

Моральне сподівання

Т. В. Маловічко¹

¹*КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна*

tatianamtv@protonmail.com

Анотація

Поняття морального сподівання було запропоновано Даніелем Бернуллі для справедливої оцінки прибутків та збитків внаслідок азартної гри або інших подій, пов'язаних із ризиком. Це поняття протягом століть привертало до себе увагу математиків, потім зникло з робіт, присвячених теорії ймовірностей, але дало початок теорії очікуваної корисності в економіці.

Ключові слова: моральне сподівання; Санкт-петербурзький парадокс; теорія очікуваної корисності.

Поняття морального сподівання походить від роботи Даніеля Бернуллі «Specimen theoriae novae de mensura sortis» 1738 року [Bernoulli, 1738]. У ній Бернуллі досліджує правила «за допомогою яких кожен міг би самостійно оцінити свій жереб у залежності від стану своїх справ». Виходячи з того, що однаковий виграш у більшості випадків дає бідному більше користі, ніж багатому, Бернуллі висловив гіпотезу, що «довільний малий виграш дає вигоду, обернено пропорційну вже наявному статку». При цьому під статком він розуміє не тільки наявні гроші, рухоме та нерухоме майно, але й працездатність із можливістю просити милостиню включно.

Якщо позначити наявний статок як x , нескінченно малий виграш як dx , наявну вигоду як y , а нескінченно малу вигоду, яку дехто, що володіє статком x , отримує завдяки нескінченно малому виграшу dx , як dy , то Бернуллі стверджує, що

$$dy = \frac{b \cdot dx}{x},$$

де b – деяка константа, тобто

$$y = b \log \frac{x}{a},$$

де a – статок у початковий момент часу.

З увігнутості графіка логарифмічної функції Бернуллі робить висновок, що «за будь-якої гри, якими б справедливими не були поставлені умови, кожен з двох

партнерів з самого початку зазнає деяких збитків, – звичайно, це явна вказівка з боку природи на необхідність уникати азартної гри».

Той самий підхід Даніель Бернуллі використовує для розв’язування задач, пов’язаних із страхуванням. Він аналізує, яким має бути розумний розмір страхового внеску, та приходять до висновку, що «ті товари, зазнають небезпеки, доцільніше поділяти на кілька частин, ніж ризикувати всіма ними одразу».

Також Бернуллі розглядає задачу, яку його двоюрідний брат Микола Бернуллі запропонував Монмору: «Петро підкидає вгору монету, доки вона не впаде гербом вгору; якщо це відбувається після першого кидка, він повинен дати Павлу 1 дукат, але якщо тільки після другого – 2 дукати, після третього – 4, після четвертого – 8 тощо, таким чином, після кожного кидка число дукатів подвоюється. Питання: яка оцінка жереба для Павла?» Ця задача одержала назву Санкт-Петербурзький парадокс, оскільки «хоча обчислення вказують, що сподівання Павла нескінченно великі, ... не знайдеться жодної скільки-небудь розсудливої людини, що охоче не продавала б це сподівання за 20 дукатів».

Тим самим методом Даніель Бернуллі оцінює сподівання виграшу Павла як

$$\sqrt{\alpha + 1} \cdot \sqrt[4]{\alpha + 2} \cdot \sqrt[8]{\alpha + 4} \cdot \sqrt[16]{\alpha + 8} \cdot \dots - \alpha,$$

де α – весь статок Павла. Зокрема, якщо статок Павла дорівнює 1000 дукатів, то оцінка його жереба складає приблизно 6 дукатів [Bernoulli, 1738].

Термін «моральне сподівання» Даніель Бернуллі не використовував. Першим це словосполучення вжив Габріель Крамер у листі, написаному Миколі Бернуллі в 1728 році, який Даніель Бернуллі навів у кінці тої самої своєї роботи. У цьому листі Крамер пропонує своє розв’язання Санкт-Петербурзького парадокса, виходячи з того, що всі суми понад 10 мільйонів або, для більшої зручності, 2^{24} слід визнати рівноцінними між собою, оскільки вони не приносять більшого задоволення, ніж 10 мільйонів екю. Тоді моральну оцінку свого сподівання він оцінює у 13 екю. При цьому він не вважав свою гіпотезу єдиною можливою та безумовно правильною. У цьому листі Крамер використовує слова «моральне сподівання» («l’esperance morale») у такій фразі: «Mais cette quantité n’est pas l’équivalent, car l’équivalent doit etre non pas egal a mon esperance, mais tel que le chagrin de sa perte soit egal á l’esperance morale du plaisir que j’espere de recevoir en gagnant» [Bernoulli, 1738].

Словосполучення «моральне сподівання» в якості математичного терміну першим використав П’єр-Симон Лаплас у своїй роботі «Théorie analytique des probabilités» 1812 року. Моральне сподівання, що відповідає фізичному статку x , Лаплас вважає рівним

$$y = k \cdot \log x + \log h.$$

При цьому x та y завжди додатні, оскільки людина, що нічим не володіє, розглядає своє існування як моральне благо, яке можна порівняти з фізичним статком, цінність якого дуже важно визначити, але яке не може бути менше тієї грошової суми, що необхідна для існування.

У своїй книзі Лаплас розглядає ті самі задачі, що й Данієль Бернуллі (про не вигідність азартних ігор, про користь страхування, про розмір страхового внеску, санкт-петербурзький парадокс) та доповнює їх задачею про довічну ренту, в якій приходить до висновку щодо переваги сумісної довічної ренти перед роздільною [Laplace, 1812].

Використання поняття морального сподівання неодноразово піддавалося критиці.

Зокрема, д'Аламбер при аналізі підходу Данієля Бернуллі до розв'язання санкт-петербурзького парадоксу, стверджував, що використання морального сподівання, по-перше, не усуває проблему, яка полягає в тому, що розсудливі люди не захочуть грати у цю гру практично за будь-яких обставин, не кажучи вже про те, щоб поставити все своє майно на її результат. По-друге, поняття морального сподівання, яке зважає очікувані прибутки та збитки у порівнянні з наявним капіталом гравця, було довільним чином спрощене та довільним чином застосоване. Можна легко уявити собі інші фактори, окрім майна, що стосуються особистих обставин гравців, які також могли б бути правдоподібно залучені до цієї задачі, але які надзвичайно важко оцінити кількісно [Daston, 1979].

Василь Петрович Єрмаков (видатний математик, автор близько 150 робіт, член-кореспондент Петербурзької Академії наук, професор Київського університету, перший завідувач кафедри Вищої математики Київського політехнічного інституту) критикував теорію морального сподівання («нравственного ожидания»). У підручнику «Теорія ймовірностей» 1879 року він писав: «Але теорія морального сподівання не витримує строгої критики: по-перше, тому, що важко дати точну міру для визначення морального задоволення; по-другу, якщо гра за теорією морального сподівання нешкідлива для одного гравця, то вона завжди не вигідна для його супротивника. Тому я вважаю, що моральне сподівання має бути виключено з теорії ймовірностей» [Єрмаков, 1879].

Жозеф Луї Франсуа Бертран у «Calcul des probabilités» писав: «Теорія морального сподівання стала класичною, і ніколи слово не було використане так точно: її вивчають, її викладають, її розвивають у в книгах, які заслужено відомі. Але на цьому успіх завершується; вона ніколи не мала й не буде мати ніякого практичного застосування» [Bertrand, 1907].

Австрійський математик Карл Менгер (молодший) у своїй статті, написаній до 1923 р., яка була представлена в 1927 р. та опублікована в 1934 р., вказав, що використана Данієлем Бернуллі логарифмічна функція не розв'язує санкт-петербурзький парадокс, якщо виграші замість 2^n покласти рівними e^{2^n} . Подібним чином можна побудувати контрприклад і при використанні замість логарифмічної функції будь-якої іншої зростаючої необмеженої функції. Щоб пояснити поведінку, що спостерігається, необхідно використати обмежену функцію корисності [Golik, 2016].

Робота Менгера мала великий вплив на створення теорії очікуваної корисності Джоном фон Нейманом та Оскаром Моргенштерном [Golik, 2016].

Цю теорію розвивали у подальшому Мілтон Фрідман та Леонард Дж. Севідж. Вони представили гіпотезу, що споживча одиниця поводить ся так, немов у неї є послідовний набір уподобань і ці уподобання можна було б повністю описати, приписуючи числове значення, яке називається «корисністю», кожній альтернативі. Нехай I являє собою дохід споживчої одиниці за одиницю часу, а $U(I)$ – корисність, що відповідає цьому доходу. Відповідна функція корисності $U(I)$ може мати як опуклі, так й увігнуті ділянки. Якщо на певній ділянці функція корисності опукла вгору, то споживча одиниця вважає за краще за наявного доходу уникати ризику, наприклад, купуючи страховку. Якщо ж функція корисності опукла вниз, то споживча одиниця віддає перевагу ризикованій поведінці, наприклад, приймаючи участь у лотереї. Таким чином, це пояснює, чому одні й ті самі люди можуть, як купувати страховку, так і приймати участь в азартних іграх [Friedman, Savage, 1948].

Таким чином, поняття морального сподівання дало початок теорії очікуваної корисності.

Перелік посилань

Bernoulli D. (1738). *Specimen theoriae novae de mensura sortis*. Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae, Tomus V, (In Classe Mathematica), 1738, pp. 175–192.

Laplace, Pierre-Simon de. (1812) *Théorie analytique des probabilités*. Paris, Mme Ve Courcier.

Daston L.J. (1979). D'Alembert's critique of probability theory. *Historia Mathematica*, no. 6, pp. 259–279.

Ермаков В.П. (1879). *Теорія вероятностей*. Київ: Въ типографіи Императорскаго Университета Св. Владимира. (І.І. Завадзкаго).

Bertrand J. (1907). *Calcul des probabilités*. Publisher Gauthier Villars Imprimeur Libraire.

Golik J. (2016). *Expected Utility Hypothesis – its origin and development* Gdansk university of technology.

Friedman M., Savage, L.J. (1948). The Utility Analysis of Choices Involving Risk *The Journal of Political Economy*, vol. 56, no. 4, pp. 279–304.