

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ  
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ  
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

Фізико-математичний факультет  
Кафедра загальної фізики та фізики твердого тіла

---

«На правах рукопису»  
УДК 537.611.44

«До захисту допущено»

Завідувач кафедри  
В.Й.Котовський  
(підпис) (ініціали, прізвище)

“ ” \_\_\_\_\_ 20\_\_р.

Магістерська дисертація

зі спеціальності (спеціалізації) 104 – фізика та астрономія (комп'ютерне моделювання фізичних процесів)

---

на тему: **Взаємодія скірміонподібних розв'язків рівняння Ландау-Ліфшица в феромагнетичу**

---

Виконала: студентка 2 курсу магістерського рівня, групи ОФ- 81 мп  
(шифр групи)

Квітка Анна Миколаївна

(прізвище, ім'я, по батькові)

(підпис)

Науковий керівник проф. кафедри загальної та експериментальної фізики  
проф., д. ф.- м.н. Горобець О.Ю.

(посада, науковий ступінь, вчене звання, прізвище та ініціали)

(підпис)

Рецензент \_\_\_\_\_

(посада, науковий ступінь, вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали)

(підпис)

Засвідчую, що у цій магістерській дисертації немає запозичень з праць інших авторів без відповідних посилань.

Студент \_\_\_\_\_

(підпис)

Київ – 2019року

**Національний технічний університет України  
«Київський політехнічний інститут  
імені Ігоря Сікорського»**

Інститут/факультет \_\_\_\_\_ фізико-математичний \_\_\_\_\_  
(повна назва)

Кафедра \_\_\_\_\_ загальної фізики та фізики твердого тіла \_\_\_\_\_  
(повна назва)

Рівень вищої освіти – другий (магістерський) за освітньо-професійною  
(освітньо-науковою) програмою

Спеціальність (спеціалізація) \_\_\_\_\_ 104 – фізика та астрономія (комп'ютерне  
моделювання фізичних процесів) \_\_\_\_\_

ЗАТВЕРДЖУЮ  
Завідувач кафедри  
\_\_\_\_\_ В. Й. Котовський \_\_\_\_\_  
(підпис) (ініціали, прізвище)  
«\_\_\_» \_\_\_\_\_ 20\_\_ р.

**ЗАВДАННЯ  
на магістерську дисертацію студентки**

Квітки Анни Миколаївни  
\_\_\_\_\_  
(прізвище, ім'я, по батькові)

1. Тема дисертації Взаємодія скіrmіонподібних розв'язків рівняння Ландау-Ліфшица в феромагнетику

науковий керівник дисертації проф, д. ф. –м.н. Горобець О.Ю.,  
(прізвище, ім'я, по батькові, науковий ступінь, вчене звання)

затверджені наказом по університету від «\_\_\_» \_\_\_\_\_ 20\_\_ р. № \_\_\_\_\_

2. Строк подання студентом дисертації 11.12.2019

3. Об'єкт дослідження Енергія магнітних скіrmіонподібних розв'язків рівняння Ландау-Ліфшица в феромагнетику

4. Предмет дослідження (Вихідні дані – для магістерської дисертації за освітньо-професійною програмою) магнітні скіrmіонподібні розв'язки рівняння Ландау-Ліфшица в феромагнетику

## 5. Перелік завдань, які потрібно розробити

- 1). Проаналізувати літературу за темою « Сучасні уявлення про спітроніка»;
  - 2). Вивчити програму Wolfram Mathematica;
  - 3). Розрахувати аналітично густину енергії для скіріміонподібного розв'язку рівняння Ландау – Ліфшица в циліндричній феромагнітній нанооболонці від параметрів системи;
  - 4). Побудувати в програмі Wolfram Mathematica графічне зображення густини енергії скіріміонподібного розв'язку рівняння Ландау – Ліфшица в циліндричній феромагнітній нанооболонці.
6. Перелік графічного (ілюстративного) матеріалу \_“Схематичне зображення електронів з різними спінами”, “спін електрона вгору-вниз”, “напрямок спіна”, “скіріміон”, “схема осередку MRAM”, “феромагнітна циліндрична нанооболонка”, “векторне поле для вектора намагнічення”, “залежність проєкції вектора намагніченості”, “ залежність проєкції вектора намагніченості для двох скіріміонів”, “поверхнева густина енергії скіріміона”, “схематичне зображення проєкції вектора намагніченості”.

7. Дата видачі завдання 02.09.2019

## Календарний план

№ з/п	Назва етапів виконання магістерської дисертації	Строк виконання етапів магістерської дисертації	Примітка
1	Проходження інструктажу з техніки безпеки та охорони праці.	02.09.2019	Виконано
2	Ознайомлення з місцем роботи та засвоєння рекомендацій про виконання програми практики.	02.09.2019- 06.09.2019	Виконано
3	Вивчення літературних джерел, складання огляду літератури	09.09.2019- 13.09.2019	Виконано
4	Пошук і добір фактичних матеріалів, їх групування	16.09.2019- 20.09.2019	Виконано
5	Наукові дослідження за темою МД	23.09.2019- 25.10.2019	Виконано
6	Складання заліку з науково-дослідної практики	05.11.2019	Виконано
7	Аналіз отриманих результатів	06.11.2019-11.11.19	Виконано
8	Підготовка розділів МД на основі отриманих даних по темі МД	12.11.2019- 27.11.2019	Виконано
9	Підготовка звіту з МД та оформлення презентацій до захисту	27.11.2019- 02.12.2019	Виконано
10	Надання роботи на перевірку	02.12.2019	Виконано

	керівнику МД		
11	Отримання відгуку від керівника МД	02.12.2019	Виконано
12	Перевірка МД на плагіат	03.11.2019	Виконано
13	Подання МД на рецензію	06.12.2019	Виконано
14	Здача МД на нормо-контроль (додержання вимог до оформлення МД)	11.12.2019	Виконано
15	Попередній захист МД	11.12.2019	Виконано
16	Виправлення матеріалу МД згідно з зауваженнями комісії на попередньому захисті	12.12.2019	Виконано
17	Здача МД (друкований та електронний варіанти), Відгуку та Рецензії на кафедрі загальної фізики та ФТТ	17.12.2019	Виконано
18	Відсилання анотації МД на сайт кафедри загальної фізики та ФТТ	17.12.2019	Виконано
19	Остаточний захист МД	19.12.2019	Виконано
20	Відсилання матеріалів МД у бібліотеку «КПІ ім. Ігоря Сікорського» та сайт кафедри загальної фізики та ФТТ	17.12.2019	Виконано

Студент

\_\_\_\_\_ (підпис)

\_\_\_\_\_ (ініціали, прізвище)

Науковий керівник дисертації

\_\_\_\_\_ (підпис)

\_\_\_\_\_ (ініціали, прізвище)

## РЕФЕРАТ

### **Актуальність теми**

Дослідження в області спінтроніки є актуальними і на сьогоднішній день, спінтроніка – це перспективна галузь фізики, де особливо важливе місце займає вивчення способів управління та маніпулювання топологічними об'єктами в магнетиках такими, як доменні стінки, скірміони, тощо. Тривимірні аналітичні розв'язки рівняння Ландау– Ліфшица в феромагнетику широко використовуються для моделювання властивостей, зокрема магнітних вихорів та доменних стінок в зв'язку з тим що вони дозволяють тестувати результати чисельних розрахунків та досліджувати найбільш загальні властивості топологічних об'єктів в магнетиках. В зв'язку з цим тема магістерської дисертації «Взаємодія скірміонподібного розв'язку рівняння Ландау-Ліфшица в феромагнетику» є актуальною.

### **Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами**

Магістерське дослідження виконано в межах науково-дослідної теми «Взаємодія спінових хвиль та спін-поляризованих струмів з магнітними неоднорідностями в наноструктурованих феромагнітних матеріалах» кафедри загальної та експериментальної фізики Національного Технічного Університету України «КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО».

**Об'єкт дослідження** Енергія магнітних скірміонподібних розв'язків рівняння Ландау – Ліфшица в феромагнетику.

**Предмет дослідження** магнітні скірміонподібні розв'язки рівняння Ландау – Ліфшица в феромагнетику.

**Мета роботи** розрахувати аналітично енергію для скірміонподібного розв'язку рівняння Ландау – Ліфшица в циліндричній феромагнітній нанооболонці в залежності від параметрів системи.

**Методи дослідження** методи математичного аналізу, методи теорії диференціальних рівнянь в частинних похідних, методи математичної фізики

### **Задачі дослідження**

- 1). Проаналізувати літературу за темою «Сучасні уявлення про спінтроніку».
- 2). Вивчити програму Wolfram Mathematica
- 3). Розрахувати аналітично густину енергії для скірміонподібного розв'язку рівняння Ландау – Ліфшица в циліндричній феромагнітній нанооболонці від параметрів системи.
- 4). Побудувати в програмі Wolfram Mathematica графічне зображення густини енергії скірміонподібного розв'язку рівняння Ландау – Ліфшица в циліндричній феромагнітній нанооболонці.

### **Наукова новизна одержаних результатів**

Вперше аналітично розраховано густину енергії для скірміонподібного розв'язку рівняння Ландау – Ліфшица в циліндричній феромагнітній нанооболонці від параметрів системи.

### **Практичне значення одержаних результатів**

Матеріали проведеного дослідження можуть бути використані для конструювання пристроїв сучасної наноелектроніки. Вони можуть бути використані під час викладання курсів та спецкурсів із фізики магнітних явищ

**Ключові слова** феромагнетик, скірміон, спінтроніка, магнітна анізотропія, рівняння Ландау-ліфшица.

**В роботі наведено:** використаної літератури - 61 , сторінок: - 84, рисунків - 26

## **ABSTRACT**

### **Actuality of theme**

Research in the field of spintronics is relevant today, spintronics is a promising industry of physics, where the study of ways to control and manipulate topological objects in magnets, such as domain walls, skyrmions, etc., are especially important. The three-dimensional analytical solutions of the Landau – Lifshitz equation in ferromagnet are widely used to model properties, in particular magnetic eddies and domain walls, in order to test the results of numerical calculations and to investigate the most common properties of topological objects. In this regard, the topic of the master's dissertation "The interaction of the skyrmion-similar solution of the Landau-Lifshitz equation in ferromagnetism" is relevant.

### **Relationship of work with scientific programs, plans, themes**

The master's research was performed within the scientific-research topic "Interaction of spin waves and spin-polarized currents with magnetic inhomogeneities in nanostructured ferromagnetic materials" of the Department of General and Experimental Physics of the National Technical University of Ukraine «Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute»

### **Object of research**

The energy of magnetic skyrmion-similar solutions of the Landau-Lifshitz equation in a ferromagnet.

### **Subject of research**

Magnetic skyrmion-similar solutions of the Landau - Lifshitz equation in ferromagnet.

### **Purpose of work**

To calculate analytically the energy for the skyrmion-similar solution of the Landau-Lifshitz equation in a cylindrical ferromagnetic nano-shell, depending on the parameters of the system.

### **Research methods**

Methods of mathematical analysis, methods of the theory of partial differential equations, methods of mathematical physics.

### **Tasks of research**

- 1) To analyze the literature on the topic "Modern ideas about spintronics".
- 2) Study the Wolfram Mathematica program
- 3) Calculate analytically the energy density for the skyrmion-similar solution of the Landau-Lifshitz equation in a cylindrical ferromagnetic nano-shell from the system parameters.
- 4) To construct in Wolfram Mathematica a graphical representation of the energy density of the skyrmion-similar solution of the Landau-Lifshitz equation in a cylindrical ferromagnetic nano-shell.

### **Scientific novelty of the results**

For the first time, the energy density was analytically calculated for the skyrmion-similar solution of the Landau-Lifshitz equation in a cylindrical ferromagnetic nano-shell from the system parameters.

**The practical significance of the results**

The materials of the study can be used to design modern nanoelectronics. They can be used in the teaching of courses and courses in the physics of magnetic phenomena.

**Keywords**

Ferromagnet, skyrmion, spintronics, magnetic anisotropy, Landau-Lifshitz equation.

**The article contains:** used literature - 61, pages: - 84, pictures - 26 .

## ЗМІСТ

ВСТУП.....	10
РОЗДІЛ I СУЧАСНІ УЯВЛЕННЯ ПРО СПІНТРОНІКУ.....	12
1.1 Історія розвитку спінтроніки.....	12
1.2 Переваги досягнень спінтроніки у сучасних інформаційних технологіях.....	19
1.2.1 Пам'ять MRAM та її переваги.....	22
1.2.2 Доменні структури в феромагнетиках.....	28
Висновки до розділу I.....	31
РОЗДІЛ II ЕНЕРГІЯ СКІРМІОНПОДІБНОГО РОЗ'ЯЗКУ РІВНЯ ЛАНДАУ-ЛІФШИЦА В ФЕРОМАГНЕТИКУ.....	32
2.1 Методика отримання тривимірних аналітичних розв'язків рівняння Ландау – Ліфшица в феромагнетику.....	34
2.2 Енергія скірміонподібного розв'язку рівняння Ландау – Ліфшица в феромагнітній циліндричній нанооболонці.....	42
2.3 Аналіз залежності енергій скірміонподібного розв'язку рівняння Ландау – Ліфшица в циліндричній феромагнітній нанооболонці від параметрів систем.....	52
Висновки до розділу II.....	76
ВИСНОВКИ.....	77
СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ.....	78

## ВСТУП

За уявленням більшості людей вся сучасна електроніка заснована на використанні електричного струму, тобто спрямованого руху електронів, або переносу заряду. У будь-якій мікросхемі величезна кількість електронів трудиться заради нашого блага. Вони переносять сигнали, зберігають в пам'яті дорогоцінні для нас нулі і одиниці, роблять всю роботу, щоб наше життя було зручним і простим. Але крім переносу заряду електрони володіють ще однією дуже важливою властивістю - спіном. І цю властивість щосили експлуатує спінтроніка.

**Актуальність теми.** Спінтроніка – наука в галузі фізики, яка займається вивченням способів управління та маніпулювання спіновим струмом і являється перспективною на сьогоднішній день. Важливим та перспективним в майбутньому є дослідження спінових хвиль. Різноманітність спостережуваних явищ, пов'язаних зі спіновими хвилями, а також широкий спектр технічних застосувань, . Існує можливість використовувати спінові хвилі для збудження, зберігання та отримання електричних сигналів, та виконання логічних операцій в нанорозмірних пристроях, включаючи фільтри мікрохвильового випромінювання та логічні ворота. Цим питанням присвячена дана робота.

Скірміони в феромагнетиках дуже перспективні як носії бітів інформації в сучасних пристроях спінтроніки. На сьогоднішній день є багато моделей чисельного розрахунку енергії скірміонів їх форми, умов існування, тощо, але ж бракує аналітичних моделей цих об'єктів так, як отримання точних тривимірних розв'язків рівняння Ландау- Ліфшица є надзвичайно складною задачею. Проте точні аналітичні розв'язки рівняння Ландау- Ліфшица є дуже важливими внаслідок того, що вони дозволяють дослідити в найбільш загальному вигляді залежності низки фізичних властивостей скірміона і

скірміонподібних структур від параметрів системи, а також слугують в якості реперних розв'язків «reference solutions» для тестування результатів чисельних розрахунків. Особливо важливими є точні тривимірні розв'язки рівняння Ландау-Ліфшица для тих випадків, коли при одних і тих самих граничних умовах для вектора намагніченості існує більше одного розв'язку рівняння Ландау-Ліфшица (в такому випадку чисельний розрахунок є неефективним, а для рівняння Ландау-Ліфшица, як нелінійного рівняння відсутня теорема єдності розв'язку приведених граничних та початкових умов).

## РОЗДІЛ І СУЧАСНІ УЯВЛЕННЯ ПРО СПІНТРОНІКУ

### 1.1 Історія розвитку спінтроники

У другій половині минулого століття в мікроелектроніці виділилося дві гілки - магнітна електроніка, яка використовує магнітні матеріали і оптоелектроніка, використовує інтегровані оптичні схеми на мініатюрних лазерах і волокнах.

Поступово наукове співтовариство прийшло до усвідомлення того факту, що старі терміни вже не цілком відображають фізичні ідеї, що лежать в основі цих нових напрямків, адже в магнітній електроніці носієм інформації є спін електрона, а в оптоелектроніці - фотони. Так з'явилися два нові терміни: спінтроніка і фотоніка.

Електроніка, як відомо, галузь науки і техніки, яка займається проблемами обробки, передачі і зберігання інформації з використанням електричного заряду електрона. По спінтроніці можна сказати дослівно те ж саме, але на місці заряду електрона буде стояти спін електрона.

Спінтроніка - напрямок наноелектроніки, в якому для подання та обробки інформації поряд з зарядом використовується спін електрона.

Як відомо, спін електрона - це специфічна властивість електрона, властива йому нарівні з масою порядку  $10^{-31}$  кг і зарядом порядку  $10^{-19}$  Кл. Спін – це власний момент імпульсу елементарних частинок, що має квантову природу і не пов'язаний з переміщенням частинки як цілого. При цьому електрони можуть мати дві однакові за величиною проекції спіна, але з різними знаками. У будь-якому енергетичному стані можуть перебувати два електрони, але обов'язково з різними спінами. (Рис. 1.1)

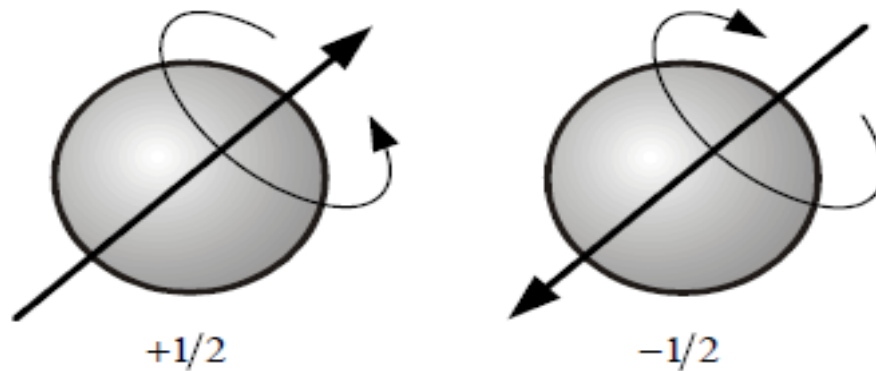


Рис. 1.1 Схематичне зображення електронів з різними спінами, як показано в роботі [1].

В природі є вже готовий переносник двійкової інформації, або 1, або 0, що кодується за напрямком спіна. Спін електрона може перебувати в одному з двох станів - або «спін вгору» (напрямок спіна збігається з напрямком намагніченості магнітного матеріалу), або «спін вниз» (спін і намагніченість різноспрямовані)

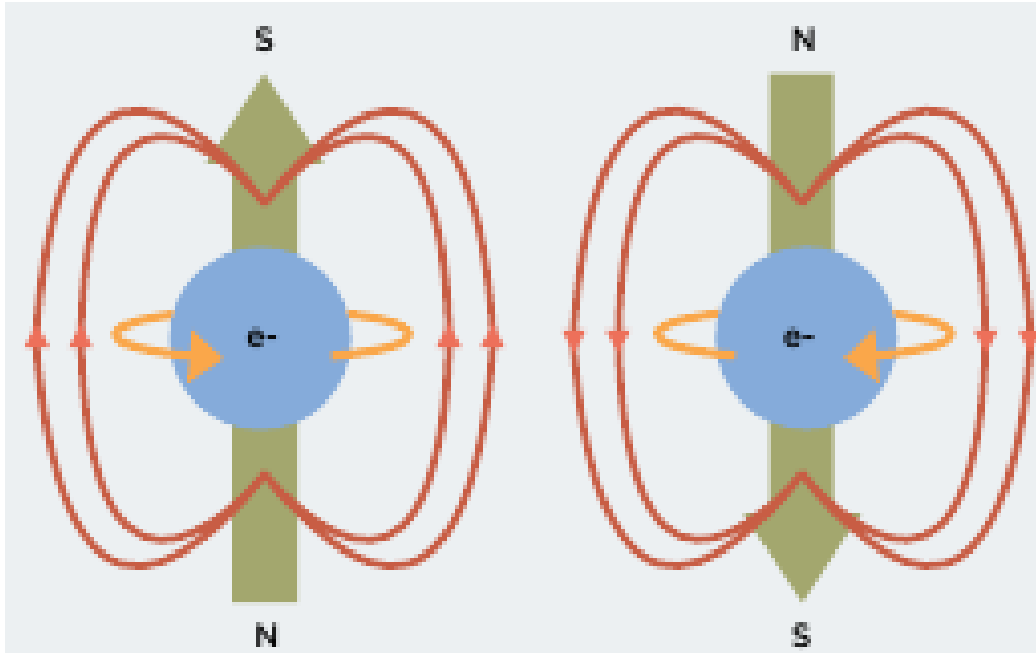


Рис 1.2 Спін електрона вгору-вниз [1].

Спін  $S = \frac{1}{2}$  має дві проекції на вісь квантування:  $S_z = \pm \frac{1}{2}$  ( $\uparrow\downarrow$ ) – основа для бінарного запису інформації.

Обрана проекція спіна електрона зберігається при кімнатній температурі дуже короткий час, який вимірюється в нано-секундах.

Спіном електрона можна маніпулювати в магнітних наноструктурах – гетероструктурах з характерними розмірами, на яких електрони зберігають свій спін. Спін електрона може переходити з одного стану в інший за набагато менший час, ніж потрібно для переміщення заряду по ланцюгу, і з меншим споживанням енергії. Плюс при зміні спіна кінетична енергія носія не змінюється, а отже, майже не виділяється тепло.

У наш час спінтроніка вивчає квантові магнітні явища в структурах нанометрового розміру, магнітні і магнітооптичні взаємодії в металевих і напівпровідникових структурах.

Вважається, що термін спінтроніка (spintronics) з'явився вперше в 1998 р. в спільному проєкті лабораторій Белла і Єльського університету, в якому була сформульована задача створення пристроїв, щоб біти могли кодуватись електронними спінами і при цьому не було витоків, тобто інформація зберігалася в повному обсязі в атомах речовини, як це описується в роботі [1].

В Агентстві перспективних досліджень міністерства оборони США спінтроніку визначають як спін-транспортну електроніку.

Також можна сказати, що спінтроніка – це наука, для якої дуже важливе значення має взаємоузгоджена поведінка заряду і спіна електрона, так як розглядається в роботі [1]:

«Це електроніка на електронних спінах, в якій не заряд електрона, а його спін є передавачем інформації, що формує передумови для створення нового покоління приладів, які об'єднують стандартну мікроелектроніку і спін-залежні ефекти»;

«Це наука про управління електричним струмом в напівпровідниках і гетероструктурах за рахунок зміни орієнтації електронних і ядерних спінів в магнітних і електричних полях»;

«Це нова гілка мікроелектроніки, де спін і заряд електрона являють собою активний елемент для зберігання і передачі інформації, інтегральних та функціональних мікросхем, багатофункціональних магнітооптоелектронних пристроїв».

Термін спінроніка був введений Стюартом Вольфом в 1996. Хоча термін був введений недавно, основи спінроніки були закладені набагато раніше. У 1936 році Мотт вводить концепцію спін-поляризованих струмів, так як описується в роботі [2]. Він також передбачив, що в феромагнетиках струми повинні бути поляризовані.

Причина такої поляризації не зводиться до намагнічування в магнітному полі, а пояснюються за допомогою моделі Стонера. У магнітному матеріалі енергія електронів залежить від орієнтації спінів: спіни з орієнтацією проти поля мають велику енергію. В результаті енергетичні діаграми для протилежних орієнтацій спіна розщеплюються. І ті електрони, у яких на рівні Фермі виявляється велика щільність станів, виявляються в більшості (majority electrons, на відміну від інших званих minority). Далеко не завжди в більшості виявляються ті електрони, у яких спін спрямований вздовж поля, а також всередині даного поля.

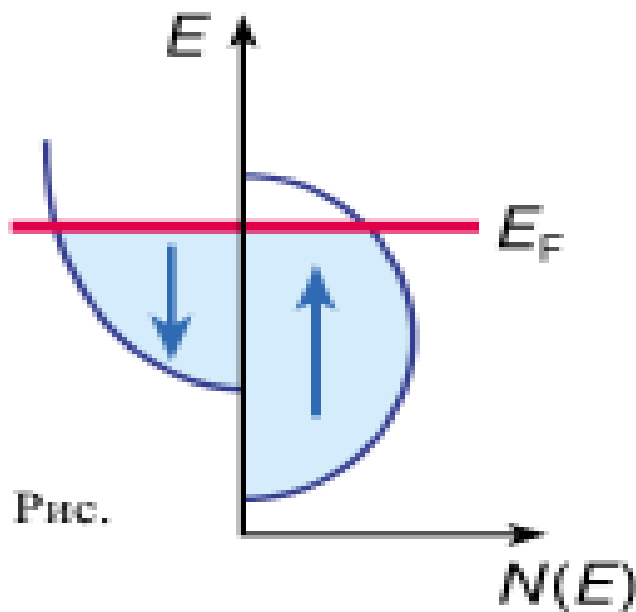


Рис. 1.2 Напрямок спіна, як показано в роботі [6].

У 1970-х роках ці прогнози були підтверджені експериментально, до початку 90-х формується концепція спінових поляризаторів – ферромагнітні шари інтерпретуються як свого роду поляризатори, за допомогою яких можна поляризувати струм по спіну і за допомогою яких можна визначати поляризацію – тобто використовувати в якості аналізаторів. Тому, часто спінтроніку визначають як розділ наноелектроніки, що використовує транспортні властивості спін-поляризованих електронів, так описується в роботі [3].

Однак, якщо поглянути на проблему більш загально, то спінтронікою можна назвати область наноелектроніки, основним завданням якої є перетворення інформації в формі намагніченості в електричну напругу і зворотна задача – управління спінами за допомогою електричного поля.

Ще з часів античності людство цікавив взаємозв'язок електрики і магнетизму – одне з найдавніших питань природознавства. Нижче в хронологічному порядку представлені різні рішення цієї задачі. Вперше її вдалося вирішити Хансу Християну Ерстеду в 1820 році. Магніти на сьогоднішній день є основним засобом створення магнітних полів як в

надпотужних установках, так і в голівках магнітної пам'яті.

Зворотне завдання, – перетворення постійного магнітного поля в напругу, – було вирішене Едвіном Гербертом Холлом в 1880р.. Датчики Холла використовуються для детектування магнітних полів, проте в пристроях спінтроніки використовують не ефект Холла, а відкритий сторіччям пізніше Альбертом Фертом і Пітером Грюнбергом ефект гігантського магнітоопору (GMR, Giant magnetoresistance) (Нобелівська премія з фізики 2007) [4]. Технології, засновані на роботах Грюнберга і Ферта, зараз широко використовуються в обчислювальній техніці, їх використання дозволило значно збільшити щільність інформації на магнітних носіях[4]. Використання ефекту GMR допомагає зробити зчитувальні головки жорстких дисків дуже чутливими до навіть невеликих змін магнітного поля, а саме, ці невеликі зміни кодують дані на магнітному носії. В експериментальній фізиці відкриття також широко застосовується: в сучасних лабораторіях застосовують спінополяризовані електрони, спіни яких орієнтовані в одну сторону[5].

Незабаром з'ясувалося, що принципи, які лежать в основі спінтроніки, можуть поширюватися на все різноманіття магнітних структур навколо нас, що призвело до появи скірміоніки, яка вивчає екзотичні кругові магнітні утворення, що називаються "skyrmion". Скірміон - це математична модель, яка описує поведінку баріонів (сімейство елементарних частинок, зокрема протони та нейтрони). Скірміон привернув увагу дослідників в останнє десятиліття здатністю створювати компактні осередки пам'яті за допомогою цієї квазічастинки. Надзвичайно малі розміри скірміонів (близько 1-2 нанометрів)[6], низьке споживання енергії та достатня стабільність для практичного застосування можуть призвести до створення на їх основі ультракомпактних пристроїв зберігання даних. Найменші магнітні вихрові структури скірміони обіцяють бути основою магнітної пам'яті майбутнього. Це

топологічно стійкі магнітні утворення, які можуть бути збуджені в магнітних плівках і потім зчитати їх стан. У цьому випадку запис і зчитування відбуваються із застосуванням спінових струмів - шляхом переносу моменту обертання спіна електрона. Це означає, що запис і читання можна проводити з надзвичайно низькими струмами. Також підтримка магнітного вихору не потребує постійного живлення, що веде до економічно незалежної пам'яті.

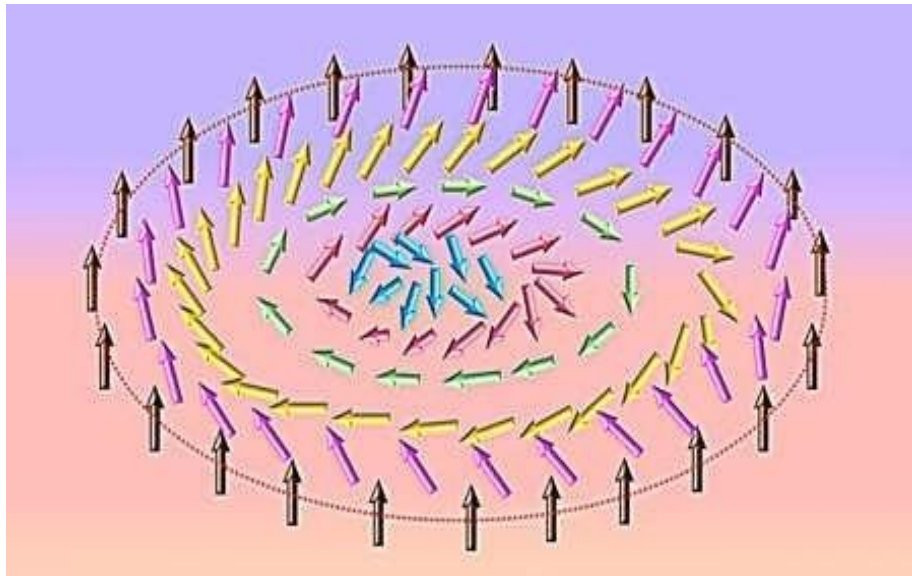


Рис 1.3 Магнітний вихор, тобто скірміон[7].

Отже, можна сказати що спітроніка – це новий напрямок в мікроелектроніці, що базується на використанні такої квантово-механічної характеристики електронів, як спін. Пристрої, створені на її основі, обіцяють вирішити і існуючі, і очікувані в найближчому майбутньому проблеми традиційної мікроелектроніки: енергонезалежність, зменшення енергоспоживання, збільшення щільності логічних елементів і швидкості обробки даних.

## 1.2 Переваги досягнень спінтроніки у сучасних інформаційних технологіях

Переваги спінтроніки:

- Низький рівень споживання енергії при роботі (відсутність принципових обмежень на енергію перемикавання – в електронному транзисторі ця енергія порядку кТ на електрон) і енергонезалежність при зберіганні інформації: можливість зберігати інформацію без споживання енергії.

- Висока швидкодія – визначається, в кінцевому рахунку, спіновою прецесією. Висока швидкодія пристроїв спінтроніки може також досягатися за рахунок того, що тут не обов'язково переміщати в просторі заряд і пов'язану з ним масу. Для перемикавання стану досить лише розвернути спін в зворотному напрямку.

Пам'ять, яка ніколи не забуває, універсальна пам'ять, пам'ять майбутнього – ця пам'ять отримала назву MRAM (магніто-резистивна оперативна пам'ять).

У сучасних інформаційних технологіях оброблення інформації й обчислення проводяться в інтегральних мікроелектронних схемах, а за збереження інформації відповідає магнітний диск. Для того, щоб вилучити в порівнянні більш повільні канали введення або виведення інформації, тобто збільшити швидкодію, було б перспективним застосувати магнітні напівпровідники і це дало б змогу розміщувати процесор і пам'ять на одному чипі. Тобто, магнітні напівпровідники являються ще однією перевагою і вони могли б, як сприймати, так і підсилювати оптичні сигнали, які зробили б можливим прямо перетворювати інформацію без процесу детектування в електронний вид з оптичного.

Зараз запропоновано досить багато спінтронних приладів, а деякі з них, такі, як датчики магнітного поля, широко використовуються. Він містить два ферромагнітні шари, між якими знаходиться шар неферромагнітного металу, найчастіше Cu. На один з ферромагнітних шарів наноситься магнітножорсткий шар з великою анізотропією (зазвичай антиферромагнетиком). Завдяки обмінній взаємодії на кордоні перерізу фіксується орієнтація намагніченості цього шару, а орієнтація другого ферромагнітного шару може змінюватися за допомогою слабкого зовнішнього магнітного поля  $H$ . Зміна орієнтації намагніченості шару внаслідок GMR (Giant magnetoresistance) ефекту призводить до зміни опору датчика для постійного струму, поточного через середній шар. Ці датчики дозволяють проводити поле записувати з амплітудою  $\sim 10^{-8} - 10^{-2}$  Тл за час в одиниці наносекунд [8]. Датчики GMR широко використовуються для зчитування інформації, записаної на магнітних дисках, що призвело до збільшення інформаційної ємності дисків на кілька порядків за останні  $\sim 20$  років. Крім того, датчики GMR широко застосовуються в автомобільній та авіаційній промисловості, системах безпеки тощо.

Створення інших приладів, які можуть використовуватися як елементи обчислювальних машин, є справою найближчого майбутнього. Спінтроніка є найбільш перспективна платформа для створення системи обробки базових елементів та зберігання наступної інформації покоління. Пристрої спінтроніки дозволяють реалізувати більш високу щільність записів даних, буде більш висока швидкість обробки інформації, вища радіаційна стійкість, зменшене споживання електроенергії, ніж в наявних електронних пристроях на основі напівпровідників.

Отже, незважаючи на великий обсяг досліджень та істотні досягнення у розумінні та використанні спін-залежних явищ у твердих тілах, розвиток цього напрямку фізики твердого тіла продовжується у зростаючому темпі.



### 1.2.1 Пам'ять MRAM та її переваги

Використовуючи явище магнітного тунельного переходу (MTJ - Magnetic Tunnel Junction)[9], вчені створили ще один спіновий клапан, у якому знерухомий та вільний магнітні шари розділені шаром тонкого ізолятора. Електричний струм не протікає через ізолятор. Однак якщо ізолюючий шар досить тонкий, то електрони здатні проникати через бар'єр. Цей квантово-механічний ефект називається тунелюванням. Великий магнітоопір у магнітних тунельних з'єднаннях спостерігався при кімнатній температурі в 1995 р. декількома дослідниками. Магнітний тунельний перехід вже застосовується в зчитувальних голівках новітнього покоління.

Ще одна революційна технологія заснована на ефекті MTJ–магнітнорезистивна оперативна пам'ять MRAM (Magnetoresistive Random Access Memory)[10], яка зберігає інформацію за допомогою магнітних моментів, а не електричних зарядів. Це швидкодіюча пам'ять з низьким електроспоживанням, високою швидкодією і високою щільністю запису. Оскільки робота MRAM залежить від намагніченості феромагнітного шару, то її вміст не зникає при відключенні електроживлення.

Коли комп'ютери, телефони, електронні помічники, плеєри MP3 вимагають все більше пам'яті для зберігання різної інформації, розрахунку та управління комплексом системи, ця пам'ять здатна робити все і замінити все. Більш того, вона усуває недоліки своїх конкурентів, не втрачаючи їх достоїнств.

Так, пам'ять «Флеш» має широкі можливості, але повільно записує. Динамічна оперативна пам'ять (DRAM, Dynamic random access memory) і статична оперативна пам'ять з довільним доступом (SRAM, static random access memory) – швидкісні види пам'яті, які втрачають інформацію при зупинці споживання енергії[11]. На відміну від попередньо перелічених

варіантів, MRAM не тільки швидше (в 1000 разів, ніж «Флеш»), але і без витоків інформації. Це дозволяє отримати величезну економію енергії, оскільки апаратура перестає мати потребу в постійному споживанні енергії для підтримки інформації. Немає проблем і з мініатюризацією компонентів, оскільки вони будуть зменшуватися в міру технологічного прогресу.

Дана пам'ять – авангард нової технології, готової показати, що вона краще, ніж нинішня електроніка. Як вказує назва, ця технологія ґрунтується на електронах, вірніше – на їх електричних зарядах. Напруга, ємність, щільність струму лежать в основі роботи пам'яті, транзисторів і інших логічних портів, складових пам'яті інформаційних машин [5].

MRAM використовує додаткову властивість електронів – спін. У будь-якому матеріалі заряджені частинки не тільки рухаються по майже прямій траєкторії, але і обертаються навколо своєї осі. Це обертання створює невелике намагнічування, назване тим же терміном.

Спін вводить додаткову можливість управління електронами і відкриває нові перспективи. Інформацію містить не тільки заряд: посередником стає спін з численними перевагами. Електроніка змінює обличчя і стає спінтронікою.

Спінтроніка оберігає від витоків інформації. Дуже важко утримувати електрони в полоні електричного конденсатора. Не потрібна енергія для його підтримки, є вигреш в швидкості. Електронам важко переміщуватися в матеріалі, а спіни змінюють напрямок дуже швидко. До MRAM спін використовувався в голівках зчитування жорстких дисків. Саме за допомогою спінів здатність зберігання комп'ютерів за десять років зростає з кількох гігабайтів до сотень.

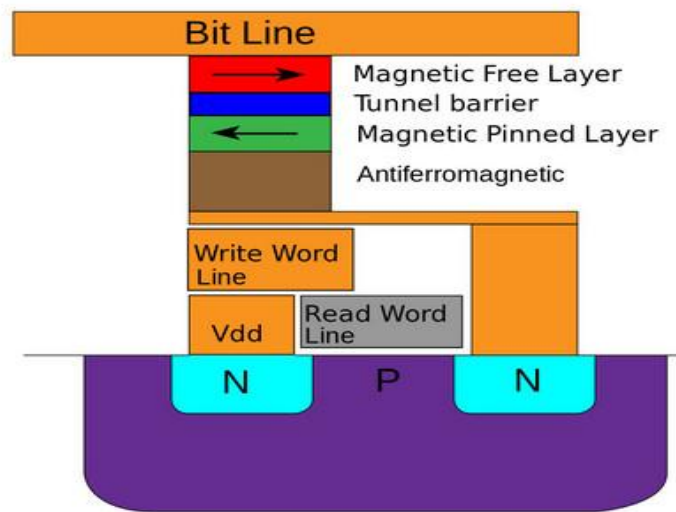


Рис 1.4 Схема осередку MRAM[12].

Основою цього прогресу є «гігантський магнітоопір» (GMR, Giant magnetoresistance), відкритий в 1988 році одночасно французом Альбером Фером і німцем Петером Грюнбергом. З 1997 року IBM (International Business Machines) – американська компанія використовує його для збільшення чутливості зчитуючих головок дисків, одночасно зменшуючи розміри невеликих магнітних доменів, що зберігають інформацію. GMR підкорило навіть автомобільні датчики (стабілізація, гальмування ...) [12].

Гігантський магнітоопір (Giant magnetoresistance, скор. GMR) – квантово-механічний ефект, що спостерігається в тонких плівках, що складаються з чергуючих феромагнітних і немагнітних шарів[13]. В такій системі ефект проявляється в істотному зменшенні електричного опору в залежності від взаємної орієнтації намагніченості сусідніх магнітних шарів. Ця взаємна орієнтація може бути змінена, наприклад, додаванням зовнішнього магнітного поля. В основі ефекту лежить спин-залежне розсіювання електронів.

GMR-пристрої використовують почергові надтонкі шари магнітного і немагнітного матеріалів (в IBM таку структуру називають спіновим клапаном). Найпростіший варіант включає в себе три шари: два феромагнітних шара розділених немагнітним провідником. Роль

немагнітного провідника виконує рутеній. Цей метал є парамагнетиком, але коли товщина Ru-шару складає всього кілька атомних шарів, через нього здійснюється обмінний зв'язок між феромагнетиками. Цей обмінний зв'язок в залежності від товщини Ru-шару може бути як феромагнітним, так і антиферомагнітним. В останньому випадку, який і використовують на практиці, намагніченості феромагнітних шарів орієнтовані протилежно. Головне джерело GMR-ефекту – так зване спин залежне розсіяння.

Відомо, причина існування електричного опору металів – розсіювання електронів провідності. При протіканні електричного струму електрони провідності розсіюються по-різному в залежності від орієнтації їх спіна по відношенню до намагніченості шару. Про це явище і говорять як про спин-залежне розсіяння.

Природу його можна пояснити так: в феромагнітних 3d-металах через наявність феромагнітної обмінної взаємодії енергія електронів з різною орієнтацією спінів різна - енергія електронів зі спіном «нагору» (орієнтованим уздовж намагніченості феромагнетика) нижча, ніж у електронів зі спіном «вниз». В результаті щільність станів поблизу рівня Фермі для електронів з різними напрямками спінів також різниться.

В теорії гігантський магнітоопір важко застосовується на практиці. Занадто велике споживання електроенергії, а пам'ять робить помилки, тому Самсунг і IBM припинили розробки. Але дочірнє підприємство Мотороли, Фріскейл, продовжувало розробляти перше покоління MRAM. Завдяки новим матеріалам, фірма випускає на ринок пам'ять в 4 гігабайти.

У Франції тривають роботи з випуску другого покоління цієї пам'яті, яка піде від проблем енергоспоживання і неточності, завдяки новому «чарівному» ефекту, названому «передача спінів». Відпадає необхідність в магнітному полі для повороту намагніченості – цим займаються самі

електрони. Проходячи через намагнічений матеріал, потік електронів з одним і тим же спіном втрачає напрямок північ (або південь) і перевертає своє намагнічування – цей ефект вже близький до втілення. У грудні «Соні» вже володіла прототипом в 4 гігабайти на основі передачі спіна. Ця пам'ять вимагає в 30 разів менше енергії, ніж перший MRAM.

Для магніторезистивної пам'яті MRAM найбільш болючим місцем є низька щільність запису. Осередки зберігання MRAM досить великі, і розроблена технологія не робить їх меншими. Все-таки прогрес на місці не стоїть. Провідний і не єдиний комерційний постачальник мікросхем STT-MRAM (spin-torque transfer - STT) Everspin оголосив про успішний запуск виробничої лінії мікросхем STT-MRAM з чотирикратною ємністю[14]. У STT-MRAM пристроях для запису бітів використовується технологія перенесення спинового моменту електронами з певним станом спіна (так звані поляризовані електрони). До сих пір Everspin масово випускала 256-Мбіт чіпи з нормами 40 нм (на американському заводі NXP і на лініях GlobalFoundries). Новою продукцією стали 28-нм мікросхеми STT-MRAM ємністю 1 Гбіт. Пробні запуски нової пілотної лінії, ймовірно, на заводі GlobalFoundries, почалися в кінці минулого року, а до масового виробництва лінії перейдуть вже в третьому кварталі[14].

У спінтроніці події слідує одна за іншою. Одночасно з розвитком з'являються нові вироби і робляться нові відкриття. Уже вдалося повернути спін навколо осі зі швидкістю кілька мільярдів обертів на секунду. Ця велика швидкість може перетворитися в прозаїчний генератор хвиль надвисокої частоти малого розміру, що підходить для мобільних телефонів, які використовують гаму частот.

Деякі ефекти вже існують, але не знаходять застосування, як наприклад, «спіновий ефект Холла». У звичайному ефекті Холла електрони рухаються в одній площині по квазі-прямій лінії і відхиляються вправо або

вліво в залежності від магнітного поля, перпендикулярного площині руху. У разі спінів відхилення залежить від напрямку спіна: ті, що спрямовані «вгору», рухаються праворуч, інші - ліворуч. Це відбувається без прикладення зовнішнього магнітного поля. Описаний в 1971 році ефект спостерігався вперше тільки в 2004-му каліфорнійської командою Девіда Аушалома.

До цього часу науковці досліджують спін-транзистор, який швидший і менш потребує енергії, ніж його класичний попередник. Потрібно прикласти більше зусиль для того щоб втілити дану ідею, тому що треба об'єднати несумісні матеріали: напівпровідники та феромагнітні матеріали.

Перші, матеріали електроніки та основні компоненти нинішніх транзисторів, чудово керують електронами і створюють квантовий ефект. Другі, при контрольованому намагнічуванні, мають перевагу зберігати інформацію постійно і перезаписувати. Комбінації обох матеріалів обіцяють ідеальну інтеграцію.

На жаль, єдиний матеріал, одночасно феромагнітний і напівпровідний, сплав арсеніду галію і магнію, що володіє ефектом при  $100^{\circ}\text{C}$  нижче нуля і ця температура низька для використання. Тому зараз шукають бажаного об'єднання двох граней електрона.

Справжня спінтроніка почне застосовуватися в сучасному світі, коли науковці повністю відмовляться від заряду електрона, а будуть використовувати тільки його спін. Тоді не стане проблем з матеріалами і ніяких проблем з ефектом Джоуля, який нагріває коло через швидкий рух частинок. У 2005 році вже вдалося «відокремити» спін від заряду і передавати магнітний сигнал, не чіпаючи з місця електронів, але знадобиться не один десяток років, щоб спінові хвилі повністю замінили старі електричні напруги.

### 1.2.2 Доменні структури в феромагнетиках

Феромагнетики - це особливий клас магнітів, здатний мати намагнічування за відсутності зовнішнього магнітного поля (спонтанне намагнічування), також намагнічуватись навіть у слабких магнітних полях. Зауважимо, що феромагнетизм притаманний речовинам лише у кристалічному стані. Найвідоміші приклади феромагнетиків - це залізо, кобальт, сполуки хрому та інші. Феромагнетики - це високомагнітні речовини, і їх намагніченість залежить від напруженості зовнішнього поля нелінійно і досягає насичення. З огляду на вище зазначене, магнітна сприйнятливість ( $\chi$ ) та магнітна проникність ( $\mu$ ) є постійними для феромагнетиків. Тому можна записати, що:  $\vec{J} = \chi \vec{H}$  і  $\vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H}$ , однак  $\mu$  і  $\chi$  розглядаються як функції напруженості поля. Зі збільшенням напруженості поля ці функції також отримують зростання, проходять через максимум, а в сильному полі (коли насичення досягається)  $\mu$  прямує до одиниці і  $\chi$  до нуля. Максимальне значення  $\mu$  досягає сотень тисяч одиниць для більшості феромагнетиків при нормальних температурних умовах.

Монокристали феромагнетиків є анізотропними щодо їх магнітних властивостей. Кожен монокристал містить один або кілька напрямків, уздовж яких особливо важлива магнітна сприйнятливість. Існують також напрямки, в яких кристал погано намагнічений. Зауважимо, що якщо речовина, яка є феромагнетиком, складається з невеликих полікристалів, то вона є ізотропною.

У ході експерименту Ейнштейн показав, що феромагнетизм викликається спінами електронів. Як було зазначено вище, феромагнетики мають спонтанне намагнічування за відсутності зовнішнього поля, але під впливом внутрішніх причин спіни електронів починають вибудовуватися в одному загальному напрямку. Слід зазначити, що енергія не є оптимальною

для того, щоб феромагнетик повністю магнетизував. Вперше теорія властивостей феромагнетиків була сформульована Вайссом у 1907 р. Поверхневий погляд може зауважити, що в цій теорії існує суперечність між спонтанним намагніченням і тим, що навіть коли температура нижче точки Кюрі, деякі феромагнетики не намагнічені, хоча існують постійні магніти. Ця суперечність була усунена гіпотезою Вейса [15]. Магнетично феромагнетики потрапляють у безліч малих макроскопічних областей при температурі нижче точки Кюрі, і кожен спонтанно намагнічується. Ці області мають назву домени. Домени спрямовуються випадковим чином у звичайних умовах. Тіло, як правило, не намагнічене. Включення зовнішнього поля спричиняє зростання домен-орієнтованих доменів за рахунок домен-орієнтованих доменів; відбувається зміщення меж домену. Якщо поле слабке, це зміщення є оборотним. Якщо поле є сильним, домени змінюють орієнтацію на весь домен; процес стає незворотним, виникає явище гістерезису та залишкової намагніченості. Такий доменний «розпад» є енергетично вигідним. Коли феромагнетик розпадається на домени і з'являються домени різної спрямованості, магнітне поле, породжене феромагнетиком, послаблюється; пов'язаної енергії стає менше. Енергія обміну електронами не змінюється для всіх електронів, крім електронів на кордонах областей (так звана поверхнева енергія). Її зростання обумовлене різною орієнтацією спінів електронів сусідніх доменів. Фрагментація домену закінчується, коли досягається мінімальна кількість магнітної та обмінної енергії. Мінімальна умова також визначає розмір доменів. Доменна структура феромагнетиків має емпіричні дані.

Підсумовуючи вище сказане: щоб мінімізувати енергію магнітного поля, оптимально створити умови для зменшення розміру домену. У цьому випадку виникає перешкода, виражена неминучість витрат енергії на формування меж між доменами, оскільки намагніченість на різних сторонах кордону має різну спрямованість. Межа має певну товщину, в межах її намагніченості

поступово змінюється напрямок від орієнтації в одній області до орієнтації в сусідній.

Доменні стінки класифікуються за особливостями обертання вектора намагніченості:

коли перпендикулярний (відносно стінки) компонент вектора намагніченості в процесі обертання незмінний, то це стінка Блоха (у стінці Блоха обертання відбувається в площині, паралельній стінці); коли напрямок вектора намагніченості змінюється зі зміною перпендикулярної складової, це стінка Нееля[15].

## Висновки до розділу I

В даній роботі описана та проаналізована нова галузь в науці, яка називається спінтроніка. Проаналізувавши, літературу в якій описані дослідження стрімкого розвитку спінтроніки та її вплив на сучасні технології, можна дійти до висновку, що роботи в області спінтроніки та створення пристроїв на ефектах перенесення спіна тільки розгортаються.

Очікується, що вони будуть мати перевагу перед відомими пристроями по перенесенню зарядів за такими параметрами, як розміри, швидкодія, дисипація енергії. Спіни електронів, локалізованих в квантових точках, можна використовувати, як носії інформаційного сигналу для обчислювальних пристроїв нового покоління.

У найближчі роки спінтроніка буде розвиватися за трьома головними напрямками: квантовий комп'ютер, спін-польовий транзистор і спінова пам'ять. Цілком можливо, що через 10-15 років нова область науки – спінтроніка буде так само важлива, як сьогодні важлива електроніка

## РОЗДІЛ II ЕНЕРГІЯ СКІРМІОНПОДІБНОГО РОЗ'ЯЗКУ РІВНЯ ЛАНДАУ- ЛІФШИЦА В ФЕРОМАГНЕТИКУ

Феромагнетики — сильно магнітні речовини, здатні намагнічуватися навіть у слабких магнітних полях. Деякі метали (залізо, нікель, кобальт, гадоліній, манган, хром та їхні сплави) з великою магнітною проникністю, проявляють явище гістерезису. Розрізняють м'які феромагнетики з малою коерцитивною силою та тверді феромагнетики з великою коерцитивною силою. Феромагнетики використовуються для виробництва постійних магнітів, осердь електромагнітів та трансформаторів.

Найтиповішою властивістю є нелінійний характер процесу намагніченості. Феромагнетики сильно втягуються в область сильнішого магнітного поля. Магнітна сприйнятливість феромагнетиків позитивна і значно більше одиниці.

При температурі менше за температуру Кюрі феромагнетики характеризуються спонтанною намагніченістю, яка сильно змінюється під впливом зовнішніх магнітних полів.

Властивості феромагнетиків пов'язані з наявністю у їхній структурі груп атомів, які називаються доменами, котрі вже мають узгоджену орієнтацію магнітних полів узгоджених орієнтацією спінів сусідніх атомів. Орієнтація полів самих доменів, яка відбувається при намагнічуванні, створює власне поле речовини значно сильніше, ніж у інших магнетиків, у яких відбувається лише часткова орієнтація спінів сусідніх атомів. Орієнтація намагніченості доменів значною мірою зберігається і після припинення дії зовнішнього поля. Така суть залишкового намагнічування. Проте інтенсивний тепловий рух може зруйнувати цю орієнтацію, тому за високої температури феромагнітні речовини втрачають свої магнітні властивості.

Феромагнетизм виникає в речовинах, у яких як наслідок обмінної

взаємодії, спінам електронів вигідно орієнтуватися паралельно. В результаті такої узгодженої орієнтації спінів виникає макроскопічний магнітний момент, який може існувати навіть без зовнішнього магнітного поля. При температурі, яка перевищує певну критичну (температура Кюрі), зумовлене тепловим рухом хаотичне розупорядкування бере гору над обмінною взаємодією й феромагнетик переходить в парамагнітний стан.

Завдяки спін-орбітальній взаємодії орієнтація спінів у неізотропних середовищах не є довільною. Кристали феромагнітних речовин характеризуються так званими осями легкого намагніченість - кристалографічними напрямками, в яких орієнтується магнітний момент феромагнетика при відсутності зовнішнього магнітного поля. У слабкому магнітному полі, якщо його напрямок не збігається з віссю легкого намагнічування, індукований магнітний момент може не збігатися з напрямком магнітного поля. В сильних магнітних полях вплив осі легкого намагнічування є наближено малим.

При температурі, нижчій за температуру Кюрі, магнітні моменти електронів сусідніх атомів у феромагнетик у орієнтовані паралельно, проте зазвичай ця орієнтація не поширюється на весь об'єкт дослідження. Феромагнетик розбивається на окремі області однорідної намагніченості, так звані магнітні домени. Магнітні домени можуть орієнтуватися довільним чином, тому для феромагнетика існує розмагнічений стан. У цьому стані, незважаючи на локальну намагніченість, тіло з феромагнітної речовини не є магнітом. Окрім розмагніченого стану, феромагнітне тіло може перебувати в намагніченому стані, коли переважна кількість доменів має однакову орієнтацію магнітних моментів. Намагнічений стан може зберігатися, коли зовнішнє магнітне поле відсутнє.

## 2.1 Методика отримання тривимірних аналітичних розв'язків рівняння Ландау – Ліфшица в феромагнетику

Розглянемо феромагнетик, для якого вектор намагніченості заданий як:

$$\vec{M} = M_0 \cdot (\sin \theta \cdot \cos \varphi \cdot \vec{e}_x + \sin \theta \cdot \sin \varphi \cdot \vec{e}_y + \cos \theta \cdot \vec{e}_z), \quad (2.1)$$

де  $\theta$ ,  $\varphi$  – полярний і азимутальний кути вектора намагніченості відповідно,  $\vec{e}_x$ ,  $\vec{e}_y$ ,  $\vec{e}_z$  – орти декартової системи координат,  $M_0$  – модуль вектора намагніченості феромагнетику.

Густина енергії ізотропного феромагнетику та феромагнетику з одноосною магнітною анізотропією в зовнішньому змінному магнітному полі  $H(t)$  має вигляд :

$$w = \frac{1}{2} \alpha M_0^2 \left[ (\nabla \theta)^2 + \sin^2 \theta \cdot (\nabla \varphi)^2 \right] + \frac{1}{2} |\beta| \operatorname{sgn}(\beta) M_0^2 \sin^2 \theta + \\ - M_0 \cdot H(t) \cdot \cos \theta, \quad (2.2)$$

де  $\alpha$  – обмінна постійна,  $\beta$  – постійна одноосьової анізотропії. Якщо  $\beta = 0$ , то вираз (2.2) описує ізотропний феромагнетик.

Використовуючи густину енергії в вигляді (2.2), можна одержати рівняння Ландау – Ліфшица для цього випадку в вигляді:

$$\left\{ \begin{array}{l} l_0^2 \cdot \Delta \theta - \left( \operatorname{sgn}(\beta) + l_0^2 \cdot (\nabla \varphi)^2 \right) \sin \theta \cdot \cos \theta - h(t) \cdot \sin \theta + \frac{1}{\omega} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} \cdot \sin \theta - \\ - \frac{\alpha_G}{\omega_0} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial t} = 0 \\ l_0^2 \cdot \operatorname{div}(\sin^2 \theta \cdot \nabla \varphi) - \frac{1}{\omega} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial t} \cdot \sin \theta - \frac{\alpha_G}{\omega} \cdot \sin^2 \theta \cdot \frac{\partial \theta}{\partial t} = 0 \end{array} \right. , \quad (2.3)$$

де

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}, \quad l_0 = \begin{cases} \sqrt{\frac{\alpha}{|\beta|}}, & \beta \neq 0 \\ 1, & \beta = 0 \end{cases},$$

$$\omega = \begin{cases} \frac{|\beta| \mu_0 M_0}{\hbar}, & \beta \neq 0 \\ \frac{\alpha \mu_0 M_0}{\hbar}, & \beta = 0 \end{cases}, \quad h(t) = \begin{cases} \frac{H(t)}{\beta \cdot M_0}, & \beta \neq 0 \\ \frac{H(t)}{\alpha \cdot M_0}, & \beta = 0 \end{cases},$$

$\alpha_G$  - параметр релаксації Гільберта.

Для  $\alpha_G = 0$  відомо ряд точних розв'язків рівнянь Ландау-Ліфшица. Проте, нові більш широкі класи розв'язків можна вивести наступним методом. Підставимо функції  $\theta$ ,  $\varphi$  в рівняння Ландау-Ліфшица (2.3) в наступній параметризації :

$$\begin{cases} \operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right) = H[P(X, Y, Z)] \\ \varphi = Q(X, Y, Z) + \omega \cdot \int h(t) dt \end{cases}, \quad (2.4)$$

де

$$X = \frac{x}{l_0}, \quad Y = \frac{y}{l_0}, \quad Z = \frac{z}{l_0},$$

$H$ ,  $P$ ,  $Q$  - довільні функції.

Розглянемо феромагнетик з одноосною магнітною анізотропією. Рівняння Ландау-Ліфшица для вектора намагніченості, записані в параметризації сферичної системи координат в статичному випадку, мають вигляд:

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\sin^2 \theta \nabla \varphi) = 0 \\ \Delta \theta - \left[ (\nabla \varphi)^2 - \frac{1}{l_0^2} \operatorname{sgn}(\beta) \right] \sin \theta \cos \theta = 0 \end{cases} \quad (2.5)$$

Знайдемо функції  $\theta$ ,  $\varphi$  у вигляді:

$$\begin{cases} \theta = 2 \operatorname{arctg}[H(P(x, y, z))] \\ \varphi = Q(x, y, z) \end{cases} \quad (2.6)$$

Зв'язок між тригонометричними функціями, які входять в систему рівнянь Ландау-Ліфшица, та функцією  $H(P)$  виразимо за наступними формулами:

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{1 - H^2}{1 + H^2} \\ \sin \theta = \pm \frac{2H}{1 + H^2} \end{cases}, \quad (2.7)$$

$$\begin{cases} \frac{4H^2}{(1+H^2)^2} \Delta Q + \frac{8H(1-H^2)H'}{(1+H^2)^3} \cdot \nabla P \nabla Q = 0 \\ \frac{2H'}{1+H^2} \Delta P + 2 \left( \frac{H''}{1+H^2} - \frac{2HH'^2}{(1+H^2)^2} \right) (\nabla P)^2 + \\ + \left\{ \frac{1}{l_0^2} \operatorname{sgn}(\beta) - (\nabla Q)^2 \right\} \frac{2H(1-H^2)}{(1+H^2)^2} = 0 \end{cases}, \quad (2.6)$$

введемо наступні співвідношення:

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla P \nabla Q = 0 \\ (\nabla P)^2 = 0 \\ \Delta P = 0 \\ \Delta Q = 0 \\ (\nabla P)^2 = (\nabla Q)^2 - \frac{1}{l_0^2} \operatorname{sgn}(\beta) \end{array} \right. . \quad (2.7)$$

Для функції  $H$  розіб'ємо систему (2.6) та отримаємо:

$$\frac{H''}{1+H^2} - \frac{2HH'^2}{(1+H^2)^2} = \frac{H(1-H^2)}{(1+H^2)^2}. \quad (2.8)$$

Введемо заміну змінних для диференціального рівняння та функції  $H$

$$H' = V = \frac{dH}{dP}, \quad (2.9)$$

$$H'' = \frac{d^2H}{dP^2} = \frac{dV}{dP} = \frac{dV}{dH} \frac{dH}{dP} = \frac{dV}{dH} V. \quad (2.10)$$

Зробимо наступні перетворення:

$$\begin{aligned} \frac{2V}{1+H^2} \frac{dV}{dH} &= 0 \\ \frac{\int 2V dV}{\int (1+H^2) dH} &= 0 \quad . \quad (2.11) \\ 2 \int V dV \int \frac{d(1+H^2)}{\frac{1}{2}(1+H^2)} &= 0 \end{aligned}$$

Проінтегрувавши вираз (2.11) отримаємо:

$$\begin{aligned} 2 \frac{V^2}{2} \{ \ln(1+H^2) + \ln C_1 \} &= 0 \\ V^2 \ln(1+H^2) + \ln C_1 &= 0 \end{aligned} \quad (2.12)$$

Введемо заміну, що  $V^2 = G$ , та запишемо вираз (2.12) в наступному вигляді:

$$\begin{aligned} G \ln(1 + H^2) + \ln C_1 &= 0 \\ G \ln(1 + H^2) &= -\ln C_1 \end{aligned} \quad (2.13)$$

Для визначеності візьмемо знак «+» в правій частині виразів (2.15), та припустимо що функція  $\theta$  є додатною, оскільки полярний кут  $\theta$  визначається в межах  $[0, \pi]$ .

Частинна похідна дорівнює

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \omega_H - v \frac{\partial Q}{\partial z}. \quad (2.14)$$

Відповідно до параметризації (3), будемо шукати автономний розв'язок рівнянь Ландау-Ліфшица, що описує рівномірний рух нелінійного статичного розв'язку рівнянь Ландау-Ліфшица зі швидкістю  $v$  вздовж осі  $OZ$ :

$$z = z - vt. \quad (2.15)$$

Введемо позначення

$$X = \frac{x}{l_0}, \quad Y = \frac{y}{l_0}, \quad Z = \frac{z}{l_0}. \quad (2.16)$$

Зокрема, ця система рівнянь може бути розв'язана, якщо:

$$H''(1 + H^2) - 2HH'' - H(1 - H^2) = 0, \quad (2.17)$$

і функції  $P$ ,  $Q$  задовольняють наступним умовам

$$\left(\frac{\partial P}{\partial X}\right)^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial Y}\right)^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial Z}\right)^2 = \operatorname{sgn}(\beta) + \left(\frac{\partial Q}{\partial X}\right)^2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial Y}\right)^2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial Z}\right)^2, \quad (2.18)$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial Z^2} = 0, \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial Z^2} = 0, \quad (2.20)$$

$$\frac{\partial P}{\partial X} \frac{\partial Q}{\partial X} + \frac{\partial P}{\partial Y} \frac{\partial Q}{\partial Y} + \frac{\partial P}{\partial Z} \frac{\partial Q}{\partial Z} = 0. \quad (2.21)$$

Рівняння для  $H$  має наступний загальний розв'язок:

$$P(X, Y, Z) = \int \frac{\pm dH}{\sqrt{H^2 + C_1(1 + H^2)^2}}.$$

Якщо  $-\frac{1}{4} < C_1 < 0$ , то останнє рівняння можна перетворити до виразу [275]:

$$\begin{cases} \operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{b}{\operatorname{dn}\left(c\sqrt{|C_1|} \cdot P(X, Y, Z), k_1\right)}, \\ \varphi = Q(X, Y, Z) + \omega \cdot \int h(t) dt \end{cases} \quad (2.22)$$

де

$$c = \sqrt{\frac{1 + 2C_1 + \sqrt{1 + 4C_1}}{2|C_1|}}, \quad b = \sqrt{\frac{1 + 2C_1 - \sqrt{1 + 4C_1}}{2|C_1|}}, \quad (2.23)$$

$0 < k_1 \leq 1$  – модуль еліптичної функції,

$$k_1 = \sqrt{\frac{2\sqrt{1 + 4C_1}}{1 + 2C_1 + \sqrt{1 + 4C_1}}}.$$

Для випадку  $C_1 > 0$  було отримано наступний розв'язок :

$$\begin{cases} \operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 - \operatorname{sn}\left(\frac{P(X, Y, Z)}{k_2}, k_2\right)}{1 + \operatorname{sn}\left(\frac{P(X, Y, Z)}{k_2}, k_2\right)}}, \\ \varphi = Q(X, Y, Z) + \omega \cdot \int h(t) dt \end{cases} \quad (2.24)$$

де

$$k_2 = \frac{1}{\sqrt{1+4C_1}},$$

$0 < k_2 \leq 1$  - абсолютне значення еліптичної функції,

Наприклад, функції  $P$  та  $Q$  можна вибрати в наступному вигляді:

$$\begin{cases} P = \frac{\pm z}{l_0} \cdot \Theta(\beta) + \sum_i n_i \cdot \ln \left( \frac{|\vec{r} - \vec{r}_{0_i}|}{l_0} \right) + \frac{2}{\pi} \cdot k \cdot K(k) \cdot \sum_i N_i \cdot \alpha_i + C_1 \\ Q = \frac{\pm z}{l_0} \cdot \Theta(-\beta) - \frac{2}{\pi} \cdot k \cdot K(k) \cdot \sum_i N_i \cdot \ln \left( \frac{|\vec{r} - \vec{r}_{0_i}|}{l_0} \right) + \sum_i \alpha_i \cdot n_i + C_2 \end{cases}, \quad (2.25)$$

де

$$\Theta(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases},$$

$$K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1 - k^2 \cdot \sin^2 x}},$$

$$\alpha_i = \operatorname{arctg} \left[ \frac{y_i - y_{0_i}}{x_i - x_{0_i}} \right].$$

Двовимірна частина функцій  $P$  та  $Q$  задовольняє умовам Коші-Рімана.

Розглянемо випадок, для якого  $H = 0$ ,  $\beta = 0$  та

$$\begin{cases} P(X, Y, Z) = n \ln \left( \frac{r}{\rho} \right), \\ Q(X, Y, Z) = \alpha n + C_2 \end{cases} \quad (2.26)$$

Статична частина розв'язку (2.24) при  $h(t) = 0$ , зокрема, може описувати розподіл вектору намагніченості (або антиферомагнетизму) всередині кільцевого циліндричного феромагнетика або антиферомагнетика з

довільними ізотропними граничними умовами на його внутрішній та зовнішній поверхнях.

## 2.2 Енергія скіріміонподібного розв'язку рівняння Ландау – Ліфшица в феромагнітній циліндричній нанооболонці

Будемо знаходити енергію феромагнетика, для цього запишемо густину енергії феромагнетику:

$$w = \frac{1}{2} \alpha M_0^2 \left[ (\nabla \theta)^2 + \sin^2 \theta (\nabla \varphi)^2 \right] + \frac{1}{2} |\beta| \operatorname{sgn}(\beta) M_0^2 \sin^2 \theta - M_0 H(t) \cos \theta \quad (2.27)$$

Запишемо тригонометричні функції:

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \pm \frac{2H}{1+H^2} \\ \cos \theta &= \frac{1-H^2}{1+H^2} \\ \sin^2 \theta &= \frac{4H^2}{(1+H^2)^2} \end{aligned} \quad (2.28)$$

Зробимо наступні перетворення для отримання розв'язку рівняння (2.27)

$$\begin{cases} (\nabla \theta)^2 = \left( \frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \theta}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \theta}{\partial z} \right)^2 \\ (\nabla \varphi)^2 = \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \end{cases} \quad (2.29)$$

Введемо заміну, що

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial x_i} &= \frac{2H'}{1+H^2} \frac{\partial P}{\partial x_i} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} &= \frac{\partial Q}{\partial x_i} \end{aligned} \quad (2.30)$$

Тоді для отримання розв'язку рівнянь з системи (2.27) введемо заміну,

що

$$\left\{ \begin{aligned} (\nabla P)^2 &= \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial z}\right)^2 \\ (\nabla Q)^2 &= \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial z}\right)^2. \end{aligned} \right. \quad (2.31)$$

Перетворення (2.28) – (2.31) підставимо в рівняння (2.27) та запишемо в такому вигляді:

$$w = \frac{1}{2} \alpha M_0^2 \left\{ \frac{(2H')^2}{(1+H^2)^2} (\nabla P)^2 + \frac{4H^2}{(1+H^2)^2} (\nabla Q)^2 \right\} + \frac{1}{2} |\beta| \operatorname{sgn}(\beta) \cdot \\ \cdot M_0^2 \frac{(2H)^2}{(1+H^2)^2} - M_0 H(t) \frac{1-H^2}{1+H^2} \quad (2.32)$$

Щоб отримати спрощений вираз виразу (2.32) введемо наступні заміни:

$$\left\{ \begin{aligned} H &= \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \\ \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} &= \frac{b}{\operatorname{dn}(c\sqrt{|c_1|}P, k_1)}. \end{aligned} \right. \quad (2.33)$$

Знайдемо похідну від функції  $H$ :

$$H' = \frac{dH}{dP} = \frac{-b \left( -k^2 \operatorname{sn}(c\sqrt{|c_1|}P) \operatorname{cn}(c\sqrt{|c_1|}P) \right)}{\operatorname{dn}^2(c\sqrt{|c_1|}P)}. \quad (2.34)$$

Підставимо значення виразу (2.34) та запишемо вираз (2.27) в наступному вигляді:

$$\begin{aligned}
w = & \frac{1}{2} \alpha M_0^2 \left\{ \frac{4b^2 \left( k^2 \operatorname{sn}(c\sqrt{|c_1|}P) \operatorname{cn}(c\sqrt{|c_1|}P) \right)^2 (\nabla P)^2}{\left( 1 + \frac{b^2}{dn^2(c\sqrt{|c_1|}P)} \right)^2 dn^4(c\sqrt{|c_1|}P)} \right\} + \frac{1}{2} |\beta| \operatorname{sgn} \beta M_0^2 \cdot \\
& \frac{4b^2}{\left( 1 + \frac{b^2}{dn^2(c\sqrt{|c_1|}P)} \right)^2} + \frac{4b^2}{\left( 1 + \frac{b^2}{dn^2(c\sqrt{|c_1|}P)} \right)^2} (\nabla Q)^2 - \\
& - M_0 H(t) \left( \frac{1 - \frac{b^2}{dn^2(c\sqrt{|c_1|}P)}}{1 + \frac{b^2}{dn^2(c\sqrt{|c_1|}P)}} \right)
\end{aligned} \tag{2.35}$$

Зведемо до спільного знаменника вираз (2.35):

$$\begin{aligned}
w = & \frac{1}{2} \alpha M_0^2 \left\{ \frac{4b^2 \left( k^2 \operatorname{sn}(c\sqrt{|c_1|}P) \operatorname{cn}(c\sqrt{|c_1|}P) \right)^2 (\nabla P)^2 + dn^2(c\sqrt{|c_1|}P) (\nabla Q)^2}{\left( 1 + \frac{b^2}{dn^2(c\sqrt{|c_1|}P)} \right)^2 dn^4(c\sqrt{|c_1|}P)} \right\} + \\
& + \frac{4 \frac{|\beta|}{2} \operatorname{sgn} \beta M_0^2 b^2 - M_0 H \left( 1 - \frac{b^2}{dn^2(c\sqrt{|c_1|}P)} \right)^2 dn^2(c\sqrt{|c_1|}P)}{\left( 1 + \frac{b^2}{dn^2(c\sqrt{|c_1|}P)} \right)^2 dn^2(c\sqrt{|c_1|}P)}.
\end{aligned} \tag{2.36}$$

Перетворюємо вираз (2.36) до наступного вигляду:

$$w = \frac{2\alpha M_0^2 b^2 \left\{ \left[ \left( k^4 \operatorname{sn}^2 \left( c\sqrt{|c_1|P} \right) \operatorname{cn}^2 \left( c\sqrt{|c_1|P} \right) \right)^2 (\nabla P)^2 + \operatorname{dn}^2 \left( c\sqrt{|c_1|P} \right) (\nabla Q)^2 \right] \right\}}{\left( \operatorname{dn}^2 \left( c\sqrt{|c_1|P} \right) + b^2 \right)^2} +$$

$$+ \frac{2|\beta| \operatorname{sgn} \beta M_0^2 b^2 - M_0 H \left( \operatorname{dn} \left( c\sqrt{|c_1|P} \right) - \frac{b^2}{\operatorname{dn} \left( c\sqrt{|c_1|P} \right)} \right)^2}{\left( \operatorname{dn} \left( c\sqrt{|c_1|P} \right) + \frac{b^2}{\operatorname{dn} \left( c\sqrt{|c_1|P} \right)} \right)}, \quad (2.37)$$

$$w = \frac{2b^2 M_0^2}{\left( b^2 + \operatorname{dn}^2 \left( c\sqrt{|c_1|P} \right) \right)^2} \left\{ \alpha \left[ k^4 \operatorname{sn}^2 \left( c\sqrt{|c_1|P} \right) \operatorname{cn}^2 \left( c\sqrt{|c_1|P} \right) (\nabla P)^2 + \right. \right.$$

$$\left. + \operatorname{dn}^2 \left( c\sqrt{|c_1|P} \right) (\nabla Q)^2 + |\beta| \operatorname{sgn} \beta \operatorname{dn}^2 \left( c\sqrt{|c_1|P} \right) - \frac{H}{2b^2 M_0} \left( \operatorname{dn}^2 \left( c\sqrt{|c_1|P} \right) - b^2 \right)^2 \right\}.$$

З виразу (2.37) отримуємо спрощений вираз у вигляді:

$$w = \frac{2b^2 M_0^2}{\alpha \left( b^2 + \operatorname{dn}^2 \left( c\sqrt{|c_1|P} \right) \right)^2} \left\{ k^4 \operatorname{sn}^2 \left( c\sqrt{|c_1|P} \right) \operatorname{cn}^2 \left( c\sqrt{|c_1|P} \right) (\nabla P)^2 + \right.$$

$$\left. + \operatorname{dn}^2 \left( c\sqrt{|c_1|P} \right) (\nabla Q)^2 + \frac{\operatorname{sgn}(\beta)}{\delta^2} \operatorname{dn}^2 \left( c\sqrt{|c_1|P} \right) - \frac{H}{2\alpha b^2 M_0} \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \left( \operatorname{dn}^2 \left( c\sqrt{|c_1|P} \right) - b^2 \right)^2 \right\} \quad (2.38)$$

Нехай  $\delta = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$ , тоді вираз (2.38) набуває такого вигляду:

$$w = \frac{2b^2 M_0^2}{\alpha \left( b^2 + dn^2 \left( c\sqrt{|c_1|} P \right) \right)^2} \left\{ k^4 sn^2 \left( c\sqrt{|c_1|} P \right) cn^2 \left( c\sqrt{|c_1|} P \right) (\nabla P)^2 + \frac{\operatorname{sgn}(\beta)}{\delta^2} dn^2 \left( c\sqrt{|c_1|} P \right) - \frac{H}{2\alpha b^2 M_0} \left( dn^2 \left( c\sqrt{|c_1|} P \right) - b^2 \right)^2 \right\}. \quad (2.39)$$

Введемо наступні перетворення

$$\begin{cases} (\nabla Q)^2 = \frac{1}{r^2} \\ (\nabla P)^2 = \frac{1}{r^2} + 1 \\ U = c\sqrt{|c_1|} P = c\sqrt{c_1} \left\{ \ln \left( \frac{r}{r_0} \right) + z \right\} \\ Q = \alpha \\ P = \ln \left( \frac{r}{r_0} \right) + z \end{cases}. \quad (2.40)$$

Підставимо заміни (2.40) у вираз (2.39)

$$w = \frac{2b^2 M_0^2}{\alpha \left( b^2 + dn^2 \left( c\sqrt{c_1} \left\{ \ln \left( \frac{r}{r_0} \right) + z \right\} \right) \right)^2} \left\{ k^4 sn^2 \left( c\sqrt{c_1} \left\{ \ln \left( \frac{r}{r_0} \right) + z \right\} \right) \cdot cn^2 \left( c\sqrt{c_1} \left\{ \ln \left( \frac{r}{r_0} \right) + z \right\} \right) \cdot \left( \frac{1}{r^2} + 1 \right) + \frac{\operatorname{sgn}(\beta)}{\delta^2} dn^2 \left( c\sqrt{c_1} \left\{ \ln \left( \frac{r}{r_0} \right) + z \right\} \right) - \frac{H}{2\alpha b^2 M_0} \left( dn^2 \left( c\sqrt{c_1} \left\{ \ln \left( \frac{r}{r_0} \right) + z \right\} \right) - b^2 \right)^2 \right\}. \quad (2.41)$$

Тоді запишемо енергію феромагнетика в наступному вигляді:

$$\begin{aligned}
W = & \int_0^{L_z} dz \int_0^{2\pi} d\alpha \int_{R_1}^{R_2} r dr \left[ \frac{2b^2 M_0^2}{\alpha \left( b^2 + dn^2 \left( c\sqrt{c_1} \left\{ \ln \left( \frac{r}{r_0} \right) + z \right\} \right) \right)^2} \left\{ k^4 sn^2 \left( c\sqrt{c_1} \left\{ \ln \left( \frac{r}{r_0} \right) + z \right\} \right) \right. \right. \\
& \cdot cn^2 \left( c\sqrt{c_1} \left\{ \ln \left( \frac{r}{r_0} \right) + z \right\} \right) \left( \frac{1}{r^2} + 1 \right) + \frac{\operatorname{sgn}(\beta)}{\delta^2} dn^2 \left( c\sqrt{c_1} \left\{ \ln \left( \frac{r}{r_0} \right) + z \right\} \right) \left. \right\} - \\
& \left. \left. - \frac{H}{2\alpha b^2 M_0} \left( dn^2 \left( c\sqrt{c_1} \left\{ \ln \left( \frac{r}{r_0} \right) + z \right\} - b^2 \right) \right)^2 \right] \right] \quad (2.42)
\end{aligned}$$

Введемо заміну, що  $H(t)=0$ , тоді вираз (2.42) запишемо в такому вигляді:

$$\begin{aligned}
W = & \frac{4\pi b^2 M_0^2}{\delta^2 \alpha} \int_0^{L_z} dz \int_{R_1}^{R_2} r dr \left[ \frac{1}{\left( b^2 + dn^2 \left( c\sqrt{c_1} \left\{ \ln \left( \frac{r}{r_0} \right) + z \right\} \right) \right)^2} \left\{ k^4 sn^2 \cdot \right. \right. \\
& \cdot \left. \left. c\sqrt{c_1} \left\{ \ln \left( \frac{r}{r_0} \right) + z \right\} \right\} cn^2 \left( c\sqrt{c_1} \left\{ \ln \left( \frac{r}{r_0} \right) + z \right\} \right) \left( \frac{1}{r^2} + 1 \right) + \operatorname{sgn}(\beta) \cdot \right. \\
& \left. \left. \cdot dn^2 \left( c\sqrt{c_1} \left\{ \ln \left( \frac{r}{r_0} \right) + z \right\} \right) \right\} \right] \quad (2.43)
\end{aligned}$$

З формули (2.33) отримаємо:

$$\sin \theta_0 = \frac{2b}{dn \left( c\sqrt{|c_1|} P, k \right) \left( 1 + \frac{b^2}{dn^2 \left( c\sqrt{|c_1|} P, k \right)} \right)}. \quad (2.44)$$

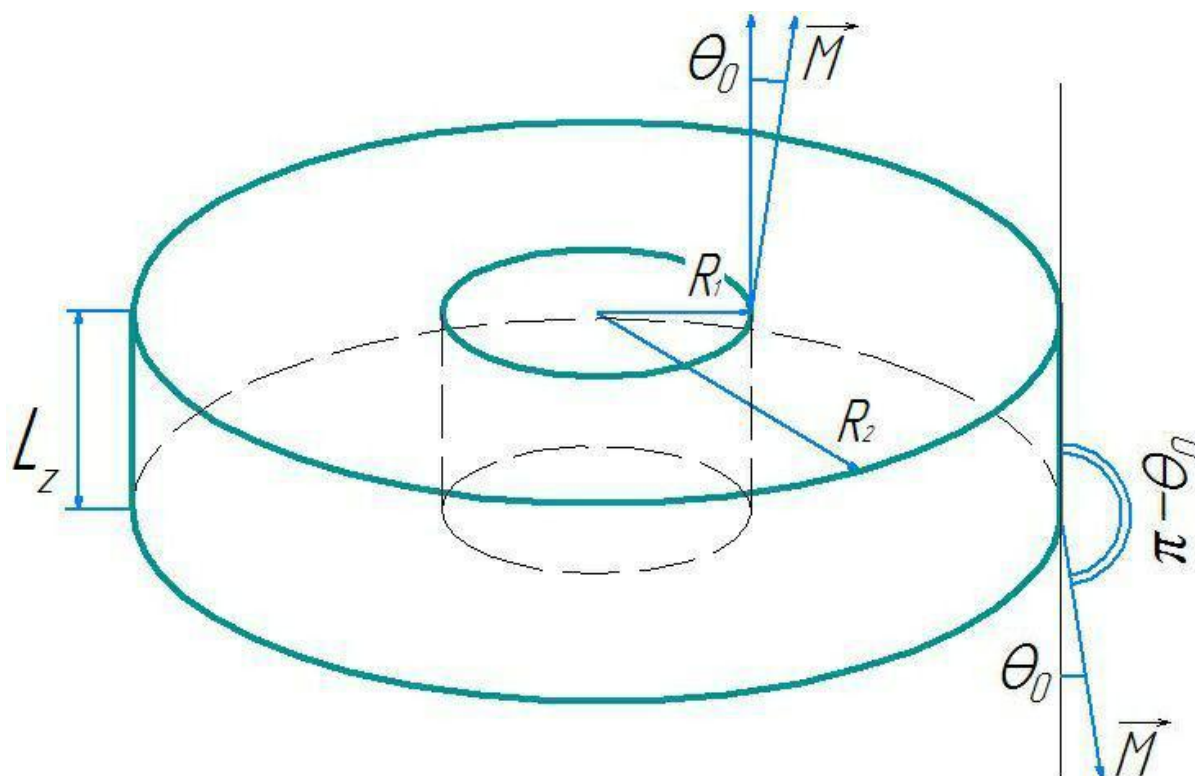


Рис. 2.1 Ферромагнітна циліндрична нанооболонка, граничні умови для вектора намагніченості задано через кут  $\theta_0$ .

З виразу (2.44) після нескладних перетворень отримаємо:

$$\sin \theta_0 = \frac{2bdn(c\sqrt{|c_1|}P, k)}{b^2 + dn^2(c\sqrt{|c_1|}P, k)}. \quad (2.45)$$

Приведемо вираз (2.45) до спільного знаменника та отримуємо наступний вигляд:

$$2bdn(c\sqrt{|c_1|}P, k) = b^2 \sin \theta_0 + dn^2(c\sqrt{|c_1|}P, k) \sin \theta_0. \quad (2.46)$$

Введемо позначення, що  $dn = V$ , в результаті вираз (2.46) набуває вигляду:

$$V^2 \sin \theta_0 - 2bV + b^2 \sin \theta_0 = 0. \quad (2.47)$$

Знайдемо корені рівняння (2.47):

$$V_{1,2} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - b^2 \sin^2 \theta_0}}{\sin \theta_0} = b \pm b \frac{\cos \theta_0}{\sin \theta_0} = b \pm b \operatorname{ctg} \theta_0, \quad (2.48)$$

і враховуючи підстановку (2.33) отримаємо:

$$\left( \operatorname{dn} \left( c \sqrt{|c_1|} P, k \right) \right)^2 = (b \pm b \operatorname{ctg} \theta_0)^2. \quad (2.49)$$

Вираз (2.49) перетворимо, як

$$1 - k^2 \operatorname{sn}^2 \left( c \sqrt{|c_1|} P, k \right) = (b \pm b \operatorname{ctg} \theta_0)^2. \quad (2.50)$$

Звідки виражаємо:

$$\operatorname{sn}^2 \left( c \sqrt{|c_1|} P, k \right) = \frac{1 - (b \pm b \operatorname{ctg} \theta_0)^2}{k^2}, \quad (2.51)$$

тоді вираз спрощується до наступного вигляду:

$$\operatorname{sn} \left( c \sqrt{|c_1|} P, k \right) = \frac{\sqrt{1 - (b \pm b \operatorname{ctg} \theta_0)^2}}{k}. \quad (2.52)$$

Враховуючи визначення еліптичної функції  $\operatorname{sn}$  можна отримати з виразу (2.52):

$$\operatorname{sn} \left( \operatorname{am} \left( c \sqrt{|c_1|} P, k \right) \right) = \frac{\sqrt{1 - (b \pm b \operatorname{ctg} \theta_0)^2}}{k}. \quad (2.53)$$

З виразу (2.53) отримаємо амплітуду:

$$\operatorname{am}(u) = \operatorname{arcsin} \left\{ \frac{\sqrt{1 - (b \pm b \operatorname{ctg} \theta_0)^2}}{k} \right\}. \quad (2.54)$$

Введемо позначення:

$$\begin{cases} \operatorname{am}(u, k) = \varphi(u) \\ \varphi(u) = \operatorname{arcsin} \left\{ \frac{\sqrt{1 - (b \pm b \operatorname{ctg} \theta_0)^2}}{k} \right\} \end{cases}. \quad (2.55)$$

Звідки функцію  $u(\varphi, k)$  можна представити, як:

$$\left\{ \begin{array}{l} u(\varphi, k) = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \\ u(\varphi, k) = \int_0^{\arcsin\left\{\frac{\sqrt{1 - (b \pm bctg\theta_0)^2}}{k}\right\}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \end{array} \right. . \quad (2.56)$$

Запишемо позначення

$$P = \frac{1}{c\sqrt{|c_1|}} \int_0^{\arcsin\left\{\frac{\sqrt{1 - (b \pm bctg\theta_0)^2}}{k}\right\}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} . \quad (2.57)$$

Враховуючи формулу (2.25), запишемо функцію  $P = \ln \frac{r}{r_0}$  в циліндрично

–симетричному вигляді з огляду на те, що граничні умови на межі циліндричної феромагнітної нанооболонки мають циліндрично-симетричний вигляд.

Введемо позначення:

$$\left\{ \begin{array}{l} I_1 = \int_0^{\arcsin\left\{\frac{\sqrt{1 - (b \pm bctg\theta_0)^2}}{k}\right\}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \\ I_2 = \int_0^{\arcsin\left\{\frac{\sqrt{1 - (b \pm bctg(\pi - \theta_0))^2}}{k}\right\}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \end{array} \right. . \quad (2.58)$$

Тоді

$$\ln \frac{r}{r_0} = \frac{I_1}{c\sqrt{|c_1|}} .$$

Аналогічно враховуючи формулу (2.25), запишемо функцію  $P = \ln \frac{r}{r_0}$  в

циліндрично-симетричному вигляді з огляду на те що граничні умови на межі циліндричної феромагнітної нанооболонки мають циліндрично-симетричний вигляд.

Введемо позначення:

$$\begin{cases} R_1 = r_0 e^{\frac{I_1}{c\sqrt{\epsilon_1}}} \\ R_2 = r_0 e^{\frac{I_2}{c\sqrt{\epsilon_1}}} \end{cases} . \quad (2.59)$$

Тому з виразу (2.59) видно що  $R_1$  та  $R_2$  пов'язують константу  $C_1$  та радіуси внутрішньої та зовнішньої циліндричної нанооболонки.  $R_1$  та  $R_2$  з граничними умовами для вектора намагніченості, які записані через  $\theta_0$  (див. Рис. 2.1).

### 2.3 Аналіз залежності енергій скірміонподібного розв'язку рівняння Ландау – Ліфшица в циліндричній феромагнітній нанооболонці від параметрів систем.

Запишемо компоненти вектора намагніченості через кутові змінні:

$$\begin{cases} m_x = \sin \theta \cos \varphi \\ m_y = \sin \theta \sin \varphi , \\ m_z = \cos \theta \end{cases} \quad (2.60)$$

де  $m_x, m_y, m_z$  – декартові координати,  $\theta$  – полярний кут для  $\vec{m}$ ,  $\varphi$  – азимутальний кут  $\vec{m}$ .

Розглянемо векторне поле для вектора намагніченості скірміона в феромагнетику в формі циліндричної нанооболонки (Рис.2.2)

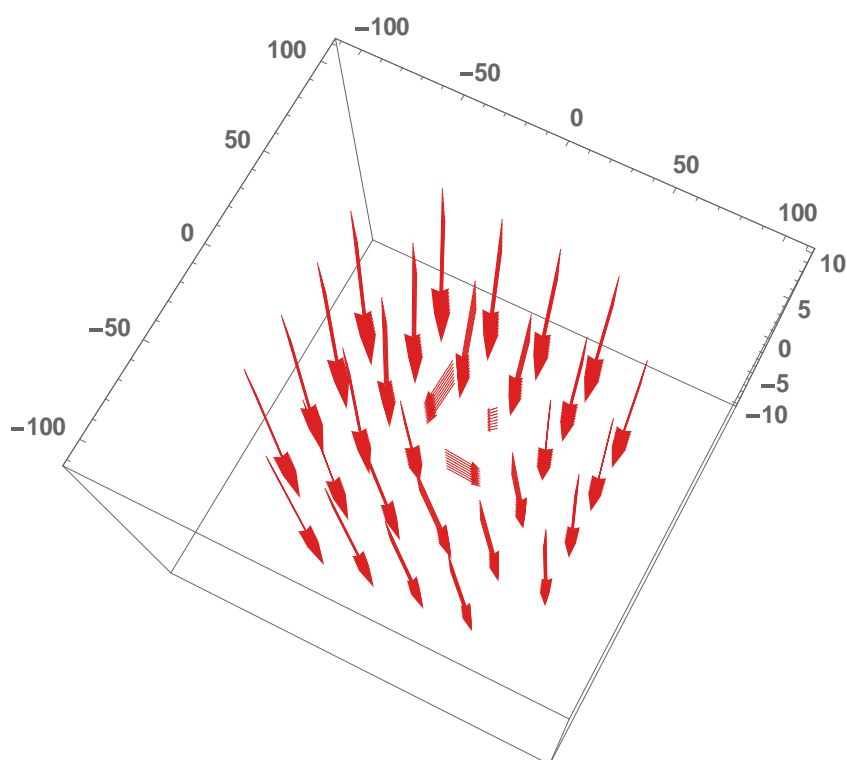


Рис.2.2 Векторне поле для вектора  $\vec{m}$  для скірміона в феромагнетику в

формі циліндричної нанооболонки з радіусами  $R_1 = 0,1l_0$  та  $R_2 = 100l_0$  за формулою (2.60), з урахуванням наступних параметрів системи  $\alpha = 10^{-12} \text{ см}^2$ ,  $\beta = 0$ ,  $l_0 = 5 \text{ нм}$ .

Розглянемо залежність проекції вектора намагніченості для скірміона на вісь  $OZ$  від відстані до центру циліндричної феромагнітної нанооболонки (Рис.2.3)

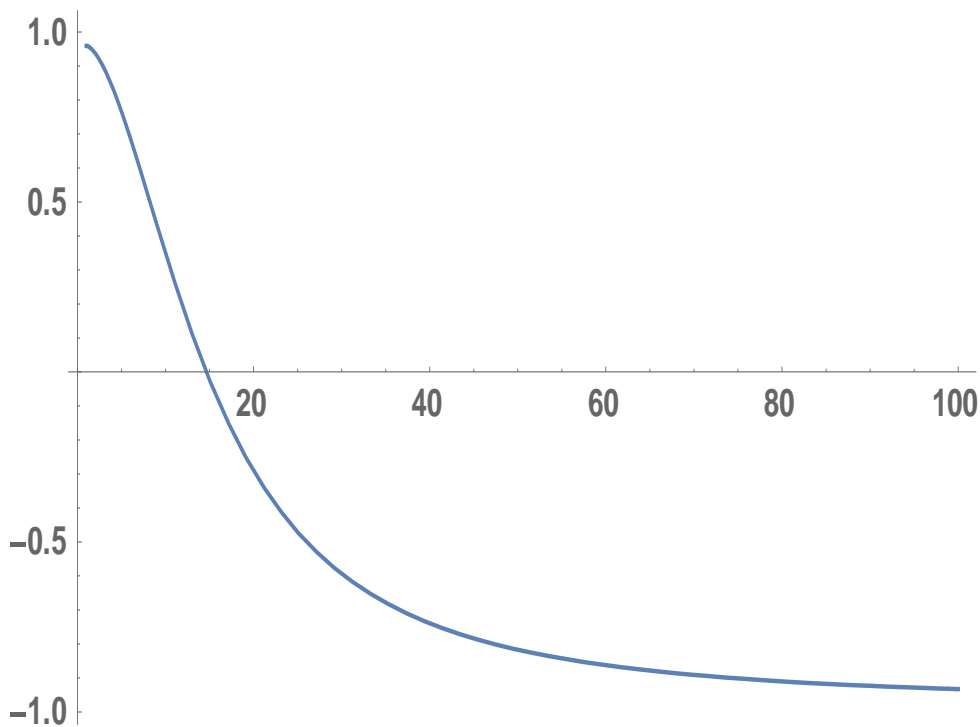


Рис. 2.3 Залежність проекції вектора  $\vec{m}$  для скірміона на вісь  $OZ$  від відстані до центру циліндричної феромагнітної нанооболонки в одиницях внутрішнього радіусу  $R_1 = 0,1l_0$  та  $R_2 = 100l_0$  нанооболонки.

Розглянемо залежність проекції вектора намагніченості для скірміона на вісь  $XOY$  від відстані до центру циліндричної феромагнітної нанооболонки (Рис.2.4)

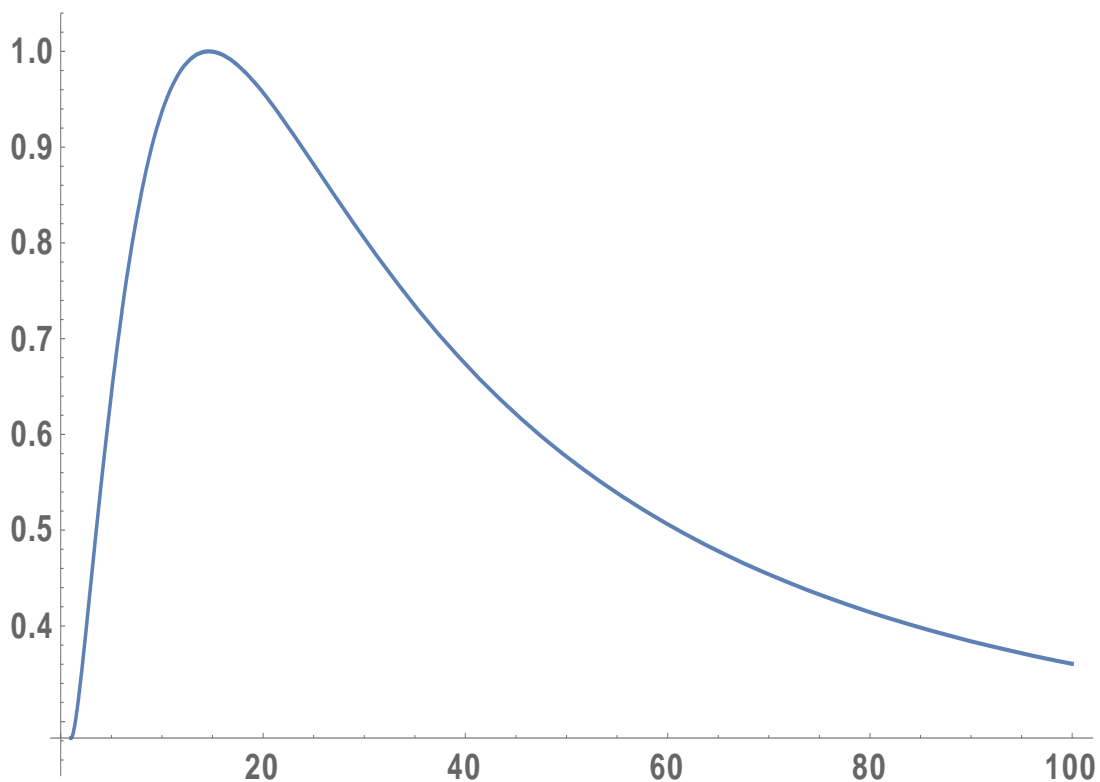


Рис.2.4 Залежність проекції вектора  $\vec{m}$  для скіріміона на вісь  $XOY$  від відстані до центру циліндричної феромагнітної нанооболонки в одиницях внутрішнього радіусу  $R_1 = 0,1l_0$  та  $R_2 = 100l_0$  нанооболонки.

Розглянемо залежність проекції вектора намагніченості для двох скіріміонів на вісь  $XOY$  від відстані до центру циліндричної феромагнітної нанооболонки в одиницях внутрішнього радіусу  $R_1 = 0,1$  і  $R_2 = 10000$  (Рис.2.5).

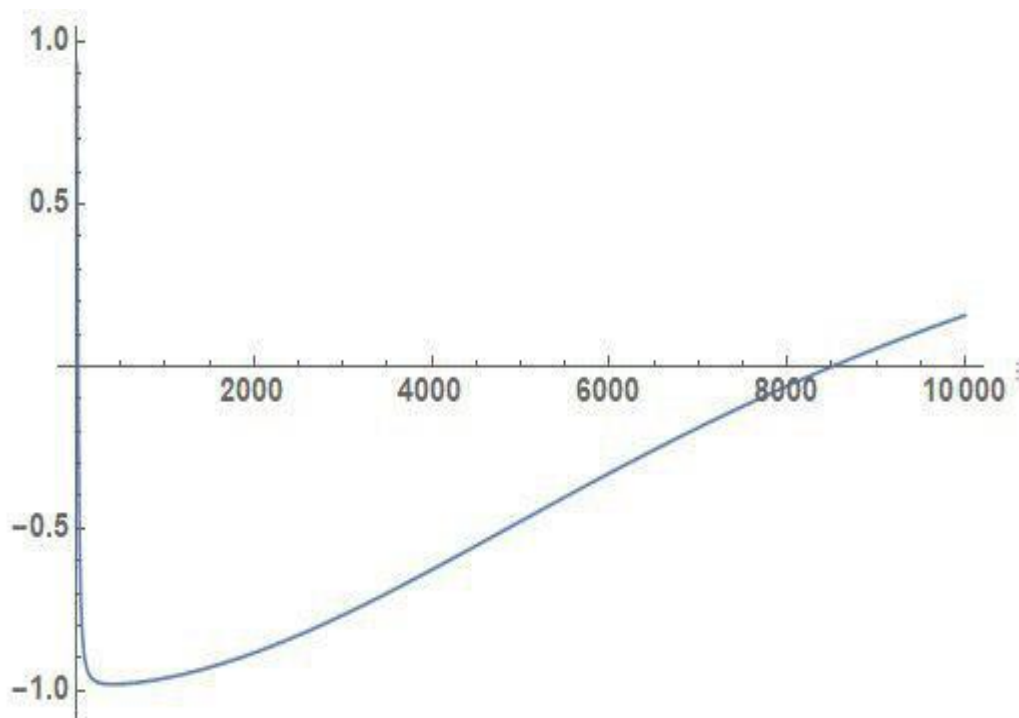


Рис.2.5 залежність проекції вектора намагніченості для двох скірміонів на вісь  $XOY$  від відстані до центру циліндричної феромагнітної нанооболонки в одиницях внутрішнього радіусу  $R_1 = 0,1$  і  $R_2 = 10000$ .

Розглянемо схематичне зображення проекції вектора намагніченості на площину  $XOY$  для скірміона (Рис.2.6)

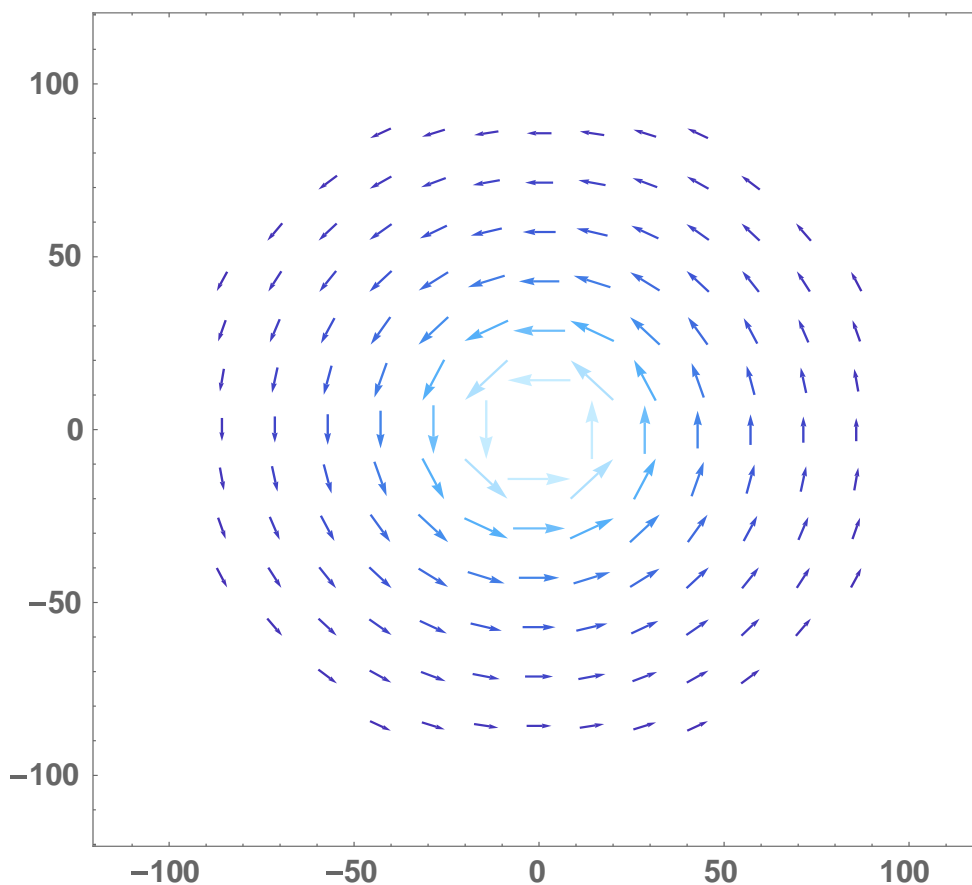


Рис.2.6 Схематичне зображення напрямку проекції вектора  $\vec{m}$  для скірмаіона на площину  $XOY$  з радіусами  $R_1 = 0,1l_0$  та  $R_2 = 100l_0$ , з урахуванням наступних параметрів системи  $\alpha = 10^{-12} \text{ см}^2$ ,  $\beta = 0$ ,  $l_0 = 5 \text{ нм}$ .

Розглянемо поверхневу густину енергії для скірмаіона в феромагнітній циліндричній нанооболонці (Рис. 2.7)

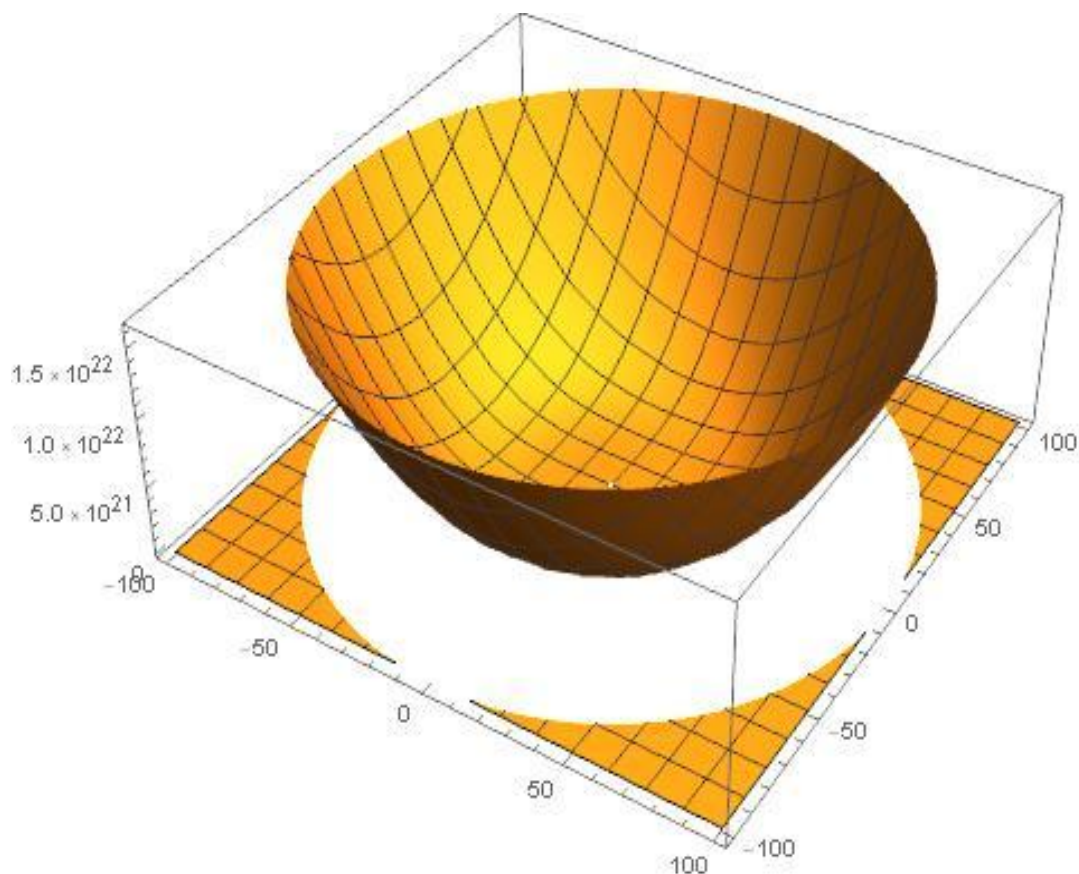


Рис.2.7 Поверхнева густина енергії для скірмаіона поділено на  $\frac{W}{4\pi b^2 M_0^2 \delta^2 \alpha}$  в

формі феромагнітної циліндричної нанооболонки за формулою (2.43), з радіусами  $R_1 = 0,1l_0$  та  $R_2 = 100l_0$ , з урахуванням наступних параметрів системи  $\alpha = 10^{-12} \text{ см}^2$ ,  $\beta = 0$ ,  $l_0 = 5 \text{ нм}$ .

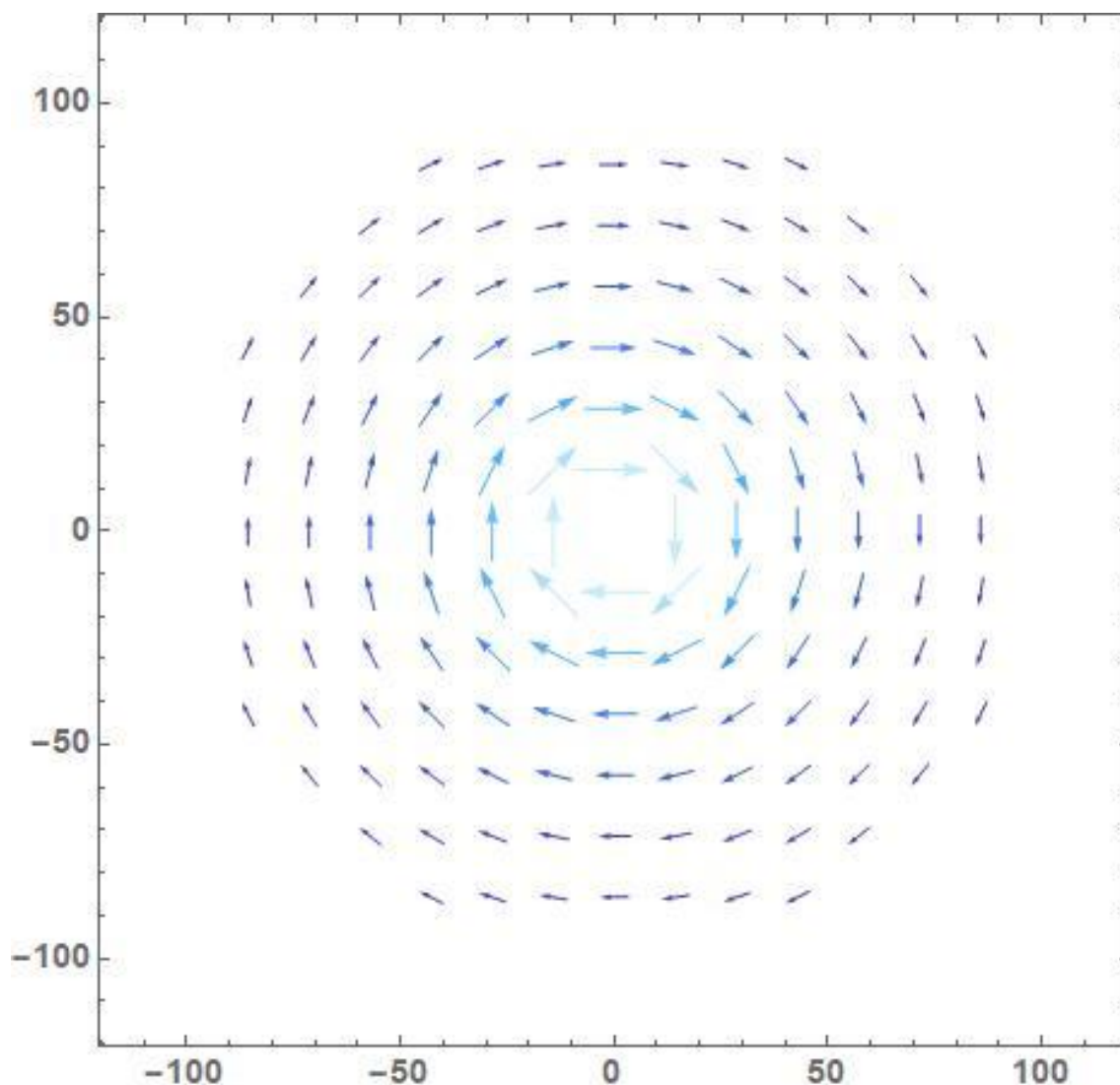


Рис.2.8 Схематичне зображення напрямку проекції вектора  $\vec{m}$  для блохівського типу скірміона ( $\theta_0 = -\frac{\pi}{2}$ ) на площину  $XOY$  з радіусами  $R_1 = 0,1l_0$  та  $R_2 = 100l_0$ , з урахуванням наступних параметрів системи  $\alpha = 10^{-12}$  см<sup>2</sup>,  $\beta = 0$ ,  $l_0 = 5$  нм.

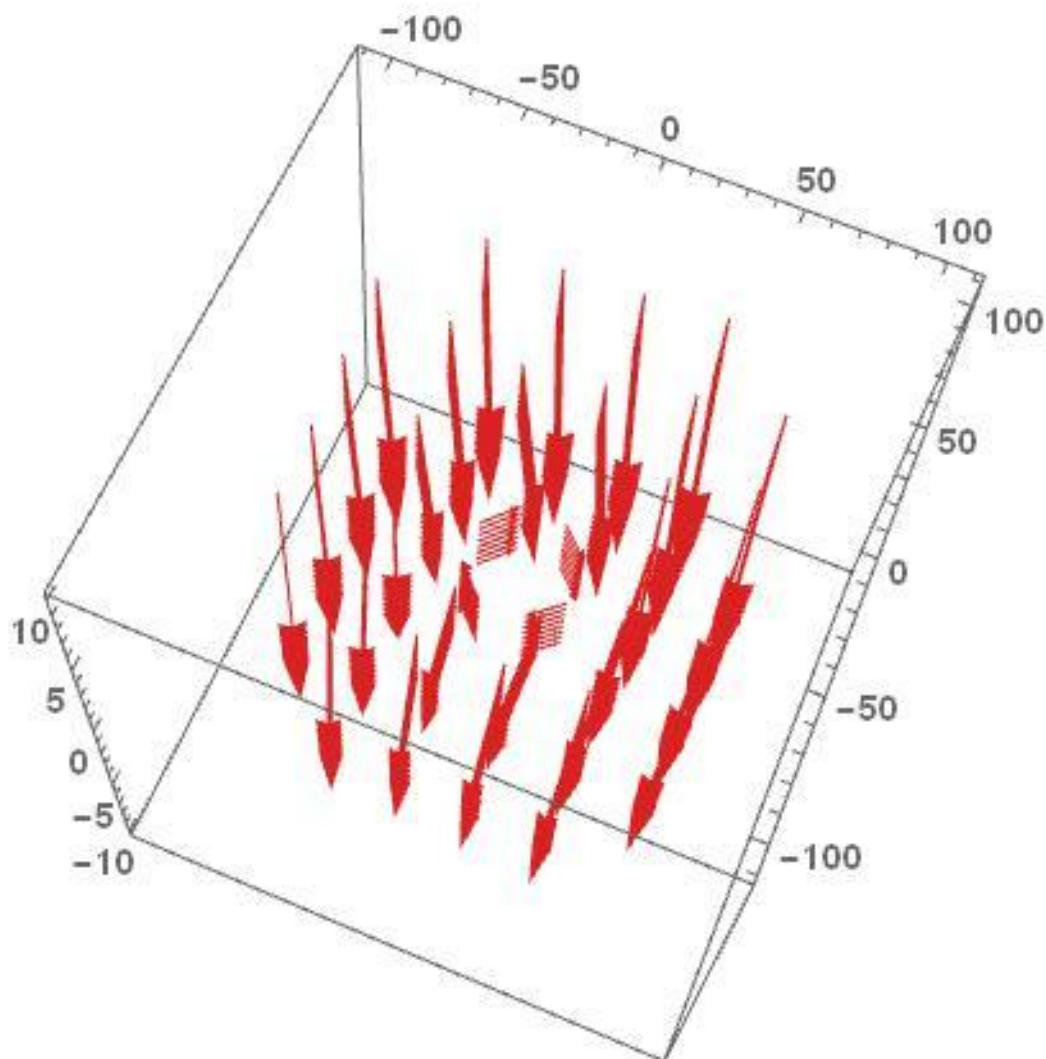


Рис.2.9 Векторне поле для вектора  $\vec{m}$  для блохівського типу скіріміона, який рухається проти годинникової стрілки в ферромагнетик у формі циліндричної нанооболонки з радіусами  $R_1 = 0,1l_0$  та  $R_2 = 100l_0$  за формулою (2.60), з урахуванням наступних параметрів системи  $\alpha = 10^{-12} \text{ см}^2$ ,  $\beta = 0$ ,  $l_0 = 5 \text{ нм}$ .

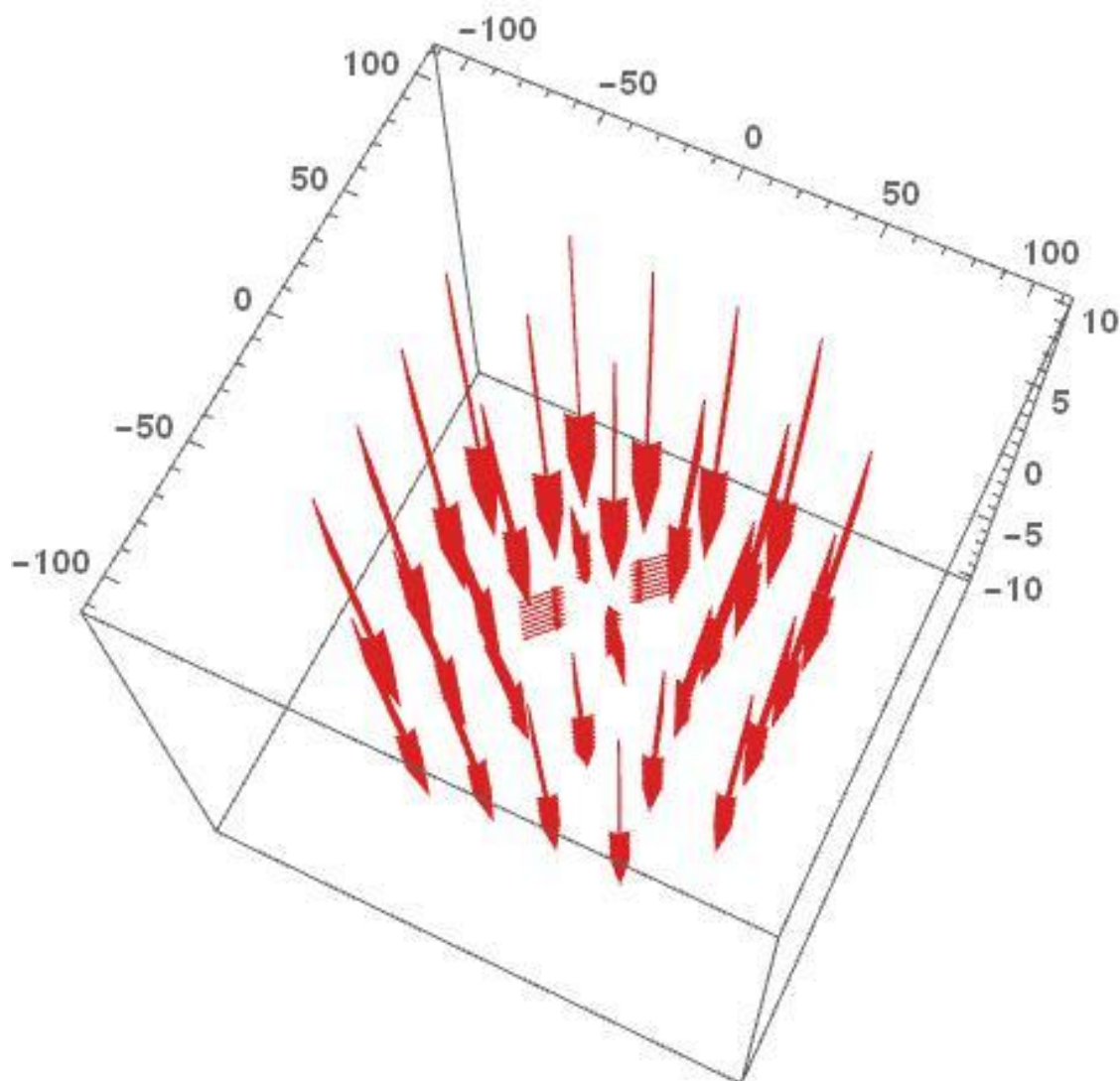


Рис.2.10 Векторне поле для вектора  $\vec{m}$  для неелівського типу скіріміона, який рухається проти годинникової стрілки в ферромагнетику в формі циліндричної нанооболонки з радіусами  $R_1 = 0,1l_0$  та  $R_2 = 100l_0$  за формулою (2.60), з урахуванням наступних параметрів системи  $\alpha = 10^{-12} \text{ см}^2$ ,  $\beta = 0$ ,  $l_0 = 5 \text{ нм}$ .

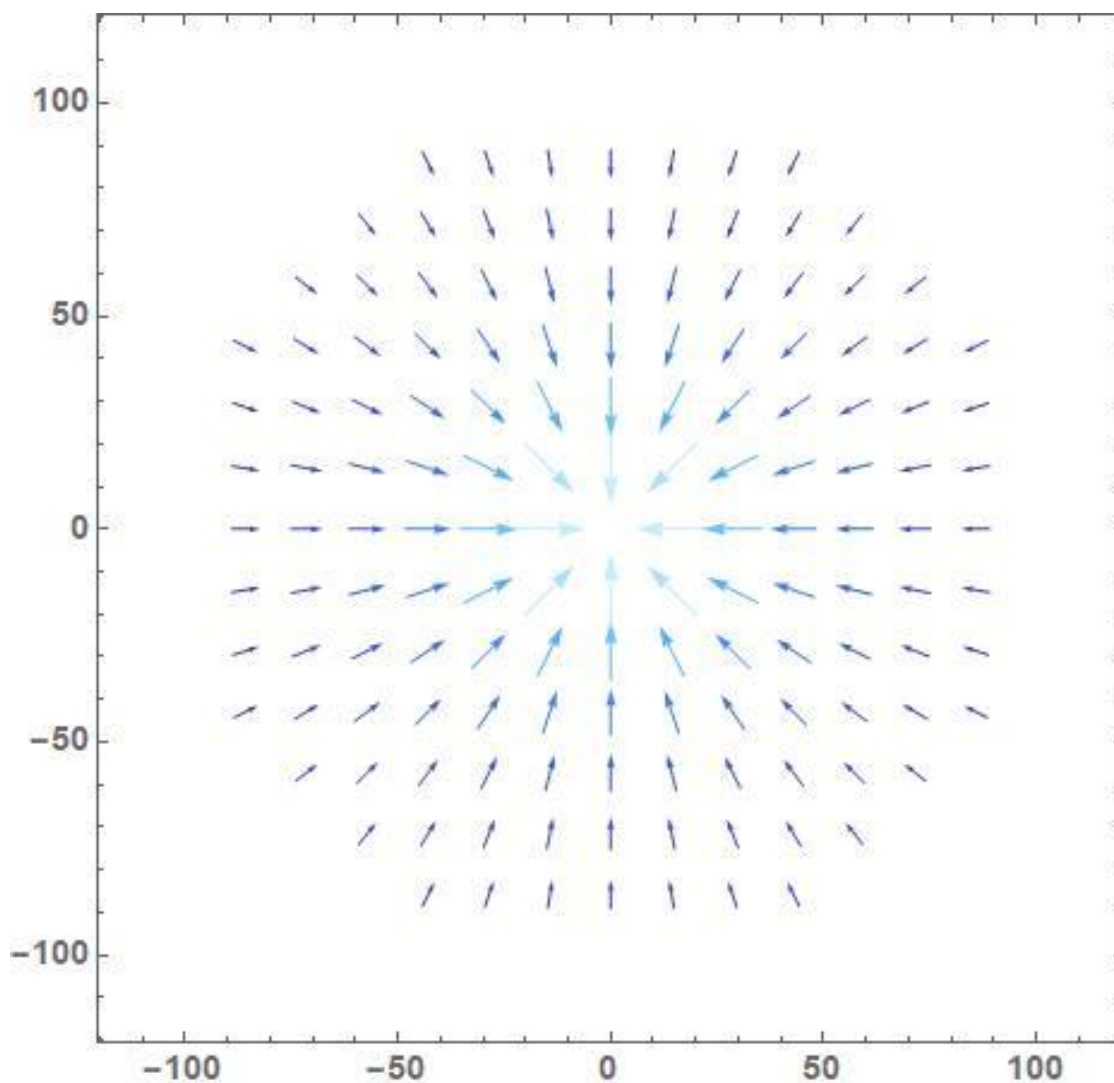


Рис.2.11 Схематичне зображення напрямку проекції вектора  $\vec{m}$  для неелівського типу скірміона ( $\theta_0 = \pi$ ) на площину  $XOY$  з радіусами  $R_1 = 0,1l_0$  та  $R_2 = 100l_0$ , з урахуванням наступних параметрів системи  $\alpha = 10^{-12} \text{см}^2$ ,  $\beta = 0$ ,  $l_0 = 5 \text{нм}$ .

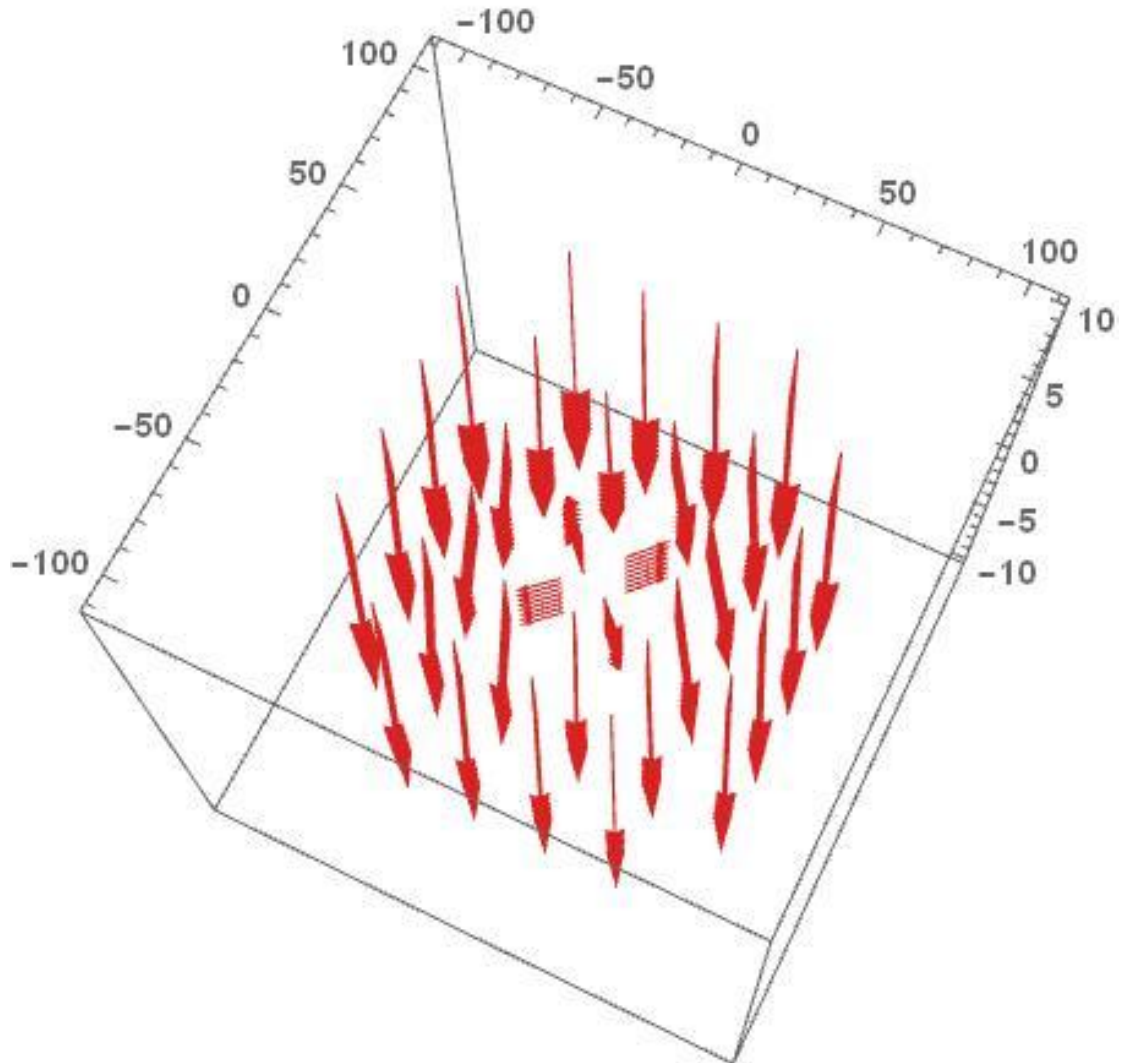


Рис.2.12 Векторне поле для вектора  $\vec{m}$  для неслівського типу скіріміона, при  $\theta_0 = 0$  в ферромагнетику в формі циліндричної нанооболонки з радіусами  $R_1 = 0,1l_0$  та  $R_2 = 100l_0$  за формулою (2.60), з урахуванням наступних параметрів системи  $\alpha = 10^{-12} \text{ см}^2$ ,  $\beta = 0$ ,  $l_0 = 5 \text{ нм}$ .

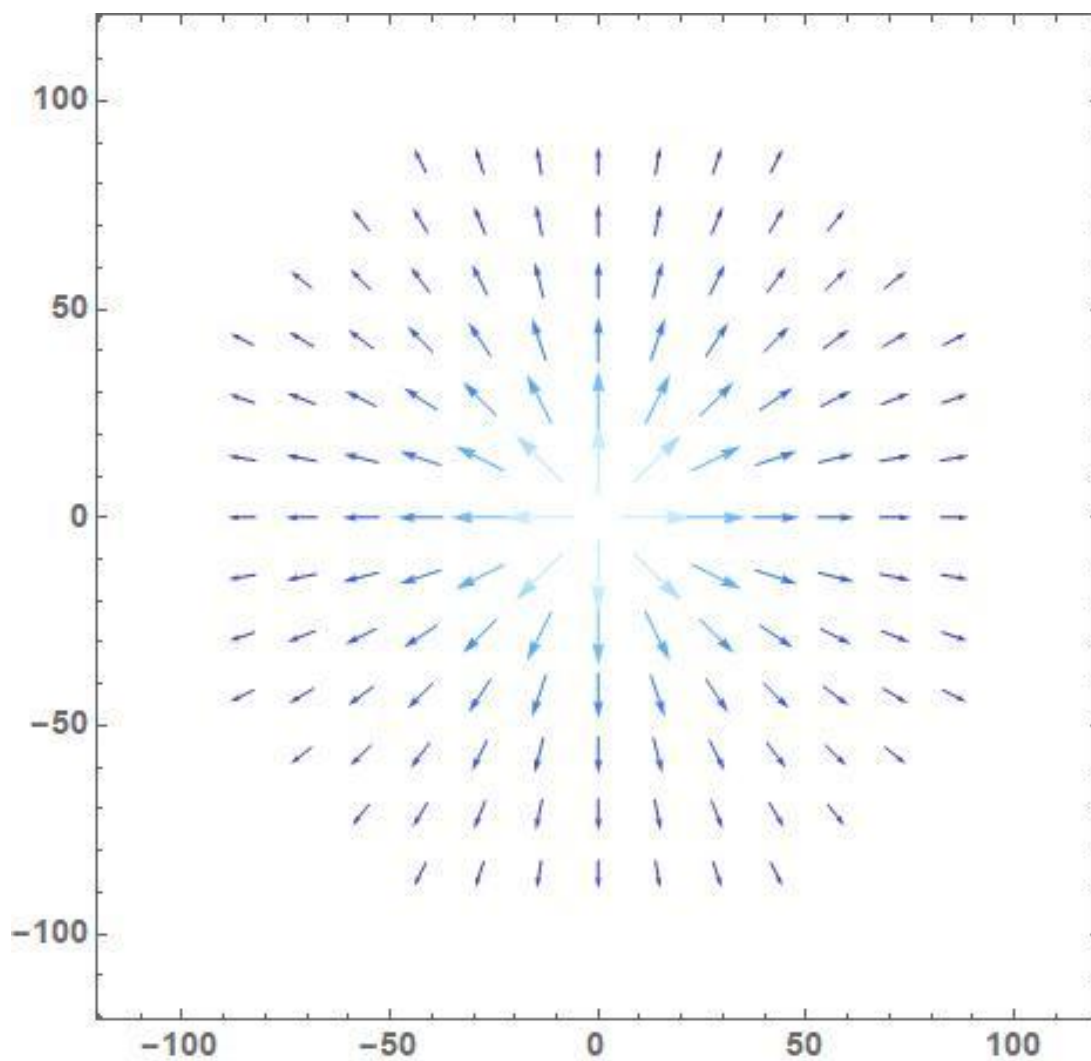


Рис.2.13 Схематичне зображення напрямку проекції вектора  $\vec{m}$  для неєлівського типу скірміона ( $\theta_0 = 0$ ) на площину  $XOY$  з радіусами  $R_1 = 0,1l_0$  та  $R_2 = 100l_0$ , з урахуванням наступних параметрів системи  $\alpha = 10^{-12} \text{ см}^2$ ,  $\beta = 0$ ,  $l_0 = 5 \text{ нм}$ .

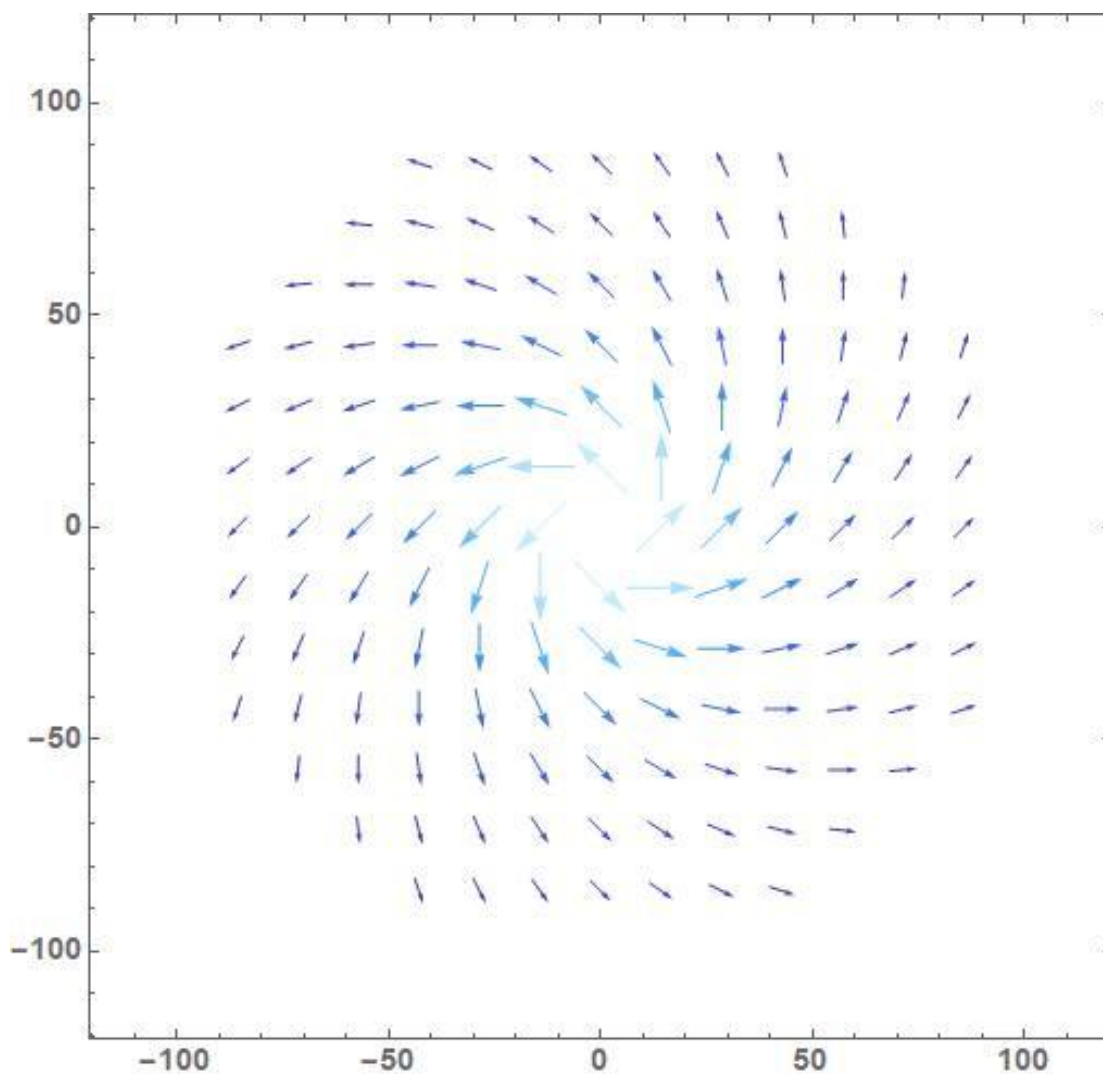


Рис.2.14 Схематичне зображення напрямку проекції вектора  $\vec{m}$  для проміжного типу скірміона ( $\theta_0 = \frac{\pi}{4}$ ) на площину  $XOY$  з радіусами  $R_1 = 0,1l_0$  та  $R_2 = 100l_0$ , з урахуванням наступних параметрів системи  $\alpha = 10^{-12} \text{ см}^2$ ,  $\beta = 0$ ,  $l_0 = 5 \text{ нм}$ .

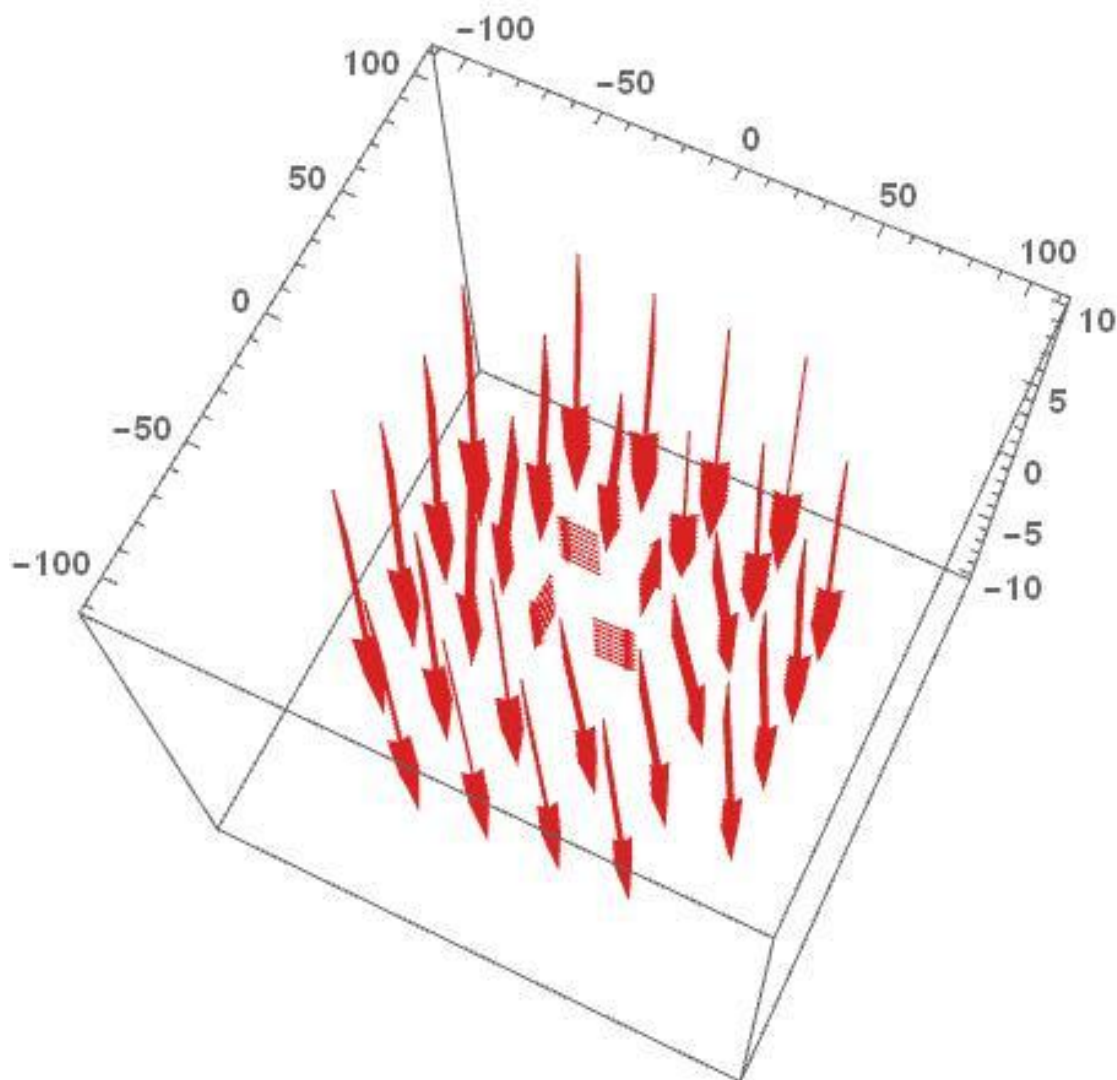


Рис.2.15 Векторне поле для вектора  $\vec{m}$  для проміжного типу скіріміона, при  $\theta_0 = \frac{\pi}{4}$  в феромагнетику в формі циліндричної нанооболонки з радіусами  $R_1 = 0,1l_0$  та  $R_2 = 100l_0$  за формулою (2.60), з урахуванням наступних параметрів системи  $\alpha = 10^{-12} \text{ см}^2$ ,  $\beta = 0$ ,  $l_0 = 5 \text{ нм}$ .

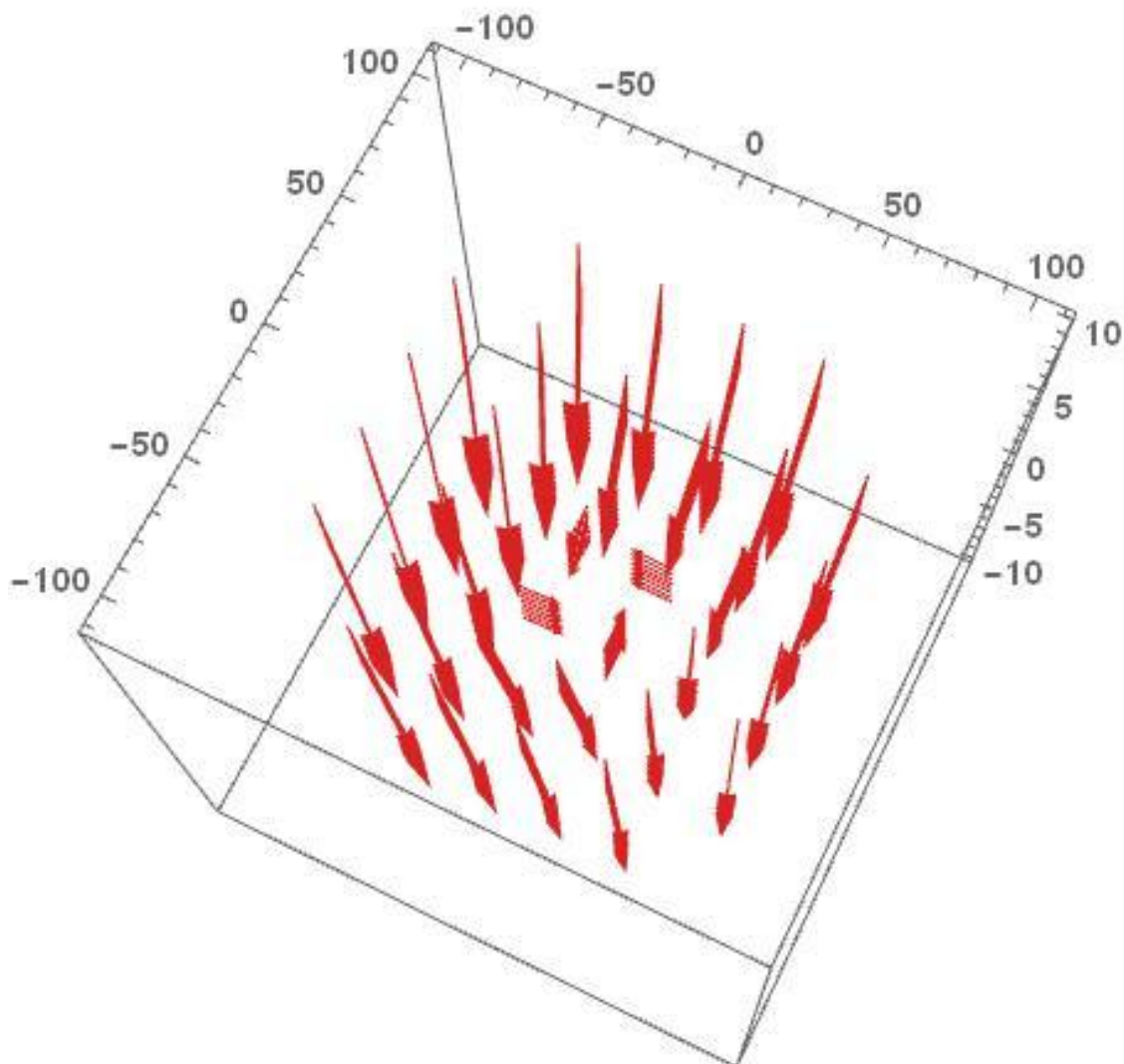


Рис.2.16 Векторне поле для вектора  $\vec{m}$  для проміжного типу скіріміона, при  $\theta_0 = \frac{3\pi}{4}$  в ферромагнетику в формі циліндричної нанооболонки з радіусами  $R_1 = 0,1l_0$  та  $R_2 = 100l_0$  за формулою (2.60), з урахуванням наступних параметрів системи  $\alpha = 10^{-12} \text{ см}^2$ ,  $\beta = 0$ ,  $l_0 = 5 \text{ нм}$ .

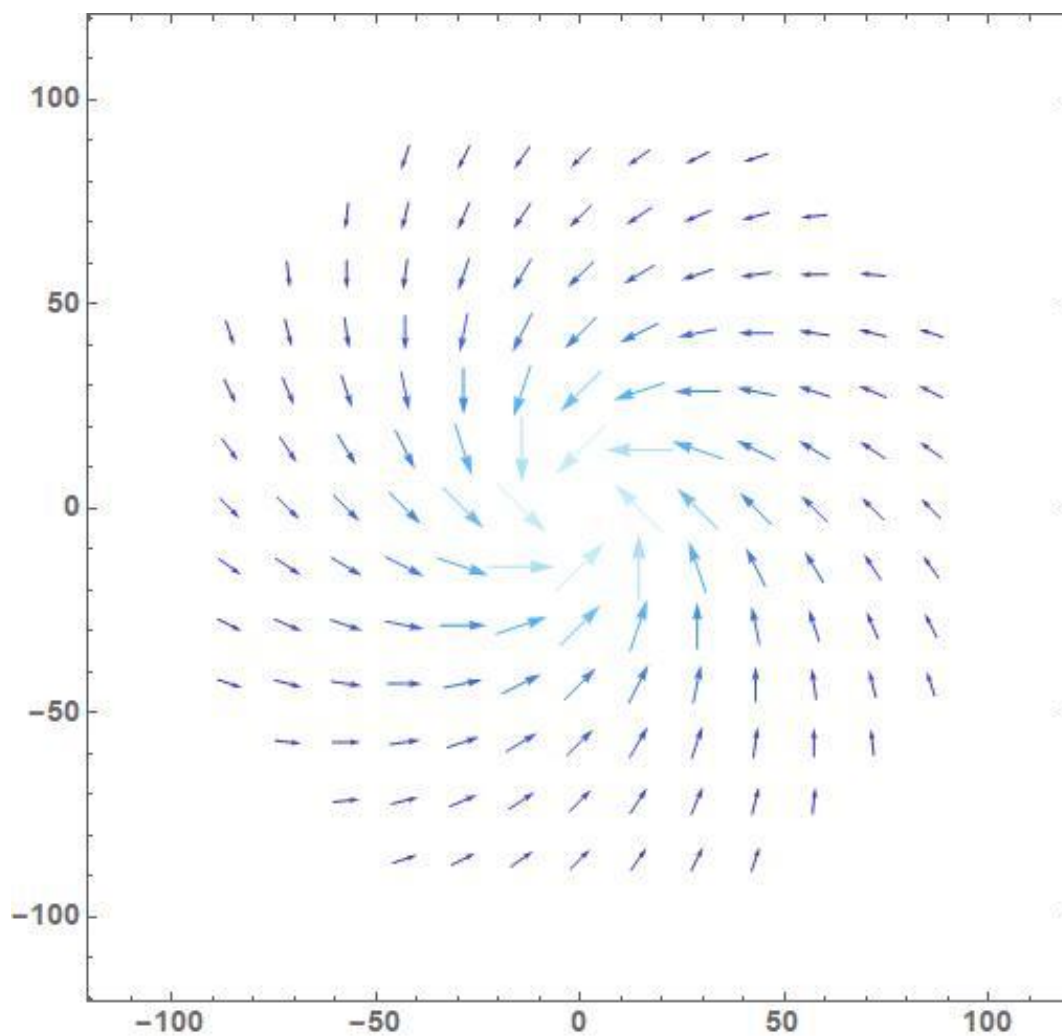


Рис.2.17 Схематичне зображення напрямку проекції вектора  $\vec{m}$  для проміжного типу скірміона ( $\theta_0 = \frac{3\pi}{4}$ ) на площину  $XOY$  з радіусами  $R_1 = 0,1l_0$  та  $R_2 = 100l_0$ , з урахуванням наступних параметрів системи  $\alpha = 10^{-12} \text{ см}^2$ ,  $\beta = 0$ ,  $l_0 = 5 \text{ нм}$ .

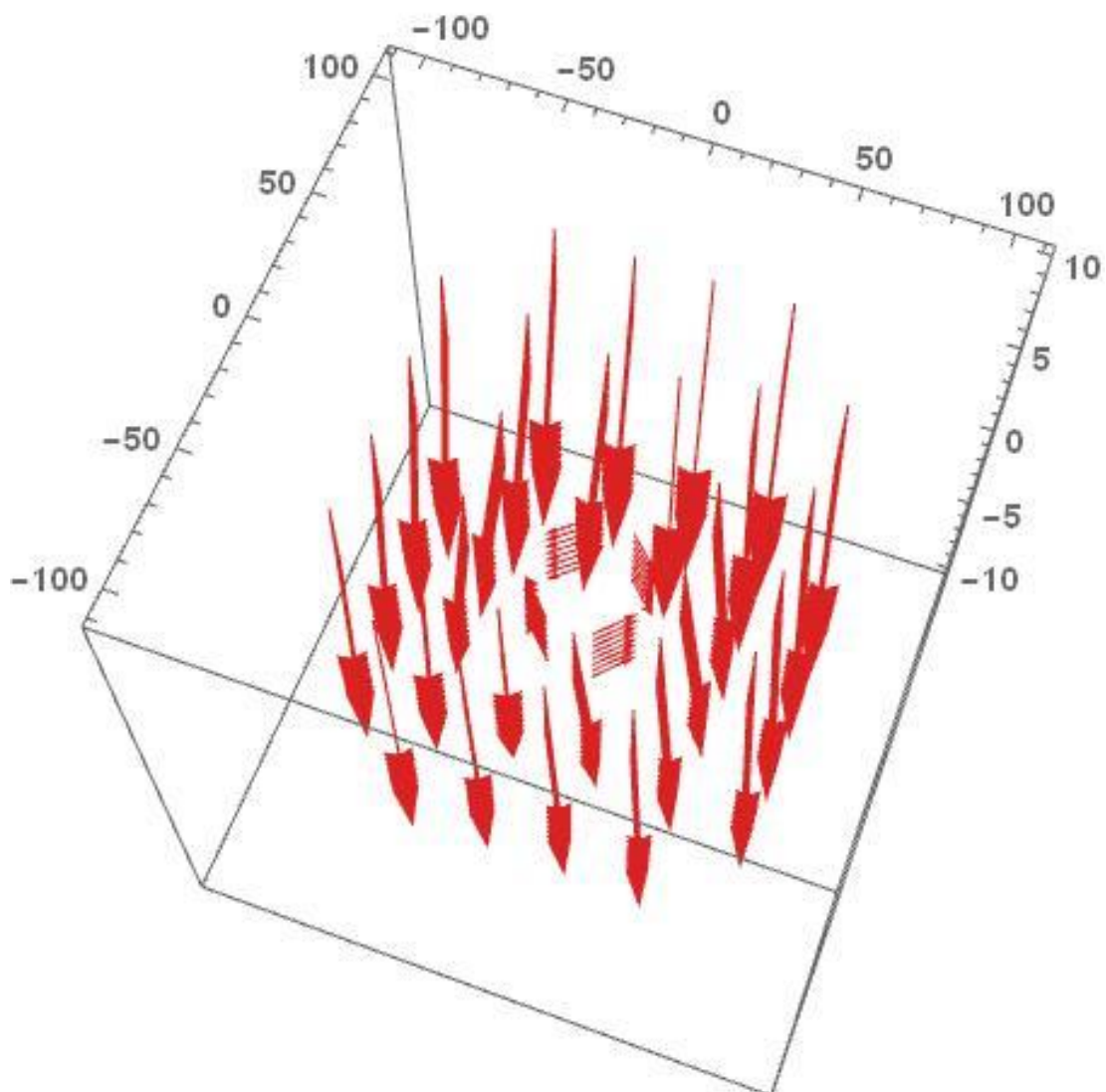


Рис.2.18 Векторне поле для вектора  $\vec{m}$  для антивихорів, при  $\theta_0 = 0$  в ферромагнетику в формі циліндричної нанооболонки з радіусами  $R_1 = 0,1l_0$  та  $R_2 = 100l_0$  за формулою (2.60), з урахуванням наступних параметрів системи  $\alpha = 10^{-12} \text{ см}^2$ ,  $\beta = 0$ ,  $l_0 = 5 \text{ нм}$ .

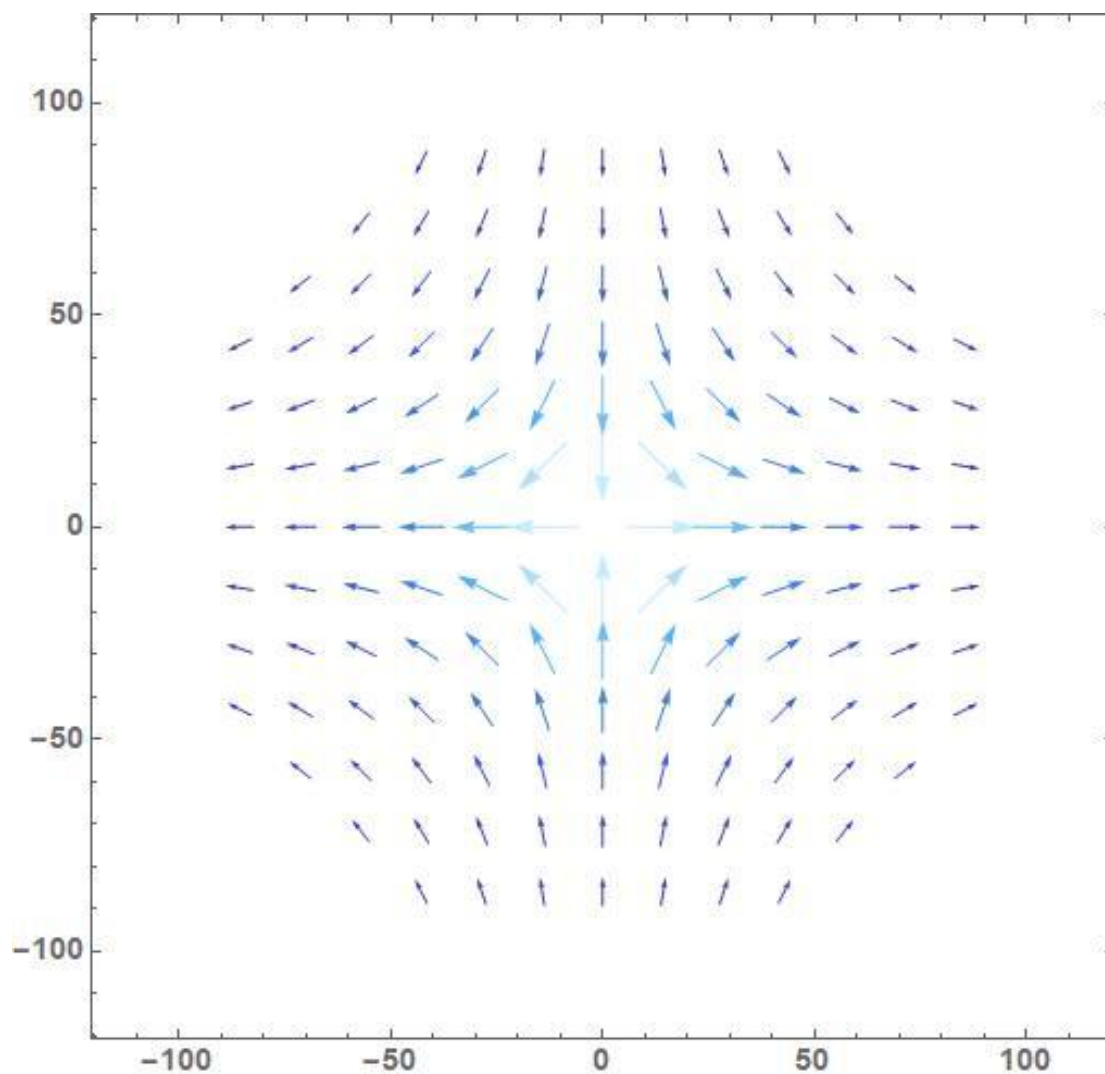


Рис.2.19 Схематичне зображення напрямку проекції вектора  $\vec{m}$  для антивихорів ( $\theta_0 = 0$ ) на площину  $XOY$  з радіусами  $R_1 = 0,1l_0$  та  $R_2 = 100l_0$ , з урахуванням наступних параметрів системи  $\alpha = 10^{-12} \text{ см}^2$ ,  $\beta = 0$ ,  $l_0 = 5 \text{ нм}$ .

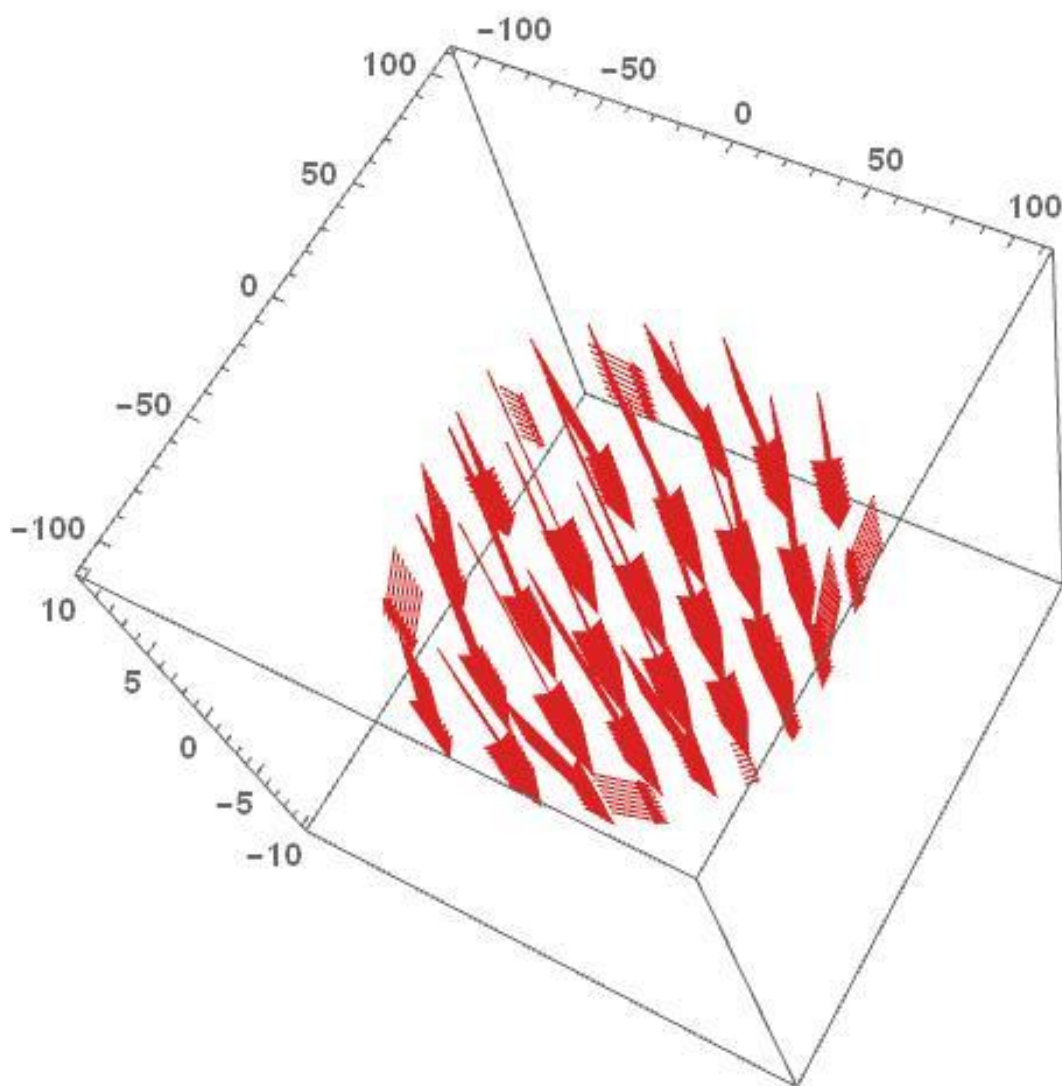


Рис.2.20 Векторне поле для вектора  $\vec{m}$  для скіріміонподібних розв'язків з топологічним зарядом 2, при  $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$  в ферромагнетику в формі циліндричної наноболонки з радіусами  $R_1 = 0,1l_0$  та  $R_2 = 100l_0$  за формулою (2.60), з урахуванням наступних параметрів системи  $\alpha = 10^{-12} \text{ см}^2$ ,  $\beta = 0$ ,  $l_0 = 5 \text{ нм}$ .

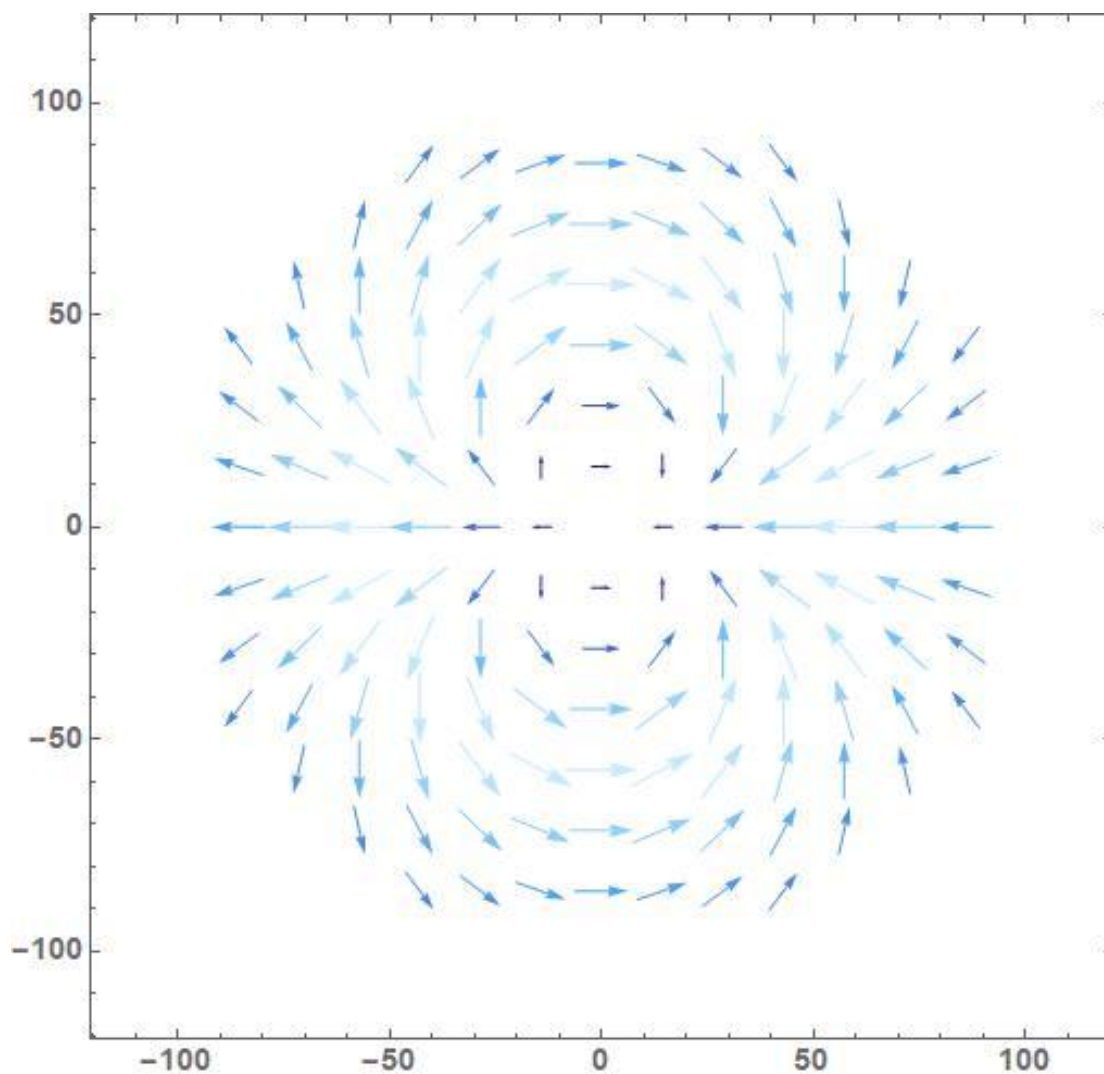


Рис.2.22 Схематичне зображення напрямку проекції вектора  $\vec{m}$  для скірміонподібних розв'язків з топологічним зарядом 2, при  $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$  на площину  $XOY$  з радіусами  $R_1 = 0,1l_0$  та  $R_2 = 100l_0$ , з урахуванням наступних параметрів системи  $\alpha = 10^{-12} \text{ см}^2$ ,  $\beta = 0$ ,  $l_0 = 5 \text{ нм}$ .

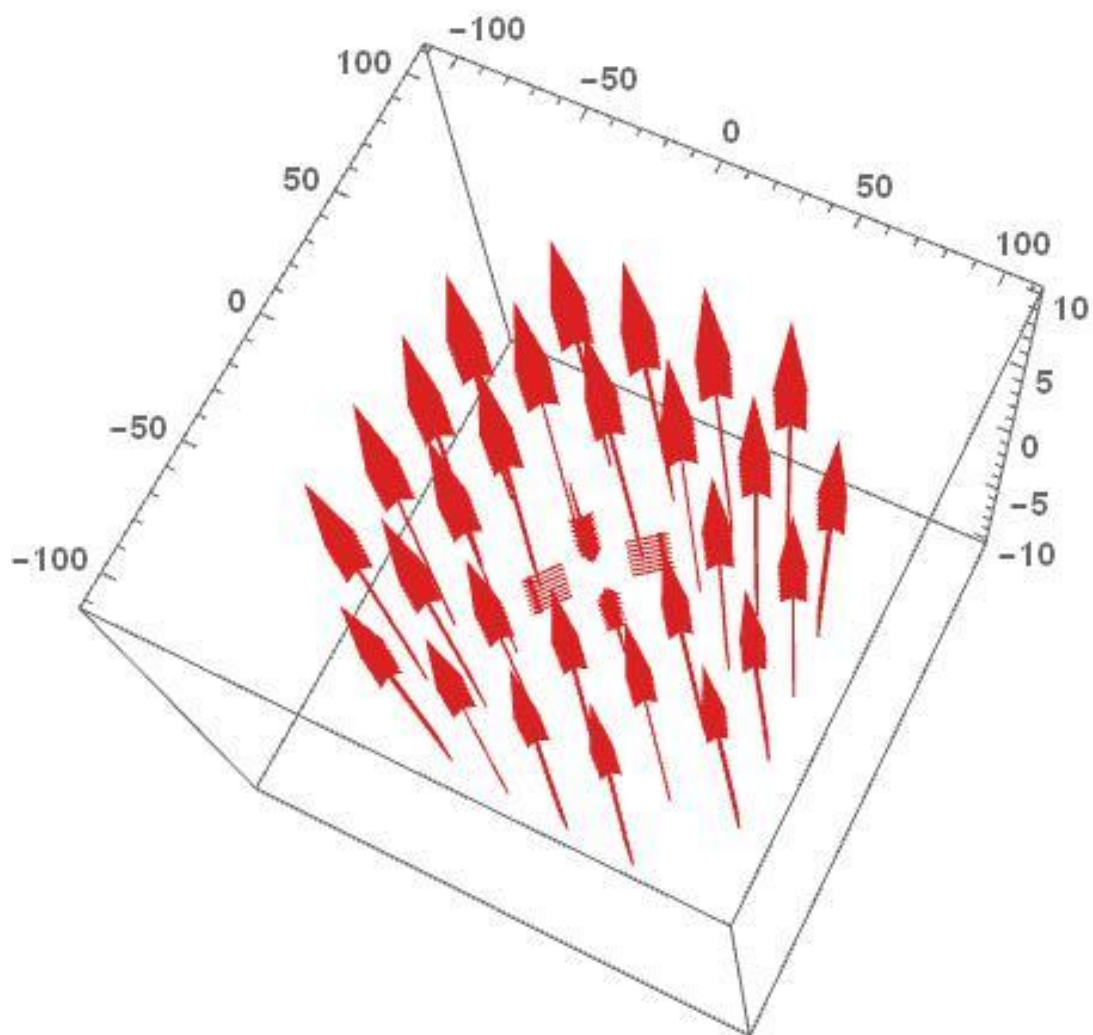


Рис.2.23 Векторне поле для вектора  $\vec{m}$  для скіріміонподібних розв'язків з топологічним зарядом 3, при  $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$  в ферромагнетик у формі циліндричної наноболонки з радіусами  $R_1 = 0,1l_0$  та  $R_2 = 100l_0$  за формулою (2.60), з урахуванням наступних параметрів системи  $\alpha = 10^{-12} \text{ см}^2$ ,  $\beta = 0$ ,  $l_0 = 5 \text{ нм}$ .

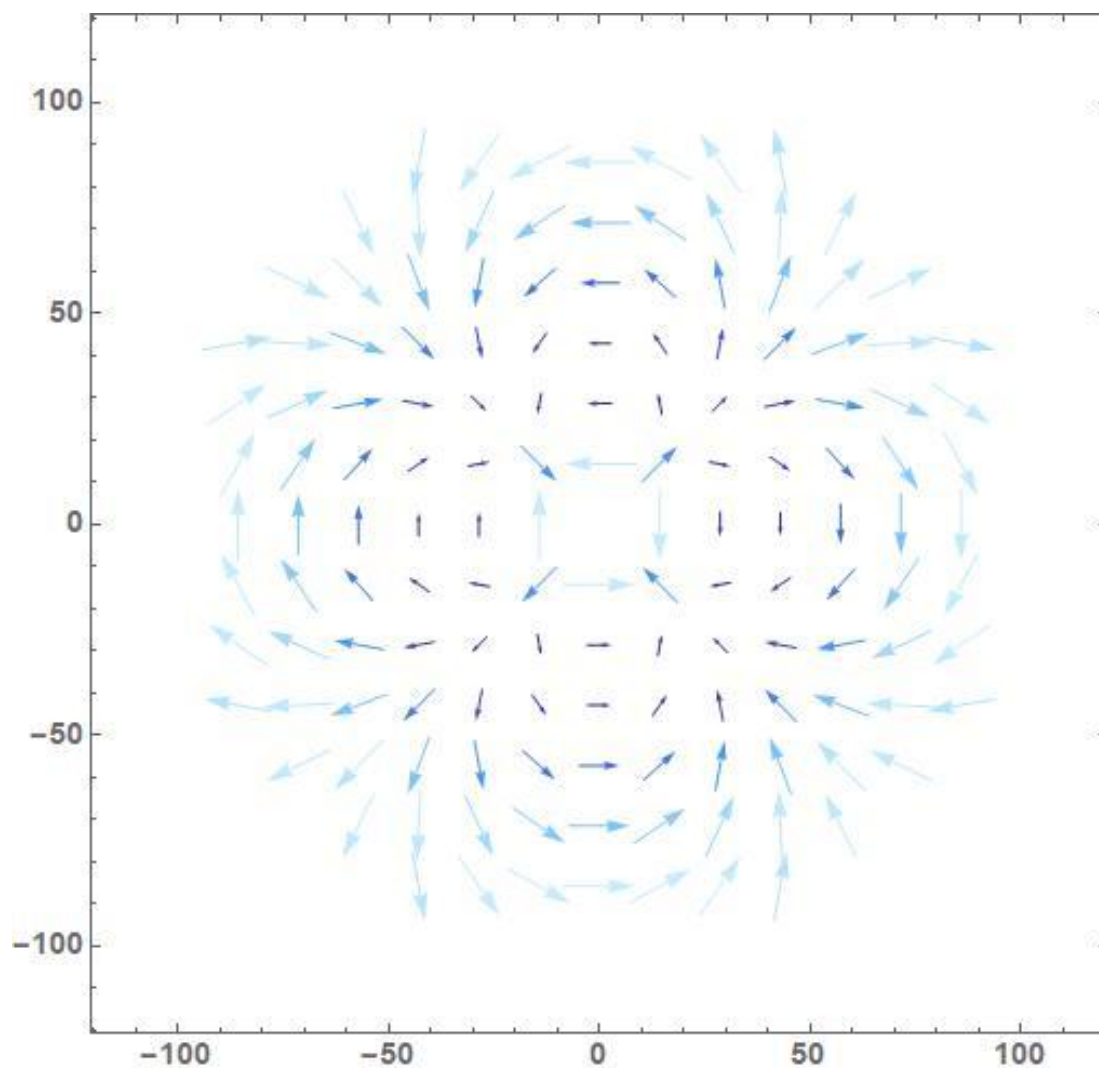


Рис.2.24 Схематичне зображення напрямку проекції вектора  $\vec{m}$  для скірміонподібних розв'язків з топологічним зарядом 3, при  $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$  на площину  $XOY$  з радіусами  $R_1 = 0,1l_0$  та  $R_2 = 100l_0$ , з урахуванням наступних параметрів системи  $\alpha = 10^{-12} \text{ см}^2$ ,  $\beta = 0$ ,  $l_0 = 5 \text{ нм}$ .

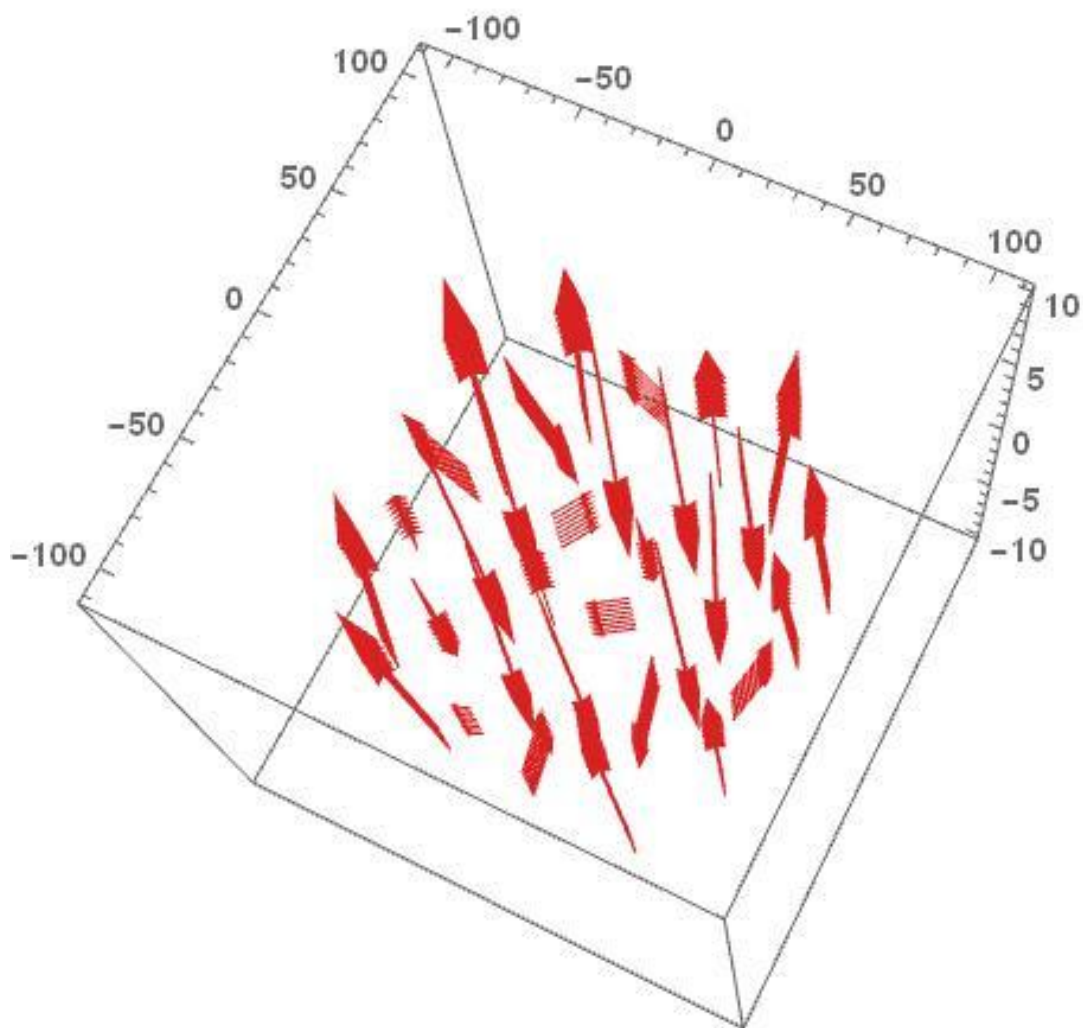


Рис.2.25 Векторне поле для вектора  $\vec{m}$  для скіріміонподібних розв'язків з топологічним зарядом 5, при  $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$  в ферромагнетику в формі циліндричної нанооболонки з радіусами  $R_1 = 0,1l_0$  та  $R_2 = 100l_0$  за формулою (2.60), з урахуванням наступних параметрів системи  $\alpha = 10^{-12} \text{ см}^2$ ,  $\beta = 0$ ,  $l_0 = 5 \text{ нм}$ .

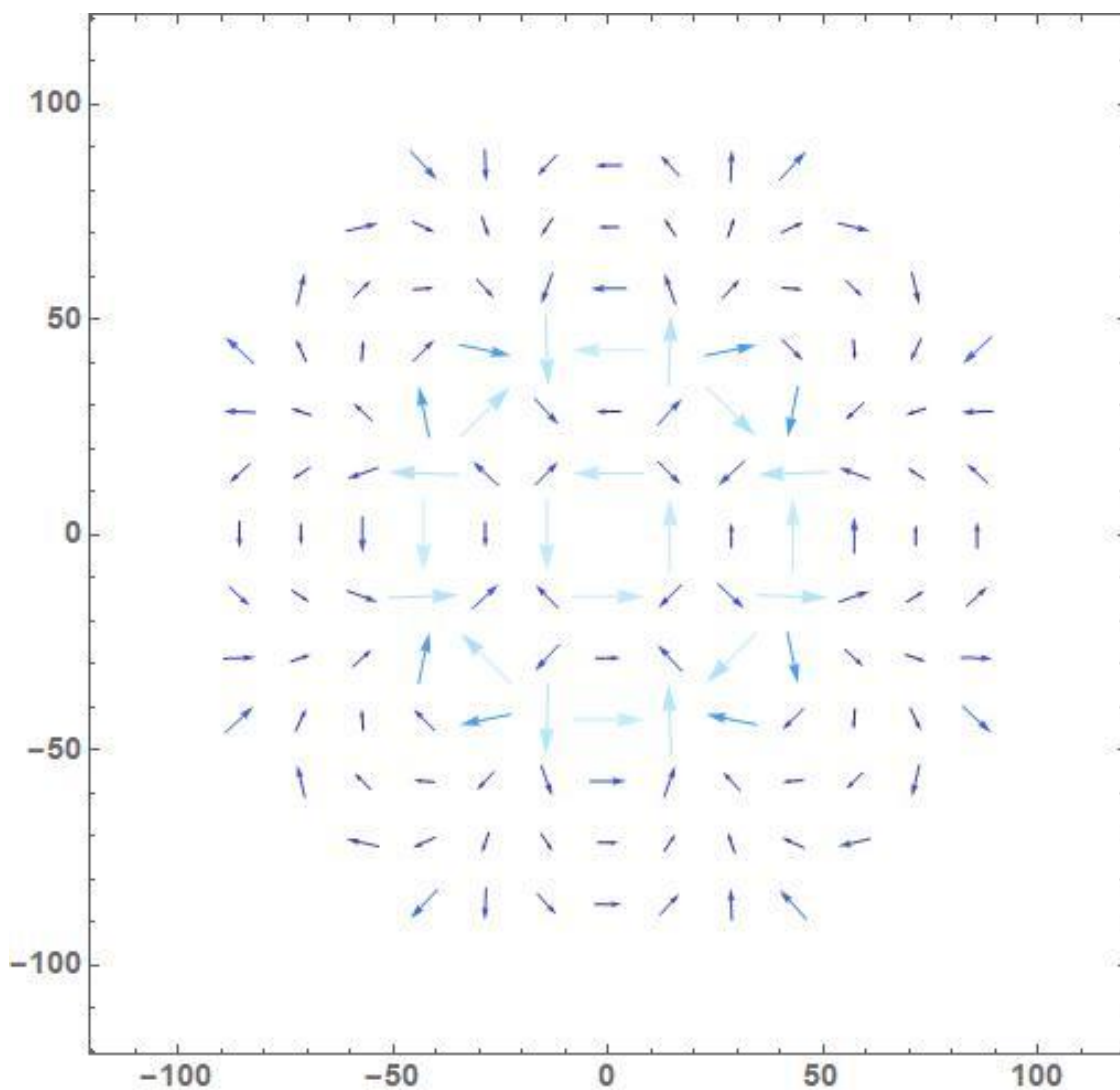


Рис.2.26 Схематичне зображення напрямку проекції вектора  $\vec{m}$  для скірміонподібних розв'язків з топологічним зарядом 5, при  $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$  на площину  $XOY$  з радіусами  $R_1 = 0,1l_0$  та  $R_2 = 100l_0$ , з урахуванням наступних параметрів системи  $\alpha = 10^{-12} \text{ см}^2$ ,  $\beta = 0$ ,  $l_0 = 5 \text{ нм}$ .

## 2.4 Висновки до розділу II

На основі побудованої в роботі аналітичної моделі показано, що густина енергії для скірміонподібного розв'язку рівняння Ландау – Ліфшица в циліндричній феромагнітній нанооболонці є монотонно спадаючою функцією відстані від центру нанооболонки та залежить від параметру  $\frac{4\pi b^2 M_0^2}{\delta^2 \alpha}$ .

## ВИСНОВКИ

На основі побудованої в роботі аналітичної моделі показано, що в ізотропному феромагнетику в формі циліндричної нанооболонки існують скірміонподібні розв'язки рівнянь Ландау-Ліфшица з розворотом вектора намагніченості менше  $\pi$ .

На основі побудованої в роботі аналітичної моделі показано, що густина енергії для скірміон-подібного розв'язку рівнянь Ландау-Ліфшица з розворотом вектора намагніченості менше  $\pi$  в феромагнетику в формі циліндричної нанооболонки є монотонно спадаючою функцією відстані від центру нанооболонки.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Fleury P A, Porto S P S, Cheesman L E and Guggenheim HJ 1966 Phys. Rev. Lett.
2. Нанофізика, наноматеріали, наноелектроніка: навч. посіб. /Ю.М. Поплавко, О.В. Борисов, Ю.І.Якименко. – К. :НТУУ «КПІ», 2012 – ст. 279.
3. Нанофізика, наноматеріали, наноелектроніка: навч. посіб. /Ю.М. Поплавко, О.В. Борисов, Ю.І.Якименко. – К. :НТУУ «КПІ», 2012 – ст. 279-280.
4. Нанофізика, наноматеріали, наноелектроніка: навч. посіб. /Ю.М. Поплавко, О.В. Борисов, Ю.І.Якименко. – К. :НТУУ «КПІ», 2012 – ст. 282.
5. Ахизер А.И., Барьяхтар В.Г., Пелетминский С.В. / Спиновые волны // М.: Наука 1967г.
6. Кругляк Ю.О., Кругляк Н.Ю., Стріха М.В. Уроки наноелектроніки: виникнення струму, формулювання закону Ома і моди провідності в концепції «знизу – вгору» // Sensor Electronics and Microsystem Technologies. – 2012.– V. 3(9), N 4. – P. 5 – 30.
7. Погорілий А.М, Рябченко С.М., Товстолигін О.І. Спінтроніка. Основні явища. Тенденції розвитку // УФЖ. Огляди. – 2010. – Т. 6, № 1. – С. 37– 97.
8. Аплеснин С.С. Основы спинтроники// Санкт-Петербург: Изд-во ЛАНЬ. – 2010. – 288 с.
9. Данилов Ю.А., Демидов Е.С., Ежевский А.А. Основы спинтроники // Нижний Новгород: Нижегородский государственный университет им. Н.И.Лобачевского. – 2009. – 173 с.
10. Третяк О.В., Львов В.А., Барабанов О.В. Фізичні основи спінової електроніки // Київ: Вид-во Київського ун-ту. – 2002. – 314 с.

11. Tyberkevych. V. / Spintronic THz-frequency generator based on antiferromagnetic dielectric // Sol-SkyMag International Conference on Magnetism and Spintronics, San Sebastian (Gipuzkoa), Spain, June 19 – June 23, 2017.
12. I.V. Bar'yakhtar and B.A. Ivanov, Nonlinear magnetization waves in the antiferromagnet, *Sov.J. Low Temp. Phys.* 5, 361 (1979) [*Fiz. Nizk. Temp.* 5, 759 (1979)].
13. I.V. Bar'yakhtar and B.A. Ivanov, Dynamic solitons in a uniaxial antiferromagnet, *Sov. Phys. JETP* 58, 190 (1983) [*Zh. Eksp. Teor. Fiz.* 85, 328 (1983)].
14. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Квантовая механика. Нерелятивистская теория. М.: Наука, 1974. (гл. VII, § 46, 47)
15. Yu.I. Gorobets, O.Yu. Gorobets, and V.V. Kulish, Spin waves in a two-sublattice antiferromagnet. A self-similar solution of the Landau-Lifshitz equation, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.* 42, 52 (2017).
16. O. Heczko, V. Kopecký, A. Sozinov, L. Straka, Magnetic shape memory effect at 1.7 K, *Appl. Phys. Lett.* 103 (2013) 072405.
17. Magnetic skyrmions: from fundamental to applications / Finocchio G. [et all] // *J Phys. D: Appl. Phys.* 2016. 49,423001.
18. N. Nagaosa and Y. Tokura, Topological properties and dynamics of magnetic skyrmions, *Nat. Nanotechnol.* 8, 899 (2013).
19. Хомицкий Д.В. Физические основы методов управления спиновой плотностью в наноструктурах спинтроники. Нижний Новгород: НГУ им.Н.И.Лобачевского, 2011. – 94 с.
20. Мартинес-Дуарт Дж.М., Мартин-Палма Р.Дж., Ф.Агулло-Руеда. Нанотехнологии для опто- и микроэлектроники. Москва: Техносфера, 2009. – 368 с.
21. R. Tomasello, E. Martinez, R. Zivieri, L. Torres, M. Carpentieri, and G. Finocchio, A strategy for the design of skyrmion racetrack memories, *Sci. Rep.* 4, 6784 (2014).

22. X. Zhang, M. Ezawa, and Y. Zhou, Magnetic skyrmion logic gates: conversion, duplication and merging of skyrmions, *Sci. Rep.* 5, 9400 (2015).
23. Y. Zhou, E. Iacocca, A. A. Awad, R. K. Dumas, F. C. Zhang, H. B. Braun, and J. Åkerman, Dynamically stabilized magnetic skyrmions, *Nature Communications* 6, 8193 (2015).
24. Вонсовский С.В. Ферромагнетизм / С.В. Вонсовский, Я.С. Шур-М.: Л.: ОГИЗ, 1948. – 530 с
25. F. Garcia-Sanchez, J. Sampaio, N. Reyren, V. Cros, and J.-V. Kim, A skyrmion-based spintorque nano-oscillator, *New J. Phys.* 18, 075011 (2016).
26. A. A. Thiele, Steady-State Motion of Magnetic Domains, *Phys. Rev. Lett.* 30, 230 (1973).
27. V. Novosad, M. Grimsditch, K. Yu. Guslienko, P. Vavassori, Y. Otani, and S. D. Bader, Spin excitations of magnetic vortices in ferromagnetic nanodots, *Phys. Rev. B* 66, 052407 (2002).
28. A.S. Kovalev and J.E. Prilepsky, Influence of the magnetic dipole interaction on the properties of magnetic vortices in particles of small size, *Low Temperature Physics* 30, 70 (2004).
29. C. Büttner, F., Lemesh, I., & Beach, G. S. D. Theory of isolated magnetic skyrmions: From fundamentals to room temperature applications, *Sci. Rep.* 8(1) (2018). doi:10.1038/s41598-018-22242-8.
30. Mewes Tim et al. Magnetization dynamics including spin-torque // [www. bama.ua.edu/~tmewes/](http://www.bama.ua.edu/~tmewes/).
31. Huber Alex, Schäfer Rudolf. Magnetic domains: the analysis of magnetic microstructures. Springer: 1998. – 557 p. (Див. викладки на С. 151).
32. Звездин А.К., Звездин К.А., Хвальковський А.В. Обобщенное уравнение Ландау — Лифшица и процессы переноса спинового момента в магнитных наноструктурах // *УФН.* – 2008. – Т. 178. – С. 436 – 442.

33. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. К теории дисперсии магнитной проницаемости ферромагнитных тел // Ландау Л.Д. Собрание трудов в 2 т. Под ред. Е.М. Лифшица. М.: Наука. – 1969. – Т. 1. – С. 97.
34. Gilbert T. A phenomenological theory of damping in ferromagnetic materials // IEEE Transactions on Magnetics. – 2004. – V. 40, N 6. – P. 3443 – 3449.
35. Ralph D.C., Stiles M.D. Spin transfer torques // J. Magn. Magn. Mater. – 2008. – V. 320. – P. 1190 – 1216.
36. Bazaliy Y.B., Jones B.A., Zhang S.-C. Modification of the Landau-Lifshitz equation in the presence of a spin-polarized current and colossal- and giant-magnetoresistive materials // Phys.Rev. B. – 1998. – V. 57. – P. R3213– R3216.
37. Sun J.Z. Spin-current interaction with a monodomain magnetic body: A model study // Phys.Rev. B. – 2000. – V. 62.– P. 570.
38. Myers E.B., Ralph D.C., Katine J.A., Louie R.N., Buhrman R.A. Current-Induced Switching of Domains in Magnetic Multilayer Devices // Science.– 1999. – V. 285. – P. 867 – 870.
39. Tsoi M., Jansen A.G.M., Bass J., Chiang W.-C., Seck M., Tsoi V., Wyder P. Excitation of a Magnetic Multilayer by Electric Current // Phys. Rev. Lett. – 1998. – V. 80. – P. 4281.
40. M. Kläui, C.A.F. Vaz, L. Lopez-Diaz, and J.A.C. Bland, Vortex formation in narrow ferromagnetic rings, J. Phys.: Condens. Matter 15, R985 (2003).
41. J. Wu, D. Carlton, J. S. Park, Y. Meng, E. Arenholz, A. Doran, A.T. Young, A. Scholl, C. Hwang, H. W. Zhao, J. Bokor, and Z. Q. Qiu, Direct observation of imprinted antiferromagnetic vortex states in CoO/Fe/Ag(001) discs, Nature Physics 7, 303 (2011).
42. G. Salazar-Alvarez, J. J. Kavich, J. Sort, A. Mugarza, S. Stepanow, A. Potenza, H. Marchetto, S. S. Dhesi, V. Baltz, B. Dieny, A. Weber, L. J. Heyderman, J. Nogués, and P. Gambardella, Direct evidence of imprinted vortex states in the antiferromagnet of exchange biased microdisks, Appl. Phys. Lett. 95, 012510 (2009).

43. A. Hoffmann, J. Sort, K. S. Buchanan, and J. Nogués, Exchange-Biased Magnetic Vortices, *IEEE Transactions on Magnetics* 44, 1968 (2008).
44. J. Sort, K. S. Buchanan, V. Novosad, A. Hoffmann, G. Salazar-Alvarez, A. Bollero, M. D. Baró, B. Dieny, and J. Nogués, Imprinting Vortices into Antiferromagnets, *Phys. Rev. Lett.* 97,067201 (2006).
45. Gorobets O.Yu. / Degeneration of magnetic states of the order parameter relative to the boundary conditions and discrete energy spectrum in ferromagnetic and antiferromagnetic nanotubes. // *Chaos, Solitons & Fractals* 2008;36:671-676.
46. Baryakhtar V.G., Gorobets O.Yu., Gorobets V.Yu. / Some exact distributions of order parameter in antiferromagnetic and ferromagnetic media. // *J Magn Magn Mater* 2004;280:377-380.
47. Gorobets O.Yu., Gorobets V.Yu. / Class of three dimensional solutions of Landau-Lifshitz equations in simply connected specimens of ferromagnets and antiferromagnets of arbitrary shape with uniaxial magnetic anisotropy. *Chaos, Solitons and Fractals.* // 2005;23:1121-4.
48. Ширококов М.Я. / К теории механизма намагничивания ферромагнетиков. // *ЖЭТФ* 15, 1, 57 (1945).
49. Gorobets O.Yu. / Degeneration of magnetic states of the order parameter relative to the boundary conditions and discrete energy spectrum in ferromagnetic and antiferromagnetic nanotubes // *Chaos, Solitons and Fractals.* – 2006, <http://dx.doi.org/10.1016/j.chaos.2006.06.106>.
50. Bar'yakhtar V.G., Ivanov B.A., Sukstanskii A.L. / Nonlinear waves and the dynamics of domain walls in weak ferromagnets // *Sov. Phys. JETP.* – V. 51 (4), P. 757-764. – 1980.
51. Kiselev N.S., Bogdanov A.N., Schäfer R., U.K. Röbber. / Chiral skyrmions in thin magnetic films: new objects for magnetic storage technologies // *Journal of Physics D: Applied Physics*, V. 14 (39). – 2011.

52. Tretyakov O.A. / Antiferromagnetic Skyrmions. // IMR KINKEN Research Highlights 2016

53. Kovalev A.S., Kosevich A.M., Maslov K.V. / Magnetic vortex-topological soliton in a ferromagnet with an easy-axis anisotropy. // JETP Lett 1979;30: 296-9.

54. Encinas-Oropesa A., Demand M., Piraux L., Huynen I., Ebels U. / Dipolar interactions in arrays of nickel nanowires studied by ferromagnetic resonance. // Phys Rev B 2001;63:104415.

55. Ebels U., Duvail J-L, Wigen P.E., Piraux L., Buda L.D., Ounadjela K. / Ferromagnetic resonance studies of Ni nanowire arrays. // Phys Rev B 2001;64:144421.

56. Leblond H., Veerakumar V. / Magnetostatic spin solitons in ferromagnetic nanotubes. // Phys Rev B 2004;70:134413. Nikitov S.A., Gulyaev Y.V., Boardman A.D. / Reflection and scattering of spin waves by surface roughness of a ferromagnet. Waves in Random Media. // 1996;6:61-71.

57. Núñez A. S., Duine R. A., Haney P., MacDonald A. H., / Theory of spin torques and giant magnetoresistance in antiferromagnetic metals // Phys. Rev. B 73, 214426 (2006).

58. Wei Z., Sharma A., Núñez A. S., Haney P.M., Duine R.A., Bass J., MacDonald A.H., Tsoi M. / Changing Exchange Bias in Spin Valves with an Electric Current// Phys. Rev. Lett. 98, 116603 (2007).

59. Cheng R., Xiao D., Brataas A./ Terahertz Antiferromagnetic Spin Hall Nano-Oscillator // Phys. Rev. Lett. 116, 207603 (2016).

60. Moriyama T., Matsuzaki N., Kim K.-J., Suzuki I., Taniyama T., and Ono T. / Sequential write-read operations in FeRh antiferromagnetic memory//Appl. Phys. Lett. 107, 122403 (2015).

61. Ходенков Г.Е. / Некоторые точные многомерные решения уравнения Ландау-Лифшица в одноосном ферромагнетике // ФММ. – 1982. – Т. 54, вып. 4. – С. 644 – 649.



**АНОТАЦІЯ**  
**ДО ЗВІТУ З МАГІСТЕРСЬКОЇ ДИСЕРТАЦІЇ**  
 СТУДЕНТА ФМФ, 2 КУРСУ МАГІСТЕРСЬКОГО РІВНЯ ГР. ОФ-81мп  
**Квітки Анни Миколаївни**

(ПІБ)

**На тему** “Взаємодія скіrmіонподібних розв’язків рівняння Ландау – Ліфшица в феромагнетику”

**Науковий керівник** Професор. Доктор-фізико-математичних наук.

Горобець Оксана Юріївна

**Актуальність** Дослідження в області спітроніки є актуальними і на сьогоднішній день, спітроніка – це перспективна галузь фізики, де особливо важливе місце займає вивчення способів управління та маніпулювання топологічними об’єктами в магнетиках такими, як доменні стінки, скіrmіони, тощо. Тривимірні аналітичні розв’язки рівняння Ландау– Ліфшица в феромагнетику широко використовуються для моделювання властивостей, зокрема магнітних вихорів та доменних стінок в зв’язку з тим що вони дозволяють тестувати результати чисельних розрахунків та досліджувати найбільш загальні властивості топологічних об’єктів в магнетиках. В зв’язку з цим тема магістерської дисертації «Взаємодія скіrmіонподібного розв’язку рівняння Ландау-Ліфшица в феромагнетику» є актуальною.

**Об’єкт дослідження** Енергія магнітних скіrmіонподібних розв’язків рівняння Ландау – Ліфшица в феромагнетику.

**Зв’язок роботи з науковими програмами, планами, темами**

Магістерське дослідження виконано в межах науково-дослідної теми «Взаємодія спінових хвиль та спін-поляризованих струмів з магнітними неоднорідностями в наноструктурованих феромагнітних матеріалах» кафедри загальної та експериментальної фізики Національного Технічного Університету України «КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО».

**Предмет дослідження** магнітні скіrmіонподібних розв’язків рівняння Ландау – Ліфшица в феромагнетику.

**Мета роботи** з’ясувати як рухаються скіrmіони в циліндричній нанооболонці, а також проаналізувати залежності енергій скіrmіонподібного розв’язку рівняння Ландау – Ліфшица в циліндричній антиферомагнітній нанооболонці від параметрів системи.

**Методи дослідження** методи математичного аналізу, методи теорії диференціальних рівнянь в частинних похідних, методи математичної фізики

**Відомості про обсяг звіту, кількість ілюстрацій, таблиць, додатків і**

*літературних найменувань за переліком використаних* 85 сторінок звіту, 26 ілюстрацій, 61 літературних найменувань

**Мета індивідуального завдання, використані методи та отримані результати** За допомогою рівняння Ландау – Ліфшица розрахувати енергію для скірміонподібного розв’язку рівняння Ландау – Ліфшица в циліндричній феромагнітній нанооболонці. Дослідження проводилися аналітичними та числовими методами з використанням сучасних методів теоретичної фізики. Динаміка магнітного моменту в системах з передачею спіну описувалась рівнянням Ландау- Ліфшиця.

**Висновок** Показано, основні аспекти динаміки і взаємодії магнітних скірміонів в нанооболонках на основі аналітичної моделі.

**Перелік ключових слів (не більше 20)** спінові хвилі, феромагнетик, скірміон, спінтроніка, магنونіка, домени, доменні стінки, наноелектроніка, спін.

**Підпис керівника** \_\_\_\_\_

**SUMMARY**  
**TO THE MASTER'S DISSERTATION REPORT**  
 STUDENT OF FMF, 2 COURSE OF THE MASTER LEVEL, GR. OF-81mp  
**Kvitka Anna**

***On the topic*** Interaction of skyrmion-similar solutions of the Landau - Lifshitz equation in ferromagnets

***Scientific supervisor*** Professor. Doctor of Physical and Mathematical Sciences. Gorobets Oksana Yurevna

***Topicality*** Research in the field of spintronics is relevant today, spintronics is a promising industry of physics, where the study of ways to control and manipulate topological objects in magnets, such as domain walls, skyrmions, etc., are especially important. The three-dimensional analytical solutions of the Landau – Lifshitz equation in ferromagnet are widely used to model properties, in particular magnetic eddies and domain walls, in order to test the results of numerical calculations and to investigate the most common properties of topological objects. In this regard, the topic of the master's dissertation "The interaction of the skyrmion-similar solution of the Landau-Lifshitz equation in ferromagnetism" is relevant.

***Relationship of work with scientific programs, plans, themes cathedra*** The master's research was performed within the scientific-research topic "Interaction of spin waves and spin-polarized currents with magnetic inhomogeneities in nanostructured ferromagnetic materials" of the Department of General and Experimental Physics of the National Technical University of Ukraine «Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute»

***Object of research*** magnetic skyrmion energy similar solutions of the Landau-Lifshitz equation in ferromagnet

***Subject of research*** magnetic skyrmion- similar solutions of the Landau- Lifshitz equation in ferromagnet

***Purpose of work*** To find out how skyrmions move in a cylindrical nanobolon, and also analyze the dependences of the energies of a skyrmion-similar solution of the Landau - Lifshitz equation in a cylindrical ferromagnetic nanoshell on the system parameters.

***Research methods*** methods of mathematical analysis, methods of the theory of partial differential equations, methods of mathematical physics

***Information about the volume of the report, the number of illustrations, tables, applications and literary names in the list of used ones*** 84 pages of the report, 26 illustrations, 61 literary titles.

***The purpose of the individual task, the methods used and the results obtained***

Using the Landau-Lifshitz equation to calculate the energy for the skyrmion- similar solution of the Landau-Lifshitz equation in a cylindrical ferromagnetic nano-shell. The researches were carried out by analytical and numerical methods using modern methods of theoretical physics. The dynamics of magnetic moment in spin-transfer systems were described by the Landau-Lifshitz equation.

***Conclusion*** It is shown that the main aspects of the dynamics and interaction of magnetic skyrmions in nano-shells are based on an analytical model.

***Keyword list (no more than 20)*** spin waves, antiferromagnet, anisotropy, skyrmion, spintronics, magnon, domains, domain walls, nanoelectronics, spin-gate transistor, MRAM.

***Signature of the head*** \_\_\_\_\_