, то $\alpha_n x_n \rightarrow 0$.

Всякий нормований простір E можна розглядати як лінійний многовид, щільний у деякому банаховому просторі E_1 , який називається *поповненням* простору E .

Якщо у нормованому просторі E із нормою $\|x\|_1$ задана ще одна норма $\|x\|_2$, для збіжності по нормі $\|\cdot\|_2$ довільної послідовності, що збігається по нормі $\|x\|_1$, необхідно і достатньо, щоб існувала додатна константа C_1 така, що $\|x\|_2 \leq C_1 \|x\|_1$ ($\forall x \in E$). При цьому говорять, що норма $\|x\|_2$ підпорядковується нормі $\|x\|_1$.

Дві норми $\|\cdot\|_1$ та $\|\cdot\|_2$ називаються еквівалентними, якщо існують додатні сталі C_1, C_2 такі, що $C_1 \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C_2 \|x\|_1$.

Зазначимо, що у кожному лінійному просторі всі норми є еквівалентні.

Б Оператори у гільбертових просторах

Б.1 Гільбертів простір

Нескінченновимірний *банахів простір*, у якому запроваджена операція *скалярного добутку*, що індукує норму цього простору, називають *гільбертовим $\mathcal{H}$* (за першою буквою прізвища Д. Гільберта). Скалярний добуток елементів u і v позначатимемо (u, v) .

Операція скалярного добутку задовольняє таким *аксіомам скалярного добутку* (в їх формулюваннях u, v, w – довільні елементи лінійного простору, а α – довільне дійсне число):

$$1) (u, v) = (v, u) \text{ (симетрія);}$$

$$2) (u + w, v) = (u, v) + (w, v) \text{ (дистрибутивність);}$$

$$3) (\alpha u, v) = \alpha (u, v) \text{ (однорідність);}$$

$$4) (u, u) \geq 0, \text{ причому } (u, u) = 0 \text{ тоді і тільки тоді, коли } (u) = 0 \text{ (невід'ємність скалярного квадрату).}$$

У випадку комплексного гільбертова простору аксіома симетрії приймає вигляд $(u, v) = \overline{(v, u)}$.

Норма у гільбертовому просторі, що породжена скалярним добутком, виражається через *скалярний квадрат* (u, u)

$$\|u\| = \sqrt{(u, u)}. \quad (\text{Б.1})$$

Нерівність Коші–Буняковського

$$|(u, v)| \leq \sqrt{(u, u)} \sqrt{(v, v)} \quad (\text{Б.2})$$

справедлива для довільного евклідова простору, у тому числі і для гільбертова простору (у цьому випадку її іноді називають *нерівністю Шварца*). Нерівність Коші–Буняковського перетворюється у рівність тільки тоді, коли елементи u і v лінійно залежні, тобто один із них можна отримати множенням іншого на число. Зокрема, це вірно, коли бодай один із елементів u , v , є нульовий.

Із урахуванням (Б.1) нерівність (Б.2) набуває вигляду

$$|(u, v)| \leq \|u\| \|v\|. \quad (\text{Б.3})$$

Приклад 1.

У лінійному просторі X функцій, що неперервні на відрізку $[0, 1]$, скалярний добуток можна запровадити так:

$$(f, g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx, \quad f, g \in X. \quad (\text{Б.4})$$

Перевірка свідчить, що для формули (Б.4) виконуються усі аксіоми скалярного добутку. Цей простір, будучи лінійним, є нормований. При цьому норма, що індукується скалярним добутком, визначається співвідношенням

$$\|f\| = \sqrt{\int_0^1 f^2(x) dx}, \quad f \in X.$$

Послідовність функцій із X , що є фундаментальна у нормованому просторі X , може не мати границі в X , тобто нормований простір X зі скалярним добутком (Б.4) не є повний (а значить, і гільбертовий).

Відомо, що гільбертовим є простір функцій, що є підсумовувані на відрізку $[0,1]$ із квадратом. Цей простір позначають $L_2[0,1]$. Скалярний добуток у ньому визначають співвідношенням

$$(f, g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx, \quad f, g \in L_2[0,1], \quad (\text{Б.5})$$

а норму – співвідношенням

$$\|f\| = \sqrt{\int_0^1 f^2(x)dx}, \quad f \in L_2[0,1]. \quad (\text{Б.6})$$

Рівність (Б.5) аналогічна (Б.4), але тепер інтеграли в (Б.6) та (Б.5) треба розуміти як інтеграли Лебега. Неважко переконатися, за властивістю *інтегралу Лебега*, що для (Б.5) виконуються усі аксіоми скалярного добутку.

Збіжність у середньому квадратичному фундаментальної послідовності $\{g_n(x)\}$ функцій $g_n(x) \in L_2[0,1]$ до функції $g(x) \in L_2[0,1]$ означає, що

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 (g_n(x) - g(x))^2 dx = 0.$$

Зазначимо, що неперервні, неперервно диференційовні задану кількість разів, кусково сталі і *вимірювані обмежені функції* (у тому числі такі, що на $[0, 1]$ набувають скінченну кількість значень) складають *всюди щільні підмножини* гільбертова простору $L_{[0,1]}^2$.

Оскільки в $L_{[0,1]}^2$ існують обліковувані всюди щільні підмножини (наприклад, многочлени із раціональними коефіцієнтами), простір $L_{[0,1]}^2$ буде *сепарабельним*.

Гільбертовим простором є множина $L_2(\Omega)$ дійсних функцій, підсумовуваних із квадратом на *множині*, що є *вимірювана* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Скалярний добуток в $L^2(\Omega)$ запроваджують співвідношенням

$$(f, g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx, \quad f, g \in L^2(\Omega), \quad (\text{Б.7})$$

Для цих функцій інтеграл Лебега є скінченний

$$\|f\|^2 = \int_{\Omega} |f(x)|^2 dx,$$

і визначає норму в $L^2(\Omega)$.

Узагальненням простору $L_2(\Omega)$ є гільбертів простір $L^2(\Omega, \sigma)$ функцій, що

підсумовувані із квадратом і вагою σ , де $\sigma(x)$ – невід’ємна вимірювана на Ω дійсна функція. Для функцій із $L_2(\Omega, \sigma)$ інтеграл

$$\|f\| = \int_{\Omega} |f(x)|^2 \sigma(x) dx$$

є скінченний. Скалярний добуток в $L_2(\Omega)$ має вигляд

$$(f, g) = \int_{\Omega} f(x)g(x)\sigma(x)dx, \quad f, g \in L_2(\Omega, \sigma).$$

Гільбертовим буде і лінійний простір $L_2^{(m)}(\Omega)$ векторних функцій $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$, що визначені на множині $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, що вимірюється, для яких інтеграл є скінченний

$$\|f\|^2 = \int_{\Omega} (f(x), f(x)) dx,$$

де $(\cdot, \cdot)$ позначає операцію *стандартного скалярного добутку* векторів m -вимірною евклідова арифметичного простору. Правило скалярного добутку в $L_2^{(m)}(\Omega)$ задає формула

$$(f, g) = \int_{\Omega} (f(x), g(x)) dx, \quad f, g \in L_2^{(m)}(\Omega).$$

Зазначимо, що в $L_2[0,1]$, $L_2(\Omega)$ і $L_2^{(m)}(\Omega)$ вважають рівними будь-які дві функції, що відрізняються на множині, для якої *міра Лебега* дорівнює нулю (говорять також «на множині міри нуль»). Це забезпечує виконання аксіом скалярного добутку (і відповідно норми), згідно якої $(u, u) = 0$ тільки у випадку, якщо u є нульовий елемент лінійного простору.

Нагадаємо, що якщо елементи u і v гільбертова простору $\mathcal{H}$ зв’язані співвідношенням $(u, u) = 0$, їх називають *ортогональними*. У цьому разі використовують запис $u \perp v$ (або $v \perp u$). Якщо елемент $w \in \mathcal{H}$ є ортогональний кожному елементу u підпростору $M \subset \mathcal{H}$, тобто $w \perp u$, $u \in M$, цей елемент називають *ортогональним підпростору M* і пишуть $w \perp M$.

Якщо послідовності $\{u_n\}$ і $\{v_n\}$ елементів гільбертова простору $\mathcal{H}$ по нормі збігаються до елементів $\{u\}$ та $\{v\}$, існує границя

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n, v_n) = (u, v), \quad u, v \in \mathcal{H}. \quad (\text{Б.8})$$

Елемент $u \in \mathcal{H}$, ортогональний множині M , всюди щільній у гільбертовому просторі $\mathcal{H}$, є *нульовий елемент $\mathcal{H}$* , тобто $u = 0 \in \mathcal{H}$.

Теорема 1. Нехай послідовність $\{v_k\} \in \mathcal{H}$ утворює *обліковуваний базис*. Якщо для деякого елемента $u \in \mathcal{H}$ виконуються рівності $(u, v_k) = 0$, $k \in \mathbb{N}$, $u = 0$.

Множина M всіх елементів вигляду

$$v = \sum_{k=1}^n b_k v_k \quad (\text{Б.11})$$

буде всюди щільною в $\mathcal{H}$, оскільки ці елементи утворюють лінійну оболонку лічильного

базису.

У будь-якому сепарабельному гільбертовому просторі $\mathcal{H}$ існує ортонормований базис. Нагадаємо схему побудови ортонормованого базису в $\mathcal{H}$. Якщо $\mathcal{H}$ сепарабельний, можна відокремити лічильну множину $M \subset \mathcal{H}$ таку, що $\bar{M} = \mathcal{H}$. Розташовуючи елементи із M у вигляді послідовності і видаляючи із неї усі елементи, що є лінійні комбінації попередніх, отримуємо лінійно незалежну систему $\{u_n\} \subset M$, замкнуту в $\mathcal{H}$.

Використовуючи процес ортогоналізації Грама–Шмідта, цю систему можна ортонормувати і отримати ортонормовану систему функцій $w_k \in M$, $k \in \mathbb{N}$, також замкнуту в $\mathcal{H}$. Ортонормована замкнута система й є ортонормований базис в $\mathcal{H}$. Зазначимо також, що ця система буде повною ортонормованою системою. Для такої системи справедливо, що в $\mathcal{H}$ немає елементу, крім нульового, що є ортогональний до всіх елементів цієї системи.

Б.2 Оператори і функціонали у гільбертовому просторі

Розглянемо лінійний оператор $A: D(A) \rightarrow \mathcal{H}$, область визначення якого є всюди щільна множина у гільбертовому просторі $\mathcal{H}$.

Визначення 1. Лінійний оператор A називають симетричним, якщо для довільних елементів $u, v \in D(A)$ справедлива рівність $(Au, v) = (u, Av)$, і додатним, якщо ще й $(Au, u) \geq 0$ для довільного елементу $u \in D(A)$, причому $(Au, u) = 0$ тільки тоді, коли $u = 0$. За виконання нерівності

$$(Au, u) \geq \gamma^2 \|u\|^2, \quad u \in D(A), \quad (\text{Б.12})$$

де $\gamma \neq 0$, додатний оператор A називають *додатно визначеним*.

Отже, довільний додатно визначений оператор є додатний, а значить, і симетричний, але зворотнє, взагалі кажучи, не вірно. Зазначимо, що для додатно визначеного оператора A ядро $\ker A = \{0\}$.

Приклад 2.

Розглянемо оператор $A = -d^2/dx^2$ на множині $D(A)$ подвійно неперервно диференційовних на відріжку $[0,1]$ функцій $w(x)$, що задовольняють однорідним межовим умовам

$$w(0) = w(1) = 0. \quad (\text{Б.13})$$

Множина $D(A)$ є лінійний многовид у гільбертовому просторі $L_2[0,1]$ функцій, підсумовуваних із квадратом і визначених на відріжку $[0,1]$. Дійсно, для довільних функцій $f(x)$, $g(x) \in D(A)$ і довільних чисел $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ маємо $(\alpha f(x) + \beta g(x)) \in D(A)$, оскільки будь-яка лінійна комбінація подвійно неперервно диференційовних функцій є подвійно неперервно диференційовна, а

$$\alpha f(0) + \beta g(0) = \alpha f(1) + \beta g(1) = 0,$$

коли $f(0) = g(0) = f(1) = g(1) = 0$. Множина $D(A)$ є всюди щільна в $L_2[0,1]$.

Зазначимо, що якщо в (Б.13) бодай одна із межових умов є неоднорідна, множина

$D(A)$ уже не буде лінійним многовидом. Нехай, наприклад, замість (Б.13) задані межові умови $w(0) = 0$ і $w(1) = 1$. Тоді для $f(x), g(x) \in D(A)$ маємо $f(1) = g(1) = 1$. Можна підібрати такі числа $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, що $(\alpha f(1) + \beta g(1) = \alpha + \beta \neq 1)$, тобто $(\alpha f(x) + \beta g(x)) \notin D(A)$, а це означає, що множина $D(A)$ не є лінійний многовид.

Лінійність оператора A впливає із властивостей лінійності множини $D(A)$ та лінійності операції диференціювання. Переконаємося, що оператор A є симетричний. Ясно, що для функцій із $D(A)$ інтеграл в (Б.5) достатньо розглядати по Ріману. Із використанням (Б.13) та інтегруванням частинами із урахуванням умови вигляду (Б.13) для функцій $u, v \in D(A)$ отримаємо

$$\begin{aligned} (Au, v) &= -\int_0^1 u'' v dx = -u' v \Big|_0^1 + \int_0^1 u' v' dx = \int_0^1 u' v' dx = \\ &= uv' \Big|_0^1 - \int_0^1 uv'' dx = \int_0^1 u(-v'') dx = (u, Av), \end{aligned} \quad (\text{Б.14})$$

тобто оператор A – симетричний в $D(A)$.

Із (Б.14) випливає, що

$$(Aw, w) = \int_0^1 (w')^2 dx \geq 0,$$

причому якщо $(Aw, w) = 0$, то $w'(x) = 0$, $x \in [0, 1]$, а значить, w – стала на відрізку $[0, 1]$ функція, і згідно заданим межовим умовам маємо $w(x) = 0$. Отже, оператор A є додатний в $D(A)$. Цей оператор є й додатно визначений в $D(A)$, тобто для нього справедлива нерівність (Б.12), яка у даному випадку має вигляд

$$(Aw, w) = \int_0^1 (w')^2 dx \geq \gamma^2 \int_0^1 w^2 dx, \quad w(x) \in D(A). \quad (\text{Б.15})$$

З'ясуємо загальний вигляд *лінійного обмеженого функціоналу* у гільбертовому просторі $\mathcal{H}$. Для такого функціоналу справедлива теорема:

Теорема 2 (теорема Ф. Рісса). Для будь-якого лінійного обмеженого функціоналу J у гільбертовому просторі $\mathcal{H}$ існує єдиний елемент $v \in \mathcal{H}$ із нормою $\|v\| = \|J\|$, такий, що

$$Ju = (u, v) \in \mathbb{R}, \quad u \in \mathcal{H}. \quad (\text{Б.16})$$

Розглянемо ядро $\ker J$ лінійного обмеженого функціоналу J , що є частинний випадок лінійного оператора. $\ker J$ є підпростір в $\mathcal{H}$. Якщо $\ker J = \mathcal{H}$, $J = 0$ і рівність (Б.16) справджується при $v = 0$. Якщо $\ker J \neq \mathcal{H}$ існує елемент, що відрізняється від нуля, $v_0 \perp \ker J$. Тоді для будь-якого $u \in \mathcal{H}$ виберемо елемент

$$w = (Ju)v_0 - (Jv_0)u,$$

для якого

$$Jw = (Ju)(Jv_0) - (Jv_0)(Ju) = 0,$$

тобто $w \in \ker J$, тому $w \perp v_0$, або

$$(w, v_0) = 0 = (Ju(v_0, v_0) - (Jv_0)(u, v_0)).$$

Звідси

$$Ju = \frac{Jv_0}{(v_0, v_0)}(u, v_0).$$

При $v = \frac{(Jv_0)v_0}{(v_0, v_0)}$ згідно аксіоми однорідності скалярного добутку (см. (Б.1), приходимо до (Б.16).

Якби існувало два елементи v і v_1 , що задовольняють (Б.3), тобто $Ju = (u, v) = (u, v_1)$, в силу дистрибутивності скалярного добутку для всіх $u \in \mathcal{H}$ було б $(u, v - v_1) = 0$ і $v_1 = v$.

Із (Б.17) із урахуванням нерівності Коші–Буняковського отримуємо $|Ju| = |(u, v)| \leq \|u\| \|v\|$, причому нерівність переходить у рівність при $u = \lambda v$. Звідси отримуємо

$$\|J\| = \sup_{\|u\| \leq 1} |Ju| = \|v\|.$$

Відображення $F : \mathcal{L} \times \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{R}$, де $\mathcal{L}$ – лінійний простір, називають функціоналом, що залежить від двох елементів лінійного простору L . Функціонал $J[u, v]$, що залежить від двох елементів $u, v \in L$ лінійного простору L , називають білінійним, якщо за будь-якого фіксованого v він є лінійний по u , а при будь-якому фіксованому u – лінійним по v , тобто для довільних дійсних чисел α_1 та α_2

$$J[\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2, v] = \alpha_1 J[u_1, v] + \alpha_2 J[u_2, v],$$

$$J[u, \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2] = \alpha_1 J[u, v_1] + \alpha_2 J[u, v_2].$$

Вважаючи у білінійному функціоналі $v = u$, отримуємо *квадратичний функціонал* $J[u] = J[u, u]$. Цей функціонал називають додатно визначеним, якщо для будь-якого ненульового елементу $u \in L$ виконується нерівність $J[u] = J[u, u]$.

Частинним випадком квадратичного функціоналу є функціонал вигляду

$$J[u] = (Au, u), u \in D(A) \subset \mathcal{H},$$

який, згідно (Б.16), буде додатно визначеним, якщо лінійний оператор A -- додатний.

Квадратичний функціонал $J[u]$ є сильно додатний, якщо існує таке сталє число $k > 0$, що $J[u] \geq k \|u\|^2$ для будь-якого елементу $u \in D(J)$.

У гільбертовому просторі $\mathcal{H}$ розглянемо операторне рівняння

$$Au = f, \tag{Б.17}$$

де A – додатний оператор. Таке рівняння характерно для лінійних задач математичної фізики.

Теорема 2. Якщо оператор A додатний, рівняння $Au = f$ має не більше одного

розв'язання в $D(A)$.

Функціонал вигляду

$$J[u] = (Au, u) - 2(f, u) \quad (\text{Б.18})$$

із квадратичним доданком (Au, u) і лінійним по u другим доданком зазвичай також називають квадратичним.

Зв'язок між розв'язком операторного рівняння (Б.17) і точкою мінімуму функціоналу (Б.18) встановлює теорема про квадратичний функціонал.

Теорема 3. Нехай оператор A , що визначений на всюди щільній множині $D(A)$ у гільбертовому просторі $\mathcal{H}$, є додатний. Елемент $u_0 \in D(A)$ є розв'язання рівняння $Au = f$ тільки тоді, коли квадратичний функціонал $J[u] = (Au, u) - 2(f, u)$ набуває на u_0 мінімальне значення, тобто $J[u] > J[u_0]$ для будь-якого елементу $u \in D(A) \setminus \{u_0\}$.

Приклад 3.

Звичайне диференціальне рівняння

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(E I(x) \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \right) = q(x), \quad x \in [0, 1], \quad (\text{Б.19})$$

із межовими умовами

$$w(0) = w(l) = 0, \quad w'(0) = w'(l) = 0 \quad (\text{Б.20})$$

описує змінювання вздовж жорстко закріпленої на кінцях балки її прогину $w(x)$, що викликаний розподіленим поперечним навантаженням $q(x)$ (рис. Б.1), неперервною в інтервалі $(0, l)$. Довжина балки l , модуль $E = \text{const} > 0$ пружності матеріалу, а момент $I(x)$ інерції її поперечного перетину є подвійно неперервно диференційовна на відрізку $[0, l]$ функція координати x , причому $I(x) > 0$.

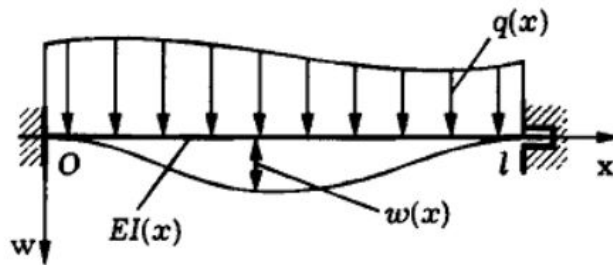


Рис. Б.1. Прогин балки

Задачу (Б.19), (Б.20) можна подати операторним рівнянням $Aw = q$, де оператор

$$A = \frac{d^2}{dx^2} \left(E I(x) \frac{d^2}{dx^2} \right) \quad (\text{Б.21})$$

визначений на множині функцій, неперервних на $[0, l]$ разом зі своїми похідними до четвертого порядку включно й які задовольняють (Б.20). Множина $D(A)$ є лінійний

многовид, який є всюди щільний у гільбертовому просторі $L_2[0, l]$.

Ясно, що оператор A є лінійний в силу лінійності операції диференціювання. Для будь-яких $f, g \in D(A)$ маємо

$$\begin{aligned} (Af, g) &= \int_0^l (E If'')'' g dx = (E If'')' g \Big|_0^l - \int_0^l (E If'')'' g' dx = \\ &= -E If''g' \Big|_0^l + \int_0^l E If''g'' dx = \int_0^l E If''g'' dx. \end{aligned} \quad (Б.22)$$

Аналогічно отримуємо

$$(f, Ag) = \int_0^l f (E Ig'')'' g dx = \int_0^l E If''g'' g dx,$$

тобто лінійний оператор A , згідно визначенню 1, є симетричний в $D(A)$.

Із (Б.22) випливає, що

$$(Aw, w) = \int_0^l EI(w'')^2 dx \geq 0, \quad w \in D(A), \quad (Б.23)$$

причому якщо $(Aw, w) = 0$, $w'' \equiv 0$ на $[0, l]$. Звідси, $w(x) = Ax + B$, але, згідно (Б.20), $A = B = 0$, а значить, $w(x) \equiv 0$, тобто відповідно до визначення 1 симетричний оператор A є в $D(A)$ додатний.

Квадратичний функціонал (Б.18) у даному випадку із урахуванням (Б.23) має вигляд

$$J[w] = (Aw, w) - 2(q, w) = \int_0^l EI(w'')^2 dx - 2 \int_0^l q w dx \quad (Б.24)$$

і при заданій функції $w \in D(A)$ прогину балки дорівнює подвоєній повній потенціальній енергії цієї балки. Перша складова у правій частині (Б.24) відповідає подвоєній пружній енергії балки, а друга – взятій зі зворотним знаком подвоєній роботі зовнішніх сил, тобто заданому розподіленому навантаженню. З цієї причини (Б.24) зазвичай називають функціоналом енергії. Цю назву часто переносять і на загальний випадок квадратичного функціоналу (Б.18).

Б.3 Енергетичний простір

Нехай на лінійному многовиді $D(A) \subset \mathcal{H}$, всюди щільному у гільбертовому просторі $\mathcal{H}$, заданий додатно визначений оператор A . Визначимо на $D(A)$ новий скалярний добуток

$$(u, v)_A = (Au, v), \quad u, v \in D(A). \quad (Б.25)$$

Неважко перевірити, що для нього виконані усі аксіоми скалярного добутку.

Скалярний добуток (Б.25) визначає нові норму

$$\|u\|_A = \sqrt{(u, u)_A} = \sqrt{(Au, u)}, \quad u \in D(A). \quad (\text{Б.26})$$

і відстань

$$\rho_A(u, v) = \|u - v\|_A, \quad u, v \in D(A). \quad (\text{Б.27})$$

Скалярний добуток $(u, u)_A$ і норму $\|u\|_A$ зазвичай називають *енергетичними*.

Для додатно визначеного оператора A зв'язок між новою і попередньою нормами встановлює співвідношення

$$\|u\|_A^2 \geq \gamma^2 \|u\|^2, \quad \text{або} \quad \|u\| \leq \frac{1}{\gamma} \|u\|_A. \quad (\text{Б.28})$$

Квадратичний функціонал $J[u] = (u, u)_A - 2(f, u)$ (Б.18), або функціонал енергії (див. приклад 3), із урахуванням (Б.23) та (Б.26) можна записати у вигляді

$$J[u] = \|u\|_A^2 - 2(f, u). \quad (\text{Б.29})$$

Б.4 Однорідне операторне рівняння

Перейдемо до розгляду однорідного операторного рівняння

$$Au - \lambda Bu = 0, \quad (\text{Б.30})$$

де A і B – симетричний та додатно визначений оператори відповідно, що діють у гільбертовому просторі $\mathcal{H}$, причому $D(A) \subset D(B)$. Число λ назовемо власним значенням цього однорідного рівняння, якщо при цьому λ воно має розв'язок, відмінний від тривіального розв'язання. Такий нетривіальний розв'язок називають *власним елементом операторного рівняння* (Б.30), що відповідає власному значенню λ .

Нехай $\tilde{u} \in D(A)$, A – власний елемент рівняння (Б.30), що відповідає власному значенню λ , тобто

$$A\tilde{u} = \lambda B\tilde{u}. \quad (\text{Б.31})$$

Якщо помножити обидві частини (Б.31) скалярно на $u \in D(A)$, то із отриманої рівності

$$(Au, u) = \tilde{\lambda}(Bu, u)$$

випливає, що у випадку додатного (тим більше додатно визначеного) оператора A власні значення λ рівняння (Б.30) є додатні.

Б.5 Сполучені простори та оператори

Розгляд лінійних обмежених функціоналів, визначених у нормованому просторі $\mathcal{U}$ як частинний випадок лінійних обмежених операторів із областю значень, що належать банаховому простору $\mathbb{R}$, показує, що множина лінійних обмежених функціоналів утворює банаховий простір. Його позначають $\mathcal{U}^*$ і називають сполученим із $\mathcal{U}$. Норма будь-якого функціоналу $F \in \mathcal{U}^*$ визначена рівністю

$$\|F\| = \sup_{\|u\|_{\mathcal{U}} \leq 1} |F(u)|.$$

Приклад 6. Знайдемо простір, сполучений із $\mathbb{R}^n$, де норма задана рівністю

$$\|x\|_{\mathbb{R}^n} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}, \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Нехай e_i , $i = \overline{1, n}$, – стандартний базис в $\mathbb{R}^n$. Тоді для довільного елементу $x \in \mathbb{R}^n$ справедливе розкладання

$$x = \sum_{i=1}^n x_i e_i.$$

Якщо F – довільний лінійний функціонал, що діє у $\mathbb{R}^n$,

$$F(x) = F\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n x_i F(e_i)$$

і, згідно *нерівності Коші–Буняковського*,

$$\begin{aligned} \|F\| &= \sup_{\|x\|_{\mathbb{R}^n} \leq 1} |F(x)| = \sup_{\|x\|_{\mathbb{R}^n} \leq 1} \left| \sum_{i=1}^n x_i F(e_i) \right| \leq \\ &\leq \sup_{\|x\|_{\mathbb{R}^n} \leq 1} \|x\|_{\mathbb{R}^n} \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i [F(e_i)]^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i [F(e_i)]^2}. \end{aligned}$$

Отже, будь-який лінійний функціонал $F \in (\mathbb{R}^n)^*$ однозначно визначається вектором $F(e_1), F(e_2), \dots, F(e_n)$. Навпаки, будь-який вектор $f_1, f_2, \dots, f_n \in \mathbb{R}^n$ задає лінійний функціонал $F \in (\mathbb{R}^n)^*$, що діє за правилом

$$F(x) = \sum_{i=1}^n x_i f_i,$$

причому

$$\|F\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n f_i^2}.$$

Неважко показати, що відповідність між функціоналами $F \in (\mathbb{R}^n)^*$ і $F(e_i)$,

$F(e_2), \dots, F(e_n) \in$ ізоморфізм, що зберігає норми відповідних елементів, тобто простори $(\mathbb{R}^n)^*$ і $\mathbb{R}^n$ ізометричні.

Розглянемо банаховий простір $L_p[a, b]$, $p > 1$, функцій, що підсумовувані із p -м степенем, норма в якому визначається рівністю

$$\|x\|_p = \sqrt[p]{\int_a^b |x(t)|^p dt}.$$

Банахів простір, сполучений із $L_p[a, b]$, ізометричний банаховому простору $L_q[a, b]$, $1/p + 1/q = 1$, тобто $L_p^*[a, b] = L_q[a, b]$. Будь-який лінійний обмежений функціонал $F \in L_p^*[a, b]$ можна подати у вигляді

$$F(x) = \int_a^b x(t) f(t) dt, \quad x \in L_p[a, b],$$

де f – деяка функція із $L_q[a, b]$, причому $\|F\| = \|f\|_q$. Зокрема, $L_2^*[a, b] = L_2[a, b]$.

Із банаховим простором $L^1[a, b]$ підсумовуваних функцій сполучений банаховий простір $L^\infty[a, b]$ функцій f , майже всюди обмежених на відрізку $[a, b]$, із нормою $\|f\|_\infty$, яка визначається за формулою

$$\|f\|_\infty = \inf_{\mu E=0} \sup_{t \in [a, b] \setminus E} |f(t)|,$$

де μE – міра Лебега множини $E \subset [a, b]$. Будь-який функціонал $F = L_1^*[a, b]$ має вигляд

$$F(x) = \int_a^b x(t) f(t) dt, \quad x \in L_1[a, b],$$

де f – деяка функція із $L^\infty[a, b]$, а $\|F\| = \|f\|_\infty$.

Згідно теореми Ф. Рісса, будь-який лінійний обмежений функціонал F у гільбертовому просторі $\mathcal{H}$ має вигляд $F(x) = (x, u)$, $x \in \mathcal{H}$, де u – деякий елемент із $\mathcal{H}$, причому $\|F\| = \|u\|$. Неважко виявити, що $\mathcal{H}^*$ є ізометричне до $\mathcal{H}$, при цьому використовують запис $\mathcal{H}^* = \mathcal{H}$.

У просторі $\mathcal{U}^*$, що є сполучений до нормованого простору $\mathcal{U}$, розглядають два види збіжності: сильну – збіжність за нормою в $\mathcal{U}^*$ (у цьому разі збіжність послідовності $\{F_n\}$ до функціоналу F означає, що $\|F_n - F\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$) та слабу – поточкову збіжність (у цьому разі збіжність послідовності $\{F_n\}$ до функціоналу F означає, що $F_n(x) \rightarrow F(x)$ при $n \rightarrow \infty$ для будь-якого елемента $x \in \mathcal{U}$).

Із сильної збіжності послідовності $\{F_n\} \subset \mathcal{U}^*$ випливає її слабка збіжність, причому до тієї самої границі.

У разі гільбертова простору $\mathcal{H}$, із врахуванням, що $\mathcal{H} = \mathcal{H}^*$, а будь-який лінійний обмежений функціонал має спеціальний вигляд, можна стверджувати, що слабка збіжність послідовності $\{u\}$ до елементу $u \in \mathcal{U}$ рівносильна умові: $(u_n, x) \rightarrow (u, x)$ при $n \rightarrow \infty$ для будь-якого $x \in \mathcal{H}$.

Простір, що сполучений із $\mathcal{U}^*$, називають *другим сполученим* із нормованим простором $\mathcal{U}$ і позначають $\mathcal{U}^{**}$. Таким чином, $\mathcal{U}^{**} = ((\mathcal{U}^*))^*$. З'ясуємо зв'язок між $\mathcal{U}$ та $\mathcal{U}^{**}$.

Теорема 4. Нехай $\mathcal{U}$ – нормований простір і елемент $u_0 \in \mathcal{U}$ не є нульовий. Тоді існує лінійний обмежений функціонал F , такий, що $F(u_0) = \|u_0\|_{\mathcal{U}}$, $\|F\| = 1$.

Теорема 5. Нехай $\mathcal{U}$ – банахів простір. Тоді $\mathcal{U}$ ізометричний деякому підпростору в $\mathcal{U}^{**}$.

Якщо $\mathcal{U}^{**} = \mathcal{U}$, банахів простір називають *рефлексивним*. Таким є довільний гільбертів простір $\mathcal{H}$, оскільки $\mathcal{H}^{**} = (\mathcal{H}^*)^* = \mathcal{H}^* = \mathcal{H}$. Рефлексивними також будуть простори $L_p[a, b]$, $1 < p < \infty$.

Перейдемо до визначення сполученого оператора. Нехай A – лінійний обмежений оператор, що переводить нормований простір $\mathcal{U}$ у нормований простір $\mathcal{V}$. Поставимо довільному функціоналу $J \in \mathcal{V}^*$ у відповідність функціонал F , що визначений у $\mathcal{U}$ за правилом

$$J \rightarrow F \Leftrightarrow F(u) = J(Au), \quad u \in \mathcal{U}. \quad (\text{Б.32})$$

Функціонал F , що відповідає функціоналу $J \in \mathcal{V}^*$, є лінійний обмежений, тобто $F \in \mathcal{U}^*$.

Теорема 6. Оператор A^* , сполучений із лінійним обмеженим оператором $A: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$, де $\mathcal{U}$ і $\mathcal{V}$ – нормовані простори, є лінійний обмежений, причому $\|A^*\| = \|A\|$.

Нехай $\mathcal{H}$ – гільбертів простір і A – лінійний обмежений оператор, що діє у $\mathcal{H}$. Оскільки $\mathcal{H}^* = \mathcal{H}$, сполучений із A оператор A^* діє також у $\mathcal{H}$. Довільний функціонал $J \in \mathcal{H}^*$, згідно теореми Ф. Рісса, можна подати у вигляді $J(u) = (u, v)$, де v – деякий фіксований елемент із $\mathcal{H}$. Оператор A^* , сполучений із A , ставить функціоналу J у відповідність лінійний обмежений функціонал F за правилом

$$F = A^*J \Leftrightarrow F(u) = J(Au) = (Au, v), \quad u \in \mathcal{H}.$$

Але, згідно теореми Ф. Рісса, $F(u) = (u, v^*)$, де $v^* \in \mathcal{H}$ – елемент, що однозначно визначається функціоналом F . Тоді маємо $(Au, v) = (u, v^*)$. Оскільки $v \in \mathcal{H}$ ототожнюється із $J \in \mathcal{H}$, а $v \in \mathcal{H}$ – із $F \in \mathcal{H}^*$, та $F = A^*J$, можна покласти $v^* = A^*v$. Значить, отримуємо

$$(Au, v) = (u, A^*v), \quad u, v \in \mathcal{H}. \quad (\text{Б.33})$$

Рівність (Б.33) відповідає визначенню сполученого оператора в евклідовому просторі і однозначно визначає оператор A^* , сполучений із A .

Лінійний обмежений оператор $A: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ називають *самосполученим*, якщо $A^* = A$. Тоді для будь-яких $u, v \in \mathcal{H}$ згідно (Б.33), справедлива рівність $(Au, v) = (u, Av)$. Це відповідає визначенню симетричного оператора та визначенню самосполученого оператора в евклідовому просторі. Самосполученими є оператори багатьох рівнянь математичної фізики. Наприклад, самосполучені оператори, що діють у комплексному гільбертовому просторі, знаходять прикладання у квантовій механіці.

Б.6 Критерій базисності системи функцій

Нехай $\mathcal{B}$ – банахів простір, $\mathcal{B}^*$ – його сполучений простір, тобто простір усіх лінійних неперервних функціоналів в $\mathcal{B}$. Нагадаємо, що система $\{x_n \subset \mathcal{B}\}$ є замкнута у $\mathcal{B}$, якщо замикання лінійної оболонки цієї системи збігається із $\mathcal{B}$.

Систему $\{x_n \in \mathcal{B}\}$ називають *мінімальною* в $\mathcal{B}$, якщо для довільного $k \in \mathbb{N}$ елемент $x_k \notin X_k$, де X_k – замикання лінійної оболонки елементів $\{x_n\}$ при $n \neq k$. Систему $\{x_n, y_n\}$ пар елементів $x_n \in \mathcal{B}$ і $y_n \in \mathcal{B}^*$ називають *біортонормальною*, якщо $y_m(x_n) = 0$ при $n \neq m$, та *біортонормованою*, якщо

$$y_m(x_n) = \begin{cases} 1, & n = m, \\ 0, & n \neq m. \end{cases}$$

У скінченновимірному лінійному нормованому просторі елементи біортонормованої системи утворюють біортонормальні (або взаємні) бази.

Нехай $\{x_n, y_n\}$ – біортонормована система. Тоді $\{y_n\}$ називають системою, що сполучена із системою $\{x_n\}$. Якщо $\{x_n\}$ – замкнута система у банаховому просторі $\mathcal{B}$, сполучена із нею система (якщо вона існує) єдина. Для існування у даної послідовності $x_n \in \mathcal{B}$ послідовності $y_n \in \mathcal{B}^*$, що утворює із x_n біортонормовану систему, потрібно, щоб система x_n була мінімальною в $\mathcal{B}$.

Нагадаємо, що систему $\{x_n \subset \mathcal{B}\}$ називають *базисом*, якщо для довільного елемента $x \in \mathcal{B}$ існує єдиний ряд

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n, \quad (\text{Б.34})$$

що збігається до x за нормою простору $\mathcal{B}$, де $a_n(x)$ – функціонали, що визначені в $\mathcal{B}$.

Критерій базисності системи функцій у банаховому просторі.

Теорема 7. Для того щоб система $\{x_n \subset \mathcal{B}\}$ була базисом у банаховому просторі $\mathcal{B}$, необхідно і достатньо, щоб виконувалися три умови:

- 1) $\{x_n\}$ замкнута у $\mathcal{B}$;
- 2) $\{x_n\}$ мінімальна у $\mathcal{B}$;
- 3) існує таке число $M > 0$, що для будь-яких $x \in \mathcal{B}$ та $N \in \mathbb{N}$ справджується нерівність

$$\left\| \sum_{n=1}^N y_n(x) x_n \right\| \leq M \|x\|,$$

$\{y_n\}$ – система, сполучена із $\{x_n\}$.

Додаток В

Програмний код реалізації задачі Коші

```
#include <stdlib.h>
#include <string.h>
#include <malloc.h>
#include <stdio.h>
#include <conio.h>
#include <math.h>
#include <time.h>

#define PRN printf("\n")
#define PI 3.1415926536
long double pi=PI;

int kradm (long double *, long double, long double, long double *,
           long double *, long double *, long double, int, int);
           // y,a,b,qv,tv,dlt,n,m.
void df(long double *, long double, long double *, long double *,
        long double *);
long double norm (long double *, int);

int eiler(long double *, long double , long double , long double *,
          long double , int, int);

main()
{
    FILE *fcl;
    int i, k, m, n, nn, nm, nk;
    static long double z1[500], y1[500], qq[10], y01[4]={1.7,6.8,0.,0},
                    tt[7]={0.,0.3,0.45,0.64,0.68,0.98,1};
    long double *y, *z, *y0, *qv, *tv, a, b, dlt;
    y=y1; y0=y01;
    z=z1;
    qv=qq;
    tv=tt;
    a=0.; b=(tv+1);

    dlt=.001;
    m=2; n=10;
    printf("\n\t m=%u; v_0=3*Q/pi*(2*y^2_1-y^2_0)/(y_1*r);\n",m);
    printf("\n\t y_1=3*Q/pi*y^2_1/r; y0_0=%8.2f, y0_1=%8.2f\n",
           *y0, *(y0+1));
    printf("\n\t interval of time tv[7]\n");
    for (i=0;i<7;i++) printf("%8.3g",*(tv+i));
    *qv=-314;
    *(qv+1)=*qv/2.;
    *(qv+2)=*(qv+3)=-( *qv)*( *(tv+1)+( *(tv+3)
        -(*(tv+2))))/2.)/( *(tv+6)-( *(tv+4)));
}
```

```

// Q_s=Q_E*[tv_1+1/2*(tv_3-tv_2)]/(tv_6-tv_4);
printf("\n\t Q=");
for (i=0;i<5;i++) printf("%10.3g",*(qv+i)); PRN;

nn=kradm(y,a,b,tv,qv,y0,dlt,n,m);

nm=nn*(m+1);
for (k=0;k<m;k++)
{ for (i=0;i<nn;i++)
  { nk=nn*k;
    *(z+i+nk)=*(y+m*i+k); }
  printf("\nk=%u: nk=%u\n",k,nk);
for (i=0;i<nn;i++) printf("%9.3g%c", *(z+i+nk), (i%8==7) ? '\n' : ' ');
PRN;
}
nk=m*nn;
for (i=0;i<nn;i++) *(z+i+nk)=*(y+i+nk);
printf("\nz(%u+i)=x(%u)\n",nk,nn);
for (i=0;i<nn;i++)
  printf("%7.3g%c",*(z+i+nk), (i%8==7) ? '\n' : ' '); PRN;
fcl = fopen("kradm.dat","w");
for (i=0;i<nm;i++) fprintf(fcl,"%g,",*(z+i));
fprintf(fcl,"%g",nn);
fclose(fcl);

}

void df(long double *v, long double x, long double *tv, long double *qv,
        long double *y)
{
  int i,k;
  long double a, q, q1, tc;
  printf("\n\t df:\tQ=");
  for (i=0;i<5;i++) printf("%10.3g",*(qv+i)); PRN;
  a=2.*(*y)*(5.*(*y+1))*(*y+1)-2.*(*y)*(*y));
  printf("\n\t df-input: x=%7.3f; a=%10.3g; y_0=%10.3g,
        y_1=%10.3g\n",x,a,*y,*y+1));

  /* if (x > *(tv+5)) ) q=0;
    printf("\n\t df: x=%7.3f; a=%10.3g\n",x,q);
  else */
  { if (x <= *(tv+1))
    { tc=2*pi*x/(*(tv+1));
      q=*qv/2.*(1-cos (tc)); }

    printf("\n\t df: x=%7.3f; qv=%10.3g; q=%10.3g\n",x,*qv,q);
  }
  /* else
    if (x>*(tv+1)) && x< (*(tv+2)) )
    { tc=0;
      q=*qv; }

    if ( x >= *(tv+2) && x<= *(tv+3) )
    { tc=2*pi*(x-(*(tv+2)))/(*(tv+3)-(*(tv+2)));

```

```

        q=*(qv+1)/2.*(1-cos (tc)); }

else
    if (x>*(tv+3) && x< *(tv+4)) )
        { tc=0;
          q=*(qv+1); }

    if ( x >= *(tv+4) && x<= *(tv+5) )
        { tc=pi*(x-*(tv+4))/(*(tv+5)-*(tv+4));
          q=*(qv+2)/2.*(1-cos (tc)); }

    if ( x >= *(tv+5) && x<= *(tv+6) )
        { tc=pi*(x-*(tv+5))/(*(tv+6)-*(tv+5));
          q=*(qv+3)/2.*(1+cos (tc)); }
} */
printf("\n\t df: x=%7.3f; a=%10.3g; q=%10.3g; y_0=%10.3g,
        y_1=%10.3g\n", x, a, q, *y, *(y+1));
*v=3/pi*q*(2.*(y+1)*(y+1))-2.*(y)*(y))/(*(y+1)*a);
*(v+1)=3/pi*q*(2.*(y+1)*(y+1))/a;
printf("\n df-out:\tx=%6.2g: a=%10.3g; v[2]=[%10.3g,
        %10.3g]\n", x, *v, *(v+1));

}

int kradm(long double *z, long double a, long double b, long double *tv,
        long double *qv, long double *y0, long double dlt, int n, int mm)
{
    int i, j, k, l, m, nn, m1, m2, k1, j1, l1, kk;
    long double *x, *q, *v, *w, *y, r1, h, dy;
    printf("\n\t n=%u, mm=%u\n", n, mm);
    nn=n*mm;
    // printf("\n\tï ¤ ç Š@èˆ - Æ¥â@¤ Šàë«@¢ -€¤ -á \n");
    q=(long double *)calloc(4*mm, sizeof(long double));
    v=(long double *)calloc(4*mm, sizeof(long double));
    w=(long double *)calloc(4*mm, sizeof(long double));
    x=(long double *)calloc(50, sizeof(long double));
    y=(long double *)calloc(4*mm, sizeof(long double));
    if ( q!=NULL && v!=NULL && w!=NULL && x!=NULL && y!=NULL )
    {
        h=2*(b-a)/n;
        for (i=0; i<4*mm; i++) *(q+i)=0.;
        dy=1.;
        *x=a;
        while ( dy > dlt )
        {
            h=h/2;
            printf("\n\t kradm: a=%6.2g: y0(1)=%8.3g,
                    y0(2)=%8.3g", a, *y0, *(y0+1));
            df(v, a, tv, qv, y0);
            for (m=0; m<mm; m++)
            { m1=4*m;
              *(z+m)=*(y+m)=*(y0+m);
            }
        }
    }
}

```

```

    *(q+m1)=*(v+m)*h; }
for (j=0; j<2; j++)
{
    for (l=0; l<3; l++)
    { for (k=0; k<=1-j; k++)
        { for (m=0; m<mm; m++)
            { m1=4*m;
              if ( l==0 )
                  *(y+m1+1)=*(y+m1)+(5.*(*(q+m1))+8.*(*(q+m1+1))
                      -(*(q+m1+2)))/12.;
              else
                  *(y+m1+l+1)=*(y+m1+l)+(8.*(*(q+m1+l))
                      -(*(q+m1+l-1))+5.*(*(q+m1+l+1)))/12.;
                  *(w+m)=*(y+m1+l+1);
            }
            r1=a+(l+1)*h;
            printf("\n\tkradm: h=%6.3g; x(%u)=%6.3g; w[3]=[%9.3g;
                %9.3g; %9.3g]",h,l,r1,*(w),*(w+1),*(w+2));
            df(v, r1, tv, qv, w);
            for (m=0; m<mm; m++)
            { m1=4*m;
              *(q+m1+l+1)=*(v+m)*h; }
            }
        }
    }
    for (m=0; m<mm; m++)
    { m1=4*m;
      *(w+m)=*(y+m1+3)-(*(y+m1+2))-(*(q+m1+3)+(*(q+m1+2)))/2.; }
    dy=norm(w,mm);
    printf("\n\tkradm:dy=%10.4g: dlt=%10.4g\n",dy,dlt);
    for (l=1;l<4;l++)
    { *(x+l)=a+l*h;
      // printf("\n\tkradm: h=%6.3g; x=%6.3g; y[%u]",h,a+l*h,mm);
      for (m=0; m<mm; m++)
      { m1=4*m;
        // printf("%11.4g",*(y+m1+l));
        m2=mm*l;
        *(z+m2+m)=*(y+m1+l); }
      // PRN;
    }
}
for (m=0; m<mm; m++)
{ m1=m*4;
  *(w+m)=*(y+m1+3); }
r1=a+3*h;
kk=4;
while ( r1 < b )
{
    *(x+kk)=r1;
    printf("\n kradm - adams:\t h=%6.3g; x=%6.3g; y[%u]",h,r1,mm);
    for (m=0; m<mm; m++)
    { m1=m*4;
      *(y+m1+3)=*(w+m)+(55.*(*(q+m1+3))-59.*(*(q+m1+2))
          +37.*(*(q+m1+1))-9.*(*(q+m1)))/24.;
    }
}

```

```

        m2=mm*kk;
        *(w+m)=*(y+m1+3);
        *(z+m2+m)=*(w+m);
        printf("%10.4g ",*(w+m));
    }

    df(v, r1, tv, qv, w);
    for (m=0; m<mm; m++)
    { m1=m*4;
      // printf("\n\tq[%u]= ",m);
      for (k=0;k<3;k++) *(q+m1+k)=*(q+m1+k+1);
      *(q+m1+3)=*(v+m)*h;
      // for (k=0;k<4;k++) printf("%9.4g ",*(q+m1+k));
    }
    r1+=h;
    kk+=1;
}
m1=kk*mm;
PRN;
for (l=0;l<kk;l++) *(z+m1+l)=*(x+l);
// printf("%7.3f%c",*(x+l), (i%8==7) ? '\n' : ' '); PRN;
free(y);
free(x); free(w);
free(v); free(q);
return(kk);
}
else
{ printf("\n no memory for q, v or w in Kradm\n");
  return(-1); }
}

long double norm (long double *y, int m)
{
    int k;
    long double ymax;
    printf("\n\t norm y=");
    for (k=0;k<m;k++) printf("%9.4g ",*(y+k));
    ymax=0.;
    for (k=0;k<m;k++)
        ymax=(fabs(*(y+k)) > ymax ) ? fabs(*(y+k)) : ymax;
    return(ymax);
}

int eiler(long double *z, long double a, long double b, long double *y0,
          long double dlt, int n, int mm)
{
    int k, l, m, m1, m2, l1, kk;
    long double *x, *y, *q, *q1, *v, *w, r1, r2, h;
    printf("\n\t ħ = ħ Š@è" - ħ¥â@â ...©«¥à \n");
    q=(long double *)calloc(n,sizeof(long double));
    q1=(long double *)calloc(n,sizeof(long double));
    v=(long double *)calloc(n,sizeof(long double));
    w=(long double *)calloc(n,sizeof(long double));
    x=(long double *)calloc(99,sizeof(long double));

```

```

y=(long double *)calloc(5*mm,sizeof(long double));
if ( q!=NULL && q1!=NULL && v!=NULL && w!=NULL && x!=NULL && y!=NULL)
{
    h=(b-(a))/n;
    for (m=0;m<mm;m++)
    {
        m1=4*m;
        *(z+m)=*(y0+m);
        *(q1+m)=*(y0+m);
    }
    r1=a;
    *x=a;
    kk=0;
    while ( r1 < b )
    {
        df(v,r1,q1);
        for (m=0;m<mm;m++)
        {
            *(q+m)=*(q1+m)+h*(*(v+m));
            printf("%9.4g ",*(q+m)); }
        r2=r1+h;
        for (k=0;k<3;k++)
        {
            df(w,r2,q);
            for (m=0;m<mm;m++)
            {
                m1=3*m;
                *(q+m)=*(q1+m)+h/2.*(*(v+m)+*(w+m));
                *(y+m1+k)=*(q+m);
                printf("\n k=%u; x=%6.3g; q1[%u,%u]=%8.3g;
                    y[%u,%u]=%8.3g",k,r2,mm,k,*(q1+m),mm,k,*(y+m1+k));
            }
        }
        for (m=0;m<mm;m++)
        {
            m1=3*m;
            *(v+m)=*(y+m1+2)-*(y+m1+1)); }
        if ( norm(v,mm) > dlt )
        {
            h=h/2.; }
        else
        {
            kk+=1;
            r1+=h;
            *(x+kk)=r1;
            printf("\n h=%6.3g; x=%6.3g; y[%u,%u]=",h,r2,mm,kk);
            for (m=0;m<mm;m++)
            {
                m1=3*m+2;
                printf("%9.4g ",*(y+m1));
                m2=mm*kk;
                *(z+m2+m)=*(y+m1);
                *(q1+m)=*(q+m);
            }
        }
    }
    m1=(kk+1)*mm;
    PRN;
    for (l=0;l<=kk;l++)
    {
        *(z+m1+l)=*(x+l);
        printf("%7.3g ",*(x+l)); }
}

```

```
    free(y); free(x);
    free(w); free(v);
    free(q1); free(q);
    return(kk);
}
else
{ printf("\n no memory for q, v or w in Euler\n");
  return(-1); }
}
```

Показчик

- антиген, 88, 197
- атрактор Лоренца, 38
- базис, 298
- вРНК, 233
- вакцинація, 210

- гепатит С, 225
- гепатоцит, 211
- гомеоморфізм, 277
- густина
 - потoku, 19
 - енергії, 19
 - маси, 19
- ефектор, 205, 206

- завихреність, 62
- задача
 - управління, 26
 - Діріхле крайова, 190
 - Діріхле, 51
 - ідентифікації, 29
 - Коші, 35, 153
 - крайова, 111
 - Штурма-Ліувілля, 192
- закон
 - управління, 28
 - Дарсі, 20
 - Фіка, 20
 - Нав'є-Стокса, 186
 - Фур'є, 20

- імуноглобулін, 201
- імуноглобулін, 210
- імуноterapia, 201
- інтеграл Коші-Лагранжа, 59
 - інтерферон, 220
- інтерферон-а, 226
- інтерлейкін, 88, 195,-2, 222
- інтерлейкін-1, 221
 - інтерлейкін-2, 220

- капсид, 233
- клітини плазматичні, 198
- коефіцієнт
 - теплопровідності, 48
 - в'язкості, 186
 - фільтрації, 20
- коливання неізохронне, 115
- кортизол, 220

критерій
 Хаусдорфа, 277
 квадратичний, 27
 Рісеа, 277
 лімфоцит, 198

хелпер, 206

макрофаг, 206, 221

матриця
 Грама, 140
 число обумовленості, 98

модель хижак-жертва, 179

метод
 Галеркіна-Петрова, 125
 моментів, 125
 асимптотичний, 112
 Бубнова-Галеркіна, 139, 143
 Фур'є, 112
 малого параметра, 99
 нев'язок
 зважених, 125
 ортогональних проекцій, 124
 послідовних наближень, 93
 проекційний, 124
 Рітца, 140
 розділення змінних, 192

множина
 компактна, 276

напруження
 термopужні, 108

напружень девіатор, 61

нерівність
 Коші-Буняковського, 285
 Мінковського, 275
 Шварца, 285

нев'язка, 98

оператор
 Гамільтона, 18
 лінійний, 94
 зворотний, 94
 сполучений, 296
 бігармонічний, 65

осцилятор, 112
 Дуффінга, 114
 гармонічний, 113
 Ван дер Поля, 38

перетворення
 Гауса, 182
 Лапласа, 175

плазмоцит, 88

плазмоклітина, 199

портрет фазовий, 78

послідовність фундаментальна, 276

принцип

Даламбера, 181
 максимуму, 203
 проліферація, 89, 206
 простір
 банахів, 96, 283
 енергетичний, 293
 фазовий, 24
 Фреше, 276
 гільбертовий, 285
 метричний, 271, 274
 повний, 276
 нормований, 283
 сепарабельний, 273, 274, 277
 нормований, 103
 рибавірин, 225, 230
 рибосома, 233
 рівняння
 бігармонічне, 63
 Бусінеска, 50
 Даламбера, 186
 Ейлера, 55, 182
 Фішера, 83
 Гельмгольца, 60
 інтегральне, 95
 КПП, 83
 Лапласа, 111
 Нав'є-Стокса, 187
 переносу, 45
 Пуассона, 108, 190
 трансцендентне, 114
 Пуассона, 62
 сепаратриса, 36
 середовище
 бароклінне, 183
 баротропне, 183
 система
 автономна, 34
 біортонормована, 297
 динамічна, 22
 стаціонарна, 25
 дисипативна, 37
 імунна, 197
 стан
 рівноваги, 36
 системи, 22
 течія
 Пуазейля, 190
 тензор
 швидкостей деформації, 185
 теорема
 Абеля, 105
 тепломісткість, 46
 цитокін, 88

число

Біо, 110

Фур'є, 142

Член секулярний, 115

Формула Остроградського-Гауса, 18

Сатерленда, 188

функціонал

білінійний, 291

енергії, 140

квадратичний, 291

функція

аналітична, 104

базисна, 139

перехідна, 22

повірочна, 144

проекційна, 139

току, 62

управління

автоматичне, 28