МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ:
РОЗРАХУНКОВА РОБОТА

*Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для студентів,
які навчаються за спеціальністю124 «Системний аналіз»*

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2019

Теорія ймовірностей: Розрахункова робота [Електронний ресурс] : навч. посіб. для студ. спеціальності 124 «Системний аналіз» / КПІ ім. Ігоря Сікорського ; уклад.: І. Ю. Каніовська, О. В. Стусь. – Електронні текстові дані (1 файл: 694 Кбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2019. – 87 с.

Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського (протокол № 4 від 19.12.2019 р.)
за поданням Вченої ради ІПСА (протокол № 9 від 28.10.2019 р.)

Електронне мережне навчальне видання

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ:
РОЗРАХУНКОВА РОБОТА

Укладачі: *Каніовська Ірина Юріївна,* канд. фіз.-мат. наук, доц.
Стусь Олександр Вікторович, канд. фіз.-мат. наук

Відповідальний редактор *Бондаренко В. Г.,* д-р фіз.-мат. наук, проф.

Рецензент: *Ільєнко А. Б.,* канд. фіз.-мат. наук, доц., доцент кафедри математичного аналізу та теорії ймовірностей КПІ ім.. Ігоря Сікорського

Посібник містить розрахункову роботу по темі «Випадкові вектори» дисципліни «Теорія ймовірностей», яка містить два завдання. У завданні 1 розглядаються дискретні двовимірні випадкові вектори, а у завданні 2 – неперервні випадкові вектори, які мають рівномірний розподіл у вказаній області на площині. Наведено короткі теоретичні відомості та приклади розв’язання завдання 1 та завдання 2.

Для студентів математичних і технічних спеціальностей університетів.

Зміст

Вступ

Дисципліна «Теорія ймовірностей» є однією з основних фундаментальних дисциплін у загальнонауковій підготовці студентів за спеціальністю 124 «Системний аналіз» та освітніми програмами: Системний аналіз і управління та Системний аналіз фінансового ринку.

Дисципліна викладається у третьому семестрі.

Для забезпечення засвоювання матеріалу потрібно виробити в студентів логічне та алгоритмічне мислення, необхідне для розв'язання теоретичних та практичних завдань із теорії ймовірностей:

- навчити самостійно поглиблювати свої знання з теорії ймовірностей, прив'язуючи їх до практичних задач за фахом;
- прищеплення навичок аналізу практичних задач за фахом і вміння розв'язувати їх математичними методами, які викладаються в дисципліні.

Для вирішення цих задач у навчальній програмі дисципліни передбачена розрахункова робота «Випадкові вектори».

За програмою на виконання розрахункової роботи заплановано 36 год. самостійної роботи студента.

Виконання розрахункової роботи допоможе закріпити знання та уміння не лише за основними розділами теорії ймовірностей, але й математичного аналізу та лінійної алгебри. Зокрема, студенти отримають хорошу практику в інтегруванні функцій багатьох змінних, яке у третьому семестрі вивчається в дисципліні «Математичний аналіз». Крім того, поняття матриці, додатна визначеність матриці, симетричність матриці вивчаються на першому курсі в дисципліні «Алгебра та геометрія». Також, при виконанні розрахункової роботи студенти крім стандартних методів розв’язання задач можуть продемонструвати індивідуальний творчий підхід.

Розрахункова робота «Випадкові вектори» має два практичних завдання. У завданні 1 розглядаються двовимірні дискретні випадкові вектори. У завданні 2 – неперервні випадкові вектори, які мають рівномірний розподіл у заданій області на площині.

Даний посібник містить порядок виконання завдання 1 та завдання 2, а також вимоги для успішного захисту розрахункової роботи. Для полегшення виконання роботи наведено короткі теоретичні відомості та приклади розв’язання завдань 1 та 2. У кінці посібника дано сто індивідуальних варіантів завдань розрахункової роботи.

Зміст розрахункової роботи
«Випадкові вектори»

Розрахункова робота складається з виконання двох завдань.

Порядок виконання завдання 1

За таблицею розподілу координат дискретного випадкового вектора $\vec{\xi} = (\xi_1,\ \xi_2)$

Знайти:

1. Ряди розподілу координат ξ_1 та ξ_2.
2. Функції розподілу $F_{\xi_1}(x)$ та $F_{\xi_2}(y)$ координат ξ_1 та ξ_2 відповідно та побудувати графіки цих функцій.
3. Функцію розподілу $F_{\vec{\xi}}(x,\ y)$ випадкового вектора.
4. Математичні сподівання координат та кореляційну матрицю.
5. Умовні ряди розподілу для кожної координати.
6. Умовні математичні сподівання для кожної координати з перевіркою.

Порядок виконання завдання 2

Вважаючи, що неперервний випадковий вектор $\vec{\xi} = (\xi_1,\ \xi_2)$ рівномірно розподілений у заданій області

Знайти:

1. Щільності розподілу координат ξ_1 та ξ_2.
2. Функції розподілу $F_{\xi_1}(x)$ та $F_{\xi_2}(y)$ координат ξ_1 та ξ_2 відповідно.
3. Функцію розподілу $F_{\vec{\xi}}(x,\ y)$ випадкового вектора.
4. Математичні сподівання координат та кореляційну матрицю.
5. Умовні щільності розподілу для кожної координати.
6. Умовні математичні сподівання для кожної координати з перевіркою.

Захист розрахункової роботи

На захисті студент отримує теоретичні питання та задачі за темою розрахункової роботи.

Під час захисту розрахункової роботи студент має давати чіткі формулювання означень, формулювати та доводити окремі теоретичні факти. Ключовими поняттями розділу «Випадкові вектори» є: випадковий вектор та його функція розподілу, дискретний випадковий вектор та його ряд розподілу, неперервний випадковий вектор та його щільність, числові характеристики випадкового вектора (центр розсіювання, дисперсія, кореляційний момент, коефіцієнт кореляції), умовні закони розподілу та умовні математичні сподівання випадкових величин, незалежність та некорельованість координат випадкового вектора.

Крім того, під час захисту перевіряється уміння студента розв’язувати задачі наступних типів:

- знаючи ряд розподілу дискретного випадкового вектора, обчислити: ряди розподілу та функції розподілу координат, сумісну функцію розподілу, умовні розподіли координат;
- для неперервного випадкового вектора здійснювати переходи між сумісною щільністю та сумісною функцією розподілу та, виходячи з них, обчислити: щільності, умовні щільності та функції розподілу координат вектора;
- для векторів обох типів знайти центр розсіювання, побудувати кореляційну та нормовану кореляційну матриці, обчислити умовні математичні сподівання, виконавши при цьому перевірку формули повного математичного сподівання, з'ясовувати, чи є координати випадкового вектора незалежними, некорельованими.

Згідно з Положенням про рейтингову систему оцінки успішності студентів з дисципліни «Теорія ймовірностей» розрахункова робота зараховується тільки за умови її захисту студентом. Для захисту розрахункової роботи студенту надається не більше трьох спроб. У залежності від того, з якої спроби студент захистив роботу, нараховується наступна кількість балів:

- захист із першої спроби – 20 балів;
- захист із другої спроби – 15 балів;
- захист із третьої спроби й останній – 10 балів.

Студент допускається до іспиту в третьому семестрі за умови, що поточний рейтинг за семестр складає не нижче 35 балів та захищена розрахункова робота.

1. Теоретичні відомості

Ураховуючи умову, розглянемо випадкові вектори розмірності 2 ($\vec{\xi} = (\xi_1,\ \xi_2)$). Відомості про випадкові величини, які не пов’язані безпосередньо з випадковими векторами вважаються відомими і тут не наводяться.

1. Означення випадкового вектора. Функція розподілу випадкового вектора

Означення 1. Нехай $\langle \Omega, \mathfrak{I}, P \rangle$ – ймовірнісний простір стохастичного експерименту. Назвемо ***двовимірним випадковим вектором*** або ***системою випадкових величин*** $\vec{\xi}(\omega) = \big(\xi_1(\omega),\ \xi_2(\omega)\big)$ векторну функцію, яка визначена на просторі Ω та має значення в евклідовому просторі $\mathbb{R}^2$. Крім того, подія $\{\xi_1(\omega) < x,\ \xi_2(\omega) < y\} \in \mathfrak{I} \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Випадкові величини ξ_1 та ξ_2 називаються ***координатами*** або ***компонентами випадкового вектора***.

Випадковий вектор уважається заданим, коли відома його ***функція розподілу***.

Означення 2. Функцією розподілу випадкового вектора $\vec{\xi} = (\xi_1,\ \xi_2)$ називається ймовірність одночасної появи двох подій $\{\xi_1 < x\}$ та $\{\xi_2 < y\}$ $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, тобто

$$F_{\vec{\xi}}(x, y) = P\{\xi_1 < x,\ \xi_2 < y\}. \tag{1.1}$$

Функція розподілу двовимірного випадкового вектора має просту геометричну інтерпретацію: значення $F_{\vec{\xi}}(x, y)$ збігаються з імовірністю попадання точки з випадковими координатами системи $(\xi_1,\ \xi_2)$ усередину нескінченного квадранта з вершиною у точці (x, y) (рис. 1.1).

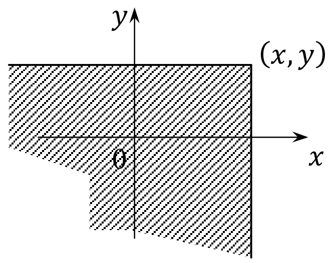


Рисунок 1.1

Наведемо деякі властивості функції розподілу випадкового вектора:

1) функція розподілу є монотонно неспадною функцією двох аргументів, область значень якої є відрізок $[0;\ 1]$.

2)

$$\lim_{(x,y)\to(-\infty,-\infty)} F_{\vec{\xi}}(x, y) = \lim_{x\to-\infty} F_{\vec{\xi}}(x, y) = \lim_{y\to-\infty} F_{\vec{\xi}}(x, y) = 0;$$

$$\lim_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)} F_{\vec{\xi}}(x, y) = 1;$$

3) мають місце умови узгодженості:

$$\lim_{y\to+\infty} F_{\vec{\xi}}(x, y) = F_{\xi_1}(x); \lim_{x\to+\infty} F_{\vec{\xi}}(x, y) = F_{\xi_2}(y); \qquad (1.2)$$

4) функція розподілу системи двох випадкових величин є неперервною зліва по кожному з аргументів, тобто

$$F_{\vec{\xi}}(x-0, y) = F_{\vec{\xi}}(x, y-0) = F_{\vec{\xi}}(x, y).$$

2. Дискретні випадкові вектори. Таблиця розподілу та функція розподілу дискретного випадкового вектора

Означення 3. ***Випадковий вектор*** $\vec{\xi} = (\xi_1,\ \xi_2)$ називається ***дискретним***, якщо його компоненти є дискретними випадковими величинами.

Будемо вважати, що множини значень випадкових величин ξ_1 та ξ_2 скінченні.

Найбільш повним імовірнісним описанням випадкового вектору є закон (ряд) розподілу. У випадку системи двох дискретних випадкових величин $(\xi_1,\ \xi_2)$ закон розподілу найчастіше задається таблицею розподілу (табл. 1.1).

Таблиця 1.1 – Таблиця розподілу вектора $\vec{\xi}$

$\xi_1 \backslash \xi_2$	y_1	y_2	$\cdots$	y_m
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1m}
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2m}
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
x_n	p_{n1}	p_{n2}	$\cdots$	p_{nm}

У табл. 1.1 $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ – множина значень ξ_1, $\{y_1, y_2, \cdots, y_m\}$ – множина значень ξ_2, $n, m \in \mathbb{N}$, $p_{kj} = P\{\xi_1 = x_k, \xi_2 = y_j\}$, $k = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$.

Оскільки події $\{\xi_1 = x_k, \xi_2 = y_j\}$ – несумісні та єдино можливі, тобто утворюють повну групу подій, то

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}p_{kj} = \sum_{k=1}^{n}p_{k\cdot} = \sum_{j=1}^{m}p_{\cdot j} = 1, \tag{1.3}$$

де $$p_{k\cdot} = \sum_{j=1}^{m}p_{kj} = P\{\xi_1 = x_k\}, \tag{1.4}$$

$$p_{\cdot j} = \sum_{k=1}^{n}p_{kj} = P\{\xi_2 = y_j\}. \tag{1.5}$$

Тобто, щоб знайти ряди розподілу координат ξ_1 та ξ_2 за таблицею розподілу випадкового вектора $\vec{\xi}$ (табл. 1.1) потрібно додати ймовірності p_{kj} з відповідного цьому значенню рядка (або стовпця) даної таблиці.

Для дискретного двовимірного випадкового вектора значення функції розподілу в точці (x, y) є сумою ймовірностей p_{kj} по усіх точках (x_k, y_j), які потрапили усередину нескінченного квадранта з вершиною у точці (x, y) (рис. 1.1) та записується коротко так:

$$F_{\vec{\xi}}(x, y) = \sum_{k:x_k<x}\sum_{j:y_j<y}p_{kj}. \tag{1.6}$$

Ця функція є кусково-сталою, монотонно неспадною, неперервною зліва та набуває значення на відрізку $[0;\ 1]$.

3. Неперервні випадкові вектори. Щільність розподілу неперервного випадкового вектора

Означення 4. Випадковий вектор $\vec{\xi} = (\xi_1,\ \xi_2)$ називається ***неперервним випадковим вектором*** або ***системою неперервних випадкових величин***, компоненти цього вектора ξ_1 та ξ_2 – неперервні випадкові величини.

Закон розподілу неперервного випадкового вектора найчастіше задається щільністю розподілу ймовірностей.

Означення 5. Щільність розподілу ймовірностей системи двох неперервних випадкових величин $(\xi_1,\ \xi_2)$ дорівнює границі (якщо вона існує)

$$f_{\vec{\xi}}(x,y) = \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \frac{P\{(\xi_1,\xi_2)\in\Pi\}}{\Delta x\Delta y},$$

де Π – прямокутник $[x, x+\Delta x] \times [y, y+\Delta y]$.

Функція розподілу неперервного випадкового вектора $F_{\vec{\xi}}(x,y)$ є неперервною на $\mathbb{R}^2$.

Властивості щільності розподілу випадкового вектора:

1) якщо функція розподілу $F_{\vec{\xi}}(x,y)$ неперервна та має неперервну другу мішану похідну $\frac{\partial^2 F_{\vec{\xi}}(x,y)}{\partial x\partial y}$, то

$$f_{\vec{\xi}}(x,y) = \frac{\partial^2 F_{\vec{\xi}}(x,y)}{\partial x\partial y}; \tag{1.7}$$

2) $f_{\vec{\xi}}(x,y) \geq 0\ \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$;

3) функція розподілу $F_{\vec{\xi}}(x,y)$ можна знайти як інтеграл

$$F_{\vec{\xi}}(x,y) = \int_{-\infty}^{x} dt \int_{-\infty}^{y} f_{\vec{\xi}}(t,s)ds; \tag{1.8}$$

4) має місце умова нормування

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\vec{\xi}}(x,y)dxdy = 1; \tag{1.9}$$

5) функції розподілу компонент вектора $F_{\xi_1}(x)$ та $F_{\xi_2}(y)$ можна знаходити за формулами

$$\begin{cases} F_{\xi_1}(x) = \int_{-\infty}^{x} dt \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\vec{\xi}}(t,s)ds; \\ F_{\xi_2}(y) = \int_{-\infty}^{y} ds \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\vec{\xi}}(t,s)dt; \end{cases} \tag{1.10}$$

6) знаючи щільність розподілу вектора $f_{\vec{\xi}}(x,y)$ можна знаходити щільності розподілу його координат $f_{\xi_1}(x)$ та $f_{\xi_2}(y)$

$$\begin{cases} f_{\xi_1}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\vec{\xi}}(x,y)dy; \\ f_{\xi_2}(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\vec{\xi}}(x,y)dx; \end{cases} \tag{1.11}$$

7) ймовірність потрапляння випадкової точки $(\xi_1,\ \xi_2)$ в замкнену область Δ на площині *XOУ* можна знайти за формулою

$$P\{\vec{\xi} \in G\} = \iint_{\Delta} f_{\vec{\xi}}(x,y)dxdy. \tag{1.12}$$

Означення 6. Система двох неперервних випадкових величин $(\xi_1,\ \xi_2)$ має ***рівномірний закон розподілу*** в області D на площині, якщо щільність розподілу ймовірностей цього вектора дорівнює:

$$f_{\vec{\xi}}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{S_D}, (x,y) \in D; \\ 0,\ \ (x,y) \notin D, \end{cases} \tag{1.13}$$

де S_D – площа області D.

4. Поняття незалежності компонент випадкового вектора

Означення 7. Випадкові величини ξ_1 та ξ_2 називаються ***незалежними***, якщо

$$F_{\vec{\xi}}(x, y) = F_{\xi_1}(x) \cdot F_{\xi_2}(y). \qquad (1.14)$$

Тобто події $\{\xi_1 < x\}$ та $\{\xi_2 < y\}$ є незалежними $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Для дискретного випадкового вектора $\vec{\xi} = (\xi_1,\ \xi_2)$ з таблицею розподілу (табл. 1.1) умову незалежності ξ_1 та ξ_2 можна записати так:

$$p_{kj} = P\{\xi_1 = x_k\} \cdot P\{\xi_2 = y_j\} = p_{k\cdot} \cdot p_{\cdot j},\ k = \overline{1, n},\ j = \overline{1, m}. \qquad (1.15)$$

А для неперервного вектора $\vec{\xi} = (\xi_1,\ \xi_2)$ із сумісною щільністю розподілу $f_{\vec{\xi}}(x, y)$ та щільностями розподілу координат $f_{\xi_1}(x)$ та $f_{\xi_2}(y)$

$$f_{\vec{\xi}}(x, y) = f_{\xi_1}(x) \cdot f_{\xi_2}(y). \qquad (1.16)$$

5. Числові характеристики випадкових векторів. Центр розсіювання. Кореляційна матриця.

Означення 8. Математичним сподіванням випадкового вектора $\vec{\xi} = (\xi_1,\ \xi_2)$ називається вектор $\overrightarrow{E\xi} = (E\xi_1,\ E\xi_2)$, де $E\xi_i$, $i = \overline{1,2}$ є математичним сподіванням компоненти ξ_i.

Геометрично математичне сподівання випадкового вектора можна вважати точкою з координатами $(E\xi_1,\ E\xi_2)$, навколо якої групуються можливі значення $\vec{\xi}$. Часто цю точку називають ***центром розсіювання.***

Для знаходження координат центра розсіювання дискретного випадкового вектора $\vec{\xi} = (\xi_1,\ \xi_2)$ заданого таблицею розподілу (табл. 1.1) користуються формулами:

$$\begin{cases} E\xi_1 = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_k p_{kj}; \\ E\xi_2 = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} y_j p_{kj}. \end{cases} \tag{1.17}$$

Або, знаючи ряди розподілу ξ_1 та ξ_2:

$$\begin{cases} E\xi_1 = \sum_{k=1}^{n} x_k p_{k\cdot}; \\ E\xi_2 = \sum_{j=1}^{m} y_j p_{\cdot j}. \end{cases} \tag{1.18}$$

Математичні сподівання компонент неперервного випадкового вектора $\vec{\xi} = (\xi_1,\ \xi_2)$ зі щільністю розподілу $f_{\vec{\xi}}(x,y)$:

$$\begin{cases} E\xi_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{\vec{\xi}}(x,y)dxdy; \\ E\xi_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} y f_{\vec{\xi}}(x,y)dxdy. \end{cases} \tag{1.19}$$

Або, якщо відомі щільності розподілу координат $f_{\xi_1}(x)$ та $f_{\xi_2}(y)$:

$$\begin{cases} E\xi_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{\xi_1}(x)dx; \\ E\xi_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_{\xi_2}(y)dy. \end{cases} \tag{1.20}$$

Дисперсії компонент випадкового вектора $\vec{\xi} = (\xi_1,\ \xi_2)$ характеризують розсіювання компонент у напрямі відповідної координатної осі. Зокрема, дисперсія компоненти ξ_1 означає розсіювання відносно осі *OX*. Її знаходимо за формулою

$$D\xi_1 = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (x_k - E\xi_1)^2 p_{kj} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_k^2 p_{kj} - (E\xi_1)^2, \qquad (1.21)$$

або за формулою

$$D\xi_1 = \sum_{k=1}^{n} (x_k - E\xi_1)^2 p_{k\cdot} = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 p_{k\cdot} - (E\xi_1)^2. \qquad (1.22)$$

Аналогічно дисперсію компоненти ξ_2, яка означає розсіювання відносно осі *OY*, обчислюємо за формулою

$$D\xi_2 = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \left(y_j - E\xi_2\right)^2 p_{kj} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} y_j^2 p_{kj} - (E\xi_2)^2, \qquad (1.23)$$

або за формулою

$$D\xi_2 = \sum_{j=1}^{m} \left(y_j - E\xi_2\right)^2 p_{\cdot j} = \sum_{j=1}^{m} y_j^2 p_{\cdot j} - (E\xi_2)^2. \qquad (1.24)$$

У випадку двовимірного неперервного вектора $\vec{\xi} = (\xi_1,\ \xi_2)$ дисперсії компонент обчислюються за формулами:

$$D\xi_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E\xi_1)^2 f_{\vec{\xi}}(x,y)dxdy =$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_{\vec{\xi}}(x,y)dxdy - (E\xi_1)^2; \qquad (1.25)$$

$$D\xi_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E\xi_1)^2 f_{\xi_1}(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_{\xi_1}(x)dx - (E\xi_1)^2; \qquad (1.26)$$

$$D\xi_2 = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(y - E\xi_2)^2 f_{\vec{\xi}}(x,y)dxdy =$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} y^2 f_{\vec{\xi}}(x,y)dxdy - (E\xi_2)^2; \qquad (1.27)$$
$$D\xi_2 = \int_{-\infty}^{+\infty}(y - E\xi_2)^2 f_{\xi_2}(y)dy = \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 f_{\xi_2}(y)dy - (E\xi_2)^2. \qquad (1.28)$$

Означення 9. Мішаний центральний момент другого порядку випадкового вектора $\vec{\xi} = (\xi_1,\ \xi_2)$, що дорівнює

$$K(\xi_1,\xi_2) = E(\xi_1 - E\xi_1)(\xi_2 - E\xi_2) \qquad (1.29)$$

називається ***кореляційним моментом*** (або ***коваріацією***) випадкових величин ξ_1 та ξ_2.

Для обчислення $K(\xi_1,\xi_2)$ є більш зручна формула

$$K(\xi_1,\xi_2) = E\xi_1\xi_2 - E\xi_1 \cdot E\xi_2. \qquad (1.30)$$

Кореляційний момент двох випадкових величин характеризує як ступінь залежності так і розсіювання випадкових величин.

Для дискретних випадкових величин ξ_1 та ξ_2 кореляційний момент можна обчислювати за формулою

$$K(\xi_1,\xi_2) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(x_k - E\xi_1)\big(y_j - E\xi_2\big)p_{kj} =$$
$$= \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_k y_j p_{kj} - E\xi_1 \cdot E\xi_2, \qquad (1.31)$$

де $p_{kj} = P\{\xi_1 = x_k, \xi_2 = y_j\}$.

Для неперервних випадкових величин ξ_1 та ξ_2 із сумісною щільністю $f_{\vec{\xi}}(x,y)$ ця формула буде такою

$$K(\xi_1, \xi_2) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x - E\xi_1)(y - E\xi_2)f_{\vec{\xi}}(x, y)dxdy =$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xyf_{\vec{\xi}}(x, y)dxdy - E\xi_1 \cdot E\xi_2; \qquad (1.32)$$

Деякі властивості кореляційного моменту:

1) $K(\xi_1, \xi_2) = K(\xi_2, \xi_1)$;
2) $|K(\xi_1, \xi_2)| \leq \sqrt{D\xi_1 \cdot D\xi_2} = \sigma_{\xi_1} \cdot \sigma_{\xi_2}$ (рівність виконується тоді і тільки тоді, коли ξ_1 та ξ_2 лінійно залежні);
3) Якщо ξ_1 та ξ_2 незалежні, то $K(\xi_1, \xi_2) = 0$ (зворотне твердження в загальному випадку не виконується).

Означення 10. Випадкові величини ξ_1 та ξ_2 називаються ***некорельованими***, якщо $K(\xi_1, \xi_2) = 0$.

Тобто з незалежності випадкових величин випливає їхня некорельованість, але з некорельованості, взагалі кажучи, незалежність не слідує.

Кореляційна матриця випадкового вектора $\vec{\xi} = (\xi_1,\ \xi_2)$ будується наступним чином:

$$K = \begin{pmatrix} D\xi_1 & K(\xi_1, \xi_2) \\ K(\xi_2, \xi_1) & D\xi_2 \end{pmatrix}. \qquad (1.33)$$

З властивостей 1) – 3) кореляційного моменту слідує що матриця K є симетричною та невід'ємно визначеною.

Крім кореляційного моменту розглядається безрозмірна величина для оцінки ступеня залежності між випадковими величинами, яка називається коефіцієнтом кореляції.

Означення 11. ***Коефіцієнтом кореляції*** випадкових величин ξ_1 та ξ_2 називається величина

$$r(\xi_1, \xi_2) = \frac{K(\xi_1,\xi_2)}{\sqrt{D\xi_1 \cdot D\xi_2}}. \qquad (1.34)$$

Деякі властивості коефіцієнта кореляції:

1) $r(\xi_1, \xi_2) = r(\xi_2, \xi_1)$;
2) $|r(\xi_1, \xi_2)| \leq 1$ (рівність виконується тоді і тільки тоді, коли ξ_1 та ξ_2 лінійно залежні);
3) $K(\xi_1, \xi_2) = 0 \Leftrightarrow r(\xi_1, \xi_2) = 0$.

Разом із кореляційною матрицею для $\vec{\xi} = (\xi_1, \ \xi_2)$ розглядається ***нормована кореляційна матриця.***

$$R = \begin{pmatrix} 1 & r(\xi_1, \xi_2) \\ r(\xi_2, \xi_1) & 1 \end{pmatrix}, \qquad (1.35)$$

яка також є симетричною та невід'ємно визначеною.

6. Умовні закони розподілу випадкових величин

Означення 12. ***Умовним законом розподілу*** окремої компоненти системи випадкових величин (ξ_1, ξ_2) називається її закон розподілу за умови, що інша компонента набула відповідне значення (для дискретної системи випадкових величин) або влучила в деякій проміжок (для неперервної системи випадкових величин).

Для системи двох дискретних випадкових величин умовні закони розподілу найчастіше задають умовними ймовірностями:

$$\begin{cases} P\left\{\xi_1 = x_k/\xi_2 = y_j\right\} = \frac{P\left\{\xi_1 = x_k,\ \xi_2 = y_j\right\}}{P\left\{\xi_2 = y_j\right\}} = \frac{p_{kj}}{p_{k\cdot}}; \\ P\left\{\xi_2 = y_j/\xi_1 = x_k\right\} = \frac{P\left\{\xi_1 = x_k,\ \xi_2 = y_j\right\}}{P\left\{\xi_1 = x_k\right\}} = \frac{p_{kj}}{p_{\cdot j}}. \end{cases} (k = \overline{1,n},\ j = \overline{1,m}) \quad (1.36)$$

Усі ці ймовірності зручно заносити у таблиці, які назвемо ***умовними рядами розподілу*** (табл. 1.2 – 1.3).

Таблиця 1.2 – Умовні ряди розподілу ξ_1

$P\{\xi_1/\xi_2 = y_j\}$	ξ_1			
	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
$P\{\xi_1/\xi_2 = y_1\}$	$P\{\xi_1 = x_1/\xi_2 = y_1\}$	$P\{\xi_1 = x_2/\xi_2 = y_1\}$	$\cdots$	$P\{\xi_1 = x_n/\xi_2 = y_1\}$
$P\{\xi_1/\xi_2 = y_2\}$	$P\{\xi_1 = x_1/\xi_2 = y_2\}$	$P\{\xi_1 = x_k/\xi_2 = y_2\}$	$\cdots$	$P\{\xi_1 = x_k/\xi_2 = y_2\}$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$P\{\xi_1/\xi_2 = y_m\}$	$P\{\xi_1 = x_1/\xi_2 = y_m\}$	$P\{\xi_1 = x_k/\xi_2 = y_m\}$	$\cdots$	$P\{\xi_1 = x_k/\xi_2 = y_m\}$

Таблиця 1.3 – Умовні ряди розподілу ξ_2

$P\{\xi_2/\xi_1 = x_k\}$	ξ_2			
	y_1	y_2	$\cdots$	y_m
$P\{\xi_2/\xi_1 = x_1\}$	$P\{\xi_2 = y_1/\xi_1 = x_1\}$	$P\{\xi_2 = y_2/\xi_1 = x_1\}$	$\cdots$	$P\{\xi_2 = y_m/\xi_1 = x_1\}$
$P\{\xi_2/\xi_1 = x_2\}$	$P\{\xi_2 = y_1/\xi_1 = x_2\}$	$P\{\xi_2 = y_2/\xi_1 = x_2\}$	$\cdots$	$P\{\xi_2 = y_m/\xi_1 = x_2\}$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$P\{\xi_2/\xi_1 = x_n\}$	$P\{\xi_2 = y_1/\xi_1 = x_n\}$	$P\{\xi_2 = y_2/\xi_1 = x_n\}$	$\cdots$	$P\{\xi_2 = y_m/\xi_1 = x_n\}$

Дискретні випадкові величини ξ_1 та ξ_2 є незалежними тоді і тільки тоді, коли умовні ряди розподілу співпадають з безумовними, тобто $P\left\{\xi_1 = x_k/\xi_2 = y_j\right\} = p_{k\cdot}, j = \overline{1,m}$ та $P\left\{\xi_2 = y_j/\xi_1 = x_k\right\} = p_{\cdot j}, k = \overline{1,n}$.

Для системи двох неперервних випадкових величин умовні закони розподілу найчастіше задають умовними щільностями розподілу.

Означення 12. ***Умовною щільністю розподілу*** компоненти ξ_1 системи неперервних випадкових величин (ξ_1, ξ_2) із сумісною щільністю $f_{\vec{\xi}}(x, y)$ за умови, що друга компонента ξ_2 набула значення з деякого проміжку, дорівнює

$$f_{\xi_1}(x/y) = \frac{f_{\vec{\xi}}(x,y)}{f_{\xi_2}(y)}. \tag{1.37}$$

Аналогічно визначається умовна щільність розподілу компоненти ξ_2 системи неперервних випадкових величин (ξ_1, ξ_2) за умови, що друга компонента ξ_1 набула значення з деякого проміжку:

$$f_{\xi_2}(y/x) = \frac{f_{\vec{\xi}}(x,y)}{f_{\xi_1}(x)}. \tag{1.38}$$

Для обчислення умовних щільностей можна використати формули:

$$\begin{cases} f_{\xi_1}(x/y) = \dfrac{f_{\vec{\xi}}(x,y)}{\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\vec{\xi}}(x,y)dx}; \\ f_{\xi_2}(y/x) = \dfrac{f_{\vec{\xi}}(x,y)}{\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\vec{\xi}}(x,y)dy}. \end{cases} \tag{1.39}$$

Умовні щільності, як і безумовні задовольняють умови невід’ємності

$$f_{\xi_1}(x/y) \geq 0, f_{\xi_2}(y/x) \geq 0$$

та нормування

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi_1}(x/y)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi_2}(y/x)dy = 1.$$

Неперервні випадкові величини ξ_1 та ξ_2 є незалежними тоді і тільки тоді, коли умовні щільності розподілу співпадають з безумовними, тобто $f_{\xi_1}(x/y) = f_{\xi_1}(x)$ та $f_{\xi_2}(y/x) = f_{\xi_2}(y)$.

7. Умовні математичні сподівання випадкових величин

По відношенню до умовних законів розподілу випадкових величин можна ввести поняття умовного математичного сподівання. Розглянемо спочатку систему двох дискретних випадкових величин (ξ_1, ξ_2).

Означення 13. ***Умовним математичним сподіванням*** дискретної випадкової величини ξ_2 при $\xi_1 = x_k$, де x_k, $k = \overline{1,n}$ – одне з можливих значень ξ_1, називають величину

$$E(\xi_2/\xi_1 = x_k) = \sum_{j=1}^{m} y_j P\{\xi_2 = y_j/\xi_1 = x_k\} = \psi(x_k), \qquad (1.40)$$

де y_j, $j = \overline{1,m}$ – значення, яких може набувати випадкова величина ξ_2. Аналогічно вводиться поняття умовного математичного сподівання ξ_1 при $\xi_2 = y_j$

$$E(\xi_1/\xi_2 = y_j) = \sum_{k=1}^{n} x_k P\{\xi_1 = x_k/\xi_2 = y_j\} = \varphi(y_j). \qquad (1.41)$$

Далі розглядається випадкова величина $E(\xi_1/\xi_2)$, яка приймає значення $E(\xi_1/\xi_2 = y_j)$ з ймовірностями $P\{\xi_2 = y_j\}$, $j = \overline{1,m}$, та випадкова величина $E(\xi_2/\xi_1)$, що приймає значення $E(\xi_2/\xi_1 = x_k)$ з ймовірностями

$P\{\xi_1 = x_k\}$, $k = \overline{1,n}$. Випадкова величина $E(\xi_1/\xi_2) = \varphi(\xi_2)$ називаються умовним математичним сподіванням ξ_1 відносно ξ_2. Аналогічно випадкова величина $E(\xi_2/\xi_1) = \psi(\xi_1)$ – умовне математичне сподіванням ξ_2 відносно ξ_1.

За аналогічною схемою вводиться поняття умовного математичного сподівання для системи неперервних випадкових величин (ξ_1, ξ_2).

Означення 14. Умовними математичними сподіваннями неперервних випадкових величин ξ_1 та ξ_2 називають величини, які обчислюють за формулами:

$$\begin{cases} E(\xi_2/\xi_1 = x) = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_{\xi_2}(y/x) dy = \psi(x); \\ E(\xi_1/\xi_2 = y) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{\xi_1}(x/y) dx = \varphi(y). \end{cases} \quad (1.42)$$

Умовне математичне сподівання $E(\xi_1/\xi_2 = y) = \varphi(y)$ називають ***регресією*** величини ξ_1 відповідно до величини ξ_2, відповідно умовне математичне сподівання $E(\xi_2/\xi_1 = x) = \psi(x)$ регресією ξ_2 відповідно до ξ_1.

Далі розглядають випадкові величини $E(\xi_1/\xi_2) = \varphi(\xi_2)$ та $E(\xi_2/\xi_1) = \psi(\xi_1)$.

Зазначимо також, що мають місце ***формули повного математичного сподівання***:

$$\begin{cases} E\big(E(\xi_1/\xi_2)\big) = E\xi_1; \\ E\big(E(\xi_2/\xi_1)\big) = E\xi_2. \end{cases} \quad (1.43)$$

1) для системи двох дискретних випадкових величин формули (1.43) розписується наступним чином:

$$E\xi_1 = E\big(E(\xi_1/\xi_2)\big) = \sum_{j=1}^{m} E\big(\xi_1/\xi_2 = y_j\big)p_{\cdot j} \text{ та}$$

$$E\xi_2 = E\big(E(\xi_2/\xi_1)\big) = \sum_{k=1}^{n} E(\xi_2/\xi_1 = x_k)p_{k\cdot}.$$

2) для системи двох неперервних випадкових величин:

$$E\xi_1 = E\big(E(\xi_1/\xi_2)\big) = \int_{-\infty}^{+\infty} E(\xi_1/\xi_2 = y)f_{\xi_2}(y)dy \text{ та}$$

$$E\xi_2 = E\big(E(\xi_2/\xi_1)\big) = \int_{-\infty}^{+\infty} E(\xi_2/\xi_1 = x)f_{\xi_1}(x)dx.$$

2. Приклад виконання завдання 1

Нехай дискретний випадковий вектор $\vec{\xi} = (\xi_1,\ \xi_2)$ задано таблицею розподілу (див. табл. 2.1)

Таблиця 2.1 – Таблиця розподілу вектора $\vec{\xi}$

ξ_1 \ ξ_2	-10	1	2	8
-1	0,05	0,04	0,11	0,12
0	0,07	0,04	0,06	0,14
3	0,06	0,06	0,09	0,16

Бачимо, що $n = 3$, $m = 4$, $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 3$, $y_1 = -10$, $y_2 = 1$, $y_3 = 2$, $y_4 = 8$. Значення $p_{kj} = P\{\xi_1 = x_k, \xi_2 = y_j\}$, $k = \overline{1,3}$, $j = \overline{1,4}$ занесені у таблицю 2.1.

1. Ряди розподілу координат $\boldsymbol{\xi_1}$ та $\boldsymbol{\xi_2}$.

$P\{\xi_1 = x_k\} = P(A_k)$, $k = \overline{1,3}$. Подія A_k відбувається разом із гіпотезами $B_j = \{\xi_2 = y_j\}$, $j = \overline{1,4}$ причому B_1, B_2, B_3 , B_4 утворюють повну групу подій, тобто $\bigcup_{j=1}^{4} B_j = U$, $B_{j_1} \cap B_{j_2} = \emptyset$ при $j_1 \neq j_2$.

За формулою повної ймовірності:

$$P(A_k) = \sum_{j=1}^{4} P(B_j) P(A_k/B_j) = \sum_{j=1}^{4} P(A_k \cap B_j) = \sum_{j=1}^{4} p_{kj}.$$

Аналогічно

$$P(B_j) = \sum_{k=1}^{3} P(A_k)P(B_j/A_k) = \sum_{k=1}^{3} P(A_k \cap B_j) = \sum_{k=1}^{3} p_{kj}.$$

Отримали формули (1.4) та (1.5).

$$P\{\xi_1 = -1\} = \ 0{,}05 + 0{,}04 + 0{,}11 + 0{,}12 = 0{,}32;$$
$$P\{\xi_1 = 0\} = 0{,}07 + 0{,}04 + 0{,}06 + 0{,}14 = 0{,}31;$$
$$P\{\xi_1 = 3\} = 0{,}06 + 0{,}06 + 0{,}09 + 0{,}16 = 0{,}37.$$

Перевірка (формула (1.3)):

$$P\{\xi_1 = -1\} + \ P\{\xi_1 = 0\} + \ P\{\xi_1 = 3\} = 0{,}32 + 0{,}31 + 0{,}37 = 1.$$

$$P\{\xi_2 = -10\} = 0{,}05 + 0{,}07 + 0{,}06 = 0{,}18;$$
$$P\{\xi_2 = 1\} = 0{,}04 + 0{,}04 + 0{,}06 = 0{,}14;$$
$$P\{\xi_2 = 2\} = 0{,}11 + 0{,}06 + 0{,}09 = 0{,}26;$$
$$P\{\xi_2 = 8\} = 0{,}12 + 0{,}14 + 0{,}16 = 0{,}42.$$

Перевірка:

$$P\{\xi_2 = -10\} + \ P\{\xi_2 = 1\} + \ P\{\xi_2 = 2\} + \ P\{\xi_2 = 9\} =$$
$$= 0{,}18 + 0{,}14 + 0{,}26 + 0{,}42 = 1.$$

Отримуємо

ξ_1	-1	0	3
P	0,32	0,31	0,37

ξ_2	-10	1	2	8
P	0,18	0,14	0,26	0,42

2. Функції розподілу координат ξ_1 та ξ_2.

За означенням $F_{\xi_i}(x) = P\{\xi_i < x\}$ $(i = 1, 2)$, $x \in \mathbb{R}$, а

ξ_1	-1	0	3
P	0,32	0,31	0,37

Тоді маємо

$$F_{\xi_1}(x) = P\{\xi_1 < x\} =$$

$$= \begin{cases} P(\emptyset) = 0, & \text{при } x \le -1; \\ P\{\xi_1 = -1\} = 0{,}32, & \text{при } -1 < x \le 0; \\ P\big\{\{\xi_1 = -1\} \cup \{\xi_1 = 0\}\big\} = P\{\xi_1 = -1\} + P\{\xi_1 = 0\} = \\ = 0{,}32 + 0{,}31 = 0{,}63, & \text{при } 0 < x \le 3; \\ P\big\{\{\xi_1 = -1\} \cup \{\xi_1 = 0\} \cup \{\xi_1 = 3\}\big\} = \\ = P\{\xi_1 = -1\} + P\{\xi_1 = 0\} + P\{\xi_1 = 3\} = \\ = 0{,}32 + 0{,}31 + 0{,}37 = 1, & \text{при } x > 3. \end{cases}$$

Отримуємо:

$$F_{\xi_1}(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \le -1; \\ 0{,}32, & \text{при } -1 < x \le 0; \\ 0{,}63, & \text{при } 0 < x \le 3; \\ 1, & \text{при } x > 3. \end{cases}$$

Аналогічно знаходимо функцію розподілу другої координати.

ξ_2	-10	1	2	8
P	0,18	0,14	0,26	0,42

$F_{\xi_2}(y) = P\{\xi_2 < y\} =$

$$= \begin{cases} P(\emptyset) = 0, & \text{при } y \le -10; \\ P\{\xi_2 = -10\} = 0{,}18, & \text{при } -10 < y \le 1; \\ P\{\{\xi_2 = -10\} \cup \{\xi_2 = 1\}\} = P\{\xi_2 = -10\} + P\{\xi_2 = 1\} = \\ = 0{,}18 + 0{,}14 = 0{,}32, & \text{при } 1 < y \le 2; \\ P\{\{\xi_2 = -10\} \cup \{\xi_2 = 1\} \cup \{\xi_2 = 2\}\} = \\ = P\{\xi_2 = -10\} + P\{\xi_2 = 1\} + P\{\xi_2 = 2\} = \\ = 0{,}18 + 0{,}14 + 0{,}26 = 0{,}58, & \text{при } 2 < y \le 8; \\ P\{\{\xi_2 = -10\} \cup \{\xi_2 = 1\} \cup \{\xi_2 = 2\} \cup \{\xi_2 = 8\}\} = \\ = P\{\xi_2 = -10\} + P\{\xi_2 = 1\} + P\{\xi_2 = 2\} + P\{\xi_2 = 8\} = \\ = 0{,}18 + 0{,}14 + 0{,}26 + 0{,}42 = 1, & \text{при } y > 8. \end{cases}$$

Отримуємо:

$$F_{\xi_2}(y) = \begin{cases} 0, & \text{при } y \le -10; \\ 0{,}18, & \text{при } -10 < y \le 1; \\ 0{,}32, & \text{при } 1 < y \le 2; \\ 0{,}58, & \text{при } 2 < y \le 8; \\ 1, & \text{при } y > 8. \end{cases}$$

Графіки функцій розподілу $F_{\xi_1}(x)$ та $F_{\xi_2}(y)$ зображені на рис. 2.1 та рис. 2.2

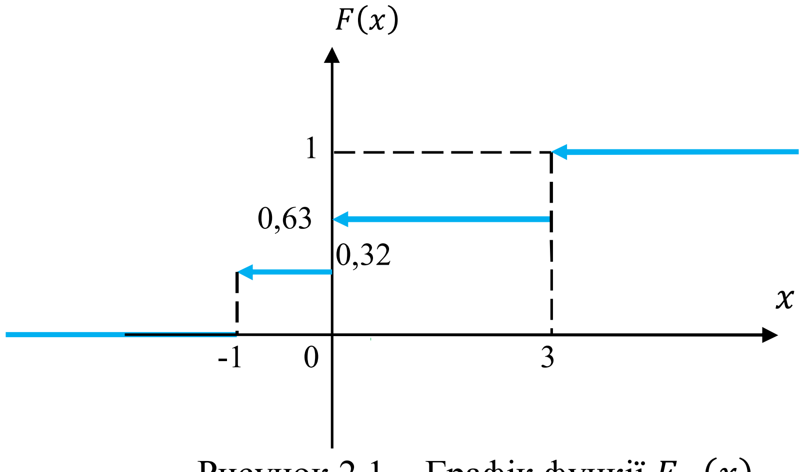


Рисунок 2.1 – Графік функції $F_{\xi_1}(x)$

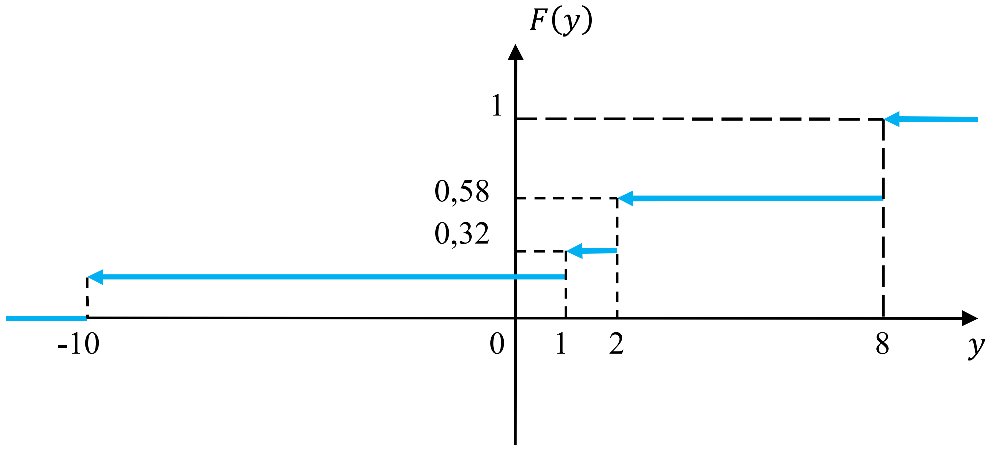


Рисунок 2.2 – Графік функції $F_{\xi_2}(y)$

3. Сумісна функція розподілу випадкового вектора $\vec{\xi}$.

За означенням 2 $F_{\vec{\xi}}(x,\ y) = P\{\xi_1 < x, \xi_2 < y\}$. Це ймовірність потрапляння випадкового вектора усередину нескінченного квадранта з вершиною у точці (x, y) (рис. 1.1).

Використаємо формулу (1.6)

$$F_{\vec{\xi}}(x, y) = \sum_{k: x_k < x} \sum_{j: y_j < y} p_{kj}.$$

Зрозуміло, що значення сумісної функції розподілу в кожній точці координатної площини залежить від множини точок, які потрапили в квадрант. Зрозуміло, що $F_{\vec{\xi}}(x, y) = 0$, якщо $x \le x_1$, або $y \le y_1$. Іншу частину координатної площини розіб'ємо на області $D_{k,j} = \left\{ \begin{matrix} (x, y) | x_k < x \le x_{k+1}, \\ y_j < y \le y_{j+1} \end{matrix} \right\}$, $k = \overline{1, n-1}$, $j = \overline{1, m-1}$ (рис. 2.3). При $k = n$ матимемо умову $x > x_n$, а при $j = m$ маємо $y > y_m$.

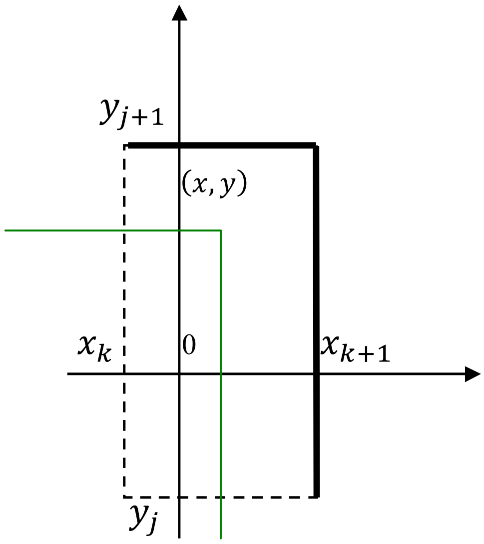


Рисунок 2.3

Щоб полегшити знаходження $F_{\vec{\xi}}(x, y)$ намалюємо в декартовій системі координат усі точки, що відповідають значенню вектора $\vec{\xi}$ (рис. 2.4) та обчислимо значення сумісної функції розподілу в кожній області $D_{k,j}$, $k = \overline{1,3}$, $j = \overline{1,4}$. Для наочності кожен випадок супроводжується малюнком (рис. 2.5 – 2.17).

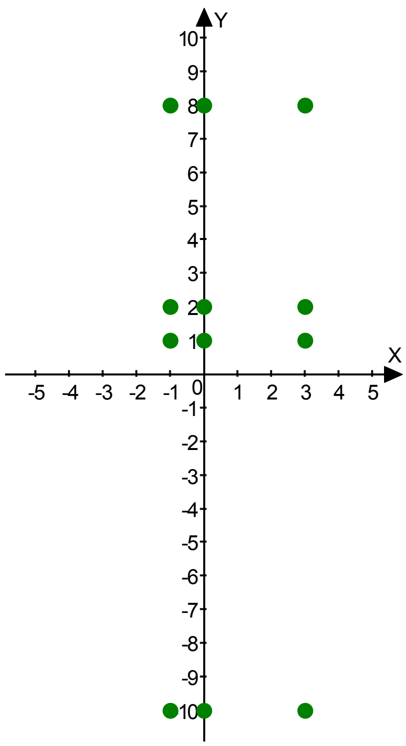


Рисунок 2.4

1. $(x \leq -1) \vee (y \leq -10)$;

$F_{\vec{\xi}}(x, y) = 0.$

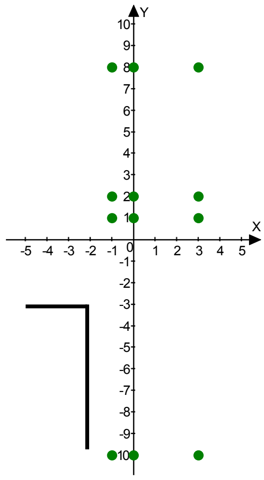


Рисунок 2.5

2. $D_{1,1} = \left\{(x, y) \middle| \begin{matrix} -1 < x \leq 0, \\ -10 < y \leq 1 \end{matrix} \right\}$;

$F_{\vec{\xi}}(x, y) = P\{\xi_1 = -1, \xi_2 = -10\} = 0{,}05$

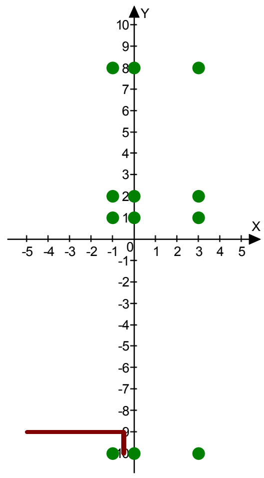


Рисунок 2.6

3. $D_{2,1} = \left\{(x,y)\middle| \begin{matrix} 0 < x \leq 3, \\ -10 < y \leq 1 \end{matrix}\right\};$

$$F_{\vec{\xi}}(x,y) = P\{\xi_1 = -1, \xi_2 = -10\} + \\ +P\{\xi_1 = 0, \xi_2 = -10\} = \\ = 0{,}05 + 0{,}07 = 0{,}12$$

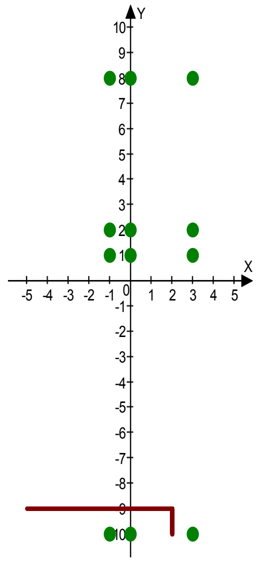


Рисунок 2.7

4. $D_{3,1} = \left\{(x,y)\middle| \begin{matrix} x > 3, \\ -10 < y \leq 1 \end{matrix}\right\};$

$$F_{\vec{\xi}}(x,y) = P\{\xi_1 = -1, \xi_2 = -10\} + \\ +P\{\xi_1 = 0, \xi_2 = -10\} + \\ +P\{\xi_1 = 3, \xi_2 = -10\} = \\ = 0{,}05 + 0{,}07 + 0{,}06 = 0{,}18$$

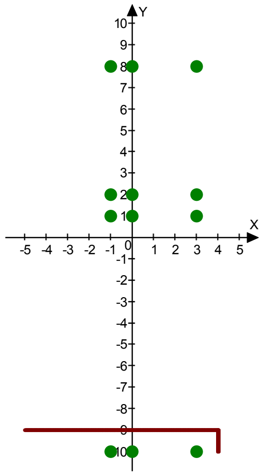


Рисунок 2.8

5. $D_{1,2} = \left\{(x,y) \middle| \begin{matrix} -1 < x \leq 0, \\ 1 < y \leq 2 \end{matrix} \right\};$

$$F_{\vec{\xi}}(x,y) = P\{\xi_1 = -1, \xi_2 = -10\} +$$

$$+P\{\xi_1 = -1, \xi_2 = 1\} = 0{,}09$$

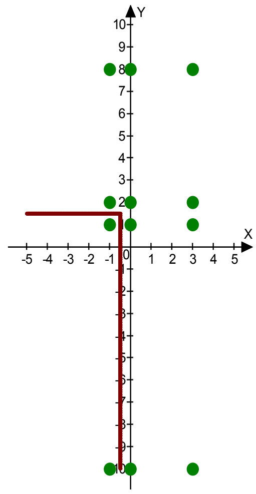


Рисунок 2.9

6. $D_{2,2} = \left\{(x,y) \middle| \begin{matrix} 0 < x \leq 3, \\ 1 < y \leq 2 \end{matrix} \right\};$

$$F_{\vec{\xi}}(x,y) = P\{\xi_1 = -1, \xi_2 = -10\} +$$

$$+P\{\xi_1 = -1, \xi_2 = 1\} +$$

$$+P\{\xi_1 = 0, \xi_2 = -10\} +$$

$$+P\{\xi_1 = 0, \xi_2 = 1\} = 0{,}2$$

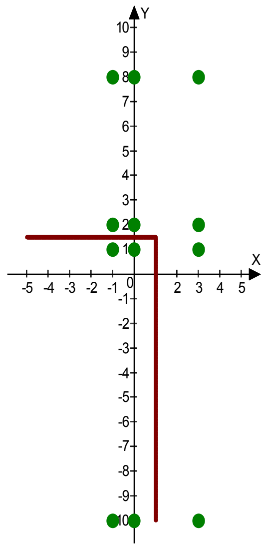


Рисунок 2.10

7. $D_{3,2} = \left\{(x,y)\middle|\begin{matrix} x > 3, \\ 1 < y \leq 2\end{matrix}\right\};$

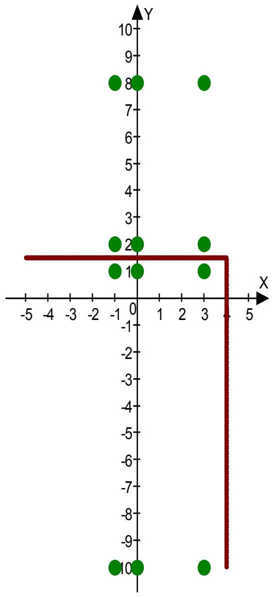


Рисунок 2.11

$$F_{\vec{\xi}}(x,y) = P\{\xi_1 = -1, \xi_2 = -10\} +$$
$$+P\{\xi_1 = -1, \xi_2 = 1\} +$$
$$+P\{\xi_1 = 0, \xi_2 = -10\} +$$
$$+P\{\xi_1 = 0, \xi_2 = 1\} +$$
$$P\{\xi_1 = 3, \xi_2 = -10\} +$$
$$+P\{\xi_1 = 3, \xi_2 = 1\} = 0{,}32$$

8. $D_{1,3} = \left\{(x,y)\middle|\begin{matrix} -1 < x \leq 0, \\ 2 < y \leq 8\end{matrix}\right\};$

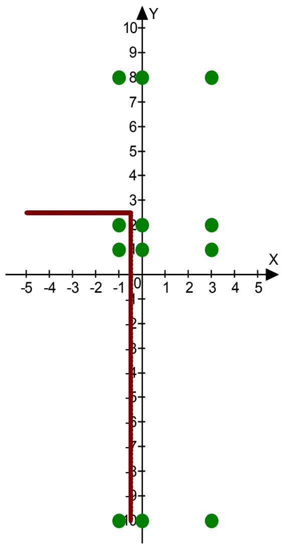


Рисунок 2.12

$$F_{\vec{\xi}}(x,y) = P\{\xi_1 = -1, \xi_2 = -10\} +$$
$$+P\{\xi_1 = -1, \xi_2 = 1\} +$$
$$+P\{\xi_1 = -1, \xi_2 = 2\} = 0{,}2$$

9. $D_{2,3} = \left\{(x,y)\middle| \begin{matrix} 0 < x \le 3, \\ 2 < y \le 8 \end{matrix}\right\}$;

$$F_{\vec{\xi}}(x,y) = P\{\xi_1 = -1, \xi_2 = -10\} +$$
$$+P\{\xi_1 = -1, \xi_2 = 1\} +$$
$$+P\{\xi_1 = -1, \xi_2 = 2\} +$$
$$+P\{\xi_1 = 0, \xi_2 = -10\} +$$
$$+P\{\xi_1 = 0, \xi_2 = 1\} +$$
$$+P\{\xi_1 = 0, \xi_2 = 2\} = 0{,}37$$

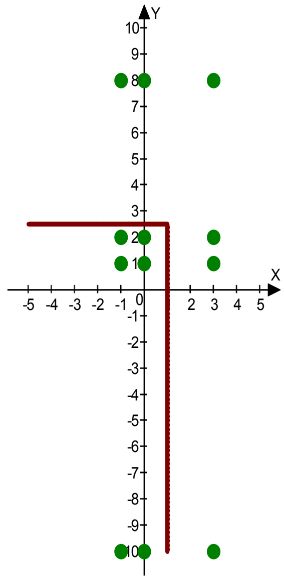


Рисунок 2.13

10. $D_{3,3} = \left\{(x,y)\middle| \begin{matrix} x > 3, \\ 2 < y \le 8 \end{matrix}\right\}$;

$$F_{\vec{\xi}}(x,y) = P\{\xi_1 = -1, \xi_2 = -10\} +$$
$$+P\{\xi_1 = -1, \xi_2 = 1\} +$$
$$+P\{\xi_1 = -1, \xi_2 = 2\} +$$
$$+P\{\xi_1 = 0, \xi_2 = -10\} +$$
$$+P\{\xi_1 = 0, \xi_2 = 1\} +$$
$$+P\{\xi_1 = 0, \xi_2 = 2\} +$$
$$+P\{\xi_1 = 3, \xi_2 = -10\} +$$
$$+P\{\xi_1 = 3, \xi_2 = 1\} +$$
$$+P\{\xi_1 = 3, \xi_2 = 2\} = 0{,}58$$

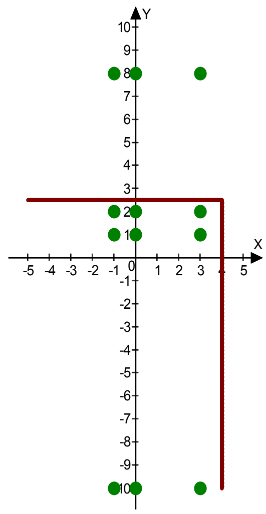


Рисунок 2.14

11. $D_{1,4} = \left\{(x,y)\middle| \begin{matrix} -1 < x \leq 0, \\ y > 8 \end{matrix}\right\}$;

$$F_{\vec{\xi}}(x,y) = P\{\xi_1 = -1, \xi_2 = -10\} +$$
$$+P\{\xi_1 = -1, \xi_2 = 1\} +$$
$$+P\{\xi_1 = -1, \xi_2 = 2\} +$$
$$+P\{\xi_1 = -1, \xi_2 = 8\} = 0{,}32$$

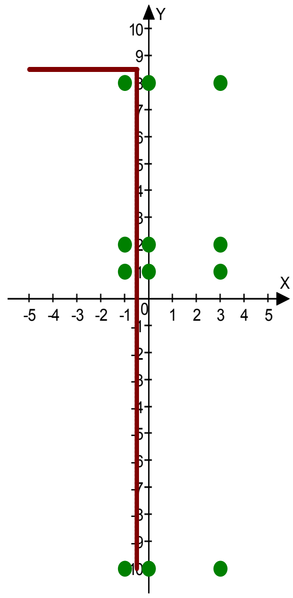


Рисунок 2.15

12. $D_{2,4} = \left\{(x,y)\middle| \begin{matrix} 0 < x \leq 3, \\ y > 8 \end{matrix}\right\}$;

$$F_{\vec{\xi}}(x,y) = P\{\xi_1 = -1, \xi_2 = -10\} +$$
$$+P\{\xi_1 = -1, \xi_2 = 1\} +$$
$$+P\{\xi_1 = -1, \xi_2 = 2\} +$$
$$+P\{\xi_1 = -1, \xi_2 = 8\} +$$
$$+P\{\xi_1 = 0, \xi_2 = -10\} +$$
$$+P\{\xi_1 = 0, \xi_2 = 1\} +$$
$$+P\{\xi_1 = 0, \xi_2 = 2\} +$$
$$+P\{\xi_1 = 0, \xi_2 = 8\} = 0{,}63$$

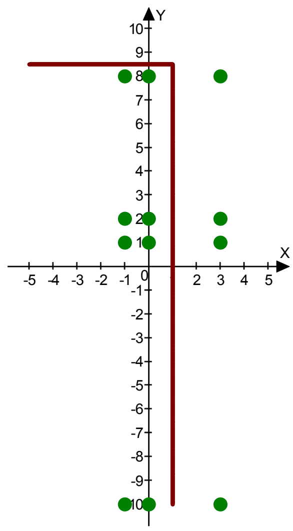


Рисунок 2.15

13. $D_{3,4} = \left\{(x,y)\middle| \begin{matrix} x > 3, \\ y > 8 \end{matrix}\right\}$;

$$F_{\vec{\xi}}(x,y) = P\{\xi_1 = -1, \xi_2 = -10\} +$$
$$+P\{\xi_1 = -1, \xi_2 = 1\} +$$
$$+P\{\xi_1 = -1, \xi_2 = 2\} +$$
$$+P\{\xi_1 = -1, \xi_2 = 8\} +$$
$$+P\{\xi_1 = 0, \xi_2 = -10\} +$$
$$+P\{\xi_1 = 0, \xi_2 = 1\} +$$
$$+P\{\xi_1 = 0, \xi_2 = 2\} +$$
$$+P\{\xi_1 = 0, \xi_2 = 8\} +$$
$$+P\{\xi_1 = 3, \xi_2 = -10\} +$$
$$+P\{\xi_1 = 3, \xi_2 = 1\} +$$
$$+P\{\xi_1 = 3, \xi_2 = 2\} +$$
$$+P\{\xi_1 = 3, \xi_2 = 8\} = 1$$

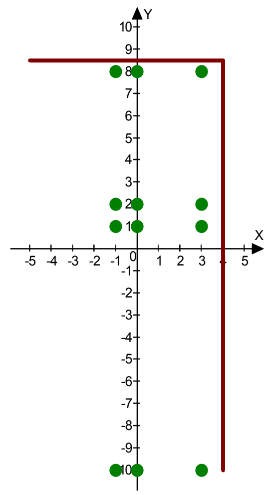


Рисунок 2.17

Отримали сумісну функцію розподілу, яку можна записати у вигляді таблиці 2.2.

Таблиця 2.2 – Функція $F_{\vec{\xi}}(x,y)$

y \ x	$x \le -1$	$-1 < x \le 0$	$0 < x \le 3$	$x > 3$
$y \le -10$	0	0	0	0
$-10 < y \le 1$	0	0,05	0,12	0,18
$1 < y \le 2$	0	0,09	0,2	0,32
$2 < y \le 8$	0	0,2	0,37	0,58
$y > 8$	0	0,32	0,63	1

Або

$$F_{\vec{\xi}}(x,y)=\begin{cases}0, & \text{при } (x\le -1)\vee(y\le -10);\\ 0{,}05, & \text{при } (-1<x\le 0)\wedge(-10<y\le 1);\\ 0{,}12, & \text{при } (0<x\le 3)\wedge(-10<y\le 1);\\ 0{,}18, & \text{при } (x>3)\wedge(-10<y\le 1);\\ 0{,}09, & \text{при } (-1<x\le 0)\wedge(1<y\le 2);\\ 0{,}2, & \text{при } (0<x\le 3)\wedge(1<y\le 2);\\ 0{,}32, & \text{при } (x>3)\wedge(1<y\le 2);\\ 0{,}2, & \text{при } (-1<x\le 0)\wedge(2<y\le 8);\\ 0{,}37, & \text{при } (0<x\le 3)\wedge(2<y\le 8);\\ 0{,}58, & \text{при } (x>3)\wedge(2<y\le 8);\\ 0{,}32, & \text{при } (-1<x\le 0)\wedge(y>8);\\ 0{,}63, & \text{при } (0<x\le 3)\wedge(y>8);\\ 1, & \text{при } (x>3)\wedge(y>8).\end{cases}$$

Можна помітити, що умови узгодженості (1.2) сумісної функції розподілу випадкового вектора $\vec{\xi}$ з функціями розподілу його координат виконуються.

4. Математичні сподівання координат. Кореляційна та нормована кореляційна матриця.

а) Знайдемо математичне сподівання координати ξ_1, яка має ряд розподілу за формулою (1.18)

ξ_1	-1	0	3
P	0,32	0,31	0,37

$$E\xi_1=\sum_{k=1}^{3}x_k p_{k\cdot}=(-1)\cdot 0{,}32+0\cdot 0{,}31+3\cdot 0{,}37=0{,}79.$$

Аналогічно для ξ_2 з рядом розподілу

ξ_2	-10	1	2	8
P	0,18	0,14	0,26	0,42

$$E\xi_2 = E\xi_2 = \sum_{j=1}^{4} y_j p_{\cdot j} =$$

$$= (-10)\cdot 0{,}18 + 1\cdot 0{,}14 + 2\cdot 0{,}26 + 8\cdot 0{,}42 = 2{,}22.$$

Центр розсіювання вектора $\vec{\xi}$ – точка $(0{,}79;\ 2{,}22)$.

б) Побудуємо кореляційну та нормовану кореляційну матриці.

Побудуємо першу матрицю $K_1 = \begin{pmatrix} E\xi_1^2 & E\xi_1\xi_2 \\ E\xi_1\xi_2 & E\xi_2^2 \end{pmatrix}$.

$$E\xi_1\xi_2 = \sum_{k=1}^{3}\sum_{j=1}^{4} x_k y_j p_{kj} = (-1)\cdot(-10)\cdot 0{,}05 + 3\cdot(-10)\cdot 0{,}06 +$$

$$+(-1)\cdot 1\cdot 0{,}04 + 3\cdot 1\cdot 0{,}06 + (-1)\cdot 2\cdot 0{,}11 + 3\cdot 2\cdot 0{,}09 +$$

$$+(-1)\cdot 8\cdot 0{,}12 + 3\cdot 8\cdot 0{,}16 = 2{,}04.$$

$$E\xi_1^2 = \sum_{k=1}^{3} x_k^2 p_{k\cdot} = 0{,}32 + 9\cdot 0{,}37 = 3{,}65.$$

$$E\xi_2^2 = \sum_{j=1}^{4} y_j^2\, p_{\cdot j} = 100\cdot 0{,}18 + 0{,}14 + 4\cdot 0{,}26 +$$

$$+64\cdot 0{,}42 = 46{,}06.$$

Отримуємо матрицю

$$K_1 = \begin{pmatrix} 3{,}65 & 2{,}04 \\ 2{,}04 & 46{,}06 \end{pmatrix}.$$

Побудуємо наступну матрицю $K_2 = \begin{pmatrix} D\xi_1 & K(\xi_1,\xi_2) \\ K(\xi_1,\xi_2) & D\xi_2 \end{pmatrix}$.

де $D\xi_i$ – дисперсія випадкової величини ξ_i, $i = 1{,}2$.

$K(\xi_1,\xi_2)$ – кореляційний момент ξ_1 та ξ_2.

Використаємо формули (1.22), (1.24) та (1.31)

$$K(\xi_1,\xi_2) = E(\xi_1 - E\xi_1)(\xi_2 - E\xi_2) = E\xi_1\xi_2 - E\xi_1 E\xi_2 =$$
$$=2{,}04 - 0{,}79 \cdot 2{,}22 = 0{,}2862.$$
$$D\xi_1 = E(\xi_1 - E\xi_1)^2 = E\xi_1^2 - (E\xi_1)^2 = 3{,}65 - 0{,}79^2 = 3{,}0259.$$
$$D\xi_2 = E(\xi_2 - E\xi_2)^2 = E\xi_2^2 - (E\xi_2)^2 = 46{,}06 - 2{,}22^2 = 41{,}1316.$$

Отримуємо кореляційну матрицю (відповідає (1.33))

$$K_2 = \begin{pmatrix} 3{,}0259 & 0{,}2862 \\ 0{,}2862 & 41{,}1316 \end{pmatrix}.$$

Оскільки $K(\xi_1,\xi_2) \neq 0$, випадкові величини ξ_1 та ξ_2 є корельованими. Перевіримо додатну визначеність K_2 ($\det K_2 > 0$).

$$\det K_2 = 3{,}0259 \cdot 41{,}1316 - 0{,}2862^2 = 124{,}378198 > 0.$$

Побудуємо нормовану кореляційну матрицю (1.35)

$$R = \begin{pmatrix} 1 & r(\xi_1,\xi_2) \\ r(\xi_1,\xi_2) & 1 \end{pmatrix},$$

де коефіцієнт кореляції $r(\xi_1,\xi_2) = \frac{K(\xi_1,\xi_2)}{\sqrt{D\xi_1 \cdot D\xi_2}} = \frac{0{,}2862}{\sqrt{3{,}0259 \cdot 41{,}1316}} \approx 0{,}026.$

Отримуємо

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}026 \\ 0{,}026 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Умовні ряди розподілу для кожної координати.

Використовуючи формули (1.36), обчислюємо умовні ймовірності $P\left\{\xi_1 = x_k/\xi_2 = y_j\right\}$ та $P\left\{\xi_2 = y_j/\xi_1 = x_k\right\}$.

$$\begin{cases} P\left\{\xi_1 = x_k/\xi_2 = y_j\right\} = \frac{P\left\{\xi_1 = x_k,\ \xi_2 = y_j\right\}}{P\left\{\xi_2 = y_j\right\}} = \frac{p_{kj}}{p_{k\cdot}}; \\ P\left\{\xi_2 = y_j/\xi_1 = x_k\right\} = \frac{P\left\{\xi_1 = x_k,\ \xi_2 = y_j\right\}}{P\left\{\xi_1 = x_k\right\}} = \frac{p_{kj}}{p_{\cdot j}}. \end{cases} (k = \overline{1,3}, j = \overline{1,4})$$

Умовні ряди розподілу для ξ_1 – це набір x_k, $k = \overline{1,3}$ значень ξ_1 та відповідних їм умовних ймовірностей $P\left\{\xi_1 = x_k/\xi_2 = y_j\right\}$ при фіксованому j, тобто для ξ_1 буде стільки умовних рядів розподілу, скільки ξ_2 має значень y_j. В нашому випадку 4. Неважко показати,що умовний ряд розподілу для фіксованого y_j, $j = \overline{1,4}$ є справжній ряд розподілу, тобто:

$$\sum_{k=1}^{3} P\{\xi_1 = x_k/\xi_2 = y_j\} = \frac{\sum_{k=1}^{3} p_{kj}}{P\{\xi_2 = y_j\}} = \frac{P\{\xi_2 = y_j\}}{P\{\xi_2 = y_j\}} = 1.$$

Аналогічно можна розглядати умовні ряди розподілу для ξ_2.

Обчислюємо умовні ряди розподілу для ξ_1 та ξ_2 та результати заносимо у таблиці 2.3 та 2.4. Отримані дроби скорочуємо, але для зручності у кожному рядку залишаємо однаковий знаменник. Наприклад,

$$P\{\xi_1 = -1/\xi_2 = 8\} = \frac{0{,}12}{0{,}42} = \frac{6}{21},$$

$$P\{\xi_1 = 0/\xi_2 = 8\} = \frac{0{,}14}{0{,}42} = \frac{7}{21},$$

$$P\{\xi_1 = 3/\xi_2 = 8\} = \frac{0{,}16}{0{,}42} = \frac{8}{21}.$$

Таблиця 2.3 – Умовні ряди розподілу ξ_1

ξ_1	-1	0	3
$P\{\xi_1 = x_k/\xi_2 = -10\}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{7}{18}$	$\frac{6}{18}$
$P\{\xi_1 = x_k/\xi_2 = 1\}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{3}{7}$
$P\{\xi_1 = x_k/\xi_2 = 2\}$	$\frac{11}{26}$	$\frac{6}{26}$	$\frac{9}{26}$
$P\{\xi_1 = x_k/\xi_2 = 8\}$	$\frac{6}{21}$	$\frac{7}{21}$	$\frac{8}{21}$

Таблиця 2.4 – Умовні ряди розподілу ξ_2

ξ_2	-10	1	2	8
$P\{\xi_2 = y_j/\xi_1 = -1\}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{4}{32}$	$\frac{11}{32}$	$\frac{12}{32}$
$P\{\xi_2 = y_j/\xi_1 = 0\}$	$\frac{7}{31}$	$\frac{4}{31}$	$\frac{6}{31}$	$\frac{14}{31}$
$P\{\xi_2 = y_j/\xi_1 = 3\}$	$\frac{6}{37}$	$\frac{6}{37}$	$\frac{9}{37}$	$\frac{16}{37}$

6. Умовні математичні сподівання для кожної координати з перевіркою.

Умовне математичне сподівання дискретної випадкової величини ξ_1 відносно значення $\xi_2 = y_j, j = \overline{1,4}$ обчислюється за формулою (1.41)

$$E(\xi_1/\xi_2 = y_j) = \sum_{k=1}^{3} x_k P\{\xi_1 = x_k/\xi_2 = y_j\} = \varphi(y_j).$$

Аналогічно формула для обчислення умовного математичного сподівання ξ_2 відносно значення $\xi_1 = x_k, k = \overline{1,3}$ має вигляд (1.40)

$$E(\xi_2/\xi_1 = x_k) = \sum_{j=1}^{4} y_j P\{\xi_2 = y_j/\xi_1 = x_k\} = \psi(x_k).$$

Далі розглядається випадкова величина $E(\xi_1/\xi_2) = \varphi(\xi_2)$, яка приймає значення $E(\xi_1/\xi_2 = y_j)$ з ймовірностями $P\{\xi_2 = y_j\}$, $j = \overline{1,4}$, та випадкова величина $E(\xi_2/\xi_1) = \psi(\xi_1)$, що приймає значення $E(\xi_2/\xi_1 = x_k)$ з ймовірностями $P\{\xi_1 = x_k\}$, $k = \overline{1,3}$.

Будуємо ряди розподілу $E(\xi_1/\xi_2)$ та $E(\xi_2/\xi_1)$ (див. табл. 2.5 та 2.6) та, враховуючи формули повного математичного сподівання (1.43)

$$E\big(E(\xi_1/\xi_2)\big) = E\xi_1, \qquad E\big(E(\xi_2/\xi_1)\big) = E\xi_2$$

виконуємо перевірку.

Таблиця 2.5 – Ряд розподілу $E(\xi_1/\xi_2)$.

$E(\xi_1/\xi_2)$	$\frac{8}{13}$	$\frac{13}{18}$	$\frac{6}{7}$	1
P	0,26	0,18	0,42	0,14

$$E(\xi_1/\xi_2 = -10) = (-1)\cdot\frac{5}{18} + 0\cdot\frac{7}{18} + 3\cdot\frac{6}{18} = \frac{13}{18};$$
$$E(\xi_1/\xi_2 = 1) = (-1)\cdot\frac{2}{7} + 0\cdot\frac{2}{7} + 3\cdot\frac{3}{7} = 1;$$
$$E(\xi_1/\xi_2 = 2) = (-1)\cdot\frac{11}{26} + 0\cdot\frac{6}{26} + 3\cdot\frac{9}{26} = \frac{8}{13};$$
$$E(\xi_1/\xi_2 = 8) = (-1)\cdot\frac{6}{21} + 0\cdot\frac{7}{21} + 3\cdot\frac{8}{21} = \frac{6}{7}.$$

Перевірка:

$$E\big(E(\xi_1/\xi_2)\big) = 0{,}26\cdot\frac{8}{13} + 0{,}18\cdot\frac{13}{18} + 0{,}42\cdot\frac{6}{7} + 0{,}14\cdot 1 = 0{,}79 = E\xi_1.$$

Таблиця 2.6 – Ряд розподілу $E(\xi_2/\xi_1)$.

$E(\xi_2/\xi_1)$	$\frac{58}{31}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{92}{37}$
P	0,31	0,32	0,37

$$E(\xi_2/\xi_1 = -1) = (-10)\cdot\frac{5}{32} + 1\cdot\frac{4}{32} + 2\cdot\frac{11}{32} + 8\cdot\frac{12}{32} = \frac{9}{4};$$

$$E(\xi_2/\xi_1 = 0) = (-10) \cdot \frac{7}{31} + 1 \cdot \frac{4}{31} + 2 \cdot \frac{6}{31} + 8 \cdot \frac{14}{31} = \frac{58}{31};$$
$$E(\xi_2/\xi_1 = 3) = (-10) \cdot \frac{6}{37} + 1 \cdot \frac{6}{37} + 2 \cdot \frac{9}{37} + 8 \cdot \frac{16}{37} = \frac{92}{37}.$$

Перевірка:

$$E\big(E(\xi_2/\xi_1)\big) = 0{,}31 \cdot \frac{58}{31} + 0{,}32 \cdot \frac{9}{4} + 0{,}37 \cdot \frac{92}{37} = 2{,}22 = E\xi_2.$$

3. Приклад виконання завдання 2

Нехай неперервний випадковий вектор $\vec{\xi} = (\xi_1,\ \xi_2)$ рівномірно розподілений в області G див. рис. 3.1.

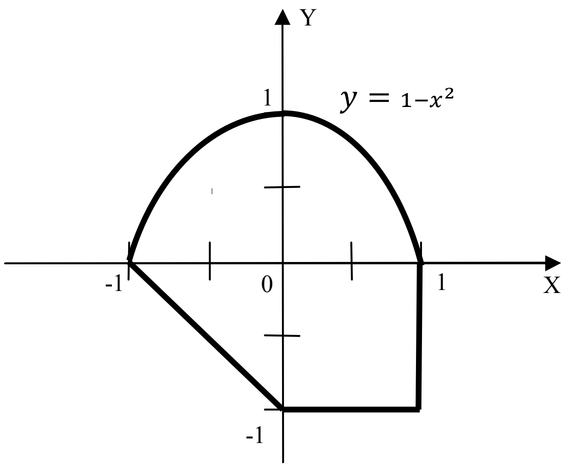


Рисунок 3.1

Фігура обмежена наступними кривими: $y = 1 - x^2$, $x + y = -1$, $y = -1$ та $x = 1$.

Саму область G можна подати у вигляді:

$$G = \left\{ (x,y) \middle| \begin{matrix} \left((-1 \le x \le 0) \wedge (-x - 1 \le y \le 1 - x^2)\right) \vee \\ \vee \left((0 \le x \le 1) \wedge (-1 \le y \le 1 - x^2)\right) \end{matrix} \right\}.$$

1. Щільності розподілу координат $\boldsymbol{\xi_1}$ та $\boldsymbol{\xi_2}$.

Обчислимо площу G.

$$S_G = \iint_G dx\,dy = \int_{-1}^{0} dx \int_{-x-1}^{1-x^2} dy + \int_0^1 dx \int_{-1}^{1-x^2} dy =$$

$$= \int_{-1}^{0} 2 - x^2 + x\,dx + \int_0^1 2 - x^2\,dx =$$

$$= \left(2x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right)\Big|_{-1}^{0} + \left(2x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 = \frac{7}{6} + \frac{5}{3} = \frac{17}{6}.$$

Тоді за формулою (1.13) щільність вектора $\vec{\xi}$ рівномірно розподіленого в області G

$$f_{\vec{\xi}}(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{S_G},(x,y)\in G;\\ 0,\ \ (x,y)\notin G.\end{cases}=\begin{cases}\frac{6}{17},(x,y)\in G;\\ 0,\ \ (x,y)\notin G.\end{cases}$$

Використавши формули (1.11) обчислимо щільності координат нашого вектора.

$$f_{\xi_1}(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_{\vec{\xi}}(x,y)dy.$$

$$f_{\xi_1}(x)=\begin{cases}0, & x\le -1;\\ \frac{6}{17}\int_{-x-1}^{1-x^2}dy=\frac{6}{17}(2-x^2+x), & -1<x\le 0;\\ \frac{6}{17}\int_{-1}^{1-x^2}dy=\frac{6}{17}(2-x^2), & 0<x\le 1;\\ 0, & x>1.\end{cases}$$

$$f_{\xi_2}(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_{\vec{\xi}}(x,y)dx.$$

$$f_{\xi_2}(y)=\begin{cases}0, & y\le -1;\\ \frac{6}{17}\int_{-y-1}^{1}dx=\frac{6}{17}(2+y), & -1<y\le 0;\\ \frac{6}{17}\int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}}dx=\frac{12}{17}\sqrt{1-y}, & 0<y\le 1;\\ 0, & y>1.\end{cases}$$

Перевірка умови нормування $\int_{-\infty}^{+\infty}f_{\xi_1}(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}f_{\xi_2}(y)dy=1$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f_{\xi_1}(x)dx=\frac{6}{17}\int_{-1}^{0}2-x^2+x\,dx+\frac{6}{17}\int_{0}^{1}2-x^2\,dx=$$

$$=\frac{6}{17}\left(\left(2x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{-1}^{0}+\left(2x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{0}^{1}\right)=\frac{6}{17}\cdot\left(\frac{7}{6}+\frac{5}{3}\right)=1.$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi_2}(y)dy = \frac{6}{17}\int_{-1}^{0} 2 + y\, dy + \frac{12}{17}\int_{0}^{1} \sqrt{1-y}\, dy =$$

$$= \frac{6}{17}\left(2y + \frac{y^2}{2}\right)\Big|_{-1}^{0} - \frac{12}{17}\cdot\frac{2}{3}\left((1-y)^{3/2}\right)\Big|_{0}^{1} = \frac{6}{17}\cdot\left(\frac{3}{2}+\frac{4}{3}\right) = 1.$$

2. Функції розподілу координат ξ_1 та ξ_2.

Нехай $F_{\xi_1}(x)$ та $F_{\xi_2}(y)$ – функції розподілу координат вектора $\vec{\xi}$. Застосуємо формули

$$\begin{cases} F_{\xi_1}(x) = \int_{-\infty}^{x} f_{\xi_1}(t)dt; \\ F_{\xi_2}(y) = \int_{-\infty}^{y} f_{\xi_2}(s)ds. \end{cases}$$

$$F_{\xi_1}(x) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{x} 0\, dt = 0, & x \le -1; \\ \int_{-\infty}^{0} 0\, dt + \frac{6}{17}\int_{-1}^{x} 2 - t^2 + t\, dt = \frac{6}{17}\left(2t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2}\right)\Big|_{-1}^{x} = & \\ = \frac{7+12x+3x^2-2x^3}{17}, & -1 < x \le 0; \\ \int_{-\infty}^{0} 0\, dt + \frac{6}{17}\left(\int_{-1}^{0} 2 - t^2 + t\, dt + \int_{0}^{x} 2 - t^2\, dt\right) = & \\ = \frac{6}{17}\left(\left(2t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2}\right)\Big|_{-1}^{0} + \left(2t - \frac{t^3}{3}\right)\Big|_{0}^{x}\right) = & \\ = \frac{7+12x-2x^3}{17}, & 0 < x \le 1; \\ \int_{-\infty}^{0} 0\, dt + \frac{6}{17}\left(\int_{-1}^{0} 2 - t^2 + t\, dt + \int_{0}^{1} 2 - t^2\, dt\right) + & \\ + \int_{1}^{x} 0\, dt = 1, & x > 1. \end{cases}$$

$$F_{\xi_2}(y)=\begin{cases}\int_{-\infty}^{y}0\,ds=0, & y\le -1;\\ \int_{-\infty}^{0}0\,ds+\frac{6}{17}\int_{-1}^{y}2+s\,ds=\frac{6}{17}\left(2s+\frac{s^2}{2}\right)\Big|_{-1}^{y}= & \\ =\frac{3(y^2+4y+3)}{17}, & -1<y\le 0;\\ \int_{-\infty}^{0}0\,ds+\frac{6}{17}\left(\int_{-1}^{0}2+s\,ds+2\int_{0}^{y}\sqrt{1-s}\,ds\right)= & \\ \quad=\frac{6}{17}\left(\left(2s+\frac{s^2}{2}\right)\Big|_{-1}^{0}-\left(\frac{4(1-s)^{3/2}}{3}\right)\Big|_{0}^{y}\right)= & \\ =\frac{17-8(1-y)^{3/2}}{17}, & 0<y\le 1;\\ \int_{-\infty}^{0}0\,ds+\frac{6}{17}\left(\int_{-1}^{0}2+s\,ds+2\int_{0}^{1}\sqrt{1-s}\,ds\right)+ & \\ +\int_{1}^{y}0\,ds=1, & y>1.\end{cases}$$

Тобто

$$F_{\xi_1}(x)=\begin{cases}0, & x\le -1;\\ \frac{7+12x+3x^2-2x^3}{17}, & -1<x\le 0;\\ \frac{7+12x-2x^3}{17} & 0<x\le 1;\\ 1, & x>1.\end{cases}$$

$$F_{\xi_2}(y)=\begin{cases}0, & y\le -1;\\ \frac{3(y^2+4y+3)}{17} & -1<y\le 0;\\ \frac{17-8(1-y)^{3/2}}{17} & 0<y\le 1;\\ 1, & y>1.\end{cases}$$

Оскільки функція розподілу неперервної випадкової величини є неперервною, тому перевіримо неперервність отриманих функцій.

$F_{\xi_1}(-1-0)=F_{\xi_1}(-1+0)=0;$ $\qquad$ $F_{\xi_2}(-1-0)=F_{\xi_2}(-1+0)=0;$

$F_{\xi_1}(0-0)=F_{\xi_1}(0+0)=\frac{7}{17};$ $\qquad$ $F_{\xi_2}(0-0)=F_{\xi_2}(0+0)=\frac{9}{17};$

$F_{\xi_1}(1-0)=F_{\xi_1}(1+0)=1.$ $\qquad$ $F_{\xi_2}(1-0)=F_{\xi_2}(1+0)=1.$

3. Сумісна функція розподілу випадкового вектора $\vec{\xi}$.

Згідно означення 2 $F_{\vec{\xi}}(x,\ y) = P\{\xi_1 < x, \xi_2 < y\}$. Це ймовірність потрапляння випадкового вектора усередину нескінченного квадранта з вершиною у точці (x, y) (рис. 1.1). Для знаходження сумісної функції розподілу неперервного вектора $\vec{\xi} = (\xi_1,\ \xi_2)$ зі щільністю $f_{\vec{\xi}}(x, y)$ скористаємося формулою (1.8)

$$F_{\vec{\xi}}(x, y) = \int_{-\infty}^{x} dt \int_{-\infty}^{y} f_{\vec{\xi}}(t, s) ds.$$

Координатну площину xOy розіб'ємо на області D_0, D_1, …, D_{10}, які між собою попарно не перетинаються та в об'єднанні дають $\mathbb{R}^2$ ($D_i \cap D_j = \emptyset$ при $i \neq j$ та $\bigcup_{i=0}^{10} D_i = \mathbb{R}^2$).

Отримане розбиття зображено на рис. 3.2, області D_i, $i = \overline{0, 10}$ зафарбовано різними кольорами.

Розпишемо усі області в аналітичному вигляді:

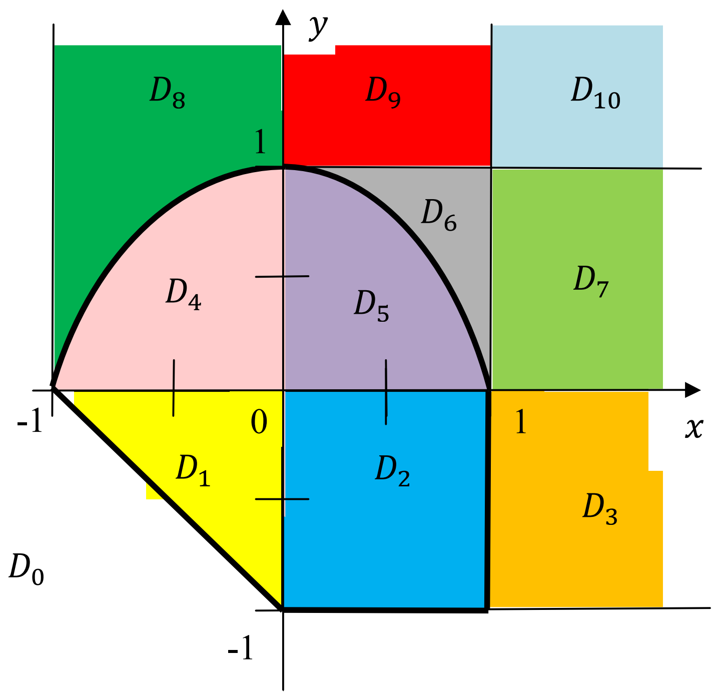


Рисунок 3.2

$D_0 = \{(x, y) | (x \leq -1) \vee (y \leq -1) \vee (x + y \leq -1)\};$

$D_1 = \{(x, y) | (-1 < x \leq 0) \wedge (-x - 1 < y \leq 0)\};$

$D_2 = \{(x, y) | (0 < x \leq 1) \wedge (-1 < y \leq 0)\};$

$D_3 = \{(x, y) | (x > 1) \wedge (-1 < y \leq 0)\};$

$D_4 = \{(x, y) | (-1 < x \leq 0) \wedge (0 < y \leq 1 - x^2)\};$

$D_5 = \{(x, y) | (0 < x \leq 1) \wedge (0 < y \leq 1 - x^2)\};$

$D_6 = \{(x, y) | (0 < x \leq 1) \wedge (1 - x^2 < y \leq 1)\};$

$D_7 = \{(x, y) | (x > 1) \wedge (0 < y \leq 1)\};$

$D_8 = \{(x, y) | (-1 < x \leq 0) \wedge (y > 1 - x^2)\};$

$D_9 = \{(x, y) | (0 < x \leq 1) \wedge (y > 1)\};$

$D_{10} = \{(x, y) | (x > 1) \wedge (y > 1)\}.$

Таке розбиття зумовлене виглядом подвійного інтеграла від сумісної щільності вектора $\vec{\xi}$ по області, яка утворилася в результаті перетину області G та нескінченного квадранта з вершиною у точці (x, y). Перейдемо до системи координат tOs, оскільки x та y тут є параметрами. Позначимо $G_i = G \cap \{(t, s) | (t < x) \wedge (s < y)\}$, коли $(x, y) \in D_i$, $i = \overline{0, 10}$ та розглянемо усі ці випадки. На рисунках 3.3 – 3.13 області інтегрування G_i зафарбовано. Для спрощення побудови подвійних інтегралів у деяких випадках G_i будемо розбивати на частини, кожна з яких фарбується в окремий колір.

1. $(x, y) \in D_0$,

$$G_0 = \emptyset,$$

$$F_{\vec{\xi}}(x, y) = \int_{-\infty}^{x} dt \int_{-\infty}^{y} 0\, ds = 0.$$

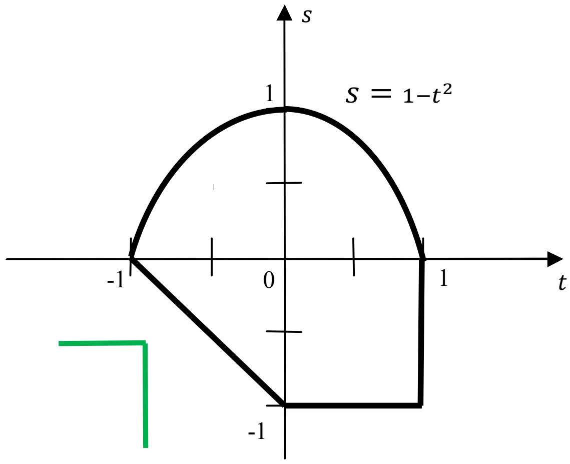


Рисунок 3.3

2. $(x, y) \in D_1$,

$$G_1 = \left\{(t, s) \middle| \begin{matrix}(-1 - y \le t < x) \wedge \\ \wedge (-1 - t \le s < y)\end{matrix}\right\};$$

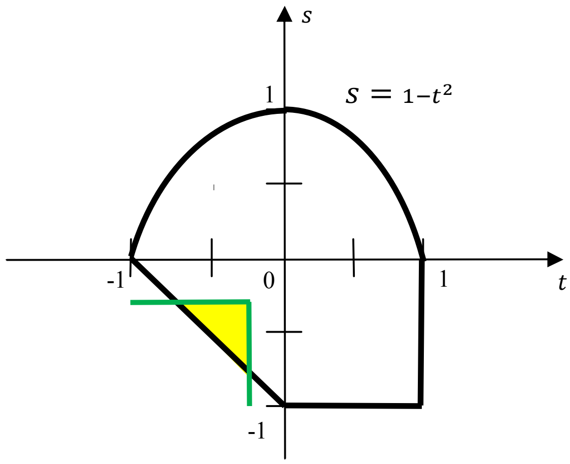


Рисунок 3.4

$$F_{\vec{\xi}}(x, y) = \frac{6}{17}\iint_{G_1} dtds = \frac{6}{17}\int_{-1-y}^{x} dt \int_{-1-t}^{y} ds = \frac{6}{17}\int_{-1-y}^{x} y + t + 1\, dt =$$

$$= \frac{6}{17}\left(yt + \frac{t^2}{2} + t\right)\Big|_{t=-1-y}^{x} = \frac{3}{17}(2xy + (x + 1)^2 + (y + 1)^2 - 1).$$

3. $(x, y) \in D_2$,

$$G_2 = \left\{(t, s)\middle|\begin{matrix}(-1 \le s < y) \wedge \\ \wedge\, (-1 - s \le t < x)\end{matrix}\right\};$$

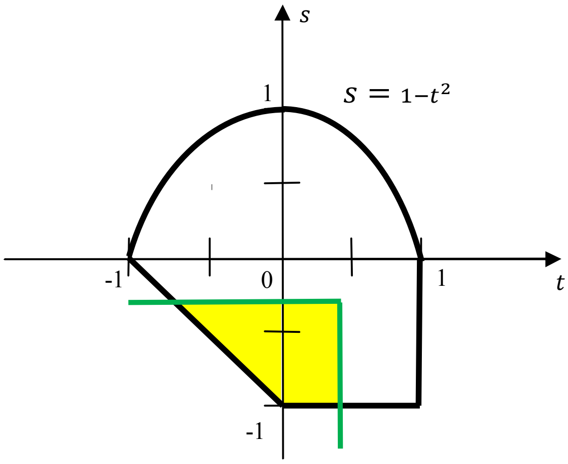


Рисунок 3.5

$$F_{\vec{\xi}}(x, y) = \frac{6}{17}\iint_{G_2} dtds = \frac{6}{17}\int_{-1}^{y} ds \int_{-1-s}^{x} dt = \frac{6}{17}\int_{-1}^{y} x + s + 1\, ds =$$

$$= \frac{6}{17}\left(\frac{s^2}{2} + (x + 1)s\right)\Big|_{s=-1}^{y} = \frac{3}{17}\left((y + 1)^2 + 2x(y + 1)\right).$$

4. $(x, y) \in D_3$,

$$G_3 = \left\{(t, s)\middle|\begin{matrix}(-1 \le s < y) \wedge \\ \wedge\, (-1 - s \le t < 1)\end{matrix}\right\};$$

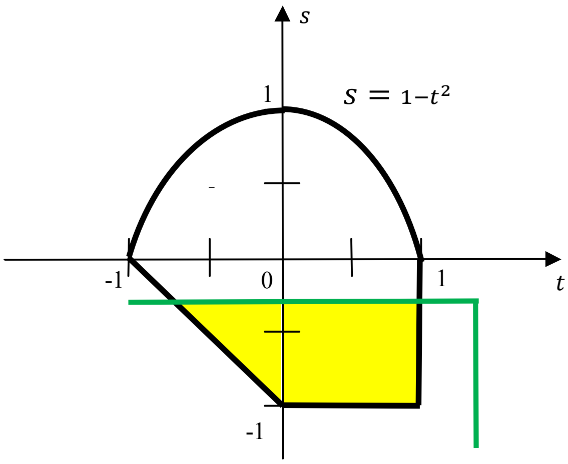


Рисунок 3.6

$$F_{\vec{\xi}}(x, y) = \frac{6}{17}\iint_{G_3} dtds = \frac{6}{17}\int_{-1}^{y} ds \int_{-1-s}^{1} dt = \frac{6}{17}\int_{-1}^{y} s + 2\, ds =$$

$$= \frac{6}{17}\left(\frac{s^2}{2} + 2s\right)\Big|_{s=-1}^{y} = \frac{3}{17}(y^2 + 4y + 3).$$

5. $(x, y) \in D_4$,

$$G_4 = G_4' \cup G_4'' =$$

$$= \left\{ (t,s) \middle| \begin{matrix} (-1 - x \le s < 0) \wedge \\ \wedge (-1 - s \le t < x) \end{matrix} \right\} \cup$$

$$\cup \left\{ (t,s) \middle| \begin{matrix} (0 \le s < y) \wedge \\ \wedge (-\sqrt{1 - s} \le t < x) \end{matrix} \right\};$$

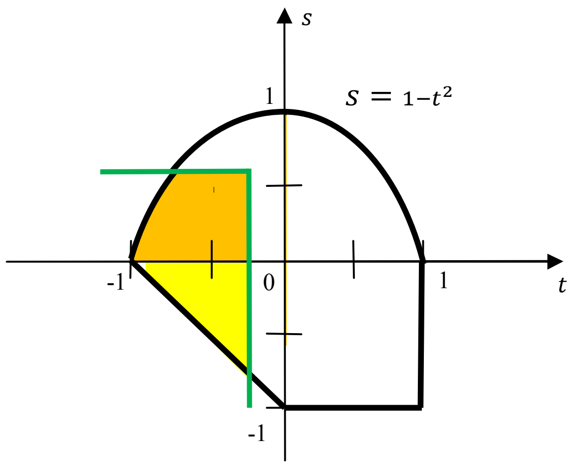


Рисунок 3.7

$$F_{\vec{\xi}}(x, y) = \frac{6}{17} \iint_{G_4} dtds = \frac{6}{17} \left(\int_{-1-x}^{0} ds \int_{-1-s}^{x} dt + \int_0^y ds \int_{-\sqrt{1-s}}^{x} dt \right) =$$

$$= \frac{6}{17} \left(\int_{-1-x}^{0} x + s + 1 \, ds + \int_0^y x + \sqrt{1 - s} \, ds \right) =$$

$$= \frac{6}{17} \left(\left(xs + \frac{(s+1)^2}{2} \right) \Big|_{s=-1-x}^{0} + \left(xs - \frac{2(1-s)^{3/2}}{3} \right) \Big|_{s=0}^{y} \right) =$$

$$= \frac{7 + 3x^2 + 6(x+1)y - 4(1-y)^{3/2}}{17}.$$

6. $(x, y) \in D_5$,

$$G_5 = G_5' \cup G_5'' =$$

$$= \left\{ (t,s) \middle| \begin{matrix} (-1 \le s < 0) \wedge \\ \wedge (-1 - s \le t < x) \end{matrix} \right\} \cup$$

$$\cup \left\{ (t,s) \middle| \begin{matrix} (0 \le s < y) \wedge \\ \wedge (-\sqrt{1 - s} \le t < x) \end{matrix} \right\};$$

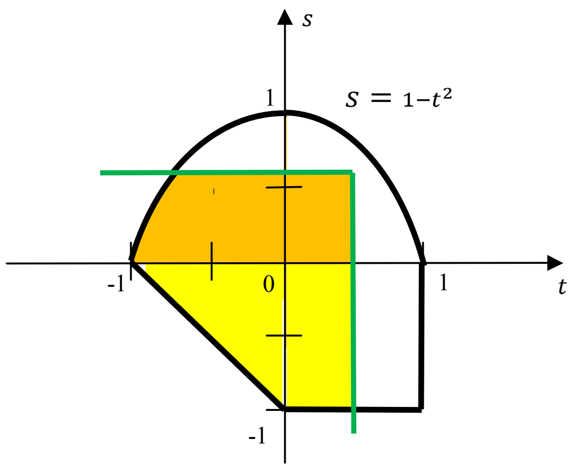


Рисунок 3.8

$$F_{\vec{\xi}}(x,y) = \frac{6}{17}\iint_{G_5} dtds = \frac{6}{17}\left(\int_{-1}^{0} ds \int_{-1-s}^{x} dt + \int_{0}^{y} ds \int_{-\sqrt{1-s}}^{x} dt\right) =$$

$$= \frac{6}{17}\left(\int_{-1}^{0} x + s + 1\, ds + \int_{0}^{y} x + \sqrt{1-s}\, ds\right) =$$

$$= \frac{6}{17}\left(\left(xs + \frac{(s+1)^2}{2}\right)\Big|_{s=-1}^{0} + \left(xs - \frac{2(1-s)^{3/2}}{3}\right)\Big|_{s=0}^{y}\right) = \frac{7+6(x+1)y-4(1-y)^{3/2}}{17}.$$

7. $(x,y) \in D_6$,

$$G_6 = G_6' \cup G_6'' \cup G_6''' =$$

$$= \left\{(t,s)\middle|\begin{matrix}(-1 \le s < 0) \wedge \\ \wedge\,(-1 - s \le t < x)\end{matrix}\right\} \cup$$

$$\cup \left\{(t,s)\middle|\begin{matrix}(0 \le s < 1 - x^2) \wedge \\ \wedge\,(-\sqrt{1-s} \le t < x)\end{matrix}\right\} \cup$$

$$\cup \left\{(t,s)\middle|\begin{matrix}(1 - x^2 \le s < y) \wedge \\ \wedge\,(-\sqrt{1-s} \le t < \sqrt{1-s})\end{matrix}\right\};$$

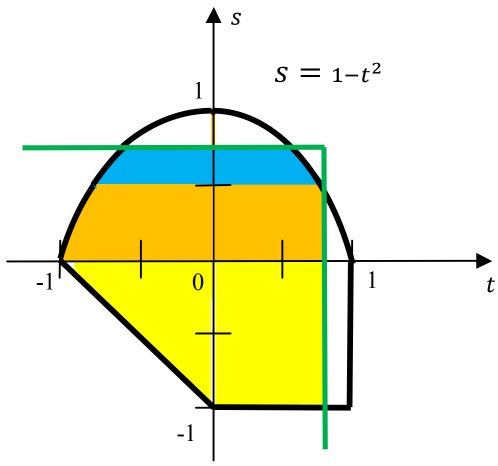


Рисунок 3.9

$$F_{\vec{\xi}}(x,y) = \frac{6}{17}\iint_{G_6} dtds =$$

$$= \frac{6}{17}\left(\int_{-1}^{0} ds \int_{-1-s}^{x} dt + \int_{0}^{1-x^2} ds \int_{-\sqrt{1-s}}^{x} dt + \int_{1-x^2}^{y} ds \int_{-\sqrt{1-s}}^{\sqrt{1-s}} dt\right) =$$

$$= \frac{6}{17}\left(\int_{-1}^{0} x + s + 1\, ds + \int_{0}^{1-x^2} x + \sqrt{1-s}\, ds + 2\int_{1-x^2}^{y} \sqrt{1-s}\, ds\right) =$$

$$= \frac{6}{17}\left(\left(xs + \frac{(s+1)^2}{2}\right)\Big|_{s=-1}^{0} + \left(xs - \frac{2(1-s)^{3/2}}{3}\right)\Big|_{s=0}^{1-x^2}\right) -$$

$$- \frac{12}{17}\left(\frac{2(1-s)^{3/2}}{3}\right)\Big|_{s=1-x^2}^{y} = \frac{7+12x-2x^3-8(1-y)^{3/2}}{17}.$$

8. $(x,y) \in D_7$,

$$G_7 = G_7' \cup G_7'' =$$

$$= \left\{(t,s)\middle|\begin{matrix}(-1 \le s < 0) \wedge \\ \wedge\,(-1 - s \le t < 1)\end{matrix}\right\} \cup$$

$$\cup \left\{(t,s)\middle|\begin{matrix}(0 \le s < y) \wedge \\ \wedge\,(-\sqrt{1-s} \le t < \sqrt{1-s})\end{matrix}\right\};$$

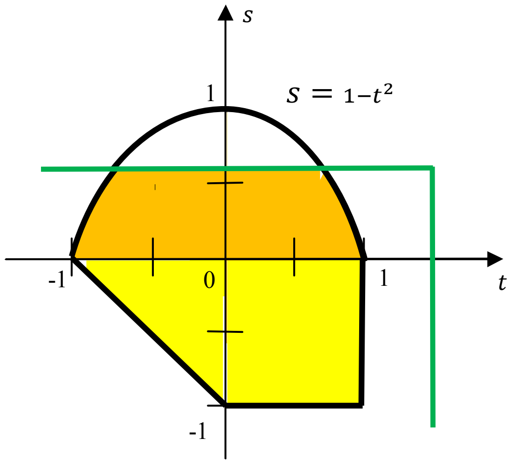


Рисунок 3.10

$$F_{\vec{\xi}}(x,y) = \frac{6}{17}\iint_{G_7} dtds = \frac{6}{17}\left(\int_{-1}^{0} ds \int_{-1-s}^{1} dt + \int_{0}^{y} ds \int_{-\sqrt{1-s}}^{\sqrt{1-s}} dt\right) =$$

$$= \frac{6}{17}\left(\int_{-1}^{0} s + 2\, ds + 2\int_{0}^{y} \sqrt{1-s}\, ds\right) =$$

$$\frac{6}{17}\left(\left(\frac{s^2}{2} + 2s\right)\Big|_{s=-1}^{0} - \left(\frac{4(1-s)^{3/2}}{3}\right)\Big|_{s=0}^{y}\right) = \frac{17 - 8(1-y)^{3/2}}{17}.$$

9. $(x,y) \in D_8$,

$$G_8 = \left\{(t,s)\middle|\begin{matrix}(-1 \le t < x) \wedge \\ \wedge\,(-1 - t \le s < 1 - t^2)\end{matrix}\right\};$$

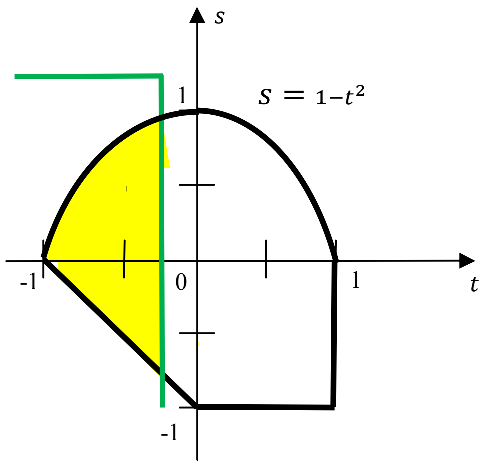


Рисунок 3.11

$$F_{\vec{\xi}}(x,y) = \frac{6}{17}\iint_{G_8} dtds = \frac{6}{17}\int_{-1}^{x} dt \int_{-1-t}^{1-t^2} ds = \frac{6}{17}\int_{-1}^{x} 2 + t - t^2\, dt =$$

$$= \frac{6}{17}\left(2t + \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3}\right)\Big|_{t=-1}^{x} = \frac{7+12x+3x^2-2x^3}{17}.$$

10. $(x,y) \in D_9$,

$$G_9 = G_9' \cup G_9'' =$$

$$= \left\{(t,s)\middle|\begin{matrix}(-1 \le t < 0) \wedge \\ \wedge\,(-1-t \le s < 1-t^2)\end{matrix}\right\} \cup$$

$$\cup \left\{(t,s)\middle|\begin{matrix}(0 \le t < x) \wedge \\ \wedge\,(-1 \le s < 1-t^2)\end{matrix}\right\};$$

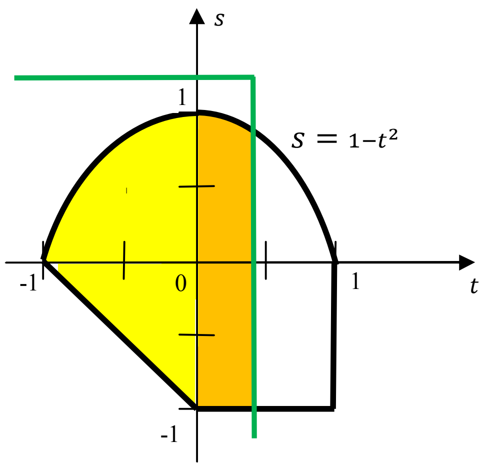


Рисунок 3.12

$$F_{\vec{\xi}}(x,y) = \frac{6}{17}\iint_{G_9} dtds = \frac{6}{17}\left(\int_{-1}^{0} dt \int_{-1-t}^{1-t^2} ds + \int_{0}^{x} dt \int_{-1}^{1-t^2} ds\right) =$$

$$= \frac{6}{17}\left(\int_{-1}^{0} 2 + t - t^2\, dt + \int_{0}^{x} 2 - t^2 dt\right) =$$

$$= \frac{6}{17}\left(\left(2t + \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3}\right)\Big|_{t=-1}^{0} + \left(2t - \frac{t^3}{3}\right)\Big|_{t=0}^{x}\right) = \frac{7+12x-2x^3}{17}.$$

11. $(x,y) \in D_{10}$,

$$G_{10} = G_{10}' \cup G_{10}'' =$$

$$= \left\{(t,s)\middle|\begin{matrix}(-1 \le t < 0) \wedge \\ \wedge\,(-1-t \le s < 1-t^2)\end{matrix}\right\} \cup$$

$$\cup \left\{(t,s)\middle|\begin{matrix}(0 \le t < 1) \wedge \\ \wedge\,(-1 \le s < 1-t^2)\end{matrix}\right\} = G;$$

$$F_{\vec{\xi}}(x,y) = \frac{6}{17}\iint_{G_9} dtds =$$

$$\frac{6}{17}\iint_{G} dtds = \frac{S_G}{S_G} = 1.$$

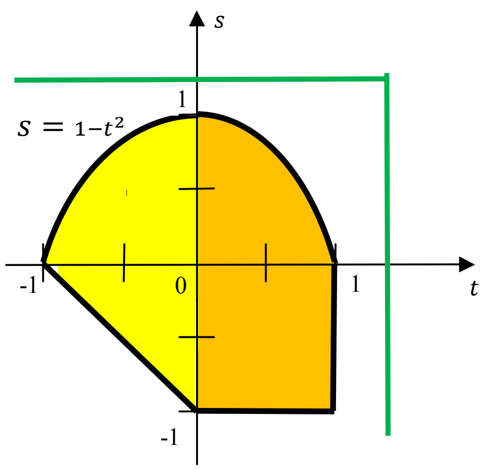


Рисунок 3.13

Запишемо відповідь:

$$F_{\vec{\xi}}(x, y) =$$

$$= \begin{cases} 0, & (x \le -1) \vee (y \le -1) \vee (x + y \le -1); \\ \frac{3}{17}(2xy + (x+1)^2 + (y+1)^2 - 1), & (-1 < x \le 0) \wedge (-x - 1 < y \le 0); \\ \frac{3}{17}\big((y+1)^2 + 2x(y+1)\big), & (0 < x \le 1) \wedge (-1 < y \le 0); \\ \frac{3}{17}(y^2 + 4y + 3), & (x > 1) \wedge (-1 < y \le 0); \\ \frac{1}{17}\big(7 + 3x^2 + 6(x+1)y - 4(1-y)^{3/2}\big), & (-1 < x \le 0) \wedge (0 < y \le 1 - x^2); \\ \frac{1}{17}\big(7 + 6(x+1)y - 4(1-y)^{3/2}\big), & (0 < x \le 1) \wedge (0 < y \le 1 - x^2); \\ \frac{1}{17}\big(7 + 12x - 2x^3 - 8(1-y)^{3/2}\big), & (0 < x \le 1) \wedge (1 - x^2 < y \le 1); \\ \frac{1}{17}\big(17 - 8(1-y)^{3/2}\big), & (x > 1) \wedge (0 < y \le 1); \\ \frac{1}{17}(7 + 12x + 3x^2 - 2x^3), & (-1 < x \le 0) \wedge (y > 1 - x^2); \\ \frac{1}{17}(7 + 12x - 2x^3), & (0 < x \le 1) \wedge (y > 1); \\ 1, & (x > 1) \wedge (y > 1). \end{cases}$$

Можна помітити, що умови узгодженості (1.2) сумісної функції розподілу випадкового вектора $\vec{\xi}$ з функціями розподілу його координат виконуються.

4. Математичні сподівання координат. Кореляційна та нормована кореляційна матриця.

а) Обчислимо математичні сподівання координат.

За формулами (1.20) обчислимо математичні сподівання ξ_1 та ξ_2.

$$E\xi_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{\xi_1}(x)dx = \frac{6}{17}\left(\int_{-1}^{0} 2x + x^2 - x^3\, dx + \int_0^1 2x - x^3\, dx\right) =$$

$$= \frac{6}{17}\left(\left(x^2 + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right)\Big|_{-1}^{0} + \left(x^2 - \frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^1\right) = \frac{6}{17}\left(-1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + 1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{2}{17}.$$

$$E\xi_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_{\xi_2}(y)dy = \frac{6}{17}\int_{-1}^{0} 2y + y^2\, dy + \frac{12}{17}\int_0^1 y\sqrt{1-y}\, dy =$$

$$= \frac{6}{17}\left(y^2 + \frac{y^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{0} + \frac{12}{17}B\left(2;\, \frac{3}{2}\right) = \frac{6}{17}\left(-1 + \frac{1}{3}\right) + \frac{12}{17}\cdot\frac{\Gamma(2)\cdot\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)} =$$

$$= -\frac{4}{17} + \frac{16}{17\cdot 5} = -\frac{4}{85},$$

де $B(\alpha;\, \beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx$ – бета-функція Ейлера,

$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx$ – гама-функція Ейлера.

Отже, центр розсіювання випадкового вектора $\vec{\xi}$ має координати

$$(E\xi_1, E\xi_2) = \left(\frac{2}{17}, -\frac{4}{85}\right).$$

б) Побудуємо кореляційну та нормовану кореляційну матриці.

Спочатку побудуємо першу кореляційну матрицю $K_1 = \begin{pmatrix} E\xi_1^2 & E\xi_1\xi_2 \\ E\xi_1\xi_2 & E\xi_2^2 \end{pmatrix}$.

$$E\xi_1^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_{\xi_1}(x)dx =$$

$$=\frac{6}{17}\left(\int_{-1}^{0} 2x^2 + x^3 - x^4\, dx + \int_0^1 2x^2 - x^4\, dx\right) =$$

$$= \frac{6}{17}\left(\left(\frac{2x^3}{3} + \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5}\right)\Big|_{-1}^{0} + \left(\frac{2x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right)\Big|_0^1\right) = \frac{6}{17}\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{2}{3} - \frac{1}{5}\right) = \frac{41}{170}.$$

$$E\xi_2^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 f_{\xi_2}(y)dy = \frac{6}{17}\int_{-1}^{0} 2y^2 + y^3\, dy + \frac{12}{17}\int_0^1 y^2\sqrt{1-y}\, dy =$$

$$= \frac{6}{17}\left(\frac{2y^3}{3} + \frac{y^4}{4}\right)\Big|_{-1}^{0} + \frac{12}{17}B\left(3;\, \frac{3}{2}\right) = \frac{6}{17}\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{4}\right) + \frac{12}{17}\cdot\frac{\Gamma(3)\cdot\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{9}{2}\right)} =$$

$$= \frac{5}{34} + \frac{64}{17\cdot 7\cdot 5} = \frac{303}{1190}.$$

$$E\xi_1\xi_2 = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xyf_{\vec{\xi}}(x,y)dxdy =$$

$$\frac{6}{17}\left(\int_{-1}^{0} x\, dx \int_{-x-1}^{1-x^2} y\, dy + + \int_0^1 x\, dx \int_{-1}^{1-x^2} y\, dy\right) =$$

$$= \frac{3}{17}\left(\int_{-1}^{0} x((1-x^2)^2 - (1+x)^2)\, dx + \int_0^1 x((1-x^2)^2 - 1)\, dx\right) =$$

$$= \frac{3}{17}\left(\int_{-1}^{0} x^5 - 3x^3 - 2x^2\, dx + \int_0^1 x^5 - 2x^3\, dx\right) =$$

$$= \frac{3}{17}\left(\left(\frac{x^6}{6} - \frac{3x^4}{4} - \frac{2x^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{0} + \left(\frac{x^6}{6} - \frac{x^4}{2}\right)\Big|_0^1\right) = \frac{6}{17}\left(-\frac{1}{6} + \frac{3}{4} - \frac{2}{3} + \frac{1}{6} - \frac{1}{2}\right) = -\frac{5}{68}.$$

Тобто матриця K_1 матиме вигляд:

$$K_1 = \begin{pmatrix} \frac{41}{170} & -\frac{5}{68} \\ -\frac{5}{68} & \frac{303}{1190} \end{pmatrix}.$$

Побудуємо наступну матрицю $K_2 = \begin{pmatrix} D\xi_1 & K(\xi_1,\xi_2) \\ K(\xi_1,\xi_2) & D\xi_2 \end{pmatrix}$ (формула (1.33)).

Для обчислення дисперсій $D\xi_1$ та $D\xi_2$ використаємо формули (1.26) та (1.28).

$$D\xi_1 = E\xi_1^2 - (E\xi_1)^2 = \frac{41}{170} - \left(\frac{2}{17}\right)^2 = \frac{657}{2890} \approx 0{,}227;$$

$$D\xi_2 = E\xi_2^2 - (E\xi_2)^2 = \frac{303}{1190} - \left(-\frac{4}{85}\right)^2 = \frac{25531}{101150} \approx 0{,}252.$$

Кореляційний момент $K(\xi_1, \xi_2)$ обчислимо за формулою (1.30)

$$K(\xi_1, \xi_2) = E\xi_1\xi_2 - E\xi_1 \cdot E\xi_2 = -\frac{5}{68} - \frac{2}{17} \cdot \left(-\frac{4}{85}\right) = -\frac{393}{5780} \approx -0{,}068.$$

Отримали $K_2 = \begin{pmatrix} \frac{657}{2890} & -\frac{393}{5780} \\ -\frac{393}{5780} & \frac{25531}{101150} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0{,}227 & -0{,}068 \\ -0{,}068 & 0{,}252 \end{pmatrix}.$

Бачимо, що випадкові величини ξ_1 та ξ_2 є корельованими. Також виконаємо перевірку невід'ємної визначеності матриці K_2.

$$\det K_2 = 0{,}227 \cdot 0{,}252 - (-0{,}068)^2 \approx 0{,}053 > 0.$$

Обчислимо коефіцієнт кореляції $r(\xi_1, \xi_2)$, використавши формулу (1.34).

$$r(\xi_1, \xi_2) = \frac{K(\xi_1,\xi_2)}{\sqrt{D\xi_1 \cdot D\xi_2}} = \frac{-\frac{393}{5780}}{\sqrt{\frac{657}{2890} \cdot \frac{25531}{101150}}} \approx -\frac{0{,}068}{\sqrt{0{,}227 \cdot 0{,}252}} \approx -0{,}284.$$

Побудуємо нормовану кореляційну матрицю (1.35).

$$R=\begin{pmatrix}1 & r(\xi_1,\xi_2)\\ r(\xi_2,\xi_1) & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -0{,}284\\ -0{,}284 & 1\end{pmatrix}.$$

5. Умовні щільності розподілу для кожної координати.

За допомогою формул (1.37) та (1.38) обчислимо умовні щільності $f_{\xi_1}(x/y)$ та $f_{\xi_2}(y/x)$.

Згадаємо, що

$$f_{\vec{\xi}}(x,y)=\begin{cases}\frac{6}{17}, (x,y)\in G;\\ 0, \quad (x,y)\notin G.\end{cases}$$

$$f_{\xi_1}(x)=\begin{cases}0, & x\le -1;\\ \frac{6}{17}(2-x^2+x), & -1<x\le 0;\\ \frac{6}{17}(2-x^2), & 0<x\le 1;\\ 0, & x>1;\end{cases}$$

$$f_{\xi_2}(y)=\begin{cases}0, & y\le -1;\\ \frac{6}{17}(2+y), & -1<y\le 0;\\ \frac{12}{17}\sqrt{1-y}, & 0<y\le 1;\\ 0, & y>1.\end{cases}$$

$$f_{\xi_1}(x/y)=\frac{f_{\vec{\xi}}(x,y)}{f_{\xi_2}(y)}=\begin{cases}0, & y\le -1;\\ \frac{1}{y+2}, & y\in(-1;0], x\in[-y-1;\ 1];\\ 0, & y\in(-1;0], x\notin[-y-1;\ 1];\\ \frac{1}{2\sqrt{1-y}}, & y\in(0;1], x\in[-\sqrt{1-y};\ \sqrt{1-y}];\\ 0, & y\in(0;1], x\notin[-\sqrt{1-y};\ \sqrt{1-y}];\\ 0, & y>1.\end{cases}$$

$$f_{\xi_2}(y/x) = \frac{f_{\vec{\xi}}(x,y)}{f_{\xi_1}(x)} = \begin{cases} 0, & x \le -1; \\ \frac{1}{2+x-x^2}, & x \in (-1;0], y \in [-x-1;\ 1-x^2]; \\ 0, & x \in (-1;0], y \notin [-x-1;\ 1-x^2]; \\ \frac{1}{2-x^2}, & x \in (0;1], y \in [-1;\ 1-x^2]; \\ 0, & x \in (0;1], y \notin [-1;\ 1-x^2]; \\ 0, & x > 1. \end{cases}$$

Умови нормування для умовних щільностей виконуються, оскільки

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi_1}(x/y)dx = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\vec{\xi}}(x,y)dx}{f_{\xi_2}(y)} = \frac{f_{\xi_2}(y)}{f_{\xi_2}(y)} = 1;$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi_2}(y/x)dy = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\vec{\xi}}(x,y)dy}{f_{\xi_1}(x)} = \frac{f_{\xi_1}(x)}{f_{\xi_1}(x)} = 1.$$

У нашому випадку очевидно, що

$$\int_{-x-1}^{1-x^2} \frac{dy}{2+x-x^2} = \int_{-1}^{1-x^2} \frac{dy}{2-x^2} = 1 \text{ та } \int_{-y-1}^{1} \frac{dx}{2+y} = \int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}} \frac{dx}{2\sqrt{1-y}} = 1.$$

6. Умовні математичні сподівання для кожної координати з перевіркою.

Для пошуку умовних математичних сподівань скористаємося формулами (1.42):

$$\begin{cases} E(\xi_2/\xi_1 = x) = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_{\xi_2}(y/x)dy = \psi(x); \\ E(\xi_1/\xi_2 = y) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{\xi_1}(x/y)dx = \varphi(y). \end{cases}$$

$$E(\xi_2/\xi_1 = x) =$$

$$= \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} 0\, dy = 0, & (x \le -1) \vee (x > 1); \\ \int_{-x-1}^{1-x^2} \frac{y}{2+x-x^2}\, dy = \frac{y^2}{2(2+x-x^2)} \Big|_{-x-1}^{1-x^2} = -\frac{x^2+x}{2}, & x \in (-1; 0]; \\ \int_{-1}^{1-x^2} \frac{y}{2-x^2}\, dy = \frac{y^2}{2(2-x^2)} \Big|_{-1}^{1-x^2} = -\frac{x^2}{2}, & x \in (0; 1]. \end{cases}$$

$$E(\xi_1/\xi_2 = y) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} 0\, dx = 0, & (y \le -1) \vee (y > 1); \\ \int_{-y-1}^{1} \frac{x}{2+y}\, dx = \frac{x^2}{2(2+y)} \Big|_{-y-1}^{1} = -\frac{y}{2}, & y \in (-1; 0]; \\ \int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}} \frac{x}{2\sqrt{1-y}}\, dx = \frac{x^2}{4\sqrt{1-y}} \Big|_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}} = 0, & y \in (0; 1]. \end{cases}$$

$E(\xi_2/\xi_1 = x)$ та $E(\xi_1/\xi_2 = y)$ зображені блакитними лініями на рис. 3.14 та 3.15 відповідно.

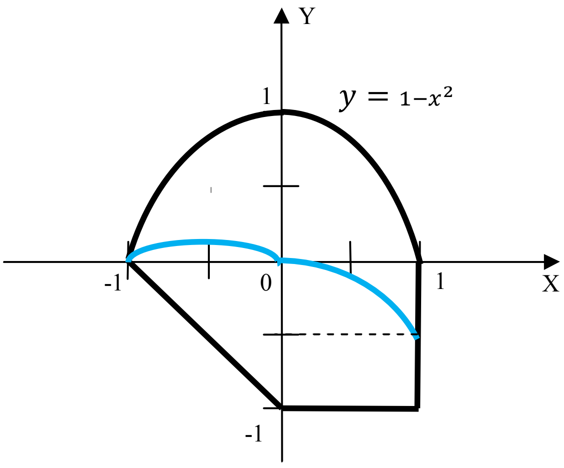


Рисунок 3.14

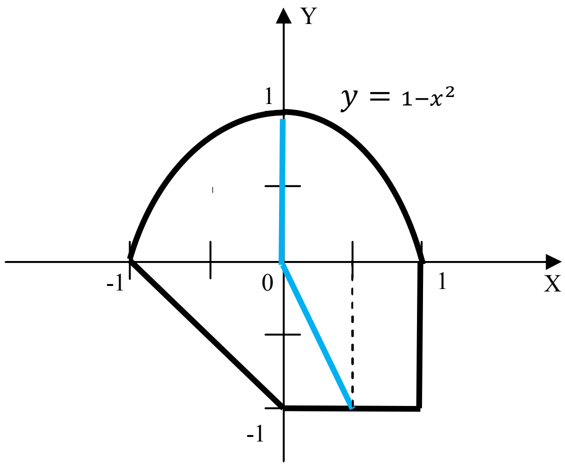


Рисунок 3.15

Розглянемо випадкові величини $E(\xi_1/\xi_2) = \varphi(\xi_2)$ та $E(\xi_2/\xi_1) = \psi(\xi_1)$. У нашому випадку

$$E(\xi_1/\xi_2) = \begin{cases} 0, & (\xi_2 \le -1) \vee (\xi_2 > 0); \\ -\frac{\xi_2}{2}, & \xi_2 \in (-1; 0]. \end{cases}$$

$$E(\xi_2/\xi_1)=\begin{cases}0, \ (\xi_1\le -1)\vee(\xi_1>1);\\ -\frac{\xi_1^2+\xi_1}{2}, \quad \xi_1\in(-1;0];\\ -\frac{\xi_1^2}{2}, \quad \xi_1\in(0;1].\end{cases}$$

Виконаємо перевірку формул повного математичного сподівання (1.43)

$$\begin{cases}E\big(E(\xi_1/\xi_2)\big)=E\xi_1;\\ E\big(E(\xi_2/\xi_1)\big)=E\xi_2.\end{cases}$$

$$E\big(E(\xi_1/\xi_2)\big)=\int_{-\infty}^{+\infty}E(\xi_1/\xi_2=y)f_{\xi_2}(y)dy=-\frac{6}{17}\int_{-1}^{0}\frac{y(2+y)}{2}dy=$$
$$=-\frac{3}{17}\left(y^2+\frac{y^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{0}=-\frac{3}{17}\left(-1+\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{17}=E\xi_1;$$

$$E\big(E(\xi_2/\xi_1)\big)=\int_{-\infty}^{+\infty}E(\xi_2/\xi_1=x)f_{\xi_1}(x)dx=$$
$$=-\frac{6}{17}\int_{-1}^{0}\frac{(x^2+x)\cdot(2+x-x^2)}{2}dx-\frac{6}{17}\int_{0}^{1}\frac{x^2(2-x^2)}{2}dx=$$
$$=-\frac{3}{17}\left(\int_{-1}^{0}2x+3x^2-x^4\,dx+\int_0^1 2x^2-x^4\,dx\right)=$$
$$=-\frac{3}{17}\left(\left(x^2+x^3-\frac{x^5}{5}\right)\Big|_{-1}^{0}+\left(\frac{2x^3}{3}-\frac{x^5}{5}\right)\Big|_{0}^{1}\right)=$$
$$=-\frac{3}{17}\left(-1+1-\frac{1}{5}+\frac{2}{3}-\frac{1}{5}\right)=-\frac{4}{85}=E\xi_2.$$

Варіанти завдань розрахункової роботи
«Випадкові вектори»

Завдання 1

Варіант 1

$\xi_1 \backslash \xi_2$	-10	-8	-6	8
-4	0,05	0,1	0,08	0,08
-3	0,05	0,09	0,05	0,07
2	0,06	0,14	0,06	0,17

Варіант 2

$\xi_1 \backslash \xi_2$	-9	-8	-1	2
-4	0,07	0,1	0,12	0,03
-3	0,01	0,11	0,1	0,13
-1	0,01	0,02	0,11	0,19

Варіант 3

$\xi_1 \backslash \xi_2$	-8	-4	1	7
-4	0,08	0,12	0,07	0,09
-3	0,07	0,11	0,01	0,06
-2	0,01	0,09	0,09	0,2

Варіант 4

$\xi_1 \backslash \xi_2$	-10	-2	-1	8
-5	0,03	0,06	0,09	0,13
2	0,1	0,07	0,04	0,09
3	0,05	0,01	0,03	0,3

Варіант 5

$\xi_1 \backslash \xi_2$	-9	-4	-3	5
-3	0,06	0,08	0,02	0,08
1	0,1	0,09	0,12	0,04
3	0,11	0,11	0,03	0,16

Варіант 6

$\xi_1 \backslash \xi_2$	-10	0	4	7
-3	0,06	0,13	0,06	0,05
2	0,04	0,03	0,01	0,06
3	0,06	0,11	0,14	0,25

Варіант 7

$\xi_1 \backslash \xi_2$	-9	2	7	8
-2	0,17	0,01	0,07	0,06
1	0,13	0,08	0,04	0,08
2	0,12	0,02	0,07	0,15

Варіант 8

$\xi_1 \backslash \xi_2$	-1	2	5	8
-5	0,1	0,01	0,09	0,14
-4	0,06	0,07	0,13	0,01
-1	0,13	0,09	0,08	0,09

Варіант 9

$\xi_1 \backslash \xi_2$	-9	2	5	8
-5	0,1	0,07	0,13	0,02
-4	0,02	0,07	0,02	0,12
2	0,16	0,01	0,07	0,21

Варіант 10

$\xi_1 \backslash \xi_2$	-6	-5	0	6
-5	0,16	0,03	0,04	0,03
-1	0,11	0,02	0,08	0,15
0	0,13	0,07	0,05	0,13

Варіант 11

$\xi_1 \backslash \xi_2$	-3	-2	3	4
-2	0,06	0,07	0,09	0,12
0	0,12	0,01	0,03	0,05
3	0,08	0,12	0,11	0,14

Варіант 12

$\xi_1 \backslash \xi_2$	-9	-6	-2	8
-5	0,12	0,12	0,1	0,1
-4	0,09	0,08	0,04	0,06
-1	0,09	0,02	0,1	0,08

Варіант 13

$\xi_1 \backslash \xi_2$	-10	-4	-2	5
-5	0,06	0,05	0,12	0,09
-4	0,08	0,11	0,1	0,05
2	0,07	0,07	0,04	0,16

Варіант 14

$\xi_1 \backslash \xi_2$	-10	-6	-3	3
-2	0,1	0,04	0,1	0,08
0	0,09	0,01	0,09	0,05
3	0,09	0,14	0,05	0,16

Варіант 15

$\xi_1 \backslash \xi_2$	-8	-7	5	8
-4	0,04	0,11	0,11	0,08
-2	0,06	0,12	0,08	0,08
2	0,02	0,02	0,07	0,21

Варіант 16

$\xi_1 \backslash \xi_2$	-6	2	3	7
-4	0,08	0,08	0,09	0,06
-2	0,04	0,1	0,01	0,01
3	0,02	0,15	0,16	0,2

Варіант 17

$\xi_1 \backslash \xi_2$	-3	-2	3	5
-2	0,18	0,06	0,05	0,08
-1	0,04	0,07	0,05	0,11
3	0,03	0,12	0,04	0,17

Варіант 18

$\xi_1 \backslash \xi_2$	-10	-9	-7	8
-4	0,02	0,11	0,05	0,01
0	0,05	0,02	0,07	0,13
3	0,16	0,06	0,17	0,15

Варіант 19

$\xi_1 \backslash \xi_2$	-6	-5	-1	0
-5	0,08	0,1	0,07	0,04
-2	0,1	0,04	0,12	0,01
3	0,13	0,03	0,06	0,22

Варіант 20

$\xi_1 \backslash \xi_2$	-8	-6	-1	8
-2	0,12	0,08	0,03	0,09
-1	0,01	0,1	0,1	0,02
1	0,11	0,07	0,12	0,15

Варіант 21

$\xi_1 \backslash \xi_2$	-5	-4	-2	2
-3	0,04	0,08	0,04	0,1
0	0,01	0,08	0,04	0,11
2	0,02	0,01	0,19	0,28

Варіант 22

$\xi_1 \backslash \xi_2$	-3	3	4	6
-4	0,18	0,06	0,09	0,03
-3	0,01	0,01	0,07	0,08
3	0,11	0,02	0,13	0,21

Варіант 23

$\xi_1 \backslash \xi_2$	-3	-1	5	8
0	0,12	0,05	0,1	0,08
2	0,12	0,09	0,09	0,03
3	0,05	0,11	0,05	0,11

Варіант 24

$\xi_1 \backslash \xi_2$	-10	-4	2	8
-5	0,08	0,04	0,05	0,07
-2	0,02	0,16	0,01	0,05
3	0,17	0,01	0,17	0,17

Варіант 25

$\xi_1 \backslash \xi_2$	-4	-3	-1	5
-2	0,04	0,12	0,01	0,07
-1	0,01	0,05	0,14	0,1
3	0,07	0,11	0,06	0,22

Варіант 26

$\xi_1 \backslash \xi_2$	-5	-2	-1	8
-4	0,16	0,06	0,09	0,11
-3	0,05	0,08	0,08	0,01
0	0,05	0,08	0,01	0,22

Варіант 27

$\xi_1 \backslash \xi_2$	-2	-1	3	7
-5	0,19	0,01	0,08	0,05
-4	0,05	0,04	0,06	0,12
1	0,09	0,03	0,12	0,16

Варіант 28

$\xi_1 \backslash \xi_2$	-7	-1	1	7
-4	0,2	0,01	0,07	0,11
-3	0,08	0,1	0,08	0,05
1	0,07	0,06	0,06	0,11

Варіант 29

$\xi_1 \backslash \xi_2$	-8	-4	0	7
-1	0,04	0,11	0,12	0,07
0	0,03	0,1	0,06	0,08
3	0,08	0,08	0,01	0,22

Варіант 30

$\xi_1 \backslash \xi_2$	-6	-2	1	3
-5	0,09	0,04	0,06	0,09
-2	0,03	0,04	0,12	0,09
3	0,13	0,1	0,03	0,18

Варіант 31

$\xi_1 \backslash \xi_2$	-8	-2	-1	7
0	0,08	0,09	0,07	0,13
1	0,01	0,08	0,03	0,05
3	0,03	0,04	0,02	0,37

Варіант 32

$\xi_1 \backslash \xi_2$	-10	-8	-3	0
-1	0,09	0,08	0,09	0,12
0	0,03	0,02	0,05	0,09
1	0,14	0,01	0,1	0,18

Варіант 33

$\xi_1 \backslash \xi_2$	-6	-5	4	8
-5	0,14	0,04	0,04	0,04
-2	0,01	0,11	0,09	0,08
-1	0,12	0,1	0,08	0,15

Варіант 34

$\xi_1 \backslash \xi_2$	-4	-2	3	4
-5	0,01	0,09	0,08	0,08
1	0,01	0,16	0,12	0,07
2	0,03	0,05	0,05	0,25

Варіант 35

$\xi_1 \backslash \xi_2$	-5	-3	2	3
-4	0,02	0,14	0,06	0,03
-2	0,1	0,09	0,11	0,1
2	0,11	0,03	0,01	0,2

Варіант36

$\xi_1 \backslash \xi_2$	-2	0	1	2
-4	0,02	0,11	0,05	0,13
-1	0,07	0,13	0,11	0,04
2	0,09	0,1	0,07	0,08

Варіант 37

$\xi_1 \backslash \xi_2$	-10	0	3	7
0	0,17	0,02	0,08	0,12
2	0,06	0,06	0,08	0,04
3	0,02	0,11	0,09	0,15

Варіант 38

$\xi_1 \backslash \xi_2$	-4	-2	3	8
-5	0,12	0,12	0,05	0,11
-1	0,06	0,08	0,02	0,04
2	0,14	0,09	0,01	0,16

Варіант 39

$\xi_1 \backslash \xi_2$	-9	-7	-6	3
-2	0,14	0,06	0,08	0,05
0	0,03	0,09	0,12	0,02
1	0,14	0,08	0,01	0,18

Варіант 40

$\xi_1 \backslash \xi_2$	-10	-8	1	5
-1	0,16	0,1	0,1	0,02
1	0,07	0,08	0,01	0,02
3	0,02	0,01	0,15	0,26

Варіант 41

$\xi_1 \backslash \xi_2$	-10	-9	-2	2
-4	0,09	0,03	0,14	0,12
-1	0,1	0,07	0,01	0,12
2	0,06	0,1	0,06	0,1

Варіант 42

$\xi_1 \backslash \xi_2$	-8	-2	0	4
-2	0,17	0,11	0,02	0,06
-1	0,06	0,11	0,07	0,06
0	0,02	0,12	0,06	0,14

Варіант 43

$\xi_1 \backslash \xi_2$	-8	-2	0	7
-3	0,03	0,07	0,04	0,04
-1	0,09	0,09	0,03	0,06
1	0,08	0,18	0,06	0,23

Варіант 44

$\xi_1 \backslash \xi_2$	-10	-2	4	5
-5	0,15	0,03	0,1	0,06
-1	0,03	0,12	0,06	0,04
2	0,13	0,1	0,01	0,17

Варіант 45

$\xi_1 \backslash \xi_2$	-10	-9	-5	-1
-5	0,01	0,09	0,01	0,09
1	0,09	0,02	0,04	0,06
3	0,18	0,15	0,12	0,14

Варіант 46

$\xi_1 \backslash \xi_2$	-5	-3	4	5
-2	0,13	0,02	0,01	0,07
-1	0,03	0,08	0,05	0,12
3	0,16	0,14	0,06	0,13

Варіант 47

$\xi_1 \backslash \xi_2$	-9	-8	-7	-4
-3	0,08	0,02	0,11	0,01
-1	0,01	0,04	0,17	0,08
0	0,15	0,08	0,09	0,16

Варіант 48

$\xi_1 \backslash \xi_2$	-7	-6	-1	3
-4	0,13	0,07	0,08	0,07
-1	0,07	0,04	0,07	0,12
0	0,1	0,1	0,01	0,14

Варіант 49

$\xi_1 \backslash \xi_2$	-9	-7	-1	5
-1	0,1	0,09	0,07	0,11
0	0,02	0,01	0,01	0,17
2	0,13	0,11	0,02	0,16

Варіант 50

$\xi_1 \backslash \xi_2$	-6	-4	3	5
1	0,17	0,01	0,1	0,03
2	0,08	0,07	0,05	0,07
3	0,05	0,15	0,05	0,17

Варіант 51

$\xi_1 \backslash \xi_2$	-6	-5	-4	-1
0	0,15	0,04	0,02	0,1
1	0,02	0,11	0,13	0,04
3	0,13	0,06	0,07	0,13

Варіант 52

$\xi_1 \backslash \xi_2$	-6	-3	2	3
-3	0,15	0,01	0,06	0,04
-1	0,01	0,14	0,12	0,09
2	0,13	0,03	0,03	0,19

Варіант 53

$\xi_1 \backslash \xi_2$	-10	-2	3	7
1	0,16	0,02	0,07	0,11
2	0,12	0,01	0,03	0,1
3	0,01	0,15	0,06	0,16

Варіант 54

$\xi_1 \backslash \xi_2$	-9	2	3	4
-5	0,1	0,1	0,08	0,1
-4	0,07	0,01	0,09	0,1
0	0,1	0,03	0,05	0,17

Варіант 55

$\xi_1 \backslash \xi_2$	-5	-4	5	7
-5	0,2	0,08	0,11	0,02
-3	0,04	0,1	0,08	0,07
-1	0,1	0,08	0,03	0,09

Варіант 56

$\xi_1 \backslash \xi_2$	-6	-2	4	8
-2	0,19	0,03	0,02	0,08
-1	0,01	0,12	0,08	0,07
0	0,14	0,07	0,01	0,18

Варіант 57

$\xi_1 \backslash \xi_2$	-5	-3	-2	2
-4	0,18	0,07	0,09	0,07
-3	0,08	0,03	0,02	0,09
0	0,05	0,13	0,08	0,11

Варіант 58

$\xi_1 \backslash \xi_2$	-9	-5	-1	4
-4	0,09	0,03	0,07	0,08
-2	0,09	0,01	0,01	0,01
2	0,17	0,04	0,02	0,38

Варіант 59

$\xi_1 \backslash \xi_2$	-10	-9	-5	0
-5	0,06	0,02	0,12	0,12
-3	0,09	0,02	0,05	0,09
-2	0,03	0,09	0,18	0,13

Варіант 60

$\xi_1 \backslash \xi_2$	-9	-8	-3	3
-5	0,02	0,04	0,01	0,12
0	0,14	0,11	0,02	0,01
2	0,08	0,12	0,17	0,16

Варіант 61

$\xi_1 \backslash \xi_2$	-9	-6	2	6
-2	0,2	0,02	0,08	0,11
-1	0,05	0,07	0,1	0,09
0	0,02	0,04	0,04	0,18

Варіант 62

$\xi_1 \backslash \xi_2$	-7	-4	4	7
-2	0,11	0,07	0,02	0,03
0	0,01	0,01	0,03	0,08
3	0,06	0,06	0,31	0,21

Варіант 63

$\xi_1 \backslash \xi_2$	-8	-3	7	8
-4	0,05	0,04	0,04	0,01
-3	0,14	0,16	0,13	0,04
-1	0,1	0,02	0,02	0,25

Варіант 64

$\xi_1 \backslash \xi_2$	-6	2	3	5
-4	0,16	0,08	0,05	0,03
-3	0,1	0,05	0,09	0,1
1	0,08	0,1	0,04	0,12

Варіант 65

$\xi_1 \backslash \xi_2$	-7	-1	3	5
-2	0,08	0,05	0,12	0,08
1	0,01	0,09	0,01	0,04
2	0,02	0,02	0,06	0,42

Варіант 66

$\xi_1 \backslash \xi_2$	-9	-6	-2	1
-5	0,16	0,09	0,08	0,1
-3	0,1	0,08	0,03	0,01
0	0,09	0,1	0,05	0,11

Варіант 67

$\xi_1 \backslash \xi_2$	-6	-4	-3	-2
-3	0,11	0,05	0,03	0,14
-2	0,09	0,11	0,04	0,02
0	0,05	0,02	0,01	0,33

Варіант 68

$\xi_1 \backslash \xi_2$	-7	-4	0	1
-5	0,15	0,01	0,11	0,12
1	0,08	0,11	0,05	0,03
3	0,01	0,14	0,07	0,12

Варіант 69

$\xi_1 \backslash \xi_2$	-10	-5	2	7
-4	0,17	0,01	0,07	0,08
-2	0,08	0,09	0,04	0,05
1	0,08	0,13	0,02	0,18

Варіант 70

$\xi_1 \backslash \xi_2$	-10	1	2	8
-1	0,05	0,04	0,11	0,12
0	0,07	0,04	0,06	0,14
3	0,06	0,06	0,09	0,16

Варіант 71

$\xi_1 \backslash \xi_2$	-6	-2	-1	7
-4	0,08	0,11	0,12	0,05
-3	0,05	0,06	0,09	0,07
3	0,04	0,08	0,13	0,12

Варіант 72

$\xi_1 \backslash \xi_2$	-10	-9	-8	3
-4	0,05	0,07	0,1	0,1
0	0,1	0,03	0,09	0,08
2	0,05	0,13	0,03	0,17

Варіант 73

$\xi_1 \backslash \xi_2$	-3	-2	-1	0
-2	0,1	0,05	0,12	0,03
-1	0,13	0,02	0,09	0,11
3	0,1	0,05	0,04	0,16

Варіант 74

$\xi_1 \backslash \xi_2$	-7	-1	1	7
-5	0,01	0,01	0,05	0,16
-1	0,06	0,14	0,09	0,12
1	0,06	0,08	0,05	0,17

Варіант 75

$\xi_1 \backslash \xi_2$	-10	3	4	5
-3	0,01	0,03	0,13	0,09
1	0,1	0,07	0,12	0,12
3	0,07	0,07	0,09	0,1

Варіант 76

$\xi_1 \backslash \xi_2$	-10	-8	-7	-6
-2	0,09	0,04	0,06	0,12
1	0,11	0,11	0,08	0,09
3	0,06	0,02	0,12	0,1

Варіант 77

$\xi_1 \backslash \xi_2$	0	1	5	6
-3	0,07	0,13	0,06	0,01
1	0,07	0,13	0,03	0,01
3	0,1	0,17	0,09	0,13

Варіант 78

$\xi_1 \backslash \xi_2$	-6	-2	-1	6
-4	0,02	0,14	0,02	0,12
-3	0,1	0,09	0,01	0,05
-1	0,16	0,04	0,12	0,13

Варіант 79

$\xi_1 \backslash \xi_2$	-8	-6	5	6
-4	0,17	0,02	0,02	0,03
0	0,04	0,16	0,09	0,03
2	0,11	0,07	0,13	0,13

Варіант 80

$\xi_1 \backslash \xi_2$	-5	-2	4	8
-3	0,16	0,12	0,09	0,07
1	0,04	0,05	0,06	0,03
3	0,05	0,14	0,07	0,12

Варіант 81

$\xi_1 \backslash \xi_2$	-7	-5	-2	7
-4	0,14	0,05	0,03	0,03
1	0,01	0,03	0,01	0,04
3	0,01	0,13	0,31	0,21

Варіант 82

$\xi_1 \backslash \xi_2$	-6	-5	-2	7
-4	0,17	0,09	0,04	0,1
-1	0,01	0,08	0,1	0,07
0	0,06	0,07	0,01	0,2

Варіант 83

$\xi_1 \backslash \xi_2$	-7	-6	0	8
-1	0,06	0,12	0,08	0,01
0	0,03	0,1	0,12	0,01
2	0,09	0,03	0,2	0,15

Варіант 84

$\xi_1 \backslash \xi_2$	-8	2	7	8
-3	0,08	0,13	0,03	0,06
0	0,1	0,01	0,01	0,12
2	0,05	0,15	0,13	0,13

Варіант 85

$\xi_1 \backslash \xi_2$	-6	2	6	8
-4	0,03	0,05	0,11	0,05
-3	0,01	0,02	0,08	0,16
-2	0,13	0,07	0,03	0,26

Варіант 86

$\xi_1 \backslash \xi_2$	-7	5	7	8
-4	0,03	0,02	0,08	0,01
0	0,02	0,09	0,08	0,15
2	0,09	0,15	0,1	0,18

Варіант 87

$\xi_1 \backslash \xi_2$	-5	-2	2	5
-2	0,01	0,01	0,06	0,06
0	0,09	0,08	0,14	0,16
3	0,08	0,12	0,03	0,16

Варіант 88

$\xi_1 \backslash \xi_2$	-9	-6	-1	2
-5	0,2	0,07	0,04	0,02
-2	0,12	0,02	0,06	0,05
2	0,08	0,03	0,05	0,26

Варіант 89

$\xi_1 \backslash \xi_2$	-9	-3	-2	-1
-3	0,07	0,06	0,1	0,02
-1	0,02	0,1	0,13	0,11
3	0,03	0,1	0,04	0,22

Варіант 90

$\xi_1 \backslash \xi_2$	-9	-6	1	8
-4	0,11	0,08	0,03	0,03
-3	0,04	0,12	0,12	0,12
-2	0,05	0,09	0,02	0,19

Варіант 91

$\xi_1 \backslash \xi_2$	-9	2	5	6
-5	0,18	0,01	0,08	0,05
-4	0,05	0,12	0,02	0,05
-1	0,03	0,03	0,11	0,27

Варіант 92

$\xi_1 \backslash \xi_2$	-9	-7	-6	2
-4	0,14	0,05	0,02	0,01
-3	0,02	0,17	0,02	0,01
3	0,15	0,18	0,08	0,15

Варіант 93

$\xi_1 \backslash \xi_2$	-5	1	4	8
-3	0,06	0,04	0,06	0,03
0	0,01	0,14	0,04	0,13
3	0,12	0,12	0,06	0,19

Варіант 94

$\xi_1 \backslash \xi_2$	-10	-6	3	4
-5	0,12	0,09	0,04	0,02
-3	0,02	0,05	0,03	0,02
1	0,08	0,04	0,03	0,46

Варіант 95

ξ_1 \ ξ_2	-7	-4	-1	8
-1	0,14	0,04	0,05	0,03
0	0,02	0,07	0,12	0,11
3	0,05	0,15	0,09	0,13

Варіант 96

ξ_1 \ ξ_2	-6	-4	5	6
-2	0,08	0,01	0,12	0,11
1	0,08	0,11	0,07	0,06
2	0,11	0,1	0,07	0,08

Варіант 97

ξ_1 \ ξ_2	-9	-4	-3	7
-4	0,09	0,05	0,07	0,11
-2	0,05	0,06	0,04	0,02
0	0,08	0,12	0,09	0,22

Варіант 98

ξ_1 \ ξ_2	-5	5	6	8
-4	0,2	0,03	0,02	0,13
-2	0,05	0,12	0,05	0,01
-1	0,13	0,04	0,08	0,14

Варіант 99

ξ_1 \ ξ_2	-9	-7	4	8
-2	0,16	0,05	0,03	0,06
1	0,02	0,13	0,1	0,04
3	0,13	0,12	0,05	0,11

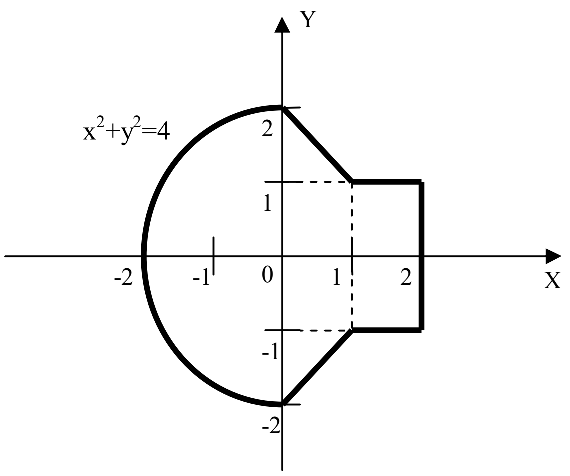
Варіант 100

ξ_1 \ ξ_2	-9	-6	-2	3
-2	0,18	0,05	0,02	0,09
-1	0,01	0,03	0,09	0,14
0	0,11	0,06	0,04	0,18

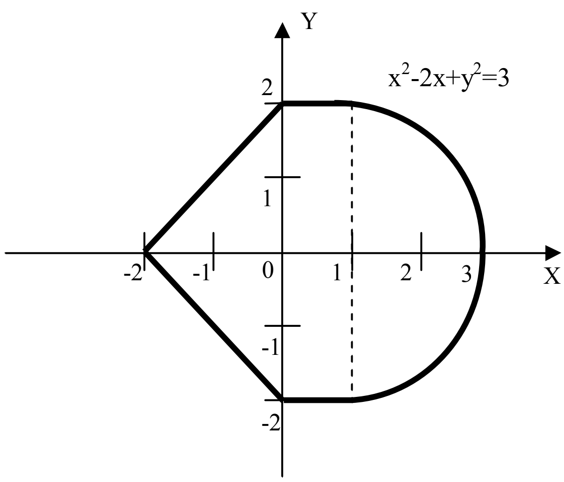
Завдання 2

Випадковий вектор $\vec{\xi} = (\xi_1,\ \xi_2)$ рівномірно розподілений у заданій області

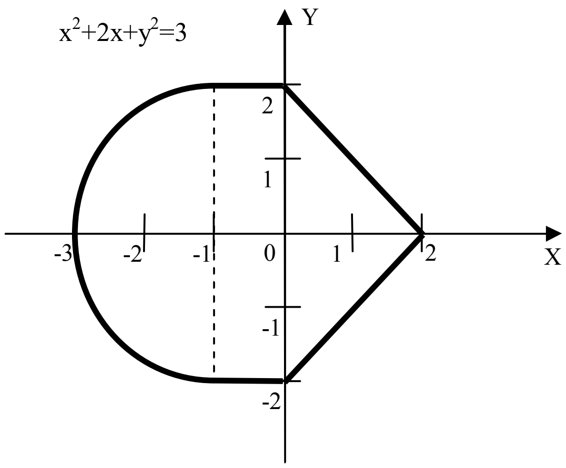
Варіант 1



Варіант 2



Варіант 3



Варіант 4

$$G = \left\{ (x,y) \middle| \begin{matrix} \dfrac{(x-3)^2}{9} + \dfrac{(y+1)^2}{4} \le 1, \\ x \ge y+1 \end{matrix} \right\}$$

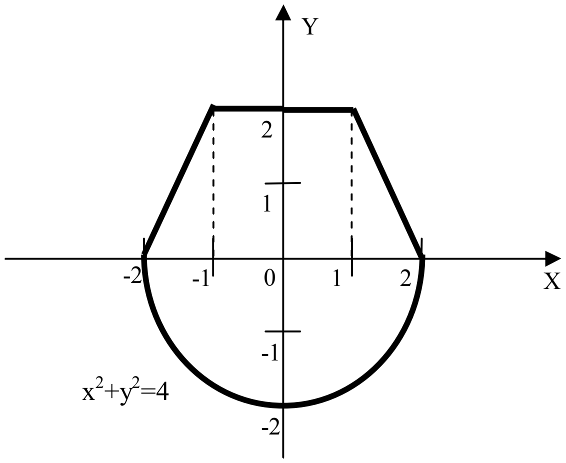
Варіант 5

$$G = \left\{ (x,y) \middle| \begin{matrix} \dfrac{(x+1)^2}{25} + \dfrac{y^2}{4} \le 1, \\ y \ge x \end{matrix} \right\}$$

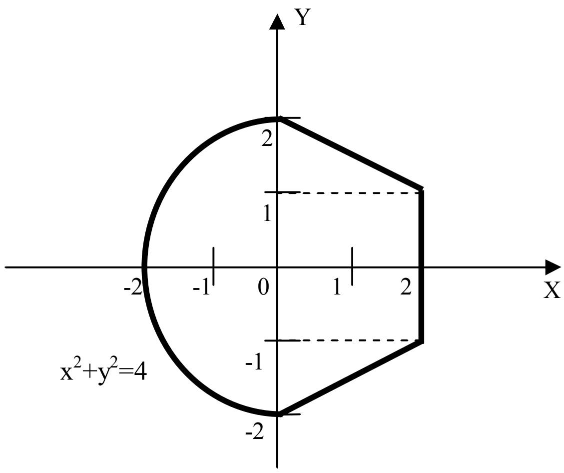
Варіант 6

$$G = \left\{ (x,y) \middle| \begin{matrix} (x-2)^2 + (y-1)^2 \le 9, \\ y \ge x \end{matrix} \right\}$$

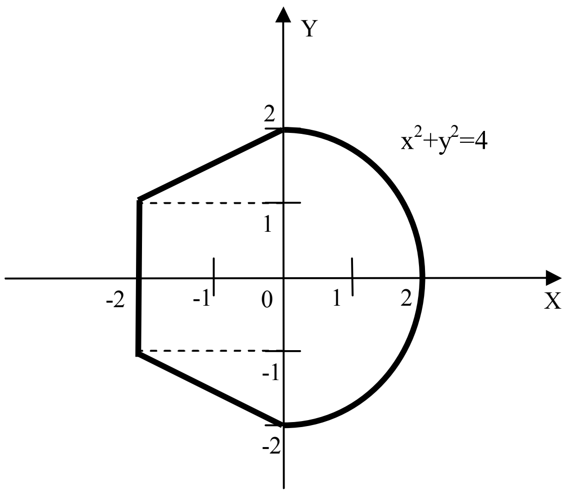
Варіант 7



Варіант 8



Варіант 9



Варіант 10

$$G = \left\{ (x,y) \middle| \begin{matrix} (x+2)^2 + (y-1)^2 \le 9, \\ y \le x \end{matrix} \right\}$$

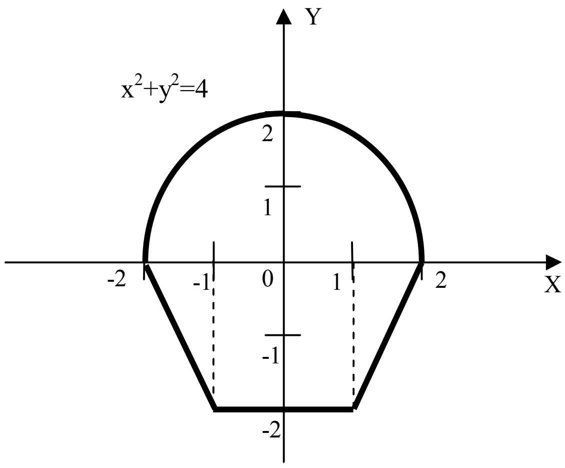
Варіант 11

$$G = \left\{ (x,y) \middle| \begin{matrix} (x-1)^2 + (y+1)^2 \le 4, \\ y \le x \end{matrix} \right\}$$

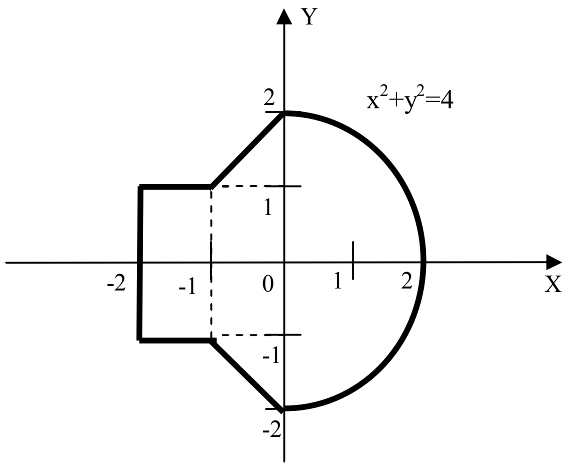
Варіант 12

$$G = \left\{ (x,y) \middle| \begin{matrix} (x+2)^2 + (y-2)^2 \le 4, \\ y \ge x \end{matrix} \right\}$$

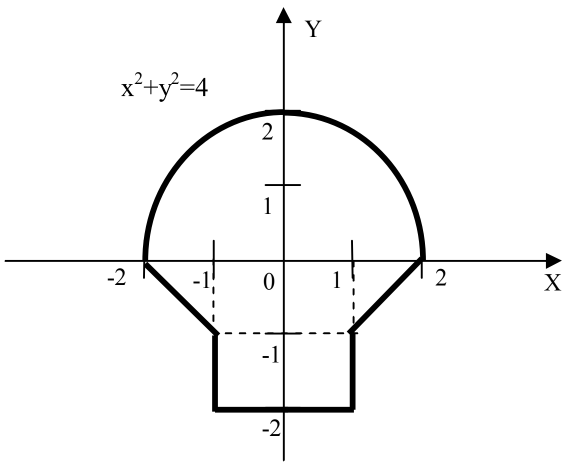
Варіант 13



Варіант 14



Варіант 15



Варіант 16

$$G = \left\{ (x,y) \middle| \begin{array}{c} (x-1)^2 + (y+1)^2 \le 16, \\ x \ge -1 \end{array} \right\}$$

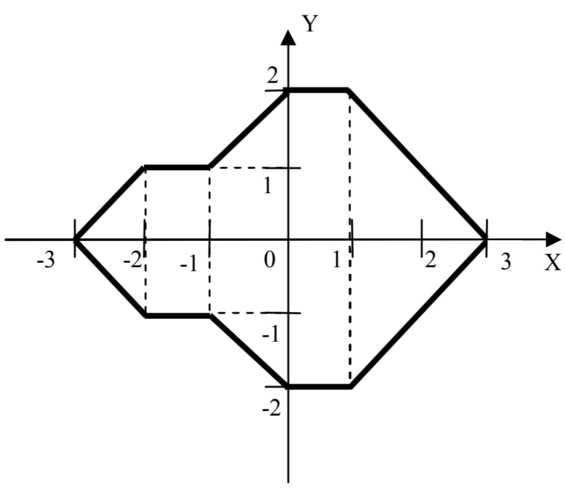
Варіант 17

$$G = \left\{ (x,y) \middle| \begin{array}{c} \dfrac{(x-1)^2}{25} + \dfrac{(y+1)^2}{16} \le 1, \\ x + y \le 2, x \le 4 \end{array} \right\}$$

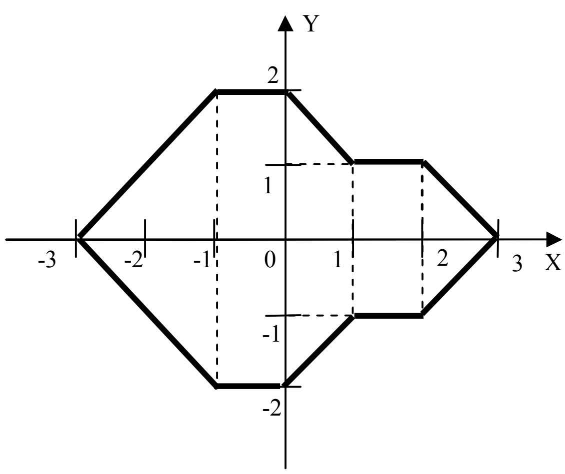
Варіант 18

$$G = \left\{ (x,y) \middle| \begin{array}{c} \dfrac{(x+1)^2}{9} + \dfrac{(y+1)^2}{16} \le 1, \\ y \le x + 2 \end{array} \right\}$$

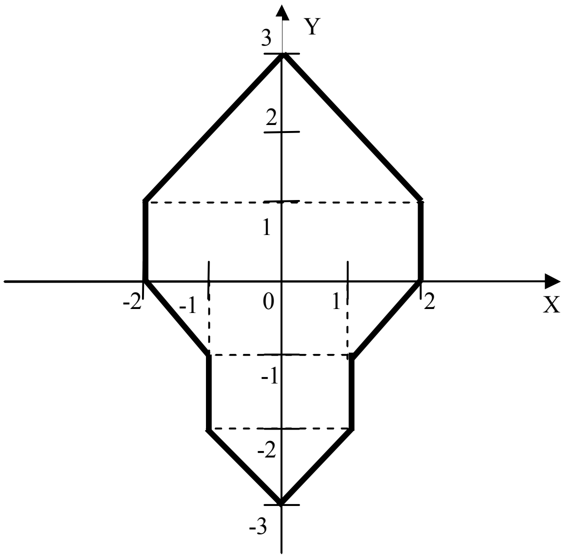
Варіант 19



Варіант 20



Варіант 21



Варіант 22

$$G=\left\{(x,y)\,\middle|\,\begin{array}{c}\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{(y-1)^2}{9}\le 1,\\ y\ge x\end{array}\right\}$$

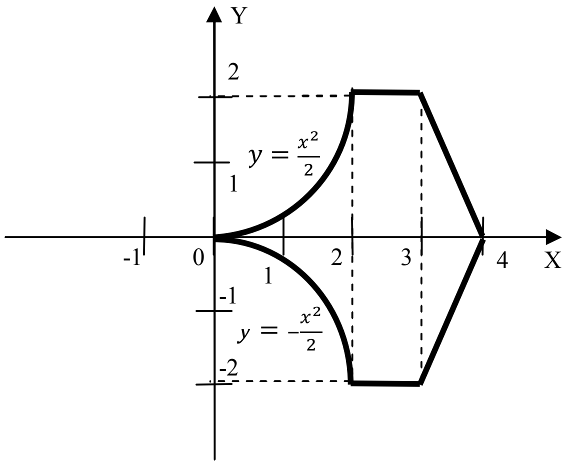
Варіант 23

$$G=\left\{(x,y)\,\middle|\,\begin{array}{c}(x+3)^2+(y-2)^2\le 25,\\ y\le -x\end{array}\right\}$$

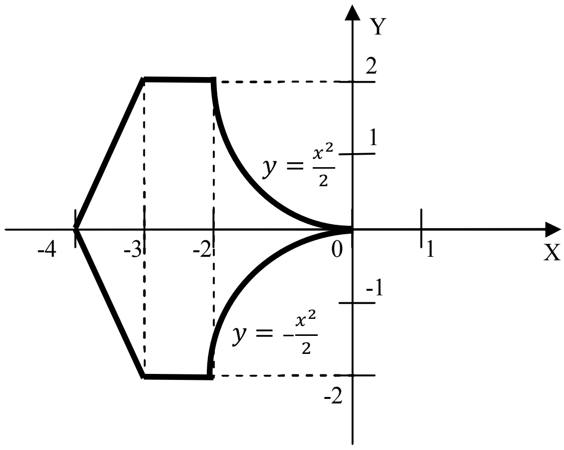
Варіант 24

$$G=\left\{(x,y)\,\middle|\,\begin{array}{c}(x+1)^2+(y+3)^2\le 16,\\ y-x\le 3\end{array}\right\}$$

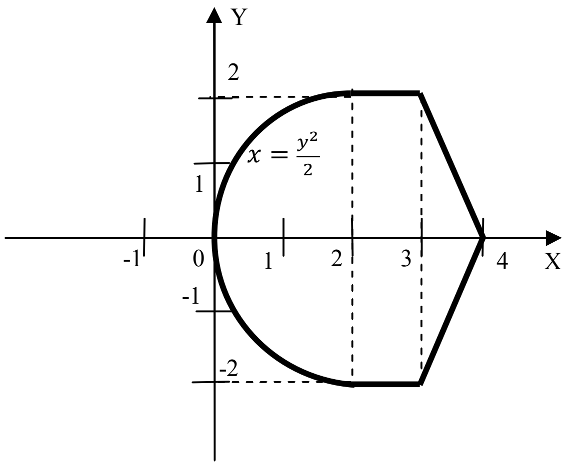
Варіант 25



Варіант 26



Варіант 27



Варіант 28

$$G=\left\{(x,y)\,\middle|\,\begin{array}{c}\dfrac{(x-1)^2}{36}+\dfrac{y^2}{9}\le 1,\\ y\le 2-x\end{array}\right\}$$

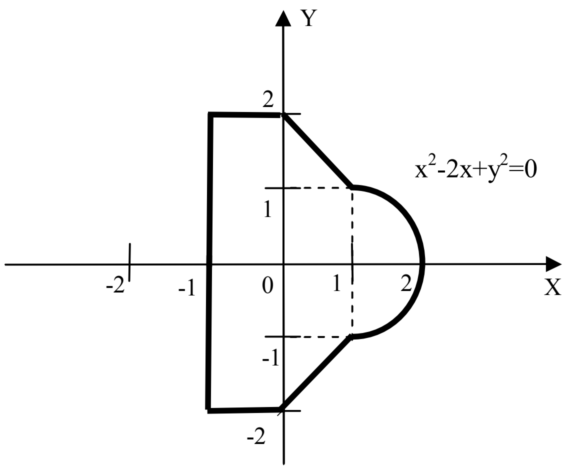
Варіант 29

$$G=\left\{(x,y)\,\middle|\,\begin{array}{c}\dfrac{(x-1)^2}{9}+\dfrac{(y+1)^2}{36}\le 1,\\ y\le 2+x\end{array}\right\}$$

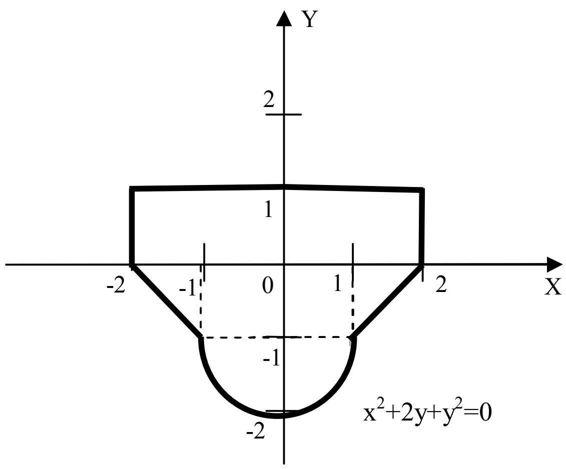
Варіант 30

$$G=\left\{(x,y)\,\middle|\,\begin{array}{c}(x-5)^2+(y+1)^2\le 4,\\ y\le x-5\end{array}\right\}$$

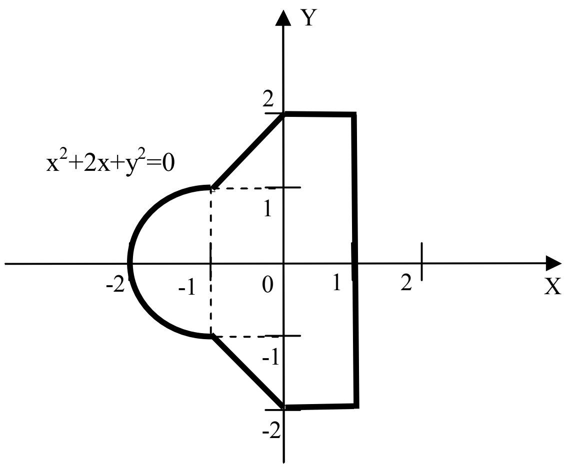
Варіант 31



Варіант 32



Варіант 33



Варіант 34

$$G = \left\{(x,y)\left|\begin{array}{c}\frac{(x-3)^2}{16}+\frac{(y+3)^2}{25}\le 1,\\ x-y\ge 3\end{array}\right.\right\}$$

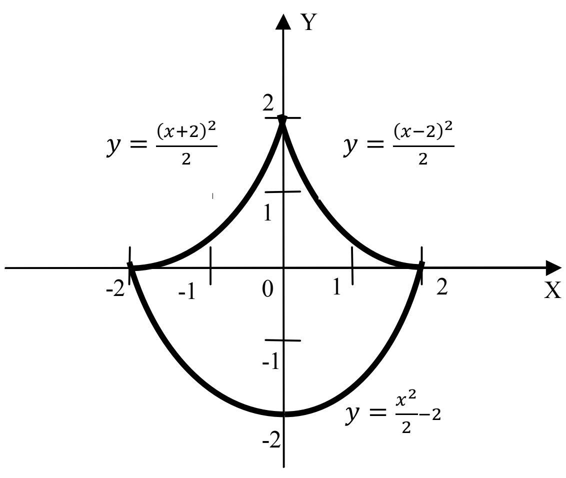
Варіант 35

$$G = \left\{(x,y)\left|\begin{array}{c}(x+4)^2+(y+1)^2\le 16,\\ y\ge x+4\end{array}\right.\right\}$$

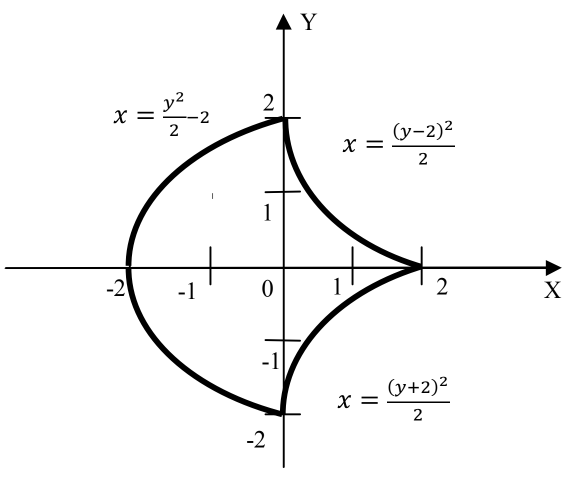
Варіант 36

$$G = \left\{(x,y)\left|\begin{array}{c}(x-5)^2+(y+3)^2\le 25,\\ y+x\le 3\end{array}\right.\right\}$$

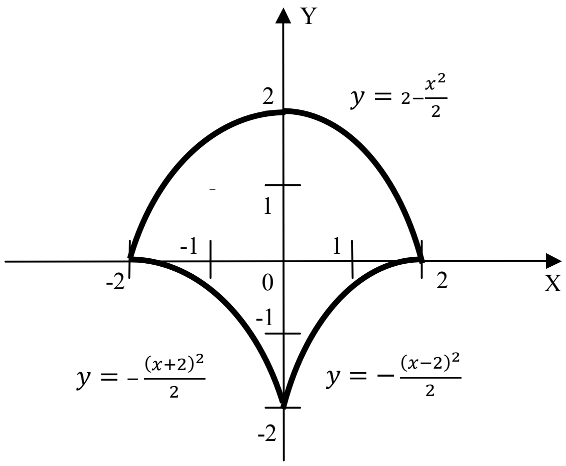
Варіант 37



Варіант 38



Варіант 39



Варіант 40

$$G = \{(x, y) | (x + 4)^2 + (y - 1)^2 \le 16\}$$

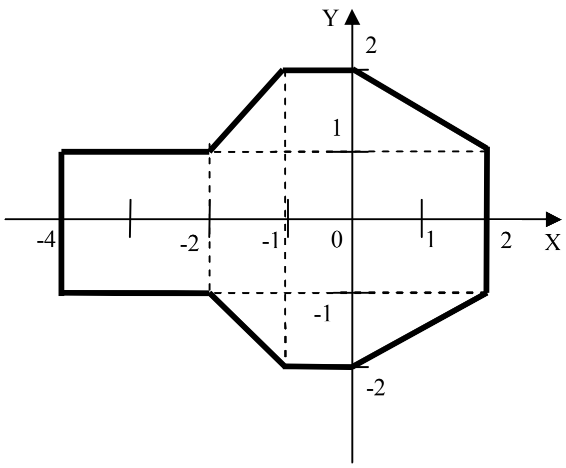
Варіант 41

$$G = \{(x, y) | (x + 1)^2 + (y - 3)^2 \le 9\}$$

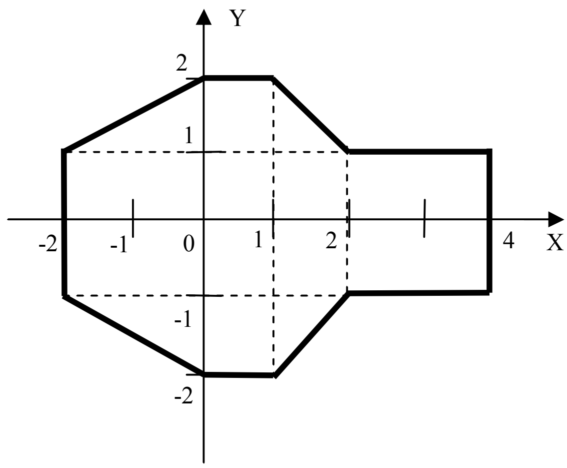
Варіант 42

$$G = \left\{(x, y) \middle| \frac{(x + 3)^2}{9} + \frac{(y - 2)^2}{4} \le 1\right\}$$

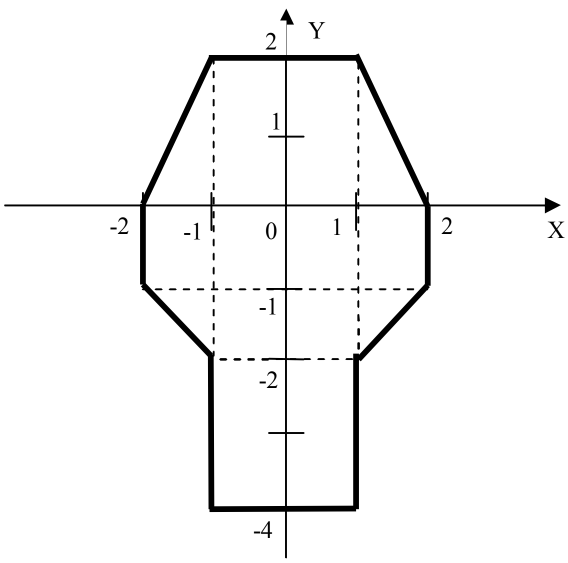
Варіант 43



Варіант 44



Варіант 45



Варіант 46

$$G = \left\{(x, y) \middle| \begin{matrix} \frac{(x - 7)^2}{49} + \frac{y^2}{4} \le 1, \\ y \le 8 - x \end{matrix}\right\}$$

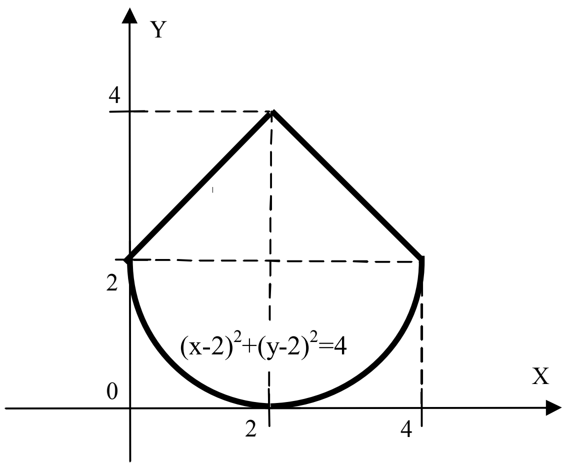
Варіант 47

$$G = \left\{(x, y) \middle| \begin{matrix} \frac{x^2}{9} + \frac{(y - 5)^2}{25} \le 1, \\ y \le x + 10 \end{matrix}\right\}$$

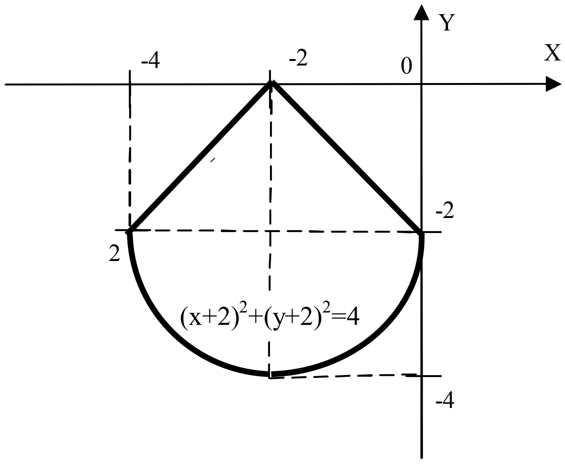
Варіант 48

$$G = \left\{(x, y) \middle| \begin{matrix} \frac{(x + 4)^2}{16} + (y - 1)^2 \le 4, \\ y \le x + 1 \end{matrix}\right\}$$

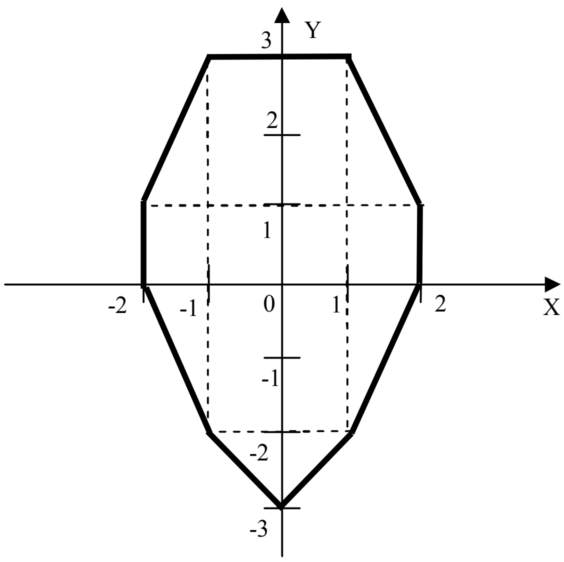
Варіант 49



Варіант 50



Варіант 51



Варіант 52

$$G = \left\{(x, y)\middle|(x-3)^2 + \frac{(y-1)^2}{4} \le 1\right\}$$

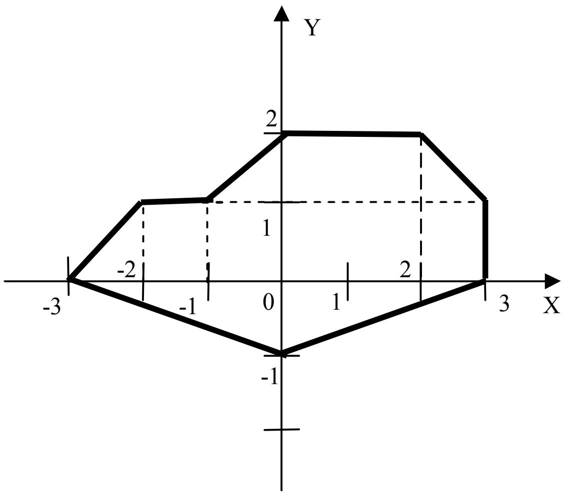
Варіант 53

$$G = \left\{(x, y)\middle|\frac{(x+5)^2}{25} + \frac{(y-3)^2}{9} \le 1\right\}$$

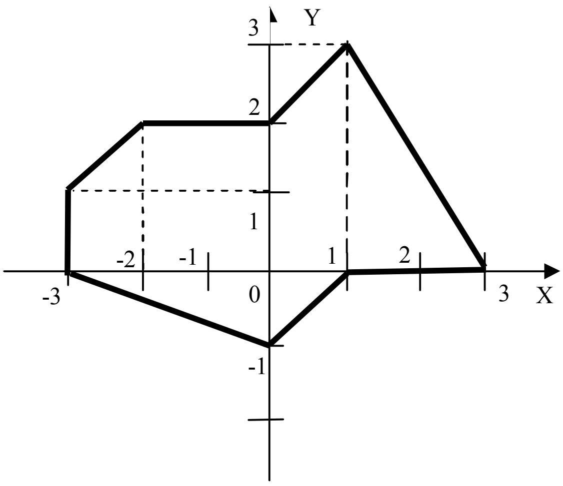
Варіант 54

$$G = \left\{(x, y)\middle|\frac{(x-6)^2}{36} + \frac{(y-2)^2}{4} \le 1\right\}$$

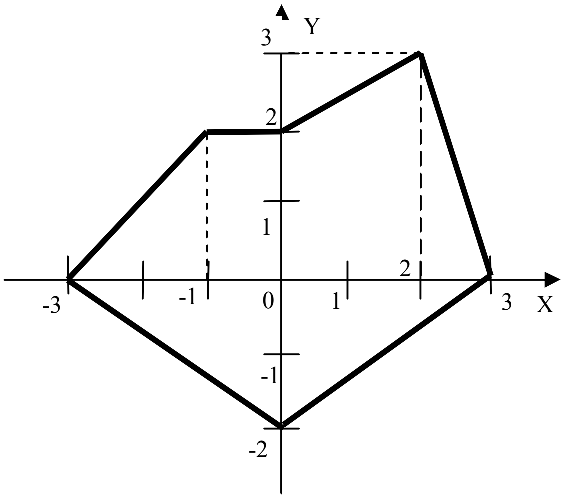
Варіант 55



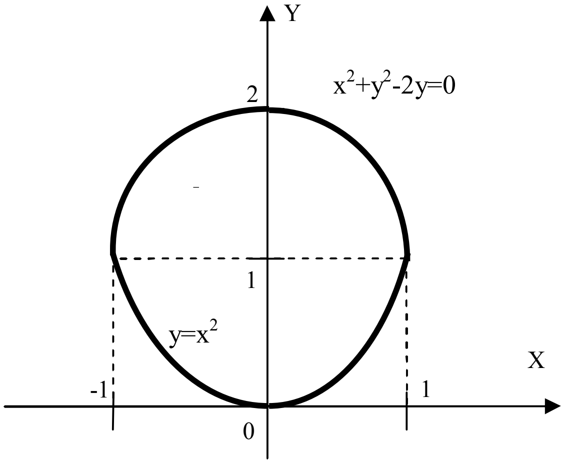
Варіант 56



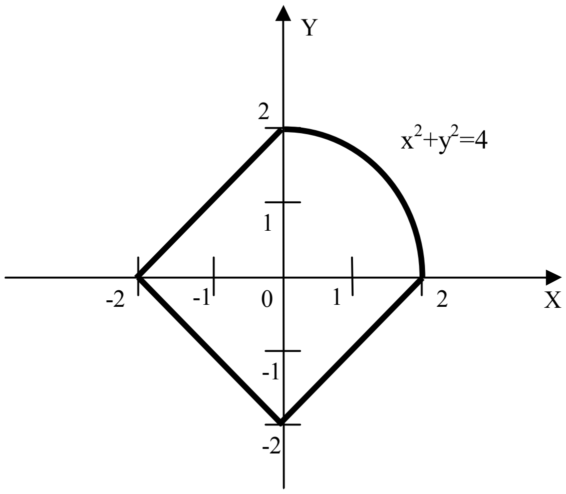
Варіант 57



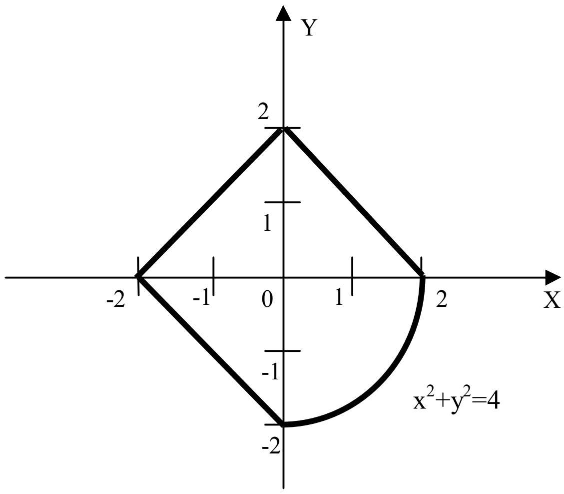
Варіант 58



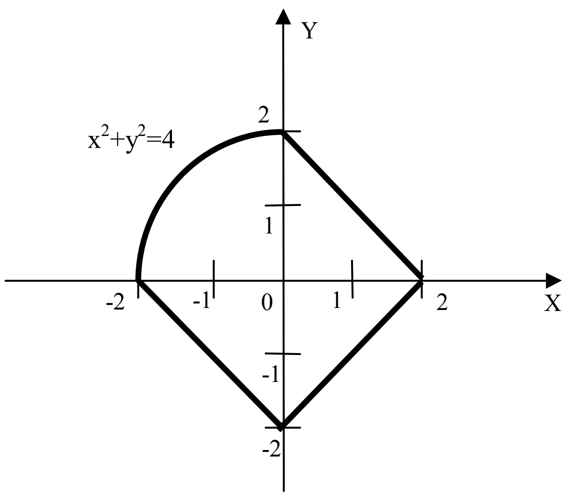
Варіант 59



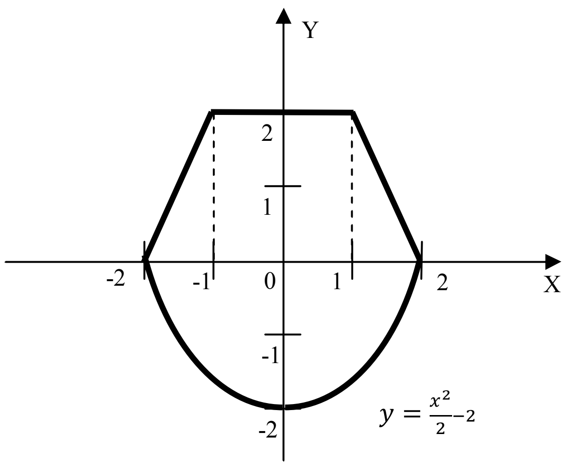
Варіант 60



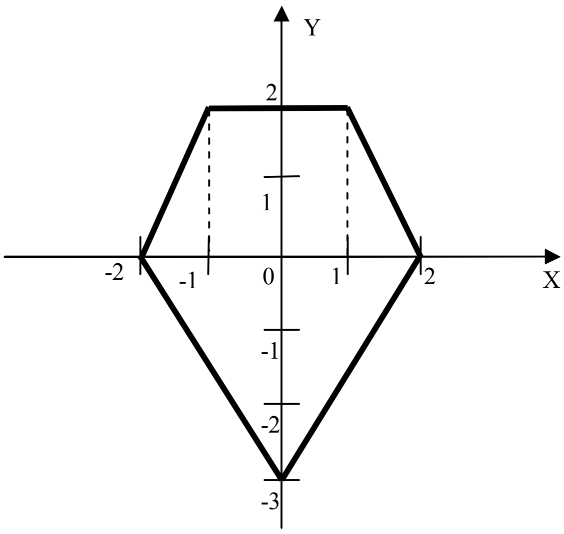
Варіант 61



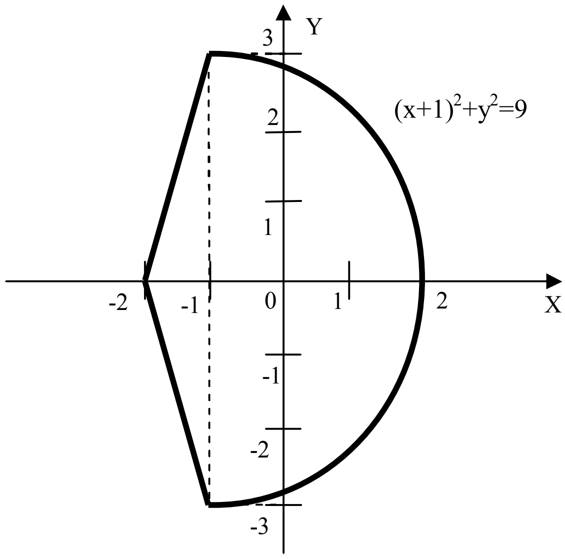
Варіант 62



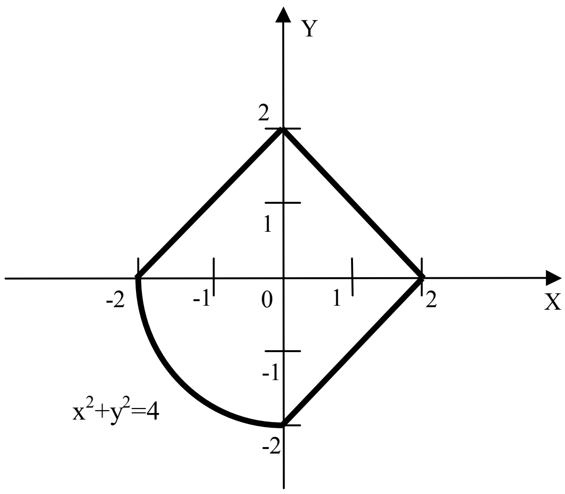
Варіант 63



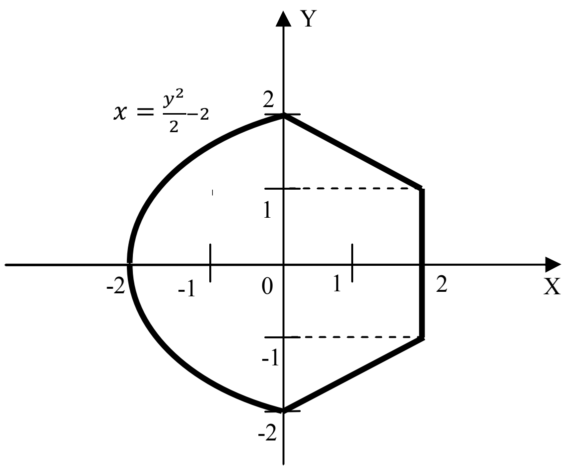
Варіант 64



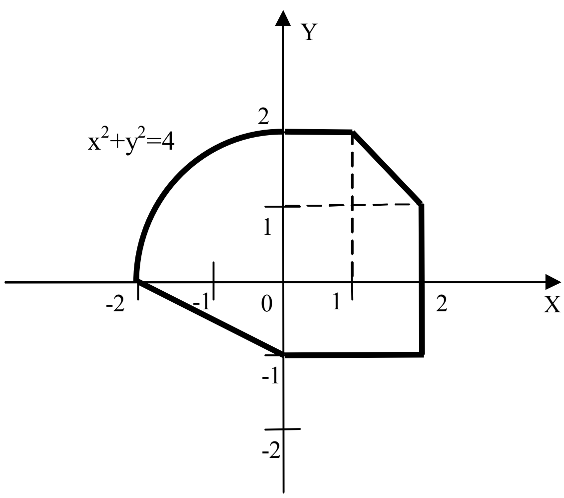
Варіант 65



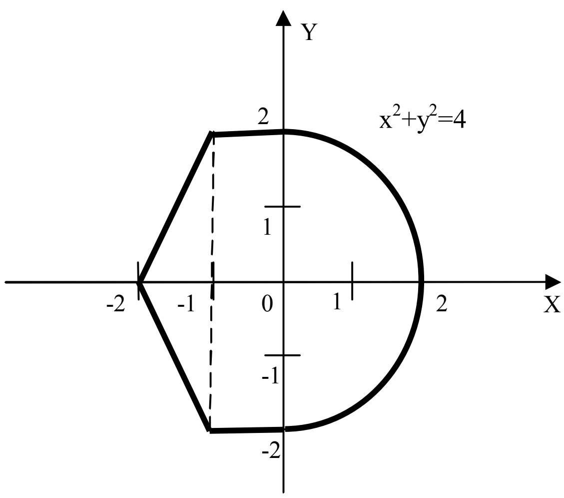
Варіант 66



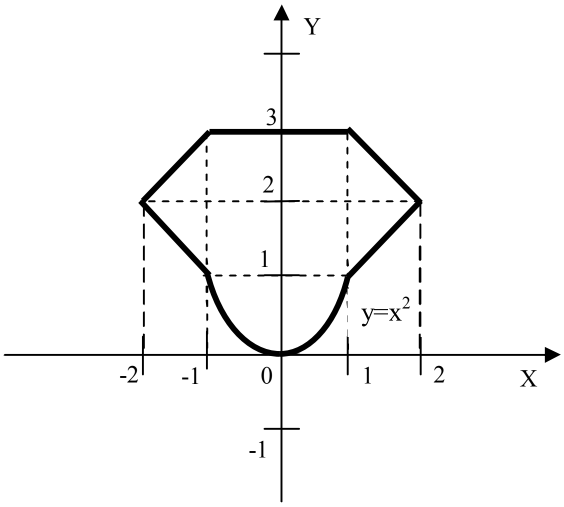
Варіант 67



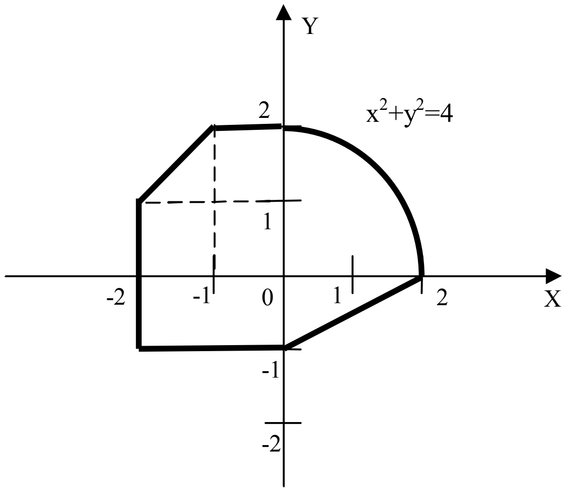
Варіант 68



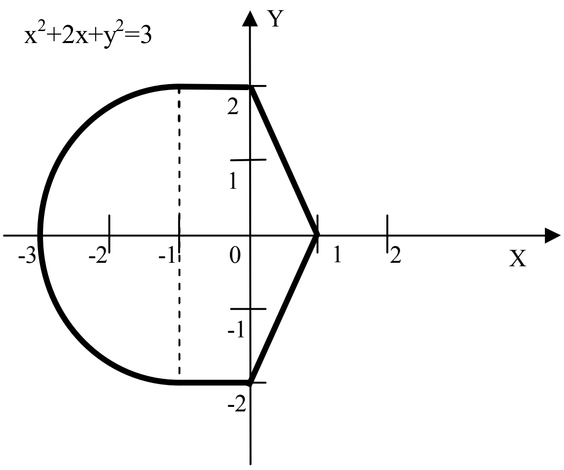
Варіант 69



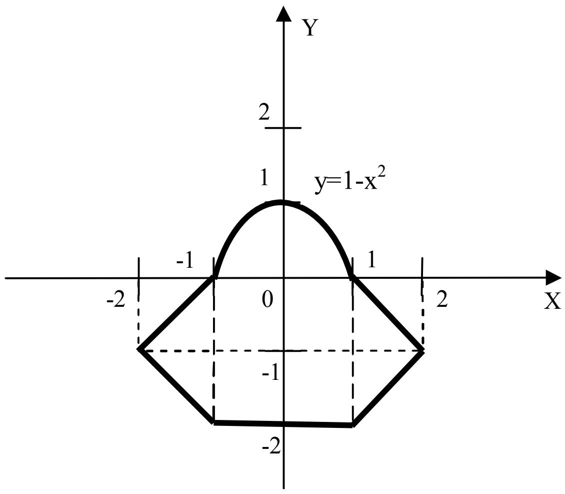
Варіант 70



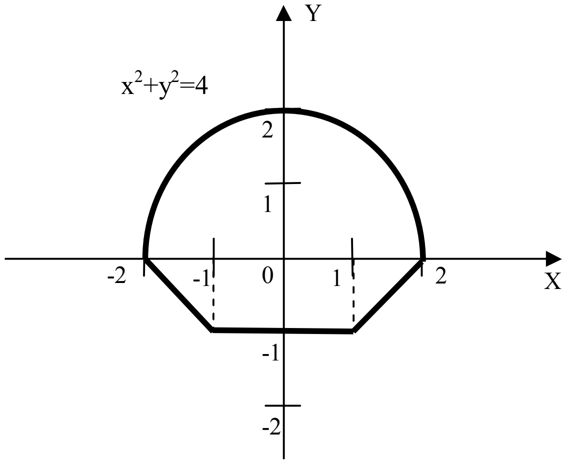
Варіант 71



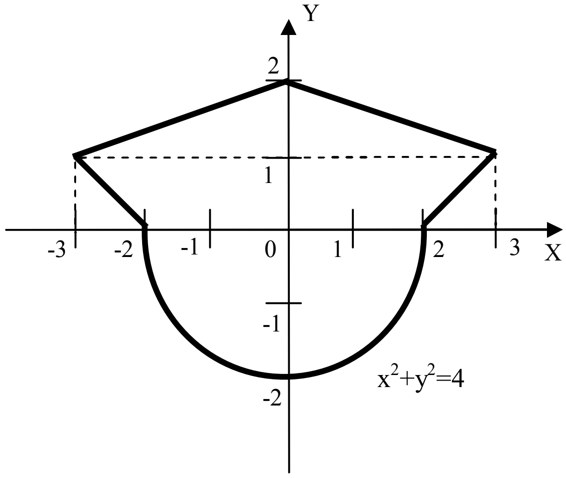
Варіант 72



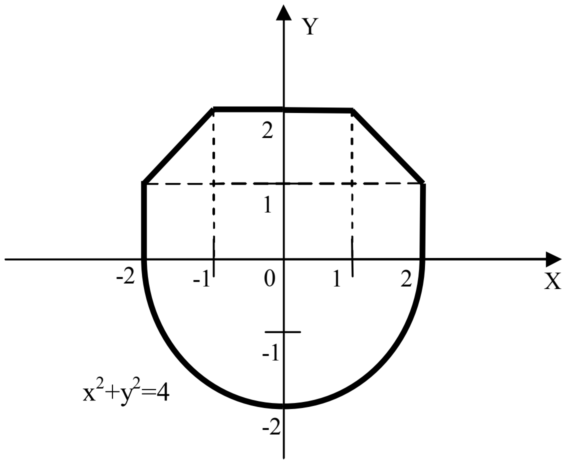
Варіант 73



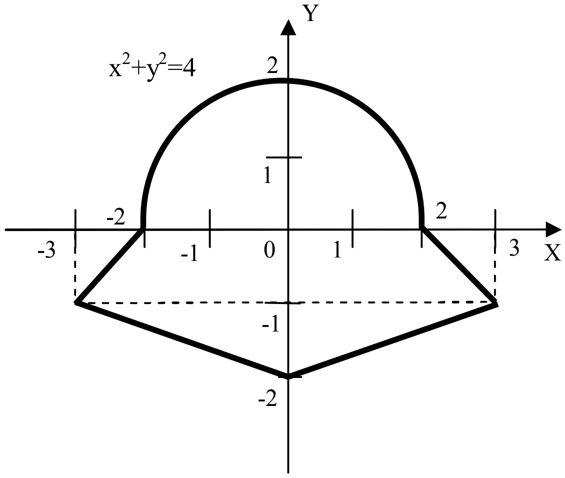
Варіант 74



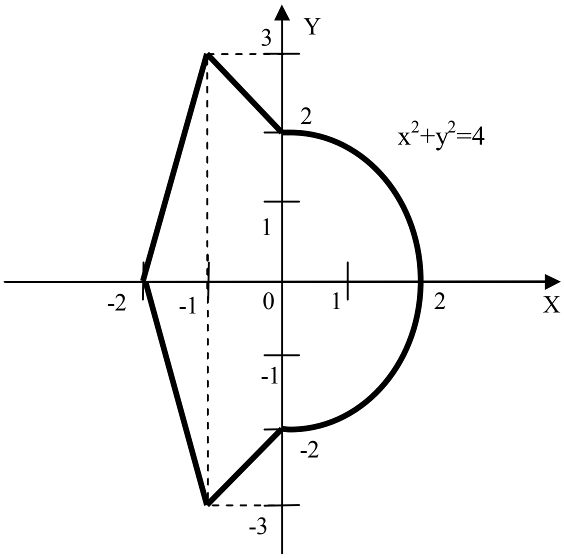
Варіант 75



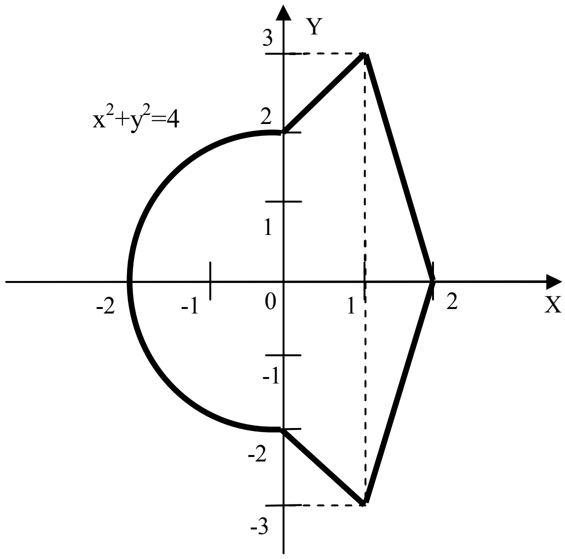
Варіант 76



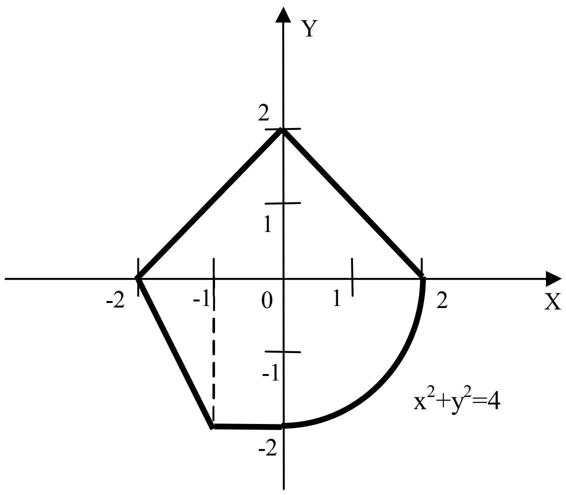
Варіант 77



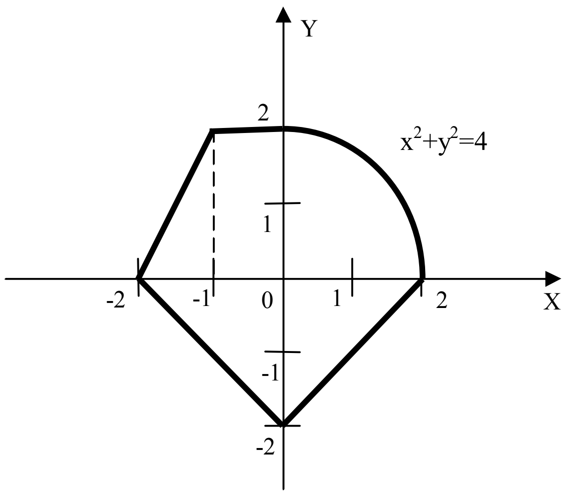
Варіант 78



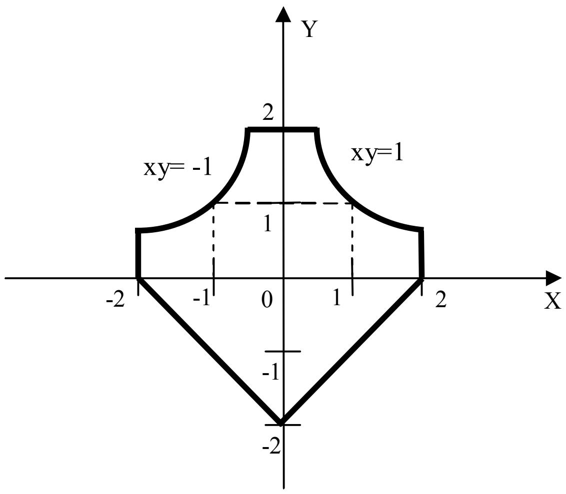
Варіант 79



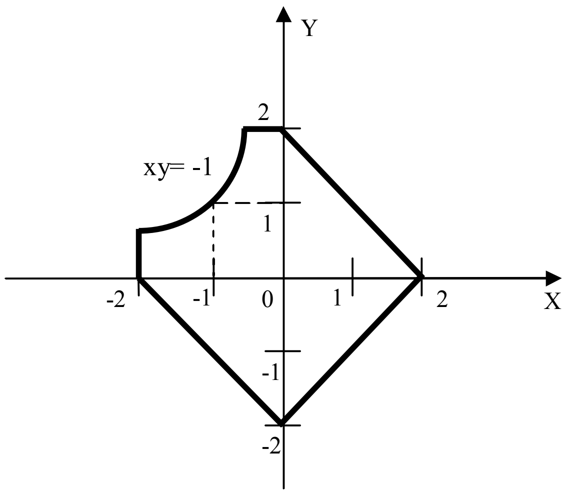
Варіант 80



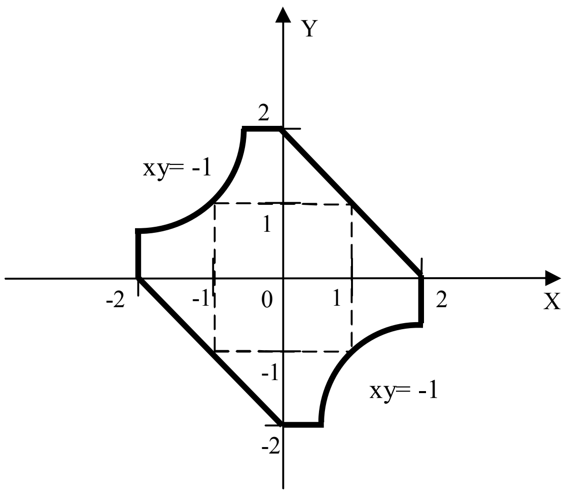
Варіант 81



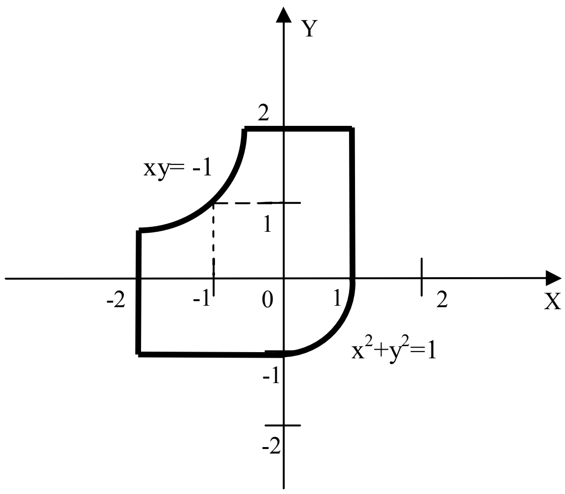
Варіант 82



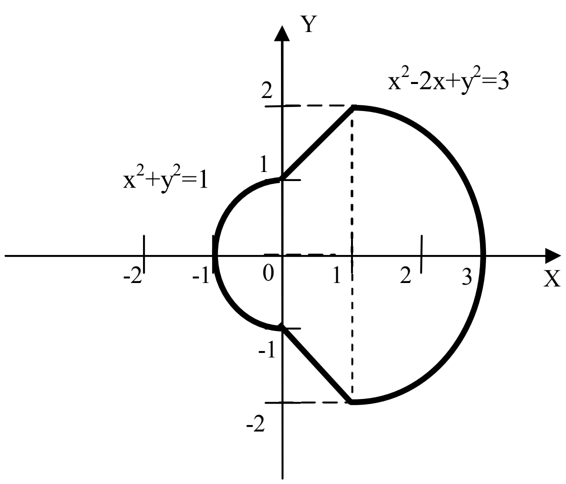
Варіант 83



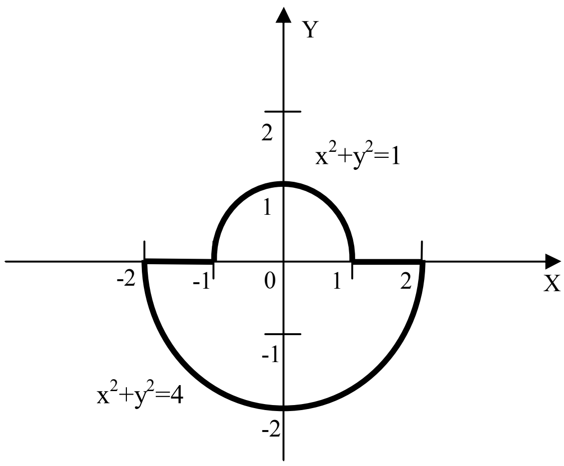
Варіант 84



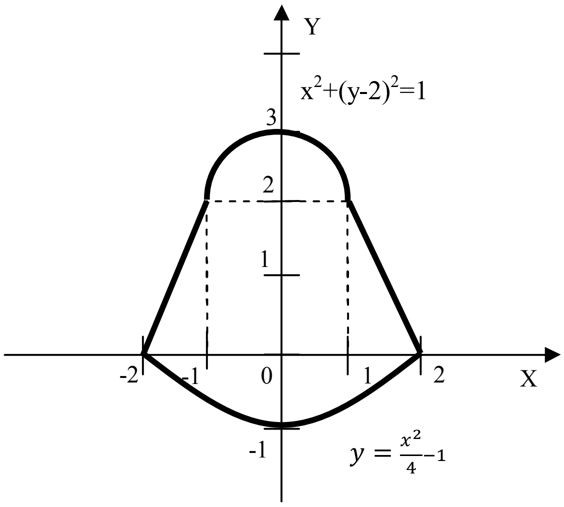
Варіант 85



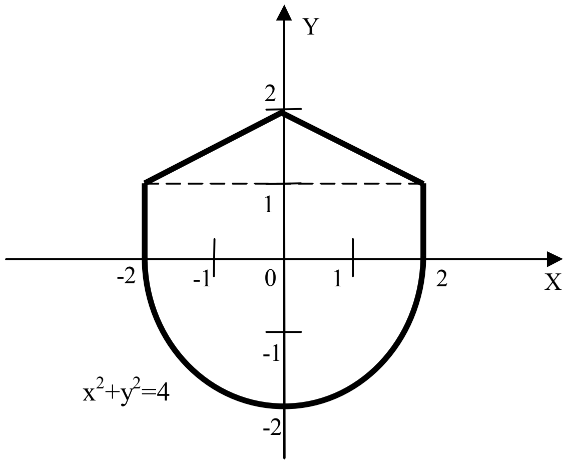
Варіант 86



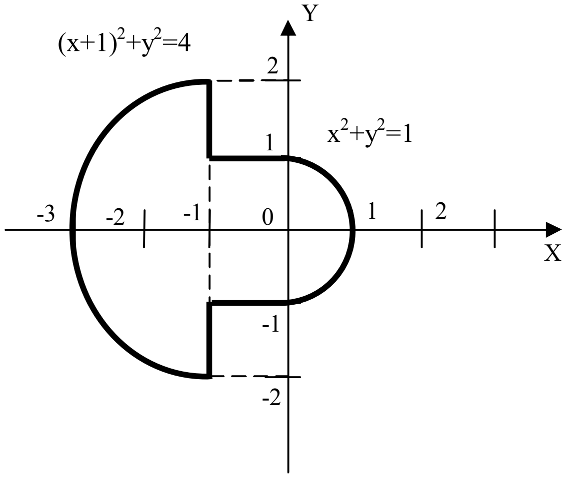
Варіант 87



Варіант 88



Варіант 89



Варіант 90

$$G=\left\{(x,y)\middle|(x-2)^2+\frac{(y+1)^2}{9}\le 1\right\}$$

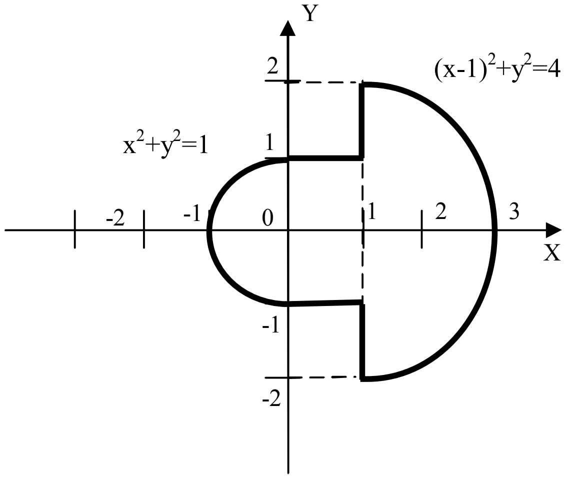
Варіант 91

$$G=\left\{(x,y)\middle|\frac{(x-5)^2}{25}+(y+2)^2\le 1\right\}$$

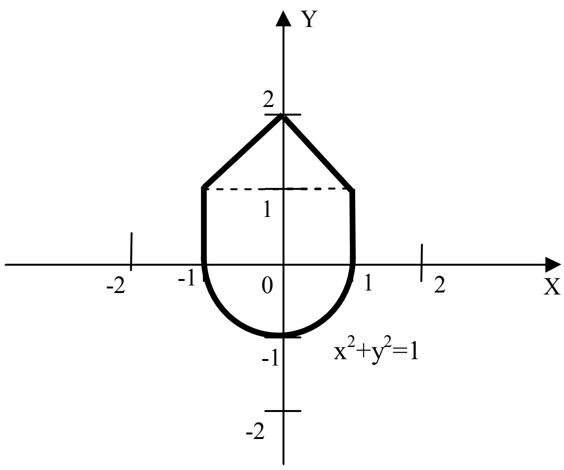
Варіант 92

$$G=\left\{(x,y)\middle|\begin{matrix}(x-3)^2+(y-4)^2\le 25,\\ x\ge 0\end{matrix}\right\}$$

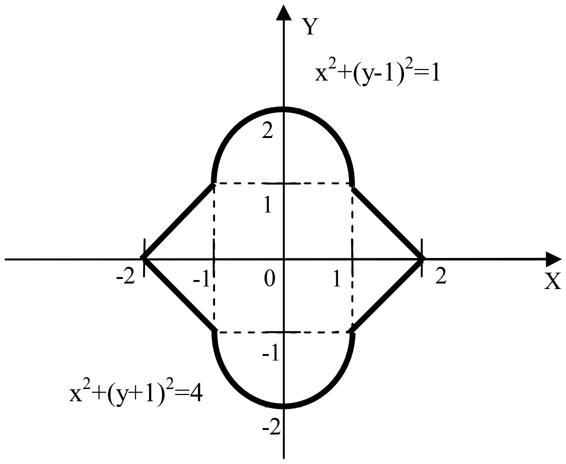
Варіант 93



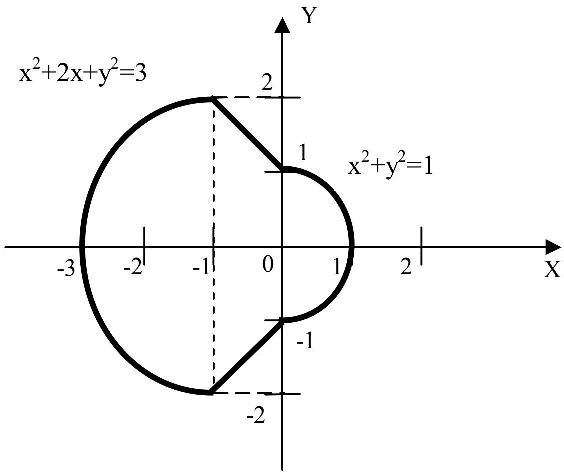
Варіант 94



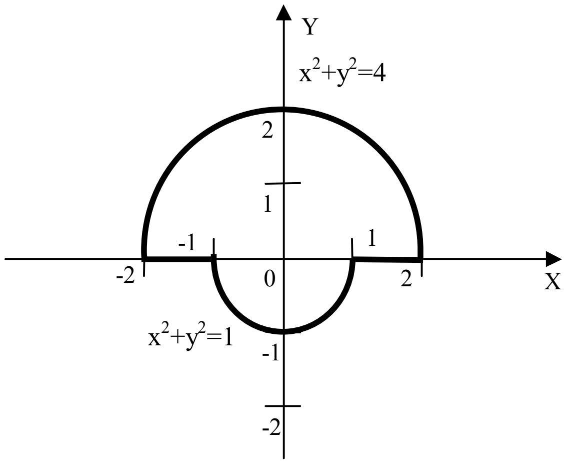
Варіант 95



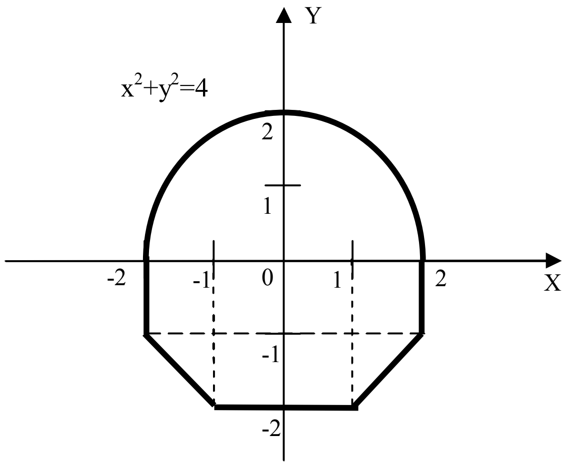
Варіант 96



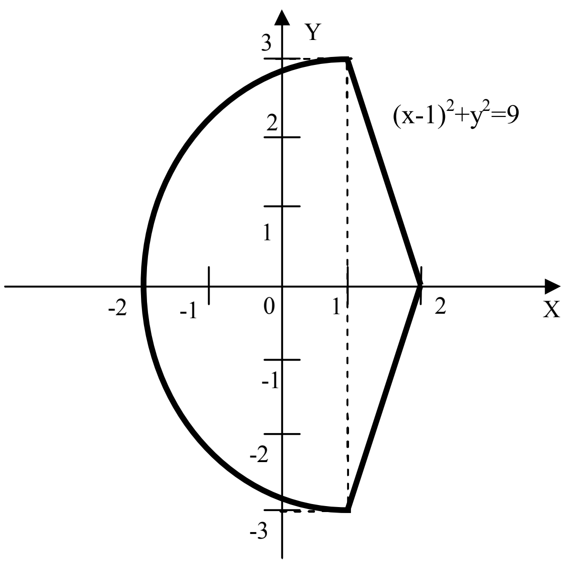
Варіант 97



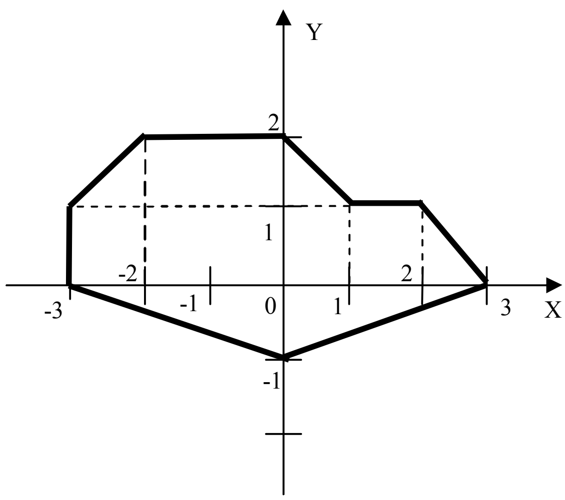
Варіант 98



Варіант 99



Варіант 100



Список літератури

1. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей / Гнеденко Б.В. – М.: Наука, 1965. – 400 с.
2. Вентцель Е.С., Теория вероятностей и ее инженерные приложения / Вентцель Е.С., Овчаров Л.А.. – М.: Наука, 1998. – 480 с.
3. Бондаренко В.Г. Теорія ймовірностей і математична статистика. Ч.1 / В.Г. Бондаренко, І.Ю. Канівська, С.М. Парамонова. – К.: НТУУ «КПІ», 2006. – 125 с.
4. Шефтель З.Г. Теорія ймовірностей / Шефтель З.Г. – К.: Вища школа, 1994. – 192 с.
5. Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций / [под редакцией А.А. Свешникова]. – М.: Наука, 1970. – 656 с.
6. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. Задачи и упражнения / Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. – М.: Наука, 1973. – 365 с.
7. Каніовська І.Ю. Теорія ймовірностей у прикладах і задачах / Каніовська І.Ю. – К.: НТУУ «КПІ», 2004. - 154 с.
8. Методические указания к практическим занятиям по курсу «Теория вероятностей и математическая статистика» для студентов специальности «Прикладная математика» дневной и вечерней форм обучения / [сост. В.Г. Бондаренко, С.Н. Парамонова]. – К.: КПИ, 1987. - 52 с.