

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

МЕТОДИ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ

ЧАСТИНА 2

МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ДЕЯКИХ ПОШИРЕНИХ ФІЗИЧНИХ ПРОЦЕСІВ

Навчальний посібник

Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра
спеціальностями 104 Фізика та астрономія, 111 Математика

Укладач В. С. Герасимчук, д-р фіз.-мат. наук, професор

Електронне мережне навчальне видання

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2022

Рецензент Антонов В. М., професор, чл.-кор. НАН України,
керівник відділу обчислювальної фізики
Інституту металофізики ім. Г. В. Курдюмова НАН України

Відповідальний редактор Швець О. Ю., д-р фіз.-мат. наук, професор

*Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
(протокол № 3 від 27.01.2022 р.)
за поданням Вченої ради Фізико-математичного факультету
(протокол № 01 від 18.01.2022 р.)*

У навчальному посібнику викладено основи методології побудови математичних моделей деяких найбільш поширених фізичних процесів.

Посібник охоплює матеріал першої частини кредитного модуля курсу "Методи математичної фізики" і містить як матеріал стандартних розділів курсу, так і компактне викладення питань, яким в навчальній літературі приділяється недостатня увага. Акцент робиться на загальних моментах.

Це видання продовжує серію навчальних видань об'єднаних єдиною темою та назвою "Методи математичної фізики".

Посібник призначений для здобувачів ступенів бакалавра та магістра за спеціальностями 104 Фізика та астрономія, 111 Математика. Може бути корисним студентам інших природознавчих та інженерно-технічних спеціальностей, а також викладачам закладів вищої освіти. Він буде корисним для самостійної роботи здобувачів вищої освіти та дистанційного навчання.

Реєстр. № НП 21/22-308. Обсяг 2,4 авт. арк.

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
проспект Перемоги, 37, м. Київ, 03056
<https://kpi.ua>

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру видавців, виготовлювачів
і розповсюджувачів видавничої продукції ДК № 5354 від 25.05.2017 р.

1. Хвильові процеси (рівняння гіперболічного типу)

Сучасне уявлення про світ характеризується неабиякою складністю та багатогранністю. У переважній більшості випадків ми не в змозі абсолютно точно та коректно описати те чи інше природне явище або процес. Але в змозі побудувати більш-менш прийнятну *математичну модель*. Математична модель – це математичний запис (опис) реального фізичного (або якогось іншого) явища чи процесу. Математична модель – це також інструментарій, що дозволяє систематизувати та структурувати різноманітні знання про реальні об'єкти, перевіряти правильність гіпотез, робити прогнози. Математична модель – це, нарешті, якісна карикатура реального явища або процесу. Оскільки вона відображає його найважливіші та найголовніші риси. Але від реального процесу вона все одно відрізняється тим, що не здатна врахувати його окремі (можливо, не головні) особливості. Але прагнути до ідеального відображення дійсності в математичній моделі треба.

В оточуючій нас дійсності відбувається багато явищ, які проявляють риси коливальних і хвильових процесів. Незважаючи на їх різноманітність і різницю в способах описання, можна виділити багато загальних закономірностей у протіканні процесів різної фізичної природи.

Коливальними називають процеси, які повторюються через однакові проміжки часу. За фізичною природою розрізняють механічні, пружні, електромагнітні та інші коливання. Коливання супроводжуються поперемінним перетворенням енергії одного виду на енергію іншого виду. *Механічними коливаннями* називають обмежені періодичні рухи в околі деякого положення стійкої рівноваги. Коливання зазвичай описують скінченним набором параметрів, змінних у часі. Коливальні процеси описуються звичайними диференціальними рівняннями. Наведемо приклади основних типів *коливального руху*: коливання маятника; поперечні коливання струни; коливання твердих тіл (поздовжні, поперечні, крутильні); коливання струму в електричному контурі; періодична зміна різних характеристик у біологічних системах, тощо.

Система, що здійснює коливання, називається коливальною системою або *осцилятором*. Моделі коливальних систем крім фізики, використовуються в мікробіології та біотехнології, у біохімічних системах. Зокрема, внутрішньоклітинні коливання задають біологічні ритми, властиві всім живим системам.

Хвильовий процес являє собою поширення коливань у просторі, а тому є більш складною моделлю руху реальних систем, стан яких залежить вже не лише від часових, але й від просторових змінних. Тому хвильові процеси описуються рівняннями у частинних похідних. Існують хвилі поздовжні та поперечні. У поздовжніх хвилях частинки середовища коливаються вздовж напрямку поширення хвилі, у поперечних хвилях частинки коливаються перпендикулярно до напрямку поширення хвилі. Водночас, у хвилях немає переносу речовини у напрямку поширення хвилі. У процесі поширення хвилі частинки середовища лише коливаються біля положень рівноваги. Однак хвилі переносять енергію коливань від однієї точки середовища до іншої.

Приклади основних типів *хвильових процесів*: хвилі на поверхні рідкого середовища; звукові хвилі, в тому числі ударні; електромагнітні хвилі; теплові хвилі; хвилі ймовірності в квантовій механіці, тощо.

В реальних системах перехід від нерівноважного стану до рівноважного відбувається шляхом різних хвильових процесів. Тією чи іншою мірою хвильовий рух притаманний усім об'єктам матеріального світу.

Слід зазначити, що у нас (у людства) досі відсутнє загальне розуміння причин, через які природа часто «воліє» коливання монотонному перебігу процесів. При тому, що коливальні процеси характерні як для живої так і неживої природи, від клітинок до спільнот організмів, від атомів до галактичних об'єктів.

Разом з тим, коливальні явища для систем різних масштабів і різної фізичної природи підпорядковуються загальним закономірностям. Наприклад, коливання струму в електричному контурі та коливання математичного маятника описуються однаковими диференціальними рівняннями у частинних похідних. Спільність коливальних закономірностей дозволяє розглядати коливальні процеси різної природи з єдиної точки зору. Тому доречно вивчати коливальні процеси використовуючи загальні властивості коливань. Найпростіше це зробити на прикладі наочних механічних коливань.

1.1. Виведення рівняння поперечних коливань струни

Розглянемо натягнуту й закріплену на кінцях струну довжиною l . Будемо моделювати її гнучкою ниткою, яка може вільно вигинатися (тобто не створювати супротиву зміні її форми, якщо це не пов'язано з її подовженням). Вважатимемо нитку пружною, тобто сила натягу T , виникаюча в нитці, підпорядковується закону Гука: *натяг пропорційний відносному подовженню*.

Товщиною струни та її вагою будемо нехтувати. Будемо розглядати плоскі поперечні коливання струни, припускаючи, що рух відбувається в одній площині і всі точки переміщуються в напрямку, перпендикулярному положенню рівноваги, з яким сумісна вісь Ox (рис.1.1).

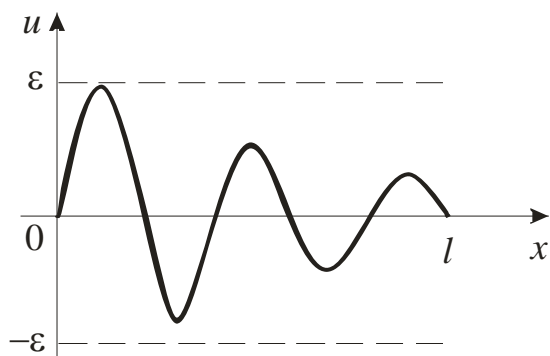


Рис. 1.1

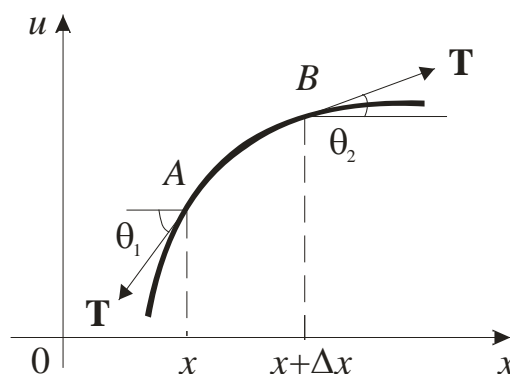


Рис. 1.2

Позначимо через $u(x,t)$ відхилення точок струни від положення рівноваги в момент часу t . Задача полягає в тому, щоб скласти рівняння, якому повинна задовольняти ця функція при зроблених нами припущеннях. Обмежувачись лише малими коливаннями, будемо нехтувати величинами вищого порядку малості в порівнянні з кутовим коефіцієнтом струни $\operatorname{tg} \theta(x) = u_x$. При цьому, наприклад, квадрат кутового коефіцієнта набагато менший одиниці.

Для побудови математичної моделі досліджуваного процесу, виділимо довільний відрізок струни $[x, x + \Delta x]$, який при коливанні деформується в дугу AB (рис. 1.2). Довжина дуги цього відрізка в момент t дорівнює

$$S(A, B) = \int_x^{x+\Delta x} ds = \int_x^{x+\Delta x} \sqrt{1+u_x^2} dx \cong \Delta x,$$

оскільки $ds = \sqrt{1+u_x^2} dx = \left(1 + \frac{1}{2} u_x^2 + \dots\right) dx \cong dx$ з точністю до малих порядку

вище першого. Таким чином, будь-яка ділянка струни після відхилення від положення рівноваги у рамках нашого наближення не змінює своєї довжини. Звідси, за законом Гука витікає, що величина $\mathbf{T}(x,t) = \mathbf{T}(x)$ не залежить від часу. Іншими словами, зміною величини натягу, виникаючому при малих коливаннях, можна нехтувати у порівнянні з натягом, якому струна вже зазнала в положенні рівноваги.

В основу виводу рівняння коливань покладемо принцип Д'Аламбера: *результуюча сил, які діють на систему, включаючи сили інерції, дорівнює нулю*. Знайдемо сили, що діють на виділений відрізок струни.

1. Оскільки струна гнучка, то в кожному її перетині по дотичній до струни діє сила натягу T (рис. 1.2). Горизонтальна складова сил натягу, що діють на кінцях виділеного відрізка, дорівнює

$$T(x) \cos \theta(x)|_{x+\Delta x} - T(x) \cos \theta(x)|_x = \frac{T(x+\Delta x)}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 \theta_2}} - \frac{T(x)}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 \theta_1}} \cong T(x+\Delta x) - T(x),$$

а вертикальна складова сил натягу:

$$\begin{aligned} T(x) \sin \theta(x)|_{x+\Delta x} - T(x) \sin \theta(x)|_x &= T(x+\Delta x) \frac{\operatorname{tg} \theta_2}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 \theta_2}} - T(x) \frac{\operatorname{tg} \theta_1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 \theta_1}} \cong \\ &\cong T(x+\Delta x) u_x(x+\Delta x, t) - T(x) u_x(x, t), \end{aligned}$$

оскільки $\sin \theta = \operatorname{tg} \theta / \sqrt{1+\operatorname{tg}^2 \theta} \cong \operatorname{tg} \theta = u_x$.

2. Припустимо, що на струну діють зовнішні сили, паралельні осі Ou . Наприклад, сила тяжіння з густиною $f(x,t)$, розрахована на одиницю довжини, так що на виділеному відрізку її рівнодіюча $F(x,t) = \int_x^{x+\Delta x} \rho(s) f(s,t) ds$.

Тут $\rho(s)$ – лінійна густина матеріалу, стала для однорідної струни.

Якщо вага струни мала у порівнянні з силою натягу, то силою тяжіння, як зазначено вище, можна нехтувати і струну вважати невагомою. У якості об'ємних сил можуть також виступати імпульси, розподілені вздовж струни і діючі на неї в різні моменти часу.

3. Якщо опором середовища (тертям) знехтувати не можна, то варто враховувати силу опору (зазвичай її приймають пропорційною швидкості u_t). Вона діє у напрямку протилежному напрямку зміщення точок струни, а її рівнодійна дорівнює $-\beta \int_x^{x+\Delta x} u_t(s,t) ds$.

4. Повертаюча сила ($-\gamma u$), направлена так само як і сила опору, має рівнодійну $-\gamma \int_x^{x+\Delta x} u(s,t) ds$.

5. Сила інерції має рівнодійну $-\int_x^{x+\Delta x} \rho(s)u_{tt}(s,t) ds$.

Проектуючи на вісь Ox сили, діючі на відрізок струни $[x, x + \Delta x]$, відповідно до принципу Д'Аламбера матимемо $|\mathbf{T}(x + \Delta x)| \approx |\mathbf{T}(x)|$, оскільки інші сили не мають горизонтальних складових. Таким чином, з точністю до малих порядку вище першого маємо $|\mathbf{T}(x,t)| \approx T$, де T означає довжину вектору натягу в стані спокою.

Проекція сил на вісь Ou є

$$\begin{aligned} & \int_x^{x+\Delta x} \rho(s)u_{tt} ds = \\ & = T[u_x(x + \Delta x, t) - u_x(x, t)] + \int_x^{x+\Delta x} \rho(s)f(s,t) ds - \int_x^{x+\Delta x} \beta u_t(s,t) ds - \int_x^{x+\Delta x} \gamma u(s,t) ds. \end{aligned}$$

Використовуючи теорему про *середнє в інтегральному численні*¹, отримаємо

$$\begin{aligned} & \rho(\xi)u_{tt}(\xi, t)\Delta x = \\ & = T[u_x(x + \Delta x, t) - u_x(x, t)] - [\beta u_t(\xi, t) + \gamma u(\xi, t) - \rho(\xi)f(\xi, t)]\Delta x, \end{aligned}$$

де $x < \xi < x + \Delta x$.

Вводячи позначення $a^2 = T/\rho$, $b^2 = \beta/\rho$, $c^2 = \gamma/\rho$, запишемо

$$u_{tt}(\xi, t) = a^2 \cdot \frac{u_x(x + \Delta x, t) - u_x(x, t)}{\Delta x} - b^2 u_t(\xi, t) - c^2 u(\xi, t) + f(\xi, t). \quad (1.1)$$

¹ Якщо функція $f(x)$ визначена і неперервна на відрізку $[a, b]$, то $\exists \xi \in [a, b]$:

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b - a)$$

Переходячи до границі при $\Delta x \rightarrow 0$, знайдемо шукане рівняння

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} - b^2 u_t - c^2 u + f(x, t), \quad (1.2)$$

яке зазвичай називають *телеграфним рівнянням* з огляду на те, що воно використовується в теорії поширення квазістаціонарних електричних коливань у кабелях.

Частинні випадки телеграфного рівняння

1. Якщо опір середовища незначний, а зовнішні та повертаючі сили настільки малі, що ними можна знехтувати у порівнянні з силою натягу T , то рівняння (1.2) спрощується

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad a^2 = T/\rho, \quad [a] = \text{м/с} \quad (1.3a)$$

(де ρ – лінійна густина) і називається *рівнянням вільних поперечних коливань струни*. Вільні коливання за відсутності опору є *гармонічними*.

2. Поширення *поздовжніх* хвиль у пружних середовищах, наприклад, у стержні, пов'язані з тим, що у ньому виникають поздовжнє розтягнення і стиск, які чергуються один з одним. У випадку поздовжніх коливань стержня зміщення направлені уздовж осі стержня, а через $u(x, t)$ позначають величину поздовжнього зміщення відносно стану рівноваги. Такі коливання виникають, наприклад, у консолі при ударі по незакріпленому кінцю. Поздовжні, а також крутильні коливання описуються рівнянням

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad a^2 = E/\rho, \quad [a] = \text{м/с}. \quad (1.3b)$$

Тут E – модуль Юнга, який характеризує пружні властивості матеріалу, а ρ – об'ємна густина.

3. Якщо матеріал стержня неоднорідний (лінійна густина змінюється уздовж стержня), то матимемо *хвильове рівняння зі змінними коефіцієнтами*

$$u_{tt} = \frac{\partial}{\partial x} \left(a^2(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right). \quad (1.3c)$$

4. Хвильовим рівнянням описується розподіл електричного струму в коливальному контурі. На підставі законів Кірхгофа складемо систему рівнянь для електричного кола (система двох рівнянь 1-го порядку):

$$\begin{cases} i_x + C u_t + G u = 0, \\ u_x + L i_t + R i = 0. \end{cases} \quad (1.4)$$

Тут $i(x, t)$ і $u(x, t)$ – розподіл струму та потенціалу вздовж провідника; C і L – ємність та індуктивність провідника на одиницю довжини; G і R – провідність і опір на одиницю довжини.

Розщеплюючи систему відносно кожної з функцій, отримаємо, наприклад, для потенціалу, рівняння у частинних похідних 2-го порядку:

$$u_{xx} = CL \cdot u_{tt} + (CR + GL) \cdot u_t + GR \cdot u, \quad (1.5)$$

гіперболічного типу, якщо $CL \neq 0$, і параболічного типу, якщо $CL = 0$.

Рівняння (1.5) записане у вигляді

$$u_{tt} = \frac{1}{CL} u_{xx} - \left(\frac{R}{L} + \frac{G}{C} \right) u_t - \frac{GR}{CL} u \quad (1.5a)$$

і є телеграфним рівнянням виду (1.2). Якщо провідність і опір провідника малі і ними можна нехтувати, то звідси матимемо одновимірне хвильове рівняння виду (1.3), де коефіцієнт $a^2 = 1/CL$ характеризує швидкість розповсюдження сигналу в лінії. В електротехніці коефіцієнт $\omega = 1/\sqrt{CL}$ називають *циклічною частотою*.

Розповсюдження струму описується рівнянням аналогічним (1.5). Характерно, що стадіям коливань в електричному контурі (перетворенням з часом енергій електричного та магнітного полів) можна співставити відповідні стадії механічних коливань (перетворення з часом потенціальної енергії на кінетичну і назад). Цю подібність можна посилити, враховуючи, що:

- енергія електричного поля конденсатора аналогічна потенційній енергії маятника,
- енергія магнітного поля котушки аналогічна кінетичній енергії маятника,
- сила струму в контурі аналогічна швидкості руху маятника,
- індуктивність L виконує функції маси маятника,
- опір R відіграє роль сил тертя, що діють на маятник.

Рекомендується вивести всі частинні випадки телеграфного рівняння, перераховані вище, *самостійно!*

1.2. Крайові умови для рівнянь гіперболічного типу

В отриманому рівнянні коливання струни (1.2) заданими є:

1. параметр $a^2 = T/\rho$, залежний від фізичних властивостей матеріалу струни (питомої густини та натягу);
2. параметр $b^2 = \beta/\rho$, який характеризує опір оточуючого середовища (якщо доцільно його враховувати);
3. параметр $c^2 = \gamma/\rho$ і функція $f(x,t)$, яка описує зовнішній вплив.

Однак саме рівняння не містить інформації ні про те, яким чином струна була виведена з положення рівноваги, ні про характер закріплення кінців струни, хоча зрозуміло, що ці фактори суттєво впливають на коливальний процес в цілому, а тому повинні враховуватися. Всі ці фактори об'єднуються єдиним поняттям *крайові умови* і записуються у вигляді певних відношень. Разом рівняння стану та крайові умови утворюють *крайову задачу*. В крайових умовах виділяють:

а) Початкові умови. Вивести струну зі стану спокою можна, надавши її точкам або початкове відхилення $\varphi(x)$, або початкову швидкість $\psi(x)$, або і те й інше одночасно. В цьому разі шукана функція $u(x,t)$ повинна задовольняти *початкові умови*:

$$u(x,t)|_{t=0} \equiv u(x,0) = \varphi(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} \equiv u_t(x,0) = \psi(x), \quad x \in [0,l]. \quad (1.6)$$

б) Граничні умови. При розв'язуванні фізичних задач хвильового характеру можливі граничні умови трьох типів (якщо обмежуватися *лінійними* граничними умовами).

Граничні умови 1-го роду (задано *режими руху граничних точок*). Граничні точки струни здійснюють задані рухи (рис. 1.3):

$$u(0,t) = \mu_1(t), \quad u(l,t) = \mu_2(t). \quad (1.7)$$

Типова задача, яка моделюється цими умовами – задача про крутильні коливання стержня, лівий кінець якого закріплений ($\mu_1(t) = 0$), а правий обертається на певний кут (рис.1.4). Ця задача може бути переформульована і як обернена. Зокрема, одна із задач *математичної теорії керування* полягає у визначенні такої функції $\mu_2(t)$, яка дозволяє погасити крутильні коливання за мінімальний час.

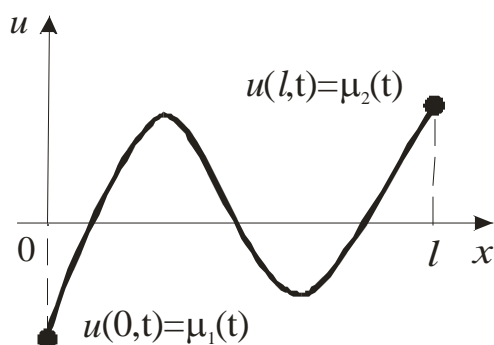


Рис. 1.3

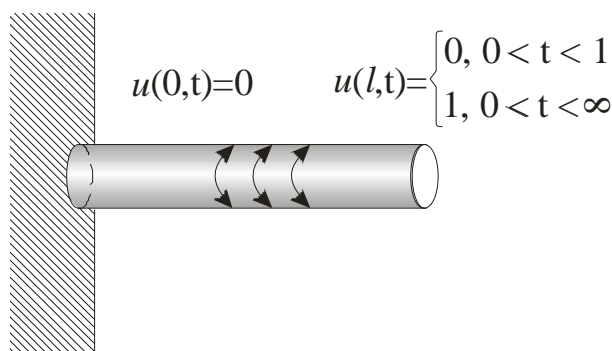


Рис. 1.4

Якщо граничні точки нерухомі, тобто $\mu_1(t) = \mu_2(t) = 0$, то маємо умови жорсткого закріплення кінців струни

$$u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0. \quad (1.8)$$

Таким чином, *математична модель поставленої в п.1.1. задачі про малі поперечні коливання струни, закріпленої на кінцях, формулюється у вигляді першої крайової задачі, яка включає співвідношення (1.3а), (1.6) і (1.8).*

Граничні умови 2-го роду (задано *сили, що діють в граничних точках*). При постановці задачі про поперечні коливання струни ми зосередились на випадку, коли рух здійснюється в одній площині. Тому обидва кінця струни піддаються дії тільки вертикальних складових сил (горизонтальні складові приводили б до змін початкової довжини), які визначаються величинами

$Tu_x(0,t)$ і $Tu_x(l,t)$. Отже, граничні умови 2-го роду можна записати як

$$u_x(0,t) = \mu_1(t), \quad u_x(l,t) = \mu_2(t). \quad (1.9)$$

Якщо кінці струни вільно рухаються вздовж вертикальних напрямних без тертя (рис. 1.5), то

$$u_x(0,t) = 0, \quad u_x(l,t) = 0. \quad (1.10)$$

Прикладами задач, які моделюються цими умовами, можуть служити:

- а) поздовжні коливання пружини з вільним кінцем (рис. 1.6);
- б) поздовжні коливання пружини під дією сили, прикладеної до одного кінця.

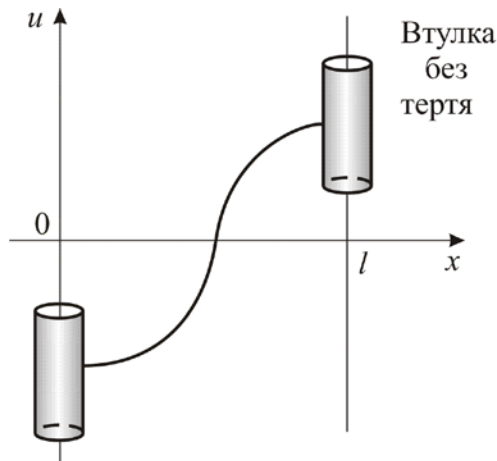


Рис. 1.5

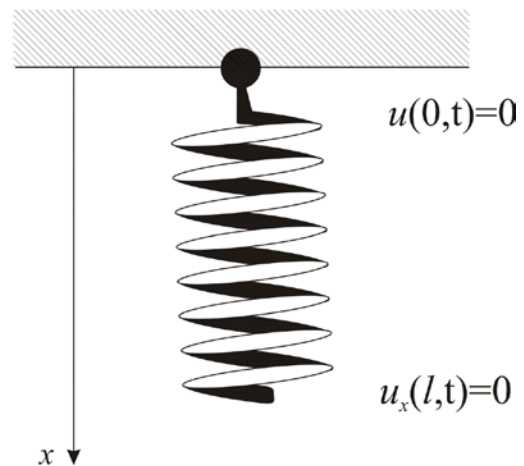


Рис. 1.6

Якщо величина сили дорівнює $\mu(t)$, і напрям її дії збігається з додатнім напрямом осі Ox , то граничні умови записуються у вигляді

$$u_x(l,t) = \frac{1}{E}\mu(t). \quad (1.11)$$

- с) Під дією сил граничні точки струни (або пружини) здійснюють вимушений рух. Такого роду задачі виникають, наприклад, при коливанні електронів в електричному полі.

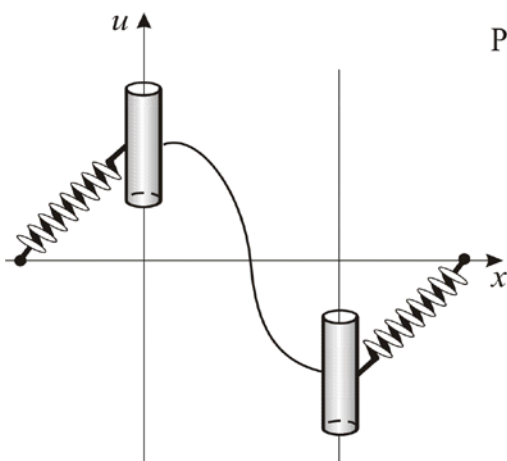


Рис. 1.7

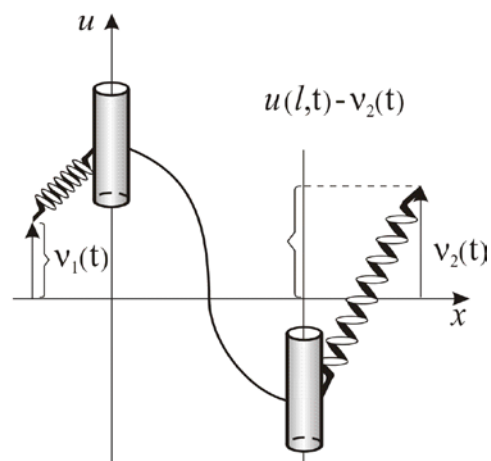


Рис. 1.8

Граничні умови 3-го роду (задано пружне закріплення кінців струни). Схема пружного закріплення може бути такою, наприклад, як показана на рис. 1.7.

Прикріплені до кінців струни пружинки викликають вертикальні реакції $R(0,t)$ і $R(l,t)$, величини яких пропорційні зміщенням відповідних кінців струни $u(0,t)$ і $u(l,t)$, тобто $R(0,t) = h \cdot u(0,t)$ і $R(l,t) = h \cdot u(l,t)$, де h – коефіцієнт пружності пружинки.

Зусилля, які створюються пружинками на лівому та правому кінцях струни, рівні $Tu_x(0,t)$ і $Tu_x(l,t)$ і напрямлені відповідно вертикально вгору і вниз. Проекції сил, діючих у вузлах, на вісь Ou дають шукані граничні умови:

$$u_x(0,t) - \frac{h}{T}u(0,t) = 0, \quad u_x(l,t) + \frac{h}{T}u(l,t) = 0. \quad (1.12)$$

Якщо кінці пружинок самі здійснюють задані рухи $v_1(t)$ і $v_2(t)$ (див. рис.1.8), то матимемо неоднорідні граничні умови:

$$u_x(0,t) - \frac{h}{T}u(0,t) = -\frac{h}{T}v_1(t), \quad u_x(l,t) + \frac{h}{T}u(l,t) = \frac{h}{T}v_2(t). \quad (1.13)$$

Всі три типи наведених граничних умов можна поєднати таким записом:

$$\alpha_1 u_x(0,t) + \alpha_2 u(0,t) = \mu_1(t), \quad \beta_1 u_x(l,t) + \beta_2 u(l,t) = \mu_2(t). \quad (1.14)$$

Це дозволяє мати різні комбінації граничних умов на кінцях струни, задаючись відповідними коефіцієнтами α_i і β_i .

Наприклад, лівий кінець струни жорстко защемлений, а правий – вільний. У цьому випадку, поклавши в (1.14) $\alpha_1 = \beta_2 = 0$ і $\alpha_2 = \beta_1 = 1$, матимемо

$$u(0,t) = 0, \quad u_x(l,t) = 0.$$

Звернемо увагу на деякі *менш поширені* граничні умови.

1. Нехай лівий кінець струни піддається дії сили, пропорційній швидкості і має напрямок, протилежний її руху. Гранична умова такого типу має вигляд:

$$Tu_x(0,t) = -\beta \cdot u_t(0,t).$$

2. *Нелінійне пружне закріплення* кінця струни. Нехай реакція опори на лівому кінці струни пропорційна кубу зміщення (а не першому степеню u , як це приймається згідно закону Гука в лінійному випадку). Тоді гранична умова на цьому кінці набуває вигляду

$$Tu_x(0,t) = -h \cdot u^3(0,t).$$

3. Якщо до нижнього кінця пружини, яка здійснює поздовжні коливання, прикріпити масу m , то граничну умову слід задавати у вигляді

$$m \cdot u_{tt}(l,t) = -Eu_x(l,t) + mg.$$

Тепер ми в змозі ставити крайові задачі та будувати математичні моделі різноманітних фізичних процесів, які описуються рівняннями гіперболічного типу. Адекватність тієї чи іншої вибраної моделі перевіряється практикою.

1.3. Багатовимірні хвильові рівняння

(а) Малі поперечні коливання пласкої мембрани. Якщо товщина пластини набагато менша двох інших її вимірів, то її можна моделювати мембраною, тобто пласкою натягнутою плівкою, яка не чинить опору вигинанню та зсуву, але чинить опір розтягуванню. Нехай мембрана здійснює малі поперечні коливання, при яких зміщення $u(x, y, t)$ перпендикулярні площині Oxy , а квадратами величин u_x і u_y можна знехтувати.

Виділимо на мембрані елементарну площадку, замінивши видалену частину силами натягу. Дотримуючись умов виводу одновимірного рівняння поперечних коливань струни, наведеного у п. 1.1, не складно отримати *двовимірне хвильове рівняння*

$$u_{tt} = a^2 \Delta u + f(x, y, t), \quad (1.15)$$

тут $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$ – двовимірний оператор Лапласа; $f(x, y, t)$ – густина рівнодіючих зовнішніх сил, діючих на мембрану в точці $M(x, y)$ в момент часу t вздовж осі Oz .

(б) Рівняння гідродинаміки і акустики. Рух суцільного середовища характеризується вектором швидкості $\mathbf{v}(x, y, z, t)$, тиском $p(x, y, z, t)$ і густиною $\rho(x, y, z, t)$. Якщо обмежитися малими коливаннями ідеальної рідини (газу), то справедливі такі тривимірні хвильові рівняння:

$$v_t = a^2 \nabla \sigma, \quad \sigma_{tt} = a^2 \Delta \sigma, \quad \rho_{tt} = a^2 \Delta \rho, \quad p_{tt} = a^2 \Delta p, \quad (1.16)$$

де $a^2 = \gamma p_0 / \rho_0$, $\sigma = \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0}$, $\Delta u = \nabla \cdot \nabla u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$.

(в) Напруженості електричного $\mathbf{E}(x, y, z)$ та магнітного полів $\mathbf{H}(x, y, z)$ у вакуумі описуються аналогічними хвильовими рівняннями

$$\mathbf{E}_{tt} = c^2 \Delta \mathbf{E}, \quad \mathbf{H}_{tt} = c^2 \Delta \mathbf{H}, \quad (1.17)$$

які впливають з рівнянь Максвелла. Дійсно,

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi \rho, \\ \operatorname{div} \mathbf{H} = 0 \end{array} \right. \quad \left(\begin{array}{l} \mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \\ \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \\ \mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} \\ \rho = 0 \end{array} \right) \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi \sigma}{c} \mathbf{E}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \mathbf{E} = 0, \\ \operatorname{div} \mathbf{H} = 0. \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \mathbf{H} \\ \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{E} - \Delta \mathbf{E} = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi \sigma}{c} \mathbf{E} \right) \\ \Delta \mathbf{E} = \frac{\mu \varepsilon}{c^2} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \frac{4\pi}{c} \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} \right) \\ \mathbf{E}_{tt} = c^2 \Delta \mathbf{E}, \quad \text{при } \mathbf{j} = 0. \end{array} \right.$$

Вивести (*самостійно!*) рівняння $\mathbf{H}_{tt} = c^2 \Delta \mathbf{H}$.

2. Процеси розповсюдження тепла (рівняння параболічного типу)

Проведемо такий фізичний експеримент:

Етап 1. Візьмемо однорідний (наприклад, мідний) стержень, діаметр якого набагато менший за довжину ($d \ll l$). Вкриємо бічну поверхню стержня теплоізоляційним матеріалом так, щоб тепло могло поширюватися лише через торці стержня.

Етап 2. Помістимо стержень в електропіч з фіксованою температурою T_0 (наприклад, $T_0 = 10^0 C$), доки температура стержня не досягне температури печі.

Етап 3. Витягнемо стержень з нагрівача і приєднаємо до його кінців термоелементи для підтримки на кінцях стержня фіксованої температури T_1 і T_2 (нехай, $T_1 = 0^0 C$ і $T_2 = 50^0 C$). Прийmemo цей момент часу за початковий ($t = 0$).

Етап 4. Будемо вести спостереження та запис профілю температури за допомогою пристроїв візуалізації (наприклад, термодатчиків, закріплених під теплоізоляційним шаром на бічній поверхні стержня).

Схема експерименту ілюструється рис. 2.1.

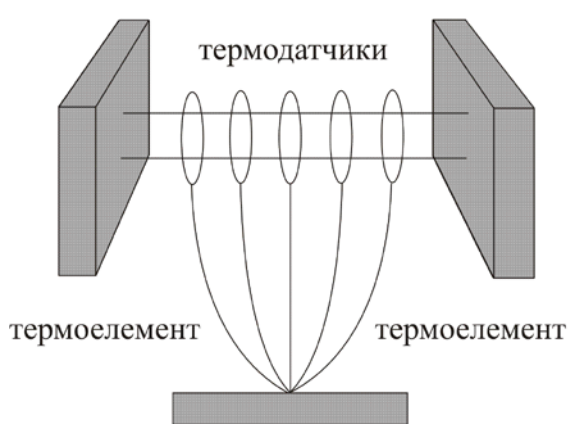


Рис. 2.1

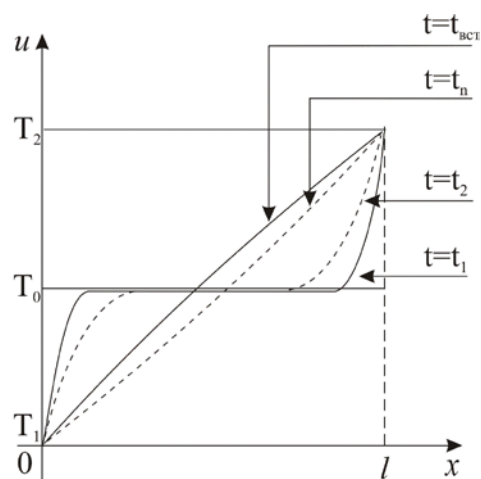


Рис. 2.2

Якісно результати експерименту цілком очевидні. Фактичні діаграми температурних профілів зображено на рис. 2.2. Моменти вимірювання: $t = 0$, $t = t_1$, $t = t_2, \dots, t = t_n, \dots, t = t_{вст}$, де $t_{вст}$ – час, коли процес можна вважати таким, що встановився, тобто температурна крива змінюється лише в ε -околі деякого положення.

2.1. Виведення одновимірного рівняння теплопровідності

Розглянемо наступну фізичну модель: нехай довгий тонкий стержень виготовлено з однорідного провідного матеріалу. Вважатимемо, що: (а) температура в довільному перерізі стержня однакова, оскільки довжина стержня l набагато більша за його діаметр d ; (б) тепло може поширюватися лише

вздовж осі стержня Ox (рис. 2.3), оскільки його бічна поверхня теплоізолювана.

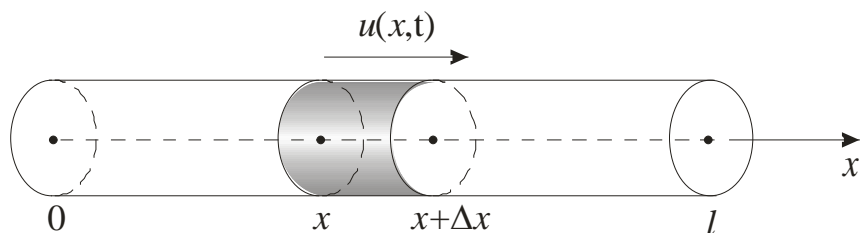


Рис. 2.3

Позначимо через $u(x, t)$ температуру тіла в точці x у довільний момент часу t і скористаємося законом Фур'є для густини потоку тепла q в напрямку \mathbf{n} в одиницю часу: *потік тепла q , що проходить через границю області, пропорційний нормальній похідній від температури в напрямку внутрішньої нормалі*

$$q(t) = -\lambda \cdot \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \equiv -\lambda u_{\mathbf{n}}. \quad (2.1)$$

Тут λ – коефіцієнт теплопровідності; у загальному випадку – функція координати, часу та температури; $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}$ – зміна температури у напрямку \mathbf{n} ;

$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = -\frac{\partial u}{\partial(-\mathbf{n})}$ – похідна у напрямку внутрішньої нормалі (взята з протилежним знаком похідна по зовнішній нормалі).

Відповідно до закону Фур'є, якщо температура зростає у напрямку зовнішньої нормалі \mathbf{n} до межі S області D , то тепловий потік буде текти з навколишнього середовища в область D і навпаки (рис. 2.4).

Закон Фур'є насправді описує теплопровідність усюди всередині стержня, а не лише на його границі (див. рис. 2.5). В одновимірному випадку формулі (2.1) можна надати такий вигляд: потік тепла, що витікає

$$q(t) = \begin{cases} \lambda u_x(0, t), & x = 0, \\ -\lambda u_x(l, t), & x = l. \end{cases} \quad (2.1a)$$



Рис. 2.4

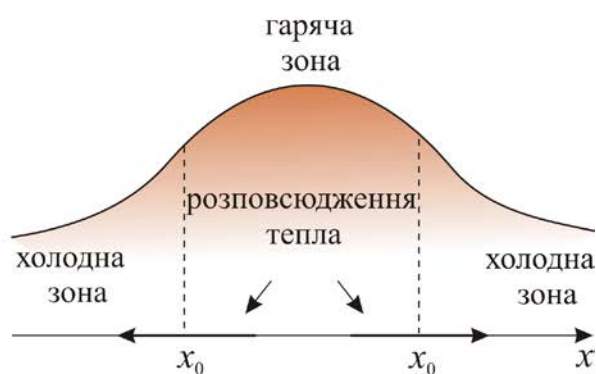


Рис. 2.5

Виділимо елементарну ділянку, укладену між перерізами стержня в точках x і $(x + \Delta x)$. Позначимо через $f(x, t)$ густину розподілу джерел ($f(x, t) > 0$) або поглиначів ($f(x, t) < 0$) тепла.

Складемо рівняння балансу тепла на виділеній ділянці за малий час Δt :

- 1) зміна кількості тепла (для визначеності вважаємо, що йдеться про його збільшення) призводить до зміни температури, яку за допомогою формули скінченних приростів Лагранжа запишемо у вигляді

$$u(x, t + \Delta t) - u(x, t) = u_t(x, \tau) \Delta t, \quad t < \tau < t + \Delta t.$$

Для підвищення температури виділеної ділянки на вказану величину потрібна кількість тепла

$$Q_1 = \int_x^{x+\Delta x} c\rho\sigma u_t(s, \tau) ds \cdot \Delta t,$$

де ρ – густина і c – питома теплоємність матеріалу стержня, σ – площа перерізу стержня;

- 2) притік тепла за рахунок зовнішніх джерел тепла

$$Q_2 = \int_x^{x+\Delta x} c\rho\sigma f(s, t) ds \cdot \Delta t;$$

- 3) повна кількість тепла, що пройшла через границі ділянки, згідно з (2.1):

$$Q_3 = \lambda\sigma [u_x(x + \Delta x, t) - u_x(x, t)] \cdot \Delta t, \quad \lambda = \text{const}.$$

Відповідно до закону збереження енергії $Q_1 = Q_2 + Q_3$ або

$$\int_x^{x+\Delta x} c\rho u_t(s, \tau) ds = \lambda [u_x(x + \Delta x, t) - u_x(x, t)] + \int_x^{x+\Delta x} c\rho f(s, t) ds.$$

Застосовуючи *теорему про середнє в інтегральному численні* до останнього співвідношення, матимемо

$$c\rho u_t(\xi, \tau) \Delta x = \lambda [u_x(x + \Delta x, t) - u_x(x, t)] + c\rho f(\xi, t) \Delta x, \quad \text{де } x < \xi < x + \Delta x.$$

Внаслідок граничного переходу $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta t \rightarrow 0$ отримаємо шукане рівняння стану

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t). \quad (2.2)$$

Тут $a^2 = \lambda/c\rho$ – *коефіцієнт теплопровідності*, що визначається властивостями матеріалу стержня.

За відсутності джерел тепла ($f(x, t) \equiv 0$) маємо основне *одновимірне рівняння теплопровідності*

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < \infty. \quad (2.3)$$

Для повноти математичного опису експерименту, розглянутого у попередньому пункті, слід задати додаткові умови. Оскільки спостереження процесу розпочато в момент часу, коли стержень мав сталу температуру (цей момент зручно вважати початком відліку), то початкові умови будуть такі:

$$u(x,0) = T_0, \quad 0 \leq x \leq l, \quad T_0 = \text{const}. \quad (2.4)$$

Температурний режим на кінцях стержня $x=0$ і $x=l$ підтримується сталим, тому матимемо такі граничні умови

$$u(0,t) = T_1, \quad u(l,t) = T_2, \quad 0 < t < \infty. \quad (2.5)$$

Система співвідношень (2.3)-(2.5) є математичною моделлю запровадженого нами фізичного експерименту і називається **крайовою задачею для рівняння теплопровідності**. Зупинимось трохи докладніше на фізичній стороні отриманих результатів і введених параметрів.

Рівняння (2.3) зв'язує між собою швидкість зміни температури з часом u_t і угнутість (опуклість) u_{xx} температурного профілю $u(x,t)$. Це означає, що температура $u(x,t)$ у фіксованій точці смуги $\Pi = \{x, t | 0 < x < l, 0 < t < \infty\}$ (іншими словами, в деякій фіксованій точці стержня x і в деякій фіксованій момент часу t) збільшується ($u_t > 0$) або зменшується ($u_t < 0$) відповідно до того, додатна чи від'ємна друга похідна u_{xx} .

Величина u_{xx} (на мові теплопровідності) слугує мірою відмінності температури в даній точці від температури в сусідніх точках. Для наочності апроксимуємо величину u_{xx} скінченними різницями

$$u_{xx}(x,t) \cong \frac{1}{(\Delta x)^2} \left[(u(x+\Delta x,t) - u(x,t)) - (u(x,t) - u(x-\Delta x,t)) \right]$$

і надамо цьому співвідношенню вигляду

$$u_{xx}(x,t) \cong \frac{1}{(\Delta x)^2} \left[\frac{u(x+\Delta x,t) + u(x-\Delta x,t)}{2} - u(x,t) \right].$$

Звідки випливає, що якщо температура $u(x,t)$ більша (або менша) середньої температури в сусідніх точках, то $u_{xx} > 0$ (або $u_{xx} < 0$) і, отже, температура в точці x буде зростати (або знижуватися). Якщо ж $u(x,t)$ дорівнює середньому значенню, то зміни температури не відбувається.

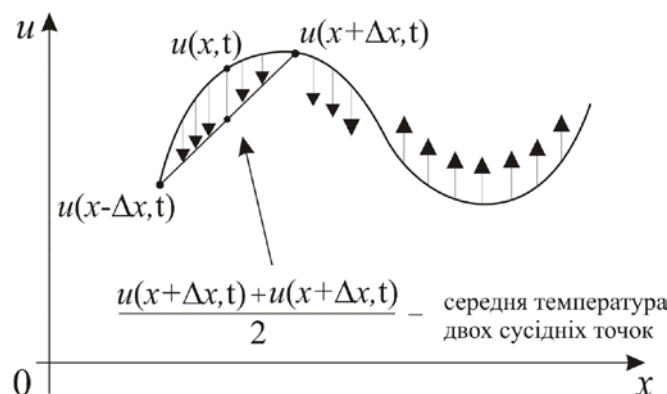


Рис. 2.6

На рис.2.6 проілюстровано вищесказане. Тут наведено температурний профіль у довільний момент часу t . Стрілки вказують напрямки зміни температури у відповідності з рівнянням (2.3).

Завдання для самостійного розв'язання

1. Для однорідних матеріалів рівняння стану має вигляд (2.2). Вивести рівняння теплопровідності зі змінним коефіцієнтом

$$u_t = \frac{1}{c\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left[\lambda(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right] + F(x,t), \quad (2.6)$$

якщо теплопровідність $\lambda(x)$ залежить від координати x .

2. Для низки матеріалів теплопровідність залежить від температури $\lambda = \lambda(u)$. Показати, що в цьому випадку рівняння стану *нелінійне*

$$u_t = \frac{1}{c\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left[\lambda(u) \frac{\partial u}{\partial x} \right] + F(x,t). \quad (2.7)$$

Примітка: слід зазначити, що у багатьох випадках залежність $\lambda = \lambda(u)$ незначна і нею зазвичай нехтують.

3. Нехай бічна поверхня стрижня *не теплоізована*, і тепловий потік через неї пропорційний різниці між температурою стержня $u(x,t)$ і температурою навколишнього середовища, яка підтримується сталою і рівною нулю. Переконайтеся, що рівняння стану набуває виду

$$u_t = a^2 u_{xx} - \beta u + F(x,t), \quad \beta > 0. \quad (2.8)$$

4. Нехай $u(x,t)$ – концентрація деякої субстанції в потоці, що рухається зі швидкістю V . Припускаючи, що концентрація змінюється з рахунок *дифузії та конвекції*, вивести рівняння

$$u_t = a^2 u_{xx} - V u_x. \quad (2.9)$$

Вказівка: скористатися законом збереження речовини: на відріжку $[x, x + \Delta x]$ зміна маси речовини дорівнює сумі змін за рахунок дифузії та перенесення через границю.

2.2. Крайові умови в задачах дифузії та теплопровідності

Як зазначалося вище, розв'язання конкретної фізичної задачі не обмежується знаходженням загального розв'язку рівняння стану або руху. Необхідно знайти єдине рішення, яке задовольняє додаткові (крайові) умови, що впливають з фізичного змісту задачі.

а) Початкова умова. Початкова умова описує стан системи в початковий (нульовий) момент часу і визначається функцією $\varphi(x)$, яка задає розподіл температури точок тіла в нульовий момент часу

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l. \quad (2.10)$$

б) Граничні умови. Граничні умови полягають у тому, що задається тепловий режим на кінцях тіла. Існують різні варіанти моделювання цих умов. Класичними для рівнянь теплопровідності та дифузії є такі граничні умови:

Граничні умови 1-го роду (*на границях задана температура*). Розглянемо тепловий потік в одновимірному стержні, бічна поверхня якого теплоізолювана, а на кінцях розміщено пристрій, що складається з термостату та нагрівального елемента для підтримки заданого теплового режиму. Прийmemo, що температура кінців стержня змінюється за законами

$$u(0,t) = \theta_1(t), \quad u(l,t) = \theta_2(t), \quad 0 < t < \infty. \quad (2.11)$$

Зауваження. Граничні умови 1-го роду ставляться в *теорії оптимізації*, де розв'язуються задачі управління граничними умовами, тобто, задачі знаходження таких граничних температур $\theta_1(t)$ і $\theta_2(t)$, які забезпечують зміну температури розглядуваного середовища заданим чином. Наприклад, у металургійному виробництві потрібно вибрати температурний режим охолодження так, щоб градієнт температури всередині металу не створював напруги, які в подальшому могли б призвести до утворення тріщин у готовому виробі.

Граничні умови 2-го роду (*на границях задано тепловий потік*). Якщо бічна поверхня стержня теплоізолювана і відома інтенсивність теплового потоку через торцеві перерізи, то граничні умови мають вигляд

$$u_x(0,t) = f_1(t), \quad u_x(l,t) = f_2(t), \quad 0 < t < \infty, \quad (2.12)$$

де $f_i(t)$ ($i = 1, 2$) – кількість тепла, що проходить через кінці стержня від зовнішніх джерел.

Якщо один із кінців стержня, наприклад, лівий, теплоізолюваний, то через нього немає руху теплового потоку, тому

$$u_x(0,t) = 0, \quad u_x(l,t) = f_2(t). \quad (8.13)$$

Граничні умови 3-го роду (*на границях відбувається теплообмін з оточуючим середовищем відомої температури*). Нехай кінці стержня з теплоізолюваною бічною поверхнею знаходяться в контактi із зовнішнім середовищем, яке має у різних точках різну температуру. Ця схема може бути реалізована, наприклад, у такий спосіб: кінці стержня занурюються в ємності з рідиною, температура якої в одній ємності змінюється за законом $\theta_1(t)$, а в іншому – $\theta_2(t)$. У цьому випадку на кінцях стержня здійснюється теплообмін. Відповідно до закону Ньютона *кількість тепла, що передається в одиницю часу з одиниці площі поверхні в навколишнє середовище, пропорційна різниці температур поверхні тіла та навколишнього середовища*. Тому, інтенсивність теплового потоку $q(t)$ для одновимірного стержня дорівнює

$$q(t) = \begin{cases} h [u(0,t) - \theta_1(t)] & \text{при } x = 0, \\ h [u(l,t) - \theta_2(t)] & \text{при } x = l. \end{cases} \quad (2.14)$$

де h – коефіцієнт теплообміну. При цьому потік буде витікати (буде додатним) на тому кінці стержня, температура якого вище температури навколишнього середовища.

З іншого боку, за законом Фур'є (2.1а):

$$q(t) = \begin{cases} \lambda u_x(0,t), & x = 0, \\ -\lambda u_x(l,t), & x = l. \end{cases}$$

З умов рівності цих потоків між собою, знаходимо умови теплообміну на кінцях стержня, тобто граничні умови 3-го роду

$$u_x(0,t) = \frac{h}{\lambda}[u(0,t) - \theta_1(t)], \quad u_x(l,t) = -\frac{h}{\lambda}[u(l,t) - \theta_2(t)]. \quad (2.15)$$

Зрозуміло, що на кінцях $x = 0$ і $x = l$ можуть бути реалізовані різні комбінації граничних умов. Назвемо задачу (2.3)-(2.5) **першою крайовою задачею для рівняння теплопровідності**.

Якщо на кінцях $x = 0$ і $x = l$ задаються граничні умови 2-го або 3-го роду, то відповідні задачі називатимемо **другою** та **третьою крайовими задачами**. Якщо на кінцях $x = 0$ і $x = l$ матимемо граничні умови різних типів, то відповідні задачі називатимемо **мішаними крайовими задачами**.

Контактні граничні умови найцікавіші серед інших специфічних граничних умов. Побудуємо математичну модель процесу поширення тепла в стержні, що складається з двох провідних матеріалів, якщо його бічна поверхня теплоізована. Нехай, наприклад, ліва половина стержня – мідна, а права – залізна. Вважатимемо, що контакт між обома половинами в площині їхнього розділу ідеальний. Нехай на кінцях стержня задані сталі, відмінні від нуля температури, а температура стержня в початковий момент часу дорівнює нулю (рис. 2.7).

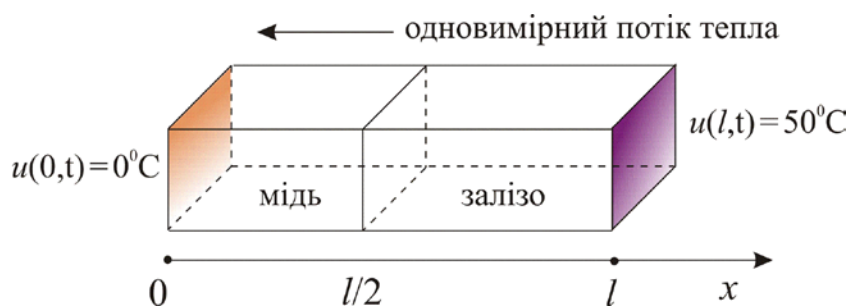


Рис. 2.7

Задачу можна моделювати двома способами.

Спосіб 1. Оскільки матеріал стержня неоднорідний, то рівняння теплопровідності буде рівнянням зі змінними коефіцієнтами. Крайову задачу в області $0 < x \leq l$, $0 \leq t < \infty$, запишемо у вигляді:

$$\begin{aligned} u_t &= a^2(x) \cdot u_{xx}, & u(x,0) &= 0, \\ u(0,t) &= 10^0 \text{ C}, & u(l,t) &= 50^0 \text{ C}, \end{aligned} \quad (2.16)$$

де

$$a(x) = \begin{cases} a_1, & 0 < x \leq l/2; \quad a_1 - \text{коефіцієнт теплопровідності міді,} \\ a_2, & l/2 < x \leq l; \quad a_2 - \text{коефіцієнт теплопровідності заліза.} \end{cases}$$

Спосіб 2. Кожна половина стержня однорідна, тому розподіл температур у кожній з них позначимо відповідно $V(x, t)$ і $W(x, t)$. Для кожної з цих функцій окремо, маємо:

$$\boxed{\begin{aligned} V_t &= a_1^2 V_{xx}, & 0 \leq x < l/2, \\ V(0, t) &= 10^0 C, & V(x, 0) = 0. \end{aligned}} \quad \boxed{\begin{aligned} W_t &= a_2^2 W_{xx}, & l/2 < x \leq l, \\ W(l, t) &= 50^0 C, & W(x, 0) = 0. \end{aligned}} \quad (2.17)$$

Обидві групи співвідношень об'єднуються в одну систему за рахунок умов сполучення на контактуючій поверхні. Дійсно, у площині розділу теплові потоки та температури частин стержня збігаються, оскільки (за припущенням) між ними має місце ідеальний контакт. Це дозволяє записати крайові умови контактного типу, яких недостає, так звані «умови зшивання» функцій та їх похідних на границі розділу

$$V(l/2, t) = W(l/2, t), \quad \lambda_1 V_x(l/2, t) = \lambda_2 W_x(l/2, t). \quad (2.18)$$

Порівняємо наведені способи постановки модельної крайової задачі: у *першому* випадку отримали одне рівняння зі змінними коефіцієнтами; у *другому* – кількість рівнянь подвоїлась, натомість обидва вони зі сталими коефіцієнтами.

2.3. Багатовимірні рівняння дифузійного типу

Багатовимірне рівняння теплопровідності, що описує розподіл температури в просторі, структурно не відрізняється від одновимірного рівняння; різниця лише в тому, що розглядається баланс тепла не на відрізок, а в області V , обмеженій поверхнею Σ . При цьому

$$Q_1 = \iiint_V c\rho u_t d\tau \cdot \Delta t, \quad Q_2 = \iiint_V f(M, t) d\tau \cdot \Delta t, \quad Q_3 = - \iint_{\Sigma} \lambda \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} d\sigma \cdot \Delta t. \quad (2.19)$$

Тут $u(M, t)$ – температура в точці $M = (x, y, z)$ в момент часу t , і похідна береться за напрямком зовнішньої нормалі до поверхні Σ .

Застосовуючи формулу Остроградського і враховуючи довільний вигляд області V , отримаємо рівняння теплопровідності для *неоднорідного середовища*

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(\lambda \cdot \operatorname{grad} u) + f(M, t). \quad (2.20)$$

У разі *однорідного середовища* (c, ρ, λ – сталі) рівняння (2.20) спрощується

$$u_t = a^2 \Delta u + F, \quad \text{де } a^2 = \lambda/c\rho, \quad F = f/c\rho. \quad (2.21)$$

Абсолютно аналогічно може бути виведене рівняння дифузії. У цьому випадку замість закону Фур'є (2.1) слід скористатися *законом Нернста* для потоку речовини

$$q = -D(x) \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}, \quad (2.22)$$

де D – коефіцієнт дифузії, $u = u(M, t)$ – концентрація дифундууючої речовини (газу, рідини).

У виразі (2.19) для Q_1 , слід замінити $c\rho$ на коефіцієнт пористості середовища κ , в якому відбувається дифузія. *Рівняння дифузії* набуває вигляду

$$\kappa u_t = \operatorname{div}(D \operatorname{grad} u) + f. \quad (2.23)$$

3. Стаціонарні процеси (рівняння еліптичного типу)

У попередніх параграфах цього розділу ми розглянули фізичні процеси, які протікають у просторі та часі. Поряд з ними в навколишньому світі мають місце стаціонарні (усталені) процеси, що не залежать від часу. Вони описуються рівняннями еліптичного типу. Припустимо, що нас цікавлять процеси коливання тіла або поширення тепла в ньому, що встановилися (не змінюються в часі). У цьому випадку у відповідних рівняннях руху

$$u_{tt} = a^2 \Delta u \quad (a^2 = T/\rho) \quad \text{і} \quad u_t = a^2 \Delta u \quad (a^2 = \lambda/c\rho)$$

слід покласти $u_{tt} = u_t = 0$. Отже, стаціонарні стани однорідного середовища описуються рівнянням Лапласа (дво- або тривимірним)

$$\Delta u(\mathbf{x}) = 0, \quad \text{де } \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (n = 2, 3).$$

Взагалі, будь-яке рівняння 2-го порядку еліптичного типу зі сталими коефіцієнтами може бути приведене до однієї з наступних канонічних форм:

а) рівняння Лапласа

$$\Delta u(\mathbf{x}) \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0; \quad (3.1)$$

б) рівняння Пуассона (або неоднорідне рівняння Лапласа)

$$\Delta u(\mathbf{x}) \equiv \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n); \quad (3.2)$$

с) рівняння Гельмгольца

$$\Delta u(\mathbf{x}) + \gamma u(\mathbf{x}) = -f(\mathbf{x}), \quad \gamma = \text{const}. \quad (3.3)$$

В останньому, зазвичай $\gamma = k^2$, якщо $\gamma = -k^2$, то таке рівняння називається рівнянням *Клейна-Гордона-Фока* – релятивістська версія *рівняння Шредінгера*.

3.1. Крайові умови для рівнянь еліптичного типу

Нехай поверхня S обмежує дві області: внутрішню D та зовнішню D^- . Відповідно до цього розрізняють *внутрішні та зовнішні крайові задачі*.

Функція $\varphi(\mathbf{y})$, визначена в області D і неперервна разом зі своїми частинними похідними, що входять до цього рівняння, і яка обертає його в тотожність, називається *регулярним розв'язком*. Отже, *розв'язки* рівнянь (3.1)-(3.3), які мають в D неперервні другі похідні, називаються *регулярними в D* . Регулярний *розв'язок* рівняння Лапласа називається *гармонічним*. Функції, що задовольняють рівняння (3.1), називаються *гармонічними в скінченній області D* , обмеженій замкненою поверхнею S (рис. 3.1), а відповідні задачі для цих областей – *внутрішніми крайовими задачами*.

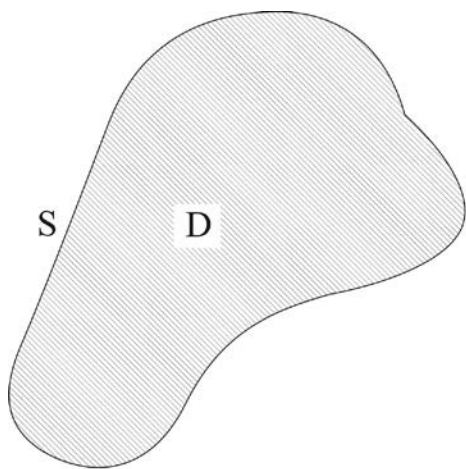


Рис. 3.1

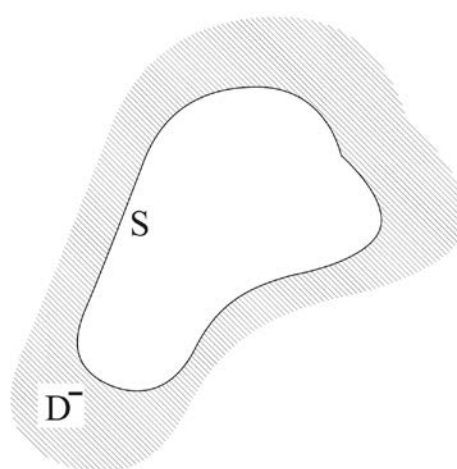


Рис. 3.2

Точки $\mathbf{x} \notin D$ утворюють необмежену область $D^- = \mathbb{R}^n \setminus \overline{D}$, яка включає нескінченно віддалену точку і має ту саму граничну поверхню S (рис. 3.2). Задачі для таких областей називають *зовнішніми крайовими задачами*.

Зауваження. В спеціалізованій літературі *крайові задачі* для рівнянь еліптичного типу часто називають *граничними задачами*.

У разі зовнішньої крайової задачі слід вимагати, щоб розв'язок був регулярним на нескінченності, тобто, в околі нескінченно віддаленої точки був обмеженим в \mathbb{R}^2 або спадав не повільніше A/r в \mathbb{R}^3 , де $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Тому, для зовнішніх задач до вже введеного означення регулярного розв'язку додають *вимогу обмеженості* розв'язку на нескінченності:

$$|u(\mathbf{x})| < A, \text{ якщо } n = 2, \text{ або } |u(\mathbf{x})| \rightarrow 0, \text{ якщо } n = 3, \text{ при } \mathbf{x} \rightarrow \infty.$$

Необхідність останнього пов'язана із єдиністю розв'язку; відповідні пояснення будуть надані при формулюванні теорем єдиності.

У загальному випадку крайові задачі для стаціонарних процесів ставляться наступним чином: знайти функцію $u(\mathbf{x})$, яка задовольняє в заданій області D рівняння

$$\operatorname{div}(p(\mathbf{x}) \cdot \operatorname{grad} u) - q(\mathbf{x}) \cdot u = f(\mathbf{x}), \quad (3.4)$$

а на межі області S крайову умову

$$\left\{ \alpha_1(\mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} + \alpha_2(\mathbf{x}) \cdot u \right\} \Big|_S = \mu(\mathbf{x}). \quad (3.5)$$

Якщо $\alpha_1 \equiv 0$, то отримаємо *першу крайову задачу*, якщо $\alpha_2 \equiv 0$ – *другу крайову задачу*, а якщо $\alpha_1 \neq 0$ і $\alpha_2 \neq 0$ – третю (*мішану*); $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}$ – похідна по зовнішній нормалі до границі області.

Відповідно до цього для рівнянь еліптичного типу формулюються наступні (внутрішні або зовнішні) крайові задачі:

- 1) *задача Діріхле*, якщо на границі задано значення функції;
- 2) *задача Неймана*, якщо на границі задано значення похідної по нормалі до границі;
- 3) *мішана задача*, якщо на границі задана лінійна комбінація значень функції та її похідної по нормалі до границі.

Сформулюємо деякі крайові задачі для рівняння Лапласа.

Внутрішня задача Діріхле: знайти *регулярний* (тобто однозначний і двічі неперервно диференційовний) розв'язок рівняння (3.1) в області D , що приймає на межі S задане значення φ

$$u(\mathbf{x})|_S = \varphi(\mathbf{y}), \quad \mathbf{y} \in S. \quad (3.6)$$

Зовнішня задача Діріхле: знайти *регулярний* (тобто двічі неперервно диференційовний та обмежений) розв'язок рівняння (3.1) у зовнішній області D^- , що приймає на межі S задане значення $u(\mathbf{x})|_S = \varphi$.

Аналогічно формулюються внутрішня та зовнішня задачі Неймана для рівняння Лапласа; відмінність лише в тому, що на межі S має бути задано значення похідної

$$\left. \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right|_S = \varphi(\mathbf{y}), \quad \mathbf{y} \in S. \quad (3.7)$$

У разі мішаної задачі

$$\left[\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} + hu \right]_S = \varphi(\mathbf{y}), \quad \mathbf{y} \in S. \quad (3.8)$$

Замінивши рівняння Лапласа на рівняння Пуассона або Гельмгольца, отримаємо відповідні крайові задачі для цих рівнянь.

Зауваження 1: Якщо коефіцієнти $p(\mathbf{x})$ і $q(\mathbf{x})$ сталі, то рівняння (3.4) суттєво спрощується

$$\Delta u - \alpha u = f(\mathbf{x}), \quad (3.9)$$

де $f(\mathbf{x})$ – функція просторових змінних.

Разом із регулярними існують так звані *фундаментальні* (або елементарні) розв'язки, які перестають бути регулярними в ізольованих точках або на *многовидах* особливого виду.

Фундаментальним розв'язком рівняння Лапласа називається розв'язок, який залежить лише від однієї змінної: $u = u(x_i)$, ($i = \overline{1, n}$).

У разі плоских задач ($n = 2$) рівняння Лапласа зазвичай записують у полярних координатах:

$$\Delta u(r, \theta) \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \equiv \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0. \quad (3.10)$$

Відповідно до означення тут можливі два фундаментальні розв'язки: або $u = u(r)$, або $u = u(\theta)$. Розглянемо перший з них, який знадобиться нам надалі. Якщо $u = u(r)$, то $\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0$, тоді рівняння (3.10) спрощується і легко інтегрується

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{du}{dr} \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad u(r) = C_1 \ln r + C_2. \quad (3.11)$$

У якості фундаментального розв'язку двовимірного рівняння Лапласа беруть функцію $u(r) = \ln \frac{1}{r}$.

Якщо розмірність задачі $n = 3$, то оператор Лапласа записують у сферичних координатах:

$$\Delta u(r, \theta, \varphi) \equiv \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}. \quad (3.12)$$

Функції $u = u(r)$ визначаються у цьому випадку так:

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{du}{dr} \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad u(r) = -\frac{C_1}{r} + C_2, \quad (3.13)$$

а фундаментальний розв'язок набуває вигляду $u(r) = \frac{1}{r}$.

Якщо кожній точці M простору \mathfrak{R}^n або його частині $D \in \mathfrak{R}^n$ поставлено у відповідність певне значення деякої фізичної величини u , то кажуть, що в \mathfrak{R}^n визначено *поле* цієї величини.

Поле називається *скалярним*, якщо u – скалярна величина (тобто її значення в певній системі одиниць суть числа). Оскільки значення u будуть, взагалі кажучи, змінюватися від точки до точки, зручніше записувати $u = f(M)$ або $u = u(M)$ замість $u = u(\mathbf{x})$. При цьому говорять про змінну як функцію точки.

Фундаментальний розв'язок рівняння Лапласа, який залежить від однієї геометричної змінної, в якості якої вибрано відстань від поточної точки M до параметричної точки P , в \mathbb{R}^n позначається через $\Omega_n(M, P)$ і виглядає так:

$$\Omega_n(M, P) = \begin{cases} \ln \frac{1}{|MP|}, & n = 2 \\ \frac{1}{|MP|}, & n = 3. \end{cases} \quad (3.14)$$

З (3.14) видно, що фундаментальний розв'язок є гармонічною функцією у всьому просторі, за виключенням точки $M = P$. Зазначимо, що $\Omega_n(M, P)$ буде розв'язком рівняння Лапласа і за координатами параметричної точки P при фіксованій точці M , тобто,

$$\Delta_M \Omega_n(M, P) = \Delta_P \Omega_n(M, P) = 0, \quad M \neq P.$$

Крім того, з (3.14) витікає, що в \mathbb{R}^3 фундаментальний розв'язок регулярний на нескінченності, а в \mathbb{R}^2 він має на нескінченності логарифмічну особливість.

Запис $u = u(M)$ не передбачає введення у просторі визначеної системи координат. Якщо ж обрана, наприклад, декартова система координат (x, y, z) , то задання точки M рівнозначне заданню її координат x, y, z у цій системі, і функція поля $u(M)$ перетворюється на звичайну функцію трьох змінних $u(x, y, z)$. Тоді фундаментальний розв'язок (3.14) можна переписати так:

$$\Omega_n(\mathbf{x}, \xi) = \begin{cases} \ln \frac{1}{|\mathbf{x} - \xi|}, & n = 2 \\ \frac{1}{|\mathbf{x} - \xi|}, & n = 3, \end{cases}$$

де $|\mathbf{x} - \xi|$ – відстань від змінної точки $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$ до параметричної точки $P(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$. Нормальна похідна у цьому разі має вигляд

$$\frac{\partial |\mathbf{x} - \xi|}{\partial \mathbf{n}} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial |\mathbf{x} - \xi|}{\partial x_i} \cos(x_i, \mathbf{n}),$$

що означає, що диференціювання ведеться за координатами змінної точки.

4. Системи рівнянь у частинних похідних

Переважну кількість фізичних систем (особливо в механіці твердого тіла, що деформується, в динаміці рідини, тощо) не можна описати одним рівнянням. Для їх опису використовуються системи зв'язаних рівнянь у частинних похідних, невідомими функціями в яких можуть бути: компоненти

вектора зміщень $u_i(M, t)$ ($i = 1, 2, 3$; $M = (x, y, z)$), компоненти тензора напруги $\sigma_{ij}(M, t)$ ($i, j = 1, 2, 3$), тиск $p(M, t)$, щільність $\rho(M, t)$, температура $T(M, t)$ та їх частинні похідні. Зв'язки між шуканими функціями визначаються фізичними законами.

У якості приклада сформулюємо задачу про напружено-деформований стан пружного тіла, закріпленого певним чином і яке знаходиться під дією зовнішніх сил. Необхідні для повного розв'язання початкові та граничні умови відображають характер взаємодії розглядуваного тіла з навколишнім середовищем і формуються у вигляді співвідношень, які задають зміщення, напруги або їх комбінації на межі середовища.

Виходитимемо з постановки крайових задач теорії пружності в зміщеннях. Проекції вектора пружних зсувів $\mathbf{u} = (u, v, w)$ визначаються із системи рівнянь руху Ламе

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu e_x + \Delta u = \frac{\rho}{G} u_{tt}, \\ \mu e_y + \Delta v = \frac{\rho}{G} v_{tt}, \\ \mu e_z + \Delta w = \frac{\rho}{G} w_{tt}, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \mu = \frac{1}{(1-2\nu)}, \\ G = \frac{E}{2(1+\nu)}, \\ e = u_x + v_y + w_z \end{array} \right. \quad (4.1)$$

де ν – коефіцієнт Пуассона.

Систему (4.1) можна зобразити у вигляді одного векторного рівняння

$$2 \frac{1-\nu}{1-2\nu} \text{grad div } \mathbf{u} - \text{rot rot } \mathbf{u} = \frac{\rho}{G} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}. \quad (4.2)$$

Виділяють три **основні граничні задачі** – першу, другу та мішану.

1) У **першій граничній задачі** на поверхні задається вектор зовнішніх зусиль \mathbf{F} ; тоді для вектора пружних зміщень отримуємо рівняння

$$2G \left[\mathbf{n} \frac{\nu}{1-2\nu} \text{div } \mathbf{u} + (\mathbf{n} \cdot \text{grad } \mathbf{u}) + \frac{1}{2} \mathbf{n} \cdot \text{rot } \mathbf{u} \right]_S = \mathbf{F}. \quad (4.3)$$

2) У **другій граничній задачі** задається вектор зміщення \mathbf{U}

$$\mathbf{u}|_S = \mathbf{U}. \quad (4.4)$$

3) Основна **мішана задача** відповідає випадку, коли на частині S_1 граничної поверхні S задано зусилля, а на решті границі S_2 – вектор зміщень.

Задачі *теорії пружності* є одними з найскладніших у математичному відношенні серед граничних задач математичної фізики. Вони відносяться до типу *нейманівських* векторних граничних задач. Тут тісно взаємопов'язані дві проблеми:

- а) вивчення характеру функцій, що задовольняють основним диференціальним рівнянням;
- б) визначення довільних сталих і функцій, що входять до набору частинних розв'язків, за заданими граничними умовами.

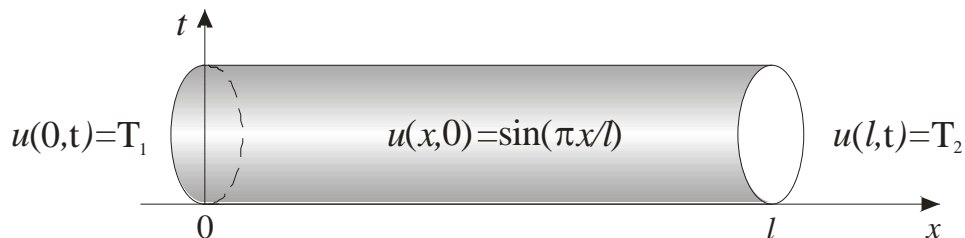
5. Введення безрозмірних змінних

Рівняння математичної фізики описують велику різноманітність всіляких процесів у різних галузях знання та людської діяльності (фізики, механіки, хімії, біології, економіки, інженерії, тощо). Рівняння у частинних похідних одного і того самого виду (структури) досить часто адекватно (у певному наближенні) описують процеси різної природи або характеру. У зв'язку з цим виникає необхідність *уніфікувати математичну постановку крайової задачі*, для розв'язання якої може бути застосований єдиний математичний підхід.

Зведення канонічної крайової задачі, що описує різні процеси, до одного математичного виду забезпечує процедура введення безрозмірних змінних. Процедура обезрозмірювання дозволяє з одного боку скоротити кількість геометричних, фізико-технічних або інших параметрів задачі (що полегшує її розв'язання), а з іншого боку – абстрагуватися від істинного фізичного або іншого змісту задачі (тобто отримати її суто математичне формулювання).

Приведення крайової задачі до безрозмірного виду. Перший підхід.

Розглянемо просту крайову задачу про поширення тепла в обмеженому стержні довжиною l за наявності граничних умов Діріхле. Нехай початкова температура стержня $u(x, 0) = \sin(\pi x/l)$, а на його кінцях підтримуються температури T_1 і T_2 , відповідно (див. рисунок).



Математична постановка цієї крайової задачі така:

$$\begin{aligned} u_t &= a^2 u_{xx}, & u(x, 0) &= \sin(\pi x/l) \\ u(0, t) &= T_1, & u(l, t) &= T_2 \end{aligned} \quad (5.1)$$

Поставимо завдання – записати еквівалентну постановку крайової задачі у безрозмірній формі. Для цього замість змінних u, x, t введемо нові змінні v, ξ, τ , відповідно.

Оскільки, взагалі кажучи, не обов'язково перетворювати всі змінні до безрозмірного виду, проведемо цю процедуру послідовно. Це дозволить виділити перетворення однієї чи двох змінних, якщо цього достатньо для спрощення задачі.

(а) **Перетворення залежної змінної** $u \rightarrow v$. Безрозмірну температуру можна ввести, наприклад, одним із таких способів:

$$v(x,t) = \frac{u(x,t)}{T_2} \quad \text{або} \quad v = \frac{u}{T_1}, \quad \text{або} \quad v = \frac{u - T_1}{T_2 - T_1}, \quad (5.2)$$

оскільки розмірність і чисельника, і знаменника [$^{\circ}\text{C}$].

Нові граничні умови для функції $v(x,t)$ при $x=0$ і $x=l$ приймуть найпростіший вид, якщо використати третю залежність (5.2). Після очевидних перетворень задачу (5.1) замінимо на еквівалентну

$$\begin{aligned} v_t &= a^2 v_{xx}, & 0 < x < l, & & 0 < t < \infty, \\ v(0,t) &= 0, & v(l,t) &= 1, & 0 < t < \infty, \\ v(x,0) &= \frac{\sin(\pi x/l) - T_1}{T_2 - T_1}, & 0 < x \leq l. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Цим завершується перший етап. Якщо можна їм обмежитися, то далі слід розв'язати задачу (5.3) для функції $v(x,t)$ і виконати зворотний перехід до вихідної змінної за формулою

$$u(x,t) = T_1 + (T_2 - T_1) \cdot v(x,t). \quad (5.4)$$

(б) **Перетворення просторової координати** $x \rightarrow \xi$. Оскільки $0 < x \leq l$, то покладемо $\xi = x/l$. Для запису в змінних (v, ξ, t) обчислимо необхідні похідні

$$v_x(x,t) = v_{\xi}(\xi,t) \frac{d\xi}{dx} = \frac{v_{\xi}(\xi,t)}{l}, \quad v_{xx}(x,t) = \frac{v_{\xi\xi}(\xi,t)}{l^2}$$

і отримуємо ще один варіант постановки крайової задачі, еквівалентної (5.1)

$$\begin{aligned} v_t &= \left(\frac{a}{l}\right)^2 v_{\xi\xi}, & 0 < \xi < 1, & & 0 < t < \infty, \\ v(0,t) &= 0, & v(1,t) &= 1, & 0 < t < \infty, \\ v(\xi,0) &= \frac{\sin \pi \xi - T_1}{T_2 - T_1}, & 0 \leq \xi \leq 1. \end{aligned} \quad (5.5)$$

(с) **Перетворення часу** $t \rightarrow \tau$. Обезрозмірювання останньої змінної (часу) пов'язане з найбільшими труднощами. Оскільки необхідно позбутися в (5.5) розмірного множника $(a/l)^2$, то виконаємо заміну $\tau = Ct$, де C – невідома константа, яку слід вибрати так, щоб обидві частини рівняння задачі (5.5) мали однакову розмірність.

Обчислюючи похідну $v_t(\xi,t) = v_{\tau}(\xi,\tau) \frac{d\tau}{dt} = C v_{\tau}$ і підставляючи її в рівняння (5.5), отримаємо $C v_{\tau} = (a/l)^2 v_{\xi\xi}$, тобто $C = [a/l]^2$. Отже, нова змінна

часу має вводитися співвідношенням $\tau = [a/l]^2 t$. Тепер остаточно можна перейти до безрозмірних змінних (v, ξ, t) :

$$\begin{aligned} v_t &= v_{\xi\xi}, & 0 < \xi < 1, & & 0 < \tau < \infty, \\ v(0, t) &= 0, & v(1, t) &= 1, & 0 < \tau < \infty, \\ v(\xi, 0) &= \varphi(\xi) \frac{\sin \pi\xi - T_1}{T_2 - T_1}, & 0 \leq \xi \leq 1. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Таким чином, внаслідок заміни змінних:

- (а) рівняння не містить фізичних параметрів,
- (б) граничні умови спростилися,
- (с) початкова умова змінилася несуттєво.
- (д) розв'язання вихідної задачі (5.1) отримаємо простим перерахунком розв'язання задачі (5.6) до розмірних змінних

$$u(x, t) = T_1 + (T_2 - T_1) \cdot v\left(\frac{x}{l}, \frac{a^2 \tau}{l^2}\right). \quad (5.7)$$

Зауваження.

1. Аналіз розмірності дозволяє контролювати правильність моделювання задачі.
2. Аналіз розмірностей дає можливість виключити з розгляду безліч параметрів та констант, які не зачіпають суті математичного завдання.
3. При комп'ютерному моделюванні подібних задач зручно розробити пакет програм для канонічних задач, а потім кожному користувачеві (фізику, механіку, хіміку, біологу, тощо) залишиться лише привести чисельні результати до потрібної розмірності.

Приклад 1. Перетворити крайову задачу для рівняння гіперболічного типу до безрозмірного виду

$$\begin{aligned} u_{tt} &= a^2 u_{xx}, & 0 < x \leq l, & & 0 < t < \infty, \\ u(0, t) &= u(l, t) = 0, & 0 < t < \infty, \\ u(x, 0) &= \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right) + 0,5 \sin\left(\frac{3\pi x}{l}\right), & u_t(x, 0) &= 0, & 0 < x \leq l. \end{aligned}$$

Можна не обезрозмірювати $u(x, t)$, якщо в якості нових змінних взяти $\xi = x/l$, $\tau = at/l$. В цьому випадку крайова задача зводиться до такої:

$$\begin{aligned} u_{\tau\tau} &= u_{\xi\xi}, & 0 < \xi < 1, & & 0 < \tau < \infty, \\ u(0, \tau) &= u(1, \tau) = 0, & 0 < \tau < \infty, \\ u(\xi, 0) &= \sin \pi\xi + 0,5 \sin 3\pi\xi, & u_\tau(\xi, 0) &= 0, & 0 < \xi \leq 1. \end{aligned}$$

Рекомендується переконатися (**самостійно!**), що розв'язком цієї задачі слугує функція

$$u(\xi, \tau) = \cos \pi \tau \sin \pi \xi + \frac{1}{2} \cos 3\pi \tau \sin 3\pi \xi,$$

яка при переході до координат x і t набуває вигляду:

$$u(x, t) = \cos \frac{\pi a t}{l} \sin \frac{\pi x}{l} + \frac{1}{2} \cos \frac{3\pi a t}{l} \sin \frac{3\pi x}{l}.$$

Другий підхід. До проблеми безрозмірювання можна підійти трохи інакше, акцентуючи увагу на тому, що інтегрування (диференціювання) розмірних величин незручно, оскільки призводить до нових розмірних результатів. Тому після того, як за фізичною моделлю поставлена крайова задача, її доцільно безрозмірити так, щоб під знаком похідної не було розмірних множників і змінних. Такий підхід (у чому ми переконаємось нижче) суттєво скорочує кількість параметрів.

Розглянемо задачу про поширення тепла в тонкому металевому стержні, що складається з двох частин (наприклад, мідної та залізної), контакт між якими носить ідеальний характер (див. рис. 2.7). Вважатимемо, що внутрішні джерела тепла відсутні, бічна поверхня теплоізолювана, а на торцях стержня відбувається теплообмін за *законом Стефана-Больцмана*.

Запишемо загальний вигляд рівняння теплопровідності для тривимірного неоднорідного тіла

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + F(x_1, x_2, x_3, t) \quad (5.8)$$

Оскільки стержень тонкий, а його бічна поверхня теплоізолювана, то можна моделювати фізичний процес одновимірним рівнянням ($x \equiv x_1$).

$$c(x)\rho(x) \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + F(x, t). \quad (5.9)$$

Оскільки внутрішні джерела тепла відсутні, то $F(x, t) = 0$. Стержень кусково-неоднорідний, тому моделюватимемо його за допомогою *контактної задачі*. Нехай обидві частини стержня – однорідні та ізотропні. Першу – мідну, з фізичними параметрами $c_{Cu}, \rho_{Cu}, \lambda_{Cu}$ на відрізок $0 < x \leq l_1$, будемо описувати функцією $u_{Cu}(x, t)$; другу – залізну, з параметрами $c_{Fe}, \rho_{Fe}, \lambda_{Fe}$ на відрізок $l_1 < x \leq l$, позначимо через $u_{Fe}(x, t)$.

Запишемо рівняння стану для кожного відрізка

$$\begin{aligned} c_{Cu}\rho_{Cu} \frac{\partial u_{Cu}}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_{Cu} \frac{\partial u_{Cu}}{\partial x} \right), & 0 < x \leq l_1 \\ c_{Fe}\rho_{Fe} \frac{\partial u_{Fe}}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_{Fe} \frac{\partial u_{Fe}}{\partial x} \right), & l_1 < x \leq l. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Умова ідеального контакту на межі розділу частин стержня моделюється у такий спосіб:

$$\lambda_{\text{Cu}} \left. \frac{\partial u_{\text{Cu}}}{\partial x} \right|_{x=l_1} = \lambda_{\text{Fe}} \left. \frac{\partial u_{\text{Fe}}}{\partial x} \right|_{x=l_1}, \quad u_{\text{Cu}} \Big|_{x=l_1} = u_{\text{Fe}} \Big|_{x=l_1} \quad (5.11)$$

Закон Стефана-Больцмана на кінцях стержня записується як:

$$\lambda_{\text{Cu}} \left. \frac{\partial u_{\text{Cu}}}{\partial x} \right|_{x=0} = -\alpha_{\text{Cu}} (u_{\text{Cu}} - \theta) - \beta_{\text{Cu}} (u_{\text{Cu}}^4 - \theta^4), \quad (5.12)$$

$$\lambda_{\text{Fe}} \left. \frac{\partial u_{\text{Fe}}}{\partial x} \right|_{x=l} = -\alpha_{\text{Fe}} (u_{\text{Fe}} - \theta) - \beta_{\text{Fe}} (u_{\text{Fe}}^4 - \theta^4).$$

У початковий момент часу

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad (5.13)$$

де $\varphi(x)$ – задана функція, θ – температура оточуючого середовища.

Таким чином, сформульована крайова задача (5.10-5.13) описується розмірними величинами: температурою u , коефіцієнтом теплопровідності λ , коефіцієнтом теплоємності c , щільністю ρ , координатою x і часом t . Їх розмірності у системі СІ:

$$\begin{aligned} [u] &= \text{К (кельвин)}; & [c] &= \text{Дж/кг} \cdot \text{К}; & [\lambda] &= \text{Дж/К} \cdot \text{м} \cdot \text{с}; \\ [\rho] &= \text{кг/м}^3; & [x] &= \text{м}; & [t] &= \text{с}. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Суть другого підходу полягає у тому, що будь-яку розмірну величину A можна зобразити у вигляді добутку $A \equiv A_* \cdot \tilde{A}$ т.зв. *характерної величини* A_* , яка завжди *стала*, але має розмірність величини A (тобто $[A_*] = [A]$, $A_* = \text{const}$) та безрозмірної величини \tilde{A} (тобто $[\tilde{A}] = 1$), яка змінюється за величиною як A . При цьому має сенс спочатку обезрозмірити диференційовні величини, оскільки не диференційовні величини надалі або зберігаються, або утворюють структурну безрозмірну величину.

У рівнянні (5.10) величини, що диференціюються u, λ, u_x . Нехай u_* – певна стала характерна температура ($u_* = \text{const}$). В якості останньої можна взяти, наприклад, температуру плавлення будь-якого металу, або температуру замерзання води і т.п. Змінною буде безрозмірна величина \tilde{u} . Тоді:

$$u = u_* \cdot \tilde{u}, \quad u_* = \text{const}, \quad [u_*] = [T] = \text{К}, \quad \tilde{u} \neq \text{const}, \quad [\tilde{u}] = 1.$$

Аналогічно,

$$x_1 = x_* \cdot \tilde{x} \equiv lx,$$

де $l = x_*$ – характерна довжина, $l = \text{const}$, $[l] = [x] = \text{м}$, $x \equiv \tilde{x}$ – безрозмірна довжина, $x \neq \text{const}$, $[x] = 1$;

$$t = t_* \cdot \tilde{t} \equiv t_* \cdot \tau,$$

де t_* – характерний час, $t_* = \text{const}$, $[t_*] = [t] = \text{с}$, $\tau \equiv \tilde{t}$ – безрозмірний час, $\tau \neq \text{const}$, $[\tau] = 1$;

$$\lambda = \lambda_* \cdot \tilde{\lambda},$$

де $\tilde{\lambda}$ – безрозмірний коефіцієнт теплопровідності.

Підставимо ці величини у рівняння (5.9):

$$c\rho \frac{u_*}{t_*} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tau} = \frac{\lambda_* u_*}{l^2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\tilde{\lambda} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} \right) \Rightarrow \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tau} = \frac{\lambda_* t_*}{c\rho l^2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\tilde{\lambda} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} \right).$$

Величина $\frac{\lambda_* t_*}{c\rho l^2} \equiv F_0$ називається *параметром Фур'є*. Нескладно переконатися, що її розмірність дорівнює одиниці. Дійсно,

$$[F_0] = \left[\frac{\lambda_* t_*}{c\rho l^2} \right] = \frac{\text{Дж}}{\text{К} \cdot \text{м} \cdot \text{с}} \cdot \text{с} \cdot \frac{\text{кг} \cdot \text{К}}{\text{Дж}} \cdot \frac{\text{м}^3}{\text{кг}} \cdot \frac{1}{\text{м}^2} = 1.$$

Внаслідок обезрозмірювання рівняння (5.10) набувають вигляду:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{u}_{\text{Cu}}}{\partial \tau} &= F_0^{(\text{Cu})} \frac{\partial}{\partial x} \left(\tilde{\lambda}_{\text{Cu}} \frac{\partial \tilde{u}_{\text{Cu}}}{\partial x} \right), & 0 \leq x \leq \frac{l_1}{l} \\ \frac{\partial \tilde{u}_{\text{Fe}}}{\partial \tau} &= F_0^{(\text{Fe})} \frac{\partial}{\partial x} \left(\tilde{\lambda}_{\text{Fe}} \frac{\partial \tilde{u}_{\text{Fe}}}{\partial x} \right), & \frac{l_1}{l} < x \leq 1. \end{aligned} \quad (5.15)$$

При цьому вони не містять: **(а)** жодної розмірної величини; **(б)** спростилися у порівнянні з (5.10), оскільки мають один критерій подібності. Видно, що кожній частині стержня відповідає свій параметр Фур'є, який є сталим для даної ділянки і безрозмірним.

Тепер обезрозміримо граничну умову контакту обох частин (5.11):

$$\frac{\lambda_* u_*}{l} \tilde{\lambda}_{\text{Cu}} \frac{\partial \tilde{u}_{\text{Cu}}}{\partial x} \Big|_{x=\frac{l_1}{l}} = \frac{\lambda_* u_*}{l} \tilde{\lambda}_{\text{Fe}} \frac{\partial \tilde{u}_{\text{Fe}}}{\partial x} \Big|_{x=\frac{l_1}{l}} \Rightarrow \tilde{\lambda}_{\text{Cu}} \frac{\partial \tilde{u}_{\text{Cu}}}{\partial x} \Big|_{x=\frac{l_1}{l}} = \tilde{\lambda}_{\text{Fe}} \frac{\partial \tilde{u}_{\text{Fe}}}{\partial x} \Big|_{x=\frac{l_1}{l}}. \quad (5.16)$$

Перетворимо послідовно обидва співвідношення у граничній умові (5.12). Наприклад, для першого маємо

$$\frac{\lambda_* u_*}{l} \tilde{\lambda}_{\text{Cu}} \frac{\partial \tilde{u}_{\text{Cu}}}{\partial x} \Big|_{x=0} = -\alpha_{\text{Cu}} u_* (\tilde{u}_{\text{Cu}} - \tilde{\theta}) - \beta_{\text{Cu}} u_*^4 (\tilde{u}_{\text{Cu}}^4 - \tilde{\theta}^4).$$

Збираючи сталі в одній частині, отримаємо:

$$\tilde{\lambda}_{\text{Cu}} \frac{\partial \tilde{u}_{\text{Cu}}}{\partial x} \Big|_{x=0} = -\frac{\alpha_{\text{Cu}} l}{\lambda_*} (\tilde{u}_{\text{Cu}} - \tilde{\theta}) - \frac{\beta_{\text{Cu}} l}{\lambda_*} u_*^3 (\tilde{u}_{\text{Cu}}^4 - \tilde{\theta}^4). \quad (5.17)$$

У фізиці вводяться характерні числа – критерії подібності теплових процесів: $\alpha l / \lambda_* \equiv Bi$ – число Біо та $\beta l u_*^3 / \lambda_* \equiv Nu$ – число Нуссельта. Це дозволяє з урахуванням (5.17) записати безрозмірний вид граничних умов (5.12)

$$\tilde{\lambda}_{Cu} \frac{\partial \tilde{u}_{Cu}}{\partial x} \Big|_{x=0} = \left[-Bi^{(Cu)}(\tilde{u}_{Cu} - \tilde{\theta}) - Nu^{(Cu)}(\tilde{u}_{Cu}^4 - \tilde{\theta}^4) \right]_{x=0}, \quad (5.18)$$

$$\tilde{\lambda}_{Fe} \frac{\partial \tilde{u}_{Fe}}{\partial x} \Big|_{x=1} = \left[-Bi^{(Fe)}(\tilde{u}_{Fe} - \tilde{\theta}) - Nu^{(Fe)}(\tilde{u}_{Fe}^4 - \tilde{\theta}^4) \right]_{x=1}.$$

Розв'язавши задачу (5.15)–(5.18) у безрозмірних змінних, отримаємо розв'язок як функцію безрозмірних аргументів та параметрів Фур'є, Біо, та Нуссельта:

$$\tilde{u} = \tilde{u}(x, \tau, \tilde{\lambda}_{Cu}, \tilde{\lambda}_{Fe}, F_0^{(Cu)}, F_0^{(Fe)}, Bi^{(Cu)}, Bi^{(Fe)}, Nu^{(Cu)}, Nu^{(Fe)}). \quad (5.19)$$

Остаточну відповідь вихідної задачі отримаємо в результаті переходу до розмірних величин за допомогою нескладних обернених перетворень.

Зауваження. Зазначимо на завершення, що вибір нових координат значною мірою залежить від досвіду та інтуїції дослідника.

6. Класифікація та питання коректності задач математичної фізики

Підведемо підсумки. Розглянувши низку класичних задач математичної фізики, ми з'ясували, що диференціальні рівняння (або системи диференціальних рівнянь) у частинних похідних описують стан деяких фізичних величин u у заданій області D простору змінних $(x_1, \dots, x_n) = M$ для всіх значень t , наступних за початковим моментом t_0 (зазвичай як відлік приймають $t_0 = 0$).

Додатково задаються деякі умови в області D при $t_0 = 0$, що дозволяють врахувати передісторію процесу в тій мірі, наскільки це є суттєвим для подальшого.

Крім того, на границі S області D при $t > 0$ повинні бути задані умови, що характеризують вплив процесів, що відбуваються поза цією областю і не враховуються даними рівняннями (системами). Зворотним впливом процесів, що відбуваються в D , на зовнішню область практично завжди нехтують.

Як вже зазначалося, такі додаткові умови поділяються на початкові та граничні. Відповідно до того, які з них використовуються, всі задачі математичної фізики можна поділити на **три основні типи**:

1. Задачі Коші, в яких задаються лише початкові умови. Отже, при $t_0 = 0$ може бути задано значення шуканої функції $u(M, 0)$ та її похідної $u_t(M, 0)$ у разі рівняння гіперболічного типу, або тільки $u(M, 0)$, якщо рівняння нале-

жить до параболічного типу. Якщо розглядати t як ще одну просторову координату, додаткову до простору змінних $(x_1, \dots, x_n) = M$ (де $x_1 \equiv x$; $x_2 \equiv y$; $x_3 \equiv z$), то умова $t=0$ визначає відповідно вісь X (у площині x, t), площину XY (у просторі x, y, t) або гіперплощину XYZ (у чотиривимірному просторі x, y, z, t), які ділять простір незалежних змінних (M, t) на півпростори. Початкові умови в цьому випадку відображають задання функції та її похідної (або самої функції) відповідно на прямій, площині або гіперплощині, а область, в якій шукається розв'язок, є одним із напівпросторів. Такі задачі описують *еволюційні процеси*. Задача Коші може бути узагальнена. У цьому випадку початкові умови задаються на деяких кривих площини ($n=1$), поверхнях простору ($n=2$), або гіперповерхнях гіперпростору ($n=3$).

2. Граничні задачі, в яких задаються *лише граничні умови*, тобто, певні співвідношення, які залежать від рішення та його похідних, і які набувають заданого значення на замкнутій границі S області D . Остання може сягати і в нескінченність. Тоді нескінченно віддалена точка розглядається як частина границі області, і умова на нескінченності є складовою граничних умов. Такі задачі мають місце при розгляді станів, що встановилися, і які описуються рівняннями еліптичного типу.

3. Крайові задачі, в яких задаються *і початкові, і граничні умови*.

Зауваження. Поряд із наведеною інколи використовується і наступна термінологія: задачі пункту **2** називають *крайовими* задачами, а пункту **3** – *мішаними*.

У цій ситуації доречно порушити питання: які додаткові умови можуть бути задані довільно? У найпростіших випадках відповідь на це питання підказують фізичні міркування. У більш складних випадках відповідь менш очевидна. У зв'язку з цим Ж. Адамар у 1932 р. ввів поняття коректності постановки задачі. Зупинимось на цьому питанні трохи докладніше.

Рішення будь-якої *коректно поставленої* фізичної задачі має бути визначеним і єдино можливим. Тому умови задачі мають бути несуперечливі і сформульовані таким чином, щоб забезпечити існування та однозначність (єдиність) її розв'язання.

Наприклад, в задачах хвильового типу, не можна включати в початкові умови ($t_0 = 0$) значення шуканої функції $u(M, 0) = \varphi(M)$ та обох її похідних $u_t(M, 0) = \psi(M)$, $u_{tt}(M, 0) = \chi(M)$, оскільки значення останньої (u_{tt}) повністю визначається першими двома (u, u_t) і може не збігатися з заданим довільним значенням $\chi(M)$. Не можна також у цій задачі обмежитися заданням тільки $u(M, 0)$, оскільки в цьому випадку отримаємо нескінченну множину розв'язків, відповідних різним початковим значенням $u_t(M, 0)$.

Таким чином, доведення *існування та єдиності* розв'язання задач математичної фізики є абсолютно необхідним.

Однак цього виявляється недостатньо, оскільки математичні моделі, що описують реальні фізичні процеси або явища, включають вихідні дані у

вигляді початкових та граничних умов. Ці величини є результатом вимірів (їх визначення залежить від класу точності вимірювальної апаратури), тому наближеними. Зазвичай похибка має випадковий характер, але виникає питання: як “малі” відхилення впливають на рішення? Якщо “малі” зміни вихідних даних спричиняють “великі” зміни у розв’язку, то однозначна фізична інтерпретація такого розв’язку, як правило, неможлива. Тому малим змінам даних має відповідати мінімальна зміна рішення. Цю властивість рішення називають *стійкістю*.

Отже, задача називається *коректно поставленою*, якщо її рішення існує, єдине і стійке щодо пропонованих початкових та граничних даних. У сукупності вони утворюють вихідні дані задачі, які позначатимемо літерою f . Оскільки коректність є однією з основних характеристик математичної моделі, дамо її загальне формулювання. Нехай U і F – метричні простори; $\hat{A}: U \rightarrow F$ – оператор, що діє з U в F . Розглянемо рівняння $\hat{A}u = f$, тобто, задачу відшукування елемента $u \in U$ по елементу $f \in F$, відомому, як правило, з похибкою.

Така постановка задачі називається коректною по Адамару або просто коректно поставленою на парі множин U і F , якщо виконуються такі умови:

- a) для кожного $f \in F$ існує рішення задачі $u \in U$;
- b) це рішення єдине;
- c) рішення неперервно залежить від f , тобто, з $f_n \rightarrow f$ (у метриці F) випливає збіжність відповідного рішення $u_n \rightarrow u$ (у метриці U).

З фізичної точки зору функції f , що задаються в коректно поставленій задачі, описують сукупність незалежних зв’язків, достатніх для того, щоб дати стійкий результат u .

З математичної точки зору коректність означає неперервність відображення даного простору функцій F на простір рішень U , тобто, оператор \hat{A} має неперервний обернений оператор $\hat{A}^{-1}: F \rightarrow U$.

Дослідження коректності задач математичної фізики є важливим і дуже складним завданням теорії. Зупинимось лише на деяких аспектах проблеми.

Зазначимо насамперед особливості доказової схеми: для твердження про некоректність якогось класу задач досить навести один контрприклад. Спираючись на це положення, Адамар навів приклад задачі Коші для рівняння еліптичного типу, яка має, і до того ж єдине, рішення, що є, однак, нестійким. Звідки і робиться висновок про те, що саме постановка задачі Коші для рівнянь еліптичного типу некоректна. Навпаки, для рівнянь гіперболічного та параболічного типів некоректна постановка граничних задач. Зі сказаного витікає, що є сенс розглядати тільки такі задачі:

1. Для рівнянь *гіперболічного типу*:

- a) *задачу Коші*, в якій областю D є весь простір, із заданими при $t=0$ функціями u і u_t ;

- б) *крайову задачу*, в якій граничні умови задаються на межі S області $D \subset R^n$ ($n = 1, 2, 3$), а початкові умови – ті самі, що і у пункті (а).
2. Для рівнянь *параболічного типу* – *крайову задачу*, в якій граничні умови задаються на межі S області $D \subset R^n$ ($n = 1, 2, 3$), а початкові умови зводяться до задання функції u при $t = 0$.
 3. Для рівнянь *еліптичного типу* – *граничну задачу* для області D , якщо межа області та функції, що задаються на ній, задовольняють деяким природним умовам гладкості.

Зазначимо, що при обговоренні *коректності* постановки цих задач замість розв'язання, як правило, здійснюють конструктивну побудову (підбір) рішення. Тоді підтвердження *єдиності* несе додаткове навантаження, оскільки виправдовує перший конструктивно-пошуковий етап. Завершальним етапом є підтвердження *стійкості*.

6.1. Методи розв'язання крайових задач

Для розв'язання крайових завдань розроблений цілий арсенал методів, кожен з яких має певні переваги. Натомість є й обмеження до застосування. Універсальних методів, як відомо, не існує, але навіть якби вони були створені, то складність і громіздкість звела б нанівець всю їх універсальність. Однак для кожного класу задач є найефективніші методи. Більшість методів, придатних для практичного використання, засновані на ідеї зведення рівнянь у частинних похідних до задач для звичайних диференціальних рівнянь.

Перерахуємо найбільш відомі методи

1. *Метод відокремлення змінних або метод Фур'є*. Крайова задача з n невідомими змінними “розщеплюється” у разі повного розділення змінних на n звичайних диференціальних рівнянь. При частковому ж розділенні змінних вихідне рівняння зводиться до кількох рівнянь у частинних похідних, але вже з меншою кількістю незалежних змінних.

2. *Метод розвинення за власними функціями та його модифікації* (зокрема, *метод суперпозиції та метод однорідних рішень*). Розв'язок крайової задачі шукається як розвинення (рядів – у разі системи диференціальних рівнянь у приватних похідних) за власними функціями. Останні знаходять розв'язуючи задачу на власні значення, яка формується з вихідної задачі, як правило, методом Фур'є.

3. *Метод інтегральних перетворень*. Вплив одновимірного інтегрального перетворення на рівняння у частинних похідних з n незалежними змінними приводить до рівняння з $(n - 1)$ незалежними змінними, тобто, знижує розмірність на одиницю. Внаслідок цього рівняння з двома незалежними змінними можна звести до звичайного диференціального рівняння.

4. *Метод перетворення координат*. Вихідна крайова задача зводиться до більш простої за допомогою відповідного перетворення координат (наприклад, повороту координатних осей, тощо).

5. *Методи теорії збурень, що включають різновиди методу малого параметра.* Вихідна нелінійна (або лінійна) задача, що містить малі параметри, зводиться до послідовності лінійних задач або послідовності задач, методи розв'язання яких відомі. Дані послідовності апроксимують розв'язок вихідної задачі з необхідною точністю.

6. *Метод функції Гріна.* Крайові умови (початкові та граничні) замінюються системою найпростіших впливів. Задача розв'язується для кожного такого впливу. Повне розв'язання вихідної задачі знаходять як результат суперпозиції елементарних розв'язків.

7. *Метод інтегральних рівнянь.* Крайова задача для рівняння у частинних похідних зводиться до еквівалентного інтегрального рівняння, яке і розв'язується.

8. *Метод конформних відображень.* Двовимірні крайові задачі зі складними границями за допомогою конформного відображення можна звести до більш простих.

9. *Варіаційні методи та їх узагальнення.* (Наприклад, метод R-функцій (функцій Рвачова)). Замість рівняння у частинних похідних розв'язується деяка задача мінімізації. При цьому використовується той факт, що функція, що доставляє мінімум деякому функціоналу, є водночас розв'язком вихідного рівняння.

10. *Чисельні методи* (різницеві, скінченних елементів, сплайнові та ін.). Вихідна крайова задача апроксимується системою різницевих рівнянь. Або апроксимація розв'язку здійснюється спеціальними поліноміальними поверхнями.

Зрозуміло, що перераховані методи далеко не вичерпують усіх методів, що застосовуються в математичній фізиці. Крім того, у багатьох випадках використовуються не самі методи у чистому виді, а їх певні комбінації.

Якісно новий рівень розв'язання задач класичної математичної фізики пов'язаний з прогресом обчислювальних технологій. Сучасні методи комп'ютерного моделювання відкрили принципово нові можливості кількісної обробки інформації. При цьому з'ясувалося, що постановка багатьох задач оптимального керування та планування, підсумовування рядів з неточно заданими коефіцієнтами, мінімізації функціоналів і деяких інших не вкладаються в постановки задач доказової математики, яка спирається на "принцип абсолютної точності", що лежить в основі формальної логіки Аристотеля.

Для успішного застосування комп'ютерного моделювання потрібно мати: (1) математичну модель, яка описує коректно поставлену задачу; (2) стійкий метод розв'язання відповідної математичної задачі; (3) стійкий алгоритм, розроблений на базі цього методу; (4) програму, що реалізує цей алгоритм.

Розв'язування методами обчислювальної техніки нестійких задач з неточними вихідними даними відтворюють нестійкі результати. Теорія та методи розв'язання некоректних задач почали інтенсивно розвиватися після основоположних робіт А.Н. Тихонова, який запровадив поняття наближеного розв'язання таких задач. У розв'язку за Тихоновим закладається поняття

регулюючого алгоритму, як способу наближеного розв'язання некоректних задач.

Основні прийоми розв'язання типових крайових задач для диференціальних рівнянь у частинних похідних за допомогою програмних пакетів систем комп'ютерної алгебри Wolfram Mathematica та Maple ми з вами і відпрацьовуємо у нашому курсі “Методи математичної фізики”.

Література

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1977. – 736 с.
2. Владимиров В.С., Жаринов В.В. Уравнения математической физики. – М.: Физматлит, 2003. – 400 с.
3. Шалдырван В.А., Герасимчук В.С. Методы математической физики. – М.: Вузовская книга, 2006. – 512 с.
4. Перестюк М.О., Маринець В.В. Теорія рівнянь математичної фізики. – Київ: Либідь, 2001. – 333 с.
5. Івасишен С.Д., Лавренчук В.П., Івасюк Г.П., Рева Н.В. Основи класичної теорії рівнянь математичної фізики. – Чернівці: Вид. дім «Родовід», 2015.–358 с.
6. Вірченко Н.О. Основні методи розв'язання задач математичної фізики. – К.: Інрес: Воля, 2006. – 332 с.

Зміст

| | |
|---|----|
| 1. Хвильові процеси (рівняння гіперболічного типу) | 3 |
| 1.1. Виведення рівняння поперечних коливань струни | 4 |
| 1.2. Крайові умови для рівнянь гіперболічного типу | 8 |
| 1.3. Багатовимірні хвильові рівняння | 12 |
| 2. Процеси розповсюдження тепла (рівняння параболічного типу) | 13 |
| 2.1. Виведення одновимірного рівняння теплопровідності | 13 |
| 2.2. Крайові умови в задачах дифузії та теплопровідності | 17 |
| 2.3. Багатовимірні рівняння дифузійного типу | 20 |
| 3. Стаціонарні процеси (рівняння еліптичного типу) | 21 |
| 3.1. Крайові умови для рівнянь еліптичного типу | 22 |
| 4. Системи рівнянь у частинних похідних | 25 |
| 5. Введення безрозмірних змінних | 27 |
| 6. Класифікація та питання коректності задач математичної фізики | 33 |
| 6.1. Методи розв'язання крайових задач | 36 |