

Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

**Функції комплексної змінної. Операційне числення.
Векторний аналіз**
Збірник задач

для студентів технічних спеціальностей

Функції комплексної змінної. Операційне числення. Векторний аналіз. Збірник задач для студентів технічних спеціальностей / Уклад.: З.П.Ординська, Л.А.Репета. – К.: НТУУ «КПІ ім. Ігоря Сікорського», 2017.- 68 с.

*Гриф надано Методичною радою ФМФ НТУУ «КПІ»
(Протокол № 5 від 25. 05. 2017)*

Навчальне видання

**Функції комплексної змінної. Операційне числення. Векторний аналіз.
Збірник задач**
для студентів технічних спеціальностей

Укладачі: *Ординська Зоя Павлівна, канд. фіз.-мат. наук, доц.
Репета Леся Анатоліївна, канд. фіз.-мат. наук, доц.*

Відповідальний
редактор *О. І. Клесов, д-р. фіз.-мат. наук, професор.*

Рецензент *В. І. Стогній, канд. фіз.-мат. наук, доц.*

*За редакцією укладачів
Електронна версія*

Київ 2017

ВСТУП

У даній роботі пропонуються задачі і вправи з деяких спеціальних розділів вищої математики для студентів усіх інженерних факультетів, які відповідають програмному матеріалу з вищої математики. Цей збірник складається з розділів «Елементи теорії функцій комплексної змінної», «Ряди у комплексній площині», «Теорія лишків», «Операційне числення», «Векторний аналіз», відповідей і вказівок до розв'язання наведених задач.

Велика кількість задач, відповіді до яких розміщені в кінці кожного параграфа цієї роботи, робить її корисною для студентів заочної форми навчання, особливо враховуючи, що перед кожним розділом розміщено необхідні теоретичні відомості, які мають довідниковий характер. Підбір задач у порядку зростання їх складності робить успішною самостійну роботу студентів над ними.

Елементи теорії функцій комплексної змінної

Комплексним називають число $z = a + bi$, де $a = \operatorname{Re} z = R(z)$,
 $b = \operatorname{Im} z = I(z)$ – дійсні числа, $i^2 = -1$.

Модуль комплексного числа знаходять за формулою

$$|z| = \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} \geq 0, |z|^2 = z \cdot \bar{z},$$

де $\bar{z} = a - bi$ – **спряжене число**.

Тригонометрична форма комплексного числа

$$z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Показникова форма комплексного числа

$$z = |z|e^{i\varphi}, \quad \varphi = \arg z = \operatorname{arctg} \frac{b}{a}$$

Головне значення аргумента φ змінюється в межах $-\pi < \varphi \leq \pi$
і може бути обчислене за формулою

$$\varphi = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{b}{a}, & a > 0, \\ \frac{\pi}{2}, & a = 0, b > 0, \\ 0, & a = b = 0, \\ -\frac{\pi}{2}, & a = 0, b < 0, \\ \pi + \operatorname{arctg} \frac{b}{a}, & a < 0, b \geq 0, \\ -\pi + \operatorname{arctg} \frac{b}{a}, & a < 0, b < 0. \end{cases}$$

Додають і віднімають комплексні числа $z_1 = a_1 + ib_1$, $z_2 = a_2 + ib_2$ за формулами:

$$z_1 \pm z_2 = (a_1 \pm a_2) + i(b_1 \pm b_2).$$

Множення та ділення чисел $z_1 = a_1 + ib_1$ і $z_2 = a_2 + ib_2$ виконується за формулами

$$z_1 z_2 = |z_1| |z_2| e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}; \quad \frac{z_1}{z_2} = \left| \frac{z_1}{z_2} \right| e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}.$$

Формула Муавра

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi$$

є наслідком загальної формули піднесення числа $z = |z| e^{i\varphi}$ до дійсного степеня α :

$$z^\alpha = |z|^\alpha e^{i\alpha\varphi}.$$

Якщо $z = x + iy$, $w = u + iv$ – змінні величини, причому $w = f(z)$, тобто w є функцією аргумента z , то $u = u(x, y)$ і $v = v(x, y)$ – дві дійсні функції дійсних змінних.

Похідну функції $w = f(z)$ за змінною z можна обчислити за формулами

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{або} \quad \frac{dw}{dz} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y},$$

Звідки

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \quad (1)$$

Геометричний зміст модуля і аргументу похідної:

$\left| \frac{dw}{dz} \right| = |w'(z_0)|$ визначає спотворення масштабу в точці z_0 , $\arg w'(z_0)$

задає кут повороту дотичної в точці z_0 при відображенні площини z на площину w функцією $w = f(z)$.

Умови (1) є необхідними і достатніми для диференційовності функції $w = w(u, v)$, якщо частинні похідні $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$ неперервні. Їх називають **умовами Коші-Рімана**.

Якщо $w = u + iv$ є диференційовною функцією, то її дійсну $\operatorname{Re} w = u(x, y)$ і уявну $\operatorname{Im} w = v(x, y)$ частини називають **спряженими гармонійними функціями**. Вони задовольняють рівняння Лапласа

$$\Delta \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0.$$

Якщо відома одна з них, наприклад $u(x, y)$, то спряжену до неї функцію $v(x, y)$ можна знайти за формулою

$$v(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy.$$

Функцію $w = u + iv$ називають **аналітичною**, якщо функції $u(x, y)$ і $v(x, y)$ мають неперервні частинні похідні, які задовольняють умовам Коші-Рімана.

Якщо функції $f(z), \varphi(z)$ аналітичні, то справедливі формули:

$$\frac{d}{dz} [f(z) \pm \varphi(z)] = \frac{df(z)}{dz} \pm \frac{d\varphi(z)}{dz};$$

$$\frac{d}{dz} [f(z)\varphi(z)] = f(z) \frac{d\varphi(z)}{dz} + \varphi(z) \frac{df(z)}{dz};$$

$$\frac{df[\varphi(z)]}{dz} = \frac{df}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dz}.$$

Інтеграл від комплексної функції $w = u + iv$ вздовж кривої L обчислюють за формулою

$$\int_L w(z) dz = \int_L u dx - v dy + i \int_L u dy + v dx.$$

У випадку замкненого контура L і функції, аналітичної в області і неперервної на її границі, має місце **основна теорема Коші**:

$$\oint_L w(z) dz = 0.$$

На її основі можливо одержати **формулу Коші**

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = f(z),$$

яка дозволяє обчислити значення аналітичної в області функції у внутрішній точці за її значенням на границі області.

З теореми Коші випливає формула Ньютона-Лейбница:

$$\int_{z_0}^z f(z) dz = F(z) - F(z_0),$$

де $\frac{dF(z)}{dz} = f(z).$

У області аналітичності аналітична функція має похідні усіх порядків; ці похідні обчислюють за формулою

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_L \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi.$$

Функціональний ряд

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n,$$

$$\text{де } c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi$$

називають **рядом Тейлора**. Він збіжний в колі $|z - z_0| < R$, де

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|c_n|}{|c_{n+1}|} \quad \text{за умови, що ця границя існує. Контур } L \text{ лежить}$$

повністю всередині кола і обходить точку z_0 один раз.

$$\text{Ряд } f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad \text{де } c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi,$$

називають **рядом Лорана**.

Цей ряд збіжний в кільці $r < |z - z_0| < R$. Контур L лежить цілком в цьому кільці і обходить внутрішнє коло радіуса r .

Частину ряду Лорана з додатними степенями $(z - z_0)$

$$c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \dots$$

називають **правильною частиною ряду**, і вона є збіжним рядом у колі $|z - z_0| < R$, а другу частину

$$\frac{c_{-1}}{z - z_0} + \frac{c_{-2}}{(z - z_0)^2} + \dots + \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n} + \dots$$

називають **головною частиною ряду Лорана**. Вона є рядом, що збігається в області $|z - z_0| > r$.

Коефіцієнт

$$C_{-1} = \frac{1}{2\pi} \oint_L f(z) dz = \operatorname{res}_{z=z_0} f(z)$$

називають **лишком функції** $f(z)$ відносно точки z_0 . Точку z_0 називають **полюсом функції** $f(z)$ **кратності** n , якщо головна частина ряду Лорана містить n членів, тобто має вигляд

$$\frac{C_{-1}}{z-a} + \frac{C_{-2}}{(z-a)^2} + \dots + \frac{C_{-n}}{(z-a)^n}.$$

Коли $n=1$ полюс називають **простим**. Якщо головна частина ряду Лорана є рядом, то точку z_0 називають **суттєво особливою точкою**.

Лишок функції $f(z)$ відносно полюса z_0 кратності k знаходять за формулою

$$\operatorname{res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \left[(z-z_0)^n f(z) \right].$$

У частинному випадку при $k=1$

$$\operatorname{res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} [f(z)(z-z_0)].$$

Якщо $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, де $\psi'(z_0) \neq 0$, а $\psi(z)$ має у точці z_0 простий нуль, то

$$\operatorname{res} f(z) = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}.$$

Лишки відіграють важливу роль при обчисленні інтегралів. Це впливає з **теорему Коші про лишки**: якщо аналітична функція $w = f(z)$ має всередині контура L полюси $z_i, i=1,2,\dots,n$, а на самому контурі L – аналітична, то

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L f(z) dz = \sum_{i=1}^n \operatorname{res}_{z=z_i} f(z).$$

Інтеграл

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N - P$$

називають **логарифмічним лишком**. Від дорівнює різниці між числом нулів N і числом полюсів P функції $f(z)$ з урахуванням їх кратності, що розміщені в середині контура L , на якому і в області, що цим контуром обмежена, функція $f(z)$ аналітична.

Дробово-лінійну функцію $w = f(z)$, що конформно відображає всю площину z на всю площину w так, щоб точки z_1, z_2, z_3 перейшли в точки w_1, w_2, w_3 , знаходять з рівняння

$$\frac{w - w_1}{w - w_2} \cdot \frac{w_3 - w_2}{w_3 - w_1} = \frac{z - z_1}{z - z_2} \cdot \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1}.$$

Функція $w = e^z$ перетворює смугу $0 \leq \operatorname{Im} z = y < 2\pi$ у всю площину.

Функція $w = \ln z$ відображає верхню півплощину в смугу $0 \leq \operatorname{Im} w = v < \pi$. Функція $w = z^n$, де $n > 0$ – ціле, відображає кут $0 < \varphi < \frac{2\pi}{n}$ на всю площину.

Практичні завдання для самостійної роботи

§1. Комплексні числа і функції комплексної змінної

1. Записати числа в тригонометричній формі:

- 1) $z = 4 + 4i$; 2) $z = -1 + i\sqrt{3}$; 3) $z = 1 - i$; 4) $z = 1 + i\sqrt{3}$; 5) $z = 2 - 2i$;
6) $z = -\sqrt{3} - i$; 7) $z = -2 + i\sqrt{2}$; 8) $z = 3$; 9) $z = -2$; 10) $z = 3i$; 11) $z = -2i$.

2. Обчислити за формулою Муавра:

- 1) $(1+i)^{10}$; 2) $(1-i\sqrt{3})^6$; 3) $(-1+i)^5$; 4) $(\sqrt{3}+i)^3$; 5) $(1-i)^6$;
 6) $(2+i\sqrt{12})^5$.

3. Записати числа $1, i, -2, -i, 5, 1-i\sqrt{3}$ у показниковій формі.

4. Доведіть, що:

$$1) \frac{(1-i)^2}{(1+i)^2} = -1; \quad 2) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{100} = -1; \quad 3) \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} \right)^{21} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}.$$

5. Знайти модуль чисел:

$$1) z = (5-12i)(3+4i); \quad 2) z = (2+3i):(1+i); \quad 3) z = \sqrt{3+4i} - \sqrt{3-4i}.$$

6. Доведіть, що при $A = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}; B = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ справедливі рівності:

$$1) A^3 = 1; \quad 2) B^3 = 1; \quad 3) A^2 = B; \quad 4) B^2 = A; \quad 5) A^{3n} = B^{3n} = 1.$$

7. Записати в тригонометричній комплексній формі вирази:

$$1) \sqrt{1+i}; \quad 2) \sqrt{-1}; \quad 3) \sqrt[3]{1}; \quad 4) \sqrt[4]{-16}; \quad 5) \sqrt[3]{1+i}.$$

8. Обчислити всі значення $\sqrt[3]{-8}$.

9. Доведіть, що корені рівняння $x^n - 1 = 0$ визначаються за формулою

$$x_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n} \quad (k = 0, 1, \dots, (n-1)).$$

10. Розв'язати рівняння

$$x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0.$$

11. а) Виразити $\cos nx$ і $\sin nx$ через степені $\sin x$ і $\cos x$ за допомогою формули Муавра.

б) Виразити $\sin^4 x$, $\cos^4 x$, $\sin^5 x$, $\cos^5 x$ через синуси і косинуси кратних дуг.

12. Обчислити дійсну і уявну частини функцій:

1) z^4 ; 2) $az^2 + bz + c$, де a, b, c – дійсні числа; 3) e^{z^2} ; 4) $z^2 \sin z$.

13. Зобразити у комплексній площині множину точок z , для яких:

1) $|z| \leq 2$; 2) $|z| > 2$; 3) $\operatorname{Re} z \geq \frac{1}{2}$; 4) $\operatorname{Re}(z^2) = a$; 5) $|z^2 - 1| = a > 0$;

6) $\left| \frac{z-1}{z+1} \right| \leq 1$.

14. Яка залежність існує між:

1) $\arccos z$ і $\ln z$; 2) $\operatorname{arctg} z$ і $\ln z$?

15. Дано: $w = u + iv = \ln(z - c)$. Знайти u і v , якщо $c = a + bi$,
 $z = x + iy$.

16. Розв'язати рівняння:

1) $\sin z = 2$; 2) $\cos z = 0$.

17. Дослідити функцію $a^z = e^{z \ln a}$. Що означає i^i ?

18. Нехай точка z рухається вздовж променя, який виходить із початку координат. Показати, що:

1) $\lim |e^z| = +\infty$ при $-\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{\pi}{2}$; 2) $\lim |e^z| = 0$ при $\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{3\pi}{2}$.

Відповіді

1. 1) $z = 4\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$; 2) $z = 2 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right)$;

3) $z = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4} \right)$; 4) $z = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$;

5) $z = 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4} \right)$; 6) $z = 2 \left(\cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6} \right)$;

7) $z = 2 \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)$; 8) $z = 3(\cos 0 + i \sin 0)$;

$$9) z = 2(\cos \pi + i \sin \pi); 10) z = 3\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right);$$

$$11) z = 2\left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2}\right).$$

$$2. 1) (\sqrt{2})^{10} \left(\cos \frac{10\pi}{4} + i \sin \frac{10\pi}{4}\right) = 32i; 2) 64; 3) 4\sqrt{2}(1-i); 4) 8i; 5) 8i;$$

$$6) 512(1-i\sqrt{3}). \quad 3. 1 = e^{2k\pi i}; \quad i = e^{\frac{\pi}{2}i+2k\pi i}; \quad -2 = 2e^{\pi i+2k\pi i}; \quad -i = e^{-\frac{\pi}{2}i+2k\pi i};$$

$$5 = 5e^{2k\pi i}; \quad 1-i\sqrt{3} = 2e^{-\frac{\pi}{3}i+2k\pi i}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad 5. |z| = |z_1||z_2| = 13 \cdot 5 = 65;$$

$$2) |z| = \sqrt{\frac{13}{2}}; 3) \frac{1}{4}.$$

6. Застосувати формулу Муавра.

$$7. 1) \sqrt[4]{2} \left(\cos \frac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{2} + i \sin \frac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{2}\right); 2) \cos \frac{\pi(2k+1)}{2} + i \sin \frac{\pi(2k+1)}{2};$$

$$3) \cos \frac{2k\pi}{3} + i \sin \frac{2k\pi}{3}; 4) 2 \left(\cos \frac{\pi(2k+1)}{4} + i \sin \frac{\pi(2k+1)}{4}\right);$$

$$5) \sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{3} + i \sin \frac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{3}\right), \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots \quad 8. \sqrt[3]{-8} = \begin{cases} 1+i\sqrt{3}, \\ -2, \\ 1-i\sqrt{3}. \end{cases}$$

10. Указівка. Розв'язати рівняння $x^7 - 1 = 0$. Корені заданого рівняння будуть

$$x = \cos \frac{2k\pi}{7} + i \sin \frac{2k\pi}{7}, \quad k = 1, 2, 3, 4, 5, 6.$$

11. Розв'язання. $(\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx$, але

$$a) (\cos x + i \sin x)^n = \cos^n x + i C_n^1 \cos^{n-1} x \sin x - C_n^2 \cos^{n-2} x \sin^2 x -$$

$$-iC_n^3 \cos^{n-3} x \sin^3 x + \dots;$$

$$\cos nx = \cos^n x - C_n^2 \cos^{n-2} x \sin^2 x + C_n^4 \cos^{n-4} x \sin^4 x - \dots,$$

$$\sin nx = n \cos^{n-1} x \sin x - C_n^3 \cos^{n-3} x \sin^3 x + C_n^5 \cos^{n-5} x \sin^5 x + \dots$$

$$\text{б) } \cos x + i \sin x = z, \quad \cos x - i \sin x = \bar{z}, \quad \cos kx + i \sin kx = z^k.$$

$$\cos kx - i \sin kx = \bar{z}^k, \quad z^k + \bar{z}^k = 2 \cos kx, \quad z^k - \bar{z}^k = 2i \sin kx, \quad z\bar{z} = 1.$$

$$\begin{aligned} \sin^4 x &= \left(\frac{z - \bar{z}}{2i} \right)^4 = \frac{1}{2^4} (z - \bar{z})^4 = \frac{1}{2^4} (z^4 - 4z^3\bar{z} + 6z^2\bar{z}^2 - 4z\bar{z}^3 + \bar{z}^4) = \\ &= \frac{1}{2^4} (z^4 + \bar{z}^4 - 4z\bar{z}(z^2 + \bar{z}^2) + 6z^2\bar{z}^2) = \frac{1}{2^4} (2 \cos 4x - 8 \cos 2x + 6) = \\ &= \frac{1}{8} \cos 4x - \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{3}{8}. \end{aligned}$$

Аналогічно

$$\cos^4 x = \frac{1}{8} \cos 4x + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{3}{8}; \quad \sin^5 x = \frac{1}{16} \sin 5x - \frac{5}{16} \sin 3x + \frac{5}{8} \sin x;$$

$$\cos^5 x = \frac{1}{16} \cos 5x + \frac{5}{16} \cos 3x + \frac{5}{8} \cos x;$$

$$12. 1) \operatorname{Re}(z^4) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4; \quad \operatorname{Im}(z^4) = 4x^3y - 4xy^3;$$

$$2) \operatorname{Re}(az^2 + bz + c) = ax^2 - ay^2 + bx + c; \quad \operatorname{Im}(az^2 + bz + c) = 2axy + by;$$

$$3) \quad e^{z^2} = e^{(x+iy)^2} = e^{x^2-y^2} (\cos 2xy + i \sin 2xy), \quad \operatorname{Re}(e^{z^2}) = e^{x^2-y^2} \cos 2xy;$$

$$\operatorname{Im}(e^{z^2}) = e^{x^2-y^2} \sin 2xy.$$

$$4) \operatorname{Re}(z^2 \sin z) = (x^2 - y^2)(\sin x \operatorname{ch} y) - 2xy \cos x \operatorname{sh} y,$$

$$\operatorname{Im}(z^2 \sin z) = (x^2 - y^2)(\cos x \operatorname{sh} y) + 2xy \sin x \operatorname{ch} y.$$

13. 1) У колі та на його границі з центром в початку координат з радіусом 2; 2) Поза цим колом; 3) У правій півплощині, що

описується нерівністю $x \geq \frac{1}{2}$; 4) На гіперболі або на парі прямих при

$a = 0$; 5) $|x^2 - y^2 + i2xy - 1| = a; (x^2 + y^2)^2 + 2(y^2 - x^2) = a^2 - 1$ — на лемніскаті;

$$6) \left| \frac{z-1}{z+1} \right| = \frac{|z-1|}{|z+1|} = \frac{\sqrt{x^2 - 2x + 1 + y^2}}{\sqrt{x^2 + 2x + 1 + y^2}} \leq 1,$$

$\sqrt{x^2 - 2x + 1 + y^2} \leq \sqrt{x^2 + 2x + 1 + y^2}$; $4x \geq 0$, в правій півплощині та на її границі.

$$14. 1) \arccos z = -i \operatorname{Ln} \left(z + \sqrt{z^2 + 1} \right); 2) \operatorname{Arctg} z = -\frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{1 + iz}{1 - iz}.$$

$$15. w = \ln(x + yi - a - bi) = \ln|x - a + i(y - b)| = \ln \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} + i \arg(z - c) = \ln \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} + i \operatorname{arctg} \frac{y - b}{x - a};$$

$$u = \ln \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}, v = \operatorname{arctg} \frac{y - b}{x - a}.$$

$$16. 1) z = \operatorname{Arcsin} 2, \text{ але так як } \operatorname{Arcsin} w = -i \operatorname{Ln} \left(iw + \sqrt{1 - w^2} \right) i$$

$$\operatorname{Ln}(w) = \ln|w| + i \arg w + 2k\pi i, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \text{ то}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Arcsin} 2 &= -i \operatorname{Ln} \left(2i \pm i\sqrt{3} \right) = -i \operatorname{Ln} \left(\left(2 \pm \sqrt{3} \right) i \right) = \\ &= -i \left[\ln \left(2 \pm \sqrt{3} \right) + i \frac{\pi}{2} + 2k\pi i \right] = \frac{\pi}{2} - i \ln \left(2 \pm \sqrt{3} \right) + 2k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; \end{aligned}$$

2) Аналогічно для $\cos z = 0$ одержимо:

$$z = \left(2k \pm \frac{1}{2} \right) \pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$17. a^z = e^{z \operatorname{Ln} a} = e^{\ln a + 2k\pi i} = e^{\ln a} e^{2k\pi i} = e^{\ln a};$$

$$i^i = e^{i \operatorname{Ln} i} = e^{i \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi i \right)} = e^{-\frac{\pi}{2} - 2k\pi}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \text{ Головні значення}$$

$$\text{величини } i^i = e^{-\frac{\pi}{2}}.$$

§2. Диференціювання функцій комплексної змінної

1. Установити виконання умов Коші-Рімана.

$$1) f(z) = z; \quad 2) f(z) = z^2; \quad 3) f(z) = z^n; \quad 4) f(z) = e^z; \quad 5) f(z) = \cos z;$$

$$6) f(z) = \sin z.$$

2. Показати, що при $z \neq 0$ функції $w = \bar{z}, f(z) = |z|^2, f(z) = z \operatorname{Re}(z)$ не мають похідної.

Продиференціювати дані аналітичні функції:

$$3. w = e^{2z+3} \left(z^2 - z + \frac{1}{2} \right). \quad 4. w = \frac{2 \sin^2 z}{\cos 2z}. \quad 5. w = \frac{\sqrt[9]{4z^5 + 2}}{3z^4}.$$

$$6. w = \arcsin \sqrt{\sin z}. \quad 7. w = \cos \frac{\arcsin z}{2}. \quad 8. w = \ln \frac{z + \sqrt{1 - z^2}}{z}.$$

$$9. w = z \arcsin(\ln z). \quad 10. w = \operatorname{tg} \frac{1 - e^z}{1 + e^z}. \quad 11. w = z \cdot 10^{\sqrt{z}}. \quad 12. z^3 \operatorname{arctg} z^3.$$

$$13. w = (\sin z)^{\cos z}. \quad 14. w = (\ln z)^z.$$

15. Знайти коефіцієнти розтягу і кут повороту у точці z для відображення $w = f(z)$:

$$1) w = \frac{z+2}{z-i}, z_1 = 2i; \quad 2) w = e^z, z_1 = i; \quad 3) w = \frac{1}{z}, z_1 = 3i.$$

16. Знайти лінії рівного розтягу і лінії рівного кута повороту за відображенням: 1) $w = z^3$; 2) $w = e^z$.

Відповіді

1. Перейти до полярних координат. **3.** $w' = 2z^2 e^{2z+3}$. **4.** $w' = \frac{2 \sin 2z}{\cos^2 2z}$.

5. $w' = \frac{-4(31z^5 + 18)}{9z(4z^5 + 2)}$. **6.** $w' = \frac{\cos z}{2\sqrt{\sin z - \sin^2 z}}$. **7.** $w' = \frac{\sin(\arcsin z)}{2\sqrt{1-z^2}}$.

8. $w' = -\frac{1}{z\sqrt{1-z^2}\left(z + \sqrt{1-z^2}\right)}$. **9.** $w' = \arcsin(\ln z) + \frac{1}{\sqrt{1-\ln^2 z}}$.

10. $w' = -\frac{2e^z}{(1+e^z)^2} \sec^2 \frac{1-e^z}{1+e^z}$. **11.** $w' = 10^{\sqrt{z}} \left(1 + \frac{\sqrt{z}}{2} \ln 10\right)$.

12. $w' = 3z^2 \operatorname{arctg} z^3 + \frac{3z^5}{1+z^6}$. **13.** $w' = (\sin z)^{\cos z} \left(\frac{\cos^2 z}{\sin z} - \sin z \ln \sin z \right)$.

14. $w' = (\ln z)^z \left(\ln \ln z + \frac{1}{\ln z} \right)$.

15. 1) $w'_{|z=2i} = 2 + i, \rho = |2 + i| = \sqrt{5}, \varphi = \arg w'(2i) = \arg(2 + i)$;

2) $\rho = 1, \varphi = \arg w'_{|z=i} = \arg e^i = 1$; 3) $\rho = \frac{1}{9}, \varphi = 0$.

16. 1) $|w'| = c, |z^2| = c, x^2 + y^2 = c$ — коло, $\arg w' = \arg z^2 = 2\varphi = c$ —

промінь з полюса.

2) $z = x + iy, |w'| = c, |e^z| = e^x = \text{const}, x = \text{const}$.

$\arg w' = \arg e^z = y = \text{const}$.

§3. Інтеграл в комплексній площині

1. Обчислити $\int_0^{2+i} \operatorname{Re} z dz$, якщо шлях інтегрування – прямолінійний

відрізок $z = (2+i)t$, $0 \leq t \leq 1$; обчислити цей інтеграл, якщо шлях інтегрування є ламана, перша ланка якої прямолінійний відрізок $[0, 2]$, а друга – відрізок $[2, 2+i]$.

2. Обчислити інтеграл $\int_{-i}^i |z| dz$, якщо шлях інтегрування є ліва

половина кола радіуса 1.

3. Обчислити інтеграл $\int_{-1}^1 |z| dz$, інтегруючи вздовж:

- 1) прямолінійного відрізка;
- 2) верхньої половини кола радіуса 1;
- 3) нижньої половини цього кола.

4. Знайти аналітичні функції $w = u + iv$, якщо:

- 1) $u = x^2 - y^2 + xy$, $w(0) = 0$;
- 2) $v = 2xy + 3x$;
- 3) $v = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$, $x > 0$.

5. Які значення можуть приймати інтеграли, якщо обчислювати їх вздовж того шляху, вздовж якого підінтегральна функція неперервна:

- 1) $\int_1^2 \frac{dz}{z}$;
- 2) $\int_l \frac{dz}{z-a}$, де l – замкнений контур.

6. Обчислити інтеграл $\int_C \frac{e^z dz}{z(z-2i)}$, де C – коло радіуса 2 з центром у точці $z = 3i$.

7. Обчислити інтеграл за допомогою формули Коші

$$1) \int_{|z|=1} \frac{\sin z}{z} dz; 2) \int_{|z|=3} \frac{\cos z}{z-1} dz; 3) \int_{|z|=3} \frac{e^{-z+z^2}}{(z-1)^2} dz.$$

8. Обчислити $\int_C \frac{z^2 dz}{z-2i}$, якщо

1) C – коло радіуса 3 з центром в початку координат;

2) C – коло радіуса 1 з центром в точці $z=0$.

9. $\int_C \frac{\sin z}{z+i} dz$, де C – коло радіуса 3 з центром в точці $z=-i$.

10. За допомогою інтеграла Коші обчислити $\int_C \frac{dz}{1+z^2}$, якщо C – коло з

додатним напрямком:

1) $|z-1|=1$; 2) $|z+i|=1$; $|z|=2$.

11. Обчислити $\int_C \frac{dz}{z^2+9}$, якщо:

1) C – коло з центром в точці $z=2i$ і радіусом 2;

2) C – коло з центром в точці $z=-2i$ і радіусом 2.

12. Обчислити, $\int_C \frac{\cos z}{(z-i)^3} dz$ де C – замкнений контур, що один раз

обходить точку i .

13. Обчислити $\int_C \frac{dz}{(z^2+9)^2}$, якщо:

1) C – коло з центром в точці $z=2i$ і радіусом 2;

2) C – коло з центром в точці $z=-2i$ і радіусом 2.

14. Обчислити $\int_C \frac{e^z dz}{(z^2 + 9)^4}$, якщо C – замкнений контур, що один раз

обходить точку $z = -2$ в додатному напрямку.

15. Обчислити $\int_C \frac{dz}{(z-1)^3(z+1)^3}$, якщо:

- 1) C – коло з центром в точці $z = 1$ і радіусом $R < 2$;
- 2) C – коло з центром в точці $z = -1$ і радіусом $R < 2$;
- 3) C – коло з центром в точках $z = 1$ чи $z = -1$ і радіусом $R > 2$;

Обчислити інтеграли за теоремою Ньютона-Лейбніця:

16. $\int_0^1 \sin \pi z dz$. 17. $\int_1^{1+2i} e^{2z} (z^2 + 1) dz$. 18. $\int_0^1 e^{e^z + z} dz$. 19. $\int_{z_0}^z \tau \sin 2\tau d\tau$.

20. $\int_0^\pi \sin 2z \cos 3z dz$; 21. $\int_{-1}^1 (\operatorname{ch} 2z + \operatorname{sh} 2z) dz$; 22. $\int_{z_0}^z e^{a\tau} \cos \pi \tau d\tau$;

23. $\int_0^1 e^z \sin^2 z dz$.

Відповіді

1. 1) $2 + i$; 2) $2(1 + i)$; 2. $2i$; 3. 1) 1 ; 2) 2 ; 3) 2 ; 4. 1) $w = \frac{z^2}{2}(2 - i)$;

2) $w = z^2 + 3zi + c$; 3) $w = \ln z + c$; 5. 1) $\ln 2 \pm 2k\pi i$. 2) Якщо $z = a$ – поза контура l , то за теоремою Коші інтеграл дорівнює 0. Якщо $z = a$ всередині контура і проведемо коло C радіуса ρ з центром $z = a$, то за теоремою Коші можна інтегрувати по колу C , так як підінтегральна функція аналітична в кільці, яке обмежене контуром l і кругом C . На

крузі $z - a = \rho e^{i\varphi}$, де $0 < \varphi < 2\pi$, $dz = i\rho e^{i\varphi} d\varphi$ маємо:

$$\int_{(l)} \frac{dz}{z-a} = \int_c \frac{dz}{z-a} = \int_0^{2\pi} \frac{i\rho e^{i\varphi} d\varphi}{\rho e^{i\varphi}} = 2\pi i. \quad \mathbf{6.} \quad \pi(\cos 2 + i \sin 2). \quad \mathbf{7.} \quad 1) 0;$$

$$2) 2\pi i \cos 1; 3) 6\pi i e^2. \quad \mathbf{8.} \quad 1) -8\pi i; 2) 0. \quad \mathbf{9.} \quad \pi\left(e - \frac{1}{e}\right). \quad \mathbf{10.} \quad 1) \pi; 2) -\pi; 3) 0.$$

$$\mathbf{11.} \quad 1) \frac{\pi}{3}; 2) -\frac{\pi}{3}. \quad \mathbf{12.} \quad -\pi i \frac{e+e^{-1}}{2}. \quad \mathbf{13.} \quad 1) \frac{\pi}{54}; 2) -\frac{\pi}{54}. \quad \mathbf{14.} \quad \frac{\pi i}{3e^2}; \quad \mathbf{15.} \quad 1) \frac{3\pi i}{8};$$

$$2) -\frac{3\pi i}{8}; 3) 0. \quad \mathbf{16.} \quad \frac{1}{\pi}(1 - \operatorname{ch} \pi). \quad \mathbf{17.} \quad e^{2(1+2i)}\left(i - \frac{1}{4}\right) - \frac{9}{4}e^{-1}. \quad \mathbf{18.} \quad e^e - e.$$

$$\mathbf{19.} \quad \frac{1}{2} \cos(z + z_0) \sin(z - z_0) - \frac{1}{2}(z \cos 2z - z_0 \cos 2z_0). \quad \mathbf{20.} \quad \frac{3}{5}.$$

$$\mathbf{21.} \quad \frac{1}{2}(e^{2i} - e^{-2}). \quad \mathbf{22.} \quad f(z) - f(z_0), \text{ де } f(z) = \frac{e^{az}}{a^2 - n^2}(n \sin nz + a \cos nz).$$

$$\mathbf{23.} \quad \frac{e}{10}(5 - 2 \sin 2 - \cos 2) - \frac{2}{5}.$$

§4. Ряди та особливі точки аналітичних функцій

1. Знайти радіус збіжності рядів

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} z^n; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n^3}; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}; \quad \text{г) } \sum_{n=1}^{\infty} n! z^n$$

2. Знайти радіус збіжності ряду $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n z^n$, якщо

$$\text{а) } a_n = \frac{1}{n^n}; \quad \text{б) } a_n = n^{\ln n}; \quad \text{в) } a_n = \frac{n!}{n^n}; \quad \text{г) } a_n = n^n.$$

3. Знайти радіус збіжності рядів

$$\text{а) } \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!}.$$

4. Визначити область збіжності рядів

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+i)^n (z-2)^n}{(n+1)(n+2)}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{n^2 (n+i)^n}; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{1-z^n}.$$

5. За відомим розкладом функції $\frac{1}{1-z}$ за степенями змінної z ($|z| < 1$)

знайти розклад функції $f(z) = \frac{1}{(1-z)^2}$ при $|z| < 1$.

6. Записати розклад функції $f(z) = \frac{1}{3-z}$ за степенями змінної z в області $D(|z| < 3)$ у ряд Тейлора чи Лорана.

7. Розкласти в ряд Тейлора чи Лорана в околі точки z_0 функції

$$\text{а) } f(z) = \frac{z}{(1-z)^2}, \quad (z_0 = 0, z_0 = 1);$$

$$\text{б) } f(z) = \frac{1}{z}, \quad z_0 = i.$$

8. Розкласти в ряд Лорана функції:

$$\text{а) } f(z) = e^{\frac{1}{1-z}} \quad \text{при } |z| > 1;$$

$$\text{б) } f(z) = \frac{1}{(z-2)(z-3)} \quad \text{при } |z| > 3;$$

$$\text{в) } f(z) = \frac{1}{(z-a)(z-b)} \quad \text{при } 0 < |a| < |z| < |b| \text{ і для } |z| > |b|.$$

9. Розкласти головне значення функції $f(z) = \sqrt[m]{z}$ в степеневий ряд в околі точки $z = 1$, окремо при $m = 2$.

10. Розкласти головні значення функцій $\operatorname{arctg} z$ та $\arcsin z$ в степеневі ряди в околі точки $z_0 = 0$.

11. Розкласти в ряд Лорана в околі точки $z = 1$ функцію

$$f(z) = \sin \frac{z}{z-1}.$$

12. Які особливі точки при $z = 0$ мають функції:

1) а) $f(z) = \frac{1-e^z}{2}$; б) $f(z) = \frac{\sin z}{z}$; в) $f(z) = \frac{1-e^z}{z}$; г) $f(z) = \frac{1-\cos z}{z^2}$;

2) $f(z) = \cos \frac{1}{z-1}$ при $z = 1$;

3) $f(z) = \operatorname{ctg} z$ при $z = 0$ та $z = \pi$;

4) $f(z) = \frac{z+1}{z^2+4}$ при $z = 2i$, $z = -2i$, $z = \infty$;

5) $f(z) = \frac{z^3+z+1}{(z+i)^2}$ при $z = -1$;

6) $f(z) = \frac{1-e^z}{1+e^z}$ при $z = \infty$;

7) $f(z) = \frac{z^2+1}{e^z}$ та $f(z) = \cos z - \sin z$ при $z = \infty$;

8) а) $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ при $z = 0$; б) $f(z) = \sin \frac{1}{1-z}$ при $z = \infty$.

13. У чому полягає суттєва різниця поведінки функції дійсного

аргументу $y(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ та функції комплексного аргументу

$w = e^{-\frac{1}{z^2}}$ в околі нульової точки.

Відповіді

1. а) $R = \infty$; б) $R = 1$; в) $R = \infty$; г) $R = 0$. 2. а) $R = \infty$; б) $R = 1$; в) $R = e$;

г) $R = 0$. 3. а) $R = \infty$; б) $R = \infty$. 4. а) $|z - 2| < \frac{1}{\sqrt{2}}$; б) $|z - i| < \sqrt{2}$;

в) $|z| < 1$. Указівка: дослідити окремо випадки $|z| < 1$; $|z| = 1$; $|z| > 1$.

$$5. \frac{1}{(1-z)^2} = 1 + 2z + 3z^2 + \dots + nz^{n-1} + \dots$$

$$6. \frac{1}{3-z} = -\frac{1}{z} - \frac{3}{z^2} - \frac{3^2}{z^3} - \dots - \frac{3^n}{z^{n+1}} - \dots$$

$$7. 1) \text{ а) } \sum_{n=1}^{\infty} nz^n; \text{ б) } \frac{1}{(z-1)^2} + \frac{1}{z-1}; \quad 2) \sum_{n=0}^{\infty} i^{n-1} (z-i)^n.$$

$$8. \text{ а) } 1 - \frac{1}{z} - \frac{1}{2z^2} - \frac{6}{z^3} + \frac{1}{24z^4} - \frac{19}{120z^5} + \dots; \text{ б) } \frac{1}{z^2} + \frac{5}{z^3} + \frac{19}{z^4} + \frac{65}{z^5} + \dots;$$

$$\text{в) } \frac{1}{a-b} \left[\dots + \frac{a^2}{z^3} + \frac{a}{z^2} + \frac{a}{z} + \frac{1}{b} + \frac{z}{b^2} + \dots \right]$$

$$\text{і) } \frac{1}{b-a} \left[\frac{b-a}{z^2} + \frac{b^2-a^2}{z^3} + \frac{b^3-a^3}{z^4} + \dots \right].$$

$$9. \quad 1) \quad 1 + \frac{1}{m}(z-1) + \frac{1}{m} \left(\frac{1}{m} - 1 \right) \frac{(z-1)^2}{2!} + \dots$$

$$2) \quad 1 + \frac{1}{2}(z-1) - \frac{1}{2^2 2!}(z-1)^2 + \frac{1}{2^3 3!}(z-1)^3 - \dots$$

$$10. \quad z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \dots; \quad z + \frac{z^3}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 2! \cdot 5} z^5 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3 \cdot 3! \cdot 7} z^7 \dots$$

$$11. \quad \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\sin 1}{(2n)!(z-1)^{2n}} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos 1}{(2n+1)!(z-2)^{2n+1}}.$$

12. 1) Усувна особлива точка.

2) Суттєво особлива точка.

3) $z = 0$ – полюс 1-го порядку; $z = \pi$ – полюс 1-го порядку.

4) $z = \pm 2i$ – прості полюси; $z = \infty$ – усувна особлива точка.

5) Полюс 2-го порядку.

6) Суттєво особлива точка.

7) Суттєво особлива точка.

8) а) суттєво особлива точка, б) нуль 1-го порядку.

13. Функція y та всі її похідні при $x = 0$ дорівнює нулю. Крива $y = f(x)$ в нульовій точці має з віссю x дотикається «краще», ніж будь-яка парабола $y = x^n$. Функція w в нульовій точці має суттєву особливість, тобто прямує до будь-якого наперед заданого числа.

§5. Теорія лишків

1. Обчислити лишки функцій:

1) $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$ відносно $z = 1, z = 2$;

2) $f(z) = \frac{z^2 + 1}{z - 2}$ відносно полюсів;

3) $f(z) = \frac{\cos z}{z - 1}$ відносно полюсів;

4) $f(z) = \frac{1}{(z^2 + 1)^3}$ відносно точки $z = i$;

5) $f(z) = \frac{z^2}{(z^2 + 1)^2}$ відносно кожного з полюсів;

6) $f(z) = \frac{1}{z^3 - z^5}$ відносно кожного з полюсів;

7) $f(z) = \frac{\cos z}{z^3(z+4)}$ відносно $z = 0$;

8) $f(z) = \frac{z^3 + 1}{(z+2)^2(z-3)}$ відносно $z = 3, z = -2$;

9) $f(z) = \frac{1}{(z+2)^2 z^3}$ відносно особливих точок.

2. Обчислити лишки функцій відносно точок $z = a$:

1) $f(z) = \operatorname{tg} z, a = \frac{\pi}{2}(2k+1)$; 2) $f(z) = e^{\frac{1}{z}}, a = 0$; 3) $f(z) = e^{\frac{1}{1-z}}, a = 1$;

4) $f(z) = \operatorname{ctg}^2 z, a = k\pi$; 5) $f(z) = \operatorname{ctg}^3 z, a = k\pi$; 6) $f(z) = \cos \frac{1}{z}, a = 0$;

7) $f(z) = \sin \frac{1}{z}, a = 0$; 8) $f(z) = \sin \frac{4}{z-1}, a = 1$; 9) $f(z) = \frac{z^4 + 2}{z^2 + 16}, a = \infty$;

10) $f(z) = \frac{z^3 + 3z + 1}{2z^2 + 5}, a = \infty$.

3. Обчислити $\int_C \frac{dz}{z^4 + 1}$, якщо C – коло $x^2 + y^2 = 2x$ в додатньому напрямку.

4. Обчислити $\int_C \frac{dz}{(z-1)^2(z^2+1)}$, якщо C – коло, що проходиться один раз в додатньому напрямку.

5. Обчислити $\int_C \frac{dz}{(z-a)^n(z-b)^n}$ ($n > 0$, ціле), якщо C – коло $|z|=1$, що

обходить один раз в додатньому напрямку, у випадках:

1) $|a| < |b| < 1$, 2) $|a| < 1 < |b|$, 3) $1 < |a| < |b|$.

6. Обчислити логарифмічні лишки функції $f(z)$ відносно контура Γ :

1) $f(z) = \frac{z+i}{z^2+4}$, $\Gamma: \{|z|=3\}$; 2) $f(z) = \frac{\sin z}{z^3+8}$, $\Gamma: \{|z|=5\}$;

3) $f(z) = \frac{e^z}{z^4+1}$, $\Gamma: \{|z|=3\}$; 4) $f(z) = \frac{z^2+z+1}{z^2-3z+2}$, $\Gamma: \{|z|=4\}$.

7. Використовуючи логарифмічні лишки, обчислити інтеграли типу

$$\oint_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz, \text{ де:}$$

1) $f(z) = \frac{z^2+4}{(z+2)^3}$, $\Gamma: \{|z|=3\}$; 2) $f(z) = (z+1)^2 \sin z$, $\Gamma: \{|z|=3\}$;

3) $f(z) = z^3 + z^2 + z$, $\Gamma: \{|z|=2\}$.

8. Обчислити за допомогою лишків дійсні інтеграли вздовж відрізка дійсної осі:

1) $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{5 - \frac{1}{4} \cos x}$; 2) $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(5 + 4 \cos x)^2}$; 3) $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(a + \cos x)^2}$, $a > 1$.

9. Обчислити невласні інтеграли за допомогою лишків:

1) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+25)(9x^2+1)}$; 2) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)(x^2+9)}$;

3) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$; 4) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2}$; 5) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2+a^2)^2}$;

6) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos x dx}{x^2-2x+10}$; 7) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x dx}{x^2+4x+20}$; 8) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos x dx}{x^2-5x+6}$;

9) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x dx}{(x^2+4)(x-1)}$.

10. Обчислити інтеграл $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$.

11. Обчислити інтеграл Лапласа $I = \int_0^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 + a^2} dx$.

12. Обчислити інтеграл Пуассона $I = \int_0^{\infty} e^{-ax^2} \cos bx \, dx$.

Відповіді

1. 1) -1 ; 2) 5 ; 3) $\frac{1}{2} \left(e + \frac{1}{e} \right)$; 4) $-\frac{3}{16}i$; 5) $-\frac{i}{4}$ (відносно точки i); $\frac{i}{4}$

(відносно точки $-i$); 6) 1 (відносно точки 0) і $-\frac{1}{2}$ (відносно кожної з

точок ± 1); 7) $-\frac{7}{64}$; 8) $\frac{28}{25}$; $-\frac{53}{25}$; 9) $\operatorname{Res} f(z)_{z=2} = -\frac{3}{16}$; $\operatorname{Res} f(z)_{z=0} = \frac{3}{16}$.

2. 1) -1 (відносно кожної з точок $\frac{\pi}{2}(2k+1)$); 2) 1 ; 3) 1 ; 4) 0 (відносно кожної з точок $k\pi$); 5) -1 (відносно кожної з точок $k\pi$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$); 6) 0 ; 7) 1 ; 8) 4 ; 9) 0 ; 10) $-\frac{1}{4}$. 3. $-\frac{\pi i}{\sqrt{2}}$. 4. $-\frac{\pi i}{2}$.

5. 1) 0 ; 2) $(-1)^{n-1} \frac{2\pi i (2n-2)!}{[(n-1)!]^2 (a-b)^{2n-1}}$; 3) 0 .

6. 1) -1 ; 2) 4 ; 3) -4 ; 4) 0 .

7. 1) $-2\pi i$; 2) $10\pi i$; 3) $6\pi i$. 8. Указівка. Попередньо слід інтегрувати перетворити в інтеграли по замкненому контуру, до яких застосовується теорема про лишки. Покладемо $z = e^{ix}$. При зміні x від 0 до 2π точка z описує в додатньому напрямку коло C

одичного радіуса. Оскільки $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \frac{z + \frac{1}{z}}{2} = \frac{z^2 + 1}{2z}$;

$ix = \operatorname{Ln} z$, звідки $dx = \frac{dz}{iz}$, то

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{5 - \cos x} = \int_C \frac{\frac{dz}{iz}}{5 - \frac{z^2 + 1}{2z}} = -\frac{2}{i} \int_C \frac{dz}{z^2 - 5z + 1} =$$

$$-\frac{2}{i} 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res} \left[\frac{1}{z^2 - 5z + 1}, b_k \right], \text{ де } b_k - \text{особливі точки підінтегральної}$$

функції, що містяться всередині кола C . 1) $\frac{8\pi}{3}$; 2) $\frac{10\pi}{27}$; 3) $\frac{2\pi a}{\sqrt{(a^2 - 1)^3}}$.

9. 1) $\frac{11}{280}\pi$; 2) $\frac{\pi}{60}$; 3) $\frac{\pi}{ab(a+b)}$ ($a > 0, b > 0$); 4) $\frac{\pi}{2}$; 5) $\frac{\pi}{2a}$, $a > 0$;

6) $\frac{\pi}{3}e^{-3}(\cos 1 - 3\sin 1)$; 7) $\frac{\pi}{4e^4}(4\cos 2 + 2\sin 2)$; 8) $\pi(2\sin 2 - 3\sin 3)$;

9) $\frac{\pi}{5}(\cos 1 - e^{-2})$. Указівка. У прикладі 6) слід розглядати функцію, яка

задовольняє умовам леми Жордана:

$$f(z) = \frac{ze^{iz}}{z^2 - 2z + 10}; \quad \operatorname{Res}(f(z), 1 + 3i) = \frac{(1 + 3i)e^{-3+i}}{6i};$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{ix}}{x^2 - 2x + 10} dx = \frac{\pi}{3e^3}(1 + 3i)(\cos 1 + i\sin 1).$$

$$\text{Оскільки } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{ix}}{x^2 - 2x + 10} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos x}{x^2 - 2x + 10} dx + i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2 - 2x + 10} dx, \quad \text{то,}$$

порівнюючи дві останні рівності, знаходимо даний інтеграл.

$$10. \frac{\pi}{2}. \quad 11. \frac{\pi}{2a}e^{-a}. \quad 12. \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{b^2}{4a}}.$$

§6. Конформне відображення

1. Знайти криві зі сталим модулем та криві зі сталим аргументом для відображень:

1) $w = e^z - 1$; 2) $w = \sin z$.

2. Побудувати образ з точки $z = 2 + i$ на площині z при відображенні:

1) $w = 3z + 1$; 2) $w = \frac{16}{z}$; 3) $w = \frac{z}{z + i}$.

3. Знайти образи ліній при відображенні $w = z^2$:

1) $x = 2$, рух знизу вверху;

2) $|z| = 3$, обхід проти годинникової стрілки.

4. Знайти образи ліній при відображенні $w = 3z + i$:

1) $y = 2x + 3, -\infty < x < +\infty$;

2) $x^2 + y^2 - 2x = 0$, обхід проти годинникової стрілки.

5. При відображенні $w = \frac{z-3}{z+3}$ знайти образ лінії $y = 2x, -\infty < x < +\infty$.

6. Знайти степеневу функцію, що відображає

1) лунку між колами $(x-1)^2 + y^2 = 1$ і $x^2 + (y-1)^2 = 1$ на півплощину $\operatorname{Im}(w) > 0$;

2) область $0 < \operatorname{arctg} z < \frac{\pi}{3}$ на область $\operatorname{Im}(w) > 0$.

7. Відобразити за допомогою функції $w = e^z$:

1) полюсу $0 \leq y < 1$;

2) коло одиничного радіуса з розрізом вздовж осі x ($0 \leq x < 1$).

Знайти образи взаємноортогональних прямих

8. За допомогою функції $w = \ln z$ відобразити одиничне коло з розрізом вздовж Ox ($0 \leq x < 1$). Знайти образи взаємноортогональних прямих $x = c$, $y = c$, $c = \text{const}$.

9. За допомогою функції $w = z^2$ відобразити прямокутники:

1) $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 1$; 2) $1 \leq x \leq 3$, $0 \leq y \leq 1$.

10. Скласти лінійні перетворення верхньої півплощини на одиничне коло, яке перетворює точки $-1, 0, 1$ дійсної осі в точки $1, -i, -1$ кола.

11. Знайти образ прямої $y = x + 2$ при відображенні $w = \frac{z+1}{z-1}$.

12. Користуючись функцією Жуковського, знайти функцію, що відображає

1) $\frac{1}{2} < |z| < 1$ на область $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} \leq 1$ з розрізом $-4, 4$;

2) $1 < |z| < 2$ на область $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} \leq 1$ з розрізом $-4, 4$.

13. Відобразити полосу на одиничне коло. Полоса $D: -\frac{\pi}{4} < \text{Re } z < \frac{\pi}{4}$,

коло $|w| < 1$ з відповідністю граничних точок $f\left(\pm \frac{\pi}{4}\right) = \pm 1$, $f(i\infty) = i$

($i\infty$ означає верхню нескінченно віддалену точку полоси).

14. Відобразити полосу $0 < y < 2H$ з вирізом $-\infty \leq x \leq a$, $y = H$, на полосу $0 < v < 2H$.

15. Відобразити на півплощину $\text{Im } z > 0$ з вилученим відрізком $(a, a + ih)$ на півплощину.

Відповіді

1. 1) $(x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2) = C$; 2) $\text{ch}^2 y - \cos^2 x = C$.

3. 1) $u = 4 - \frac{v^2}{16}; -\infty < v < +\infty$; 2) $w = 9e^{2\varphi i}, 0 \leq \varphi < 2\pi$.

4. 1) $v = 2u + 10, -\infty < u < +\infty$; 2) $w = 3 + i + 3e^{i\varphi}, 0 \leq \varphi < 2\pi$.

5. $u^2 + \left(v + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$. 6. 1) $w = \frac{iz^2}{(z-1-i)^2}$; 2) $w = z^3$.

10. $w = (z-i):(iz-1)$.

11. Оскільки пряма не проходить через точку $z=1$, то вона перетворюється в коло, центр і радіус знаходяться за формулами:

$$w_0 = \frac{2a\overline{\alpha c} + a\overline{d\lambda} + \overline{bc}\lambda}{2\alpha|c|^2 + 2\operatorname{Re}(c\overline{d\lambda})}; \quad \rho = \left| \frac{a}{c} - w_0 \right| = \left| \frac{(ad-bc)\lambda}{2\alpha|c|^2 + 2\operatorname{Re}(c\overline{d\lambda})} \right|; \quad w_0 = \frac{2-i}{3};$$

$$\rho = \frac{|i+1|}{3} = \frac{\sqrt{2}}{3}; \quad a=b=c=1, d=-1. \quad 12. \quad 1) w = 2\left(z + \frac{1}{z}\right);$$

$$2) w = -i(z-1-i)^2. \quad 14. w = \frac{H}{\pi} \ln \left(e^{\frac{\pi z}{H}} + e^{\frac{\pi a}{H}} \right). \quad 15. w = z + \frac{h^2}{2(z-a)}.$$

Ця формула перестає бути вірною для точок z , близьких до точки a , тому що для них величина $\frac{h^2}{z-a}$ перестає бути малою.

Операційне числення

Оригіналом називають будь-яку функцію $f(t)$ дійсного аргументу t , яка задовольняє умови:

1) $f(t) \equiv 0$ при $t < 0$;

2) $f(t)$ і $f'(t)$ кусковонеперервні на півосі $0 \leq t < \infty$;

3) $|f(t)| \leq M e^{s_0 t}$, де $M = \text{const}$, $s_0 = \text{const} > 0$ (модуль функції зростає не швидше, ніж показникова функція, число s_0 називають **показником росту функції оригіналу**).

Зображенням оригіналу за Лапласом називають функцію $F(p)$ комплексного аргументу $p = s + i\delta$, $\delta > s_0$:

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt.$$

Той факт, що функція $f(t)$ має зображенням функцію $F(p)$ позначають так $f(t) \rightleftharpoons F(p)$.

Зображення по Калсону відрізняється лише множителем p :

$$F_1(p) = p \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt.$$

Властивості перетворення Лапласа:

1) Лінійність:

Якщо A і $B = \text{const}$, $f(t)$, $\varphi(t)$ – функції-оригінали, то

$$Af(t) + B\varphi(t) \rightleftharpoons AF(p) + B\Phi(p),$$

де тут і в подальшому позначено

$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt, \quad \Phi(p) = \int_0^{+\infty} \varphi(t) e^{-pt} dt;$$

2) Подібність:

$$f(\alpha t) \rightleftharpoons \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right), \quad \alpha = \text{const}, \alpha > 0.$$

3) Властивості подвійності:

а) диференціювання оригіналу та зображення:

$$f'(t) \doteq pF(p) - f(0), \quad F'(p) \doteq -tf(t);$$

$$6) f^{(n)}(t) \doteq p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0),$$

$$F^{(n)}(t) \doteq (-1)^n f(t);$$

в) інтегрування оригіналу та зображення:

$$\int_0^t f(t) dt \doteq \frac{F(p)}{p} \quad \text{та} \quad \int_p^\infty F(p) dp \doteq \frac{f(t)}{t};$$

г) теореми запізнення та зсуву:

$$f(t - \tau) \doteq F(p)e^{-p\tau} \quad \text{та} \quad F(p - \alpha) \doteq e^{\alpha t} f(t), \quad \operatorname{Re}(p - \alpha) > s_0.$$

4) Теорема множення зображень (теорема Бореля):

$$F(p)G(p) \doteq \int_0^t f(\tau)g(t - \tau)d\tau = (f * g),$$

де $(f * g)$ називають **згорткою функцій** $f(t)$ і $g(t)$.

Властивості згортки:

а) згортка функцій $f * g$ комутативна: $(f * g) = (g * f)$

або

$$F(p)G(p) \doteq \int_0^t g(\tau)f(t - \tau)d\tau = (g * f);$$

б) асоціативність: $(f(t) * g(t)) * \psi(t) = f * (g(t) * \psi(t));$

в) дистрибутивність: $\{f(t) + g(t)\} * \psi(t) = f(t) * \psi(t) + g(t) * \psi(t).$

З теореми множення випливає **формула Дюамеля**:

$$pF(p)G(p) \doteq f(t)g(0) + \int_0^t f(\tau)g'_t(t - \tau)d\tau$$

особливо зручна при $g(0) = 0$.

Теореми розкладу

Теорема 1. Якщо $f(t) \equiv F(p)$ і $F(p)$ регулярна в околі точки $p = \infty$, де вона розгортається в ряд Лорана $F(p) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n}{p^n}$, то її оригіналом буде $f(t)$, де $f(t)$ – сума ряду Тейлора $f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{(n-1)!} t^{n-1}$, що абсолютно та рівномірно збігається на будь-якому відрізку $[a; b]$ числової осі $-\infty < a < b < +\infty$.

Теорема 2. Якщо $f(t) \equiv F(p)$, а $F(p) = \frac{P_n(p)}{Q_m(p)}$, де P_n та Q_m многочлени степенів n та m , ($n < m$), що не мають спільних нулів, тоді оригінал для $F(p)$ знаходиться за формулою:

$$f(t) = \sum_{k=1}^s \frac{1}{(n_k - 1)!} \lim_{p \rightarrow p_k} \frac{d^{n_k-1}}{dp^{n_k-1}} \left\{ (p - p_k)^{n_k} F(p) e^{p t} \right\},$$

де $p_k \left(k = \overline{1, n_k} \right)$ – нулі знаменника $Q_m(p)$ кратності $n_k \geq 1; m = \sum_{k=1}^s n_k$.

Зокрема, якщо всі нулі знаменника прості, то $f(t) = \sum_{k=1}^m \frac{P_n(p_k)}{Q'_m(p_k)} e^{p_k t}$.

Обернене перетворення Лапласа, що визначає оригінал за його зображенням, має вигляд:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{p t} F(p) dp,$$

де $\operatorname{Re} p \geq a > s_0 > 0$ і інтеграл розуміємо як невласний.

Диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$a_0 \frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dx}{dt} + a_n x + f(t) = 0$$

і з початковими умовами

$$x(0) = x_0, x'(0) = x'_0, \dots, x^{(n-1)}(0) = x_0^{(n-1)}$$

зводиться до операторного алгебраїчного рівняння першого степеня відносно $X(p)$:

$$a_n p^n \left[X(p) - \frac{x_0}{p} - \dots - \frac{x_0^{n-1}}{p^n} \right] + \dots + a_1 p [X(p) - x_0] + a_0 X(p) = F(p),$$

де $X(p) \equiv x(t)$, $F(p) \equiv f(t)$.

Звідси одержимо зображення шуканої функції

$$X(p) = \frac{\Phi(p)}{P_n(p)}.$$

Застосовуючи теорему розкладу, таблицю і властивості оригіналів та їх зображень, знаходимо шукану функцію $x(t)$, яка задовольняє початкові умови. Аналогічно розв'язують систему лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами. При розв'язанні рівнянь в частинних похідних слід скористатись формулами

$$U(x, p) \equiv u(x, t), \quad \frac{\partial u}{\partial x} \equiv \frac{dU}{dx}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \equiv \frac{d^2 U}{dx^2},$$

причому p відіграє роль параметра; слід також перейти до зображень і у краєвих умовах. Похідні за t виражаються звичайно:

$$\frac{\partial u}{\partial t} \equiv p u - u(x, 0); \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \equiv p^2 u - u(x, 0) p - \frac{\partial U(x, 0)}{\partial t}.$$

При розв'язанні задач користуються таблицею зображень:

	Оригінал	Зображення
1	$\eta(t) = \begin{cases} 1, & t > 0, \\ 0, & t < 0 \end{cases}$	$\frac{1}{p}$

2	$\frac{t^n}{n!}$	$\frac{1}{p^{n+1}}, n > 1 - \text{цiле}$
3	$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{p - \alpha}$
4	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$
5	$\cos \omega t$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$
6	$e^{\alpha t} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(p - \alpha)^2 + \omega^2}$
7	$e^{\alpha t} \cos \omega t$	$\frac{p - \alpha}{(p - \alpha)^2 + \omega^2}$
8	$t \cos \omega t$	$\frac{p^2 - \omega^2}{(p^2 + \omega^2)^2}$
9	$t \sin \omega t$	$\frac{2ap}{(p^2 + a^2)^2}$
10	$1 - \cos \omega t$	$\frac{\omega^2}{p(p^2 + \omega^2)}$
11	$\operatorname{sh} \omega t$	$\frac{\omega}{p^2 - \omega^2}$
12	$\operatorname{ch} \omega t$	$\frac{p}{p^2 - \omega^2}$
13	$\frac{e^{at} - e^{bt}}{a - b}$	$\frac{1}{(p - a)(p - b)}$
14	$\frac{\cos at - \cos bt}{b^2 - a^2}$	$\frac{p}{(p^2 + a^2)(p^2 + b^2)}$

15	$\sin \frac{at}{\sqrt{2}} \operatorname{sh} \frac{at}{\sqrt{2}}$	$\frac{a^2 p}{p^4 + a^4}$
16	$\cos \frac{at}{\sqrt{2}} \operatorname{ch} \frac{at}{\sqrt{2}}$	$\frac{p^3}{p^4 + a^4}$
17	$\frac{1 - e^{-t}}{t}$	$\ln \left(1 + \frac{1}{p} \right)$
18	$\frac{e^{bt} - e^{at}}{t}$	$\ln \frac{p - a}{p - b}$

Практичні завдання для самостійної роботи

§7. Основні властивості перетворення Лапласа

1. Нехай $\eta(t)$ – одинична функція: $\eta(t) = \begin{cases} 1, & t > 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$ Доведіть формулу

$$\eta(t) \doteq \frac{1}{p}.$$

2. Доведіть формулу $e^{\alpha t} \doteq \frac{1}{p - \alpha}$, α – дійсне чи комплексне.

3. Користуючись властивостями перетворення Лапласа і результатом 2, доведіть формули:

$$1) \sin \omega t \doteq \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}; \quad 2) \cos \omega t \doteq \frac{p}{p^2 + \omega^2}; \quad 3) \operatorname{sh} \omega t \doteq \frac{\omega}{p^2 - \omega^2};$$

$$4) \operatorname{ch} \omega t \doteq \frac{p}{p^2 - \omega^2}.$$

4. Користуючись властивостями перетворення Лапласа і результатом завдання 3, доведіть формули

$$1) e^{-\alpha t} \cos \omega t \doteq \frac{p + \alpha}{(p + \alpha)^2 + \omega^2}; \quad 2) e^{-\alpha t} \sin \omega t \doteq \frac{\omega}{(p + \alpha)^2 + \omega^2}.$$

5. Доведіть формули за властивостями перетворення Лапласа:

$$1) t^n \doteq \frac{n!}{p^{n+1}}; \quad 2) t^n e^{\alpha t} \doteq \frac{n!}{(p - \alpha)^{n+1}}.$$

6. Користуючись результатом 5, доведіть:

$$1) t \sin \omega t \doteq \frac{2p\omega}{(p^2 + \omega^2)^2}; \quad 2) t \cos \omega t \doteq \frac{p^2 - \omega^2}{(p^2 + \omega^2)^2};$$

$$3) t^2 \sin \omega t \doteq \frac{2(3p^2\omega - \omega^3)}{(p^2 + \omega^2)^3}; \quad 4) t^2 \cos \omega t \doteq \frac{2(p^3 - 3p\omega^2)}{(p^2 + \omega^2)^3}.$$

7. Користуючись результатами задач 4, 6 та властивостями перетворення Лапласа, доведіть формули

$$1) te^{-\alpha t} \cos \omega t \doteq \frac{(p + \alpha)^2 - \omega^2}{((p + \alpha)^2 + \omega^2)^2}; \quad 2) te^{-\alpha t} \sin \omega t \doteq \frac{2\omega(p + \alpha)}{((p + \alpha)^2 + \omega^2)^2}.$$

8. Доведіть, що $\frac{e^{bt} - e^{at}}{t} \doteq \ln \frac{p - a}{p - b}.$

9. Користуючись властивостями лінійності і множення на сталие число, знайти зображення функції:

$$1) 1 - e^{-\alpha t}; \quad 2) kt + \sin \omega t; \quad 3) (1 - \alpha t)e^{-\alpha t}; \quad 4) [(\alpha - \beta)t + 1]e^{-\alpha t};$$

$$5) e^{-\beta t} - e^{-\alpha t}; \quad 6) \sin(\omega t + \alpha).$$

10. Знайдіть зображення функцій за допомогою теореми множення оригіналу на експоненту:

$$1) e^{-\alpha t} \sin \omega t; \quad 2) te^{-\alpha t}; \quad 3) \operatorname{sh} \beta t e^{-\alpha t}; \quad 4) \sin(\omega t + \alpha)e^{-\alpha t}; \quad 5) te^{-\alpha t} e^{-\beta t}.$$

11. Користуючись теоремою зсуву оригінала, знайти зображення функції $\sin(\omega t - \varphi)$, де $\varphi = \omega_0 t$.

12. Одержати нові операційні співвідношення даних, застосовуючи теореми диференціювання:

$$1) \sin \omega t \doteq \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}; \quad 2) e^{-\alpha t} \sin \omega t \doteq \frac{\omega}{(p + \alpha)^2 + \omega^2}.$$

13. За теоремою розвинення на прості дроби, знайти оригінали, що відповідають наступним зображенням:

$$1) \frac{1}{p^2 + \omega^2}; \quad 2) \frac{1}{(p + \alpha)^2 + \omega^2}; \quad 3) \frac{1}{(p + a)(p^2 + \omega^2)};$$

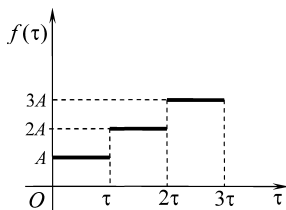
$$4) \frac{p}{(p + a)(p^2 + \omega^2)}; \quad 5) \frac{1}{p(p + a)}; \quad 6) \frac{1}{p(p^2 - a^2)}; \quad 7) \frac{1}{p(p^2 + a^2)}.$$

14. Доведіть справедливість формул:

$$(\text{sit})' \equiv \frac{\sin t}{t} \doteq \text{arctg } p, \quad \text{sit} = \int \frac{\sin t}{t} dt, \quad \text{sit} \doteq \frac{\text{arctg } p}{p}$$

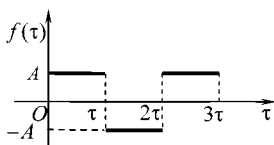
15. Доведіть, що зображення східчастої функції (на рис.)

$$f(t) = A[\eta(t) + \eta(t - \tau) + \eta(t - 2\tau) + \dots] \text{ буде } \frac{A}{2p} \left(1 + \text{cth} \frac{p\tau}{2} \right)$$

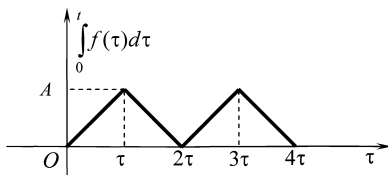


16. Показати, що для зображення прямокутного імпульса (див. рис.)

має місце рівність $f(t) = A[\eta(t) - 2\eta(t - \tau) + 2\eta(t - 2\tau) - \dots] \doteq \frac{A}{p} \operatorname{th} \frac{p\tau}{2}$;



Доведіть також, що $\int_0^t f(t) dt \doteq \frac{A}{p^2} \operatorname{th} \frac{p\tau}{2}$. Графік $\int_0^t f(t) dt$ див. нижче.



Відповіді

9. 1) $\frac{\alpha}{p(p+\alpha)}$; 2) $\frac{p^2(k+\omega) + k\omega^2}{p^2(p^2 + \omega^2)}$; 3) $\frac{p}{(p+\alpha)^2}$; 4) $\frac{p+2\alpha-\beta}{(p+\alpha)^2}$;

5) $\frac{\alpha-\beta}{(p+\alpha)(p+\beta)}$; 6) $\frac{p \sin \alpha + \omega \cos \alpha}{p^2 + \omega^2}$; 10. 1) $\frac{\omega}{(p+\alpha)^2 + \omega^2}$; 2) $\frac{1}{(p+\alpha)^2}$;

3) $\frac{\beta}{(p+\alpha)^2 - \beta^2}$; 4) $\frac{\omega \cos \alpha + (p+\alpha) \sin \alpha}{(p+\alpha)^2 + \omega^2}$; 5) $\frac{1}{(p+\alpha+\beta)^2}$.

11. $\sin \omega(t-t_0) \doteq \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} e^{-pt}$. 12. 1) $\cos \omega \doteq \frac{p}{p^2 + \omega^2}$;

2) $e^{-\alpha t} (\omega \cos \omega t - \alpha \sin \omega t) \doteq \frac{\omega p}{(p+\alpha)^2 + \omega^2}$;

$$13. 1) \frac{1}{\omega} \sin \omega t; \quad 2) \frac{1}{\omega} e^{-\alpha t} \sin \omega t;$$

$$3) \frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{1}{a^2 + \omega^2}} \sin(\omega t - \varphi) + \frac{1}{a^2 + \omega^2} e^{-at}; \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega}{a}.$$

Розв'язання:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(p+a)(p^2+\omega^2)} &= \frac{1}{a^2+\omega^2} \frac{1}{p+a} + \frac{1}{\omega^2+a^2} \frac{-p+a}{p^2+\omega^2} \doteq \\ &= e^{-at} \frac{1}{\omega^2+a^2} - \frac{1}{\omega^2+a^2} \cos \omega t + \frac{a}{\omega} \frac{1}{\omega^2+a^2} \sin \omega t = \\ &= e^{-at} \frac{1}{\omega^2+a^2} + \frac{1}{\omega} \left(\frac{a}{\sin \omega t} \sin \omega t - \frac{\omega}{\omega^2+a^2} \cos \omega t \right). \end{aligned}$$

Помножимо і розділимо на

$$\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{a}{\omega^2+a^2}\right)^2 + \left(\frac{\omega}{\omega^2+a^2}\right)^2}} = \sqrt{\omega^2+a^2}.$$

Остаточно маємо:

$$\frac{1}{(p+a)(p^2+\omega^2)} \doteq \frac{e^{at}}{\omega^2+a^2} + \frac{1}{\omega} \frac{1}{\sqrt{\omega^2+a^2}} \sin(\omega t - \varphi);$$

$$4) \sqrt{\frac{1}{a^2+\omega^2}} \cos(\omega t - \varphi) - \frac{a}{a^2-\omega^2} e^{-at}; \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega}{a}; \quad 5) \frac{1}{a} (1 - e^{-at});$$

$$6) \frac{1}{a^2} (\operatorname{ch} at - 1); \quad 7) \frac{1}{a^2} (1 - \cos at). \quad \mathbf{14.} \quad 1) \quad 3 \text{ формули } \sin \omega t \doteq \frac{\omega}{p^2 + \omega^2},$$

інтегруючи

зображення,

знайдемо

$$\frac{\sin t}{t} \doteq \int_p^\infty \frac{dp}{1+p^2} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} p = \operatorname{arccotg} p.$$

2) За формулою інтегрування оригінала, знайдемо зображення інтегрального синуса: $\text{sit} = \int_0^t \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\text{arccctg } p}{p}$. 15. За теоремою

запізнення $f(t - \tau) = e^{-p\tau} F(p)$ знайдемо зображення даної функції

$$f(t). \text{ Одержимо: } f(t) = A \left[\frac{1}{p} + \frac{1}{p} e^{-\tau p} + \frac{1}{p} e^{-2\tau p} + \dots \right].$$

У правій частині рівності збіжна геометрична прогресія, так як $|e^{-\tau p}| = e^{-st} < 1$.

$$\text{Тому } f(t) = A \frac{\frac{1}{p}}{1 - e^{-p\tau}} = \frac{A}{2p} \left(1 + \text{cth} \frac{p\tau}{2} \right).$$

§8. Диференціальні рівняння і системи диференціальних рівнянь

1. $\ddot{x} - 3\dot{x} + 2x = 2e^{3t}, x(0) = 0, \dot{x}(0) = 0$.
2. $\ddot{x} - 4\dot{x} + 4x = t^2 e^{2t}, x(0) = 0, \dot{x}(0) = 0$.
3. $\ddot{x} + x = \sin t, x(0) = 0, \dot{x}(0) = -\frac{1}{2}$.
4. $\ddot{x} - 2\dot{x} + x = t^2 e^t, x(0) = 0, \dot{x}(0) = 0$.
5. $\ddot{x} - 3\dot{x} + x = 2e^{3t}, x(0) = 2, \dot{x}(0) = 6$.
6. $\ddot{x} + 4x = 3\sin t + 10\cos 3t, x(0) = -2, \dot{x}(0) = 3$.
7. $\ddot{x} - x = 4\sin t + 5\cos 2t, x(0) = -1, \dot{x}(0) = -2$.
8. $\ddot{x} - 2\dot{x} + 2x = 2e^t \cos t, x(0) = 0, \dot{x}(0) = 0$.
9. $\ddot{x} + 9x = 30 \text{ch } t, x(0) = 3, \dot{x}(0) = 0$.
10. $\ddot{y} + y = \cos t, y(0) = \dot{y}(0) = 0$.
11. $\ddot{z} - \dot{z} - 6z = 2, z(0) = 1, \dot{z}(0) = 0$.

12. $\ddot{z} - k^2 z = 0, z(0) = A, \dot{z}(0) = B.$
13. $\ddot{y} - 2ay + (a^2 + b^2)y = 0, y(0) = 0, \dot{y}(0) = 1.$
14. $\ddot{x} + 2\dot{x} + (1 + a^2)x = 0, x(0) = x_0, \dot{x}(0) = x_1.$
15. $\ddot{x} - 2\dot{x} + (1 + b^2)x = 0, x(0) = a, \dot{x}(0) = b.$
16. $\ddot{y} + \dot{y} = e^{2t}, y(0) = \dot{y}(0) = 0.$
17. $\ddot{y} + \dot{y} = t^2 + 2t, y(0) = 4, \dot{y}(0) = -2.$
18. $\ddot{x} + 3\dot{x} + 2x = 4, x(0) = 2, \dot{x}(0) = 0.$
19. $\ddot{y} - 2\dot{y} + y = 1, y(0) = a, \dot{y}(0) = b.$
20. $\ddot{y} + y = 3\sin t, y(0) = 1, \dot{y}(0) = -\frac{3}{2}.$
21. $\ddot{y} + y = \sin t \sin 2t, y(0) = \dot{y}(0) = 0.$
22. $\ddot{x} + x = t \cos 2t, x(0) = a, \dot{x}(0) = b.$
23. $\ddot{x} + a^2 x = b \sin at, x(0) = x_0, \dot{x}(0) = x_1.$
24. $\ddot{x} - a^2 x = be^{-t^2}, x(0) = \dot{x}(0) = 0.$
25. $\ddot{z} - 8\dot{z} + (16 + a^2)z = 0, z(0) = c_1, \dot{z}(0) = c_2.$
26. $\ddot{y} + \dot{y} = 1 + t, y(0) = -1, \dot{y}(0) = 0.$
27.
$$\begin{cases} \dot{x} + 2x + 2y = 10e^{2t}, \\ \dot{y} - 2x + y = 7e^{2t}, \end{cases} x(0) = 1, y(0) = 3;$$
28.
$$\begin{cases} \dot{y} + 4y + 4z = 0, \\ \dot{z} + 2\dot{y} + 6z = 0, \end{cases} y(0) = 3, z(0) = 15.$$
29.
$$\begin{cases} (2\ddot{x} - \dot{x} + 9x) - (\ddot{y} + \dot{y} + 3y) = 0, \\ (2\ddot{x} + \dot{x} + 7x) - (\ddot{y} - \dot{y} + 5y) = 0, \end{cases} x(0) = \dot{x}(0) = 1, y(0) = \dot{y}(0) = 0.$$
30.
$$\begin{cases} \ddot{x} - x + y + z = 0, \\ x + \ddot{y} - y + z = 0, \\ x + y + \ddot{z} - z = 0, \end{cases} x(0) = 1, y(0) = z(0) = \dot{x}(0) = \dot{y}(0) = \dot{z}(0) = 0.$$

Відповіді

1. $x(t) = e^t - 2e^{2t} + e^{3t}$. 2. $x(t) = \frac{1}{20}t^3 e^{3t}$. 3. $x(t) = -\frac{1}{2}t \cos t$.

4. $x(t) = \frac{1}{12}t^4 e^t$. 5. $x(t) = 2e^{3t}$. 6. $x(t) = \sin t + \sin 2t - 2\cos 3t$.

7. $x(t) = -2\sin t - \cos 2t$. 8. $x(t) = te^t \sin t$. 9. $x(t) = 3 \operatorname{ch} t$. 10. $x(t) = \frac{t \sin t}{2}$.

11. $x(t) = \frac{8}{15}e^{3t} + \frac{4}{5}e^{-2t} - \frac{1}{3}$. 12. $x(t) = A \operatorname{ch} kt + \frac{B}{k} \operatorname{sh} kt$.

13. $y(t) = \frac{1}{b}e^{at} \sin bt$. 14. $x(t) = x_0 e^{-t} \cos at + (x_1 + x_0) \frac{1}{a} e^{-t} \sin at$.

15. $x(t) = a e^t \cos bt + e^t \sin bt$. 16. $y(t) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{3}e^{-t} + \frac{1}{6}e^{2t}$.

17. $y(t) = 2(e^{-t} + 1) + \frac{1}{3}t^3$. 18. $x(t) = 2$.

19. $y(t) = 1 + e^t(a-1) + te^t(b-a+1)$.

20. $y(t) = \cos t - \frac{3}{2}t \cos t$. 21. $y(t) = \frac{1}{16}[\cos 3t - \cos t + 4t \sin t]$.

22. $y(t) = a \cos t + \left(b - \frac{5}{9}\right) \sin t - \frac{1}{3}t \cos 2t + \frac{4}{9} \sin 2t$.

23. $x(t) = \left(x_1 + \frac{b}{2a}\right) \frac{\sin at}{a} + \left(x_0 + \frac{bt}{2a}\right) \cos at$.

Указівка. $F(p)(p^2 + a^2) = \frac{ab}{p^2 + a^2} + x_0 p + x_1$,

$F(p) = \frac{ab}{(p^2 + a^2)^2} + x_0 \frac{p}{p^2 + a^2} + \frac{x_1}{p^2 + a^2}$. Для першого доданку

$$\frac{ab}{(p^2 + a^2)^2} = \frac{b}{2} \int_0^t \tau \sin a\tau d\tau = \frac{b}{2a^2} (\sin at - at \cos at). \quad \mathbf{24.}$$

Спочатку

розв'язуємо рівняння $\ddot{x} - a^2 x = 1$ при тих же початкових умовах.

$$F(p) = \frac{1}{p(p^2 - a^2)} = \int_0^t \operatorname{sh} at dt = \frac{1}{a^2} (\operatorname{ch} at - 1). \text{ За формулою Дюамеля}$$

$$\text{знаходимо розв'язок: } x(t) = \frac{b}{a} \int_0^t e^{-\tau^2} \sin a(t - \tau) d\tau.$$

$$\mathbf{25.} \quad z(t) = c_1 e^{4t} \cos at + (c_2 - 4c_1) \frac{1}{a} e^{4t} \sin at. \quad \mathbf{26.} \quad y(t) = \frac{t^2}{2} - 1.$$

$$\mathbf{27.} \quad x(t) = e^{2t}, \quad y(t) = 3e^{2t}. \quad \mathbf{28.} \quad y(t) = 11e^{-8t} - 8e^{-2t}; \quad z(t) = 11e^{-8t} + 4e^{-2t}$$

29. Переходимо до операторної системи

$$\begin{cases} (2p^2 - p + 9)X(p) - (p^2 + p + 3)Y(p) = 2p + 1, \\ (2p^2 + p + 7)X(p) - (p^2 - p + 5)Y(p) = 2p + 3. \end{cases}$$

Для спрощення беремо суму і різницю рівнянь системи:

$$\begin{cases} 2X(p) - Y(p) = 2 \frac{p+1}{p^2+4}, \\ X(p) + Y(p) = \frac{1}{p-1}. \end{cases}$$

Звідси

$$X(p) = \frac{1}{3} \frac{1}{p-1} + \frac{2}{3} \frac{p}{p^2+4} + \frac{2}{3} \frac{1}{p^2+4},$$

$$Y(p) = \frac{2}{3} \frac{1}{p-1} - \frac{2}{3} \frac{p}{p^2+4} - \frac{2}{3} \frac{1}{p^2+4}.$$

Переходимо до оригіналів. Остаточно одержимо:

$$x(t) = \frac{1}{3} (e^t + 2 \cos 2t + \sin 2t), \quad y(t) = \frac{1}{3} (2e^t - 2 \cos 2t - \sin 2t).$$

30. $x = \frac{2}{3} \operatorname{ch}(t\sqrt{2}) + \frac{1}{3} \cos t, y = z = -\frac{1}{3} \operatorname{ch}(t\sqrt{2}) + \frac{1}{3} \cos t.$ При

знаходженні оригіналу необхідно скористатись другою теоремою розвинення.

Векторний аналіз

Розглянемо вектор $\vec{a}(t)$ як функцію змінної t . Це означає, що задано три скалярних функції $a_x(t), a_y(t), a_z(t)$ – проекції цього вектора на координатні осі.

Геометричне місце кінців вектора $\vec{a}(t)$, відкладених від спільного початку, називають *годографом вектора*.

Похідною вектора $\vec{a}(t)$ є границя

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{a}(t + \Delta t) - \vec{a}(t)}{\Delta t},$$

а її напрям співпадає з напрямом дотичної до годографа. Швидкість точки, що рухається є похідна її радіуса-вектора за часом:

$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t).$$

Похідну вектора швидкості називають *вектором прискорення*:

$$\vec{w}(t) = \dot{\vec{v}}(t) = \ddot{\vec{r}}(t).$$

Усі основні правила диференціювання зберігаються для похідних векторів, а саме:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[\vec{a}(t) + \vec{b}(t)] &= \frac{d\vec{a}}{dt} + \frac{d\vec{b}}{dt}, \\ \frac{d}{dt}[c\vec{a}(t)] &= c \frac{d\vec{a}}{dt}, \quad c = \text{const}, \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt}[m(t)\vec{a}(t)] = m(t)\frac{d\vec{a}}{dt} + \frac{dm}{dt}\vec{a},$$

$$\frac{d}{dt}[\vec{a}(t) \cdot \vec{b}(t)] = \left(\frac{d\vec{a}}{dt} \cdot \vec{b}\right) + \left(\vec{a} \cdot \frac{d\vec{b}}{dt}\right),$$

$$\frac{d}{dt}[\vec{a}(t) \times \vec{b}(t)] = \frac{d\vec{a}}{dt} \times \vec{b} + \vec{a} \times \frac{d\vec{b}}{dt}.$$

Якщо $\vec{a} = m(t)\vec{a}_1(t)$, то $\frac{d\vec{a}}{dt} = m\frac{d\vec{a}}{dt} + \frac{dm}{dt}\vec{a}.$

Звідси, коли $\vec{a}_1(t) = const$, то

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \frac{dm}{dt}\vec{a}.$$

Коли $m(t) = const$, то $\frac{d\vec{a}}{dt} = m\frac{d\vec{a}}{dt}.$

Формула Тейлора для векторної функції має вигляд

$$\vec{a}(t) = \vec{a}(t_0) + (t-t_0)\vec{a}'(t_0) + \frac{(t-t_0)^2}{2!}\vec{a}''(t_0) + \dots + \frac{(t-t_0)^n}{n!}[\vec{a}^{(n)}(t_0) + \varepsilon].$$

Якщо

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \vec{b}'(t), \text{ то } \vec{a}(t) = \int \vec{b}(t)dt + C, C = const.$$

Визначений інтеграл має вигляд $\int_{t_0}^t \vec{b}(\tau)d\tau = \vec{a}(t) - \vec{a}(t_0).$

Градiєнтом скалярного поля $u = u(x, y, z)$ називають вектор

$$\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k} = \nabla u,$$

де $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$ – символічний вектор (оператор) Гамільтона

“набла”. Модуль градієнта

$$|\operatorname{grad} u| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}$$

є найбільшою швидкістю зростання скалярної функції $u = u(x, y, z)$.

Похідна функції $u = u(x, y, z)$ **в напрямку вектора**

$$\vec{l} = \cos \alpha \vec{i} + \cos \beta \vec{j} + \cos \gamma \vec{k}$$

дорівнює

$$\frac{\partial u}{\partial l} = (\vec{l}, \operatorname{grad} u) = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma.$$

Дивергенцією векторного поля $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$,

де $P = P(x, y, z)$, $Q = Q(x, y, z)$, $R = R(x, y, z)$ – диференційовні функції, є скаляр

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \nabla \cdot \vec{F}.$$

Ротором (вихором) векторного поля $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$

називають вектор

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \nabla \times \vec{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}.$$

Теорему Гауса-Остроградського у векторній формі записують так:

$$\iint_{\sigma} \vec{F} \vec{n} d\sigma = \iiint_V \operatorname{div} \vec{F} dV,$$

де σ – замкнена гладка поверхня, а V – об'єм, обмежений цією поверхнею. Інтеграл у лівій частині рівності називають **поток**ом вектора $\vec{F}$ через поверхню σ .

Теорему Стокса у векторній формі записують так:

$$\oint_L \vec{F} d\vec{l} = \iint_P \text{rot} \vec{F} \vec{n} d\sigma,$$

де L – замкнена гладка крива, а P – гладка поверхня, обмежена цією кривою. Інтеграл у лівій частині рівності називають **циркуляцією** вектора $\vec{F}$ вздовж кривої L . Він дорівнює роботі, яку сила $\vec{F}$ виконує на L .

Поле градієнта $\text{grad} u$ називають **потенціальним**, а функцію $u = u(x, y, z)$ – **потенціалом** цього **поля**. Якщо $\text{grad} u = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$, то потенціал знаходять за формулою

$$U = \int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z)} P dx + Q dy + R dz,$$

де криволінійний інтеграл не залежить від шляху інтегрування.

Для того, щоб поле $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ було потенціальним необхідно і достатньо, щоб виконувались рівності:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z} \quad \text{або} \quad \text{rot} \vec{F} = 0.$$

Поле $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ називають **соленоїдальним**, якщо $\text{div} \vec{F} = 0$.

У задачах радіус-вектор $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, де x, y, z – координати кінця цього вектора, а початок співпадає з початком координат.

Практичні завдання для самостійної роботи

§9. Векторна функція скалярного аргумента

1. Доведіть, що для лінійної функції $\vec{u} = \vec{a}t + \vec{b}$, де $\vec{a}, \vec{b} = \text{const}$, $\vec{u}' = \vec{a}$.

2. Доведіть, що годограф лінійної функції $\vec{u} = \vec{a}t + \vec{b}$, де $\vec{a}, \vec{b} = \text{const}$ є пряма лінія.

3. Доведіть, що годограф функції $\vec{u} = \vec{a} \cos t + \vec{b} \sin t + \vec{c}$, де $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} = \text{const}$ і $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ є еліпс.

4. Доведіть, що годограф функції $\vec{u} = \vec{a} \cosh t + \vec{b} \sinh t$, де $\vec{a}$ – сталий вектор, паралельний осі Ox , а $\vec{b}$ – сталий вектор, паралельний осі Oy є гіпербола.

5. Доведіть, що годограф функції $\vec{u} = \vec{a} + \vec{b}t + \vec{c}t^2$, де $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} = \text{const}$, $\vec{b}, \vec{c}$ – неколінеарні і $\vec{c} \cdot \vec{b} = 0$ є парабола.

Знайти похідні векторних функцій.

6. $\vec{r} = \text{ctg } t \vec{i} + \text{arctg } t \vec{j}$; $\vec{\rho} = e^t \vec{r}$.

7. $\vec{r} = e^{-t} \vec{i} + 2t \vec{j} + \ln t \vec{k}$; $\vec{\rho} = t \vec{i} + t^2 \vec{k}$; $\vec{F} = \vec{r} \cdot \vec{\rho}$.

8. $\vec{r} = t^2 \vec{i} - \frac{\vec{j}}{t} + \frac{\vec{k}}{t^2}$; $\vec{\rho} = \sin t \vec{j} - \cos t \vec{k}$; $\vec{F} = \vec{r} + \vec{\rho}$.

9. $\vec{r} = t \vec{i} + t^2 \vec{j} + t^3 \vec{k}$; $\vec{\rho} = \vec{i} + \frac{\vec{j}}{t} + \frac{\vec{k}}{t^2}$; $\vec{F} = \vec{r} \times \vec{\rho}$.

10. Нехай $\vec{e}(\varphi) = \cos \varphi \vec{i} + \sin \varphi \vec{j}$, $\vec{e}_1(\varphi) = -\sin \varphi \vec{i} + \cos \varphi \vec{j}$. Доведіть, що $\frac{d\vec{e}(\varphi)}{d\varphi} = \vec{e}_1(\varphi)$.

11. Нехай вектори $\vec{r}(t)$ і $\dot{\vec{r}}(t)$ колінеарні для будь-яких t . Доведіть, що і вектори $\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}$, $\frac{d^3 \vec{r}}{dt^3}$, ..., $\frac{d^n \vec{r}}{dt^n}$ колінеарні вектору $\vec{r}(t)$.

12. Доведіть, що за умови $|\vec{r}| = \text{const}$ добуток $\vec{r}(t) \cdot \dot{\vec{r}}(t) = 0$. Який геометричний зміст цієї теореми?

13. Нехай неперервну і диференційовну функцію $\vec{r}(t)$ визначено в інтервалі (t_1, t_2) , причому $\vec{r}(t_1) = \vec{r}(t_2)$. Застосувати теорему Ролля до функції $\vec{a} \cdot \vec{r}$, де $\vec{a} = \text{const}$. Пояснити результат геометрично.

14. $\vec{r}(t) = a \sin t \vec{i} - a \cos t \vec{j} + bt^2 \vec{k}$, $a, b = \text{const}$. Знайти годографи функцій $\dot{\vec{r}}(t), \ddot{\vec{r}}(t)$ (швидкості та прискорення).

15. Показати, що вектори $\vec{A}(t)$ і $\frac{1}{|\vec{A}|^2} \cdot \frac{d\vec{A}}{dt} + \frac{d}{dx} \left(\frac{\vec{A}}{|\vec{A}|^2} \right)$ взаємно перпендикулярні.

16. Скориставшись результатом задачі 10, обчислити інтеграл $\vec{I} = \int \varphi \vec{e}(\varphi) d\varphi$.

17. Обчислити інтеграл $\int_0^t e^{ap} \vec{e}(b\varphi) d\varphi$.

18. Доведіть, що $\vec{I} = \int \cos \varphi \vec{e}(\varphi) d\varphi = \frac{\varphi}{2} \vec{i} - \frac{\vec{e}_1(2\varphi)}{4} + \vec{c}$, де $\vec{c} = \text{const}$.

Відповіді

6. $\dot{\vec{r}} = -\frac{\vec{i}}{\sin^2 t} + \frac{\vec{j}}{1+t^2}$; $\dot{\vec{\rho}} = e^t (\vec{i}(\text{ctg} t - \frac{1}{\sin^2 t}) + \vec{j}(\text{arctg} t + \frac{1}{1+t^2}))$.

7. $\dot{\vec{r}} = -e^{-t} \vec{i} + 2\vec{j} + \frac{1}{t} \vec{k}$; $\dot{\vec{\rho}} = \vec{i} - 2t\vec{k}$; $\dot{\vec{F}} = e^{-t}(1-t) + t(1+2\ln t)$.

8.

$\dot{\vec{r}} = 2t\vec{i} + \frac{\vec{j}}{t^2} - \frac{2}{t^3} \vec{k}$; $\dot{\vec{\rho}} = \cos t \vec{i} + \sin t \vec{k}$; $\dot{\vec{F}} = 2t\vec{i} + \vec{j}(\frac{1}{t^2} + \cos t) + \vec{k}(\sin t - \frac{2}{t^3})$.

9. $\dot{\vec{r}} = \vec{i} + 2t\vec{j} + 3t^2 \vec{k}$; $\dot{\vec{\rho}} = -\frac{\vec{j}}{t^2} - \frac{2}{t^3} \vec{k}$; $\dot{\vec{F}} = -2t\vec{i} + \vec{j}(\frac{1}{t^2} + 3t^2) - 2t\vec{k}$.

14. $\dot{\vec{r}} = a \cos t \vec{i} + a \sin t \vec{j} + 2bt \vec{k}$; $\ddot{\vec{r}} = -a \sin t \vec{i} + a \cos t \vec{j} + 2b \vec{k}$.

16. $\vec{e}(\varphi) - \varphi \vec{e}(\varphi) + \dot{c}$, $\dot{c} = const$. Указівка. Необхідно інтегрувати частинами.

17. $\frac{1}{a^2 + b^2} [e^{at} \{a\vec{e}(bt) - b\vec{e}_1(bt)\} - a\vec{i} + b\vec{j}]$. Указівка. Необхідно інтегрувати частинами двічі та розв'язати рівняння відносно шуканого інтеграла.

§10. Градієнт

1. Знайти величину і напрям градієнта поля (функції) $u = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2xy - 4x + 2y - 4z$ у точках $O(0;0;0)$, $A(1;1;1)$, $B(5;-3;\frac{2}{3})$. У якій точці поля градієнт дорівнює нулю?

2. Знайти кут між градієнтами функцій $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ та $z = x + y + \sqrt{3xy}$ у точці $(3;4)$.

3. Знайти кут між градієнтами функцій $z = \arcsin \frac{x}{x+y}$ у точках $(1;1)$ і $(3;4)$.

4. Знайти найбільшу крутизну підйому поверхні $z = \ln(x^2 + 4y^2)$ у точці $(6;4;\ln 100)$.

5. Знайти найбільшу крутизну підйому поверхні $z = x^y$ у точці $(2;2;4)$.

6. Знайти точки, у яких модуль градієнта функції $z = (x^2 + y^2)^{3/2}$ дорівнює 2.

7. Доведіть наступні співвідношення (φ, ψ – диференційовні функції, c – стала):

$$\text{grad}(\varphi + \psi) = \text{grad } \varphi + \text{grad } \psi;$$

$$\text{grad}(c + \varphi) = \text{grad } \varphi;$$

$$\text{grad}(c\varphi) = c \text{ grad } \varphi.$$

8. Доведіть наступні співвідношення:

$$\text{grad}(\varphi\psi) = \varphi \text{ grad } \psi + \psi \text{ grad } \varphi;$$

$$\text{grad}(\varphi^n) = n\varphi^{n-1} \text{ grad } \varphi;$$

$$\text{grad}[\varphi(\psi)] = \varphi'(\psi) \text{ grad } \psi.$$

9. $z = \varphi(u, v)$, $u = \psi(x, y)$, $v = \zeta(x, y)$. Доведіть, що

$$\text{grad } z = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \text{ grad } u + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \text{ grad } v.$$

10. Нехай $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$. Доведіть, що

$$\frac{d}{dt} f(x, y, z) = \left(\text{grad } f, \frac{d\vec{r}}{dt} \right), \text{ де } \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

11. Знайти градієнт функції, застосувавши доведене у завданні

10 § 9 співвідношення:

$$1) f = \vec{r}^2; \quad 2) f = |\vec{r}|; \quad 3) f = F(\vec{r}^2);$$

$$4) f = (\vec{a}, \vec{r}) \cdot (\vec{b}, \vec{r}); \quad 5) f = (\vec{a}\vec{b}\vec{r}); \quad 6) f = (\vec{a}, \vec{r})$$

Тут $\vec{a}, \vec{b}$ – сталі вектори.

12. Знайти похідну функції $u = \frac{1}{r}$, де $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ в напрямку її градієнта.

13. Знайти $\text{grad } f(r)$.

14. Знайти $\text{grad}(|\vec{c} \times \vec{r}|^2)$ ($\vec{c}$ – сталий вектор).

15. Знайти $\text{grad} \left\{ \frac{\vec{a} \cdot \vec{r}}{\vec{b} \cdot \vec{r}} \right\}$, де $\vec{a}, \vec{b}$ – сталі неколінеарні вектори.

16. Знайти градієнт кута $\varphi(M)$, утвореного радіус-вектором точки M зі сталим напрямом ($\vec{a}$ – одиничний вектор напрямку).

Відповіді

1. $\text{grad } u(0) = -4\vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k}$; $\text{grad } u(A) = 8\vec{j} + 2\vec{k}$; $\text{grad } u(B) = 0$.
2. $\cos \alpha \approx -0,199$; $\alpha \approx 101^\circ 30'$.
3. $\cos \alpha \approx 0,99$; $\alpha \approx 8^\circ$.
4. $\text{tg } \varphi \approx 0,342$; $\alpha \approx 18^\circ 52'$.
5. $\text{tg } \varphi \approx 4,87$; $\alpha \approx 78^\circ 24'$.
6. Точки, які розташовані на колі $x^2 + y^2 = \frac{2}{3}$.
11. 1) $2\vec{r}$; 2) $\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$; 3) $2F'(\vec{r}^2)\vec{r}$; 4) $\vec{a}(\vec{b}\vec{r}) + \vec{b}(\vec{a}\vec{r})$; 5) $\vec{a} \times \vec{b}$; 6) $\vec{a}$.
12. $\frac{1}{r^2}$. Указівка. Похідна у напрямку градієнта дорівнює модулю градієнта.
13. $f'(r)\frac{\vec{r}}{r}$, $r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Указівка. Скористатися результатами завдань 26 і 29(2).
14. $2(\vec{c}\vec{c})\vec{r} - 2\vec{c}(\vec{r}\vec{c}) = 2\vec{c} \times (\vec{r} \times \vec{c})$. Указівка. Можна скористатися завданням 28 і тим, що $|\vec{c} \times \vec{r}|^2 = (\vec{c} \times \vec{r})(\vec{c} \times \vec{r})$. У процесі розв'язування знадобиться формула $(\vec{a} \times \vec{b})(\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a}\vec{c})(\vec{b}\vec{d}) - (\vec{a}\vec{d})(\vec{b}\vec{c})$.
15. $\frac{\vec{r} \times (\vec{a} \times \vec{b})}{(\vec{b}\vec{r})}$. Розв'язання. Скористаємось результатом завдання 28:

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{(\vec{a}\vec{r})}{(\vec{b}\vec{r})} \right\} = \frac{\left(\vec{a} \frac{d\vec{r}}{dt} \right) (\vec{b}\vec{r}) - \left(\vec{b} \frac{d\vec{r}}{dt} \right) (\vec{a}\vec{r})}{(\vec{b}\vec{r})^2} = \frac{(\vec{a}(\vec{b}\vec{r}) - \vec{b}(\vec{a}\vec{r})) \frac{d\vec{r}}{dt}}{(\vec{b}\vec{r})^2} = \frac{\vec{r} \times (\vec{a} \times \vec{b})}{(\vec{b}\vec{r})^2} \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Тому $\text{grad} \left\{ \frac{(\vec{a}\vec{r})}{(\vec{b}\vec{r})} \right\} = \frac{\vec{r} \times (\vec{a} \times \vec{b})}{(\vec{b}\vec{r})^2}$.

16. $\cos \varphi = \frac{\vec{a}\vec{r}}{|\vec{r}|}, \text{grad} \varphi = -\frac{\vec{r} \times (\vec{a} \times \vec{b})}{r^3 \sin \varphi}$.

Розв'язання. $\cos \varphi = \frac{\vec{a}\vec{r}}{|\vec{a}| |\vec{r}|} = \frac{\vec{a}\vec{r}}{\sqrt{\vec{r}\vec{r}}}$. Скористаємось результатом

завдання 28:

$$\begin{aligned} -\sin \varphi \frac{d\varphi}{dt} &= \frac{(\vec{a} \frac{d\vec{r}}{dt}) \sqrt{(\vec{r}\vec{r})} - \frac{1}{2\sqrt{(\vec{r}\vec{r})}} 2(\vec{r} \frac{d\vec{r}}{dt})(\vec{a}\vec{r})}{(\vec{r}\vec{r})} = \\ &= \frac{(\vec{a} \frac{d\vec{r}}{dt})(\vec{r}\vec{r}) - (\vec{r} \frac{d\vec{r}}{dt})(\vec{a}\vec{r})}{(\vec{r}\vec{r})^{3/2}} = \frac{|\vec{a}(\vec{r}\vec{r}) - \vec{r}(\vec{a}\vec{r})| \frac{d\vec{r}}{dt}}{|\vec{r}|^3} = \left(\frac{\vec{r} \times (\vec{a} \times \vec{r})}{|\vec{r}|^3} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} \right) \end{aligned}$$

Звідси $\frac{d\varphi}{dt} = - \left(\frac{\vec{r} \times (\vec{a} \times \vec{r})}{|\vec{r}|^3 \sin \varphi} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} \right)$. Тому градієнт $\text{grad} \varphi = -\frac{\vec{r} \times (\vec{a} \times \vec{b})}{r^3 \sin \varphi}$.

§11. Дивергенція (розбіжність)

1. Доведіть безпосереднім обчисленням, що дивергенція вектора $\vec{a}$ не залежить від вибору прямокутної системи координат.
2. Доведіть, що $\text{div}(\vec{a} + \vec{b}) = \text{div} \vec{a} + \text{div} \vec{b}$.
3. Доведіть, що $\text{div}(u \cdot \vec{c}) = (\vec{c} \cdot \text{grad} u)$, де $\vec{c}$ – сталий вектор, u – скаляр.

4. Доведіть, що $\operatorname{div}(u\vec{a}) = u \operatorname{div} \vec{a} + (\vec{a} \cdot \operatorname{grad} u)$.
5. Знайти $\operatorname{div}(\operatorname{grad} u)$.
6. Знайти $\operatorname{div}[\operatorname{grad} f(r)]$, де $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.
7. Обчислити 1) $\operatorname{div}(\vec{r})$, 2) $\operatorname{div} \frac{\vec{r}}{r}$.
8. Обчислити 1) $\operatorname{div}(r\vec{c})$, 2) $\operatorname{div}(r^2\vec{c})$, де $\vec{c}$ – сталий вектор, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.
9. Обчислити $\operatorname{div}(\alpha\vec{r})$, де α – сталий скаляр.
10. Обчислити $\operatorname{div} \vec{b}(\vec{r} \cdot \vec{a})$, де $\vec{a}, \vec{b}$ – сталі вектори.
11. Обчислити $\operatorname{div} \vec{r}(\vec{r} \cdot \vec{a})$, де $\vec{a}$ – сталий вектор.
12. Обчислити $\operatorname{div}[f(r) \cdot \vec{c}]$, де $\vec{c}$ – сталий вектор.
13. Обчислити $\operatorname{div}[f(r) \cdot \vec{r}]$. У якому випадку дивергенція цього вектора дорівнює нулю?
14. Знайти $\operatorname{div}(u \cdot \operatorname{grad} u)$.
15. Знайти $\operatorname{div}(u \cdot \operatorname{grad} v)$.
16. Знайти $\operatorname{div}(\vec{a} \times \vec{r})$, де $\vec{a}$ – сталий вектор.
17. Матеріальна точка обертається навколо осі Oz проти годинникової стрілки зі сталою кутовою швидкістю $\vec{\omega}$. Знайти дивергенцію вектора швидкості $\vec{v}$ і вектора прискорення $\vec{w}$.

Відповіді

1. Указівка. Скористайтесь перетворенням декартової системи координат.

$$5. \operatorname{div}(\operatorname{grad} u) = \Delta u, \text{ де } \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

6. $f''(r) + \frac{2}{r} f'(r)$, $f(r) = c + \frac{c_1}{r}$, де c, c_1 – сталі. Указівка.

Скористайтесь результатом розв'язання завдання 13 §10. 7. 1) 3;

2) $\frac{2}{r}$. Указівка. $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. 8. 1) $\frac{(\vec{c}\vec{r})}{|\vec{r}|}$; 2) $2(\vec{c}\vec{r})$. Указівка.

Доцільно скористатися результатами завдань 3 §11 і 11 §10. 9. 3α .

10. $(\vec{b}\vec{a})$. Указівка. Доцільно скористатися результатами завдань 3 §11

і 11 §10. 11. $4(\vec{r}\vec{a})$. Указівка. Доцільно скористатися результатами

завдань 4 §6 і 11 §10. 12. $\frac{f'(r)}{r}(\vec{c}\vec{r})$. Указівка. Доцільно скористатися

результатами завдань 3 §11 і 13 §10. 13. $3f(r) + rf'(r)$, $f(r) = \frac{c}{r^3}$, де

c – стала. 14. $u\Delta u + (\text{grad } u)^2$, де $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$. Указівка.

Дивіться завдання 4, 5 §11. 15. $u\Delta v + (\text{grad } u, \text{grad } v)$, де

$\Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$. Указівка. Дивіться завдання 14 §11. 16. 0.

17. $\text{div } \vec{v} = 0$, $\text{div } \vec{w} = -2w^2$. Указівка. $\vec{v} = \vec{w} \times \vec{r}$, $\vec{w} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{w}(\vec{w}\vec{r}) - w^2\vec{r}$.

Далі дивіться завдання 16, 10, 7 §11.

§12. Ротор (вихор)

1. Знайти $\text{div}(\text{rot } \vec{a})$.

2. Доведіть, що $\text{rot}(\vec{a} + \vec{b}) = \text{rot } \vec{a} + \text{rot } \vec{b}$.

3. Доведіть, що $\text{rot}(u\vec{a}) = u \text{rot } \vec{a} + \text{grad } u \times \vec{a}$.

4. Знайти $\text{rot}(\vec{r})$.

5. Знайти $\text{rot}(f(r)\vec{r})$.

6. Знайти $\text{rot}(f(r)\vec{c})$, де $\vec{c}$ – сталий вектор.
7. Знайти $\text{rot}(\vec{c} \times \vec{r})$, де $\vec{c}$ – сталий вектор.
8. Знайти $\text{rot}[\vec{c} \times f(\vec{r})\vec{r}]$, де $\vec{c}$ – сталий вектор.
9. Доведіть, що $\text{div}(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \text{ rot } \vec{a} - \vec{a} \text{ rot } \vec{b}$.
10. Знайти $\text{rot}(\text{grad } u)$.
11. Матеріальна точка обертається навколо осі $l(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ зі сталою кутовою швидкістю $\vec{\omega}$. Знайти ротор вектора швидкості $\vec{v}$.

Відповіді

1. 0. 4. 0. 5. Указівка. Дивіться завдання 3, 4 §12, 13 §10.

6. $\frac{f'(r)}{r}[\vec{r} \times \vec{c}]$. Указівка. Дивіться завдання 5 §12. 7. $2\vec{c}$.

8. $2f(r)\vec{c} + \frac{f'(r)}{r}[\vec{r} \times (\vec{c} \times \vec{r})]$.

Указівка. $\text{rot}[\vec{c} \times f(r)\vec{r}] = \text{rot}\{f(r)[\vec{c} \times \vec{r}]\}$, далі розв'язання як у завданні 6 §12 і скористатися результатом завдання 7 §12. 10. 0.

11. $2\vec{\omega}$. Указівка. $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$, далі дивіться завдання 7 §12.

§13. Елементи теорії поля

У задачах 1–3 обчислити дивергенцію та ротор векторних полів:

1. $\vec{F} = \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.
2. $\vec{F} = (y^2 + z^2)\vec{i} + (z^2 + x^2)\vec{j} + (x^2 + y^2)\vec{k}$.
3. $\vec{F} = x^2 yz\vec{i} + xy^2 z\vec{j} + xyz^2\vec{k}$.
4. Обчислити $\text{div}[\text{grad}(x^2 + y^2 + z^2)]$.

5. Векторне поле утворено силою, що має сталу величину F і напрям додатної осі абсцис. Обчислити дивергенцію та ротор цього поля.

6. Плоске векторне поле утворено силою, обернено пропорційною квадрату відстані від точки прикладання до початку координат і направленої до початку координат. Обчислити дивергенцію та ротор цього поля.

7. Визначити дивергенцію та ротор просторового поля, якщо сила така ж, як у задачі 6.

8. Векторне поле утворено силою, обернено пропорційною відстані від точки прикладання до осі Oz і направленої до неї. Обчислити дивергенцію та ротор цього поля.

9. Векторне поле утворено силою, обернено пропорційною відстані від точки прикладання до площини XOY і направленої до початку координат. Обчислити дивергенцію та ротор цього поля.

10. Доведіть, що $\text{rot rot } \vec{F} = \text{grad div } \vec{F} - \Delta \vec{F}$, де

$$\Delta \vec{F} = \nabla \nabla \vec{F} = \nabla^2 \vec{F} = \Delta X(x, y, z) \vec{i} + \Delta Y(x, y, z) \vec{j} + \Delta Z(x, y, z) \vec{k}, \text{ а}$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \text{ — оператор Лапласа.}$$

11. Доведіть, що $\vec{n}[\text{grad}(\vec{F} \cdot \vec{n})] - \text{rot}(\vec{F} \times \vec{n}) = \text{div } \vec{F} \cdot \vec{n}$, якщо $\vec{n}$ — одиничний сталий вектор.

12. Векторне поле утворено сталим вектором $\vec{A}$. Впевнитись, що воно потенціальне і знайти його потенціал.

13. Векторне поле утворено силою, обернено пропорційною відстані від точки прикладання до початку координат і направленої до початку координат. Показати, що поле потенціальне і знайти його

потенціал. Знайти роботу A сили при переміщенні точки маси m з точки (x_1, y_1, z_1) до точки (x_2, y_2, z_2) .

14. Сили поля обернено пропорційні відстані точок їх прикладання від площини XOY і направлені до початку координат. Чи є воно потенціальним?

15. Сили поля пропорційні квадрату відстані від точки прикладання до осі Oz і направлені до початку координат. Чи є воно потенціальним?

16. Поле утворено силою, обернено пропорційною відстані від точки прикладання до осі Oz , перпендикулярної до цієї осі і направленої до неї. Доведіть, що поле потенціальне і знайти його потенціал.

17. Векторне поле утворено лінійними швидкостями точок твердого тіла, що обертається навколо осі. Чи має це поле потенціал?

18. Сили поля задані так: $\vec{F} = f(r) \frac{\vec{r}}{r}$ (так зване центроване поле).

Показати, що потенціал цього поля дорівнює

$$u(x, y, z) = \int_{\alpha}^t f(r) dr, \quad (r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}).$$

19. Знайти роботу сили поля $\vec{F} = xy\vec{i} + yz\vec{j} + xz\vec{k}$ при переміщенні за годинниковою стрілкою точки маси m вздовж замкненої лінії, яка складається з відрізка прямої $AC: x + z = 1, y = 0$, чверті кола $AB: x^2 + y^2 = 1, z = 0$, і відрізка прямої $BC: y + z = 1, x = 0$. Як зміниться величина роботи, якщо дугу BA замінити ламаною BOA чи відрізком BA ?

20. Обчислити потік і циркуляцію сталого вектора $\vec{A}$ вздовж довільної замкненої кривої L (поле плоске).
21. Обчислити потік і циркуляцію вектора $\vec{F} = a\vec{r}$, де a – сталий скаляр, $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$, вздовж довільної замкненої кривої L (поле плоске).
22. Обчислити потік і циркуляцію вектора $\vec{F} = x\vec{i} - y\vec{j}$ вздовж довільної замкненої кривої L (поле плоске).
23. Обчислити потік і циркуляцію вектора $\vec{F} = (x^3 - y)\vec{i} + (y^3 + x)\vec{j}$ вздовж кола $x^2 + y^2 = R^2$ (поле плоске).
24. Потенціал поля (плоского) швидкостей частинок течії рідини дорівнює $u = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$. Визначити кількість рідини, що витікає із замкненого контура L , описаного навколо початку координат, за одиницю часу (потік), і кількість рідини, що протікає за одиницю часу вздовж кривої L (циркуляція). Як зміниться результат, якщо початок координат лежить поза контуром L ?
25. Потенціал поля (плоского) швидкостей частинок течії рідини дорівнює $u = \arctg \frac{y}{x}$. Обчислити потік і циркуляцію вектора швидкості вздовж замкненої кривої L .
26. Потенціал поля (плоского) швидкостей частинок течії рідини дорівнює $u = x(x^2 - 3y^2)$. Обчислити витрати рідини за одиницю часу через відрізок прямої, що з'єднує початок координат і точку $(1;1)$.
27. Доведіть, що потік радіус-вектора $\vec{r}$ через будь-яку замкнену поверхню дорівнює потроєному об'єму тіла, обмеженого цією поверхнею.

28. Обчислити потік радіус-вектора $\vec{r}$ через бічну поверхню кругового циліндра (радіус основи R , висота основи H), якщо вісь циліндра проходить через початок координат.

29. Скориставшись результатами задач 27, 28, встановити, чому дорівнює потік $\vec{r}$ через обидві основи циліндра.

30. Обчислити потік радіус-вектора $\vec{r}$ через бічну поверхню кругового конуса з основою у площині XOY , а висота співпадає з віссю Oz (висота конуса дорівнює 1, радіус основи 2).

31. Обчислити потік поля $\vec{F} = xy^2\vec{i} + x^2y\vec{j} + \frac{z^3}{3}\vec{k}$ через сферу $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

32. Обчислити потік поля $\vec{F} = xy\vec{i} + yz\vec{j} + xz\vec{k}$ через частину сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, розташованої у першому октанті.

33. Обчислити потік електричного поля точкового заряду, розміщеного у початку координат, через поверхню:

1) сфери $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$; 2) $(x - 2R)^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

34. Обчислити потік поля $\vec{F} = zy\vec{i} + xz\vec{j} + xy\vec{k}$ через бічну поверхню піраміди з вершиною у точці $S(0;0;2)$, основою якої є трикутник з вершинами $O(0;0;0)$, $A(2;0;0)$, $B(0;1;0)$.

35. Обчислити циркуляцію радіус-вектора $\vec{r}$ вздовж одного витка AB гвинтової лінії $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $z = bt$, де A і B —точки витка, що відповідають значенням параметра $t = 0$, $t = 2\pi$.

36. Обчислити циркуляцію поля $\vec{F} = x\vec{i} - z^2\vec{j} + y^2\vec{k}$ вздовж лінії перетину поверхні $x^2 = 4 - y - z$ з координатними площинами у

напрямку від точки перетину даної поверхні з віссю OX до точки перетину поверхні з віссю Oy , застосувавши теорему Стокса.

37. Обчислити потік вихора поля $\vec{F} = y\vec{i} + z\vec{j} + x\vec{k}$ через поверхню параболоїда обертання, що відтинається площиною $z = 0$.

38. Обчислити потік $\vec{F}$:

1) через бічну поверхню конуса $x^2 + y^2 - z^2 \leq 0, (0 \leq z \leq h)$;

2) через основу цього конуса.

39. Знайти потік вектора $\vec{a} = yz\vec{i} + xz\vec{j} + xy\vec{k}$:

1) через бічну поверхню циліндра $x^2 + y^2 \leq a^2, (0 \leq z \leq h)$;

2) через повну поверхню цього циліндра.

40. Обчислити потік радіус-вектора $\vec{r}$ через поверхню $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}, (0 \leq z \leq 1)$.

41. Знайти потік вектора $\vec{a} = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + z^2\vec{k}$ через додатний октант сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

42. Знайти потік вектора $\vec{a} = y\vec{i} + z\vec{j} + x\vec{k}$ через повну поверхню піраміди, обмеженої площинами $x = 0, y = 0, z = 0, x + y + z = a (a > 0)$. Перевірити результат за допомогою формули Остроградського.

43. Обчислити потік вектора сили тяжіння матеріальної точки, розміщеної у початку координат, через циліндр радіуса r навколо осі Oz висоти $2h$, симетричний відносно площини XOY , в напрямку внутрішньої нормалі (нормаль напрямлена до осі Oz).

44. Знайти потік вектора $\vec{a} = x^3\vec{i} + y^3\vec{j} + z^3\vec{k}$ через:

1) бічну поверхню конуса $\frac{x^2 + y^2}{R^2} \leq \frac{z^2}{H^2}, (0 \leq z \leq H)$;

2) через повну поверхню конуса.

45. Обчислити дивергенцію і потік сили тяжіння $\vec{F} = -\frac{m\vec{r}}{r^3}$ точки маси m , розміщеної у початку координат, через довільну замкнену поверхню, що містить цю точку.

46. За допомогою теореми Стокса обчислити циркуляцію вектора $\vec{a} = x^2y^3\vec{i} + \vec{j} + z\vec{k}$ вздовж кола $x^2 + y^2 = R^2, z = 0$, вибравши за поверхню півсферу $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$.

47. Знайти потенціал u гравітаційного поля, яке утворює матеріальна точка маси m , розміщена у початку координат: $\vec{a} = -\frac{m\vec{r}}{r^3}$.

Показати, що потенціал задовольняє рівняння Лапласа.

48. З'ясувати, чи має дане векторне поле потенціал u і знайти u , якщо потенціал існує:

1) $\vec{a} = (5x^2y - 4xy)\vec{i} + (3x^2 - 2y)\vec{j}$; 2) $\vec{a} = yz\vec{i} + xz\vec{j} + xy\vec{k}$;

3) $\vec{a} = (y + z)\vec{i} + (x + z)\vec{j} + (x + y)\vec{k}$.

Відповіді

1. $\operatorname{div} \vec{F} = 3, \operatorname{rot} \vec{F} = 0$.

2. $\operatorname{div} \vec{F} = 0, \operatorname{rot} \vec{F} = 2\{(y - z)\vec{i} + (z - x)\vec{j} + (x - y)\vec{k}\}$.

3. $\operatorname{div} \vec{F} = 6xyz, \operatorname{rot} \vec{F} = x(z^2 - y^2)\vec{i} + y(x^2 - z^2)\vec{j} + z(y^2 - x^2)\vec{k}$. 4. 6. 5.

$\operatorname{div} \vec{F} = 0, \operatorname{rot} \vec{F} = 0$. 6. $\operatorname{div} \vec{F} = \frac{k}{r^3}, \operatorname{rot} \vec{F} = 0$, де k – коефіцієнт пропорційності, r – відстань від точки прикладання сили до початку координат.

7. $\operatorname{div} \vec{F} = 0$, $\operatorname{rot} \vec{F} = 0$. 8. $\operatorname{div} \vec{F} = 0$, $\operatorname{rot} \vec{F} = 0$. (У точках на осі Oz поле не визначено). 9. $\operatorname{div} \vec{F} = -\frac{k}{z\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$, де k – коефіцієнт

пропорційності (у точках площини XOY поле не визначено).

12. $u = ax + by + cz + D$, $D = \text{const}$, $\vec{A} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$.

13.

$$u = -\frac{1}{2}k(x^2 + y^2 + z^2) + c, c = \text{const}, A = \frac{k}{2}(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - x_2^2 - y_2^2 - z_2^2)$$

.

14. Ні. 15. Ні. 16. $u = -\frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2) + c$, $c = \text{const}$. 17. Ні.

19. $\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}$. 20. 0; 0. 21. Потік дорівнює $2aS$, де S – площа області,

обмеженої контуром L . Циркуляція дорівнює 0. 22. 0; 0. 23. Потік

дорівнює $\frac{3}{2}\pi R^4$, циркуляція дорівнює $2\pi R^2$. 24. Потік і циркуляція

дорівнюють нулю, якщо початок поза межами контура L . Потік

дорівнює 2π , якщо початок в середині контура L , циркуляція

дорівнює нулю. 25. Потік дорівнює нулю в обох випадках.

Циркуляція дорівнює 2π , якщо початок в середині контура L і

циркуляція дорівнює нулю, якщо початок зовні. 26. 2. 28. $2\pi R^2 H$.

29. $\pi R^2 H$. 30. 4π . 31. $\frac{4}{5}\pi R^5$. 32. $\frac{3}{16}\pi$. 33. 1) $4\pi kq$. Указівка.

Скористайтеся тим, що $\vec{F} = k\frac{q}{r^2}\vec{r}_0$, де $\vec{r}_0 = \frac{1}{r}\vec{r}$. 2) 0. 34. $\frac{1}{6}$.

Указівка. Скористайтеся формулою Гаусса–Остроградського.

35. $2\pi^2 b^2$. **36.** $42\frac{2}{3}$. **37.** $-\pi$. Указівка. Застосуйте теорему Стокса, де

контур L – лінія перетину параболоїда з площиною $z = 0$. **38.** 1) 0.

2) πh^3 . **39.** 1) 0. 2) 0. **40.** π . **41.** $\frac{3}{8}\pi$. **42.** 0. **43.** $4\pi\gamma m h / \sqrt{h^2 + z^2}$.

44. 1) $\frac{1}{10}\pi R^2 H(3R^2 + 2H^2)$; 2) $\frac{3}{10}\pi R^2 H(R^2 + 2H^2)$. **45.** $\operatorname{div} \vec{F} = 0$ в

усіх точках, крім початку координат. Потік дорівнює $4\pi m$. **46.** $-\frac{\pi R^6}{8}$.

47. $\frac{m}{r}$. **48.** 1) Не має; 2) $u = xyz + c$; 3) $u = xy + xz + yz + c$.

ЗМІСТ

Вступ.....	3
Елементи теорії функцій комплексної змінної.....	4
Практичні завдання для самостійної роботи	
§1. Комплексні числа і функції комплексної змінної.....	10
Відповіді.....	12
§2. Диференціювання функцій комплексної змінної.....	16
Відповіді.....	17
§3. Інтеграл в комплексній площині.....	18
Відповіді.....	20
§4. Ряди та особливі точки аналітичних функцій.....	21
Відповіді.....	24
§5. Теорія лишків.....	25
Відповіді.....	28
§6. Конформне відображення.....	30
Відповіді.....	28
Операційне числення.....	32
Практичні завдання для самостійної роботи	
§7. Основні властивості перетворення Лапласа.....	38
Відповіді.....	41
§8. Диференціальні рівняння і системи диференціальних рівнянь.....	42
Відповіді.....	44
Векторний аналіз.....	46
Практичні завдання для самостійної роботи	
§4. Векторна функція скалярного аргумента.....	50
Відповіді.....	51
§5. Градієнт.....	52
Відповіді.....	54
§6. Дивергенція (розбіжність).....	56
Відповіді.....	57
§7. Ротор (вихор).....	58
Відповіді.....	58
§8. Елементи теорії поля.....	59
Відповіді.....	65
Зміст.....	68