Міністерство освіти і науки України

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

Н. Л. Денисенко, В. В. Могильова

Вища математика

Вступ до математичного аналізу

Практикум

Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра
спеціальності G3 Електрична інженерія, G4 Енерговиробництво

Електронне мережеве навчальне видання

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2026

УДК 517.1 (076)
Д33

Автори: *Денисенко Наталя Леонідівна*, канд. фіз.-мат. наук
Могильова Вікторія Віталіївна, канд. фіз.-мат. наук, доц.

Рецензент *Дворник А. В.*, канд. фіз.-мат. наук,
наук. співробітник відділу диференціальних рівнянь та теорії коливань Інституту математики НАН України

Відповідальний редактор *Дудкін М. Є.,* докт. фіз.-мат. наук, проф.

Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
(протокол № 6 від 03.04.2026 р.)
за поданням вченої ради Фізико-математичного факультету
(протокол № 2 від 04.03.2026 р.)

Денисенко Н. Л.

Д33 Вища математика. Вступ до математичного аналізу [Електронний ресурс] : практикум : навч. посіб. для здобувачів ступеня бакалавра спец. G3 Електрична інженерія, G4 Енерговиробництво / Н. Л. Денисенко, В. В. Могильова ; КПІ ім. Ігоря Сікорського. – Електрон. текст. дані (1 файл). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2026. – 63 с.

Навчальний посібник присвячений розділу «Вступ до математичного аналізу» курсу вищої математики, який вивчають студенти закладів вищої освіти технічних спеціальностей. Цей посібник містить добірку завдань, опрацювання яких сприятиме опанування студентами практичного матеріалу з тем «Границя функції», «Неперервність функції». Він допоможе студентам більш глибоко засвоїти ці теми, сформувати уміння та навички самостійного розв’язування задач.

У посібнику у вигляді довідникового матеріалу висвітлені теоретичні відомості, наведені методи обчислення різних типів границь функцій, розкриття деяких невизначеностей, дослідження функції на неперервність; наведено розв’язання з поясненнями типових прикладів. Посібник містить 50 варіантів індивідуальних завдань з розділу «Вступ до математичного аналізу».

УДК 517.1 (076)

Реєстр. № НП 25/26-311. Обсяг 3 авт. арк.

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
проспект Берестейський, 37, м. Київ, 03056
https://kpi.ua
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру видавців, виготовлювачів
і розповсюджувачів видавничої продукції ДК № 5354 від 25.05.2017 р.

ЗМІСТ

ВСТУП

Навчальний посібник присвячений розділу «Вступ до математичного аналізу» курсу вищої математики, який вивчають студенти закладів вищої освіти технічних спеціальностей. Цей посібник містить добірку завдань, опрацювання яких сприятиме опанування студентами практичного матеріалу з тем «Границя функції», «Неперервність функції, точки розриву». Він допоможе студентам більш глибоко засвоїти вище зазначені теми, сформувати уміння та навички самостійного розв'язування задач з цих тем.

У посібнику у вигляді довідникового матеріалу висвітлено теоретичні відомості, а саме: основні означення та поняття, формулювання властивостей і теорем, деякі важливі границі. Також наведено і проілюстровано розв'язаними з поясненнями типовими прикладами основні методи знаходження різних типів границь функцій, розкриття деяких невизначеностей, дослідження функції на неперервність. Посібник містить 50 варіантів індивідуальних завдань із розділу «Вступ до математичного аналізу», кожен варіант складається із 4 завдань (загалом 11 задач у кожному варіанті).

Навчальний посібник може бути корисним для опрацювання практичного матеріалу з розділу «Вступ до математичного аналізу» курсу вищої математики студентами денної і заочної форми навчання. Його також можуть використовувати викладачі у якості збірника для виконання студентами індивідуальної або розрахункової роботи з розділу «Вступ до математичного аналізу», або ж як допоміжний матеріал при аудиторній та самостійній роботі студентів.

ДОВІДНИКОВИЙ МАТЕРІАЛ З ТЕМ «ГРАНИЦЯ ФУНКЦІЇ», «НЕПЕРЕРВНІСТЬ ФУНКЦІЇ»

1. Границя функції: основні поняття і означення

Нехай функція $y = f(x)$ визначена в деякому околі точки x_0, окрім, можливо, самої точки x_0.

Означення 1 (означення границі на мові “ε-δ” або “за Коші”). Число A називається ***границею функції $f(x)$ в точці x_0***, якщо для будь-якого як завгодно малого числа $\varepsilon > 0$ існує таке число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, що як тільки для всіх x виконується умова $0 < |x - x_0| < \delta$, то буде виконуватись нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$. Позначають $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$ або $f(x) \to A$ при $x \to x_0$.

Коротко означення 1 записують так:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (\,\forall\varepsilon > 0\ \ \exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0:\ 0 < |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - A| < \varepsilon\,).$$

Означення 2. Число A називається ***границею функції $f(x)$ при $x \to \infty$***, якщо для будь-якого як завгодно малого числа $\varepsilon > 0$ існує таке число $N = N(\varepsilon)>0$, що як тільки для всіх x виконується умова $|x| > N$, то буде виконуватись нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$. Позначають $\lim_{x\to\infty} f(x) = A$ або $f(x) \to A$ при $x \to \infty$.

Означення 3. ● Число A_1 називається ***границею функції $f(x)$ справа*** в точці x_0 або ***правосторонньою границею*** і позначається $A_1 = \lim_{\substack{x\to x_0 \\ x>x_0}} f(x)$ або $\lim_{x\to x_0+0} f(x)$, або $f(x_0 + 0)$, якщо для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ існує таке число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, що при всіх $x \in (x_0; x_0 + \delta)$ виконується нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$.

● Аналогічно визначається ***границя функції $f(x)$ зліва*** в точці x_0 (***лівостороння границя***), якщо вважається, що $x \to x_0$, де $x < x_0$, і позначається $A_2 = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x)$ або $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$, або $f(x_0 - 0)$, тобто якщо для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ існує таке число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, що при всіх $x \in (x_0 - \delta; x_0)$ виконується нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Границі функції зліва і справа називаються ***односторонніми границями***.

Теорема 1 (необхідна і достатня умова існування скінченної границі). *Для того, щоб існувала границя функції $f(x)$ в точці x_0 необхідно і достатньо, щоб існували рівні між собою односторонні границі функції в цій точці x_0, тобто*

$$\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = A \iff \exists \lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = A\,.$$

Зауваження. Якщо ж $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) \neq \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$, то границя $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ не існує.

Нехай задана функція $f(x)$, яка визначена при $x \in \mathbb{R}$.

Означення 4. Число A називається ***границею функції $f(x)$ при $x \to \infty$***, якщо для будь-якого як завгодно малого числа $\varepsilon > 0$ існує таке число $N = N(\varepsilon)>0$, що як тільки для всіх x виконується умова $|x| > N$, то буде виконуватись нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$. Позначають $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$ або $f(x) \to A$ при $x \to \infty$.

Функцію, яка визначена на множині натуральних чисел, називають ***числовою послідовністю***: $y = f(n)$ або $y = y_n$, або $\{y_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, де $D(f) = \mathbb{N}$.

Означення 5. Число A називається ***границею числової послідовності*** $\{y_n\}$, якщо для будь-якого як завгодно малого числа $\varepsilon > 0$ знайдеться такий номер $N = N(\varepsilon)$, що при всіх $n > N$ буде виконуватись нерівність $|y_n - A| < \varepsilon$. Позначають: $\lim\limits_{n \to \infty} y_n = A$ або $y_n \to A$ при $n \to \infty$.

Теорема 2 (про арифметичні операції над границями). *Якщо існують скінченні границі* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = B$, *то*

1) $\exists \lim\limits_{x \to x_0} \big(f(x) \pm g(x)\big) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = A \pm B$;

2) $\exists \lim\limits_{x \to x_0} \big(f(x) \cdot g(x)\big) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = A \cdot B$;

3) $\exists \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)} = \frac{A}{B}$, якщо $\lim_{x\to x_0} g(x) = B \neq 0$;

4) $\exists \lim_{x\to x_0} \big(C \cdot f(x)\big) = C \cdot \lim_{x\to x_0} f(x) = C \cdot A$, де $C = const$;

5) $\lim_{x\to x_0} \big(f(x)\big)^n = \left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right)^n = A^n$, $n \in \mathbb{N}$;

6) $\exists \lim_{x\to x_0} \big(f(x)\big)^{g(x)} = \left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right)^{\lim_{x\to x_0} g(x)} = A^B$, *де* $A > 0$.

Теорема 3 (про єдиність границі). *Якщо функція має границю, то вона єдина.*

---

2. Нескінченно малі та нескінченно великі функції

Означення 6. Функція $\alpha(x)$ називається ***нескінченно малою функцією* (*НМФ*)** при $x \to x_0$ (або при $x \to \infty$), якщо $\lim_{x\to x_0} \alpha(x) = 0$ (або $\lim_{x\to \infty} \alpha(x) = 0$).

Означення 7. Функція $f(x)$ називається ***нескінченно великою функцією* (*НВФ*) *при* $x \to x_0$**, якщо для будь-якого як завгодно великого числа $M > 0$ існує таке число $\delta = \delta(M) > 0$, що як тільки для всіх x виконується умова $0 < |x - x_0| < \delta$, то буде виконуватись нерівність $|f(x)| > M$. Позначають так: $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$ або $f(x) \to \infty$ при $x \to x_0$.

Означення 8. Функція $f(x)$, де $x \in (-\infty; +\infty)$, називається ***нескінченно великою функцією* (*НВФ*) *при* $x \to \infty$**, якщо для будь-якого як завгодно великого числа $M > 0$ існує таке число $N = N(M) > 0$, що як тільки для всіх x виконується умова $|x| > N$, то буде виконуватись нерівність $|f(x)| > M$. Позначають так: $\lim_{x\to \infty} f(x) = \infty$ або $f(x) \to \infty$ при $x \to \infty$.

Теорема 4 (про зв'язок між НМФ і НВФ).

1) *Якщо* $\alpha(x)$ – *НМФ при* $x \to x_0$ $(\alpha \neq 0)$, *то обернена їй функція* $\frac{1}{\alpha(x)}$ *є НВФ при* $x \to x_0$.

2) *Якщо* $f(x)$ – *НВФ при* $x \to x_0$, *то обернена їй функція* $\frac{1}{f(x)}$ *є НМФ при* $x \to x_0$.

Символьний запис теореми 4: $\frac{1}{0} = \infty$; $\frac{1}{\infty} = \mathbf{0}$.

Зауважимо, що всі вище наведені теореми справедливі і при $x \to \infty$.

Властивості НМФ	**Властивості НВФ**
1) *Сума двох НМФ є НМФ.* 2) *Добуток обмеженої функції на НМФ є НМФ.* 3) *Добуток НМФ на константу є НМФ.* 4) *Добуток двох НМФ є НМФ.*	1) *Сума двох НВФ одного знаку є НВФ того ж знаку.* 2) *Добуток двох НВФ є НВФ.* 3) *Добуток НВФ на функцію, що має скінченну границю, яка відмінна від нуля, є НВФ.* 4) *Сума НВФ і функції, що має скінченну границю, є НВФ.*

Позначимо ∞ — НВФ, 0 — НМФ, 1 — функція, що має границю рівну 1.

Основні невизначеності: $\left[\frac{0}{0}\right]$; $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$; $[\infty - \infty]$; $[0 \cdot \infty]$; $[1^{\infty}]$; $[0^0]$; $[\infty^0]$.

Операцію знаходження границі у цих випадках називають *розкриттям невизначеності*.

«***Визначеності***» $(B, C \in \mathbb{R})$	
1) $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$; $(-\infty) + (-\infty) = -\infty - \infty = -\infty$; 2) $\infty \cdot \infty = \infty$; 3) $C \cdot \infty = \infty$, де $C \neq 0$; 4) $\infty + C = \infty$.	5) $\frac{C}{0} = \infty$, якщо $C = const \neq 0$; 6) $\frac{const}{\infty} = 0$; 7) $(+\infty)^B = +\infty$, де $0 < B < +\infty$; 8) $(+\infty)^B = \frac{1}{(+\infty)^{-B}} = \frac{1}{+\infty} = 0$, де $-\infty < B < 0$;

Деякі важливі границі функцій	
1) $\lim\limits_{x\to 0} x^k = 0$, $k = const > 0$; $\lim\limits_{x\to\infty} x^k = \infty$, $k > 0$; $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^k} = \frac{1}{0} = \infty$, $k > 0$;	$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x^k} = \frac{1}{\infty} = 0$, $k > 0$; 2) $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = +\infty$ при $a > 1$; $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = 0$ при $a > 1$;

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = 0$ при $0 < a < 1$; $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = +\infty$ при $0 < a < 1$; 4) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+0} \ln x = -\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_a x = +\infty$ при $a > 1$; $\lim\limits_{x\to+0} \log_a x = -\infty$ при $a > 1$; 5) $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_a x = -\infty$ при $0 < a < 1$; $\lim\limits_{x\to+0} \log_a x = +\infty$ при $0 < a < 1$; 6) $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$; $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}$;	7) $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{arcctg} x = 0$; $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{arcctg} x = \pi$; 8) $\lim\limits_{x\to\infty} \sin x$ не існує; $\lim\limits_{x\to\infty} \cos x$ не існує; 9) $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x \sin x = \lim\limits_{x\to+\infty} a^x \cos x = 0$ при $0 < a < 1$; 10) $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x \sin x = \lim\limits_{x\to-\infty} a^x \cos x = 0$ при $a > 1$; 11) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{b} = 1$, де $b = const > 0$; 12) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^m} = 1, m = const, n \in \mathbb{N}$; 13) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\ln^m n} = 1$, де $m = const$.

3. Перша та друга визначні границі, їхні наслідки

Перша визначна границя: $\lim\limits_{x\to0} \frac{\sin x}{x} = 1.$

Наслідки першої визначної границі

$$\lim_{x\to0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1; \quad \lim_{x\to0} \frac{\arcsin x}{x} = 1; \quad \lim_{x\to0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1; \quad \lim_{x\to0} \frac{1-\cos x}{\frac{x^2}{2}} = 1.$$

Зауваження. У першій визначній границі і її наслідках замість x може стояти будь-яка НМФ $\alpha(x) \to 0$ при $x \to x_0$ (або $x \to \infty$). Зокрема, $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(\alpha(x)\to0)}} \frac{\sin\alpha(x)}{\alpha(x)} = 1.$

Границя числової послідовності $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, n \in \mathbb{N}$, дорівнює **числу *e***:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e, \qquad (1)$$

число $e = 2{,}718281828459045\ldots$ — ірраціональне трансцендентне число.

Друга визначна границя: $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$ (2)

Наслідок: $$\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=e. \qquad (3)$$

Рівності (1), (2) і (3) називають ***другою визначною границею***.

Зауваження. В формулі (2) замість x може стояти будь-яка НВФ $f(x)\to\infty$ при $x\to x_0$ (або $x\to\infty$), тобто $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(f(x)\to\infty)}}\left(1+\frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)}=e.$

Із (3) при $\alpha(x)\to 0,\ x\to x_0$ отримаємо $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(\alpha(x)\to 0)}}\big(1+\alpha(x)\big)^{\frac{1}{\alpha(x)}}=e.$

При обчисленні границь показниково-степеневих функцій $\big(f(x)\big)^{g(x)}$ використовують таке твердження:

Якщо існують границі $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A>0,\ \lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$ *та* A^B *визначене, то* $\exists\lim\limits_{x\to x_0}\big(f(x)\big)^{g(x)}=\left(\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\right)^{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)}=A^B.$

Наслідки другої визначної границі

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a e=\frac{1}{\ln a};\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1;$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a;\qquad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1;\qquad \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^m-1}{mx}=1,\ \text{де } m>0.$$

В цих границях замість x може стояти будь-яка НМФ $\alpha(x)\to 0$ при $x\to x_0$ (або $x\to\infty$).

---

4. Порівняння нескінченно малих функцій

Розглянемо НМФ $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ при $x\to x_0$: $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0,\ \lim\limits_{x\to x_0}\beta(x)=0.$

- Якщо $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=const\neq 0$, то функції $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ називаються ***НМФ одного порядку*** при $x\to x_0$.
- Якщо $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$, то $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ називаються ***еквівалентними НМФ*** при $x\to x_0$ і позначаються $\boldsymbol{\alpha(x)\sim\beta(x)}$ при $x\to x_0$.

- Якщо $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$, то функція $\alpha(x)$ називається ***нескінченно малою вищого порядку***, ніж $\beta(x)$ при $x\to x_0$ і позначається $\alpha(x)=o\big(\beta(x)\big)$ при $x\to x_0$.
- Якщо $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\infty$, то функція $\alpha(x)$ називається ***нескінченно малою нижчого порядку***, ніж $\beta(x)$ при $x\to x_0$.
- Якщо $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ не існує, то функції $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ називаються ***непорівнянними НМФ*** при $x\to x_0$.
- Якщо $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\big(\beta(x)\big)^k}=const\neq 0$, де $k>0$, то $\alpha(x)$ називається ***нескінченно малою k-го порядку*** відносно $\beta(x)$ при $x\to x_0$.

Теорема (про перехід до еквівалентних у границі). *Границя відношення двох нескінченно малих функцій не зміниться, якщо кожну або одну з них замінити еквівалентною їй нескінченно малою.*

5. Таблиця еквівалентних нескінченно малих функцій

Якщо $\alpha\to 0$, то	
$\sin\alpha\sim\alpha$;	$e^{\alpha}-1\sim\alpha$;
$\operatorname{tg}\alpha\sim\alpha$;	$a^{\alpha}-1\sim\alpha\cdot\ln a$;
$\arcsin\alpha\sim\alpha$;	$\ln(1+\alpha)\sim\alpha$;
$\operatorname{arctg}\alpha\sim\alpha$;	$\log_a(1+\alpha)\sim\alpha\cdot\log_a e=\frac{\alpha}{\ln a}$;
$1-\cos\alpha\sim\frac{\alpha^2}{2}$;	$(1+\alpha)^m-1\sim m\alpha$, де $m>0$.

У цих формулах замість α може стояти будь-яка нескінченно мала функція $\alpha(x)$, тобто $\alpha(x)\to 0$ при $x\to x_0$ (або $x\to\infty$).

- При обчисленні границі **можемо замінити нескінченно малі функції еквівалентними їм нескінченно малими лише у добутку або у частці**.
- Але у сумі або у різниці заміняти НМФ еквівалентними їм НМФ **не можна** (тому що не завжди отриманий результат є правильним).

6. Неперервність функції в точці і на відрізку

Означення 9. Функція $f(x)$ називається ***неперервною в точці*** $\boldsymbol{x_0}$, якщо вона визначена в точці x_0 і в деякому околі цієї точки та існує границя функції в точці x_0, яка дорівнює значенню функції в цій точці, тобто

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0). \qquad (4)$$

- ***Приростом аргументу*** $\boldsymbol{x}$ ***в точці*** $\boldsymbol{x_0}$ називається вираз $x - x_0$ і позначається $\Delta x = x - x_0$; тут числа x і x_0 належать області визначення $f(x)$.
- ***Приростом функції*** $\boldsymbol{f(x)}$ ***в точці*** $\boldsymbol{x_0}$ називається вираз $f(x) - f(x_0)$ і позначається Δy, тобто $\Delta y = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. Прирости Δx і Δy можуть бути як додатними, так і від'ємними числами.

Означення 10. Функція $f(x)$ називається ***неперервною в точці*** $\boldsymbol{x_0}$, якщо вона визначена в точці x_0 і в деякому околі цієї точки та існує границя $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \Delta y = 0$.

Означення 9 та 10 еквівалентні між собою.

Для неперервної в точці x_0 функції $f(x)$ рівність (4) можна записати так: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f\left(\lim\limits_{x\to x_0} x\right) = f(x_0)$. Це *граничний перехід під знаком неперервної функції*, тобто при обчисленні границі неперервної функції $f(x)$ можна перейти до границі під знаком функції, а саме, аргумент x замінити граничним значенням x_0.

Означення 11 (одностороння неперервність). Функція $f(x)$ називається ***неперервною в точці*** $\boldsymbol{x_0}$ ***зліва*** [справа], якщо вона визначена в точці x_0 і в деякому околі цієї точки зліва [справа] та виконується умова

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = f(x_0), \ \ \forall\, x \in (x_0 - \delta;\ x_0];$$

$$\left[\ \lim_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0), \ \ \forall\, x \in [x_0;\ x_0 + \delta)\ \right].$$

Означення 12. Функція $f(x)$ називається ***неперервною на інтервалі*** $(a; b)$, якщо вона неперервна в кожній точці цього інтервалу. Функція $f(x)$ називається ***неперервною на відрізку*** $[a; b]$, якщо вона неперервна в кожній точці інтервалу $(a; b)$ і неперервна справа в точці $x = a$ і зліва в точці $x = b$.

Основні теореми про неперервні функції:

1. *Якщо функції* $f(x)$ *і* $g(x)$ *неперервні в точці* x_0, *то в цій точці будуть неперервними функції*: $f(x) \pm g(x)$; $f(x) \cdot g(x)$; $\frac{f(x)}{g(x)}$, *якщо* $g(x_0) \neq 0$.
2. *Якщо функція* $u = \varphi(x)$ *неперервна в точці* x_0, *а функція* $y = f(u)$ *неперервна в точці* u_0, *то складена функція* $y = f\big(\varphi(x)\big)$ *теж неперервна в точці* x_0 *і виконується рівність* $\lim\limits_{x \to x_0} f\big(\varphi(x)\big) = f\left(\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x)\right)$.
3. *Всі основні елементарні функції неперервні в кожній точці їх області визначення. Будь-яка елементарна функція неперервна в кожній точці її області визначення.*

Властивості функцій неперервних на відрізку

I теорема Больцано-Коші. *Якщо функція* $f(x)$ *неперервна на відрізку* $[a; b]$ *і на кінцях цього відрізку приймає значення різних знаків, то знайдеться хоча б одна точка* $c \in (a; b)$ *така, що* $f(c) = 0$.

II теорема Больцано-Коші. *Нехай функція* $f(x)$ *неперервна на відрізку* $[a; b]$ *і на його кінцях приймає різні значення:* $f(a) = A$, $f(b) = B$, $A \neq B$. *Тоді для довільного значення* $D \in (A; B)$ *знайдеться хоча б одна точка* $x = d \in (a; b)$ *така, що* $f(d) = D$.

Теорема Вейєрштрасса. *Якщо функція* $f(x)$ *неперервна на відрізку* $[a; b]$, *то вона досягає на цьому відрізку свого найбільшого і найменшого значення.*

Наслідок. *Якщо функція неперервна на відрізку* $[a; b]$, *то вона обмежена на цьому відрізку.*

7. Точки розриву функції та їхня класифікація

Використовуючи означення 1 неперервності функції і властивості односторонніх границь функції можна сказати наступне:

для того, щоб функція $f(x)$ була неперервною в точці x_0 необхідно і достатньо, щоб виконувались умови:

1) $f(x)$ визначена в точці x_0 і в деякому околі цієї точки;

2) $\exists \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0), \ \exists \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0 + 0)$;

3) $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = f(x_0)$.

Означення 13. Точки, в яких порушується хоча б одна з умов неперервності функції, називаються ***точками розриву функції***, а функція — ***розривною*** в цих точках.

Розрізняють три типи точок розриву:

1) точки усувного розриву першого роду;
2) точки (неусувного або скінченного) розриву першого роду;
3) точки розриву другого роду.

1) Точка x_0 називається ***точкою усувного розриву першого роду*** функції $f(x)$, якщо існують скінченні односторонні границі функції в точці x_0, які рівні між собою, а в самій точці x_0 функція $f(x)$ не визначена або її значення не дорівнює границі функції $f(x)$ в точці x_0 (див. рис. 1).

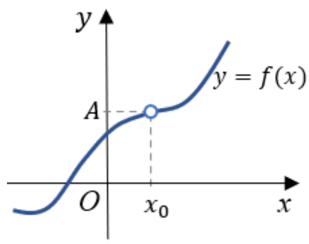


Рис. 1

Тобто $\underbrace{f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)}_{= \lim\limits_{x \to x_0} f(x)} = \underbrace{A}_{\text{скінченне число}}$, при цьому $f(x_0) \neq A$ або $\nexists f(x_0)$.

Якщо ж $f(x_0)$ не існує, то можна довизначити функцію $f(x)$ лише в одній точці x_0, поклавши $f(x_0) = f(x_0 \pm 0) = A$, і тоді отримаємо нову неперервну в точці x_0 функцію $g(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq x_0; \\ f(x_0 \pm 0) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x), & x = x_0. \end{cases}$

2) Точка x_0 називається ***точкою (неусувного) розриву першого роду*** функції $f(x)$, якщо існують скінченні односторонні границі функції в точці x_0, які не рівні між собою, тобто $f(x_0 - 0) \neq f(x_0 + 0)$.

Точки x_1, x_2, x_3 неусувного розриву першого роду функції $y = f(x)$ проілюстровано на рис. 2.

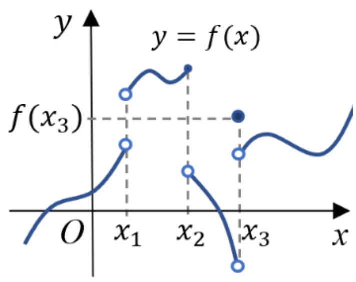


Рис. 2

Величину $\delta = |f(x_0 - 0) - f(x_0 + 0)|$ називають *стрибком функції* $f(x)$ в точці x_0.

3) Точка x_0 називається ***точкою розриву другого роду*** функції $f(x)$, якщо хоча б одна з односторонніх границь функції $f(x)$ в точці x_0 не існує або дорівнює ∞, тобто

$$\left[\begin{array}{l} f(x_0 - 0) \\ f(x_0 + 0) \end{array}\right. \text{ не існує або нескінченна.}$$

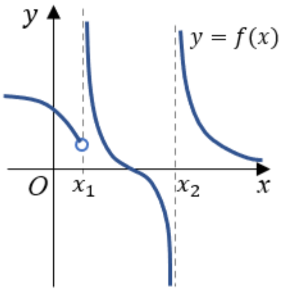


Рис. 3

Точки x_1, x_2 розриву другого роду функції $y = f(x)$ проілюстровано на рис. 3.

Схема дослідження функції на неперервність у точці x_0

1. Перевіряємо, чи визначена функція $f(x)$ у точці x_0 та в деякому околі цієї точки. Знаходимо значення функції в цій точці, тобто $f(x_0)$.
2. Знаходимо односторонні границі $f(x_0 - 0)$ і $f(x_0 + 0)$.
3. Робимо висновок: якщо існують скінченні односторонні границі і виконується рівність $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = f(x_0)$, то функція $f(x)$ неперервна в точці x_0. Якщо ж функція має розрив у точці x_0, то класифікуємо цю точку розриву.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ТИПОВИХ ЗАДАЧ

Приклад 1.1. Обчислити границю $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^5+2n^4-1}{2n^5-5n^3+n+3}$.

Розв'язання. При $n\to\infty$ маємо невизначеність $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. При обчисленні такої границі скористаємося наступним правилом.

***Правило* 1**. *Для того щоб розкрити невизначеність* $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ *при обчисленні границі дробово-раціональної функції* $\frac{P(n)}{Q(n)}$ *при* $n\to\infty$, *потрібно у чисельнику та у знаменнику дробу винести за дужки старший степінь n, скоротити їх та перейти до границі*.

Отже, винесемо n^5 за дужки у чисельнику і знаменнику дробу

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^5+2n^4-1}{2n^5-5n^3+n+3}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{n^5\left(3+\dfrac{2n^4}{n^5}-\dfrac{1}{n^5}\right)}{n^5\left(2-\dfrac{5n^3}{n^5}+\dfrac{n}{n^5}+\dfrac{3}{n^5}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\dfrac{2}{n}-\dfrac{1}{n^5}}{2-\dfrac{5}{n^2}+\dfrac{1}{n^4}+\dfrac{3}{n^5}}=$$

$$=\frac{3+2\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}-\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^5}}{2-5\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^4}+3\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^5}}=\frac{3+0-0}{2-0+0+0}=\frac{3}{2}.$$

Зауваження. Тут обчисленні границі використали наступне твердження: функція обернена до нескінченно великої є нескінченно малою, тобто $\frac{1}{n^k}\to 0$ при $n\to\infty$, де $k=const>0$.

Приклад 1.2. Обчислити границю $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3-5n)\cdot\sqrt[4]{n^8+5n-7}+2}{\sqrt[6]{n^6+2n^5-4}+\sqrt[3]{27n^9+4n^2+1}}$.

Розв'язання. Чисельник і знаменник заданого дробу прямують до нескінченності при $n\to\infty$, отримуємо невизначеність $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Використаємо правило 1, у чисельнику та знаменнику дробу винесемо за дужки старший степінь *n*:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2+(3-5n)\cdot\sqrt[4]{n^8+5n-7}}{\sqrt[6]{n^6+2n^5-4}+\sqrt[3]{27n^9+4n^2+1}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2+n\left(\frac{3}{n}-5\right)\cdot\sqrt[4]{n^8\left(1+\frac{5n}{n^8}-\frac{7}{n^8}\right)}}{\sqrt[6]{n^6\left(1+\frac{2n^5}{n^6}-\frac{4}{n^6}\right)}+\sqrt[3]{n^9\left(27+\frac{4n^2}{n^9}+\frac{1}{n^9}\right)}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+n\left(\frac{3}{n}-5\right)\cdot n^2\cdot\sqrt[4]{1+\frac{5}{n^7}-\frac{7}{n^8}}}{n\cdot\sqrt[6]{1+\frac{2}{n}-\frac{4}{n^6}}+n^3\cdot\sqrt[3]{27+\frac{4}{n^7}+\frac{1}{n^9}}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2+n^3\cdot\left(\frac{3}{n}-5\right)\cdot\sqrt[4]{1+\frac{5}{n^7}-\frac{7}{n^8}}}{n^3\left(\frac{n\cdot\sqrt[6]{1+\frac{2}{n}-\frac{4}{n^6}}}{n^3}+\sqrt[3]{27+\frac{4}{n^7}+\frac{1}{n^9}}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{n^3}\cdot\left[\frac{2}{n^3}+\left(\frac{3}{n}-5\right)\cdot\sqrt[4]{1+\frac{5}{n^7}-\frac{7}{n^8}}\right]}{\cancel{n^3}\left(\frac{\sqrt[6]{1+\frac{2}{n}-\frac{4}{n^6}}}{n^2}+\sqrt[3]{27+\frac{4}{n^7}+\frac{1}{n^9}}\right)}=$$

$$=\left[\begin{array}{l}\text{підставляємо замість } n\\ \text{його граничне значення}\end{array}\right]=\frac{0+(0-5)\cdot\sqrt[4]{1+0-0}}{0+\sqrt[3]{27+0+0}}=-\frac{5}{3}.$$

Приклад 1.3. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^3+7x^2+16x+12}{3x^3+8x^2-4x-16}$.

Розв'язання. При підстановці у вираз числа -2 замість змінної x отримаємо невизначеність виду $\left[\frac{0}{0}\right]$. Використаємо наступне правило.

Правило 2. *Для того щоб у границі, яка задана відношенням двох многочленів при $x\to x_0$, розкрити невизначеність $\left[\frac{0}{0}\right]$, потрібно чисельник та знаменник дробу розділити на $(x-x_0)$ і перейти до границі. Якщо і після цього при переході до граничного значення отримаємо знову таку ж невизначеність, то повторюємо дію і так далі*.

Оскільки $x\to-2=x_0$, то розділимо кутом чисельник і знаменник дробу на $x-x_0=x-(-2)=x+2$. Маємо

$$\begin{array}{r|l} -\,3x^3+8x^2-4x-16 & x+2 \\ \underline{3x^3+6x^2} & \overline{3x^2+2x-8} \\ -\,2x^2-4x & \\ \underline{2x^2+4x} & \\ -\,-8x-16 & \\ \underline{-8x-16} & \\ 0 & \end{array}\qquad\qquad \begin{array}{r|l} -\,x^3+7x^2+16x+12 & x+2 \\ \underline{x^3+2x^2} & \overline{x^2+5x+6} \\ -\,5x^2+16x & \\ \underline{5x^2+10x} & \\ -\,6x+12 & \\ \underline{6x+12} & \\ 0 & \end{array}$$

звідки отримаємо: $x^3+7x^2+16x+12=(x+2)(x^2+5x+6)$;

$$3x^3+8x^2-4x-16=(x+2)(3x^2+2x-8);$$

$$\lim_{x\to-2}\frac{x^3+7x^2+16x+12}{3x^3+8x^2-4x-16}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to-2}\frac{x^2+5x+6}{3x^2+2x-8}=\frac{4-10+6}{12-4-8}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$=\left[\begin{array}{l}\text{Чисельник і знаменник отриманого дробу знову розділимо на } x+2\\ \text{Знайшовши корені квадратних тричленів, розкладемо їх}\\ \text{на множники:}\quad x^2+5x+6=(x+2)(x+3),\\ \qquad 3x^2+2x-8=3(x+2)\left(x-\dfrac{4}{3}\right)=3(x+2)(3x-4).\end{array}\right]=$$

$$=\lim_{x\to-2}\frac{\cancel{(x+2)}\,(x+3)}{3\,\cancel{(x+2)}\,(3x-4)}=\lim_{x\to-2}\frac{x+3}{3(3x-4)}=\frac{-2+3}{3(-6-4)}=-\frac{1}{30}.$$

Приклад 1.4. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt[3]{9x}-3}{\sqrt{x^2-3}-\sqrt{2x}}$.

Розв'язання. Переходячи до границі при $x\to3$, отримаємо невизначеність виду $\left[\frac{0}{0}\right]$, яка розкривається за наступним правилом:

Правило 3*. Для того щоб розкрити невизначеність* $\left[\frac{0}{0}\right]$ *у границі функції, яка задана* ***ірраціональними виразами****,* ***при*** $\boldsymbol{x\to x_0}$*, потрібно ірраціональний вираз помножити і розділити на вираз, спряжений до ірраціональності; потім зробити необхідні спрощення і перейти до границі.*

Аналогічну дію робимо і у випадку невизначеності виду $[\infty-\infty]$ ***при*** $\boldsymbol{x\to\infty}$*, яка задана ірраціональними виразами*.

Спряженим виразом до ірраціональності $\sqrt[3]{9x}-3$ є вираз $(\sqrt[3]{9x})^2+\sqrt[3]{9x}\cdot3+3^2$, бо $(\sqrt[3]{9x}-3)((\sqrt[3]{9x})^2+\sqrt[3]{9x}\cdot3+3^2)=(\sqrt[3]{9x})^3-3^3=9x-27$. А спряженим виразом до $\sqrt{x^2-3}-\sqrt{2x}$ є вираз $\sqrt{x^2-3}+\sqrt{2x}$, бо $(\sqrt{x^2-3}-\sqrt{2x})(\sqrt{x^2-3}+\sqrt{2x})=(\sqrt{x^2-3})^2-(\sqrt{2x})^2=x^2-2x-3$. Застосовуючи правило, отримаємо $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt[3]{9x}-3}{\sqrt{x^2-3}-\sqrt{2x}}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=$

$$=\lim_{x\to3}\frac{(\sqrt[3]{9x}-3)\cdot\left((\sqrt[3]{9x})^2+\sqrt[3]{9x}\cdot3+3^2\right)\cdot\left(\sqrt{x^2-3}+\sqrt{2x}\right)}{\left((\sqrt[3]{9x})^2+\sqrt[3]{9x}\cdot3+3^2\right)\cdot\left(\sqrt{x^2-3}-\sqrt{2x}\right)\cdot\left(\sqrt{x^2-3}+\sqrt{2x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{(9x-27)\cdot\left(\sqrt{x^2-3}+\sqrt{2x}\right)}{\left((\sqrt[3]{9x})^2+3\sqrt[3]{9x}+9\right)\cdot(x^2-2x-3)}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x^2-3}+\sqrt{2x}}{(\sqrt[3]{9x})^2+3\sqrt[3]{9x}+9}\cdot\lim_{x\to 3}\frac{9x-27}{x^2-2x-3}=\frac{2\sqrt{6}}{27}\cdot\lim_{x\to 3}\frac{9x-27}{x^2-2x-3}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$=\left[\begin{array}{l}\text{Щоб розкрити таку невизначеність, потрібно чисельник і}\\ \text{знаменник дробу розділити на } (x-3).\\ \text{Розкладемо на множники многочлени у чисельнику і знаменнику.}\end{array}\right]=$$

$$=\frac{2\sqrt{6}}{27}\cdot\lim_{x\to 3}\frac{9(\cancel{x-3})}{(\cancel{x-3})(x+1)}=\frac{2\sqrt{6}}{3}\cdot\lim_{x\to 3}\frac{1}{(x+1)}=\frac{2\sqrt{6}}{3}\cdot\frac{1}{4}=\frac{\sqrt{6}}{6}.$$

Приклад 1.5. Обчислити границю $\lim\limits_{n\to\infty}(n+2)\cdot\left(\sqrt{n^6-1}-\sqrt{n^6+3n-5}\right)$.

Розв'язання. При переході до границі при $n\to\infty$ отримаємо невизначеність виду $[\infty-\infty]$, яка розкривається за правилом із попереднього прикладу.

Спряженим виразом до ірраціональності $\sqrt{n^6-1}-\sqrt{n^6+3n-5}$ є вираз $\sqrt{n^6-1}+\sqrt{n^6+3n-5}$, бо $\left(\sqrt{n^6-1}-\sqrt{n^6+3n-5}\right)\left(\sqrt{n^6-1}+\sqrt{n^6+3n-5}\right)=$ $=\left(\sqrt{n^6-1}\right)^2-\left(\sqrt{n^6+3n-5}\right)^2=n^6-1-(n^6+3n-5)=-3n+4$.

Виконуючи множення і ділення виразу на спряжений вираз до ірраціональності, отримаємо

$$\lim_{n\to\infty}(n+2)\cdot\left(\sqrt{n^6-1}-\sqrt{n^6+3n-5}\right)=[\infty-\infty]=$$

$$=\lim_{n\to\infty}(n+2)\cdot\frac{\left(\sqrt{n^6-1}-\sqrt{n^6+3n-5}\right)\cdot\left(\sqrt{n^6-1}+\sqrt{n^6+3n-5}\right)}{\sqrt{n^6-1}+\sqrt{n^6+3n-5}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)\cdot(4-3n)}{\sqrt{n^6-1}+\sqrt{n^6+3n-5}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\left[\begin{array}{l}\text{у чисельнику і знаменнику}\\ \text{виносимо за дужки старший степінь } n\end{array}\right]=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(1+\frac{2}{n}\right)\cdot n\left(\frac{4}{n}-3\right)}{\sqrt{n^6\left(1-\frac{1}{n^6}\right)}+\sqrt{n^6\left(1+\frac{3n}{n^6}-\frac{5}{n^6}\right)}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\cdot\left(1+\frac{2}{n}\right)\left(\frac{4}{n}-3\right)}{n^3\left(\sqrt{1-\frac{1}{n^6}}+\sqrt{1+\frac{3}{n^5}-\frac{5}{n^6}}\right)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{2}{n}\right)\left(\frac{4}{n}-3\right)}{n\left(\sqrt{1-\frac{1}{n^6}}+\sqrt{1+\frac{3}{n^5}-\frac{5}{n^6}}\right)}=\frac{(1+0)\cdot(0-3)}{\infty\cdot(\sqrt{1-0}+\sqrt{1+0-0})}=\frac{-3}{\infty}=0.$$

Приклад 1.6. Обчислити границю $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2x+8}{x^2+5x}\right)^{\frac{7x-1}{3}}$.

Розв'язання. При $x\to\infty$ маємо $\frac{x^2+2x+8}{x^2+5x}=\frac{\cancel{x^2}\left(1+\frac{2}{x}+\frac{8}{x^2}\right)}{\cancel{x^2}\left(1+\frac{5}{x}\right)}\to 1,\quad \frac{7x-1}{3}\to\infty.$

Приходимо до невизначеності виду $[1^\infty]$, яка розкривається за допомогою другої визначної границі: $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}+1\right)^x=e$, звідки маємо $\lim_{\substack{x\to\infty\\(f(x)\to\infty)}}\left(\frac{1}{f(x)}+1\right)^{f(x)}=e.$

Спочатку у виразі в дужках виділимо одиницю:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2x+8}{x^2+5x}\right)^{\frac{7x-1}{3}}=[1^\infty]=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2x+8}{x^2+5x}-1+1\right)^{\frac{7x-1}{3}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2x+8-(x^2+5x)}{x^2+5x}+1\right)^{\frac{7x-1}{3}}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{-3x+8}{x^2+5x}+1\right)^{\frac{7x-1}{3}}=$$

= [виконаємо тотожні перетворення в показнику степеня] =

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{8-3x}{x^2+5x}+1\right)^{\frac{7x-1}{3}\cdot\frac{x^2+5x}{8-3x}\cdot\frac{8-3x}{x^2+5x}}=\left[\lim_{x\to\infty}\left(\frac{8-3x}{x^2+5x}+1\right)^{\frac{x^2+5x}{8-3x}}\right]^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7x-1}{3}\cdot\frac{8-3x}{x^2+5x}}=$$

$$=\left\{\begin{matrix}\text{границя в квадратних дужках дорівнює числу } e\\ \text{за другою визначною границею}\end{matrix}\right\}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-21x^2+59x-8}{3(x^2+5x)}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\cancel{x^2}\left(-21+\frac{59}{x}-\frac{8}{x^2}\right)}{3\cancel{x^2}\left(1+\frac{5}{x}\right)}}=e^{-\frac{21}{3}}=e^{-7}=\frac{1}{e^7}.$$

Приклад 1.7. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x^3-3x^2}{2x^3+1}\right)^{5x^2+1}$.

Розв'язання. При $x \to +\infty$ маємо $\dfrac{2x^3-3x^2}{2x^3+1}=\dfrac{\cancel{x^3}\left(2-\dfrac{3}{x}\right)}{\cancel{x^3}\left(2+\dfrac{1}{x^3}\right)}\to\dfrac{2}{2}=1;\; 5x^2+1\to+\infty.$

Отже, приходимо до невизначеності виду $[1^\infty]$, яка розкривається за допомогою другої визначної границі: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}+1\right)^x=e$. Спочатку виділяємо одиницю у виразі в дужках, після цього виконаємо перетворення у показнику степеня:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^3-3x^2}{2x^3+1}\right)^{5x^2+1}=[1^\infty]=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^3-3x^2}{2x^3+1}-1+1\right)^{5x^2+1}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^3-3x^2-(2x^3+1)}{2x^3+1}+1\right)^{5x^2+1}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-3x^2-1}{2x^3+1}+1\right)^{5x^2+1}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-3x^2-1}{2x^3+1}+1\right)^{(5x^2+1)\cdot\frac{2x^3+1}{-3x^2-1}\cdot\frac{-3x^2-1}{2x^3+1}}=\left[\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-3x^2-1}{2x^3+1}+1\right)^{\frac{2x^3+1}{-3x^2-1}}\right]^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(5x^2+1)\cdot(-3x^2-1)}{2x^3+1}}=$$

$$=\left\{\begin{matrix}\text{границя в квадратних дужках дорівнює числу } e\\ \text{(за другою визначною границею)}\end{matrix}\right\}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-15x^4-8x^2-1}{2x^3+1}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^4\left(-15-\frac{8}{x^2}-\frac{1}{x^4}\right)}{x^3\left(1+\frac{1}{x^3}\right)}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\left(-15-\frac{8}{x^2}-\frac{1}{x^4}\right)}{\left(1+\frac{1}{x^3}\right)}}=$$

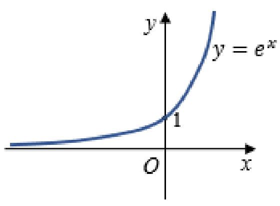


Рис. 4

$$=\left[\begin{matrix}\text{при } x\to+\infty \text{ маємо } e^{-15\cdot(+\infty)}\to e^{-\infty}\to 0,\\ \text{див. графік функції } y=e^x \text{ на рис. 4}\end{matrix}\right]=0.$$

Приклад 1.8. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 2x^2-\sin 5x^2}{\ln\cos 10\pi x}$.

Розв'язання. При $x\to0$ маємо невизначеність виду $\left[\frac{0}{0}\right]$. Використовуючи таблицю еквівалентних нескінченно малих функцій (НМФ), у границі замінимо множники, які є НМФ, еквівалентними їм нескінченно малими.

Використаємо формули: $\ln(\alpha+1)\sim\alpha$, $1-\cos\alpha\sim\dfrac{\alpha^2}{2}$ при $\alpha\to 0$. Тоді вираз у знаменнику запишемо у вигляді $\ln\cos 10\pi x=\ln\left([\cos 10\pi x-1]+1\right)$, у даному випадку при $x\to 0$ маємо $\alpha=\cos 10\pi x-1\to 1-1=0$, тому

$$\ln\cos 10\pi x=\ln\left([\cos 10\pi x-1]+1\right)\sim[\cos 10\pi x-1];$$

$$\cos 10\pi x-1=-(1-\cos 10\pi x)\sim-\frac{(10\pi x)^2}{2}=-50\pi^2x^2,\text{ де } \alpha_1=10\pi x\to 0 \text{ при } x\to 0.$$

Вираз у чисельнику за тригонометричними формулами перетворюємо в добуток, потім можемо замінити множники (які є НМФ) еквівалентними їм НМФ. Отже, $\sin 2x^2-\sin 5x^2=2\cdot\sin\dfrac{2x^2-5x^2}{2}\cdot\cos\dfrac{2x^2+5x^2}{2}=-2\sin\dfrac{3x^2}{2}\cdot\cos\dfrac{7x^2}{2}$;

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x^2-\sin 5x^2}{\ln\cos 10\pi x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x^2-\sin 5x^2}{-50\pi^2x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin\dfrac{3x^2}{2}\cdot\cos\dfrac{7x^2}{2}}{-50\pi^2x^2}=$$

$$=\left[\begin{array}{c}\text{відомо, що } \sin\alpha\sim\alpha \text{ при } \alpha\to 0;\\ \text{в даному випадку } \alpha=3x^2/2\to 0 \text{ при } x\to 0\end{array}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot\dfrac{3x^2}{2}\cdot\cos\dfrac{7x^2}{2}}{50\pi^2x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{3\cdot\cos\dfrac{7x^2}{2}}{50\pi^2}=\frac{3}{50\pi^2}.$$

Приклад 1.9. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{e^{x^2-12}-e^{4x}}{\operatorname{arctg}(2-\sqrt{x^2-6x+4})}$.

Розв'язання. При $x\to 6$ маємо невизначеність виду $\left[\frac{0}{0}\right]$. Використовуючи таблицю еквівалентних нескінченно малих функцій (НМФ), у границі замінимо множники (які є НМФ) еквівалентними їм НМФ. З таблиці еквівалентних НМФ: $\operatorname{arctg}\alpha\sim\alpha$ при $\alpha\to 0$, звідки

$$\operatorname{arctg}(2-\sqrt{x^2-6x+4})\sim 2-\sqrt{x^2-6x+4},\text{ бо } \alpha=2-\sqrt{x^2-6x+4}\to 0 \text{ при } x\to 6.$$

У виразі, що стоїть у чисельнику, винесемо за дужки другий доданок:

$$e^{x^2-12}-e^{4x}=e^{4x}\cdot\left(\frac{e^{x^2-12}}{e^{4x}}-1\right)=e^{4x}\left(e^{x^2-12-4x}-1\right).$$

Тоді $\lim\limits_{x\to6}\dfrac{e^{x^2-12}-e^{4x}}{\operatorname{arctg}(2-\sqrt{x^2-6x+4})}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to6}\dfrac{e^{4x}\left(e^{x^2-4x-12}-1\right)}{2-\sqrt{x^2-6x+4}}=$

$$=\left[\begin{array}{c}\text{з таблиці еквівалентних НМФ: } e^{\alpha}-1\sim\alpha \text{ при } \alpha\to0;\\ \text{звідки } e^{x^2-4x-12}-1\sim x^2-4x-12, \text{ бо } \alpha=x^2-4x-12\to0 \text{ при } x\to6\end{array}\right]=$$

$$=\lim_{x\to6}e^{4x}\cdot\lim_{x\to6}\frac{\left(x^2-4x-12\right)}{2-\sqrt{x^2-6x+4}}=\left[\frac{0}{0}\right]=\left[\begin{array}{l}\text{у другій границі помножимо і}\\ \text{розділимо функцію на спряжений}\\ \text{вираз до ірраціональності}\end{array}\right]=$$

$$=e^{24}\cdot\lim_{x\to6}\frac{\left(x^2-4x-12\right)}{2-\sqrt{x^2-6x+4}}\cdot\frac{2+\sqrt{x^2-6x+4}}{2+\sqrt{x^2-6x+4}}=$$

$$=e^{24}\cdot\lim_{x\to6}\frac{\left(x^2-4x-12\right)\cdot(2+\sqrt{x^2-6x+4})}{4-(x^2-6x+4)}=e^{24}\cdot\lim_{x\to6}(2+\sqrt{x^2-6x+4})\times$$

$$\times\lim_{x\to6}\frac{x^2-4x-12}{-x^2+6x}=\left[\frac{0}{0}\right]=4e^{24}\cdot\lim_{x\to6}\frac{(\cancel{x-6})(x+2)}{-x(\cancel{x-6})}=4e^{24}\lim_{x\to6}\frac{x+2}{-x}=4e^{24}\cdot\frac{8}{-6}=-\frac{16e^{24}}{3}.$$

Приклад 1.10. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to7}\dfrac{\operatorname{tg}(x^4-7x^3-3x^2+22x-7)}{\ln(2x^2-11x-20)}$.

Розв'язання. При $x\to7$ маємо невизначеність виду $\left[\frac{0}{0}\right]$. Використовуючи таблицю еквівалентних нескінченно малих функцій (НМФ), у границі замінимо множники (які є НМФ) еквівалентними їм НМФ:

$$\operatorname{tg}\alpha\sim\alpha \text{ при } \alpha\to0 \Rightarrow \operatorname{tg}(x^4-7x^3-3x^2+22x-7)\sim x^4-7x^3-3x^2+22x-7,$$

бо $\alpha=x^4-7x^3-3x^2+22x-7\to0$ при $x\to7$;

$\ln(1+\alpha)\sim\alpha$ при $\alpha\to0 \Rightarrow \ln(2x^2-11x-20)=\ln((2x^2-11x-21)+1)\sim(2x^2-11x-21)$,

бо $\alpha=2x^2-11x-21\to0$ при $x\to7$.

Тоді $\lim\limits_{x\to7}\dfrac{\operatorname{tg}(x^4-7x^3-3x^2+22x-7)}{\ln(2x^2-11x-20)}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to7}\dfrac{x^4-7x^3-3x^2+22x-7}{2x^2-11x-21}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=$

$$=\left[\text{розділимо кутом чисельник і знаменник дробу на } x-7\right]=$$

$$
\begin{array}{r|l}
x^4-7x^3-3x^2+22x-7 & x-7 \\
\underline{x^4-7x^3\qquad\qquad\quad} & \overline{x^3-3x+1} \\
-3x^2+22x & \\
\underline{-3x^2+21x} & \\
x-7 & \\
\underline{x-7} & \\
0 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
2x^2-11x-21 & x-7 \\
\underline{2x^2-14x\qquad} & \overline{2x+3} \\
3x^2-21 & \\
\underline{3x^2-21} & \\
0 &
\end{array}
$$

$$
=\begin{bmatrix} x^4-7x^3-3x^2+22x-7=(x-7)(x^3-3x+1); \\ 2x^2-11x-21=(x-7)(2x+3); \end{bmatrix}=
$$

$$
=\lim_{x\to 7}\frac{(\cancel{x-7})(x^3-3x+1)}{(\cancel{x-7})(2x+3)}=\frac{343-21+1}{14+3}=19.
$$

Приклад 1.11. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin 2x}{e^{\operatorname{tg}3x}-e^{\sin 6x}}$.

Розв'язання. При $x\to\pi$ маємо невизначеність виду $\left[\frac{0}{0}\right]$. Не можна використати формулу $\sin\alpha\sim\alpha$ при $\alpha\to 0$ з таблиці еквівалентних НМФ, бо у чисельнику в функції $\sin 2x$ аргумент синуса не прямує до нуля: $\alpha=2x\to 2\pi\neq 0$ при $x\to\pi$. Виконаємо заміну змінних: $t=\pi-x$, $t\to 0$ при $x\to\pi$, звідки $x=\pi-t$. Тоді

$$
\sin 2x=\sin 2(\pi-t)=\sin(2\pi-2t)=\sin(-2t)=-\sin 2t,
$$

$$
e^{\operatorname{tg}3x}-e^{\sin 6x}=e^{\operatorname{tg}3(\pi-t)}-e^{\sin 6(\pi-t)}=e^{\operatorname{tg}(3\pi-3t)}-e^{\sin(6\pi-6t)}=e^{\operatorname{tg}(-3t)}-e^{\sin(-6t)}=
$$

$$
=e^{-\operatorname{tg}3t}-e^{-\sin 6t},\ \text{бо}\ \operatorname{tg}(\pi k+\beta)=\operatorname{tg}\beta,\ \sin(2\pi k+\beta)=\sin\beta,\ k\in\mathbb{Z};
$$

$$
\lim_{x\to\pi}\frac{\sin 2x}{e^{\operatorname{tg}3x}-e^{\sin 6x}}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{t\to 0}\frac{-\sin 2t}{e^{-\operatorname{tg}3t}-e^{-\sin 6t}}=\begin{bmatrix}\sin 2t\sim 2t=\alpha, \\ \text{бо}\ \alpha=2t\to 0\ \ \text{при}\ t\to 0\end{bmatrix}=
$$

$$
=\lim_{t\to 0}\frac{-2t}{e^{-\operatorname{tg}3t}-e^{-\sin 6t}}=\left[\frac{0}{0}\right]=
$$

$$
=\begin{bmatrix}\text{у знаменнику винесемо за дужки другий доданок} \\ e^{-\operatorname{tg}3t}-e^{-\sin 6t}=e^{-\sin 6t}\cdot\left(\dfrac{e^{-\operatorname{tg}3t}}{e^{-\sin 6t}}-1\right)=e^{-\sin 6t}\left(e^{\sin 6t-\operatorname{tg}3t}-1\right); \\ \text{тоді}\ e^{\sin 6t-\operatorname{tg}3t}-1\sim(\sin 6t-\operatorname{tg}3t),\ \text{бо}\ \alpha=\sin 6t-\operatorname{tg}3t\to 0\ \text{при}\ t\to 0;\end{bmatrix}=
$$

$$
=\lim_{t\to 0}\frac{-2t}{e^{-\sin 6t}\left(\sin 6t-\operatorname{tg}3t\right)}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{t\to 0}\frac{1}{e^{-\sin 6t}}\cdot\lim_{t\to 0}\frac{-2t}{\left(2\sin 3t\cos 3t-\dfrac{\sin 3t}{\cos 3t}\right)}=
$$

$$=\frac{1}{e^0}\cdot\lim_{t\to 0}\frac{-2t}{\sin 3t\left(2\cos 3t-\frac{1}{\cos 3t}\right)}=\begin{bmatrix}\sin 3t\sim 3t,\ \text{бо}\\ \alpha=3t\to 0\ \text{ при } t\to 0\end{bmatrix}=$$

$$=1\cdot\lim_{t\to 0}\frac{-2\cancel{t}}{3\cancel{t}\left(\frac{2\cos^2 3t-1}{\cos 3t}\right)}=\lim_{t\to 0}\frac{-2\cdot\cos 3t}{3(2\cos^2 3t-1)}=\frac{-2\cdot 1}{3(2-1)}=-\frac{2}{3}.$$

Приклад 1.12. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 5x)^{\frac{1}{\operatorname{arctg}^6(\sqrt[3]{x+x^2})}}$.

Розв'язання. При $x\to 0$ маємо приходимо до невизначеності виду $[1^\infty]$, яка розкривається за допомогою другої визначної границі: $\lim\limits_{t\to 0}(t+1)^{\frac{1}{t}}=e$. Спочатку виділяємо одиницю у виразі в дужках, після цього виконаємо перетворення у показнику:

$$\lim_{x\to 0}(\cos 5x)^{\frac{1}{\operatorname{arctg}^6\sqrt[3]{x+x^2}}}=[1^\infty]=\lim_{x\to 0}\left((\cos 5x-1)+1\right)^{\frac{1}{\operatorname{arctg}^6\sqrt[3]{x+x^2}}\cdot\frac{1}{(\cos 5x-1)}\cdot(\cos 5x-1)}=$$

$$=\left[\lim_{x\to 0}\left((\cos 5x-1)+1\right)^{\frac{1}{(\cos 5x-1)}}\right]^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\operatorname{arctg}^6(\sqrt[3]{x+x^2})}\cdot(\cos 5x-1)}=$$

$$=\begin{Bmatrix}\text{при } x\to 0 \text{ маємо } \cos 5x-1\to 0, \text{ тому границя в квадратних дужках}\\ \text{дорівнює числу } e \text{ за другою визначною границею}\end{Bmatrix}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-(1-\cos 5x)}{\operatorname{arctg}^6(\sqrt[3]{x+x^2})}}=\left[\frac{0}{0}\right]=\begin{bmatrix}\text{при } x\to 0 \text{ маємо}\\ 1-\cos 5x\sim\frac{(5x)^2}{2},\ \text{бо } \alpha_1=5x\to 0;\\ \operatorname{arctg}\sqrt[3]{x+x^2}\sim\sqrt[3]{x+x^2},\ \text{бо } \alpha_2=\sqrt[3]{x+x^2}\to 0\end{bmatrix}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\frac{25x^2}{2}}{\left(\sqrt[3]{x+x^2}\right)^6}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-25x^2}{2(x\cdot(1+x))^2}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-25}{2(1+x)^2}}=e^{-\frac{25}{2}}=\frac{1}{e^{25/2}}=\frac{1}{e^{12}\cdot\sqrt{e}}.$$

Приклад 2.1. Знайти порядок нескінченно малої функції $\alpha(x)$ відносно $\beta(x)$, якщо $\alpha(x)=e^{3x-3}-2+e^{3-3x}$, $\beta(x)=\operatorname{tg}(x-1)$, $x\to 1$.

Розв'язання. За означенням $\alpha(x)$ називається *нескінченно малою* k*-го* *порядку* відносно $\beta(x)$ при $x\to x_0$, якщо $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{(\beta(x))^k}\neq\left[\begin{array}{l}0,\\ \infty,\end{array}\right.$ де $k>0$. Підберемо додатне число k так, щоб виконувалась ця умова. Помічаємо, що

$$\alpha(x)=e^{3x-3}-2+e^{-(3x-3)}=e^{3x-3}-2+\frac{1}{e^{3x-3}}=\frac{\left(e^{3x-3}\right)^2-2e^{3x-3}+1}{e^{3x-3}}=\frac{\left(e^{3x-3}-1\right)^2}{e^{3x-3}}.$$

$$\lim_{x\to1}\frac{\alpha(x)}{(\beta(x))^k}=\lim_{x\to1}\frac{\left(e^{3x-3}-1\right)^2}{e^{3x-3}\cdot(\mathrm{tg}(x-1))^k}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$=\left[\begin{array}{c}\text{при } x\to1 \text{ з таблиці еквівалентних нескінченно малих функцій маємо:}\\ e^{3x-3}-1\sim3x-3,\ \text{бо } \alpha_1=3x-3\to0\\ \mathrm{tg}(x-1)\sim(x-1),\ \text{бо } \alpha_2=x-1\to0\end{array}\right]=$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{1}{e^{3x-3}}\cdot\lim_{x\to1}\frac{(3x-3)^2}{(x-1)^k}=1\cdot\lim_{x\to1}\frac{9(x-1)^2}{(x-1)^k}=[\text{при } k=2]=\lim_{x\to1}\frac{9\cancel{(x-1)^2}}{\cancel{(x-1)^2}}=9\neq\left[\begin{array}{l}0,\\ \infty.\end{array}\right.$$

Отже, $\alpha(x)$ НМФ 2-го порядку відносно $\beta(x)$ при $x\to1$.

Зауважимо, що при $k>2$ маємо $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\alpha(x)}{(\beta(x))^k}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{9(x-1)^2}{(x-1)^k}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{9}{(x-1)^{k-2}}=$

$$=\left[\text{якщо } k>2\ \Rightarrow\ k-2>0\ \Rightarrow\ (x-1)^{k-2}\to0 \text{ при } x\to1\right]=\frac{9}{0}=\infty;$$

а при $k<2$ маємо $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\alpha(x)}{(\beta(x))^k}=9\lim\limits_{x\to1}(x-1)^{2-k}=\left[\begin{array}{c}2-k>0\ \Rightarrow\\ (x-1)^{2-k}\to0 \text{ при } x\to1\end{array}\right]=$

$=9\cdot0=0$.

Приклад 2.2. Знайти порядок нескінченно малої функції $\alpha(x)$ відносно $\beta(x)$, якщо $\alpha(x)=x\sin^4\left(\sqrt[3]{x}\right)+\ln(1-x^3+2x^5)$, $\beta(x)=x$, $x\to0$.

Розв'язання. За означенням $\alpha(x)$ називається *нескінченно малою* k*-го порядку* відносно $\beta(x)$ при $x\to x_0$, якщо $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{(\beta(x))^k}\neq\left[\begin{array}{l}0,\\ \infty,\end{array}\right.$ де $k>0$. Підберемо додатне число k так, щоб виконувалась ця умова.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\left(\beta(x)\right)^k}=\lim_{x\to 0}\frac{x\sin^4(\sqrt[3]{x})+\ln(1-x^3+2x^5)}{x^k}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\sin^4(\sqrt[3]{x})}{x^k}+\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-x^3+2x^5)}{x^k}=$$

$$=\left[\begin{array}{c}\text{з таблиці еквівалентних нескінченно малих функцій маємо:}\\ \sin\sqrt[3]{x}\sim\sqrt[3]{x},\ \text{бо } \alpha_1=\sqrt[3]{x}\to 0 \ \text{ при } x\to 0;\\ \ln(1-x^3+2x^5)=\ln\left(1+(2x^5-x^3)\right)\sim(2x^5-x^3),\\ \text{бо } \alpha_2=(2x^5-x^3)\to 0 \text{ при } \ x\to 0;\end{array}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\left(\sqrt[3]{x}\right)^4}{x^k}+\lim_{x\to 0}\frac{(2x^5-x^3)}{x^k}=\lim_{x\to 0}\frac{x^{1+\frac{4}{3}}}{x^k}+\lim_{x\to 0}\frac{x^3(2x^2-1)}{x^k}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^{\frac{7}{3}}}{x^k}+\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x^k}\cdot\lim_{x\to 0}\left(2x^2-1\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x^{\frac{7}{3}}}{x^k}+\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x^k}\cdot(-1)=$$

$$=\left[\left.\begin{array}{l}\text{для першої границі: } k_1=\frac{7}{3},\\ \text{для другої границі: } k_2=3,\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{array}{c}\text{з цих двох значень обираємо}\\ \text{найменше } \Rightarrow k=\frac{7}{3}\end{array}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^{\frac{7}{3}}}{x^{\frac{7}{3}}}-\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x^{\frac{7}{3}}}=1-\lim_{x\to 0}x^{\frac{2}{3}}=1-0=1\neq\left[\begin{array}{l}0,\\ \infty.\end{array}\right.$$

Отже, $\alpha(x)$ НМФ порядку $k=\dfrac{7}{3}$ відносно $\beta(x)$ при $x\to 0$.

Зауважимо, що при $k>\dfrac{7}{3}$ маємо $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\left(\beta(x)\right)^k}=\lim_{x\to 0}\frac{x^{\frac{7}{3}}}{x^k}-\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x^k}=\lim_{x\to 0}\frac{x^{\frac{7}{3}}\left(1-x^{\frac{2}{3}}\right)}{x^k}=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(1-x^{\frac{2}{3}}\right)}{x^{k-\frac{7}{3}}}=\left[\text{якщо } k>\frac{7}{3}\ \Rightarrow\ k-\frac{7}{3}>0\ \Rightarrow\ x^{k-\frac{7}{3}}\to 0 \ \text{ при } \ x\to 0\right]=\infty,$$

а при $k<\dfrac{7}{3}$ маємо $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\left(\beta(x)\right)^k}=\lim_{x\to 0}\frac{x^{\frac{7}{3}}(1-x^{\frac{2}{3}})}{x^k}=\lim_{x\to 0}x^{\frac{7}{3}-k}(1-x^{\frac{2}{3}})=$

$$=\left[\frac{7}{3}-k>0\ \Rightarrow\ x^{\frac{7}{3}-k}\to 0 \ \text{ при } \ x\to 0\right]=0.$$

Приклад 3.1. Дослідити функцію на неперервність (знайти точки розриву функції і класифікувати їх): $f\left(x\right)=\begin{cases}(x+1)^2, & x\le 0;\\ \sin x, & 0<x<\dfrac{\pi}{2};\\ \dfrac{2}{\pi}x, & x\ge\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$

Розв'язання. Ця функція задана трьома різними аналітичними виразами на різних проміжках, які є неперервними на заданих проміжках. Тому у внутрішніх точках цих проміжків функція $f(x)$ є неперервною, а неперервність може порушуватись лише в точках $x=0$ та $x=\dfrac{\pi}{2}$ (в цих точках може бути розрив функції, а може і не бути). Перевіримо, чи буде в цих точках розрив функції.

В точці $x=0$ знаходимо значення функції та односторонні границі функції: $f(0)=(x+1)^2\big|_{x=0}=(-1)^2=1;$

$$f(0-0)=\lim_{x\to -0}f(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}f(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}(x+1)^2=(0+1)^2=1;$$

$$f(0+0)=\lim_{x\to +0}f(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}f(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\sin x=\sin 0=0.$$

Оскільки односторонні границі скінченні і не рівні між собою числа, тобто $f\left(0-0\right)\ne f\left(0+0\right)$, то робимо висновок, що $x=0$ це точка (неусувного) розриву першого роду функції $f(x)$.

Тепер знаходимо значення функції та односторонні границі функції в точці $x=\dfrac{\pi}{2}$: $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\left(\dfrac{2}{\pi}x\right)\Big|_{x=\pi/2}=\dfrac{2}{\pi}\cdot\dfrac{\pi}{2}=1;$

$$f\left(\frac{\pi}{2}-0\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}f(x)=\lim_{\substack{x\to\pi/2\\ x<\pi/2}}f(x)=\lim_{\substack{x\to\pi/2\\ x<\pi/2}}\sin x=\sin\frac{\pi}{2}=1;$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}+0\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+0}f(x)=\lim_{\substack{x\to\pi/2\\ x>\pi/2}}f(x)=\lim_{\substack{x\to\pi/2\\ x>\pi/2}}\frac{2}{\pi}x=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}=1.$$

Оскільки $f\left(\dfrac{\pi}{2}-0\right)=f\left(\dfrac{\pi}{2}+0\right)=f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$, то точка $x=\dfrac{\pi}{2}$ це точка неперервності функції $f(x)$.

Отже, функція $f(x)$ неперервна при $x\in(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$; а $x=0$ – точка (неусувного) розриву першого роду. Графік функції $y=f(x)$ побудований на рис. 5.

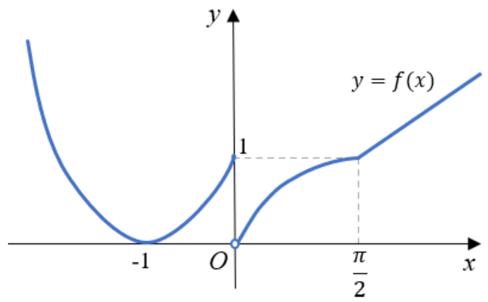


Рис. 5

Приклад 3.2. Дослідити функцію на неперервність (знайти точки розриву функції і класифікувати їх): $f(x)=\begin{cases}1-2x\cdot\dfrac{x-3}{|3-x|}, & x\neq 3;\\ 5, & x=3.\end{cases}$

Розв'язання. Функція $f(x)$ визначена на всій дійсній осі. Перетворимо задану функцію, використовуючи поняття модуля. Оскільки $|x|=\begin{cases}x, \text{ якщо } x\geq 0;\\ -x, \text{ якщо } x<0;\end{cases}$ то

$$|3-x|=\begin{cases}3-x, \text{ якщо } 3-x\geq 0;\\ -(3-x), \text{ якщо } 3-x<0;\end{cases}=\begin{cases}3-x, \text{ якщо } x\leq 3;\\ -(3-x), \text{ якщо } x>3.\end{cases}$$

Тоді $\dfrac{x-3}{|3-x|}=\begin{cases}\dfrac{x-3}{3-x}, \text{ якщо } x\leq 3;\\ \dfrac{x-3}{-(3-x)}, \text{ якщо } x>3;\end{cases}=\begin{cases}-1, \text{ якщо } x\leq 3;\\ 1, \text{ якщо } x>3.\end{cases}$

Звідки маємо $f(x)=\begin{cases}1+2x, \text{ якщо } x<3;\\ 1-2x, \text{ якщо } x>3;\\ 5, \text{ якщо } x=3.\end{cases}$

Ця функція задана на різних проміжках різними аналітичними виразами, які є неперервними за заданих проміжках. У внутрішніх точках цих проміжків функція $f(x)$ є неперервною, окрім, можливо, точки $x=3$, в якій неперервність функції може порушуватись. Перевіримо, чи буде в цій точці розрив функції.

Знаходимо значення функції та її односторонні границі в точці $x=3$:

$f(3)=5$;

$f(3-0)=\lim\limits_{x\to 3-0} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x<3}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x<3}}(1+2x)=7$;

$$f(3+0)=\lim_{x\to 3+0} f(x)=\lim_{\substack{x\to 3\\ x>3}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 3\\ x>3}}(1-2x)=-5.$$

Оскільки односторонні границі скінченні і не рівні між собою числа, тобто $f(3-0)\neq f(3+0)$, то $x=3$ це точка (неусувного) розриву першого роду.

Отже, функція $f(x)$ неперервна при $x\in(-\infty;3)\cup(3;+\infty)$; а $x=3$ – точка неусувного розриву першого роду функції $f(x)$ (див. рис. 6).

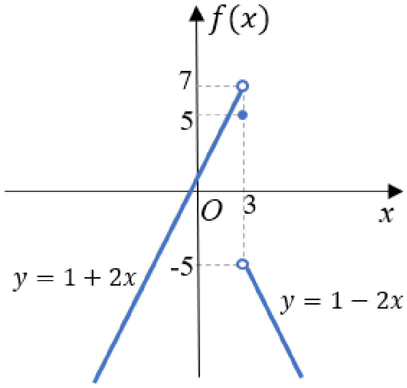


Рис. 6

Приклад 3.3. Дослідити функцію на неперервність (знайти точки розриву функції і класифікувати їх): $f(x)=10^{-\frac{x}{7-x}}$.

Розв'язання. Знаходимо область визначення заданої функції: $x\neq 7 \implies D(f)$: $x\in(-\infty;7)\cup(7;+\infty)$. Задана функція неперервна в усіх точках її області визначення, тобто при $x\in(-\infty;7)\cup(7;+\infty)$. А в точці $x=7$ функція не визначена, тому це точка розриву цієї функції. Класифікуємо цю точку розриву. Знайдемо односторонні границі функції в цій точці $x=7$:

$$f(7-0)=\lim_{x\to 7-0} f(x)=\lim_{x\to 7-0} 10^{-\frac{x}{7-x}}=\left[\begin{array}{l}\text{при } x\to 7-0 \text{ маємо}\\ 7-x\to 7-(7-0)=+0;\\ -\dfrac{x}{7-x}\to-\dfrac{7-0}{+0}=-\infty\end{array}\right]=10^{-\infty}=0;$$

$$f(7+0)=\lim_{x\to 7+0} f(x)=\lim_{x\to 7+0} 10^{-\frac{x}{7-x}}=\left[\begin{array}{l}\text{при } x\to 7+0 \text{ маємо}\\ 7-x\to 7-(7+0)=-0;\\ -\dfrac{x}{7-x}\to-\dfrac{7+0}{-0}=+\infty\end{array}\right]=10^{+\infty}=+\infty.$$

Оскільки $f(7+0)=+\infty$, тобто правостороння границя нескінченна, то точка $x=7$ це точка розриву другого роду функції $f(x)$.

Приклад 3.4. Дослідити функцію на неперервність (знайти точки розриву функції і класифікувати їх): $f\left(x\right)=\dfrac{1-\cos\pi x^2}{x^4(x+1)}$.

Розв'язання. Знаходимо область визначення заданої функції:

$$x\neq 0 \text{ та } x\neq -1 \Longrightarrow D(f):\ x\in(-\infty;-1)\cup(-1;0)\cup(0;+\infty).$$

Задана функція неперервна в усіх точках її області визначення, тобто при $x\in\left(-\infty;-1\right)\cup\left(-1;0\right)\cup\left(0;+\infty\right)$. В точках $x=-1,\ x=0$ функція не визначена, тому це точки розриву цієї функції. Класифікуємо точки розриву.

Знайдемо односторонні границі функції в точці $x=-1$:

$$f(-1-0)=\lim_{x\to-1-0} f(x)=\lim_{x\to-1-0}\frac{1-\cos\pi x^2}{x^4(x+1)}=\left[\begin{array}{l}\text{при } x\to-1-0 \text{ маємо}\\ x+1\to-1-0+1=-0;\end{array}\right]=$$

$$=\frac{1-\cos(\pi\cdot(-1)^2)}{(-1)^4\cdot(-0)}=\frac{1-(-1)}{-0}=-\frac{2}{0}=-\infty;$$

$$f(-1+0)=\lim_{x\to-1+0} f(x)=\lim_{x\to-1+0}\frac{1-\cos\pi x^2}{x^4(x+1)}=\left[\begin{array}{l}\text{при } x\to-1+0 \text{ маємо}\\ x+1\to-1+0+1=+0;\end{array}\right]=$$

$$=\frac{1-\cos(\pi)}{(-1)^4(+0)}=+\frac{2}{0}=+\infty.$$

Оскільки $f(-1-0)=-\infty$, тобто лівостороння границя нескінченна, то точка $x=-1$ це точка розриву другого роду функції $f(x)$.

Розглянемо точку $x=0$ і знайдемо односторонні границі функції в цій точці:

$$f(0-0)=\lim_{x\to-0} f(x)=\lim_{x\to-0}\frac{1-\cos\pi x^2}{x^4(x+1)}=\left[\begin{array}{l}\text{при } x\to-0 \text{ маємо}\\ \cos\pi x\to1;\ 1-\cos\pi x\to0\end{array}\right]=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$=\left[\begin{array}{c}\text{з таблиці еквівалентних нескінченно малих функцій маємо:}\\ 1-\cos\pi x^2\sim\dfrac{(\pi x^2)^2}{2},\quad \text{бо } \alpha=\pi x^2\to0 \text{ при } x\to0;\end{array}\right]=$$

$$=\lim_{x\to-0}\frac{\pi^2x^4}{2\cdot x^4(x+1)}=\lim_{x\to-0}\frac{\pi^2}{2(x+1)}=\frac{\pi^2}{2};$$

аналогічно маємо $f(0+0)=\lim\limits_{x\to+0} f(x)=\dfrac{\pi^2}{2}$.

Отже, односторонні границі скінченні і рівні між собою числа, тобто $f(0-0)=f(0+0)=\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, а $f(0)$ не існує, тому $x=0$ це точка усувного розриву першого роду функції $f(x)$.

Приклад 4. Для заданих функцій $\alpha(x)=e^{\operatorname{arctg}^2 x^3}-1,\ \beta(x)=\sin x-\operatorname{tg} x$:

а) порівняти нескінченно малі $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ при $x\to 0$;

б) знайти порядок нескінченно малої функції $\alpha(x)$ відносно $\beta(x)$ при $x\to 0$;

в) знайти порядок нескінченно малої функції $\beta(x)$ відносно $\alpha(x)$ при $x\to 0$.

Розв'язання. **а)** Для порівняння НМФ обчислимо границю $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\operatorname{arctg}^2 x^3}-1}{\sin x-\operatorname{tg} x}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$=\left[\begin{array}{c}\text{з таблиці еквівалентних нескінченно малих функцій маємо:}\\ e^{\operatorname{arctg}^2 x^3}-1\sim\operatorname{arctg}^2 x^3,\ \text{бо } \alpha_1=\operatorname{arctg}^2 x^3\to 0 \ \text{ при } x\to 0;\\ \operatorname{arctg} x^3\sim x^3,\ \text{бо } \alpha_2=x^3\to 0 \ \text{ при } x\to 0;\\ \text{тому } e^{\operatorname{arctg}^2 x^3}-1\sim\left(x^3\right)^2 \ \text{ при } x\to 0;\end{array}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^6}{\sin x-\operatorname{tg} x}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$=\left[\sin x-\operatorname{tg} x=\sin x-\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{\sin x\cdot(\cos x-1)}{\cos x}=-\frac{\sin x\cdot(1-\cos x)}{\cos x}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(-\frac{x^6\cos x}{\sin x\cdot(1-\cos x)}\right)=\left[\frac{0}{0}\right]=\left[\begin{array}{c}\sin x\sim x \ \text{ при } x\to 0;\\ 1-\cos x\sim\dfrac{x^2}{2} \ \text{ при } x\to 0\end{array}\right]=$$

$$=-\lim_{x\to 0}\frac{x^6}{x\cdot\dfrac{x^2}{2}}\cdot\lim_{x\to 0}\cos x=-\lim_{x\to 0}\left(2x^3\right)=0.$$

Оскільки $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$, то $\alpha(x)$ є нескінченно малою вищого порядку, ніж $\beta(x)$ при $x\to 0$.

б) Знайдемо порядок нескінченно малої $\alpha(x)$ відносно $\beta(x)$ при $x\to 0$.

Підберемо додатне число k так, щоб виконувалась умова $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\left(\beta(x)\right)^k}\neq\left[\begin{array}{l}0,\\ \infty.\end{array}\right.$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\left(\beta(x)\right)^k}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\operatorname{arctg}^2 x^3}-1}{\left(\sin x-\operatorname{tg}x\right)^k}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$=\left[\begin{array}{c}\text{З пункту а) маємо:}\quad e^{\operatorname{arctg}^2 x^3}-1\sim x^6\ \text{ при } x\to 0;\\ \sin x-\operatorname{tg}x=-\dfrac{\sin x\cdot(1-\cos x)}{\cos x};\\ \sin x\sim x\ \text{ при } x\to 0;\quad 1-\cos x\sim\dfrac{x^2}{2}\ \text{ при } x\to 0;\end{array}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^6}{\left(-\dfrac{\sin x\cdot(1-\cos x)}{\cos x}\right)^k}=\lim_{x\to 0}\left(\cos x\right)^k\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x^6}{\left(-x\cdot\dfrac{x^2}{2}\right)^k}=1\cdot\lim_{x\to 0}\frac{(-2)^k\cdot x^6}{x^{3k}}=$$

$$=\left[\text{при }\ 3k=6\ \Rightarrow\ k=2\right]=\lim_{x\to 0}\frac{(-2)^2\cdot x^6}{x^6}=4\neq\left[\begin{array}{l}0,\\ \infty.\end{array}\right.$$

Отже, $k=2$, тому $\alpha(x)$ є НМФ 2-го порядку відносно $\beta(x)$ при $x\to 0$.

в) Тепер знайдемо порядок нескінченно малої $\beta(x)$ відносно $\alpha(x)$ при $x\to 0$.

Використаємо міркування з попереднього пункту:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\beta(x)}{\left(\alpha(x)\right)^k}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\operatorname{tg}x}{\left(e^{\operatorname{arctg}^2 x^3}-1\right)^k}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{-\dfrac{1}{\cos x}\cdot\sin x\cdot(1-\cos x)}{\left(x^6\right)^k}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{\cos x}\right)\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\dfrac{x^2}{2}}{x^{6k}}=-\frac{1}{\cos 0}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{2\cdot x^{6k}}=\left[\text{при }\ 6k=3\ \Rightarrow\ k=\frac{1}{2}\right]=$$

$$=-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x^3}=-\frac{1}{2}\neq\left[\begin{array}{l}0,\\ \infty.\end{array}\right.$$

Отже, $\beta(x)$ є НМФ порядку $k=\dfrac{1}{2}$ відносно $\alpha(x)$ при $x\to 0$.

ВАРІАНТИ ІНДИВІДУАЛЬНИХ ЗАВДАНЬ

Варіант № 1

1. Обчислити границі: а) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3-3x^2-11x-2}{x^3-x^2+12}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+6x}{x^2-x+3}\right)^{5x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos 2x}{e^{\sin 3x}-e^{\sin x}}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{9-5x^2}-3}{\mathrm{tg}^2(\sin 3x)}$; д) $\lim\limits_{n\to\infty}(2n-1)\left(\sqrt{n^6+n+2}-\sqrt{n^6+4}\right)$.

2. Знайти порядок нескінченно малої функції $\alpha(x)=\mathrm{tg}^2 5x+1-\cos 8x$ відносно $\beta(x)=x$ при $x\to 0$.

3. Дослідити функцію на неперервність (знайти точки розриву функції і класифікувати їх): а) $f(x)=\dfrac{x^3+8}{x^2+3x+2}$; б) $f(x)=\begin{cases}3x^2-5, & x\le 0;\\ -(x-1)^2, & 0<x<2;\\ x-3, & x\ge 2.\end{cases}$

4. Для функцій $\alpha(x)=\ln\left(1+\mathrm{tg}^2\sqrt{x}\right)$, $\beta(x)=\sqrt[4]{1-\sqrt{x}}-1$:

а) порівняти нескінченно малі $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ при $x\to 0$;

б) знайти порядок нескінченно малої функції $\alpha(x)$ відносно $\beta(x)$ при $x\to 0$;

в) знайти порядок нескінченно малої функції $\beta(x)$ відносно $\alpha(x)$ при $x\to 0$.

Варіант № 2

1. Обчислити границі: а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{9n^2+3n-1}+\sqrt[3]{n^6+7}}{\sqrt[4]{n^6-4n+3}\cdot\sqrt{6n+5}}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+3x}{x^2-6x+1}\right)^{3x+2}$;

в) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\arcsin(x+2)}{3^{\sqrt{2+x+x^2}}-9}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x-3x^2)}{\sin 7x-\sin 4x}$; д) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-4x^2+10x-21}{2x^3-3x^2-10x+3}$.

2. Знайти порядок нескінченно малої функції $\alpha(x)=x\ln\cos 4x$ відносно $\beta(x)=x$ при $x\to 0$.

3. Дослідити функцію на неперервність (знайти точки розриву функції і класифікувати їх): а) $f(x)=10^{-\frac{1}{(x+1)^2 x}}$; б) $f(x)=\begin{cases}2\cos x, & x\le 0;\\ x^2+2, & 0<x<1;\\ x-3, & x\ge 1.\end{cases}$

4. Для функцій $\alpha(x)=\cos 4x-\cos x$, $\beta(x)=e^{\arcsin x}-1$:

а) порівняти нескінченно малі $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ при $x\to 0$;

б) знайти порядок нескінченно малої функції $\alpha(x)$ відносно $\beta(x)$ при $x\to 0$;

в) знайти порядок нескінченно малої функції $\beta(x)$ відносно $\alpha(x)$ при $x\to 0$.

Варіант № 3

1. Обчислити границі: а) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+5x^2-12}{x^3-x^2-16x-20}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+3x-5}{x^2+7x}\right)^{\frac{x+3}{2}}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}(\sqrt{25+x}-5)}{\sin 5x-\sin x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-\sin^2 2x)}{\operatorname{tg}(3x^5-x^2)}$; д) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^6+3n^4+1}-\sqrt{n^6+5}}{2n+1}$.

2. Знайти порядок нескінченно малої функції $\alpha(x)=e^{x^3+2x+4}-e^4$ відносно $\beta(x)=x$ при $x\to 0$.

3. Дослідити функцію на неперервність (знайти точки розриву функції і класифікувати їх): а) $f(x)=\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{x^4}{2}\right)}{x^5+x^4}$; б) $f(x)=\begin{cases}-(x+1), & x\le -1;\\ (x+1)^2, & -1<x\le 0;\\ 5x^3+4, & x>0.\end{cases}$

4. Для функцій $\alpha(x)=\operatorname{arctg}(\sqrt{1+x^2}-1)$, $\beta(x)=\sin x^4$:

а) порівняти нескінченно малі $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ при $x\to 0$;

б) знайти порядок нескінченно малої функції $\alpha(x)$ відносно $\beta(x)$ при $x\to 0$;

в) знайти порядок нескінченно малої функції $\beta(x)$ відносно $\alpha(x)$ при $x\to 0$.

Варіант № 4

1. Обчислити границі: а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^6+5}+n-1}{(n^2+3)\cdot\sqrt[4]{n^4-7n}}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+2x+1}{x^2+3x}\right)^{\frac{3x+1}{4}}$;

в) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{e^{x^2-4}-e^{x-2}}{1-\cos(x-2)}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{25+x+x^2}-5}{\ln(1-\operatorname{tg}2x)}$; д) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^3+3x^2-9x-27}{x^3+5x^2+3x-9}$.

2. Знайти порядок нескінченно малої функції $\alpha(x)=\ln(x^2+3x+1)$ відносно $\beta(x)=x$ при $x\to 0$.

3. Дослідити функцію на неперервність (знайти точки розриву функції і класифікувати їх): а) $f(x)=\dfrac{e^{2x^2}-1}{x^2(x-3)}$; б) $f(x)=\begin{cases}x-5, & x<1;\\ x^2-2x-3, & 1\le x<5;\\ 1-x^3, & x\ge 5.\end{cases}$

4. Для функцій $\alpha(x)=\sqrt{4+x^6}-2$, $\beta(x)=e^{\sin x^2}-1$:

а) порівняти нескінченно малі $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ при $x\to 0$;

б) знайти порядок нескінченно малої функції $\alpha(x)$ відносно $\beta(x)$ при $x\to 0$;

в) знайти порядок нескінченно малої функції $\beta(x)$ відносно $\alpha(x)$ при $x\to 0$.

Варіант № 5

1. Обчислити границі: а) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{9n^4+7n}-\sqrt{9n^4+2})$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+3x}{x^2+7x-2}\right)^{x^2-1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\mathrm{tg}^2 2x}-1}{\cos 5x-\cos 3x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-\arcsin 3x)}{\mathrm{tg}(x^2+x)}$; д) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{2x+6}-2\sqrt{x}}{x^3+3x^2-9x-27}$.

2. Знайти порядок нескінченно малої функції $\alpha(x)=\mathrm{tg}\,2x^3-\sin 2x^3$ відносно $\beta(x)=x$ при $x\to 0$.

3. Дослідити функцію на неперервність (знайти точки розриву функції і класифікувати їх): а) $f(x)=\dfrac{\mathrm{arctg}\,x}{x(x-1)}$; б) $f(x)=2x+3\cdot\dfrac{|x+2|}{x+2}$.

4. Для функцій $\alpha(x)=\sqrt{1-\sin x^4}-1$, $\beta(x)=\ln(1+x^6)$:

а) порівняти нескінченно малі $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ при $x\to 0$;

б) знайти порядок нескінченно малої функції $\alpha(x)$ відносно $\beta(x)$ при $x\to 0$;

в) знайти порядок нескінченно малої функції $\beta(x)$ відносно $\alpha(x)$ при $x\to 0$.

Варіант № 6

1. Обчислити границі: а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{8+3x}-2}{\sqrt{9-x^2}-\sqrt{9+5x^2}}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x^2+x-1}{3x^2-7x+5}\right)^{5x+1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x+2}-e^2}{\ln\cos 4x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-\cos 5x}{\mathrm{arctg}(\sqrt[3]{\sin x^6})}$; д) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{4n^6+7}+\sqrt[4]{n^4+2n}}{7+\sqrt[5]{n^{15}+3n^2+1}}$.

2. Знайти порядок нескінченно малої функції $\alpha(x)=1-\cos 4x+\sin 3x^2$ відносно $\beta(x)=x$ при $x\to 0$.

3. Дослідити функцію на неперервність (знайти точки розриву функції і класифікувати їх): а) $f(x)=7^{\frac{1}{x^2(3-x)}}$; б) $f(x)=\begin{cases}x+3, & x<-1;\\ x^2+1, & -1\le x<2;\\ 7x+3, & x\ge 2.\end{cases}$

4. Для функцій $\alpha(x)=\sqrt{25+\mathrm{tg}x}-5$, $\beta(x)=\sin(e^{x^3}-1)$:

а) порівняти нескінченно малі $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ при $x\to 0$;

б) знайти порядок нескінченно малої функції $\alpha(x)$ відносно $\beta(x)$ при $x\to 0$;

в) знайти порядок нескінченно малої функції $\beta(x)$ відносно $\alpha(x)$ при $x\to 0$.

Варіант № 7

1. Обчислити границі: а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\sqrt{\left(n^2+1\right)\left(n^2-4\right)}-\sqrt{n^4-9}\right]$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-x}{x^2+1}\right)^{\frac{3x-1}{2}}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x^2-\cos 4x^2}{e^{x^5-2x^4}-1}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-2x^2)}{\sin^2(x^3+3x)}$; д) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{3x+4}-4}{x^3-3x^2-x-12}$.

2. Знайти порядок нескінченно малої функції $\alpha(x)=e^{2x}+e^{-5x}-2$ відносно $\beta(x)=x$ при $x\to 0$.

3. Дослідити функцію на неперервність (знайти точки розриву функції і класифікувати їх): а) $f(x)=\mathrm{arctg}\dfrac{x+1}{(x-4)^2}$; б) $f\left(x\right)=\begin{cases}2-x, & x\le 0;\\ x^2+2, & 0<x<2;\\ 4x+1, & x\ge 2.\end{cases}$

4. Для функцій $\alpha\left(x\right)=\sin 5x^2+\sin 3x^2$, $\beta\left(x\right)=e^{\mathrm{arctg}x}-1$:

а) порівняти нескінченно малі $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ при $x\to 0$;

б) знайти порядок нескінченно малої функції $\alpha(x)$ відносно $\beta(x)$ при $x\to 0$;

в) знайти порядок нескінченно малої функції $\beta(x)$ відносно $\alpha(x)$ при $x\to 0$.

Варіант № 8

1. Обчислити границі: а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2-5n+1}+\sqrt[3]{n^6+2n^3}}{(7n-2)\sqrt[4]{n^8+5n^7+1}}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2-5}{2x^2+7x}\right)^{3x-2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x^2-\sin x^2}{\mathrm{tg}(\cos x-1)}$; г) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(1+x-x^2)}{\sqrt{3+x}-\sqrt{4x}}$; д) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^3-6x^2+11x-12}{2x^3-11x^2+12x}$.

2. Знайти порядок нескінченно малої функції $\alpha(x)=\sin(\sqrt{9-x^2}-3)$ відносно $\beta(x)=x$ при $x\to 0$

3. Дослідити функцію на неперервність (знайти точки розриву функції і класифікувати їх) : а) $f\left(x\right)=3^{\frac{1}{x^2(5-x)}}$; б) $f(x)=\dfrac{|2-x|}{2-x}\cdot x+5$.

4. Для функцій $\alpha\left(x\right)=\sin 5x^2-\sin 7x^2$, $\beta\left(x\right)=2^x-1$:

а) порівняти нескінченно малі $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ при $x\to 0$;

б) знайти порядок нескінченно малої функції $\alpha(x)$ відносно $\beta(x)$ при $x\to 0$;

в) знайти порядок нескінченно малої функції $\beta(x)$ відносно $\alpha(x)$ при $x\to 0$.

Варіант № 9

1. Обчислити границі: а) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+4x^2+x-6}{x^3-7x-6}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-x+1}{x^2+4x}\right)^{3x-2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-\cos x}{\ln\cos 5x}$; г) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{e^{2x-4}-1}{\sqrt{1+4x}-3}$; д) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{4n^8+7}-\sqrt{4n^8+3n^5}}{n}$.

2. Знайти порядок нескінченно малої функції $\alpha(x)=\sqrt{16+x^2\,\mathrm{tg}^3\,2x}-4$ відносно $\beta(x)=x$ при $x\to 0$.

3. Дослідити функцію на неперервність (знайти точки розриву функції і класифікувати їх): а) $f(x)=9^{\frac{1}{2-x}}$; б) $f(x)=\begin{cases} x^2-4\cdot\dfrac{1-x}{|1-x|}, & x\neq 1; \\ 7, & x=1. \end{cases}$

4. Для функцій $\alpha(x)=\sin 4x+\sin 6x$, $\beta(x)=e^{x^2}-1$:

а) порівняти нескінченно малі $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ при $x\to 0$;

б) знайти порядок нескінченно малої функції $\alpha(x)$ відносно $\beta(x)$ при $x\to 0$;

в) знайти порядок нескінченно малої функції $\beta(x)$ відносно $\alpha(x)$ при $x\to 0$.

Варіант № 10

1. Обчислити границі: а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{8n^6+n+1}-\sqrt{n^2+2}}{\sqrt[3]{n^3+2n-1}+\sqrt[4]{n^8+3n^3-4}}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+4x-1}{x^2-x}\right)^{\frac{x-2}{3}}$;

в) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\mathrm{tg}(x^2-4x)}{e^{2x}-e^8}$; г) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(2x-2)}{\sqrt{1+3x}-2}$; д) $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{2x^3+7x^2-3x+4}{3x^3+16x^2+15x-4}$.

2. Знайти порядок нескінченно малої функції $\alpha(x)=x^2\ln\cos 5x$ відносно $\beta(x)=x$ при $x\to 0$.

3. Дослідити функцію на неперервність (знайти точки розриву функції і класифікувати їх): а) $f(x)=\mathrm{arctg}\dfrac{1}{x^2(x-5)}$; б) $f(x)=\begin{cases} 1-x, & x\le 0; \\ x^2+3x+1, & 0<x\le 2; \\ 2x+1, & x>2. \end{cases}$

4. Для функцій $\alpha(x)=e^{\sin x^9}-1$, $\beta(x)=\sqrt{1+x^3}-1$:

а) порівняти нескінченно малі $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ при $x\to 0$;

б) знайти порядок нескінченно малої функції $\alpha(x)$ відносно $\beta(x)$ при $x\to 0$;

в) знайти порядок нескінченно малої функції $\beta(x)$ відносно $\alpha(x)$ при $x\to 0$.

Варіант № 11

1. Обчислити границі: а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-3x^2-9x-5}{x^3-3x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2+5x-3}{2x^2+x}\right)^{2x+1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 5x-\cos 2x}{\ln(1+\operatorname{tg}2x^2)}$; г) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^{\sin(3x-3)}-1}{\sqrt{2+7x}-3}$; д) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n^6+4n^2-1}-n^3\right)$.

2. Знайти порядок нескінченно малої функції $\alpha(x)=\sin(\sqrt{x^2+5x+1}-1)$ відносно $\beta(x)=x$ при $x\to 0$.

3. Дослідити функцію на неперервність (знайти точки розриву функції і класифікувати їх): а) $f(x)=e^{\frac{1}{x^2(x-2)}}$; б) $f(x)=x^2+x-\dfrac{|x+3|}{x+3}$.

4. Для функцій $\alpha(x)=\ln\left(1+\operatorname{arctg}x^6\right)$, $\beta(x)=\operatorname{tg}^2 2x$:

а) порівняти нескінченно малі $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ при $x\to 0$;

б) знайти порядок нескінченно малої функції $\alpha(x)$ відносно $\beta(x)$ при $x\to 0$;

в) знайти порядок нескінченно малої функції $\beta(x)$ відносно $\alpha(x)$ при $x\to 0$.

Варіант № 12

1. Обчислити границі: а) $\lim\limits_{n\to\infty} n\cdot\left(\sqrt{n^4+2n}-\sqrt{n^4-1}\right)$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+5x}{x^2+3}\right)^{\frac{1-3x}{2}}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin 4x}-e^{\sin 2x}}{\arcsin(x^2-3x)}$; г) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-2x^2-x+2}{1-\cos(\sqrt{2x-2})}$; д) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt[3]{4+x}-\sqrt[3]{4x-8}}{\sqrt{1+2x}-3}$.

2. Знайти порядок нескінченно малої функції $\alpha(x)=\ln\cos 3x+e^{-x^2}-1$ відносно $\beta(x)=x$ при $x\to 0$.

3. Дослідити функцію на неперервність (знайти точки розриву функції і класифікувати їх): а) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x(x-5)}$; б) $f(x)=\begin{cases} x^2-x, & x\le 0;\\ 2\sin x, & 0<x\le\pi;\\ x-3, & x>\pi.\end{cases}$

4. Для функцій $\alpha(x)=e^{\operatorname{tg}x^3}-1$, $\beta(x)=1-\cos 2\sqrt{x}$:

а) порівняти нескінченно малі $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ при $x\to 0$;

б) знайти порядок нескінченно малої функції $\alpha(x)$ відносно $\beta(x)$ при $x\to 0$;

в) знайти порядок нескінченно малої функції $\beta(x)$ відносно $\alpha(x)$ при $x\to 0$.

Варіант № 13

1. Обчислити границі: а) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{1+x}-\sqrt{2x}}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+4}{x^2+5x}\right)^{2x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin 5x}-e^{\sin x}}{1-\cos 2\sqrt{x}}$; г) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-3x^2-x+3}{\sin(x^3+2x^2+4x+3)}$; д) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[5]{n^5+3}+\sqrt{4n^4+7n^3}}{n^2+\sqrt[4]{n^8-n+1}}$.

2.Знайти порядок нескінченно малої функції $\alpha(x)=\ln\cos 6x^3$ відносно $\beta(x)=x$ при $x\to 0$.

3. Дослідити функцію на неперервність (знайти точки розриву функції і класифікувати їх): а) $f(x)=\dfrac{5}{3+e^{\frac{1}{x(1+x)^2}}}$; б) $f(x)=\begin{cases}-2x, & x\le 0;\\ 5x+\sqrt{x}, & 0<x\le 4;\\ x^2-3x, & x>4.\end{cases}$

4. Для функцій $\alpha(x)=\sin(e^x-1)$, $\beta(x)=(1+x^2)^4-1$:

а) порівняти нескінченно малі $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ при $x\to 0$;

б) знайти порядок нескінченно малої функції $\alpha(x)$ відносно $\beta(x)$ при $x\to 0$;

в) знайти порядок нескінченно малої функції $\beta(x)$ відносно $\alpha(x)$ при $x\to 0$.

Варіант № 14

1. Обчислити границі: а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-4x^2+5x-2}{x^3+5x^2-28}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+x-3}{x^2+4x}\right)^{\frac{5x-1}{2}}$;

в) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\ln(9-2x^2)}{e^{x+3}-e^5}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 5x-\cos 2x}{\sqrt{9+5x^2}-3}$; д) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{9n^4+3}-\sqrt{9n^4-4n^3}}{n}$.

2. Знайти порядок нескінченно малої функції $\alpha(x)=e^{3x}+\cos 4x-2$ відносно $\beta(x)=x$ при $x\to 0$.

3. Дослідити функцію на неперервність (знайти точки розриву функції і класифікувати їх): а) $f(x)=\dfrac{2}{3+4^{\frac{1}{x^2(2-x)}}}$; б) $f(x)=3x+5\cdot\dfrac{|x-1|}{x-1}$.

4. Для функцій $\alpha(x)=\ln\cos 6x^2$, $\beta(x)=e^{\operatorname{tg} x^3}-1$:

а) порівняти нескінченно малі $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ при $x\to 0$;

б) знайти порядок нескінченно малої функції $\alpha(x)$ відносно $\beta(x)$ при $x\to 0$;

в) знайти порядок нескінченно малої функції $\beta(x)$ відносно $\alpha(x)$ при $x\to 0$.

Варіант № 15

1. Обчислити границі: а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^6+3n}+\sqrt{n^2+2}}{(5n+2)\cdot\sqrt[5]{n^5-4n^4+3}}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2+5}{2x^2-x+3}\right)^{3-2x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\sqrt{2x^2+4}-2)}{\ln(x^2+2)-\ln 2}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^3-x^2}-1}{\cos 6x-\cos 2x}$; д) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-3x^2-9x-5}{2x^3+5x^2+4x+1}$.

2. Знайти порядок нескінченно малої функції $\alpha(x)=e^{3x}+e^{-7x}-2$ відносно $\beta(x)=x$ при $x\to 0$.

3. Дослідити функцію на неперервність (знайти точки розриву функції і класифікувати їх): а) $f(x)=\dfrac{x^3+1}{x(x+1)}$; б) $f(x)=x^2-8x\cdot\dfrac{x-4}{|x-4|}$.

4. Для функцій $\alpha(x)=\sin\left(1-\cos x^3\right)$, $\beta(x)=\sqrt[4]{1-x^3}-1$:

а) порівняти нескінченно малі $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ при $x\to 0$;

б) знайти порядок нескінченно малої функції $\alpha(x)$ відносно $\beta(x)$ при $x\to 0$;

в) знайти порядок нескінченно малої функції $\beta(x)$ відносно $\alpha(x)$ при $x\to 0$.

Варіант № 16

1. Обчислити границі: а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+6x^2-9x+2}{x^3-4x^2+x+2}$; б) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{x^2+x}{x^2-2x+2}\right)^{x^2+3}$;

в) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\mathrm{arctg}(5x-5)}{e^{x^2}-e^{5x-4}}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2x^2+x+4}-2}{\ln(1-7x+x^3)}$; д) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{16n^6-3n+1}-\sqrt{16n^6+5n^3}\right)$.

2. Знайти порядок нескінченно малої функції $\alpha(x)=\mathrm{tg}(x^5+2x^3)$ відносно $\beta(x)=x$ при $x\to 0$.

3. Дослідити функцію на неперервність (знайти точки розриву функції і класифікувати їх): а) $f(x)=\dfrac{1}{x\left(3+e^{\frac{1}{2-x}}\right)}$; б) $f(x)=5-2x\cdot\dfrac{|4-x|}{4-x}$.

4. Для функцій $\alpha(x)=\sqrt{1+\mathrm{tg}\,2x}-1$, $\beta(x)=\arcsin\left(1-e^{-x^3}\right)$:

а) порівняти нескінченно малі $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ при $x\to 0$;

б) знайти порядок нескінченно малої функції $\alpha(x)$ відносно $\beta(x)$ при $x\to 0$;

в) знайти порядок нескінченно малої функції $\beta(x)$ відносно $\alpha(x)$ при $x\to 0$.

Варіант № 17

1. Обчислити границі: а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+x^2+5x-7}{x^3-4x^2-2x+5}$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3x^2+x-1}{3x^2+2x}\right)^{x^2-1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(4+x)-\ln 4}{\sqrt{2x^2+5x+1}-\sqrt{2x^2+1}}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\operatorname{tg}x^2}-1}{\cos 7x-\cos 5x}$; д) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[4]{16n^8+1}+\sqrt{n^6+5n^4}}{(3n^2+2)\sqrt{4n^2-1}}$.

2. Знайти порядок нескінченно малої функції $\alpha(x)=x\ln\cos(3x^2)$ відносно $\beta(x)=x$ при $x\to 0$.

3. Дослідити функцію на неперервність (знайти точки розриву функції і класифікувати їх): а) $f(x)=\dfrac{e^{2x}-1}{x(x-8)}$; б) $f(x)=\begin{cases}-2x-3, & x\le 0;\\ x^2+1, & 0<x\le 1;\\ 2x^3, & x>1.\end{cases}$

4. Для функцій $\alpha(x)=\sin x-\operatorname{tg}x$, $\beta(x)=\left(1+\dfrac{x}{3}\right)^3-1$:

а) порівняти нескінченно малі $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ при $x\to 0$;

б) знайти порядок нескінченно малої функції $\alpha(x)$ відносно $\beta(x)$ при $x\to 0$;

в) знайти порядок нескінченно малої функції $\beta(x)$ відносно $\alpha(x)$ при $x\to 0$.

Варіант № 18

1. Обчислити границі: а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\sqrt{4n^4-3}}{\sqrt[3]{n^3+3n^2}+\sqrt[4]{n^8+2n+1}}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+2x+1}{x^2-3x}\right)^{\frac{3x+1}{2}}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\arcsin 3x)}{e^{\sin 5x}-e^{\sin x}}$; г) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-3x^2-x+3}{\sqrt{3+2x}-3}$; д) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+4x^2+5x+2}{3x^3+2x^2-5x-4}$.

2. Знайти порядок нескінченно малої функції $\alpha(x)=1-\cos^3 x$ відносно $\beta(x)=x$ при $x\to 0$.

3. Дослідити функцію на неперервність (знайти точки розриву функції і класифікувати їх): а) $f(x)=e^{\frac{2}{x^2(x-3)}}$; б) $f(x)=\begin{cases}-2x, & x\le 0;\\ x^2+1, & 0<x\le 1;\\ 2x^3, & x>1.\end{cases}$

4. Для функцій $\alpha(x)=\operatorname{arctg}\left(e^{-x^4}-1\right)$, $\beta(x)=\sqrt[4]{1+4x}-1$:

а) порівняти нескінченно малі $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ при $x\to 0$;

б) знайти порядок нескінченно малої функції $\alpha(x)$ відносно $\beta(x)$ при $x\to 0$;

в) знайти порядок нескінченно малої функції $\beta(x)$ відносно $\alpha(x)$ при $x\to 0$.

Варіант № 19

1. Обчислити границі: а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+6x^2+9x+4}{x^3-x^2+3x+5}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+x}{x^2-2x-1}\right)^{4-2x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+5\sin 3x}-2}{\operatorname{tg}(x^2+x)}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 4x-\cos 7x}{e^{\operatorname{arctg}^2 3x}-1}$; д) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[4]{25n^4+2}+\sqrt[3]{n^6+5n^4}}{(1-4n)\sqrt{n^2-n}}$.

2. Знайти порядок нескінченно малої функції $\alpha(x)=x^4+\ln\cos 4x$ відносно $\beta(x)=x$ при $x\to 0$.

3. Дослідити функцію на неперервність (знайти точки розриву функції і класифікувати їх): а) $f(x)=\dfrac{e^{3x-1}-e^5}{x-2}$; б) $f(x)=\begin{cases}4-2x, & x\le 0;\\ x^2+1, & 0<x\le 1;\\ 3x^4-x, & x>1.\end{cases}$

4. Для функцій $\alpha(x)=\ln(1+x^2)$, $\beta(x)=\sin 2x+\sin 6x$:

а) порівняти нескінченно малі $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ при $x\to 0$;

б) знайти порядок нескінченно малої функції $\alpha(x)$ відносно $\beta(x)$ при $x\to 0$;

в) знайти порядок нескінченно малої функції $\beta(x)$ відносно $\alpha(x)$ при $x\to 0$.

Варіант № 20

1. Обчислити границі: а) $\lim\limits_{n\to\infty} n\cdot\left(\sqrt{n^2+5n-2}-n\right)$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+4x}{x^2-x+1}\right)^{3x+7}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x-\cos 9x}{\ln\cos 2x}$; г) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\operatorname{tg}(x^2+x-2)}{e^{x^2-x}-1}$; д) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-x^2-8x+12}{2x^3-11x^2+20x-12}$.

2. Знайти порядок нескінченно малої функції $\alpha(x)=\ln(x^3+x^2+1)$ відносно $\beta(x)=x$ при $x\to 0$.

3. Дослідити функцію на неперервність (знайти точки розриву функції і класифікувати їх): а) $f(x)=\dfrac{e^{5x}-1}{x(x-1)}$; б) $f(x)=\begin{cases}-x^2, & x\le 0;\\ \operatorname{tg}x, & 0<x\le \pi/4;\\ 2x, & x>\pi/4.\end{cases}$

4. Для функцій $\alpha(x)=\sqrt{1+\sin^3 x}-1$, $\beta(x)=\arcsin 2x$:

а) порівняти нескінченно малі $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ при $x\to 0$;

б) знайти порядок нескінченно малої функції $\alpha(x)$ відносно $\beta(x)$ при $x\to 0$;

в) знайти порядок нескінченно малої функції $\beta(x)$ відносно $\alpha(x)$ при $x\to 0$.

Варіант № 21

1. Обчислити границі: а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+4x^2-3x-6}{x^3+10x^2+17x+8}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2+7x+1}{2x^2+3}\right)^{1-5x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}4x\cdot(e^{x^2+2x}-e^x)}{\cos 4x-\cos x}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^4-2n^3+1}-n^2}{2n-1}$; д) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+5x-14}{\sqrt{x^2-5x+10}-2}$.

2. Знайти порядок нескінченно малої функції $\alpha(x)=e^{-x^3}-1+\sin^6(2\sqrt{x})$ відносно $\beta(x)=x$ при $x\to 0$.

3. Дослідити функцію на неперервність (знайти точки розриву функції і класифікувати їх): а) $f(x)=3^{\frac{1}{x^2(x+1)}}$; б) $f(x)=3x^3-2\cdot\dfrac{|x+1|}{x+1}$.

4. Для функцій $\alpha(x)=\sin x^2$, $\beta(x)=(1+\operatorname{arctg}x)^8-1$:

а) порівняти нескінченно малі $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ при $x\to 0$;

б) знайти порядок нескінченно малої функції $\alpha(x)$ відносно $\beta(x)$ при $x\to 0$;

в) знайти порядок нескінченно малої функції $\beta(x)$ відносно $\alpha(x)$ при $x\to 0$.

Варіант № 22

1. Обчислити границі: а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+4n-5}-\sqrt{n^2-4}\right)$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{7x^2-2x+4}{7x^2+x}\right)^{\frac{3x+1}{2}}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^3 3x}{e^{\operatorname{tg}4x}-e^{\sin 4x}}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}(x^2+5x)}{\ln(1+x^3-x)}$; д) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x^3+9x^2+12x+4}{x^3-x^2-16x-20}$.

2. Знайти порядок нескінченно малої функції $\alpha(x)=x\cdot\ln\cos\sqrt{x}$ відносно $\beta(x)=x$ при $x\to 0$.

3. Дослідити функцію на неперервність (знайти точки розриву функції і класифікувати їх): а) $f(x)=\dfrac{e^{x+1}-e^2}{x-1}$; б) $f(x)=\begin{cases}x^3-2x, & x\le 0;\\ \sqrt{x}, & 0<x\le 4;\\ 10-x^2, & x>4.\end{cases}$

4. Для функцій $\alpha(x)=\cos 7x-\cos 5x$, $\beta(x)=e^{\arcsin x}-1$:

а) порівняти нескінченно малі $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ при $x\to 0$;

б) знайти порядок нескінченно малої функції $\alpha(x)$ відносно $\beta(x)$ при $x\to 0$;

в) знайти порядок нескінченно малої функції $\beta(x)$ відносно $\alpha(x)$ при $x\to 0$.

Варіант № 23

1. Обчислити границі: а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+\sqrt{25n^6+2}}{(n^2+2n)\sqrt{7+n^2}}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+2x}{x^2+7}\right)^{4-3x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2+4x}-e^{3x}}{\ln\cos 2x}$; г) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\operatorname{arctg}(x^2-2x)}{e^{x^2-x-2}-1}$; д) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{2-x}-\sqrt{-3x-2}}{2+\sqrt[3]{3x-2}}$.

2. Знайти порядок нескінченно малої функції $\alpha(x)=(e^{5x^2}-1)(1-\cos 2x^3)$ відносно $\beta(x)=x$ при $x\to 0$.

3. Дослідити функцію на неперервність (знайти точки розриву функції і класифікувати їх): а) $f(x)=\dfrac{3}{5+e^{\frac{1}{x^2(x+3)}}}$; б) $f(x)=\begin{cases}2x^2+1, & x\le 1;\\ x+2, & 1<x\le 2;\\ 7e^{\frac{x+3}{5}}, & x>2.\end{cases}$

4. Для функцій $\alpha(x)=\ln(x^2+2x+1)$, $\beta(x)=\operatorname{tg}x^2$:

а) порівняти нескінченно малі $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ при $x\to 0$;

б) знайти порядок нескінченно малої функції $\alpha(x)$ відносно $\beta(x)$ при $x\to 0$;

в) знайти порядок нескінченно малої функції $\beta(x)$ відносно $\alpha(x)$ при $x\to 0$.

Варіант № 24

1. Обчислити границі: а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3+2x^2-x-14}{x^3-3x^2+4}$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+x-5}{x^2+3x}\right)^{x^2-1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos 3x}{e^{\cos 4x}-e^{\cos 6x}}$; г) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\ln(x^2-3x+1)}{\sqrt{5x-6}-\sqrt{3x}}$; д) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+\sqrt[3]{8n^9+2n}}{n\sqrt{n^4-n+1}}$.

2. Знайти порядок нескінченно малої функції $\alpha(x)=\operatorname{tg}(\sqrt{2x^7+16}-4)$ відносно $\beta(x)=x$ при $x\to 0$

3. Дослідити функцію на неперервність (знайти точки розриву функції і класифікувати їх): а) $f(x)=\dfrac{e^{x^2+2x}-e^{3x}}{6x-6}$; б) $f(x)=3+x^2\cdot\dfrac{|x-5|}{x-5}$.

4. Для функцій $\alpha(x)=\cos x^2-1$, $\beta(x)=\sqrt{1+\operatorname{tg}x}-1$:

а) порівняти нескінченно малі $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ при $x\to 0$;

б) знайти порядок нескінченно малої функції $\alpha(x)$ відносно $\beta(x)$ при $x\to 0$;

в) знайти порядок нескінченно малої функції $\beta(x)$ відносно $\alpha(x)$ при $x\to 0$.

Варіант № 25

1. Обчислити границі: а) $\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{\sqrt{1-3x}-5}{2+\sqrt[3]{x}}$; б) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{x^2+2x}{x^2-4}\right)^{\frac{x^2-5}{4}}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}^2 4x}{e^{\cos 3x}-e^{\cos 2x}}$; г) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(x^2+4x-4)}{e^{x^2+3x-4}-1}$; д) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2+\sqrt[4]{n^8+5n+1}}{(1-5n)\sqrt{9n^2-7n+6}}$.

2. Знайти порядок нескінченно малої функції $\alpha(x)=x^4\ln\cos 2\sqrt{x}$ відносно $\beta(x)=x$ при $x\to 0$.

3. Дослідити функцію на неперервність (знайти точки розриву функції і класифікувати їх): а) $f(x)=\pi-\operatorname{arctg}\dfrac{2x+1}{x(x-3)^2}$; б) $f(x)=\begin{cases}2\cos x, & x\le 0;\\ 2-3x, & 0<x\le 2;\\ x^2, & x>2.\end{cases}$

4. Для функцій $\alpha(x)=1-\cos x^8$, $\beta(x)=\sin 8x-\sin 2x$:

а) порівняти нескінченно малі $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ при $x\to 0$;

б) знайти порядок нескінченно малої функції $\alpha(x)$ відносно $\beta(x)$ при $x\to 0$;

в) знайти порядок нескінченно малої функції $\beta(x)$ відносно $\alpha(x)$ при $x\to 0$.

Варіант № 26

1. Обчислити границі: а) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n^4+3n}-\sqrt{n^4+7n+2}\right)$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x^2+4x-2}{3x^2-x+1}\right)^{1-2x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\ln(4x-7)}{e^{x^2+2}-e^{x+4}}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x^2+x)}{\sqrt{16-x-x^2}-4}$; д) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^3-9x^2+15x+25}{3x^3-31x^2+85x-25}$.

2. Знайти порядок нескінченно малої функції $\alpha(x)=x\cdot\ln\cos 7x^2$ відносно $\beta(x)=x$ при $x\to 0$.

3. Дослідити функцію на неперервність (знайти точки розриву функції і класифікувати їх): а) $f(x)=\dfrac{2}{3+4^{\frac{1}{x(x-1)^2}}}$; б) $f(x)=\begin{cases}2+4x, & x\le -1;\\ 2x, & -1<x<0;\\ x^2+5x, & x\ge 0.\end{cases}$

4. Для функцій $\alpha(x)=\sqrt[6]{1+\arcsin x^2}-1$, $\beta(x)=1-\cos 2x$:

а) порівняти нескінченно малі $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ при $x\to 0$;

б) знайти порядок нескінченно малої функції $\alpha(x)$ відносно $\beta(x)$ при $x\to 0$;

в) знайти порядок нескінченно малої функції $\beta(x)$ відносно $\alpha(x)$ при $x\to 0$.

Варіант № 27

1. Обчислити границі: а) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n^2+1}\left(\sqrt{n+7}-\sqrt{n-4}\right)$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2-7}{2x^2+3x}\right)^{6-2x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x-1}{2^{\sin^2 5x+1}-2}$; г) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\operatorname{arctg}(x^3-8)}{x^3+5x^2-12x-4}$; д) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{4+8x}-\sqrt{10x}}{\sqrt[3]{3x+2}-2}$.

2. Знайти порядок нескінченно малої функції $\alpha(x)=\cos 3x^2-\cos x^2$ відносно $\beta(x)=x$ при $x\to 0$.

3. Дослідити функцію на неперервність (знайти точки розриву функції і класифікувати їх): а) $f(x)=\dfrac{\operatorname{arctg} x^2}{x^2(x-2)}$; б) $f(x)=\begin{cases}-3x^2+x, & x\le 0;\\ 2x-5, & 0<x<4;\\ 7-x, & x\ge 4.\end{cases}$

4. Для функцій $\alpha(x)=\ln(x^4+x+1)$, $\beta(x)=e^{\sin x}-1$:

а) порівняти нескінченно малі $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ при $x\to 0$;

б) знайти порядок нескінченно малої функції $\alpha(x)$ відносно $\beta(x)$ при $x\to 0$;

в) знайти порядок нескінченно малої функції $\beta(x)$ відносно $\alpha(x)$ при $x\to 0$.

Варіант № 28

1. Обчислити границі: а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[4]{n^8+7n^6-1}+\sqrt[3]{8n^3+n}}{(7n+1)\sqrt{n^2+2n-4}}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x^2+3x}{5x^2-8}\right)^{\frac{x^2+3}{x}}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos 3x}{e^{\operatorname{arctg}^2 5x}-1}$; г) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{7+3x}-\sqrt{13+x}}{\operatorname{tg}(x^2-3x)}$; д) $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{2x^3+21x^2+60x+25}{x^3+8x^2+5x-50}$.

2. Знайти порядок нескінченно малої функції $\alpha(x)=x\ln(x^4-5x^3+1)$ відносно $\beta(x)=x$ при $x\to 0$.

3. Дослідити функцію на неперервність (знайти точки розриву функції і класифікувати їх): а) $f(x)=\dfrac{\sin\dfrac{\pi x^2}{2}}{x^2(x-1)}$; б) $f(x)=\begin{cases}3x-4, & x<-1;\\ 2x^2-4, & -1\le x<1;\\ -2x, & x\ge 1.\end{cases}$

4. Для функцій $\alpha(x)=1-\cos 6x$, $\beta(x)=\sqrt{1+x^2}-1$:

а) порівняти нескінченно малі $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ при $x\to 0$;

б) знайти порядок нескінченно малої функції $\alpha(x)$ відносно $\beta(x)$ при $x\to 0$;

в) знайти порядок нескінченно малої функції $\beta(x)$ відносно $\alpha(x)$ при $x\to 0$.

Варіант № 29

1. Обчислити границі: а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{(n+2)(n^5+1)}-\sqrt{n^6+2}}{n^2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2+7x}{2x^2-5}\right)^{1-4x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-\operatorname{arctg}^2 x)}{e^{\sin x}-e^{\sin 4x}}$; г) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sin(x^2+2x)}{x^3+9x^2+17x+6}$; д) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3+6x}-\sqrt{9x}}{1-\sqrt[3]{5x-4}}$.

2. Знайти порядок нескінченно малої функції $\alpha(x)=5x+\ln\cos 2x$ відносно $\beta(x)=x$ при $x\to 0$.

3. Дослідити функцію на неперервність (знайти точки розриву функції і класифікувати їх): а) $f(x)=\dfrac{2-4^{\frac{1}{x}}}{5+4^{\frac{1}{x}}}$; б) $f(x)=\begin{cases}3x^2-1, & x\le -1;\\ x+3, & -1<x\le 2;\\ 5e^x, & x>2.\end{cases}$

4. Для функцій $\alpha(x)=\operatorname{tg}2x-\sin 2x,\ \beta(x)=\ln(1+\sin x)$:

а) порівняти нескінченно малі $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ при $x\to 0$;

б) знайти порядок нескінченно малої функції $\alpha(x)$ відносно $\beta(x)$ при $x\to 0$;

в) знайти порядок нескінченно малої функції $\beta(x)$ відносно $\alpha(x)$ при $x\to 0$.

Варіант № 30

1. Обчислити границі: а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{4n^9+6n-2}+\sqrt[4]{5n^8+3n^4}}{(7n^2-2)\cdot\sqrt[3]{n^3+n^2+8}}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2+5x}{2x^2+8}\right)^{\frac{1-4x}{3}}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 7x-\cos 3x}{\operatorname{tg}^4(\sqrt{2x})}$; г) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3+2x^2-2x-12}{e^{x^3-2x^2+x-2}-1}$; д) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2+x+2}-2}{1-\sqrt[3]{x}}$.

2. Знайти порядок нескінченно малої функції $\alpha(x)=\ln\cos 5x+e^{2x^2}-1$ відносно $\beta(x)=x$ при $x\to 0$.

3. Дослідити функцію на неперервність (знайти точки розриву функції і класифікувати їх): а) $f(x)=4^{\frac{5}{x^2(3-x)}}$; б) $f(x)=5x+1+\dfrac{|x-1|}{x-1}$.

4. Для функцій $\alpha(x)=1-\cos 2x^3,\ \beta(x)=\arcsin\left(e^{-x}-1\right)$:

а) порівняти нескінченно малі $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ при $x\to 0$;

б) знайти порядок нескінченно малої функції $\alpha(x)$ відносно $\beta(x)$ при $x\to 0$;

в) знайти порядок нескінченно малої функції $\beta(x)$ відносно $\alpha(x)$ при $x\to 0$.

Варіант № 31

1. Обчислити границі: а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+4x}-\sqrt[3]{1-2x}}{\sqrt{16-3x}-4}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-2x+4}{x^2+x}\right)^{2x-5}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x^4+2)-\ln 2}{\cos 5x^2-\cos x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}(3x^3-2x+1)\cdot\sin\dfrac{\pi}{x^3+x^2+2}$;

д) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n^6+5}-\sqrt{n^6-3n^2}\right)$.

2. Знайти порядок нескінченно малої функції $\alpha(x)=1-\cos 5x+\sin 2x^3$ відносно $\beta(x)=x$ при $x\to 0$.

3. Дослідити функцію на неперервність (знайти точки розриву функції і класифікувати їх): а) $f(x)=3^{\frac{2}{(1-x)(1+x)}}$; б) $f(x)=\begin{cases}3x^2-x+7, & x\le -1;\\ 1+2x, & -1<x<0;\\ 6^x+x, & x\ge 0.\end{cases}$

4. Для функцій $\alpha(x)=\ln\cos 4x$, $\beta(x)=(1+2x)^3-1$:

а) порівняти нескінченно малі $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ при $x\to 0$;

б) знайти порядок нескінченно малої функції $\alpha(x)$ відносно $\beta(x)$ при $x\to 0$;

в) знайти порядок нескінченно малої функції $\beta(x)$ відносно $\alpha(x)$ при $x\to 0$.

Варіант № 32

1. Обчислити границі: а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^4+2n^2+1}-\sqrt{n^4+n-9}\right)$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2+3}{2x^2-5x}\right)^{5x-1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\ln(9-2x^2)}{\sin(x^2-2x)}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos 7x}{\sqrt{1-x^3+5x^2}-1}$; д) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3+x^2-7x+2}{3x^3-13x^2+16x-4}$.

2. Знайти порядок нескінченно малої функції $\alpha(x)=e^{3x^2}+e^{-x^2}-2$ відносно $\beta(x)=x$ при $x\to 0$.

3. Дослідити функцію на неперервність (знайти точки розриву функції і класифікувати їх): а) $f(x)=\dfrac{5}{3+e^{\frac{x}{2-x}}}$; б) $f(x)=x^2+5\cdot\dfrac{|7-x|}{7-x}$.

4. Для функцій $\alpha(x)=\ln\cos 5x$, $\beta(x)=1-e^{-x}$:

а) порівняти нескінченно малі $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ при $x\to 0$;

б) знайти порядок нескінченно малої функції $\alpha(x)$ відносно $\beta(x)$ при $x\to 0$;

в) знайти порядок нескінченно малої функції $\beta(x)$ відносно $\alpha(x)$ при $x\to 0$.

Варіант № 33

1. Обчислити границі: а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-7x^2+16x-12}{2x^3-9x^2+12x-4}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-5x-3}{x^2+2x}\right)^{x+8}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-\cos x}{\ln(4x^2+5)-\ln 5}$; г) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2+5}-\sqrt{4x+2}}{\mathrm{tg}(x^2-x)}$; д) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^3+2}+\sqrt[4]{n^8+2n^2-3}}{1+2n+\sqrt{n^4-5n^3+1}}$.

2. Знайти порядок нескінченно малої функції $\alpha(x)=\mathrm{arctg}(\sqrt{49-2x^5}-7)$ відносно $\beta(x)=x$ при $x\to 0$.

3. Дослідити функцію на неперервність (знайти точки розриву функції і класифікувати їх): а) $f(x)=\dfrac{2}{1+9^{\frac{1}{x^2(2-x)}}}$; б) $f(x)=x^2+4+\dfrac{|x+3|}{x+3}$.

4. Для функцій $\alpha(x)=e^{\sin x^3}-1$, $\beta(x)=\mathrm{tg}^2\sqrt{5x}$:

а) порівняти нескінченно малі $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ при $x\to 0$;

б) знайти порядок нескінченно малої функції $\alpha(x)$ відносно $\beta(x)$ при $x\to 0$;

в) знайти порядок нескінченно малої функції $\beta(x)$ відносно $\alpha(x)$ при $x\to 0$.

Варіант № 34

1. Обчислити границі: а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^5+5n^3}-\sqrt{n^5-3}}{\sqrt{n}}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2-9}{2x^2+4x}\right)^{5x-2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 7x-\cos 3x}{e^{1-\cos 4x}-1}$; г) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\mathrm{tg}(x^3-4x^2-3x+14)}{x^3-2x^2}$; д) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{2x+6}-\sqrt{x+11}}{\sqrt[3]{x-4}-1}$.

2. Знайти порядок нескінченно малої функції $\alpha(x)=x^3\ln(\cos 5x)$ відносно $\beta(x)=x$ при $x\to 0$.

3. Дослідити функцію на неперервність (знайти точки розриву функції і класифікувати їх): а) $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x^2+x-12}$; б) $f(x)=\begin{cases}7x-3\cdot\dfrac{1+x}{|1+x|}, & x\neq -1;\\ -3, & x=-1.\end{cases}$

4. Для функцій $\alpha(x)=1-\cos(3x^2)$, $\beta(x)=\sqrt{1-2x}-1$:

а) порівняти нескінченно малі $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ при $x\to 0$;

б) знайти порядок нескінченно малої функції $\alpha(x)$ відносно $\beta(x)$ при $x\to 0$;

в) знайти порядок нескінченно малої функції $\beta(x)$ відносно $\alpha(x)$ при $x\to 0$.

Варіант № 35

1. Обчислити границі: а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^3-4n+2}+\sqrt[4]{n^{12}+3n^7-1}}{(2n-9)\sqrt{n^4+5n^2+3}}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+4}{x^2-7x}\right)^{\frac{5x-1}{2}}$;

в) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\arcsin(x^2-3x)}{e^{2x+1}-e^7}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x-\sin 5x}{\operatorname{tg}(\sqrt{2x+25}-5)}$; д) $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{x^3+5x^2-8x-48}{x^3+13x^2+56x+80}$.

2. Знайти порядок нескінченно малої функції $\alpha(x)=e^{\operatorname{arctg}7x^5}-1+\sin^4 3x$ відносно $\beta(x)=x$ при $x\to 0$.

3. Дослідити функцію на неперервність (знайти точки розриву функції і класифікувати їх): а) $f(x)=\dfrac{1-3^{\frac{1}{x-1}}}{4+3^{\frac{1}{x-1}}}$; б) $f(x)=\begin{cases} x^2+5x, & x\le 1; \\ 2x, & 1<x<3; \\ x+3, & x\ge 3. \end{cases}$

4. Для функцій $\alpha(x)=\cos 4x^2-\cos 2x^2$, $\beta(x)=\ln\left(1+\operatorname{tg}x\right)$:

а) порівняти нескінченно малі $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ при $x\to 0$;

б) знайти порядок нескінченно малої функції $\alpha(x)$ відносно $\beta(x)$ при $x\to 0$;

в) знайти порядок нескінченно малої функції $\beta(x)$ відносно $\alpha(x)$ при $x\to 0$.

Варіант № 36

1. Обчислити границі: а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+7n+2}-n\right)$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+3x}{x^2+x+4}\right)^{2-3x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos 3x}{e^{\sin 6x}-e^{\sin 2x}}$; г) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-3x^2+10x-16}{\sqrt{2x+4}-\sqrt{4x}}$; д) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\ln(1+3x-x^2)}{\arcsin(x^2-x-6)}$.

2. Знайти порядок нескінченно малої функції $\alpha(x)=1-\cos 2x+\operatorname{arctg}^2 3x$ відносно $\beta(x)=x$ при $x\to 0$.

3. Дослідити функцію на неперервність (знайти точки розриву функції і класифікувати їх): а) $f(x)=\pi+\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x^2(x-1)}$; б) $f(x)=\begin{cases} 2x-x^2, & x\le 0; \\ x^3, & 0<x\le 2; \\ 8-5x, & x>2. \end{cases}$

4. Для функцій $\alpha(x)=\ln(1+\sin^3 x)$, $\beta(x)=1-\cos\sqrt{2x}$:

а) порівняти нескінченно малі $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ при $x\to 0$;

б) знайти порядок нескінченно малої функції $\alpha(x)$ відносно $\beta(x)$ при $x\to 0$;

в) знайти порядок нескінченно малої функції $\beta(x)$ відносно $\alpha(x)$ при $x\to 0$.

Варіант № 37

1. Обчислити границі: а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^3+5x^2-6x-1}{3x^3-4x^2-x+2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+x+2}{x^2-5x}\right)^{2x-4}$;

в) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\operatorname{arctg}(2x+2)}{3^{x^2+x+1}-3}$; г) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sin(\sqrt[3]{x+4}-2)}{\sqrt{2x+2}-\sqrt{3x-2}}$; д) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n^4-4n+7}-\sqrt{n^4+1}\right)$.

2. Знайти порядок нескінченно малої функції $\alpha(x)=7x^2+\ln\cos 5x$ відносно $\beta(x)=x$ при $x\to 0$.

3. Дослідити функцію на неперервність (знайти точки розриву функції і класифікувати їх): а) $f(x)=\dfrac{2}{3+e^{\frac{1}{x(x-5)^2}}}$; б) $f(x)=x^2-3x-2\cdot\dfrac{5+x}{|5+x|}$.

4. Для функцій $\alpha(x)=\sin x-\sin 3x,\ \beta(x)=e^{\arcsin x}-1$:

а) порівняти нескінченно малі $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ при $x\to 0$;

б) знайти порядок нескінченно малої функції $\alpha(x)$ відносно $\beta(x)$ при $x\to 0$;

в) знайти порядок нескінченно малої функції $\beta(x)$ відносно $\alpha(x)$ при $x\to 0$.

Варіант № 38

1. Обчислити границі: а) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+7}-\sqrt{n^2-9n+1})$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+2x}{x^2+5x-2}\right)^{1-2x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 8x-\sin 2x}{\arcsin(\sqrt{4+3x}-2)}$; г) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^3-13x^2+56x-80}{2x^3-17x^2+40x-16}$; д) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x^2-6x+11}-\sqrt{x+1}}{\ln(1+2x-x^2)}$.

2. Знайти порядок нескінченно малої функції $\alpha(x)=e^{x^3+2x+3}-e^3$ відносно $\beta(x)=x$ при $x\to 0$.

3. Дослідити функцію на неперервність (знайти точки розриву функції і класифікувати їх): а) $f(x)=\dfrac{e^{7x}-1}{x(x-4)}$; б) $f(x)=\begin{cases}2x^3-3, & x<1;\\ x+1, & 1\le x\le 4;\\ 6-\sqrt{x}, & x>4.\end{cases}$

4. Для функцій $\alpha(x)=\log_2(1+x^5),\ \beta(x)=\operatorname{tg}^2\sqrt{x}$:

а) порівняти нескінченно малі $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ при $x\to 0$;

б) знайти порядок нескінченно малої функції $\alpha(x)$ відносно $\beta(x)$ при $x\to 0$;

в) знайти порядок нескінченно малої функції $\beta(x)$ відносно $\alpha(x)$ при $x\to 0$.

Варіант № 39

1. Обчислити границі: а) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{1+6x}-5}{\sqrt{x+4}-\sqrt{2x}}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+x-4}{x^2+7x}\right)^{\frac{2x-1}{3}}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 5x-\cos 4x}{e^{x^3}-e^{-x^2}}$; г) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\mathrm{tg}(x^2+5x-14)}{\arcsin(2x^2-4x)}$; д) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)\cdot\sqrt{n^4+n+5}}{\sqrt[3]{n^9+9n+4}-\sqrt[4]{n^4-n^3}}$.

2. Знайти порядок нескінченно малої функції $\alpha(x)=\ln(x^4+7x^3+1)$ відносно $\beta(x)=x$ при $x\to 0$.

3. Дослідити функцію на неперервність (знайти точки розриву функції і класифікувати їх): а) $f(x)=\dfrac{\ln\left(1+3x^2\right)}{x^2(x-1)}$; б) $f(x)=\begin{cases}5x+3\cos x, & x\le 0;\\ x^2, & 0<x<2;\\ \dfrac{8}{x}, & x\ge 2.\end{cases}$

4. Для функцій $\alpha(x)=\mathrm{arctg}\left(e^{x^4}-1\right)$, $\beta(x)=\sqrt{1+2x^2}-1$:

а) порівняти нескінченно малі $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ при $x\to 0$;

б) знайти порядок нескінченно малої функції $\alpha(x)$ відносно $\beta(x)$ при $x\to 0$;

в) знайти порядок нескінченно малої функції $\beta(x)$ відносно $\alpha(x)$ при $x\to 0$.

Варіант № 40

1. Обчислити границі: а) $\lim\limits_{n\to\infty}(n+1)\cdot\left(\sqrt{n^4+n+5}-\sqrt{n^4+1}\right)$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x^2-x}{3x^2+4x-2}\right)^{\frac{-x}{2}}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x-\sin 3x}{e^{2x^2}-e^{x^2+x}}$; г) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3-12x-16}{2x^3+9x^2+12x+4}$; д) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt{3x-5}-\sqrt{x+9}}{\ln(1-x^2+7x)}$.

2. Знайти порядок нескінченно малої функції $\alpha(x)=x^2\ln(\cos 3x^2)$ відносно $\beta(x)=x$ при $x\to 0$.

3. Дослідити функцію на неперервність (знайти точки розриву функції і класифікувати їх): а) $f(x)=2^{-\frac{1}{x^2(4-x)}}$; б) $f(x)=5x^2-2x\cdot\dfrac{|x-6|}{x-6}$.

4. Для функцій $\alpha(x)=\ln(1+\sin x^2)$, $\beta(x)=1-\cos\sqrt{2x}$:

а) порівняти нескінченно малі $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ при $x\to 0$;

б) знайти порядок нескінченно малої функції $\alpha(x)$ відносно $\beta(x)$ при $x\to 0$;

в) знайти порядок нескінченно малої функції $\beta(x)$ відносно $\alpha(x)$ при $x\to 0$.

Варіант № 41

1. Обчислити границі: а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^3-7}+\sqrt{n^4+5n^2}}{(9n-5)\cdot\sqrt[5]{n^5-n^3+4}}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-3x+8}{x^2+2}\right)^{1-5x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\sqrt{5x^2+9}-3)}{\ln(x^2+7)-\ln 7}$; г) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x^3+11x^2+20x+12}{x^3+3x^2-4}$; д) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{7x+1}-2}{e^{x^3-x^2}-1}$.

2. Знайти порядок нескінченно малої функції $\alpha(x)=e^{5x}+e^{-x}-2$ відносно $\beta(x)=x$ при $x\to 0$.

3. Дослідити функцію на неперервність (знайти точки розриву функції і класифікувати їх): а) $f(x)=4^{\frac{1}{x^2(1+x)}}$; б) $f(x)=1-2x\cdot\dfrac{x-6}{|x-6|}$.

4. Для функцій $\alpha(x)=\sin 7x^3+\sin x^3$, $\beta(x)=1-\cos\sqrt{2x}$:

а) порівняти нескінченно малі $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ при $x\to 0$;

б) знайти порядок нескінченно малої функції $\alpha(x)$ відносно $\beta(x)$ при $x\to 0$;

в) знайти порядок нескінченно малої функції $\beta(x)$ відносно $\alpha(x)$ при $x\to 0$.

Варіант № 42

1. Обчислити границі: а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{8+3x}-\sqrt[3]{8-2x}}{\sqrt{25+x^2+x}-5}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2-1}{2x^2-3x}\right)^{5x+6}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x^2+3x}-e^x}{\ln\cos 4x}$; г) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^3+2x^2-15x-36}{2x^3+11x^2+12x-9}$; д) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[5]{n^5-n^2+1}+\sqrt[3]{n^6+2n}}{(7n-4)\sqrt{n^2+5n-8}}$.

2. Знайти порядок нескінченно малої функції $\alpha(x)=\operatorname{tg}x^2-\sin x^2$ відносно $\beta(x)=x$ при $x\to 0$.

3. Дослідити функцію на неперервність (знайти точки розриву функції і класифікувати їх): а) $f(x)=\dfrac{7}{2+9^{\frac{1}{x(x-1)^4}}}$; б) $f(x)=2+3x\cdot\dfrac{|1-x|}{1-x}$.

4. Для функцій $\alpha(x)=\ln(1+\arcsin x^2)$, $\beta(x)=e^{-2x}-1$:

а) порівняти нескінченно малі $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ при $x\to 0$;

б) знайти порядок нескінченно малої функції $\alpha(x)$ відносно $\beta(x)$ при $x\to 0$;

в) знайти порядок нескінченно малої функції $\beta(x)$ відносно $\alpha(x)$ при $x\to 0$.

Варіант № 43

1. Обчислити границі: а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{(n^2+7)(n^2-3)}-\sqrt{n^4+2n^2}\right)$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2+5x-1}{2x^2+3}\right)^{\frac{x^2}{x+1}}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin7x^2-\sin3x^2}{\mathrm{tg}(\cos4x-1)}$; г) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{\sin(x^2-6x-7)}{e^{x^2+5x+4}-1}$; д) $\lim\limits_{x\to7}\dfrac{x^3-15x^2+63x-49}{x^3-12x^2+21x+98}$.

2. Знайти порядок нескінченно малої функції $\alpha(x)=\arcsin(\sqrt{25-x^3}-5)$ відносно $\beta(x)=x$ при $x\to0$.

3. Дослідити функцію на неперервність (знайти точки розриву функції і класифікувати їх): а) $f(x)=\dfrac{x^3-1}{(x-1)(x-2)}$; б) $f(x)=\begin{cases}-5x+2, & x\le0;\\ x^2+x, & 0<x<2;\\ 3x, & x\ge2.\end{cases}$

4. Для функцій $\alpha(x)=\ln\left(1-\mathrm{tg}^6x\right)$, $\beta(x)=\sqrt{1+4x^2}-1$:

а) порівняти нескінченно малі $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ при $x\to0$;

б) знайти порядок нескінченно малої функції $\alpha(x)$ відносно $\beta(x)$ при $x\to0$;

в) знайти порядок нескінченно малої функції $\beta(x)$ відносно $\alpha(x)$ при $x\to0$.

Варіант № 44

1. Обчислити границі: а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^9-5n^4+1}+\sqrt{n^4+3n^2}}{(1-3n)\cdot\sqrt[4]{n^8+2n^7+4}}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x^2-3}{5x^2+4x}\right)^{\frac{-x-1}{2}}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(\cos5x^2)}{\sin^4(\mathrm{tg}\,2x)}$; г) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{7x}}{e^{x^2-3x-4}-1}$; д) $\lim\limits_{x\to-7}\dfrac{x^3+17x^2+91x+147}{2x^3+27x^2+84x-49}$.

2. Знайти порядок нескінченно малої функції $\alpha(x)=e^{7x}+e^{-3x}-2$ відносно $\beta(x)=x$ при $x\to0$

3. Дослідити функцію на неперервність (знайти точки розриву функції і класифікувати їх): а) $f(x)=9^{\frac{1}{(5-x)x^2}}$; б) $f(x)=1+3x-x^2\cdot\dfrac{|x+4|}{x+4}$.

4. Для функцій $\alpha(x)=\cos8x-\cos6x$, $\beta(x)=1-\cos\sqrt{2x}$:

а) порівняти нескінченно малі $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ при $x\to0$;

б) знайти порядок нескінченно малої функції $\alpha(x)$ відносно $\beta(x)$ при $x\to0$;

в) знайти порядок нескінченно малої функції $\beta(x)$ відносно $\alpha(x)$ при $x\to0$.

Варіант № 45

1. Обчислити границі: а) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x^3+7x^2+4x-4}{3x^3+16x^2+28x+16}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3+x+1}{x^3+5x}\right)^{3x^2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x^2-\cos 3x^2}{x^2\cdot\ln\cos x}$; г) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{e^{2x-6}-1}{\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{5x}}$; д) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[4]{n^{12}+3n^7-1}+3n+1}{\sqrt[3]{n^6-3n+2}\cdot\sqrt{n^2-1}}$.

2. Знайти порядок нескінченно малої функції $\alpha(x)=\sqrt{4+7x^2}-2$ відносно $\beta(x)=x$ при $x\to 0$.

3. Дослідити функцію на неперервність (знайти точки розриву функції і класифікувати їх): а) $f(x)=\dfrac{3+e^{\frac{1}{x-2}}}{5+e^{\frac{1}{x-2}}}$; б) $f(x)=\begin{cases}3-x, & x\le 0;\\ x^2-1, & 0<x\le 3;\\ 2x+2, & x>3.\end{cases}$

4. Для функцій $\alpha(x)=\ln(1+\mathrm{tg}x^3)$, $\beta(x)=e^{\arcsin x}-1$:

а) порівняти нескінченно малі $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ при $x\to 0$;

б) знайти порядок нескінченно малої функції $\alpha(x)$ відносно $\beta(x)$ при $x\to 0$;

в) знайти порядок нескінченно малої функції $\beta(x)$ відносно $\alpha(x)$ при $x\to 0$.

Варіант № 46

1. Обчислити границі: а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[4]{n^{12}+7n^5-1}+\sqrt{n^2+3n}}{\sqrt[3]{n^3-1}\cdot\sqrt[4]{n^8+3n^7+5}}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x^3+5x^2}{x^3-x^2+8}\right)^{4x-1}$;

в) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{e^{2x}-e^{-6}}{\mathrm{tg}(x^2+3x)}$; г) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(x^2-x+1)}{\sqrt{7x+3}-\sqrt{2x+8}}$; д) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{2x^3+9x^2-27}{x^3+2x^2-15x-36}$.

2. Знайти порядок нескінченно малої функції $\alpha(x)=x\cdot\ln\cos 3x$ відносно $\beta(x)=x$ при $x\to 0$.

3. Дослідити функцію на неперервність (знайти точки розриву функції і класифікувати їх): а) $f(x)=\dfrac{x^3-27}{x(x-3)}$; б) $f(x)=x^2-4x+5\cdot\dfrac{2+x}{|2+x|}$.

4. Для функцій $\alpha(x)=\sin^2 x^3$, $\beta(x)=\sqrt{2x+4}-2$:

а) порівняти нескінченно малі $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ при $x\to 0$;

б) знайти порядок нескінченно малої функції $\alpha(x)$ відносно $\beta(x)$ при $x\to 0$;

в) знайти порядок нескінченно малої функції $\beta(x)$ відносно $\alpha(x)$ при $x\to 0$.

Варіант № 47

1. Обчислити границі: а) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{3x^3-x^2-16x-4}{2x^3+3x^2+3x+10}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3+4}{x^3-5x}\right)^{\frac{2x^2-1}{3}}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos 6x}{e^{\cos 4x}-e^{\cos 2x}}$; г) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x^2-4x+25}-5}{\operatorname{tg}(x^2-16)}$; д) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2+3+\sqrt[3]{2-n-n^3}}{(1+3n)\sqrt{n^2+7n-3}}$.

2. Знайти порядок нескінченно малої функції $\alpha(x)=1-\cos 4x+\arcsin^2 2x$ відносно $\beta(x)=x$ при $x\to 0$.

3. Дослідити функцію на неперервність (знайти точки розриву функції і класифікувати їх): а) $f(x)=\pi-\operatorname{arctg}\dfrac{2}{x(x-5)^2}$; б) $f(x)=\begin{cases}2-x, & x\le 0;\\ 1+(x-1)^2, & 0<x<2;\\ x-3x^2, & x\ge 2.\end{cases}$

4. Для функцій $\alpha(x)=e^{\sin x^8}-1$, $\beta(x)=\ln(1-x)$:

а) порівняти нескінченно малі $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ при $x\to 0$;

б) знайти порядок нескінченно малої функції $\alpha(x)$ відносно $\beta(x)$ при $x\to 0$;

в) знайти порядок нескінченно малої функції $\beta(x)$ відносно $\alpha(x)$ при $x\to 0$.

Варіант № 48

1. Обчислити границі: а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{4n^6+1}-\sqrt{4n^6+5n^3+8}\right)$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x^2+x-1}{3x^2-5x}\right)^{\frac{5x-1}{2}}$;

в) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\arcsin(2x-6)}{e^{x^2-7}-e^2}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 5x-\cos 2x}{\ln(1-2x^2-x)}$; д) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-x^2-21x+45}{2x^3-17x^2+48x-45}$.

2. Знайти порядок нескінченно малої функції $\alpha(x)=\ln\cos x+\sin^2 3x$ відносно $\beta(x)=x$ при $x\to 0$.

3. Дослідити функцію на неперервність (знайти точки розриву функції і класифікувати їх): а) $f(x)=\dfrac{\operatorname{arctg} x^2}{x(x+4)}$; б) $f(x)=\begin{cases}5\cos x, & x\le 0;\\ x^2+2x, & 0<x<1;\\ 7x-4, & x\ge 1.\end{cases}$

4. Для функцій $\alpha(x)=e^{\operatorname{arctg}^4 x}-1$, $\beta(x)=\sqrt{1-2x}-1$:

а) порівняти нескінченно малі $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ при $x\to 0$;

б) знайти порядок нескінченно малої функції $\alpha(x)$ відносно $\beta(x)$ при $x\to 0$;

в) знайти порядок нескінченно малої функції $\beta(x)$ відносно $\alpha(x)$ при $x\to 0$.

Варіант № 49

1. Обчислити границі: а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^4+1}+9n-1}{(3n+4)\cdot\sqrt[4]{16n^4+5n}}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-2x+1}{x^2+3x}\right)^{\frac{1-3x}{2}}$;

в) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{e^{x^2-4}-e^{-3}}{\ln\cos(x+1)}$; г) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{\sqrt{7+2x}-\sqrt{-14-5x}}{\sin(x^2-9)}$; д) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{2x^3-3x^2+2x-8}{5x^3-12x^2+5x-2}$.

2. Знайти порядок нескінченно малої функції $\alpha(x)=\operatorname{arctg}(x^5+6x^3)$ відносно $\beta(x)=x$ при $x\to0$.

3. Дослідити функцію на неперервність (знайти точки розриву функції і класифікувати їх): а) $f(x)=\dfrac{\operatorname{arctg}5x}{x(x-2)}$; б) $f(x)=4x-7-\dfrac{x-2}{|x-2|}$.

4. Для функцій $\alpha(x)=\sin^6(\sqrt{x})$, $\beta(x)=1-\cos3x$:

а) порівняти нескінченно малі $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ при $x\to0$;

б) знайти порядок нескінченно малої функції $\alpha(x)$ відносно $\beta(x)$ при $x\to0$;

в) знайти порядок нескінченно малої функції $\beta(x)$ відносно $\alpha(x)$ при $x\to0$.

Варіант № 50

1. Обчислити границі: а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^6+2n^4}-\sqrt{n^6-3}}{n}$; б) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{n^2+5n-1}{n^2+7}\right)^{3n^2+2}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos5x-\cos4x}{e^{\operatorname{arctg}^2 4x}-1}$; г) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{2x^3+9x^2+8x-3}{x^3+x^2-x+15}$; д) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{6x+4}-\sqrt{9x-2}}{\ln(x^2-3)}$.

2. Знайти порядок нескінченно малої функції $\alpha(x)=\ln(1-2x^3+5x^2)$ відносно $\beta(x)=x$ при $x\to0$.

3. Дослідити функцію на неперервність (знайти точки розриву функції і класифікувати їх): а) $f(x)=\dfrac{5}{1+2^{\frac{1}{(4+x)x}}}$; б) $f(x)=\begin{cases}4-x, & x<3;\\ 10-x^2, & 3\le x\le4;\\ 3x+5, & x>4.\end{cases}$

4. Для функцій $\alpha(x)=\operatorname{tg}(\sin^3x)$, $\beta(x)=1-\cos\sqrt{4x}$:

а) порівняти нескінченно малі $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ при $x\to0$;

б) знайти порядок нескінченно малої функції $\alpha(x)$ відносно $\beta(x)$ при $x\to0$;

в) знайти порядок нескінченно малої функції $\beta(x)$ відносно $\alpha(x)$ при $x\to0$.

ДОДАТОК

ДЕЯКІ ФОРМУЛИ З ЕЛЕМЕНТАРНОЇ МАТЕМАТИКИ

Дії над степенями та арифметичними коренями

● Якщо $a > 0, b > 0$, то $a^0 = 1;\quad a^1 = a;$ $a^n \cdot a^k = a^{n+k};\quad a^n \div a^k = a^{n-k};$ $a^{-k} = \dfrac{1}{a^k}$ при $k \neq 0;$ $(ab)^n = a^n \cdot b^n;\ \left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n};\ (a^n)^k = a^{nk};$ $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}\ (n \neq 0);\ \sqrt[n]{a^k} = a^{\frac{k}{n}}\ (n \neq 0).$	● Якщо $a \geq 0, b \geq 0,\ n, k \in \mathbb{N}, n \geq 2, k \geq 2,$ то $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a};\quad \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\ (b \neq 0);$ $\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k};\quad \sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[kn]{a};$ $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a;\quad \sqrt[n]{a} = \sqrt[kn]{a^k};$ $\sqrt{a^2} = \lvert a \rvert;\quad \sqrt[2n]{a^{2n}} = \lvert a \rvert;$ $\sqrt[2n-1]{a^{2n-1}} = a\,;\quad \sqrt[2n-1]{-a} = -\sqrt[2n-1]{a}.$

Формули скороченого множення

$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2;$ $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3;$ $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3;$ $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b);$	$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2);$ $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2);$ $a - b = \left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)$, якщо $a \geq 0$, $b \geq 0$; $a \pm b = \left(\sqrt{a} \pm \sqrt{b}\right)\left(\sqrt[3]{a^2} \mp \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}\right).$

Квадратне рівняння

● Повне квадратне рівняння: $ax^2 + bx + c = 0\quad (a \neq 0).$ (*)

Якщо x_1 та x_2 — корені рівняння (*), то вони знаходяться за формулою $\boldsymbol{x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}}$, де $\boldsymbol{D = b^2 - 4ac}$, та $\boldsymbol{ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)}$.

● Зведене квадратне рівняння: $x^2 + px + q = 0.$ (**)

Якщо x_1, x_2 — корені рівняння (**), то $x_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$ та $\boldsymbol{x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2)}$.

Теорема Вієта. *Якщо x_1, x_2 — корені рівняння (**), то* $\begin{cases} x_1 + x_2 = -p; \\ x_1 \cdot x_2 = q. \end{cases}$

Логарифми та їх властивості

Логарифмом додатного ***числа M*** за основою a, де $a > 0, a \neq 1$, називається показник степеня, до якого потрібно піднести a, щоб отримати число M, тобто,

$$\boldsymbol{\log_a M = b},\ \text{якщо}\ \boldsymbol{a^b = M}.$$

Якщо $a = 10$, то b називається *десятковим логарифмом числа M* і позначається $\lg M$. Якщо ж $a = e$, то b називається ***натуральним*** або ***неперовим логарифмом числа M*** і позначається $\ln M$. Отже, $\boldsymbol{\ln M = b}$, якщо $\boldsymbol{e^b = M}$.

Якщо $A > 0, B > 0, a > 0, a \neq 1, b > 0, b \neq 1$, то:

$\log_a 1 = 0;\quad \ln 1 = 0;\quad \log_a a = 1;\quad \ln e = 1;\quad \lg 10 = 1;$

$\log_a A + \log_a B = \log_a (AB)\,;\quad \log_a A - \log_a B = \log_a \left(\frac{A}{B}\right);$

$k \log_a A = \log_a (A^k)\,,\quad k \in \mathbb{R};$

$\log_a A = \frac{\log_b A}{\log_b a};\quad \ln A = \frac{\log_a A}{\log_a e}\,;\quad \log_a A = \frac{1}{\log_A a}\quad (A \neq 1).$

Основні формули тригонометрії

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1;$ $\operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x};\ \operatorname{ctg} x = \dfrac{\cos x}{\sin x};\ \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x = 1;$	$\sin 2x = 2 \sin x \cos x\,;$ $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x\,;$

$$1+\mathrm{tg}^2 x=\frac{1}{\cos^2 x};\quad 1+\mathrm{ctg}^2 x=\frac{1}{\sin^2 x};$$

$$1-\cos x=2\left(\sin\frac{x}{2}\right)^2;$$
$$\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2};\quad \sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}.$$

Перетворення суми функцій в добуток

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$
$$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2};$$
$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$
$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2};$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha\pm\mathrm{tg}\,\beta=\frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cos\beta};$$
$$\mathrm{ctg}\,\alpha\pm\mathrm{ctg}\,\beta=\frac{\sin(\beta\pm\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}.$$

Перетворення добутку функцій в суму

$$\sin\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)];$$
$$\sin\alpha\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)];$$
$$\cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)].$$

Теореми додавання

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta;$$
$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta;$$
$$\mathrm{tg}(\alpha\pm\beta)=\frac{\mathrm{tg}\,\alpha\pm\mathrm{tg}\,\beta}{1\mp\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta};$$
$$\mathrm{ctg}(\alpha\pm\beta)=\frac{\mathrm{ctg}\,\alpha\,\mathrm{ctg}\,\beta\mp 1}{\mathrm{ctg}\,\beta\pm\mathrm{ctg}\,\alpha}.$$

Таблиця значень тригонометричних функцій деяких кутів

$f(\alpha)$ \ α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\alpha$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	0	-1	0
$\cos\alpha$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0	-1	0	1
$\mathrm{tg}\,\alpha$	0	$1/\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	не існує	0	не існує	0
$\mathrm{ctg}\,\alpha$	не існує	$\sqrt{3}$	1	$1/\sqrt{3}$	0	не існує	0	не існує

Функція $\cos\alpha$ — парна, а функції $\sin\alpha$, $\mathrm{tg}\,\alpha$, $\mathrm{ctg}\,\alpha$ — непарні, тобто

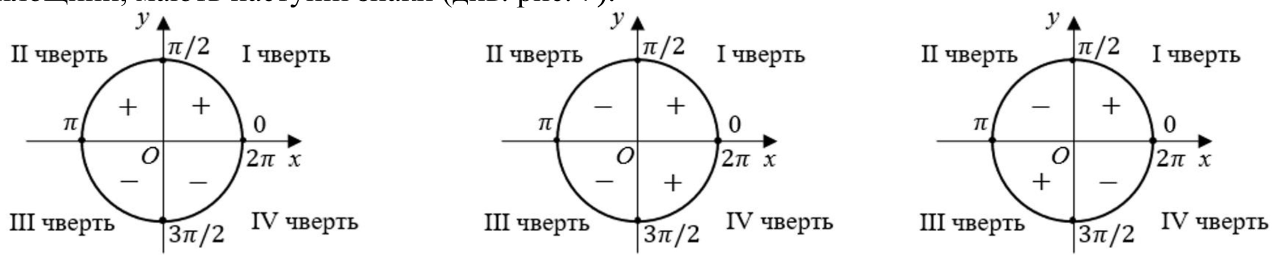
$$\cos(-\alpha)=\cos\alpha;\quad \sin(-\alpha)=-\sin\alpha;\quad \mathrm{tg}(-\alpha)=-\mathrm{tg}\,\alpha;\quad \mathrm{ctg}(-\alpha)=-\mathrm{ctg}\,\alpha.$$

Функції $\cos\alpha$, $\sin\alpha$ мають найменший додатний (основний) період $T=2\pi$, а функції $\mathrm{tg}\,\alpha$, $\mathrm{ctg}\,\alpha$ мають основний період $T=\pi$, тобто

$$\cos(\alpha+2\pi k)=\cos\alpha;\quad \sin(\alpha+2\pi k)=\sin\alpha;$$
$$\mathrm{tg}(\alpha+\pi k)=\mathrm{tg}\,\alpha;\ \mathrm{ctg}(\alpha+\pi k)=\mathrm{ctg}\,\alpha,\quad k\in\mathbb{Z}.$$

Знаки тригонометричних функцій

Тригонометричні функції кутів, які закінчуються в різних чвертях координатної площини, мають наступні знаки (див. рис. 7):



Синус　　Косинус　　Тангенс і котангенс

Рис. 7

Формули зведення

$f(\alpha)$ \ α	$-\alpha$	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\pi-\alpha$	$\pi+\alpha$	$\frac{3\pi}{2}-\alpha$	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$
$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$
$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$
$\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$
$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$

Правило. Якщо кути мають вигляд $-\alpha$, $\pi \pm \alpha$, то функції зберігають найменування; а для кутів $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$, $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$ функції змінюють найменування на споріднене (спорідненими є функції синус і косинус, тангенс і котангенс); знак функції визначається знаком лівої частини, якщо вважати кут α гострим.

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. *Дубовик В. П.* Вища математика: Навч. посібн. / В. П. Дубовик, І. І. Юрик. – К.: А.С.К., 2006. – 648 с.: іл. – Бібліогр.: с. 632-633. – (Універс. б-ка).
2. Вища математика: Збірник задач: Навч. посіб. / В. П. Дубовик, І. І. Юрик, І. П. Вовкодав та ін.; За ред. В. П. Дубовика, І. І. Юрика – К.: А.С.К., 2005. – 480 с.: іл. – (Універс. б-ка).
3. *Герасимчук В. С.* Вища математика. Повний курс у прикладах і задачах. Лінійна й векторна алгебра. Аналітична геометрія. Вступ до математичного аналізу. Диференціальне числення функцій однієї та багатьох змінних. Прикладні задачі. Навч. посіб. / В. С. Герасимчук, Г. С. Васильченко, В. І. Кравцов. – К.: Книги України ЛТД, 2009. – 578 с.
4. *Клепко В. Ю.* Вища математика в прикладах і задачах : навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів / В. Ю. Клепко, В.Л. Голець ; Міністерство освіти і науки України, Київський економічний інститут менеджменту. – Київ : Центр учбової літератури, 2020. – 592 с.
5. *Алєксєєва І. В.* Математика в технічному університеті [Електронний ресурс]: Підручник / І. В. Алєксєєва, В. О. Гайдей, О. О. Диховичний, Л. Б. Федорова ; за ред. О. І. Клесова ; КПІ ім. Ігоря Сікорського. – Електронні текстові дані (1 файл: 7,61 Мбайт). – Київ : Видавничий дім «Кондор», 2019. – Т. 2. – 504 с. – Режим доступу : https://ela.kpi.ua/handle/123456789/30396 . – Назва з екрана.
6. *Алєксєєва І. В.* Математика в сучасному технічному університеті. Практикум. Частина 2. Диференціальне та інтегральне числення функцій однієї змінної [Електронний ресурс] : Навч. посібник для студентів вищих навчальних закладів / І. В. Алєксєєва, В. О. Гайдей, О. О. Диховичний, Л. Б. Федорова. – Електронні текстові дані (1 файл: 3,67 Мбайт). – Київ : НТУУ «КПІ», 2015. – 249 с. – Режим доступу : https://ela.kpi.ua/handle/123456789/16620 . – Назва з екрана.