ЕКСПОНЕНЦІАЛЬНИЙ ТА ЛОГІСТИЧНИЙ РІСТ ПОПУЛЯЦІЇ

О.П. КОЗЕЛ

Людство протягом багатьох віків перебуває у нескінченних пошуках можливих пояснень різноманітних процесів та явищ навколишнього світу. Проте серед них можна виділити найяскравіші, наприклад, спонтанні виникнення часових, просторових чи просторово-часових структур. Тобто стихійні утворення високовпорядкованих систем, які сформувалися у наслідок взаємодії великої кількості об'єктів. Задля того, щоб ефективно розкрити загальні закономірності самоорганізації, вчені у своїх дослідженнях використовують складні математичні апарати.

Математичне моделювання є ключовим інструментом для аналізу як природно біологічних, так і соціально-економічних ресурсів. Адже застосування динамічних систем не обмежується описом закономірності зміни популяції, але й прогнозує її подальший розвиток. Найвідомішими моделями даного типу є експоненціальна та логістична модель росту.

Якщо x означити як щільність популяції у момент часу t і ввести деяку сталу a то отримаємо найпростіше диференціальне рівняння, яке описує зростання популяції:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = ax.$$

Розв'язавши це рівняння, матимемо функцію $x = x_0 e^{at}$ де x_0 позначає щільність популяції в момент часу при $t = 0$ [1]. Функція дає змогу схарактеризувати коливання чисельності колонії бактерій, доки не настане повне виснаження ресурсів поживного середовища. З диференціального рівняння випливає, що частка особин у великій вибірці, які продовжували розмножуватись протягом деякого короткого періоду Δt буде еквівалентною значенню $a\Delta t$. Винятковість застосування даного рівняння полягає у обмеженості періоду часу та незалежності зростання кількості особин популяції від резерву поживного середовища.

Найчастіше для опису колоній, де стабілізація чисельності відбувається через зовнішні обмеження, використовують логістичні рівняння:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = ax - bx^2.$$

або

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = ax\left(1 - \frac{x}{\frac{a}{b}}\right) = ax\left(1 - \frac{x}{k}\right)$$

де a — істинна швидкість зростання, а k — місткість середовища [2]. Дана динамічна система опише S-подібну криву.

Під терміном місткість середовища слід розглядати максимальну кількість особин, яку даний субстрат може підтримувати. На відміну від експоненціальної моделі, яка припускає, що приріст популяції завжди пропорційний її розміру, логістичне рівняння вводить коригувальний фактор. Слід зазначити, що у такій динамічній системі зі зростанням t величина x монотонно наближається до сталого значення.

При малих значеннях змінної x рівняння зводиться до найпростішого, що дозволяє прослідкувати експоненціальний характер зростання, відповідно дана культура стрімко збільшується у розмірах. Це так звані фази затримки та прискорення. Однак при збільшенні чисельності бактерій, коли $x \to k$, то значення коригувального фактора прямує до нуля. Після чого починається фаза уповільнення, на графіку це зображується точкою перегину S-подібної кривої. Коли значення x максимально наблизилось до k, швидкість зростання $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ прямує до нуля. Популяція досягає рівноваги: народжуваність приблизно дорівнює смертності, її чисельність збалансовується навколо k. Це кульмінація фази плато. Саме ця здатність передбачати стабілізацію робить логістичну модель ефективним інструментом для досліджень, які пов'язані з екологією, соціологією та економікою.

Отже, експоненціальна та логістична моделі росту є фундаментальними прикладами застосування диференціальних рівнянь у природничих науках. Перша математична структура описує ідеалізовані умови необмеженого зростання, тоді як друга передбачає вплив різних чинників. Їхнє вивчення розвиває не лише математичну компетентність, а й уміння аналізувати реальні процеси за допомогою математики.

Література

[1] Лошицький П.П., Ніколов М.О. *Моделювання біофізичних процесів. Вступ до синергетики.* — Навч. посібник. Електронне видання. — 2014. — 412 с. — URL: https://lnk.ua/1V9kj0M4g.

[2] Кагадій Т.С., Сушко Л.Ф., Щербина І.В., Онопрієнко О.Д., Шпорта А.Г. *Диференціальні рівняння: теорія, приклади, розв'язання.* — Навч. посібник. Електронне видання. — 2022. — 192 с. — URL: https://lnk.ua/QV0k625eg.

ВНУ ім. Лесі Українки, Луцьк, Україна
Email address: `k.oksanapetrivna4@gmail.com`